

www.mientayvn.com

Dịch tiếng anh chuyên ngành khoa học tự nhiên và kĩ thuật.

Dịch các bài giảng trong chương trình học liệu mở của học viện MIT, Yale.

Tìm và dịch tài liệu phục vụ cho sinh viên làm seminar, luận văn.

Tại sao mọi thứ đều miễn phí và chuyên nghiệp ???

Trao đổi trực tuyến tại:

http://www.mientayvn.com/chat_box_li.html

Bạn đánh máy này check lại kiểm tra.

Chỉnh lại

THI VÀ TRẮNG

Bài tập 10.1

$$\nabla^2 V + \frac{\partial L}{\partial t} = \nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot A) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot A) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\nabla^2 A - \nabla L = \nabla^2 A - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla \left((\nabla \cdot A) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \mu_0 J$$

Bài tập 10.2

$$(a) W = 1/2 \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau. \text{ At } t_1 = d/c, x \geq d = ct_1, \text{ do đó } E = 0, B = 0, \text{ và do đó } \boxed{W(t_1) = 0}$$

$$\text{Tại } T_2 = (d+h)/c, ct_2 = d+h:$$

$$E = -\frac{\mu_0 \alpha}{2} (d+h-x) \hat{z}, B = \frac{1}{c} \frac{\mu_0 \alpha}{2} (d+h-x) \hat{y},$$

$$\text{Do đó: } B^2 = \frac{1}{c^2} E^2, \text{ và } \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \epsilon_0 \left(E^2 + \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{c^2} E^2 \right) = 2\epsilon_0 E^2$$

Do:

$$W(t_2) = \frac{1}{2} (2\epsilon_0) \frac{\mu_0^2 \alpha^2}{4} \int_d^{(d+h)} (d+h-x)^2 dx (l\omega) = \frac{\epsilon_0 \mu_0^2 \alpha^2 l\omega}{4} \left[-\frac{(d+h-x)^3}{3} \right]_d^{d+h} \\ = \boxed{\frac{\epsilon_0 \mu_0^2 \alpha^2 l\omega h^3}{12}}$$

$$(b) S(x) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 [-\hat{z} \times (\pm \hat{y})] = \pm \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \hat{x} = \boxed{\pm \frac{\mu_0 \alpha^2}{4c} (ct - |x|)^2 \hat{x}}$$

(Do u c ng đ i v i $x > 0$, nh đ i đây). Đ i v i $|x| > ct, S = 0$

Vì v y năng l i ng trên m t đ n v th i gian vào h p trong kho ng th i gian này là:

$$\frac{dW}{dt} = P = \int S(d) \cdot da = \boxed{\frac{\mu_0 \alpha^2 l\omega}{4c} (ct-d)^2}.$$

Chú ý r ng không có năng l i ng ch y lên phía trên, b i vì $S(d+h) = 0$

$$(c) W = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \frac{\mu_0 \alpha^2 l\omega}{4c} \int_{d/c}^{(d+h)/c} (ct-d)^2 = \frac{\mu_0 \alpha^2 l\omega}{4c} \left[\frac{(ct-d)^3}{3c} \right]_{d/c}^{(d+h)/c} = \boxed{\frac{\mu_0 \alpha^2 l\omega h^3}{12c}}$$

B i vì $1/c^2 = \mu_0 \epsilon_0$, k t qu này phù h p v i bài gi i câu a.

Bài tập 10.3

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

Đây là tập hợp các thí nghiệm để kiểm tra tính đúng đắn của lý thuyết trường điện từ cổ điển. (Tất nhiên, $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$, $A = 0$ sẽ là lựa chọn thông thường). Hàm mật độ $\rho = q\delta^3(r)$; $J = 0$.

Bài tập 10.4

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -A_0 \cos(kx - \omega t) \hat{y}(-\omega) = \boxed{A_0 \omega \cos(kx - \omega t) \hat{y}},$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \hat{z} \frac{\partial}{\partial x} [A_0 \sin(kx - \omega t)] = \boxed{A_0 k \cos(kx - \omega t) \hat{z}}$$

Do đó: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{z} \frac{\partial}{\partial x} [-A_0 \omega \cos(kx - \omega t)] = -A_0 \omega \sin(kx - \omega t) \hat{z}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = A_0 \omega k \sin(kx - \omega t) \hat{z},$$

Do đó: $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial x} [A_0 k \cos(kx - \omega t)] = A_0 k^2 \sin(kx - \omega t) \hat{y}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = A_0 \omega^2 \sin(kx - \omega t) \hat{y}.$$

Do đó $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ thì ta có $\boxed{k^2 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}$ hay $c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$, $\boxed{\omega = ck}$.

Bài tập 10.5

$$V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 - \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \right) = \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}}; \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qt}{r^2} \hat{r} + \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} qt \right) \left(-\frac{1}{r^2} \hat{r} \right) = 0$$

Hàm gauge này chuyển các thí nghiệm cổ điển bài tập 10.3 thành trường điện từ cổ điển.

Bài tập 10.6

Ví dụ 10.1: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0; \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ Coulomb và Lorentz.

Bài 10.3: $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = -\epsilon_0 \delta^3(r); \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ Không cái nào.

Bài 10.4: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0; \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ Cả hai.

Bài tập 10.7

Giả sử $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$. (Đặt $\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = \phi$ - hàm chia bất kỳ nào đó). Chúng ta cần chọn

λ sao cho $\mathbf{A}'$ và V (phương trình 10.7) tuân theo $\nabla \cdot \mathbf{A}' = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V'}{\partial t}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V'}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \lambda + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = \phi + \square \lambda$$

Biểu thức này sẽ bằng không nếu chúng ta chọn λ thỏa mãn phương trình $\square^2 \lambda = -\phi$, qua giải thuyết (và thực nghiệm) chúng ta biết cách giải.

Chúng ta có thể tìm gauge để $V' = 0$, chỉ bằng cách chọn $\lambda = \int_0^t V dt'$. Nói chung, chúng ta

không thể chọn $\mathbf{A} = 0$ - điều này sẽ làm cho $\mathbf{B} = 0$. [Tìm một hàm gauge như thế thông qua là biểu thức của $\mathbf{A}$ bằng $-\nabla \lambda$, và chúng ta biết rằng hàm vector không thể được biểu diễn theo gradient - khi chúng ngẫu nhiên có curl bằng không, còn $\mathbf{A}$ khác không.]

Bài tập 10.8

Tính quy tắc tích:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) + \mathbf{J} \cdot \left(\nabla \frac{1}{\mathcal{R}} \right), \quad \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla' \cdot \mathbf{J}) + \mathbf{J} \cdot \left(\nabla' \frac{1}{\mathcal{R}} \right).$$

Nhớ rằng: $\nabla \frac{1}{r} = \nabla' \frac{1}{r}$ trong khi $\mathcal{R} = r - r'$ do đó:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \left(\nabla' \frac{1}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) + \frac{1}{\mathcal{R}} (\nabla' \cdot \mathbf{J}) - \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\mathcal{R}} \right)$$

Nhớ rằng:
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = \frac{\partial J_x}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial z},$$

Và:
$$\frac{\partial t_r}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial t_r}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \frac{\partial t_r}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial z}$$

Do đó:
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{c} \left[\frac{\partial J_x}{\partial t_r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial t_r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial t_r} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t_r} \cdot (\nabla \mathcal{R}).$$

Tổng cộng lại:
$$\nabla' \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t_r} \cdot (\nabla' \mathcal{R})$$

[Sẽ hướng dẫn xuất hiện khi chúng ta lấy vi phân theo r' , và dùng phép trình liên tiếp]

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}} \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t_r} \cdot (\nabla' \mathcal{R}) \right] + \frac{1}{\mathcal{R}} \left[-\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t_r} \cdot (\nabla' \mathcal{R}) \right] - \nabla' \cdot \frac{\mathbf{J}}{\mathcal{R}} = -\frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\mathcal{R}} \right)$$

(Hai số hạng còn lại triệt tiêu vì $\nabla \mathcal{R} = -\nabla' \mathcal{R}$). Do đó:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho}{\mathcal{R}} d\tau - \int \nabla' \cdot \left(\frac{\mathbf{J}}{\mathcal{R}} \right) d\tau \right] = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \int \frac{\rho}{\mathcal{R}} d\tau \right] - \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{J}}{\mathcal{R}} \cdot d\mathbf{a}.$$

Số hạng cuối trên bề mặt tại vô cùng, đó $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, vì vậy nó bằng không. Do đó

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Bài tập 10.9

(a) Như trong bài tập 10.2 với $t < r/c, \mathbf{A} = \mathbf{0}$; với $t < r/c$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(r, t) &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \right) 2 \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \frac{k(t - \sqrt{r^2 + z^2}/c)}{\sqrt{r^2 + z^2}} dz = \frac{\mu_0 k}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \left\{ t \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{c} \int_0^{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} dz \right\} \\ &= \left(\frac{\mu_0 k}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \right) \left[t \ln \left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - r^2}}{r} \right) - \frac{1}{c} \sqrt{(ct)^2 - r^2} \right]. \text{ Vì vậy,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= -\frac{\mu_0 k}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \left\{ \ln \left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - r^2}}{r} \right) + t \left(\frac{r}{ct + \sqrt{(ct)^2 - r^2}} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \left(c + \frac{1}{2} \frac{2c^2 t}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \right) - \frac{1}{2c} \frac{2c^2 t}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \right\} \\ &= -\frac{\mu_0 k}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \left\{ \ln \left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - r^2}}{r} \right) + \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} - \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \right\} \\ &= \boxed{-\frac{\mu_0 k}{2\pi} \ln \left(\frac{ct + \sqrt{(ct)^2 - r^2}}{r} \right) \hat{\mathbf{z}}} \quad (\text{học 0 với } t < r/c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(r,t) &= -\frac{\partial A_z}{\partial r} \\
 &= -\frac{\mu_0 k}{2\pi} \left\{ t \left(\frac{r}{ct + \sqrt{(ct)^2 - r^2}} \right) \left[\frac{r \frac{1}{2} \frac{(-2r)}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} - ct - \sqrt{(ct)^2 - r^2}}{r^2} \right] - \frac{1}{2c} \frac{(-2r)}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \right\} \hat{\phi} \\
 &= -\frac{\mu_0 k}{2\pi} \left\{ \frac{-ct^2}{r\sqrt{(ct)^2 - r^2}} + \frac{r}{c\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \right\} \hat{\phi} = -\frac{\mu_0 k}{2\pi} \frac{(-c^2 t^2 + r^2)}{rc\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \hat{\phi} \\
 &= \frac{\mu_0 k}{2\pi rc} \sqrt{(ct)^2 - r^2} \hat{\phi}
 \end{aligned}$$

(b) $\mathbf{A}(r,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_0 \delta(t - \mathfrak{R}/c)}{\mathfrak{R}} dz$ nhĩ ng $\mathfrak{R} = \sqrt{r^2 + z^2}$, vì vỹ biũu thĩ c dũũ i dũũ tích phân là hàm chũũn theo z:

$$\mathbf{A}(r,t) = \left(\frac{\mu_0 q_0}{4\pi} \hat{z} \right) 2 \int_0^{\infty} \frac{\delta(t - \mathfrak{R}/c)}{\mathfrak{R}} dz$$

Vĩ i $z = \sqrt{\mathfrak{R}^2 - r^2} \Rightarrow dz = \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\mathfrak{R}^2 - r^2}} = \frac{\mathfrak{R} d\mathfrak{R}}{\sqrt{\mathfrak{R}^2 - r^2}}$ và $z = 0 \Rightarrow \mathfrak{R} = r, z = \infty, \Rightarrow \mathfrak{R} = \infty$, do đó:

$$\mathbf{A}(r,t) = \frac{\mu_0 q_0}{4\pi} \hat{z} \int_r^{\infty} \frac{1}{r} \delta\left(t - \frac{\mathfrak{R}}{c}\right) \frac{\mathfrak{R} d\mathfrak{R}}{\sqrt{\mathfrak{R}^2 - r^2}}$$

Vĩ i $\delta(t - \mathfrak{R}/c) = c\delta(\mathfrak{R} - ct)$ (ví dũũ 1.15); do đó $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 q_0}{2\pi} \hat{z} \int_r^{\infty} \frac{\delta(\mathfrak{R} - ct)}{\sqrt{\mathfrak{R}^2 - r^2}} d\mathfrak{R}$, vì vỹ y:

$$\mathbf{A}(r,t) = \frac{\mu_0 q_0}{2\pi} c \frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}} \hat{z} \text{ (hoĩ c 0 nũũ } ct < r);$$

$$E(r,t) = -\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{\mu_0 q_0 c}{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2c^2 t}{[(ct)^2 - r^2]^{3/2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 q_0 c^3 t}{2\pi [(ct)^2 - r^2]^{3/2}} \hat{z} \text{ (hoĩ c 0 nũũ } t < r/c)$$

$$\mathbf{B}(r,t) = -\frac{\partial A_z}{\partial t} \hat{\phi} = -\frac{\mu_0 q_0 c}{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{-2r}{[(ct)^2 - r^2]^{3/2}} \hat{\phi} = \frac{-\mu_0 q_0 ct}{2\pi [(ct)^2 - r^2]^{3/2}} \hat{\phi} \text{ (hoĩ c 0 nũũ } t < r/c)$$

Bài tập 10.10

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(t_r)}{R} d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 k}{4\pi} \int \frac{(t - R/c)}{R} dI = \frac{\mu_0 k}{4\pi} \left\{ t \int \frac{dI}{R} - \frac{1}{c} \int dI \right\}.$$

Nhưng để tính vòng kín hoàn toàn $\int dI = 0$ do đó $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 k t}{4\pi} \left\{ \frac{1}{a} \int_1 dI + \frac{1}{b} \int_2 dI + 2\hat{x} \int_a^b \frac{dx}{x} \right\}.$

đây $\int_1 dI = 2a\hat{x}$ (vòng bên trong), $\int_2 dI = -2b\hat{x}$ (vòng bên ngoài), vì vậy:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 k t}{4\pi} \left[\frac{1}{a} (2a) + \frac{1}{b} (-2b) + 2 \ln(b/a) \right] \hat{x} \Rightarrow \boxed{\mathbf{A} = \frac{\mu_0 k t}{2\pi} \ln(b/a) \hat{x}} \quad E = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \boxed{-\frac{\mu_0 k}{2\pi} \ln(b/a) \hat{x}}.$$

Tuy nhiên thay đổi cảm ứng điện từ. Bởi vì chúng ta chỉ biết $\mathbf{A}$ thì mới tìm được $\mathbf{B}$, chúng ta không thể tính $\nabla \times \mathbf{A}$ để tìm $\mathbf{B}$.

Bài tập 10.11

Trong trường hợp này $\dot{\rho}(r, t) = \dot{\rho}(r, 0)$ và $\mathbf{J}(r, t) = 0$, vì vậy phương trình 10.29 $\Rightarrow$

$$E(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(r', 0) + \dot{\rho}(r', 0)t_r}{R^2} + \frac{\dot{\rho}(r', 0)}{cR} \right] \hat{R} dT', \quad \text{Nhưng } t_r = t - \frac{R}{c} \quad (\text{phương trình}$$

(10.18), vì vậy

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(r', 0) + \dot{\rho}(r', 0)t}{R^2} + \frac{\dot{\rho}(r', 0)(R/c)}{R^2} + \frac{\dot{\rho}(r', 0)}{cR} \right] \hat{R} dT' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\dot{\rho}(r', t)}{R^2} \hat{R} dT'$$

Bài tập 10.12

Trong phép gần đúng này, chúng ta bỏ các đạo hàm bậc cao của $\mathbf{J}$, vì vậy $\dot{\mathbf{J}}(t_r) = \dot{\mathbf{J}}(t)$ và phương trình 10.31 trở thành:

$$\mathbf{B}(r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R^2} \left[\mathbf{J}(r', t) + (t_r - t)\dot{\mathbf{J}}(r', t) + \frac{R}{c}\dot{\mathbf{J}}(r', t) \right] \times \hat{R} dT' \quad \text{nhưng } t_r - t = -\frac{R}{c} \quad (\text{phương trình}$$

10.18), vì vậy

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(r', t) \times \hat{R}}{R^2} dT'$$

Bài tập 10.13

Từ thí nghiệm, định tính thấy rằng $r(t) = a[\cos(\omega t)\hat{x} + \sin(\omega t)\hat{y}]$, vì vậy $v(t) = \omega a[-\sin(\omega t)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y}]$. Do đó, $\mathcal{R} = z\hat{z} - a[\cos(\omega t_r)\hat{x} + \sin(\omega t_r)\hat{y}]$ và $\mathcal{R}^2 = z^2 + a^2$ (tuyệt nhiên) và $\mathcal{R} = \sqrt{z^2 + a^2}$.

$$\hat{\mathcal{R}} \cdot v = \frac{1}{\mathcal{R}}(\mathcal{R} \cdot v) = \frac{1}{\mathcal{R}}\{-\omega a^2[-\sin(\omega t_r)\cos(\omega t_r) + \sin(\omega t_r)\cos(\omega t_r)]\} = 0 \text{ do đó } \left(1 - \frac{\hat{\mathcal{R}} \cdot v}{c}\right) = 1.$$

Do đó

$$V(z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{z^2 + a^2}} \quad ; \quad A(z, t) = \frac{q\omega a}{4\pi\epsilon_0 c^2 \sqrt{z^2 + a^2}} [-\sin(\omega t_r)\hat{x} + \cos(\omega t_r)\hat{y}] \quad \text{đây}$$

$$t_r = t - \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{c}.$$

Bài tập 10.14

Sử dụng định lý cơ bản hai trong phép biến đổi Lorentz (9.98) là:

$$\begin{aligned} I &= c^4 t^2 - 2c^2 t(r \cdot v) + (r \cdot v)^2 + c^2 r^2 + c^4 t^2 - v^2 r^2 + v^2 c^2 t^2 \\ &= (r \cdot v)^2 + (c^2 - v^2)r^2 + c^2(vt)^2 - 2c^2(r \cdot vt). \text{ Thay vào } vt = r - R \\ &= (r \cdot v)^2 + (c^2 - v^2)r^2 + c^2(r^2 + R^2 - 2r \cdot R) - 2c^2(r^2 - r \cdot R) = (r \cdot v)^2 - r^2 v^2 + c^2 R^2 \end{aligned}$$

Như vậy:

$$\begin{aligned} (r \cdot v)^2 - r^2 v^2 &= ((R + vt) \cdot v)^2 - (R + vt)^2 v^2 \\ &= (R \cdot v)^2 + v^4 t^2 + 2(R \cdot v)v^2 t - R^2 v^2 - 2(R \cdot v)tv^2 - v^2 t^2 v^2 \\ &= (R \cdot v)^2 - R^2 v^2 = R^2 v^2 \cos^2 \theta - R^2 v^2 = -R^2 v^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= -R^2 v^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Thành ra :

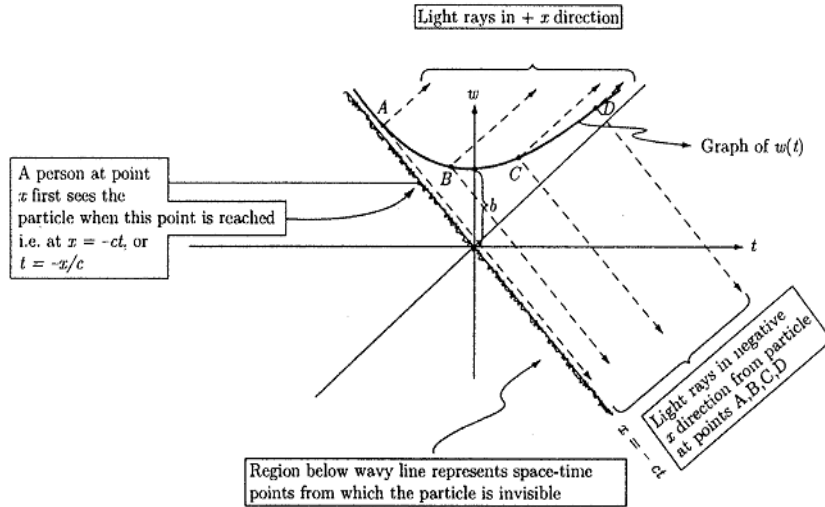
$$I = -R^2 v^2 \sin^2 \theta + c^2 R^2 = c^2 R^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)$$

Do đó:

$$V(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta}}. \quad \text{Qed}$$

Bài tập 10.15

Như đã thấy, tốc độ đi của hạt cho trước, hạt sẽ đi nhanh mãi mãi – làm nó biến mất sẽ phải đi nhanh hơn ánh sáng.

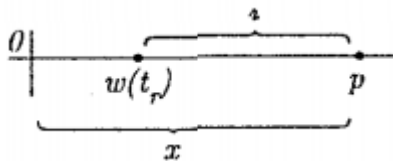


Bài tập 10.16

Đầu tiên tính t_r :

$$t_r = t - |r - W(t_r)|/c$$

$$\Rightarrow -c(t_r - t) = x - \sqrt{b^2 + c^2 t_r^2} \Rightarrow c(t_r - t) + x = \sqrt{b^2 + c^2 t_r^2};$$



$$2ct_r(x - ct) + (x^2 - 2xct + c^2 t^2) = b^2;$$

$$2ct_r(x - ct) = b^2 - (x - ct)^2, \text{ hence } t_r = \frac{b^2 - (x - ct)^2}{2c(x - ct)}.$$

Bây giờ :

$$V(x, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(\Re c - \Re. v)}, \text{ và } \Re c = \Re. v = \Re(c - v), \Re = c(t - t_r)$$

$$v = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 t_r^2}} c^2 t_r = \frac{c^2 t_r}{c(t_r - t) + x} = \frac{c^2 t_r}{ct_r + (x - ct)}; (c - v) = \frac{c^2 t_r + c(x - ct) - c^2 t_r}{ct_r + (x - ct)} = \frac{c(x - ct)}{ct_r + (x - ct)};$$

$$\Re_C - \Re_v = \frac{c(t - t_r)c(x - ct)}{ct_r + (x - ct)} = \frac{c^2(t - t_r)(x - ct)}{ct_r + (x - ct)}; ct_r + (x - ct) = \frac{b^2 - (x - ct)^2}{2(x - ct)} + (x - ct) = \frac{b^2 + (c - ct)^2}{2(x - ct)};$$

$$t - t_r = \frac{2ct(x - ct) - b^2 + (x - ct)^2}{2c(x - ct)} = \frac{(x - ct)(x + ct) - b^2}{2c(x - ct)} = \frac{(x^2 - c^2 t^2 - b^2)}{2c(x - ct)} \dots$$

$$\frac{1}{\Re_C - \Re_v} = \left[\frac{b^2 + (x - ct)^2}{2(x - ct)} \right] \frac{1}{c^2(x - ct)} \frac{2c(x - ct)}{[2ct(x - ct) - b^2 + (x - ct)^2]} = \frac{b^2 + (x - ct)^2}{c(x - ct)[2ct(x - ct) - b^2 + (x - ct)^2]}.$$

Số hạng trong ngoặc vuông để nhân bình

$$(2ct + x - ct)(x - ct) - b^2 = (x + ct)(x - ct) - b^2 = x^2 - c^2 t^2 - b^2.$$

Do đó:
$$V(x, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b^2 + (x - ct)^2}{(x - ct)(x^2 - c^2 t^2 - b^2)}.$$

Trong khi ấy

$$A = \frac{V}{c^2} v = \frac{c^2 t_r}{ct_r + (x - ct)} \frac{V}{c^2} \hat{x} = \left[\frac{b^2 - (x - ct)^2}{2c(x - ct)} \right] \frac{2(x - ct)}{b^2 + (x - ct)^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b^2 + (x - ct)^2}{(x - ct)(x^2 - c^2 t^2 - b^2)} \hat{x}$$

$$= \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{b^2 + (x - ct)^2}{(x - ct)(x^2 - c^2 t^2 - b^2)} \hat{x}}.$$

Bài tập 10.17

Tính phương trình 10.33, $c(t - t_r) = \Re \Rightarrow c^2(t - t_r)^2 = \Re^2 = \Re.\Re$. Lấy vi phân theo t:

$$2c^2(t - t_r)(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}) = 2\Re \cdot \frac{\partial \Re}{\partial t}, \quad \text{hoặc} \quad c\Re(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}) = \Re \cdot \frac{\partial \Re}{\partial t}. \text{ Bây giờ } \Re = r - w(t_r), \quad \text{do đó}$$

$$\frac{\partial \Re}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial w}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial t} = -v \frac{\partial t_r}{\partial t}; \quad c\Re \left(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}\right) = -\Re.v \frac{\partial t_r}{\partial t}; \quad c\Re = \frac{\partial t_r}{\partial t} (c\Re - \Re.v) = \frac{\partial t_r}{\partial t} (\Re.u) \text{ (phương}$$

trình 10.64), và do đó $\frac{\partial t_r}{\partial t} = \frac{c\Re}{\Re.u} \text{.qed}$

Vì phương trình 10.40 nói: $\mathbf{A}(r, t) = \frac{v}{c^2} V(r, t)$, do đó:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} V + v \frac{\partial V}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial v}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial t} V + v \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

$$= \frac{1}{c^2} \left[a \frac{\partial t_r}{\partial t} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{\mathfrak{R}.u} + v \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-qc}{(\mathfrak{R}.u)^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathfrak{R}c - \mathfrak{R}.v) \right]$$

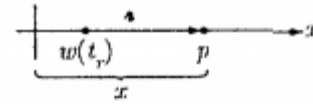
$$= \frac{1}{c^2} \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a}{\mathfrak{R}.u} \frac{\partial t_r}{\partial t} - \frac{v}{(\mathfrak{R}.v)^2} \left(c \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} \cdot v - \mathfrak{R} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right].$$

Nhưng : $\mathfrak{R} = c(t - t_r) \Rightarrow \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} = c(1 - \frac{\partial t_r}{\partial t}), \mathfrak{R} = r - w(t_r) \Rightarrow \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} = -v \frac{\partial t_r}{\partial t}$ (như trên) và

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial t} = a \frac{\partial t_r}{\partial t}.$$

Bài tập 10.18

$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathfrak{R}}{(\mathfrak{R}.u)^3} \left[(c^2 - v^2)u + \mathfrak{R} \times (u \times a) \right]$. đây $v = v\hat{x}, a = a\hat{x}$, và để với các điểm bên phải



$\hat{\mathfrak{R}} = \hat{x}$. Do đó $u = (c - v)\hat{x}, u \times a = 0$, và $\mathfrak{R}.u = \mathfrak{R}(c - v)$.

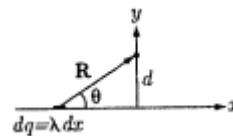
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^3 (c - v)^3} (c^2 - v^2) (c - v) \hat{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \frac{(c + v)(c - v)^2}{(c - v)^3} \hat{x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \left(\frac{c + v}{c - v} \right) \hat{x};$$

$$B = \frac{1}{c} \hat{\mathfrak{R}} \times E = 0. qed$$

Để với các điểm bên trái, $\hat{\mathfrak{R}} = -\hat{x}$ và $u = -(c + v)\hat{x}$, do đó $\mathfrak{R}.u = \mathfrak{R}(c + v)$ và

$$E = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}^3 (c + v)^3} (c^2 - v^2) (c + v) \hat{x} = \boxed{-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\mathfrak{R}^2} \left(\frac{c + v}{c - v} \right) \hat{x}; B = 0.}$$

Bài tập 10.19



$$(a) E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (1 - v^2/c^2) \int \frac{\hat{R}}{R^2} \frac{dx}{[1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta]^{3/2}}.$$

Các thành phần ngang triệt tiêu, thành phần thẳng đứng của $\hat{R}$ là $\sin \theta$ (xem hình vẽ).

đây $d = R \sin \theta$ do đó $\frac{1}{R^2} = \frac{\sin^2 \theta}{d^2}; \frac{-x}{d} = \cot \theta, dx = -d(-\csc^2 \theta) d\theta = \frac{d}{\sin^2 \theta} d\theta;$

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^2} dx &= \frac{d}{\sin^2 \theta} \frac{\sin^2 \theta}{d^2} d\theta = \frac{d\theta}{d}, \text{ vì } v \ll c \\ E &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (1 - v^2/c^2) \left(\frac{\hat{y}}{d} \right) \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{[1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta]^{3/2}} d\theta. \text{ Cho } z \equiv \cos \theta, \text{ do đó } \sin^2 \theta = 1 - z^2. \\ &= \frac{\lambda(1 - v^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0 d} \hat{y} \int_{-1}^1 \frac{1}{[1 - (v/c)^2 + (v/c)^2 z^2]^{3/2}} dz \\ &= \frac{\lambda(1 - v^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0 d} \hat{y} \left[\frac{1}{(v/c)^3} \frac{z}{(c^2/v^2 - 1)\sqrt{(v/c)^2 - 1 + z^2}} \right]_{-1}^{+1} \\ &= \frac{\lambda(1 - v^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0 d} \frac{c}{v} \frac{1}{(1 - c^2/v^2)} \frac{2}{\sqrt{(c/v)^2 - 1 + 1}} \hat{y} \\ &= \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{d} \hat{y} \right] (\text{Tích phân tổng hợp trường mang điện tích ở trạng thái nghỉ}).\end{aligned}$$

(b) $\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E})$ để tính $\mathbf{B}$ ta lấy đạo hàm $dq = \lambda dx$. Bởi vì $\mathbf{v}$ không đổi, nó được đưa ra ngoài tích phân và công thức tính đúng cho điện trường toàn phần:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c^2} v \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{d} (\hat{x} \times \hat{y}) = \mu_0 \epsilon_0 v \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{d} \hat{z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\lambda v}{d} \hat{z}.$$

Nhưng $\lambda v = I$ do đó $\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{d} \hat{\phi}}$ (giống như chúng ta nhận được trong tĩnh điện, phương trình 5.36 và ví dụ 5.7)

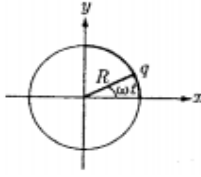
Bài tập 10.20

$$\mathbf{w}(t) = R [\cos(\omega t) \hat{x} + \sin(\omega t) \hat{y}];$$

$$\mathbf{v}(t) = R\omega [-\sin(\omega t) \hat{x} + \cos(\omega t) \hat{y}];$$

$$\mathbf{a}(t) = -R\omega^2 [\cos(\omega t) \hat{x} + \sin(\omega t) \hat{y}] - \omega^2 \mathbf{w}(t);$$

$$\mathbf{R} = -\mathbf{w}(t_r);$$



$$\Re = R;$$

$$t_r = t - R / c;$$

$$\hat{\Re} = -[\cos(\omega t_r) \hat{x} + \sin(\omega t_r) \hat{y}];$$

$$\begin{aligned} u &= c\hat{\Re} - \mathbf{v}(t_r) = -c[\cos(\omega t_r) \hat{x} + \sin(\omega t_r) \hat{y}] - \omega R[-\sin(\omega t_r) \hat{x} + \cos(\omega t_r) \hat{y}] \\ &= -\{[c \cos(\omega t_r) - \omega R \sin(\omega t_r)] \hat{x} + [c \sin(\omega t_r) + \omega R \cos(\omega t_r)] \hat{y}\}; \end{aligned}$$

$$\Re \times (u \times a) = (\Re.a)u - (\Re.u)a; \Re.a = -\mathbf{w} \cdot (-\omega^2 \mathbf{w}) = \omega^2 R^2;$$

$$\Re.u = R[c \cos^2(\omega t_r) - \omega R \sin(\omega t_r) \cos(\omega t_r) + c \sin^2(\omega t_r) + \omega R \sin(\omega t_r) \cos(\omega t_r)] = Rc; v^2 = (\omega R)^2.$$

Do đó (phần ứng trình 10.65);

$$\begin{aligned} E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{(Rc)^3} \left[u(c^2 - \omega^2 R^2) + u(\omega R)^2 - a(Rc) \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{cu - Ra}{(Rc)^2} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(Rc)^2} \left\{ -[c^2 \cos(\omega t_r) - \omega Rc \sin(\omega t_r)] \hat{x} - [c \sin(\omega t_r) + \omega Rc \cos(\omega t_r)] \hat{y} + \right. \\ &\quad \left. R^2 \omega^2 \cos(\omega t_r) \hat{x} + R^2 \omega^2 \sin(\omega t_r) \hat{y} \right\} \\ &= \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(Rc)^2} \left\{ [(\omega^2 R^2 - c^2) \cos(\omega t_r) + \omega Rc \sin(\omega t_r)] \hat{x} + [(\omega^2 R^2 - c^2) \sin(\omega t_r) - \omega Rc \cos(\omega t_r)] \hat{y} \right\}}. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{c} \hat{\Re} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c} (\hat{\Re}_x E_y - \hat{\Re}_y E_x) \hat{z}$$

$$\begin{aligned} &= -R \frac{1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(Rc)^2} \cos(\omega t_r) \left\{ [(\omega^2 R^2 - c^2) \sin(\omega t_r) - \omega Rc \cos(\omega t_r)] \right. \\ &\quad \left. - \sin(\omega t_r) [(\omega^2 R^2 - c^2) \cos(\omega t_r) + \omega Rc \sin(\omega t_r)] \right\} \hat{z} \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2 c^3} [-\omega Rc \cos^2(\omega t_r) - \omega Rc \sin^2(\omega t_r)] \hat{z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2 c^3} \omega Rc \hat{z} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega}{Rc^2} \hat{z} \end{aligned}$$

Chú ý rằng $\mathbf{B}$ không đổi theo thời gian.

Để tìm từ trường tại tâm của vòng tròn mang điện tích, cho $q \rightarrow \lambda(2\pi R)$; đổi vị trí vòng này mang dòng I , chúng ta cần $I = \lambda v = \lambda \omega R$ do đó $\lambda = I / \omega R$ và vì thế $q \rightarrow (I / \omega R)(2\pi R) = 2\pi I / \omega$. Vì thế $\mathbf{B} = \frac{2\pi I}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{Rc^2} \hat{z}$ hoặc $1/c^2 = \epsilon_0\mu_0$, $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{z}$, từ trường như phương trình 5.38 trong trường hợp $z = 0$

Bài tập 10.21

$\lambda(\phi, t) = \lambda_0 |\sin(\phi/2)|$, ở đây $\theta = \phi - \omega t$. Vì vậy, thế vô hướng (bên trong) tại tâm là

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{R} dl' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 |\sin[(\phi - \omega t_r)/2]|}{a} d\phi \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \sin(\theta/2) d\theta = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} [-2\cos(\theta/2)] \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} [2 - (-2)] = \frac{\lambda_0}{\pi\epsilon_0} \end{aligned}$$

(Chú ý, tại t_r cần đúng, $d\phi = d\theta$, và nó đi qua trên mặt vòng tròn của ϕ hoặc θ .)

Trong khi đó, $I(\phi, t) = \lambda v = \lambda_0 \omega a |\sin[(\phi - \omega t)/2]| \hat{\phi}$, từ phương trình 10.19 (mặt bên của)

$$A(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I}{R} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_0 \omega a |\sin[(\phi - \omega t_r)/2]| \hat{\phi}}{a} a d\phi$$

Nhưng $t_r = t - a/c$ là hằng số khi lấy tích phân theo ϕ , và $\hat{\phi} = (-\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y})$.

$= \frac{\mu_0 \lambda_0 \omega a}{4\pi} \int_0^{2\pi} |\sin[(\phi - \omega t_r)/2]| (-\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}) d\phi$. Lưu ý rằng $\theta = \phi - \omega t_r$, và lấy tích phân từ $\theta = 0$ đến $\theta = 2\pi$ (vì vậy chúng ta không cần quan tâm đến giá trị tuyệt đối).

$$= \frac{\mu_0 \lambda_0 \omega a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\theta/2) [-\sin(\theta + \omega t_r) \hat{x} + \cos(\theta + \omega t_r) \hat{y}] d\theta.$$

Bây giờ

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \sin(\theta/2) \sin(\theta + \omega t_r) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(\theta/2 + \omega t_r) - \cos(3\theta/2 + \omega t_r)] d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[2 \sin(\theta/2 + \omega t_r) - \frac{2}{3} \sin(3\theta/2 + \omega t_r) \right] \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \sin(\pi + \omega t_r) - \sin \omega t_r - \frac{1}{3} \sin(3\pi + \omega t_r) + \frac{1}{3} \sin \omega t_r \\
 &= -2 \sin \omega t_r + \frac{2}{3} \sin \omega t_r = -\frac{4}{3} \sin \omega t_r
 \end{aligned}$$

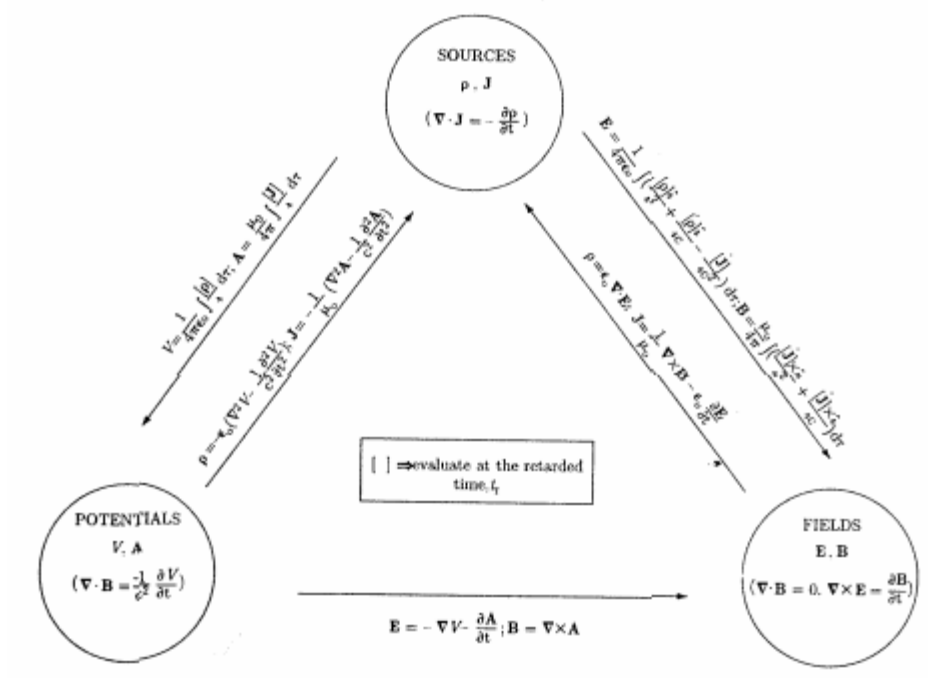
$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \sin(\theta/2) \sin(\theta + \omega t_r) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [-\sin(\theta/2 + \omega t_r) + \sin(3\theta/2 + \omega t_r)] d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left[2 \cos(\theta/2 + \omega t_r) - \frac{2}{3} \cos(3\theta/2 + \omega t_r) \right] \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \cos(\pi + \omega t_r) - \cos(\omega t_r) - \frac{1}{3} \cos(3\pi + \omega t_r) + \frac{1}{3} \cos(\omega t_r) \\
 &= -2 \cos(\omega t_r) + \frac{2}{3} \cos(\omega t_r) = -\frac{4}{3} \cos(\omega t_r)
 \end{aligned}$$

Do

đó

$$A(t) = \frac{\mu_0 \lambda_0 \omega a}{4\pi} \left(\frac{4}{3} \right) [\sin(\omega t_r) \hat{x} - \cos(\omega t_r) \hat{y}] = \boxed{\frac{\mu_0 \lambda_0 \omega a}{3\pi} \{ \sin[\omega(t - a/c)] \hat{x} - \cos[\omega(t - a/c)] \hat{y} \}}.$$

Vấn đề 10.22



Bài tập 10.23

Dùng quy tắc tích #5, phôi ng trình 10.43 tr thành

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} q c \mathbf{v} \cdot \nabla \left[(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2) \right]^{-1/2} \\
 &= \frac{\mu_0 q c}{4\pi} \mathbf{v} \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \left[(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2) \right]^{-3/2} \nabla \left[(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2) \right] \right\} \\
 &= -\frac{\mu_0 q c}{8\pi} \left[(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2) \right]^{-3/2} \mathbf{v} \cdot \left\{ -2(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + (c^2 - v^2) \nabla(r^2) \right\}.
 \end{aligned}$$

Quy tắc tích #4 trở thành

$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{r}, \text{ nhưng } \nabla \times \mathbf{r} = 0,$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} = \mathbf{v}, \text{ và}$$

$$\nabla(r^2) = \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + 2(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{r} = 2\mathbf{r} \text{ do đó}$$

Do đó :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0 q c}{8\pi} \left[(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2) \right]^{-3/2} \mathbf{v} \cdot \left[-2(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} + (c^2 - v^2) 2\mathbf{r} \right] \\
 &= -\frac{\mu_0 q c}{4\pi} \left[(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2) \right]^{-3/2} \left\{ (c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) v^2 - (c^2 - v^2)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) \right\}.
 \end{aligned}$$

Nhưng sẽ dễ dàng trong ngoặc nhúng là: $c^2 t v^2 - v^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - c^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + v^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) = c^2(v^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})$.

$$= \frac{\mu_0 q c^3}{4\pi} \frac{(v^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{\left[(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2) \right]^{3/2}}.$$

Trong khi đó thì phương trình 10.42,

$$\begin{aligned}
 -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} q c \left(-\frac{1}{2} \right) \left[(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2) \right]^{-3/2} \times \\
 &\frac{\partial}{\partial t} \left[(c^2 t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2 t^2) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\mu_{0q}}{8\pi} \left[(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2) \right]^{-3/2} \left[2(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})c^2 + (c^2 - v^2)(2c^2t) \right] \\
 &= -\frac{\mu_0 qc^3}{4\pi} \frac{(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} - c^2t + v^2t)}{\left[(c^2t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r^2 - c^2t^2) \right]^{3/2}} = \nabla \cdot \mathbf{A}.
 \end{aligned}$$

Bài tập 10.24

$$(a) \left[F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(b^2 + c^2t^2)} \hat{\mathbf{x}} \right]$$

(Đây là định luật Coulomb bởi vì q_1 đứng yên.)

...

$$\begin{aligned}
 (b) I_2 &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(b^2 + c^2t^2)} dt = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{bc} \tan^{-1}(ct/b) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 bc} \left[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(-\infty) \right] \\
 &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 bc} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{bc}
 \end{aligned}$$

(c) Từ bài tập (10.18), $\mathbf{E} = -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{c-v}{c+v} \right) \hat{\mathbf{x}}$. Ở đây x và v đều là tính tại thời gian trễ t_r

là $c(t - t_r) = x(t_r) = \sqrt{b^2 + c^2t_r^2} \Rightarrow c^2t^2 - 2ctt_r + c^2t_r^2 = b^2 + c^2t_r^2 \Rightarrow \frac{c^2t^2 - b^2}{2c^2t}$. Chú ý: như chúng ta đã

thấy trong bài tập 10.15, trường của hạt q_2 xuất hiện (điểm của q_1) tại thời điểm $t = 0$). Trường đó, nó có thể không tác động lên q_1 , và không có thời gian trễ. Từ thời t_r theo t , chúng ta thấy rằng t_r chuyển từ $-\infty$ đến ∞ khi $t > 0$

$$x(t_r) = c(t - t_r) = \frac{2c^2t^2 - c^2t_r^2 + b^2}{2ct} = \frac{b^2 + c^2t^2}{2ct} \quad (\text{với } t > 0). \quad v(t) = \frac{1}{2} \frac{2c^2t}{\sqrt{b^2 + c^2t^2}} = \frac{c^2t}{x} \quad \text{do đó}$$

$$v(t_r) = \left(\frac{c^2t^2 - b^2}{2t} \right) \left(\frac{2ct}{b^2 + c^2t^2} \right) = c \left(\frac{c^2t^2 - b^2}{c^2t^2 + b^2} \right) (\text{với } t > 0). \quad \text{Do đó}$$

$$\frac{c-v}{c+v} = \frac{(c^2t^2 + b^2) - (c^2t^2 - b^2)}{(c^2t^2 + b^2) + (c^2t^2 - b^2)} = \frac{2b^2}{2c^2t^2} = \frac{b^2}{c^2t^2} (\text{với } t > 0). \quad \mathbf{E} = -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4c^2t^2}{(b^2 + c^2t^2)^2} \frac{b^2}{c^2t^2} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_1 = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4b^2}{(b^2 + c^2t^2)^2} \hat{\mathbf{x}}, & t > 0. \end{cases}$$

(d) $I_1 = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} 4b^2 \int_0^\infty \frac{1}{(b^2 + c^2 t^2)^2} dt$. Tích phân bằng

$$\frac{1}{c^4} \int_0^\infty \frac{1}{\left[\left(\frac{b}{c}\right)^2 + t^2\right]^2} dt = \frac{1}{c^4} \left(\frac{c^2}{2b^2}\right) \left[\frac{t}{\left(\frac{b}{c}\right)^2 + t^2} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{\left[\left(\frac{b}{c}\right)^2 + t^2\right]} = \frac{1}{2c^2 b^2} \left(\frac{\pi c}{2b}\right) = \frac{\pi}{4cb^3}.$$

Do đó: $I_1 = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\pi}{bc}$

(e) $\mathbf{F}_1 \neq \mathbf{F}_2$, vì vậy vi phạm định luật III Newton. Mặt khác, trong trường hợp này $I_1 = -I_2$ cho thấy rằng dòng điện toàn phần được phân phát từ (1) sang (2) bằng và ngược lại dòng điện toàn phần được phân phát từ (2) sang (1), và vì thế dòng điện có hướng toàn phần được bảo toàn. (Nói chung, trường có thể mang đi một dòng điện nào đó, để lại dòng điện có hướng thay thế; nhưng điều đó không xảy ra trong trường hợp hiện tại.)

Bài tập 10.25

$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}); \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E})$ (phương trình 10.69)

Do đó: $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c^2} [\mathbf{E} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E})] = \epsilon_0 [E^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}]$.

Công suất qua mặt phẳng là $P = \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$, và $da = 2\pi r dr \hat{\mathbf{x}}$ (xem hình vẽ). Vì vậy

$P = \epsilon_0 \int (E^2 v - E_x^2 v) 2\pi r dr; E_x = E \cos \theta$, vì vậy $E^2 - E_x^2 = E^2 \sin^2 \theta$.

$= 2\pi\epsilon_0 v \int E^2 \sin^2 \theta r dr$. Từ phương trình (10.68) $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \gamma^2} \frac{1}{R^2} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{[1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta]^{3/2}}$ ở đây

$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

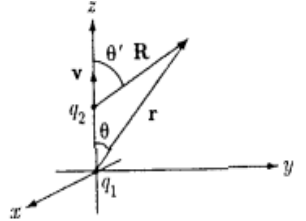
$= 2\pi\epsilon_0 v \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \frac{1}{\gamma^2} \int_0^\infty \frac{r \sin^2 \theta}{R^4 [1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta]^3} dr$. Bây giờ $r = \alpha \tan \theta \Rightarrow dr = \alpha \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta; \frac{1}{R} = \frac{\cos \theta}{\alpha}$.

$= \frac{v}{2\gamma^4} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{[1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta]^3} d\theta$. Đặt $u \equiv \sin^2 \theta$, vì vậy $du = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$.

$$= \frac{v^2 q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2 \gamma^4} \int_0^1 \frac{u}{[1 - (v/c)^2 u]^3} du = \frac{v q^2}{16\pi\epsilon_0 \alpha^2 \gamma^4} \left(\frac{\gamma^4}{2} \right) = \frac{v q^2}{32\pi\epsilon_0 \alpha^2}.$$

Bài tập 10.26

$$(a) \mathbf{F}_{12}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(vt)^2} \hat{\mathbf{z}}.$$



(b) Thay vào phương trình 10.68, với $\theta = 180^\circ$, $R = vt$ và $\hat{\mathbf{R}} = -\hat{\mathbf{z}}$:

$$\mathbf{F}_{12}(t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (1 - v^2/c^2)}{(vt)^2} \hat{\mathbf{z}}.$$

Không, nó không tuân theo định luật III Newton: $\mathbf{F}_{12} \neq \mathbf{F}_{21}$, bởi vì thừa số $(1 - v^2/c^2)$.

(c) Thay vào phương trình 8.29, $\mathbf{p} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d\tau$. Với $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, ở đây $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2$ do đó $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2) + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_2)$.

Nhưng sau đó, khi lấy tích phân trên toàn không gian, không phải thu được gì. Chúng ta chỉ muốn phần thu được trong gian: $\mathbf{p}(t) = \epsilon_0 \int (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2) d\tau$. Bây giờ $\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$, trong

khi đó, thay vào phương trình (10.69), $\mathbf{B}_2 = \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{E}_2)$, và thay vào phương trình 10.68

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2 \sin^2 \theta' / c^2)^{3/2}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}. \quad \text{Nhưng} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{vt}; \quad R^2 = r^2 + v^2 t^2 - 2rvt \cos \theta;$$

$$\sin \theta' = \frac{r \sin \theta}{R}. \text{ Do đó } \mathbf{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - v^2/c^2)}{[1 - (vr \sin \theta / c)^2]^{3/2}} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{vt})}{R^3}. \text{ Cuối cùng, chú ý rằng}$$

$\mathbf{v} \times (\mathbf{r} - \mathbf{vt}) = \mathbf{v} \times \mathbf{r} = v r \sin \theta \hat{\phi}$, chúng ta dễ dàng có $\mathbf{B}_2 = \frac{q_2(1 - v^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{v r \sin \theta}{[R^2 - (v r \sin \theta/c)^2]^{3/2}} \hat{\phi}$. Do đó

$$\mathbf{p}(t) = \epsilon_0 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2(1 - v^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0 c^2} v \int \frac{1}{r^2} \frac{r \sin \theta (\mathbf{r} \times \hat{\phi})}{[R^2 - (v r \sin \theta/c)^2]^{3/2}}.$$

Nhưng $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\phi} = -\hat{\theta} = -(\cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}})$, và các thành phần x, y tích phân bằng không, vì vậy:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \frac{q_1 q_2 v (1 - v^2/c^2) \hat{\mathbf{z}}}{(4\pi c)^2 \epsilon_0} \int \frac{\sin^2 \theta}{r [r^2 + (vt)^2 - 2rvt \cos \theta - (v r \sin \theta/c)^2]^{3/2}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{q_1 q_2 v (1 - v^2/c^2) \hat{\mathbf{z}}}{8\pi c^2 \epsilon_0} \int \frac{r \sin^3 \theta}{[r^2 + (vt)^2 - 2rvt \cos \theta - (v r \sin \theta/c)^2]^{3/2}} dr d\theta. \end{aligned}$$

Chúng ta sẽ lấy tích phân theo r trước. Theo các bảng CRC

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x}{(a + bx + cx^2)^{3/2}} dx &= -\frac{2(bx + 2a)}{(4ac - b^2)\sqrt{a + bx + cx^2}} \Bigg|_0^\infty = -\frac{2}{4ac - b^2} \left[\frac{b}{\sqrt{c}} - \frac{2a}{\sqrt{a}} \right] \\ &= -\frac{2}{\sqrt{c}(4ac - b^2)} (b - 2\sqrt{ac}) = \frac{2}{\sqrt{c}} \frac{(2\sqrt{ac} - b)}{(2\sqrt{ac} - b)(2\sqrt{ac} + b)} = \frac{2}{\sqrt{c}} (2\sqrt{ac} + b). \end{aligned}$$

Trong trường hợp này $x = r$, $a = (vt)^2$, $b = -2vt \cos \theta$, và $c = 1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta$. Vì vậy tích phân theo r bằng

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta} [2vt \sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta} - 2vt \cos \theta]} = \frac{1}{vt \sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta} [\sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta} - \cos \theta]} \\ &= \frac{[\sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta} + \cos \theta]}{vt \sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta} [1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta]} = \frac{1}{vt \sin^2 \theta (1 - (v/c)^2)} \left[1 + \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - (v/c)^2 \sin^2 \theta}} \right]. \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \frac{q_1 q_2 \nu (1 - \nu^2 / c^2) \hat{\mathbf{z}}}{8\pi c^2 \epsilon_0} \frac{1}{\nu t (1 - \nu^2 / c^2)} \int_0^\pi \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[1 + \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - (\nu / c)^2 \sin^2 \theta}} \right] \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{q_1 q_2 \hat{\mathbf{z}}}{8\pi c^2 \epsilon_0 t} \left\{ \int_0^\pi \sin \theta d\theta + \frac{c}{\nu} \int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{(c / \nu)^2 - \sin^2 \theta}} d\theta \right\}. \end{aligned}$$

Nhưng $\int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2$. Trong tích phân thứ hai, đặt $u \equiv \cos \theta$, do đó

$$du = -\sin \theta d\theta: \int_0^\pi \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{(c / \nu)^2 - \sin^2 \theta}} d\theta = \int_{-1}^1 \frac{u}{\sqrt{(c / \nu)^2 - 1 + u^2}} du = 0 \quad (\text{Biểu thức dưới dấu tích phân}$$

lẻ, và khoảng thì chẵn)

Kết luận: $\mathbf{p}(t) = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi t} \hat{\mathbf{z}}$ (cường mômen lưỡng cực không đổi theo thời gian).

(d)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\nu^2 t^2} \hat{\mathbf{z}} - \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (1 - \nu^2 / c^2)}{\nu^2 t^2} \hat{\mathbf{z}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 \nu^2 t^2} \left(1 - 1 + \frac{\nu^2}{c^2} \right) \hat{\mathbf{z}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 c^2 t^2} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi t^2} \hat{\mathbf{z}}. \\ -\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{\mu_0 q_1 q_2}{4\pi t^2} \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}. \quad \text{qed} \end{aligned}$$

Bởi vì q_1 đứng yên, q_2 di chuyển với vận tốc không đổi, phải có mômen lưỡng cực khác ($\mathbf{F}_{\text{mech}}$) tác động lên chúng, để cân bằng $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}$; nhưng gì chúng ta phải tìm là $\mathbf{F} = d\mathbf{p}_{\text{em}}/dt$, điều đó có nghĩa là xung lưỡng cực được truyền cho hệ bởi lưỡng cực ngoài chuyển thành dòng lưỡng cực điện từ.
[Mười hai thêm vào bài tập này, hãy xem J.J.G.Scannio, Am.J.phys.43,258(1795).]

Chương 11

Bảng C X

Bài tập 11.1:

Từ phương trình 11.17, $\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi} \frac{1}{r} \sin[\omega(t-r/c)] (\cos\theta \hat{\mathbf{r}} - \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}})$, do đó:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{1}{r} \sin[\omega(t-r/c)] \cos\theta \right] + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\sin^2\theta \frac{1}{r} \sin[\omega(t-r/c)] \right] \right\} \\ &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\sin[\omega(t-r/c)] - \frac{\omega r}{c} \cos[\omega(t-r/c)] \right) \cos\theta - \frac{2 \sin\theta \cos\theta}{r^2 \sin\theta} \sin[\omega(t-r/c)] \right\} \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \left\{ \frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} \sin[\omega(t-r/c)] + \frac{\omega}{rc} \cos[\omega(t-r/c)] \right) \cos\theta \right\}. \end{aligned}$$

Trong khi đó, từ phương trình 11.12

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi \epsilon_0 r} \left\{ -\frac{\omega^2}{c} \cos[\omega(t-r/c)] - \frac{\omega}{r} \sin[\omega(t-r/c)] \right\} \\ &= -\frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^2} \sin[\omega(t-r/c)] + \frac{\omega}{rc} \cos[\omega(t-r/c)] \right\} \cos\theta. \end{aligned} \quad \text{do đó } \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}. \quad \text{qed}$$

Bài tập 11.2

Phương trình 11.14: $V(\mathbf{r}, t) = -\frac{\omega}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{\mathbf{p}_0 \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r} \sin[\omega(t-r/c)].$ phương trình 11.17:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 \omega}{4\pi} \frac{\mathbf{p}_0}{r} \sin[\omega(t-r/c)]. \quad \text{Đây giống } \mathbf{p}_0 \times \hat{\mathbf{r}} = p_0 \sin\theta \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \text{và}$$

$$\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{p}_0 \times \hat{\mathbf{r}}) = p_0 \sin\theta (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}) = -p_0 \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \text{do đó phương trình 11.18:}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{p}_0 \times \hat{\mathbf{r}})}{r} \cos[\omega(t-r/c)]. \quad \text{PT} \quad 11.19:$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{(\mathbf{p}_0 \times \hat{\mathbf{r}})}{r} \cos[\omega(t-r/c)]. \quad \text{Phương trình 11.21: } \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{(\mathbf{p}_0 \times \hat{\mathbf{r}})^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Bài tập 11.3 :

$P = I^2 R = q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) R$ (phương trình 11.15) $\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{2} q_0^2 \omega^2 R$. Cân bằng phương trình

$$11.22 \quad : \quad \frac{1}{2} q_0^2 \omega^2 R = \frac{\mu_0 q_0^2 d^2 \omega^4}{12\pi c} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\mu_0 d^2 \omega^2}{6\pi c}}; \quad \text{học} \quad \text{bài} \quad \text{vì}$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

$$\frac{1}{2} q_0^2 \omega^2 R = \frac{\mu_0 d^2}{6\pi c} \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda^2} = \frac{2}{3} \pi \mu_0 c \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 = \frac{2}{3} \pi (4\pi \times 10^{-7}) (3 \times 10^8) \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 \Omega = 789.6 (d/\lambda)^2 \Omega.$$

Trong dây radio thông, với $d = 5 \times 10^{-2} m$ và $\lambda = 10^3 m$, $R = 790(5 \times 10^{-5})^2 = 2 \times 10^{-6} \Omega$, không đáng kể so với điện trở Ohm.

Bài tập 11.4:

Bằng nguyên lý chung chung, ta có thể chứng minh rằng hai trường điện từ, biểu diễn V

$$(\text{phương trình 11.14}) \text{ trong tọa độ Đề các: } V(x, y, z, t) = -\frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c} \left(\frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right) \sin[\omega(t - r/c)].$$

Đó là trường điện từ dao động dọc theo trục z . Để vẽ trường điện từ dao động dọc theo trục x hoặc y , chúng ta chỉ cần thay đổi z bằng x hoặc y . Trong trường hợp đang xét $\mathbf{p} = p_0 [\cos(\omega t) \hat{x} + \cos(\omega t - \pi/2) \hat{y}]$, vì vậy trường điện từ dao động dọc theo trục y với một góc pha $\pi/2$: $\sin[\omega(t - r/c)] \rightarrow \sin[\omega(t - r/c) - \pi/2] = -\cos[\omega(t - r/c)]$ (chỉ cần đổi

$$\begin{aligned} \omega t \rightarrow \omega t - \pi/2. \text{ Vì thế} \\ V = -\frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c} \left\{ \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \sin[\omega(t - r/c)] - \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} \cos[\omega(t - r/c)] \right\} \\ = -\frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c} \frac{\sin \theta}{r} \left\{ \cos \phi \sin[\omega(t - r/c)] - \sin \phi \cos[\omega(t - r/c)] \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Trường từ: } \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \left\{ \sin[\omega(t - r/c)] \hat{x} - \cos[\omega(t - r/c)] \hat{y} \right\}.$$

Chúng ta có thể tìm được trường bằng cách lấy vi phân từng trường này, nhưng tôi thích làm việc với phương trình 11.18 và 11.19 bằng nguyên lý chung chung. Bởi vì $\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$, và $\cos \theta = z/r$, phương trình 11.18 có thể viết là

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \cos[\omega(t - r/c)] \left(\hat{z} - \frac{z}{r} \hat{r} \right). \text{ Do đó, trong trường hợp trường điện từ quay}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \left\{ \cos[\omega(t-r/c)] \left(\hat{\mathbf{x}} - \frac{x}{r} \hat{\mathbf{r}} \right) + \sin[\omega(t-r/c)] \left(\hat{\mathbf{y}} - \frac{y}{r} \hat{\mathbf{r}} \right) \right\}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}).$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0 c} [\mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E})] = \frac{1}{\mu_0 c} [E^2 \hat{\mathbf{r}} - (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{E}] = \frac{E^2}{\mu_0 c} \hat{\mathbf{r}} \quad (\text{chú ý rằng } \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0). \text{ Bây giờ:}$$

$$E^2 = \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \right)^2 \left\{ a^2 \cos^2[\omega(t-r/c)] + b^2 \sin^2[\omega(t-r/c)] + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \sin[\omega(t-r/c)] \cos[\omega(t-r/c)] \right\},$$

ở đây: $\mathbf{a} \equiv \hat{\mathbf{x}} - (x/r) \hat{\mathbf{r}}$ và $\mathbf{b} \equiv \hat{\mathbf{y}} - (y/r) \hat{\mathbf{r}}$. Chú ý rằng $\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{r} = x$ và $\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{r} = y$, ta có

$$a^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2} - 2 \frac{x^2}{r^2} = 1 - \frac{x^2}{r^2};$$

$$b^2 = 1 - \frac{y^2}{r^2}; \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\frac{y}{r} \frac{x}{r} - \frac{x}{r} \frac{y}{r} + \frac{xy}{r^2} = -\frac{xy}{r^2}.$$

$$\begin{aligned} E^2 &= \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \right)^2 \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right) \cos^2[\omega(t-r/c)] + \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right) \sin^2[\omega(t-r/c)] \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{xy}{r^2} \sin[\omega(t-r/c)] \cos[\omega(t-r/c)] \right\} \\ &= \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{r^2} (x^2 \cos^2[\omega(t-r/c)] + 2xy \sin[\omega(t-r/c)] \cos[\omega(t-r/c)] + y^2 \sin^2[\omega(t-r/c)]) \right\} \\ &= \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{r^2} (x \cos[\omega(t-r/c)] + y \sin[\omega(t-r/c)])^2 \right\} \end{aligned}$$

Nhưng $x = r \sin \theta \cos \phi$ và $y = r \sin \theta \sin \phi$.

$$\begin{aligned} E^2 &= \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \right)^2 \left\{ 1 - \sin^2 \theta (\cos \phi \cos[\omega(t-r/c)] + \sin \phi \sin[\omega(t-r/c)])^2 \right\} \\ &= \left(\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} \right)^2 \left\{ 1 - (\sin \theta \cos[\omega(t-r/c) - \phi])^2 \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{\mu_0}{c} \left(\frac{p_0 \omega^2}{4\pi r} \right)^2 \left\{ 1 - \left(\sin \theta \cos [\omega(t-r/c) - \phi] \right)^2 \right\} \hat{\mathbf{r}}. \\ \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{\mu_0}{c} \left(\frac{p_0 \omega^2}{4\pi r} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right] \hat{\mathbf{r}}. \\ P &= \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0}{c} \left(\frac{p_0 \omega^2}{4\pi r} \right)^2 \int \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) r^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c} 2\pi \left[\int_0^\pi \sin \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right] = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{8\pi c} \left(2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \right) = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{6\pi c}.\end{aligned}$$

Giá trị này bằng hai lần công suất được phát ra bởi hai lưỡng cực dao động (phương trình 11.22). Nói chung

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{\mu_0} [(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \times (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2)] = \frac{1}{\mu_0} [(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_1) + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_2) + (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_2) + (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_1)] = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \text{cross terms}\end{aligned}$$

Trong trường hợp cụ thể này, các trường của 1 và 2 lệch pha nhau 90° , vì vậy các số hạng chéo cũng tiến tới không khi lấy trung bình theo thời gian, và công suất toàn phần bằng tổng của hai công suất riêng biệt.

Bài tập 11.5:

Quay lại phương trình 11.33: $\mathbf{A} = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \left\{ \frac{1}{r} \cos [\omega(t-r/c)] - \frac{\omega}{c} \sin [\omega(t-r/c)] \right\} \hat{\phi}.$

Bởi vì đây $V = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \left\{ \frac{1}{r} (-\omega) \sin [\omega(t-r/c)] - \frac{\omega}{c} \omega \cos [\omega(t-r/c)] \right\} \hat{\phi} \\ &= \frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \left\{ \frac{1}{r} \sin [\omega(t-r/c)] + \frac{\omega}{c} \cos [\omega(t-r/c)] \right\} \hat{\phi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta} \\
 &= \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \left[\frac{1}{r} \cos[\omega(t-r/c)] - \frac{\omega}{c} \sin[\omega(t-r/c)] \right] \hat{\mathbf{r}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin \theta}{r} \left[-\frac{1}{r^2} \cos[\omega(t-r/c)] + \frac{\omega}{rc} \sin[\omega(t-r/c)] - \frac{\omega}{c} \left(-\frac{\omega}{c} \right) \cos[\omega(t-r/c)] \right] \hat{\theta} \right\} \\
 &= \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \left\{ \frac{2 \cos \theta}{r^2} \left[\frac{1}{r} \cos[\omega(t-r/c)] - \frac{\omega}{c} \sin[\omega(t-r/c)] \right] \hat{\mathbf{r}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin \theta}{r} \left[-\frac{1}{r^2} \cos[\omega(t-r/c)] + \frac{\omega}{rc} \sin[\omega(t-r/c)] + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \cos[\omega(t-r/c)] \right] \hat{\theta} \right\}.
 \end{aligned}$$

Đây đúng là nhúng tròng mà chúng ta đã nghiên cứu trong bài tập 9.33, với

$$A \rightarrow \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c}. \text{ Vector Pointing là}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S} &= \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^3}{16\pi^2 c^2} \left(\frac{\sin \theta}{r^2} \right) \left\{ \frac{2 \cos \theta}{r} \left[\left(1 - \frac{c^2}{\omega^2 r^2} \right) \sin u \cos u + \frac{c}{\omega r} (\cos^2 u - \sin^2 u) \right] \hat{\theta} \right. \\
 &\quad \left. \sin \theta \left[\left(-\frac{2}{r} + \frac{c^2}{\omega^2 r^3} \right) \sin u \cos u + \frac{\omega}{c} \cos^2 u + \frac{c}{\omega r^2} (\cos^2 u - \sin^2 u) \right] \hat{\mathbf{r}} \right\},
 \end{aligned}$$

ở đây: $u \equiv -\omega(t-r/c)$. Công thức là $\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$, tương tự như phương trình 11.39.

Bài tập 11.6:

$$I^2 R = I_0^2 R \cos^2(\omega t) \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3} = \frac{\mu_0 \pi^2 b^4 I_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}, \text{ do đó: } \boxed{R = \frac{\mu_0 \pi b^4 \omega^4}{6c^3}}; \text{ hoặc: } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda},$$

$$R = \frac{\mu_0 \pi b^4}{6c^3} \frac{16\pi^4 c^4}{\lambda^4} = \frac{8}{3} \pi^5 \mu_0 c \left(\frac{b}{\lambda} \right)^4 = \frac{8}{3} (\pi^5) (4\pi \times 10^{-7}) (3 \times 10^8) (b/\lambda)^4 = 3.08 \times 10^5 (b/\lambda)^4 \Omega.$$

Bởi vì: $b \ll \lambda \dots (b=5\text{cm và } \lambda=10^3\text{m}), R=3 \times 10^5 (5 \times 10^{-5})^4 = 2 \times 10^{-12} \Omega,$

Bài tập 11.7:

Với $\alpha = 90^\circ$, PT: 7.68 $\Rightarrow \mathbf{E}' = c\mathbf{B}, \mathbf{B}' = -\mathbf{E}/c, \dot{q}_m = -cq_e \Rightarrow m_0 \equiv \dot{q}_m d = -cq_e d = -cp_0$. Do đó :

$$\mathbf{E}' = c \left\{ -\frac{\mu_0 (-m_0/c) \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t-r/c)] \hat{\phi} \right\} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t-r/c)] \hat{\phi}.$$

$$\mathbf{B}' = -\frac{1}{c} \left\{ \frac{\mu_0 (-m_0 / c) \omega^2}{4\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\theta} \right\} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\theta}. \quad \text{Như ng}$$

cái này giống như các trường của lưỡng cực Ampe (phương trình 11.36 và 11.37), nó phù hợp với kinh nghiệm thông thường của chúng ta rằng hai mô hình tạo ra các trường giống nhau ngoài trừ ngay tại lưỡng cực (không liên quan ở đây, bởi vì chúng ta ở trong vùng bán cổ x).

Bài tập 11.8:

$$\mathbf{p}(t) = p_0 [\cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}}] \Rightarrow \ddot{\mathbf{p}}(t) = -\omega^2 p_0 [\cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}}]$$

$$\Rightarrow [\ddot{\mathbf{p}}(t)]^2 = \omega^4 p_0^2 [\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)] = p_0^2 \omega^4. \text{PT 11.59 cho chúng ta: } \mathbf{S} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

(Điều này không phù hợp với bài giới của 11.4). Nguyên nhân là trong phương trình 11.59, các trường của nam châm theo hướng của $\ddot{\mathbf{p}}(t_0)$; khi lưỡng cực quay, các trường cũng quay. Vì thế góc θ ở đây không giống như trong bài tập 11.4). Trong khi đó, phương trình 11.60 cho chúng ta $P = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{6\pi c}$. (Điều này phù hợp với bài tập 11.4, bởi vì bây giờ chúng ta lấy tích phân trên tất cả các góc, và hướng của trường của không liên quan).

Bài tập 11.9:

Tại $t = 0$, momen lưỡng cực của vòng là

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \int \lambda \mathbf{r} dl = \int (\lambda_0 \sin \phi) (b \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + b \cos \phi \hat{\mathbf{x}}) b d\phi = \lambda_0 b^2 \left(\hat{\mathbf{y}} \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi + \hat{\mathbf{x}} \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi \right) \\ &= \lambda b^2 (\pi \hat{\mathbf{y}} + 0 \hat{\mathbf{x}}) = \pi b^2 \lambda_0 \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Khi nó quay (ngược chiều kim đồng hồ) $\mathbf{p}(t) = p_0 [\cos(\omega t) \hat{\mathbf{y}} - \sin(\omega t) \hat{\mathbf{x}}]$, do đó $\ddot{\mathbf{p}} = -\omega^2 \mathbf{p}$ và

$$(\ddot{\mathbf{p}})^2 = \omega^4 p_0^2. \text{Thành ra (phương trình 11.60)} \quad P = \frac{\mu_0}{6\pi c} \omega^4 (\pi b^2 \lambda_0)^2 = \frac{\pi \mu_0 \omega^4 b^4 \lambda_0^2}{6c}.$$

Bài tập 11.10:

$\mathbf{p} = -ey\hat{\mathbf{y}}, y = \frac{1}{2}gt^2$, do đó: $\mathbf{p} = -\frac{1}{2}get^2\hat{\mathbf{y}}; \dot{\mathbf{p}} = -ge\hat{\mathbf{y}}$. Do đó (phương trình 11.60): $P = \frac{\mu_0}{6\pi c}(ge)^2$.

Bây giờ, khoảng thời gian nó mất để đi qua khoảng cách $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{2h/g}$, vì vậy

năng lượng bức xạ qua khoảng cách h là $U_{rad} = Pt = \frac{\mu_0(ge)^2}{6\pi c}\sqrt{2h/g}$. Trong khi đó, thế

năng bù mất là $U_{pot} = mgh$. Vì vậy tỉ số là $f = \frac{U_{rad}}{U_{pot}} = \frac{\mu_0 g^2 e^2}{6\pi c} \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{mgh} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi mc} \sqrt{\frac{2g}{h}}$.

$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7})(1.6 \times 10^{-19})^2}{6\pi(9.11 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)} \sqrt{\frac{(2)(9.8)}{(0.02)}} = \boxed{2.76 \times 10^{-22}}.$$

Tốt nhiên, hầu như tất cả năng lượng chuyển thành động năng (như tôi đã giải thích khi nói $y = \frac{1}{2}gt^2$).

Bài tập 11.11

$$(a) V_{\pm} = \mp \frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c} \left(\frac{\cos \theta_{\pm}}{r_{\pm}} \right) \sin[\omega(t - r_{\pm}/c)].$$

$$V_{tot} = V_+ + V_- . r_{\pm} = \sqrt{r^2 + (d/2)^2 \mp 2r(d/2)\cos\theta} \cong r\sqrt{1 \mp (d/r)\cos\theta} \cong r\left(1 \mp \frac{d}{2r}\cos\theta\right).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_{\pm}} &\cong \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right). \quad \cos\theta_{\pm} = \frac{r\cos\theta \mp (d/2)}{r_{\pm}} = r \left(\cos\theta \mp \frac{d}{2r}\right) \frac{1}{r} \left(1 \pm \frac{d}{2r}\cos\theta\right) = \cos\theta \pm \frac{d}{2r}\cos^2\theta \mp \frac{d}{2r} \\ &= \cos\theta \mp \frac{d}{2r}(1 - \cos^2\theta) = \cos\theta \mp \frac{d}{2r}\sin^2\theta. \end{aligned}$$

$$\sin[\omega(t - r_{\pm}/c)] = \sin\left\{\omega\left[t - \frac{r}{c}\left(1 \mp \frac{d}{2r}\cos\theta\right)\right]\right\} = \sin\left(\omega t_0 \pm \frac{\omega d}{2c}\cos\theta\right), \quad \square \quad \text{đây:}$$

$$t_0 \equiv t - r/c = \sin(\omega t_0) \cos\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right) \pm \cos(\omega t_0) \sin\left(\frac{\omega d}{2c} \cos \theta\right) \cong \sin(\omega t_0) \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \cos(\omega t_0).$$

$$\begin{aligned} V_{\pm} &= \mp \frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c r} \left\{ \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \left(\cos \theta \mp \frac{d}{2r} \sin^2 \theta \right) \left[\sin(\omega t_0) \pm \frac{\omega d}{2d} \cos \theta \cos(\omega t_0) \right] \right\} \\ &= \mp \frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c r} \left\{ \left(\cos \theta \mp \frac{d}{2r} \sin^2 \theta \pm \frac{d}{2r} \cos^2 \theta \right) \left[\sin(\omega t_0) \pm \frac{\omega d}{2d} \cos \theta \cos(\omega t_0) \right] \right\} \\ &= \mp \frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c r} \left[\cos \theta \sin(\omega t_0) \pm \frac{\omega d}{2c} \cos^2 \theta \cos(\omega t_0) \pm \frac{d}{2r} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin(\omega t_0) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{tot} &= -\frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c r} \left[\frac{\omega d}{c} \cos^2 \theta \cos(\omega t_0) + \frac{d}{r} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin(\omega t_0) \right] \\ &= -\frac{p_0 \omega^2 d}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \left[\cos^2 \theta \cos(\omega t_0) + \frac{c}{\omega r} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin(\omega t_0) \right]. \end{aligned}$$

Trong vùng bìa c x, $r \approx \omega/c$, s h ng th hai có th b qua, vì v y

$$V = -\frac{p_0 \omega^2 d}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \cos^2 \theta \cos[\omega(t - r/c)].$$

Trong khi đó:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\pm} &= \mp \frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r_{\pm}} \sin[\omega(t - r_{\pm}/c)] \hat{\mathbf{z}} \\ &= \mp \frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left\{ \left(1 \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \left[\sin(\omega t_0) \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \cos(\omega t_0) \right] \right\} \hat{\mathbf{z}} \\ &= \mp \frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left[\sin(\omega t_0) \pm \frac{\omega d}{2c} \cos \theta \cos(\omega t_0) \pm \frac{d}{2r} \cos \theta \sin(\omega t_0) \right] \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{A}_{tot} &= \mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_- = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \left[\frac{\omega d}{c} \cos \theta \cos(\omega t_0) + \frac{d}{r} \cos \theta \sin(\omega t_0) \right] \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 d}{4\pi c r} \cos \theta \left[\cos(\omega t_0) + \frac{c}{\omega r} \sin(\omega t_0) \right] \hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Trong vùng bìa c x, $\mathbf{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 d}{4\pi c r} \cos \theta \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\mathbf{z}}.$

(b) Đ đ n gi n kí hi u, đ t $\alpha = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2 d}{4\pi}$. Th thì $V = \alpha \frac{\cos^2 \theta}{r} \cos[\omega(t - r/c)];$

$$\begin{aligned}\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} = \alpha \cos^2 \theta \left\{ -\frac{1}{r^2} \cos[\omega(t-r/c)] + \frac{\omega}{rc} \sin[\omega(t-r/c)] \right\} \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + \alpha \frac{-2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \cos[\omega(t-r/c)] \hat{\theta} = \alpha \frac{\omega \cos^2 \theta}{c} \sin[\omega(t-r/c)] \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + \alpha \frac{-2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \cos[\omega(t-r/c)] \hat{\theta} \quad (\text{trong vùng } b \ll c \ll x)\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\alpha}{c} \frac{\cos \theta}{r} \cos[\omega(t-r/c)] (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\theta}).$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\alpha \omega}{c} \frac{\cos \theta}{r} \sin[\omega(t-r/c)] (\cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\theta}).$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\alpha \omega}{cr} \sin[\omega(t-r/c)] (\cos^2 \theta \hat{\mathbf{r}} - \cos^2 \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \cos \theta \hat{\theta}) \\ &= -\frac{\alpha \omega}{cr} \sin \theta \cos \theta \sin[\omega(t-r/c)] \hat{\theta}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \\ &= \frac{\alpha}{cr} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (\cos \theta \cos[\omega(t-r/c)] (-\sin \theta)) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\cos^2 \theta}{r} \cos[\omega(t-r/c)] \right] \right\} \hat{\phi}\end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha}{cr} (-\sin \theta \cos \theta) \frac{\omega}{c} \sin[\omega(t-r/c)] \hat{\phi} \quad (\text{trong vùng } b \ll c \ll x) = \boxed{-\frac{\alpha \omega}{c^2 r} \sin \theta \cos \theta \sin[\omega(t-r/c)] \hat{\phi}}.$$

Chú ý rằng: $\mathbf{B} = \frac{1}{c} (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E})$ và $\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} = 0$.

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\mu_0 c} [E^2 \hat{\mathbf{r}} - (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \mathbf{E}] = \frac{E^2}{\mu_0 c} \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} \left\{ \frac{\alpha \omega}{rc} \sin \theta \cos \theta \sin[\omega(t-r/c)] \right\}^2 \hat{\mathbf{r}}.\end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{\alpha \omega}{rc} \sin \theta \cos \theta \right)^2}.$$

$$P = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\alpha \omega}{c} \right)^2 \int \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\phi = \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{\alpha \omega}{c} \right)^2 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta. \quad \text{Tích}$$

$$\text{phân bố} \quad -\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi + \frac{\cos^5 \theta}{5} \Big|_0^\pi = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

$$= \frac{1}{2\mu_0 c} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\mu_0^2}{16\pi^2} (p_0 d)^2 \omega^4 2\pi \frac{4}{15} = \frac{\mu_0}{60\pi c^3} (p_0 d)^2 \omega^6.$$

Chú ý rằng nó có dòng ω^6 , trong khi bức xạ lưỡng cực có dòng ω^4

Bài tập 11.12:

ở đây $V = 0$ (bởi vì vòng không mang điện), và dòng điện chỉ phụ thuộc vào t (chỉ không phụ thuộc vào vị trí), vì vậy thế vector từ (phương trình 11.52) là $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I(t - R/c)}{R} d\mathbf{l}'$.

Nhưng trong trường hợp này, chúng ta chỉ cần thay R bằng r - nó sẽ trở thành phương trình 11.54, và vì thế $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ (bởi vì $\mathbf{p} = 0$). Thay vì vậy, dùng phương trình

(11.30): $\frac{1}{R} \cong \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right)$. Trong khi đó $d\mathbf{l}' = b d\phi' \hat{\phi} = b(-\sin \phi' \hat{x} + \cos \phi' \hat{y}) d\phi'$ và

$$I(t - R/c) \cong I(t - r/c + (b/c) \sin \theta \cos \phi') = I(t_0 + (b/c) \sin \theta \cos \phi') \cong I(t_0) + \dot{I}(t_0) \frac{b}{c} \sin \theta \cos \phi'$$

(mang tất cả các số hạng sang bậc nhất theo b). Nhớ rằng khi $t_0 = t - r/c$. (Tất nhiên, tôi sẽ bỏ qua thuyết: $I, \dot{I}$, tất cả đều được tính tại t_0). Thế thì

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{1}{r} \left(1 + \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right) \left(I + \dot{I} \frac{b}{c} \sin \theta \cos \phi' \right) b(-\sin \phi' \hat{x} + \cos \phi' \hat{y}) d\phi' \\ &\cong \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left[I + \dot{I} \frac{b}{c} \sin \theta \cos \phi' + I \frac{b}{r} \sin \theta \cos \phi' \right] (-\sin \phi' \hat{x} + \cos \phi' \hat{y}) d\phi'. \end{aligned}$$

$$\text{Nhưng } \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \sin \phi' \cos \phi' d\phi' = 0, \text{ trong khi } \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi' d\phi' = \pi$$

$$= \frac{\mu_0 b}{4\pi r} (\pi \hat{y}) \left[\dot{I} \frac{b}{c} \sin \theta + I \frac{b}{c} \sin \theta \right] = \frac{\mu_0 b^2}{4r^2} \sin \theta \left(I + \frac{r}{c} \dot{I} \right) \hat{y}.$$

Nói chung (tức là nói chung đối với các điểm không phải ở trên mặt phẳng xz) $\hat{y} \rightarrow \hat{\phi}$; hơn nữa, trong vùng bức xạ, chúng ta không quan tâm đến các số hạng có dòng $1/r^2$, do

$$\text{đó } \boxed{\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 b^2}{4c} \left[\dot{I}(t - r/c) \right] \frac{\sin \theta}{r} \hat{\phi}.$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \doteq -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 b^2}{4c} \left[\ddot{I}(t - r/c) \right] \frac{\sin \theta}{r} \hat{\phi}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta} \\ &= \frac{\mu_0 b^2}{4c} \left[\frac{\dot{I}}{r \sin \theta} \frac{1}{r} 2 \sin \theta \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \ddot{I} \left(-\frac{1}{c} \right) \sin \theta \hat{\theta} \right] = \frac{\mu_0 b^2}{4c^2} \ddot{I} \frac{\sin \theta}{r} \hat{\theta}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{\mu_0 b^2}{4c} \ddot{I} \frac{\sin \theta}{r} \right)^2 (-\hat{\phi} \times \hat{\theta}) = \frac{\mu_0}{16c^3} (b^2 \ddot{I})^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

$$\begin{aligned} P &= \int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0}{16c^3} (b^2 \ddot{I})^2 \int \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\mu_0}{16c^3} (b^2 \ddot{I})^2 (2\pi) \left(\frac{4}{3} \right) = \frac{\mu_0 \pi}{6c^3} (b^2 \ddot{I})^2 \\ &= \frac{\mu_0 \ddot{m}^2}{6\pi c^3}. \end{aligned}$$

(Chú ý rằng: $m = I\pi b^2$, $\ddot{m} = \ddot{I}\pi b^2$.)

Bài tập 11.13:

(a) $P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$, và thời gian để nó đến trạng thái dừng yên là $t = \nu_0 / a$, vì vậy năng lượng

đi ra là $U_{rad} = Pt = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \frac{\nu_0}{a}$. Động năng ban đầu là $U_{kin} = \frac{1}{2} m \nu_0^2$. Vì vậy tỉ số

$$x \text{ là } f = \frac{U_{rad}}{U_{kin}} = \frac{\mu_0 q^2 a}{3\pi m \nu_0 c}.$$

(b) $d = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} a \frac{\nu_0^2}{a^2} = \frac{\nu_0^2}{2a}$, do đó $a = \frac{\nu_0^2}{2d}$. Thế thì

$$f = \frac{\mu_0 q^2}{3\pi m \nu_0 c} \frac{\nu_0^2}{2d} = \frac{\mu_0 q^2 \nu_0}{6\pi m c d} = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(1.6 \times 10^{-19})^2 (10^5)}{6\pi (9.11 \times 10^{-31})(3 \times 10^8)(3 \times 10^{-9})} = 2 \times 10^{-10}$$

Vì vậy bức xạ bị mất do va chạm trong dây bình thường có thể bỏ qua.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = ma = m \frac{\nu^2}{r} \Rightarrow \nu = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{mr}}. \text{ Tại lúc bắt đầu } (r_0 = 0.5 \text{ \AA}),$$

$$\frac{\nu}{c} = \left[\frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{4\pi (8.85 \times 10^{-12})(9.11 \times 10^{-31})(5 \times 10^{-11})} \right]^{-1/2} \frac{1}{3 \times 10^8} = 0.0075,$$

Và khi bán kính bằng một phần trăm của v/c này chỉ lớn hơn một ít (0.075), vì vậy trên toàn bộ đồ án đồ thị, vận tốc không đáng kể.

Từ công thức Larmor, $P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left(\frac{v^2}{r} \right)^2 = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{mr^2} \right)^2$ (bởi vì $a = v^2/r$), và $P = -dU/dt$,

ở đây U là năng lượng toàn phần của electron:

$$U = U_{kin} + U_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r}. \quad \text{Do đó:}$$

$$-\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \frac{dr}{dt} = P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{mr^2} \right)^2, \text{ và ở đây } \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{3c} \left(\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 mc} \right)^2 \frac{1}{r^2}, \text{ hoặc}$$

$$dt = -3c \left(\frac{2\pi\epsilon_0 mc}{q^2} \right)^2 r^2 dr$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t &= -3c \left(\frac{2\pi\epsilon_0 mc}{q^2} \right)^2 \int_{r_0}^0 r^2 dr = c \left(\frac{2\pi\epsilon_0 mc}{q^2} \right)^2 r_0^3 \\ &= (3 \times 10^8) \left[\frac{2\pi (8.85 \times 10^{-12}) (9.11 \times 10^{-31}) (3 \times 10^8)}{(1.6 \times 10^{-19})^2} \right] (5 \times 10^{-11})^3 = 1.3 \times 10^{-11} \text{ s. } (\dots) \end{aligned}$$

Bài tập 11.15:

Theo phương trình 11.74, các đạo hàm tiếp theo của $\frac{d}{d\theta} \left[\frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \right] = 0$. Do đó:

$$\frac{2 \sin \theta \cos \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} - \frac{5 \sin^2 \theta (\beta \sin \theta)}{(1 - \beta \cos \theta)^6} = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos \theta (1 - \beta \cos \theta) = 5 \beta \sin^2 \theta = 5 \beta (1 - \cos^2 \theta); 2 \cos \theta - 2 \beta \cos^2 \theta = 5 \beta - 5 \beta \cos^2 \theta, \text{ hoặc}$$

$$3 \beta \cos^2 \theta + 2 \cos \theta - 5 \beta = 0. \cos \theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60 \beta^2}}{6 \beta} = \frac{1}{3 \beta} (\pm \sqrt{1 + 15 \beta^2} - 1).$$

Chúng ta muốn dấu cộng, bởi vì $\theta_m \rightarrow 90^\circ$ ($\cos \theta_m = 0$) Trong khi $\beta \rightarrow 0$ (hình

$$11.12): \theta_{\max} = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{1 + 15 \beta^2} - 1}{3 \beta} \right).$$

Đi với $v \approx c, \beta \approx 1$; với $\beta = 1 - \varepsilon$ (ở đây: $\varepsilon \ll 1$), và khai triển số hạng bình phương theo ε :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta} \right) &= \frac{1}{3(1-\varepsilon)} \left[\sqrt{1+15(1-\varepsilon)^2}-1 \right] \cong \frac{1}{3}(1+\varepsilon) \left[\sqrt{1+15(1-2\varepsilon)}-1 \right] \\ &= \frac{1}{3}(1+\varepsilon) \left[\sqrt{16-30\varepsilon}-1 \right] = \frac{1}{3}(1+\varepsilon) \left[4\sqrt{1-(15\varepsilon/8)}-1 \right] = \frac{1}{3}(1+\varepsilon) \left[4\left(1-\frac{15}{16}\varepsilon\right)-1 \right] \quad \text{Hiệu} \\ &= \frac{1}{3}(1+\varepsilon) \left(3-\frac{15}{4}\varepsilon \right) = (1+\varepsilon) \left(1-\frac{5}{4}\varepsilon \right) \cong 1+\varepsilon-\frac{5}{4}\varepsilon = 1-\frac{1}{4}\varepsilon. \end{aligned}$$

nhien $\theta_{\max} \approx 0$, do đó $\cos \theta_{\max} \cong 1 - \frac{1}{2}\theta_{\max}^2 = 1 - \frac{1}{4}\varepsilon \Rightarrow \theta_{\max}^2 = \frac{1}{2}\varepsilon$ hoặc $\theta_{\max} \cong \sqrt{\varepsilon/2} = \sqrt{(1-\beta)/2}$.

$$\text{Đặt} \quad f \equiv \frac{(dP/d\Omega|_{\theta_m})_{ur}}{(dP/d\Omega|_{\theta_m})_{rest}} = \left[\frac{\sin^2 \theta_{\max}}{(1-\beta \cos \theta_{\max})^5} \right]_{ur}. \quad \text{Bây giờ} \quad \sin^2 \theta_{\max} \cong \varepsilon/2, \quad \text{và}$$

$$(1-\beta \cos \theta_{\max}) \cong 1 - (1-\varepsilon) \left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon \right) \cong 1 - \left(1 - \varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon \right) = \frac{5}{4}\varepsilon. \quad \text{Do đó} : f = \frac{\varepsilon/2}{(5\varepsilon/4)^5} \left(\frac{4}{5} \right)^5 \frac{1}{2\varepsilon^4}. \quad \text{Nhưng:}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}} \cong \frac{1}{\sqrt{1-(1-2\varepsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2\gamma^2}.$$

$$\text{Do đó} \quad f = \left(\frac{4}{5} \right)^5 \frac{1}{2} (2\gamma^2)^4 = \frac{1}{4} \left(\frac{8}{5} \right)^5 \gamma^8 = 2.62\gamma^8.$$

Bài tập 11.16:

$$\text{Phỏng trình 11.72 cho chúng ta:} \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2\varepsilon_0} \frac{|\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})|^2}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^5}. \quad \text{Đặt}$$

$$\beta \equiv v/c. \quad \mathbf{u} = c\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{v} = c\hat{\mathbf{r}} - v\hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} = c - v(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) = c - v \cos \theta = c(1 - \beta \cos \theta);$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = ac(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) - av(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) = ac \sin \theta \cos \phi; \quad u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = c^2 - 2cv(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) + v^2 = c^2 + v^2 - 2cv \cos \theta.$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) &= (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a})^2 u^2 - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{a})(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}) + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{u})^2 a^2 \\
 &= (c^2 + v^2 - 2cv \cos \theta)(a \sin \theta \cos \phi)^2 - 2(ac \sin \theta \cos \phi)(a \sin \theta \cos \phi)(c - v \cos \theta) + a^2 c^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 \\
 &= a^2 \left[c^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 + (\sin^2 \theta \cos^2 \phi)(c^2 + v^2 - 2cv \cos \theta - 2c^2 + 2cv \cos \theta) \right] \\
 &= a^2 c^2 \left[(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2)(\sin \theta \cos \phi)^2 \right]. \\
 \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \frac{\left[(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right]}{(1 - \beta \cos \theta)^5}.
 \end{aligned}$$

Công suất toàn phần đi ra từ các hướng theo tất cả các hướng là:

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \int \frac{dP}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\phi = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \iint \frac{\left[(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \cos^2 \phi \right]}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \sin \theta d\theta d\phi. \quad \text{Nhân}$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \quad \text{và} \quad \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi = \pi$$

$$= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi^2 c} \pi \int_0^\pi \frac{\left[2(1 - \beta \cos \theta)^2 - (1 - \beta^2) \sin^2 \theta \right]}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \sin \theta d\theta.$$

Đặt $\varpi \equiv (1 - \beta \cos \theta)$. Khi thì $(1 - \varpi) / \beta = \cos \theta$; $\sin^2 \theta = [\beta^2 - (1 - \varpi)^2] / \beta^2$, và mẫu số trở

$$\begin{aligned}
 \text{thành} \quad 2\varpi^2 - \frac{(1 - \beta^2)}{\beta^2} (\beta^2 - 1 + 2\varpi - \varpi^2) &= \frac{1}{\beta^2} \left[2\varpi^2 \beta^2 + (1 - \beta^2)^2 - 2(1 - \beta^2)\varpi + \varpi^2 (1 - \beta^2) \right] \\
 &= \frac{1}{\beta^2} \left[(1 - \beta^2)^2 - 2(1 - \beta^2)\varpi + (1 + \beta^2)\varpi^2 \right];
 \end{aligned}$$

$$d\varpi = \beta \sin \theta d\theta \Rightarrow \sin \theta d\theta = \frac{1}{\beta} d\varpi. \quad \text{Trong} \quad \text{khi:} \quad \theta = \pi, \varpi = (1 - \beta);$$

$$\theta = \pi, \varpi = (1 + \beta). P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi c} \frac{1}{\beta^3} \int_{(1-\beta)}^{(1+\beta)} \frac{1}{\varpi^5} \left[(1 - \beta^2)^2 - 2(1 - \beta^2)\varpi + (1 + \beta^2)\varpi^2 \right] d\varpi. \quad \text{Tích phân là}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Int} &= (1-\beta^2)^2 \int \frac{1}{\varpi^5} d\varpi - 2(1-\beta^2) \int \frac{1}{\varpi^4} d\varpi + (1+\beta^2) \int \frac{1}{\varpi^3} d\varpi \\
 &= \left[(1-\beta^2)^2 \left(-\frac{1}{4\varpi^4} \right) - 2(1-\beta^2) \left(-\frac{1}{3\varpi^3} \right) + (1+\beta^2) \left(-\frac{1}{2\varpi^2} \right) \right]_{1-\beta}^{1+\beta} \\
 \frac{1}{\varpi^2} \Big|_{1+\beta}^{1-\beta} &= \frac{1}{(1+\beta)^2} \frac{1}{(1-\beta)^2} = \frac{(1-2\beta+\beta^2)-(1+2\beta+\beta^2)}{(1+\beta)^2(1-\beta)^2} = -\frac{4\beta}{(1-\beta^2)^2} \\
 \frac{1}{\varpi^3} \Big|_{1+\beta}^{1-\beta} &= \frac{1}{(1+\beta)^3} \frac{1}{(1-\beta)^3} = \frac{(1-3\beta+3\beta^2-\beta^3)-(1+3\beta+3\beta^2+\beta^3)}{(1+\beta)^3(1-\beta)^3} = -\frac{2\beta(3+\beta^2)}{(1-\beta^2)^3} \\
 \frac{1}{\varpi^4} \Big|_{1+\beta}^{1-\beta} &= \frac{1}{(1+\beta)^4} \frac{1}{(1-\beta)^4} = \frac{(1-4\beta+6\beta^2-4\beta^3+\beta^4)-(1+4\beta+6\beta^2+4\beta^3+\beta^4)}{(1+\beta)^4(1-\beta)^4} = -\frac{8\beta(1+\beta)^2}{(1-\beta^2)^4} \\
 \text{Int} &= (1-\beta^2)^2 \left(-\frac{1}{4} \right) \left(\frac{-8\beta(1+\beta)^2}{(1-\beta^2)^4} \right) - 2(1-\beta^2) \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\frac{-2\beta(3+\beta^2)}{(1-\beta^2)^3} \right) + (1+\beta^2) \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{-4\beta}{(1-\beta^2)^2} \right) \\
 &= \frac{2\beta}{(1-\beta^2)^2} \left[(1+\beta^2) - \frac{2}{3}(3+\beta^2) + (1+\beta^2) \right] = \frac{8}{3} \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)^2} \\
 P &= \frac{\mu_0 q^2 a^2}{16\pi c} \frac{1}{\beta^3} \frac{8}{3} \frac{\beta^3}{(1-\beta^2)^2} = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^4}{6\pi c}
 \end{aligned}$$

□

đây: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Cái này có phù hợp với công thức Lienard không (phương trình 11.73)? □ đây

$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = v a (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}}) = v a \hat{\mathbf{y}}$ do đó $a^2 - \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{a} \right)^2 = (1-\beta^2) a^2 = \frac{1}{\gamma^2} a^2$, vì vậy công thức Lienard cho

chúng ta $P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \frac{a^2}{\gamma^2}$.

Bài tập 11.17:

(a) Đo trung hòa phân ứng bức xạ (phương trình 11.80) bên phải tác động mặt lồi

$\mathbf{F}_e = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \mathbf{a}$. Cho chuyển động tròn: $\mathbf{r}(t) = R [\cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}}]$, Đo và chuyển động

tròn, $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}} = R\omega [-\sin(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + \cos(\omega t) \hat{\mathbf{y}}]$; $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}} = -R\omega^2 [\cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}}] = -\omega^2 \mathbf{r}$;

$\dot{\mathbf{a}} = -\omega^2 \dot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{v}$. do đó: $\mathbf{F}_e = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \omega^2 \mathbf{v}$. $P_e = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \omega^2 v^2$. Đây là công suất bức xạ phải cung cấp.

Trong khi đó, công suất bức xạ (phương trình 11.70) $P_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$, và

$a^2 = \omega^4 r^2 = \omega^4 R^2 = \omega^2 v^2$, do đó: $P_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \omega^2 v^2$, và hai biểu thức phù hợp.

(b) Đặt vị trí chuyển động điều hòa đơn, $\mathbf{r}(t) = A \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}}$; $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = -A\omega \sin(\omega t) \hat{\mathbf{z}}$; $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = -A\omega^2 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}} = -\omega^2 \mathbf{r}$; $\dot{\mathbf{a}} = -\omega^2 \dot{\mathbf{r}} = -\omega^2 \mathbf{v}$. Vì vậy

$\mathbf{F}_e = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \omega^2 \mathbf{v}$; $P_e = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \omega^2 v^2$,. Nhưng lần này $a^2 = \omega^4 r^2 = \omega^4 A^2 \cos^2(\omega t)$, và đây:

$\omega^2 v^2 = \omega^4 A^2 \sin^2(\omega t)$, do đó $P_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \omega^4 A^2 \cos^2(\omega t) \neq P_e = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \omega^4 A^2 \sin^2(\omega t)$;

Công suất mà bức xạ cung cấp không bằng công suất bức xạ. Tuy nhiên bởi vì trung bình theo thời gian của $\sin^2(\omega t)$ và $\cos^2(\omega t)$ bằng nhau (đều bằng $1/2$), trên trục một vòng, năng lượng bức xạ ra giống như năng lượng đưa vào. (trong khi ý, hiện nhiên năng lượng được lưu trữ tạm thời trong các trường bên trong)

(c) Trong trường hợp này, $\mathbf{v}(t) = \frac{1}{2} g t^2 \hat{\mathbf{y}}$; $\mathbf{v} = g t \hat{\mathbf{y}}$; $\dot{\mathbf{a}} = 0$. Do đó:

$\mathbf{F}_e = 0$; Phép tính bức xạ bằng không, và vì thế $P_e = 0$. Nhưng có bức xạ: $P_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} g^2$.

Hiện nhiên, năng lượng được lưu trữ ra liên tục từ các trường bên trong. Nghịch lý này vẫn còn trong nghi ngờ chính xác (ở đây chúng ta không giới hạn $v \ll c$, như trong công thức Larmor và công thức Abraham-Lorentz)

Bài tập 11.18:

(a) $\gamma = \omega^2 \tau$, và $\tau = 6 \times 10^{-24} \text{ s}$ (đặt vị trí các electron). $\gamma \ll \omega$ (nghĩa là $\tau \ll 1/\omega$)? Nếu ω trong vùng quang học, $\omega = 2\pi\nu = 2\pi(5 \times 10^{14}) = 3 \times 10^{15}$; $1/\omega = (1/3) \times 10^{-15} = 3 \times 10^{-16}$, nó lớn hơn nhiều so với τ , vì vậy sẽ tốt hơn thỉc sự như.

(b) Bài tập 9.24 cho chúng ta $\Delta\omega \cong \gamma = \omega_0^2 \tau = \left[2\pi(7 \times 10^{15})\right]^2 (6 \times 10^{-24}) = 1 \times 10^{10} \text{ rad/s}$. Bởi vì chúng ta ở trong vùng $\omega_0 \approx 4 \times 10^{16} \text{ rad/s}$, để riêng của vùng tán xạ để thấy rằng rất nhỏ.

Bài tập 11.19:

$$(a) a = \tau \dot{a} + \frac{F}{m} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \tau \frac{da}{dt} + \frac{F}{m} \Rightarrow \int \frac{dv}{dt} dt = \tau \int \frac{da}{dt} dt + \frac{1}{m} \int F dt.$$

$[v(t_0 + \varepsilon) - v(t_0 - \varepsilon)] = \tau [a(t_0 + \varepsilon) - a(t_0 - \varepsilon)] + \frac{2\varepsilon}{m} F_{ave}$, ở đây F_{ave} là lực trung bình trong khoảng thời gian. Nhưng v liên tục, vì vậy miền là F không phải là hàm delta, khi $\varepsilon \rightarrow 0$, chúng ta còn lại $[a(t_0 + \varepsilon) - a(t_0 - \varepsilon)] = 0$. Vì thế a cũng liên tục.

$$(b)(i) a = \tau \dot{a} = \tau \frac{da}{dt} \Rightarrow \frac{da}{dt} = \frac{1}{\tau} a \Rightarrow \int \frac{da}{a} = \frac{1}{\tau} \int dt \Rightarrow \ln a = \frac{t}{\tau} + \text{const} \Rightarrow \boxed{a(t) = Ae^{t/\tau}}, \text{ ở đây}$$

A là hằng số

$$(ii) a = \tau \dot{a} + \frac{F}{m} \Rightarrow \tau \frac{da}{dt} = a - \frac{F}{m} \Rightarrow \frac{da}{a - F/m} = \frac{1}{\tau} dt \Rightarrow \ln(a - F/m) = \frac{t}{\tau} + \text{const}$$

$$a - \frac{F}{m} = Be^{t/\tau} \Rightarrow \boxed{a(t) = \frac{F}{m} + Be^{t/\tau}}, \text{ ở đây } B \text{ là hằng số khác nào đó.}$$

$$(iii) \text{Theo (i)} \boxed{a(t) = Ce^{t/\tau}}, \text{ ở đây } C \text{ là hằng số tùy ý.}$$

$$(c) \text{Tại } t = 0, A = F/m + B; \text{ Tại } t = T, F/m + Be^{T/\tau} = Ce^{T/\tau} \Rightarrow C = (F/m)e^{-T/\tau} + B. \text{ Do đó:}$$

$$a(t) = \begin{cases} [(F/m) + B]e^{t/\tau}, & t \leq 0 \\ (F/m) + Be^{t/\tau}, & 0 \leq t \leq T; \\ [(F/m)e^{-T/\tau} + B]e^{t/\tau}, & t \geq T. \end{cases}$$

Để tránh sự nhảy tại $t = 0$ trong vùng (iii), chúng ta cần $B = -(F/m)e^{-T/\tau}$; để tránh sự tăng tại $t = T$ trong vùng (i), chúng ta cần $B = -(F/m)$. Hiện nhiên chúng ta không thể làm cả hai cùng lúc.

(d) Nếu chúng ta chọn tri thức tiêu số chủy trít đđng, thì

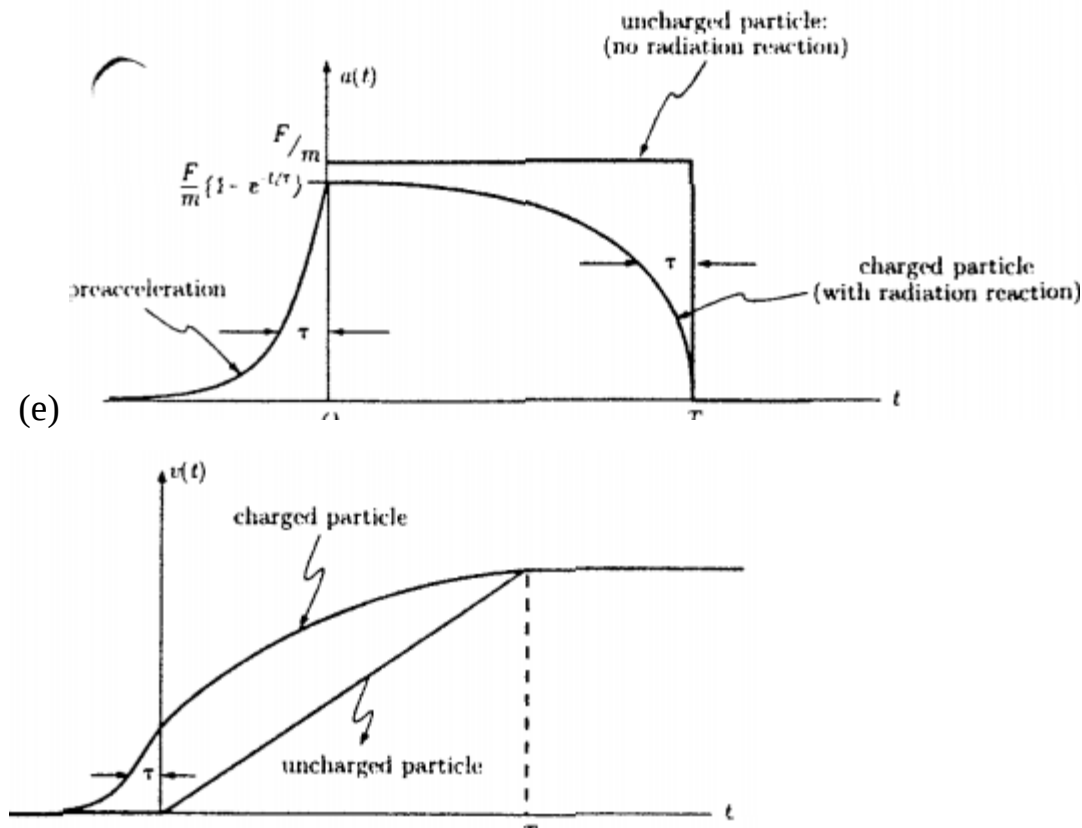
$$a(t) = \begin{cases} (F/m)[1 - e^{-t/\tau}]e^{t/\tau}, & t \leq 0; \\ (F/m)[1 - e^{-(t-T)/\tau}], & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t \geq T. \end{cases}$$

(i) $v = (F/m)[1 - e^{-T/\tau}] \int e^{t/\tau} dt = (F\tau/m)[1 - e^{-T/\tau}]e^{t/\tau} + D$, ở đây D là hằng số để xác định bởi điều kiện $v(-\infty) = 0 \Rightarrow D = 0$.

(ii) $v = (F/m)[1 - \tau e^{-(t-T)/\tau}] + E$, ở đây E là hằng số để xác định bởi điều kiện:

(iii) v là một hàm số giới hạn bởi tính liên tục của v lúc $t = T$

$$v = (F/m)[T + \tau - \tau] = (F/m)T. \quad v(t) = \begin{cases} (F\tau/m)[1 - e^{-t/\tau}]e^{t/\tau}, & t \leq 0 \\ (F/m)[t + \tau - \tau e^{-(t-T)/\tau}], & 0 \leq t \leq T; \\ (F/m)T, & t \geq T. \end{cases}$$



Bài tập 11.20:

(a) Trong phôi ng trình 11.80, $F_{rad}^{end} = \frac{\mu_0 (q/2)^2}{6\pi c} \dot{a}$, do đó

$$F_{rad} = F_{rad}^{int} + 2F_{rad}^{end} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{a} \left[\frac{1}{2} + 2 \left(\frac{1}{4} \right) \right] = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{a}.$$

(b) $F_{rad} = \frac{\mu_0}{12\pi c} \dot{a} \int_0^L \left\{ \int_0^{y_1} 2\lambda dy_2 \right\} 2\lambda dy_1$. Cho tích phân y_2 ch y đ n y_1 đ đ m b o r ng $y_1 \geq y_2$, vì

v y chúng ta không tính cùng m t c p hai l n. Ngoài ra, cho c hai tích phân ch y t 0 đ n L – tính hai l n có ch ý – và chia k t qu cho 2.)

$$F_{rad} = \frac{\mu_0 \dot{a}}{12\pi c} (4\lambda^2) \int_0^L y_1 dy_1 = \frac{\mu_0 \dot{a}}{12\pi c} (4\lambda^2) \frac{L^2}{2} = \frac{\mu_0}{6\pi c} (\lambda L)^2 \dot{a} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{a}.$$

Bài tập 11.21:

(a) Đây là l n g c c đ i n dao đ ng, v i đ l n $p_0 = qd$ và t n s $\omega = \sqrt{k/m}$. Vector

Pointing (tính trung bình) đ c cho b i phôi ng trình 11.21: $\langle \mathbf{S} \rangle = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$, vì v y

công su t trên m t đ n v di n tích c a s n nh là $I_f = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{r^2}$. Nh ng

$$\sin \theta = \frac{R}{r}, \cos \theta = \frac{h}{r}, \text{ và } r^2 = R^2 + h^2.$$

$$= \left(\frac{\mu_0 q^2 d^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{R^2 h}{(R^2 + h^2)^{5/2}}.$$

$$\frac{dI_f}{dR} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dR} \left[\frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{5/2}} \right] = 0 \Rightarrow \frac{2R}{(R^2 + h^2)^{5/2}} - \frac{5}{2} \frac{R^2}{(R^2 + h^2)^{7/2}} 2R = 0$$

$$(R^2 + h^2) - \frac{5}{2} R^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{3}{2} R^2 \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{2/3} h} \text{ cho c p ng đ t i đ a.}$$

(b) $P = \int I_f(R) da = \int I_f(R) 2\pi R dR = 2\pi \left(\frac{\mu_0 (qd)^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) h \int_0^\infty \frac{R^3}{(R^2 + h^2)^{5/2}} dR$. Đ t $x \equiv R^2$:

$$\int_0^\infty \frac{R^3}{(R^2 + h^2)^{5/2}} dR = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x}{(x + h^2)^{5/2}} dx = \frac{1}{2h} \frac{\Gamma(2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/2)} = \frac{2}{3h}.$$

$$= 2\pi \left(\frac{\mu_0 d^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \right) \frac{2}{3h} = \frac{\mu_0 d^2 \omega^4}{24\pi c},$$

Số bình phương của công suất bức xạ toàn phần (phương trình 11.22) – tất nhiên giá chỉm sản nhà.

(c) Biên độ là $x_0(t)$, vì vậy $U = \frac{1}{2} k x_0^2$ là năng lượng tích trữ và $dU/dt = -2P$ là công

suất bức xạ: $\frac{1}{2} k \frac{d}{dt}(x_0^2) = -\frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c} q^2 x_0^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(x_0^2) = -\frac{\mu_0 \omega^4 q^2}{6\pi k c} (x_0^2) = -k x_0^2 \Rightarrow x_0^2 = d^2 e^{-kt}$ hoặc

$$x_0(t) = d e^{-kt/2}. \quad \tau = \frac{2}{k} = \frac{12\pi k c}{\mu_0 q^2 k^2} m^2 = \frac{12\pi c m^2}{\mu_0 q^2 k}.$$

Bài tập 11.22:

(a) Trong phương trình 11.39, $\langle S \rangle = \left(\frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \right) \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r}$. Ở đây $\sin \theta = \frac{R}{r}$, $r = \sqrt{R^2 + h^2}$, và

công suất bức xạ toàn phần (phương trình 11.40) là $P = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$. Vì vậy cường độ là

$$I(R) = \left(\frac{12P}{32\pi} \right) \frac{R^2}{(R^2 + h^2)^2} = \frac{3P}{8\pi} \frac{R^2}{(R^2 + h^2)^2}.$$

(b) Cường độ bên dưới i ăng ten ($R = 0$) số bằng 0. Các kỹ sư sẽ đo nó tại vị trí cường

độ cực đại: $\frac{dI}{dR} = \frac{3P}{8\pi} \left[\frac{2R}{(R^2 + h^2)^2} - \frac{2R^2}{(R^2 + h^2)^3} 2R \right] = \frac{3P}{8\pi} \frac{2R}{(R^2 + h^2)^3} (R^2 + h^2 - 2R^2) = 0 \Rightarrow \boxed{R = h}.$

Tại vị trí này cường độ là $I(h) = \frac{3P}{8\pi} \frac{h^2}{(2h^2)^2} = \frac{3P}{32\pi h^2}.$

(c) $I_{\max} = \frac{3(35 \times 10^3)}{32\pi(200)^2} = 0.026 \text{ W/m}^2 = 2.6 \mu\text{W/cm}^2$. (có, KRUD trong tính toán).

Bài tập 11.23:

(a) $m(t) = M \cos \psi \hat{z} + M \sin \psi [\cos(\omega t) \hat{x} + \sin(\omega t) \hat{y}]$. Như trong bài tập 11.4, công suất bức xạ số lớn hơn hai lần công suất bức xạ của lưỡng cực dao động với moment lưỡng cực có

điều kiện $m_0 = M \sin \psi$. Do đó (tham khảo phần trình 11.40): $P = \frac{\mu_0 M^2 \omega^4 \sin^2 \psi}{6\pi c^3}$. (Ngoài ra, chúng ta có thể nhận được điều kiện này từ bài giải của bài tập 11.12).

(b) Từ phương trình 5.86 với $r \rightarrow R$, $m \rightarrow M$, và $\theta = \pi/2$: $B = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}$, do đó:

$$M = \frac{4\pi R^3}{\mu_0} B = \frac{4\pi (6.4 \times 10^6)^3 (5 \times 10^{-5})}{4\pi \times 10^{-7}} = 1.3 \times 10^{23} \text{ Am}^2.$$

$$(c) P = \frac{(4\pi \times 10^{-7})(1.3 \times 10^{23})^2 \sin^2(11^\circ)}{6\pi (3 \times 10^8)^3} \left(\frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \right)^4 = 4 \times 10^{-5} \text{ W (không nhiễu)}.$$

$$(d) P = \frac{\mu_0 (4\pi R^3 B / \mu_0)^2 \omega^4 \sin^2 \psi}{6\pi c^3} = \frac{8\pi}{3\mu_0 c^3} (\omega^2 R^3 B \sin \psi)^2. \text{ Dùng giá trị trung bình của } \sin^2 \psi$$

$$\text{bằng } 1/2, P = \frac{8\pi}{3(4\pi \times 10^{-7})(3 \times 10^8)^3} \left[\left(\frac{2\pi}{10^{-3}} \right)^2 (10^4)^3 (10^8) \right] \frac{1}{2} = 2 \times 10^{36} \text{ W. (nhiều)}$$

Bài tập 11.24:

$$\mathbf{A}(x, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(t_r)}{R} da = \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{z}}}{4\pi} \int \frac{K(t_r)}{\sqrt{r^2 + x^2}} 2\pi r dr = \frac{\mu_0 \hat{\mathbf{z}}}{2} \int \frac{K(t - \sqrt{r^2 + x^2}/c)}{\sqrt{r^2 + x^2}} r dr. \text{ Chọn } r \text{ để cho}$$

bị công thức $t - \sqrt{r^2 + x^2}/c = 0$; $r_{\max} = \sqrt{c^2 t^2 - x^2}$ (vì $K(t) = 0$ khi $t < 0$).

$$(i) \mathbf{A}(x, t) = \frac{\mu_0 K_0 \hat{\mathbf{z}}}{2} \int_0^{r_m} \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} dr = \frac{\mu_0 K_0 \hat{\mathbf{z}}}{2} \sqrt{r^2 + x^2} \Big|_0^{r_m} = \frac{\mu_0 K_0 \hat{\mathbf{z}}}{2} (\sqrt{r_m^2 + x^2} - x) = \frac{\mu_0 K_0 (ct - x)}{2} \hat{\mathbf{z}}.$$

$$\mathbf{E}(x, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 K_0 c}{2} \hat{\mathbf{z}}, \text{ đối với } ct > x \text{ và } 0, \text{ đối với } ct < x$$

$$\mathbf{B}(x, t) = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mu_0 K_0}{2} \hat{\mathbf{y}}, \text{ đối với } ct > x \text{ và } 0, \text{ đối với } ct < x$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x, t) &= \frac{\mu_0 \alpha \hat{\mathbf{z}}}{2} \int_0^{r_m} \frac{(t - \sqrt{r^2 + x^2}/c)}{\sqrt{r^2 + x^2}} r dr = \frac{\mu_0 \alpha \hat{\mathbf{z}}}{2} \left[t \int_0^{r_m} \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} dr - \frac{1}{c} \int_0^{r_m} r dr \right] \\ &= \frac{\mu_0 \alpha \hat{\mathbf{z}}}{2} \left[t(ct - x) - \frac{1}{2c} (c^2 t^2 - x^2) \right] = \frac{\mu_0 \alpha \hat{\mathbf{z}}}{4} (x^2 - 2ctx + c^2 t^2) = \frac{\mu_0 \alpha (x - ct)^2}{4c} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(x,t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 \alpha (x-ct)}{2} \hat{\mathbf{z}}, \text{ đối với } ct > x \text{ và } 0 \text{ đối với } ct < x$$

$$\mathbf{B}(x,t) = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{\mu_0 \alpha}{2} (x-ct) \hat{\mathbf{y}}, \text{ đối với } ct > x \text{ và } 0 \text{ đối với } ct < x$$

(b) Đặt $u \equiv \frac{1}{c}(\sqrt{r^2 + x^2} - x)$, do đó $du = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} 2r dr \right] = \frac{1}{c} \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} dr$ và

$$t - \frac{\sqrt{r^2 + x^2}}{c} = t - \frac{x}{c} - u, \text{ và khi } r: 0 \rightarrow \infty, u: 0 \rightarrow \infty. \text{ Thế thì } \mathbf{A}(x,t) = -\frac{\mu_0 c \hat{\mathbf{z}}}{2} \int_0^\infty K\left(t - \frac{x}{c} - u\right) du. \text{ qed.}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x,t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 c \hat{\mathbf{z}}}{2} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} K\left(t - \frac{x}{c} - u\right) du. \text{ Nhưng } \frac{\partial}{\partial t} K\left(t - \frac{x}{c} - u\right) = \frac{\partial}{\partial u} K\left(t - \frac{x}{c} - u\right). \\ &= \frac{\mu_0 c}{2} \hat{\mathbf{z}} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u} K\left(t - \frac{x}{c} - u\right) du = \frac{\mu_0 c}{2} \hat{\mathbf{z}} \left[K\left(t - \frac{x}{c} - u\right) \right]_0^\infty = -\frac{\mu_0 c}{2} [K(t - x/c) - K(-\infty)] \hat{\mathbf{z}} \\ &= -\frac{\mu_0 c}{2} K(t - x/c) \hat{\mathbf{z}}, [\text{với } K(-\infty) = 0] \end{aligned}$$

Chú ý rằng (i) và (ii) phù hợp với kết quả này. Trong khi đó

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x,t) &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{\mu_0 c}{c} \hat{\mathbf{y}} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} K\left(t - \frac{x}{c} - u\right) du. \text{ Nhưng } \frac{\partial}{\partial x} K\left(t - \frac{x}{c} - u\right) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial u} K\left(t - \frac{x}{c} - u\right). \\ &= -\frac{\mu_0}{2} \hat{\mathbf{y}} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial u} K\left(t - \frac{x}{c} - u\right) du = -\frac{\mu_0}{2} \hat{\mathbf{y}} \left[K\left(t - \frac{x}{c} - u\right) \right]_0^\infty = \frac{\mu_0}{2} [K(t - x/c) - K(-\infty)] \hat{\mathbf{y}} \\ &= \frac{\mu_0}{2} K(t - x/c) \hat{\mathbf{y}}, [\text{với } K(-\infty) = 0] \end{aligned}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mu_0 c}{2} \right) \left(\frac{\mu_0}{2} \right) K(t - x/c) [-\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}}] = \frac{\mu_0 c}{4} [K(t - x/c)]^2 \hat{\mathbf{x}}.$$

Đây là công suất trên mặt diện tích đơn vị x tại thời điểm t ; nó rời khỏi bề mặt tại thời điểm $(t - x/c)$. Hơn nữa, mật độ năng lượng tổng cộng bằng bội số xu hướng phía

dương, vì vậy công suất toàn phần thoát khỏi bề mặt tại thời điểm t là $\frac{\mu_0 c}{2} [K(t)]^2$.

Bài tập 11.25:

$$p(t) = 2qz(t); \ddot{p} = 2q\ddot{z}; F = m\ddot{z} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2z)^2}; \ddot{z} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4mz^2} = -\frac{\mu_0 c^2 q^2}{16\pi m z^2}; \ddot{p} = -\frac{\mu_0 c^2 q^3}{8\pi m z^2}. \quad \text{Dùng}$$

phương trình 11.60, công suất bức xạ là

$$P = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \left(-\frac{\mu_0 c^2 q^3}{8\pi m z^2} \right)^2 = \frac{\mu_0^3 c^3 q^6}{6(4\pi)^3 m^2 z^4} = \left(\frac{\mu_0 c q^2}{4\pi} \right)^3 \frac{1}{6m^2 z^4}.$$

Bài tập 11.26:

Với $\alpha = 90^\circ$ phương trình 7.68 cho $\mathbf{E}' = c\mathbf{B}$, $\mathbf{B}' = -\frac{1}{c}\mathbf{E}$, $q'_m = -cq_e$. Dùng những điều này để

“hiệu” các phương trình 10.65, 10.66 và 11.70:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= c \left(\frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E} \right) = \mathbf{R} \times (-c\mathbf{B}') = -c (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}'). \\ \mathbf{B}' &= -\frac{1}{c} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \left[(c^2 - v^2) \mathbf{u} + \mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right] \\ &= -\frac{1}{c} \frac{(-q'_m/c)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \left[(c^2 - v^2) \mathbf{u} + \mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right] = \frac{\mu_0 q'_m}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \left[(c^2 - v^2) \mathbf{u} + \mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right]. \\ P &= \frac{\mu_0 a^2}{6\pi c} q_e^2 = \frac{\mu_0 a^2}{6\pi c} \left(-\frac{1}{c} q'_m \right)^2 = \frac{\mu_0 a^2}{6\pi c^3} (q'_m)^2. \end{aligned}$$

Hoặc bằng các điều kiện:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \left[(c^2 - v^2) \mathbf{u} + \mathbf{R} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right]. \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -c (\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}). \\ P &= \frac{\mu_0 q_m^2 a^2}{6\pi c^3} \end{aligned}$$

Bài tập 11.27:

(a) $W_{\text{ext}} = \int F dx = F \int_0^T v(t) dt$. Từ bài tập 11.19, $v(t) = \frac{F}{m} \left[t + \tau - \tau e^{(t-T)/\tau} \right]$. Do đó

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \frac{F^2}{m} \left[\int_0^T t dt + \tau \int_0^T dt - \tau e^{-T/\tau} \int_0^T e^{t/\tau} dt \right] = \frac{F^2}{m} \left[\frac{t^2}{2} + \tau t - \tau e^{-T/\tau} \tau e^{t/\tau} \right]_0^T \\ &= \frac{F^2}{m} \left[\frac{1}{2} T^2 + \tau T - \tau^2 e^{-T/\tau} (e^{T/\tau} - 1) \right] = \frac{F^2}{m} \left(\frac{1}{2} T^2 + \tau T - \tau^2 + \tau^2 e^{-T/\tau} \right). \end{aligned}$$

(b) Từ bài tập 11.19, vận tốc cuối cùng là $v_f = (F/m)T$, do đó $W_{kin} = \frac{1}{2}m \frac{F^2}{m^2} T^2 = \frac{F^2 T^2}{2m}$.

(c) $W_{rad} = \int P dt$. Theo công thức Larmor là: $P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$, và (từ bài tập 11.19):

$$a(t) = \begin{cases} (F/m)[1 - e^{-T/\tau}], & (t \leq 0); \\ (F/m)[1 - e^{-(t-T)/\tau}], & (0 \leq t \leq T). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_{rad} &= \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{F^2}{m^2} \left\{ (1 - e^{-T/\tau})^2 \int_{-\infty}^0 e^{2t/\tau} dt + \int_0^T [1 - e^{-(t-T)/\tau}]^2 dt \right\} \\ &= \tau \frac{F^2}{m} \left\{ (1 - e^{-T/\tau})^2 \left(\frac{\tau}{2} e^{2t/\tau} \right) \Big|_{-\infty}^0 + \int_0^T dt - 2e^{-T/\tau} \int_0^T e^{t/\tau} dt + e^{-2T/\tau} \int_0^T e^{2t/\tau} dt \right\} \\ &= \frac{\tau F^2}{m} \left\{ \frac{\tau}{2} (1 - e^{-T/\tau})^2 + T - 2e^{-T/\tau} \left(\tau e^{t/\tau} \right) \Big|_0^T + e^{-2T/\tau} \left(\frac{\tau}{2} e^{2t/\tau} \right) \Big|_0^T \right\} \\ &= \frac{\tau F^2}{m} \left[\frac{\tau}{2} (1 - 2e^{-T/\tau} + e^{-2T/\tau}) + T - 2\tau e^{-T/\tau} (e^{T/\tau} - 1) + \frac{\tau}{2} e^{-2T/\tau} (e^{2T/\tau} - 1) \right] \\ &= \frac{\tau F^2}{m} \left[\frac{\tau}{2} - \tau e^{-T/\tau} + \frac{\tau}{2} e^{-2T/\tau} + T - 2\tau + 2\tau e^{-T/\tau} + \frac{\tau}{2} - \frac{\tau}{2} e^{-2T/\tau} \right] = \frac{\tau F^2}{m} (T - \tau + \tau e^{-T/\tau}). \end{aligned}$$

Bỏ toàn năng lượng đòi hỏi trong công thức thì chỉ còn năng lượng bức xạ và năng lượng cuối cùng của vật năng lượng tỏa ra:

$$W_{kin} + W_{rad} = \frac{F^2 T^2}{2m} + \frac{\tau F^2}{m} (T - \tau + \tau e^{-T/\tau}) = \frac{F^2}{m} \left(\frac{1}{2} T^2 + \tau T - \tau^2 + \tau^2 e^{-T/\tau} \right) = W_{ext}.$$

Bài tập 11.28:

$$(a) \quad a = \tau \dot{a} + \frac{k}{m} \delta(t) \Rightarrow \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} a(t) dt = v(\varepsilon) - v(-\varepsilon) = \tau \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{da}{dt} dt + \frac{k}{m} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = \tau [a(\varepsilon) - a(-\varepsilon)] + \frac{k}{m}.$$

Nếu vận tốc là liên tục thì: $v(\varepsilon) = v(-\varepsilon)$, do đó $\boxed{a(\varepsilon) - a(-\varepsilon) = -\frac{k}{m\tau}}.$

Khi $t < 0$, $a = \tau \dot{a} \Rightarrow a(t) = Ae^{t/\tau}$; khi $t > 0$, $a = \tau \dot{a} \Rightarrow a(t) = Be^{t/\tau}$; $\Delta a = B - A = -\frac{k}{m\tau} \Rightarrow B = A - \frac{k}{m\tau}$,

do đó nghiệm tổng quát là $\boxed{a(t) = \begin{cases} Ae^{t/\tau} & (t < 0); \\ [A - (k/m\tau)]e^{t/\tau}, & (t > 0). \end{cases}}$

Đồ thị biểu số cho thấy rằng chúng ta cần $A = k / m\tau$, đồ thị biểu khả năng tăng tốc trước chúng ta cần $A = 0$. Rõ ràng bên không thể làm hai việc đó. Nếu bên chọn đồ thị số

cho

hình

thì:

$$a(t) = \begin{cases} (k / m\tau) e^{t/\tau} & (t < 0); \\ 0, & (t > 0). \end{cases}$$

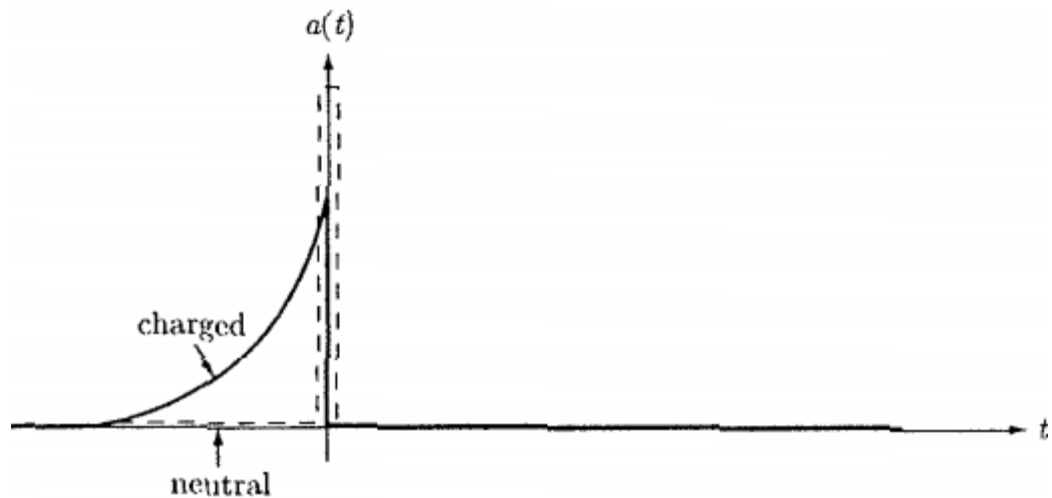
$$v(t) = \int_{-\infty}^t a(t) dt = \frac{k}{m\tau} \int_{-\infty}^t e^{t/\tau} dt = \frac{k}{m\tau} \left(\tau e^{t/\tau} \right) \Big|_{-\infty}^t = \frac{k}{m} e^{t/\tau} \quad (\text{đi} \quad v \quad t < 0); \quad \text{đi} \quad v \quad t > 0,$$

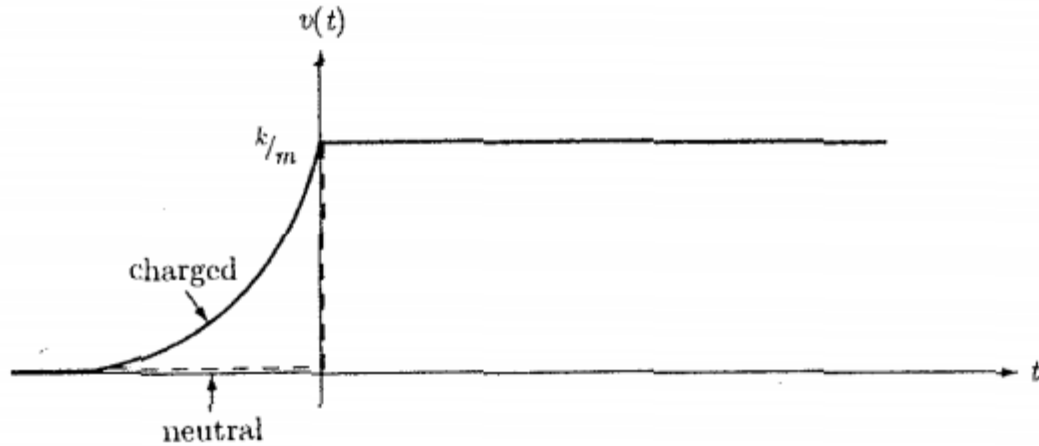
$$t > 0, v(t) = v(0) + \int_0^t a(t) dt = v(0) = \frac{k}{m}. \text{ Do đó } v(t) = \begin{cases} (k / m) e^{t/\tau}, & (t < 0); \\ (k / m), & (t > 0). \end{cases}$$

Đi với mặt đất không mang điện chúng ta có có:

$$a(t) = \frac{k}{m} \delta(t), \quad v(t) = \int_{-\infty}^t a(t) dt = \begin{cases} 0, & (t < 0) \\ (k / m), & (t > 0) \end{cases}$$

Các đồ thị:





$$W_{\text{ext}} = \int F dx = \int F v dt = k \int \delta(t) v(t) dt = k v(0) = \frac{k^2}{m}.$$

$$(b) W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{k}{m} \right)^2 = \frac{k^2}{2m}.$$

$$W_{\text{ext}} = \int P_{\text{rad}} dt = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int [a(t)]^2 dt = \tau m \left(\frac{k}{m\tau} \right)^2 \int_{-\infty}^0 e^{2t/\tau} dt = \frac{k^2}{m\tau} \left(\frac{\tau}{2} e^{2t/\tau} \right) \Big|_{-\infty}^0 = \frac{k^2}{m\tau} \frac{\tau}{2} = \frac{k^2}{2m}.$$

Rõ ràng, $W_{\text{ext}} = W_{\text{kin}} + W_{\text{rad}}.$

Bài tập 11.29:

Nhiệm vụ của chúng ta là giải phương trình $a = \tau \dot{a} + \frac{U_0}{m} [-\delta(x) + \delta(x-L)]$, theo các điều

kiên biên:

- (1) x liên tục tại $x=0$ và $x=L$;
- (2) v liên tục tại $x=0$ và $x=L$;
- (3) $\Delta a = \pm U_0 / m\tau v$ (dấu + tại $x=0$, dấu - tại $x=L$).

Ba phương trình sau đây có thể tính tích phân các phương trình chuyển động:

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{dt} dt &= \tau \int \frac{da}{dt} dt + \frac{U_0}{m} \int [-\delta(x) + \delta(x-L)] dt, \\ \Delta v &= \tau \Delta a + \frac{U_0}{m} \int [-\delta(x) + \delta(x-L)] \frac{dt}{dx} dx = 0, \\ \Delta a &= \frac{U_0}{m\tau} \int \frac{1}{v} [-\delta(x) + \delta(x-L)] dx = \pm \frac{U_0}{m\tau v}. \end{aligned}$$

□ mọt trong ba vùng này, lúc bằng 0 (nó chỉ đúng tại $x=0$ và $x=L$), và nghiệm tổng quát là: $a(t) = Ae^{t/\tau}$; $v(t) = A\tau e^{t/\tau} + B$; $x(t) = A\tau^2 e^{t/\tau} + Bt + C$.

(Tôi sẽ để các hằng số vào A, B, và C để phân biệt ba miền)

Miền iii: ($x > L$): để tránh sự phức tạp, chúng ta chọn $A_3 = 0$; thì $a(t) = 0$,

$v(t) = B_3$, $x(t) = B_3 t + C_3$. Để tiện tính cùng là $v_f (= B_3)$, chọn thế đi sao cho $t = 0$

khi hạt tại $x = 0$, và để T là thời gian để hạt chui qua hàng rào, nên $x(T) = L = v_f T + C_3$,

và vì thế $C_3 = L - v_f T$. Thì $\boxed{a(t) = 0; v(t) = v_f, x(t) = L + v_f(t - T), (t > T)}$

Miền ii ($0 < x < L$): $a = A_2 e^{t/\tau}$, $v = A_2 \tau e^{t/\tau} + B_2$, $x = A_2 \tau^2 e^{t/\tau} + B_2 t + C_2$.

$$(3) \Rightarrow 0 - A_2 e^{T/\tau} = -\frac{U_0}{m\tau v_f} \Rightarrow A_2 = \frac{U_0}{m\tau v_f} e^{-T/\tau}.$$

$$(2) \Rightarrow v_f = A_2 \tau e^{T/\tau} + B_2 = \frac{U_0}{mv_f} + B_2 \Rightarrow B_2 = v_f - \frac{U_0}{mv_f}.$$

$$(1) \Rightarrow L = A_2 \tau^2 e^{T/\tau} + B_2 T + C_2 = \frac{U_0 \tau}{mv_f} + v_f T - \frac{U_0 T}{mv_f} + C_2 = v_f T + \frac{U_0}{mv_f}(\tau - T) + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = L - v_f T + \frac{U_0}{mv_f}(T - \tau).$$

$$\boxed{\begin{aligned} a(t) &= \frac{U_0}{m\tau v_f} e^{(t-T)/\tau}; \\ v(t) &= v_f + \frac{U_0}{mv_f} [e^{(t-T)/\tau} - 1]; \\ x(t) &= L + v_f(t - T) + \frac{U_0}{mv_f} [\tau e^{(t-T)/\tau} - t + T - \tau] \end{aligned}} \quad (0 < t < T).$$

[Chú ý: nếu hàng rào đủ rộng (hay cao) hạt có thể đi vòng tròn khi đến L, nhưng ở đây chúng ta chỉ quan tâm đến vùng nó xuyên hầm]

Để kiểm tra, để v tại $t = 0$ (khi $x = 0$):

$$0 = L - v_f T + \frac{U_0}{mv_f} [\tau e^{-T/\tau} + T - \tau] \Rightarrow L = v_f T - \frac{U_0}{mv_f} [\tau e^{-T/\tau} + T - \tau]. \text{ qed}$$

Miêu tả: (x(0): $a = A_1 e^{t/\tau}$, $v = A_1 \tau e^{t/\tau} + B_1$, $x = A_1 \tau^2 e^{t/\tau} + B_1 t + C_1$. Điểm v_i là vận tốc tại (tại $t \rightarrow -\infty$); thì: $B_1 = v_i$. Điều kiện 3 cho chúng ta:

$$\frac{U_0}{m\tau v_f} e^{-T/\tau} - A_1 = \frac{U_0}{m\tau v_f},$$

ở đây v_0 là tốc độ hạt khi nó qua $x=0$. Từ các nghiệm trong miền (ii) suy ra $v_0 = v_f + \frac{U_0}{mv_f} (e^{-T/\tau} - 1)$. Nhưng chúng ta cũng có thể biểu diễn nó theo các nghiệm trong

miền (i): $v_0 = A_1 \tau + v_i$

Do đó:

$$\begin{aligned} v_i &= v_f + \frac{U_0}{mv_f} (e^{-T/\tau} - 1) - A_1 \tau = v_f + \frac{U_0}{mv_f} (e^{-T/\tau} - 1) + \frac{U_0}{mv_0} - \frac{U_0}{mv_f} e^{-T/\tau} \\ &= v_f - \frac{U_0}{mv_f} + \frac{U_0}{mv_0} = v_f - \frac{U_0}{mv_f} \left(1 - \frac{v_f}{v_0} \right) = v_f - \frac{U_0}{mv_f} \left\{ 1 - \frac{v_f}{v_f + (U_0 / mv_f) [e^{-T/\tau} - 1]} \right\} \\ &= v_f - \frac{U_0}{mv_f} \left\{ 1 - \frac{1}{1 + (U_0 / mv_f^2) [e^{-T/\tau} - 1]} \right\}. \quad \text{qed} \end{aligned}$$

Nếu $\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} U_0$, thì

$$\begin{aligned} L &= v_f T - v_f [\tau e^{-T/\tau} + T - \tau] = v_f [T - \tau e^{-T/\tau} - T + \tau] = \tau v_f (1 - e^{-T/\tau}); \\ v_i &= v_f - v_f \left[1 - \frac{1}{1 + e^{-T/\tau} - 1} \right] = v_f (1 - 1 + e^{T/\tau}) = v_f e^{T/\tau}. \end{aligned}$$

Đặt chúng cùng nhau:

$$\frac{L}{\tau v_f} = 1 - e^{-T/\tau} \Rightarrow e^{-T/\tau} = 1 - \frac{L}{\tau v_f} \Rightarrow e^{T/\tau} = \frac{1}{1 - (L / \tau v_f)} \Rightarrow v_i = \frac{v_f}{1 - (L / v_f \tau)}. \quad \text{qed}$$

Đặt biệt, để dễ dàng $L = v_f \tau / 4$, $v_i = \frac{v_f}{1 - 1/4} = \frac{4}{3} v_f$, do đó $\frac{KE_i}{KE_f} = \frac{\frac{1}{2} m v_i^2}{\frac{1}{2} m v_f^2} = \left(\frac{v_i}{v_f} \right)^2 = \frac{16}{9}$

$$KE_i = \frac{16}{9} KE_f = \frac{16}{9} \frac{1}{2} U_0 = \frac{8}{9} U_0.$$

Bài tập 11.30:

(a) Từ phương trình 10.65, $\mathbf{E}_1 = \frac{(q/2)}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathfrak{R}}{(\mathfrak{R}.\mathbf{u})^3} \left[(c^2 - v^2)\mathbf{u} + (\mathfrak{R}.\mathbf{a})\mathbf{u} - (\mathfrak{R}.\mathbf{u})\mathbf{a} \right]$. Ở đây

$\mathbf{u} = c\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{v}$, $\mathfrak{R} = l\hat{\mathbf{x}} + d\hat{\mathbf{y}}$, $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$, do đó $\mathfrak{R}.\mathbf{v} = lv$, $\mathfrak{R}.\mathbf{a} = la$, $\mathfrak{R}.\mathbf{u} = c\mathfrak{R} - \mathfrak{R}.\mathbf{v} = c\mathfrak{R} - lv$. Chúng ta chia muyn thành phần x. Chú ý rằng $u_x = (c/\mathfrak{R})l - v = (cl - v\mathfrak{R})/\mathfrak{R}$, chúng ta có:

$$\begin{aligned} E_{1x} &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{\mathfrak{R}}{(c\mathfrak{R} - lv)^3} \left[\frac{1}{\mathfrak{R}} (cl - v\mathfrak{R})(c^2 - v^2 + la) - a(c\mathfrak{R} - lv) \right] \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{(c\mathfrak{R} - lv)^3} \left[(cl - v\mathfrak{R})(c^2 - v^2) + cl^2a - v\mathfrak{R}la - ac\mathfrak{R}^2 + alv\mathfrak{R} \right] \quad \text{nhớ rằng } \mathfrak{R}^2 = l^2 + d^2. \\ &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{(c\mathfrak{R} - lv)^3} \left[(cl - v\mathfrak{R})(c^2 - v^2) - acd^2 \right]. \end{aligned}$$

$\mathbf{F}_{self} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{(c\mathfrak{R} - lv)^3} \left[(cl - v\mathfrak{R})(c^2 - v^2) - acd^2 \right] \hat{\mathbf{x}}$ (Điều kiện này tổng quát hóa phương trình 11.90)

Bây giờ $x(t) - x(t_r) = l = vT + \frac{1}{2}aT^2 + \frac{1}{6}\dot{a}T^3 + \dots$, ở đây $T = t - t_r$, và v, a và $\dot{a}$ đều được tính tại thời gian trễ hoàn t_r .

$(cT)^2 = \mathfrak{R}^2 = l^2 + d^2 = d^2 + \left(vT + \frac{1}{2}aT^2 + \frac{1}{6}\dot{a}T^3 \right)^2 = d^2 + v^2T^2 + vaT^3 + \frac{1}{3}v\dot{a}T^4 + \frac{1}{4}a^2T^4;$
 $c^2T^2(1 - v^2/c^2) = c^2T^2/\gamma^2 = d^2 + vaT^3 + \left(\frac{1}{3}v\dot{a} + \frac{1}{4}a^2 \right)T^4$. Giờ đây với T nhỏ mặt chủ yếu lũy thừa theo d:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\gamma d}{c} (1 + Ad + Bd^2 + \dots) \\ \Rightarrow \frac{c^2}{\gamma^2} \frac{\gamma^2 d^2}{c^2} (1 + 2Ad + 2Bd^2 + A^2d^2) &= d^2 + va \frac{\gamma^3 d^3}{c^3} (1 + 3Ad) + \left(\frac{v\dot{a}}{3} + \frac{a^2}{4} \right) \frac{\gamma^4}{c^4} d^4. \end{aligned}$$

So sánh chủ yếu c a d:

$$A = \frac{1}{2} \nu a \frac{\gamma^3}{c^3}; \quad 2B + A^2 = \frac{3\nu a \gamma^3}{c^3} A + \left(\frac{\nu \dot{a}}{3} + \frac{a^2}{4} \right) \frac{\gamma^4}{c^4}.$$

$$\begin{aligned} 2B &= \frac{3\nu a \gamma^3}{c^3} \frac{1}{2} \nu a \frac{\gamma^3}{c^3} - \frac{1}{4} \nu^2 a^2 \frac{\gamma^6}{c^6} + \frac{\nu \dot{a}}{3} \frac{\gamma^4}{c^4} + \frac{a^2 \gamma^4}{4c^4} = \frac{\nu \dot{a}}{3} \frac{\gamma^4}{c^4} + \frac{\gamma^6 a^2}{4c^4} \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{\nu^2}{c^2} \right) + \frac{3}{2} \frac{\nu^2 a^2 \gamma^6}{c^6} \\ &= \frac{\gamma^4}{c^4} \left[\frac{\nu \dot{a}}{3} + \frac{a^2 \gamma^2}{4} \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2} - \frac{\nu^2}{c^2} + 6 \frac{\nu^2}{c^2} \right) \right] \Rightarrow B = \frac{\gamma^4}{2c^4} \left[\frac{\nu \dot{a}}{3} + \frac{a^2 \gamma^2}{4} \left(1 + 4 \frac{\nu^2}{c^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$T = \frac{\gamma d}{c} \left\{ 1 + \frac{\nu a}{2} \frac{\gamma^3}{c^3} d + \frac{\gamma^4}{2c^4} \left[\frac{\nu \dot{a}}{3} + \frac{\gamma^2 a^2}{4} \left(1 + 4 \frac{\nu^2}{c^2} \right) \right] d^2 \right\} + () d^4 + .. \quad (\text{khái quát hóa ph\`ng trình}$$

11.93)

$$\begin{aligned} l &= \nu T + \frac{1}{2} a T^2 + \frac{1}{6} \dot{a} T^3 + \\ &= \frac{\nu \gamma d}{c} \left\{ 1 + \frac{\nu a}{2} \frac{\gamma^3}{c^3} d + \frac{\gamma^4}{2c^4} \left[\frac{\nu \dot{a}}{3} + \frac{\gamma^2 a^2}{4} \left(1 + 4 \frac{\nu^2}{c^2} \right) \right] d^2 \right\} + \frac{1}{2} a \frac{\gamma^2 d^2}{c^2} \left[1 + \nu a \frac{\gamma^3}{c^3} d \right] + \frac{1}{6} \dot{a} \frac{\gamma^3}{c^3} d^3 \\ &= \left(\frac{\nu \gamma}{c} \right) d + \frac{a}{2} \frac{\gamma^4}{c^2} \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2} + \frac{\nu^2}{c^2} \right) d^2 + \left\{ \frac{\nu \gamma}{2c} \frac{\gamma^4}{c^4} \left[\frac{\nu \dot{a}}{3} + \frac{\gamma^2 a^2}{4} \left(1 + 4 \frac{\nu^2}{c^2} \right) \right] + \frac{1}{2} a \frac{\gamma^2}{c^2} \nu a \frac{\gamma^3}{c^3} + \frac{1}{6} \dot{a} \frac{\gamma^3}{c^3} \right\} d^3 \\ &= \left(\frac{\nu \gamma}{c} \right) d + \left(\frac{a \gamma^4}{2c^2} \right) d^2 + \frac{\gamma^3}{2c^3} \left[\frac{\dot{a}}{3} \left(1 + \gamma^2 \frac{\nu^2}{c^2} \right) + \frac{\nu \gamma^4 a^2}{c^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu^2}{c^2} + 1 - \frac{\nu^2}{c^2} \right) \right] d^3 \\ &= \left(\frac{\nu \gamma}{c} \right) d + \left(\frac{a \gamma^4}{2c^2} \right) d^2 + \frac{\gamma^5}{2c^3} \left[\frac{\dot{a}}{3} + \frac{5}{4} \frac{\nu \gamma^2 a^2}{c^2} \right] d^3 + () d^4 + ... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R} = cT &= \gamma d \left\{ 1 + \frac{\nu a}{2} \frac{\gamma^3}{c^3} d + \frac{\gamma^4}{2c^4} \left[\frac{\nu \dot{a}}{3} + \gamma^2 a^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu^2}{c^2} \right) \right] d^2 \right\} + () d^4 + \dots \\
 c\mathfrak{R} - l\nu &= c\gamma d + \frac{\nu a \gamma^4}{2c^2} d^2 + \frac{\gamma^5}{2c^3} \left[\frac{\nu \dot{a}}{3} + \gamma^2 a^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu^2}{c^2} \right) \right] d^3 - \frac{\nu^2 \gamma}{c} d - \frac{a\nu \gamma^4}{2c^2} d^2 - \frac{\gamma^5 \nu}{2c^3} \left[\frac{\dot{a}}{3} + \frac{5}{4} \frac{\nu \gamma^2 a^2}{c^2} \right] d^3 + \dots \\
 &= c\gamma d \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2} \right) + \frac{\gamma^5}{2c^3} \left[\frac{\nu \dot{a}}{3} + \gamma^2 a^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu^2}{c^2} \right) - \frac{\nu \dot{a}}{3} - \frac{5}{4} \frac{\nu \gamma^2 a^2}{c^2} \right] d^3 + \dots \\
 &= \frac{c}{\gamma} d + \frac{\gamma^5 a^2}{8c^3} d^3 + () d^4 + \dots \\
 cl - \nu \mathfrak{R} &= \nu \gamma d + \frac{a\gamma^4}{2c} d^2 + \frac{\gamma^5}{2c^2} \left(\frac{\dot{a}}{3} + \frac{5}{4} \frac{\nu \gamma^2 a^2}{c^2} \right) d^3 - \nu \gamma d - \frac{\nu^2 a}{2} \frac{\gamma^4}{c^3} d^2 - \frac{\nu \gamma^5}{2c^4} \left[\frac{\nu \dot{a}}{3} + \gamma^2 a^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu^2}{c^2} \right) \right] d^3 \\
 &= \frac{a\gamma^4}{2c} \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2} \right) d^2 + \frac{\gamma^5}{2c^2} \left[\frac{\dot{a}}{3} + \frac{5}{4} \frac{\nu \gamma^2 a^2}{c^2} - \frac{\nu^2}{c^2} \frac{\dot{a}}{3} - \frac{\nu \gamma^2 a^2}{c^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\nu^2}{c^2} \right) \right] d^3 + () d^4 + \dots \\
 &= \frac{a\gamma^4}{2c} d^2 + \frac{\gamma^5}{2c^2} \left[\frac{\dot{a}}{3\gamma^2} + \frac{\nu \gamma^2 a^2}{c^2} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{\nu^2}{c^2} \right) \right] d^3 + () d^4 + \dots \\
 &= \frac{a\gamma^4}{2c} d^2 + \frac{\gamma^3}{2c^2} \left(\frac{\dot{a}}{3} + \frac{\nu \gamma^2 a^2}{c^2} \right) d^3 + () d^4 + \dots \\
 (c\mathfrak{R} - l\nu)^3 &= \left[\frac{cd}{\gamma} \left(1 + \frac{\gamma^6 a^2}{8c^4} d^2 \right) \right]^3 = \left(\frac{cd}{\gamma} \right)^3 \left(1 - 3 \frac{\gamma^6 a^2}{8c^4} d^2 \right) + \dots \\
 \mathbf{F}_{self} &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{\gamma}{cd} \right)^3 \left(1 - 3 \frac{\gamma^6 a^2}{8c^4} d^2 \right) \left\{ \left[\left(\frac{a\gamma^2}{2c} \right) d^2 + \frac{\gamma^3}{2c^2} \left(\frac{\dot{a}}{3} + \frac{\nu \gamma^2 a^2}{c^2} \right) d^3 \right] \frac{c^2}{\gamma^2} - acd^2 \right\} \hat{\mathbf{x}} \\
 &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^3}{c^3 d} \left(1 - \frac{3}{8} \frac{\gamma^6 a^2}{c^4} d^2 \right) \left[-\frac{ac}{2} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\dot{a}}{3} + \frac{\nu \gamma^2 a^2}{c^2} \right) d \right] \hat{\mathbf{x}} \\
 &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^3}{c^3 d} \frac{1}{2} \left[-ac + \gamma \left(\frac{\dot{a}}{3} + \frac{\nu \gamma^2 a^2}{c^2} \right) d + () d^2 + \dots \right] \hat{\mathbf{x}} \\
 &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\gamma^3 \frac{a}{4c^2 d} + \frac{\gamma^4}{4c^3} \left(\frac{\dot{a}}{3} + \frac{\nu \gamma^2 a^2}{c^2} \right) + () d^2 + \dots \right] \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{Khái quát hóa ph\ddot{a}ng trình 11.95})
 \end{aligned}$$

Chuyển sang t: $\nu(t_r) = \nu(t) + \dot{\nu}(t)(t_r - t) + \dots = \nu(t) - a(t)T = \nu(t) - a\gamma d/c$. (Khi nhân v\ddot{a}i d - nó không quan trọng – đ\ddot{a}i v\ddot{a}i b\ddot{a}c này, cho dù chúng ta tính t\ddot{a}i t hay t\ddot{a}i t_r)

$$1 - \left[\frac{\nu(t_r)}{c} \right]^2 = 1 - \frac{[\nu(t)^2 - 2a\gamma d/c]}{c^2} = \left[1 - \frac{\nu(t)^2}{c^2} \right] \left(1 + \frac{2a\nu\gamma^3}{c^3} \right), \text{ do đó:}$$

$$\gamma = \left[1 - \left(\frac{v(t_r)}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} = \gamma(t) \left(1 - \frac{va\gamma^3}{c^3} d \right); \quad a(t_r) = a(t) - Ta = a(t) - \frac{\dot{a}\gamma}{c} d.$$

Bây giờ, tính mô men từ từ để tìm t:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{self} &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\gamma^3 \frac{(1 - 3va\gamma^3 d / c^3)(a - \dot{a}\gamma d / c)}{4c^2 d} + \frac{\gamma^4}{4c^3} \left(\frac{\dot{a}}{3} + \frac{v\gamma^2 a^2}{c^2} \right) + () d^2 + \dots \right] \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\gamma^3 a}{4c^2 d} + \frac{\gamma^3}{4c^2} \left(\frac{\dot{a}\gamma}{c} + 3 \frac{va^2 \gamma^2}{c^3} \right) + \frac{\gamma^4}{4c^3} \left(\frac{\dot{a}}{3} + \frac{v\gamma^2 a^2}{c^2} \right) + () d + \dots \right] \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\gamma^3 a}{4c^2 d} + \frac{\gamma^4}{4c^3} \left(\dot{a} + 3 \frac{va^2 \gamma^2}{c^2} + \frac{v\gamma^2 a^2}{c^2} \right) + () d + \dots \right] \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\gamma^3 a}{4c^2 d} + \frac{\gamma^4}{3c^3} \left(\dot{a} + 3 \frac{va^2 \gamma^2}{c^2} \right) + () d + \dots \right] \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{khái quát hóa phương trình} \end{aligned}$$

11.96)

Số hạng đầu tiên là khai triển để tìm t, chính phần này bằng 0 là số hạng thứ 2:

$$F_{rad}^{int} = \frac{\mu_0 q^2}{12\pi c} \gamma^4 \left(\dot{a} + 3 \frac{va^2 \gamma^2}{c^2} \right) \quad (\text{khái quát hóa phương trình 11.99}), \text{ do đó tổng quát hóa}$$

phương trình 11.100 là:
$$F_{rad} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \gamma^4 \left(\dot{a} + 3 \frac{va^2 \gamma^2}{c^2} \right).$$

(b) $F_{rad} = a\gamma^4 \left(\dot{a} + \frac{3\gamma^2 a^2 v}{c^2} \right)$, trong đó: $A \equiv \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c}$. $P = Aa^2 \gamma^6$ (phương trình 11.75). Chúng ta

phải chứng tỏ rằng: $\int_{t_1}^{t_2} F_{rad} v dt = - \int_{t_1}^{t_2} P dt$, hoặc $\int_{t_1}^{t_2} \gamma^4 \left(\dot{a} + 3 \frac{va^2 \gamma^2}{c^2} \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} a^2 \gamma^6 dt$

(Ngoài trừ các số hạng biên – xem phần 11.2.2).

Vì tất cả số hạng đầu tiên: $\int_{t_1}^{t_2} \gamma^4 \dot{a} v dt = \int_{t_1}^{t_2} (\gamma^4 v) \frac{da}{dt} = \gamma^4 v a \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (\gamma^4 v) a dt.$

Bây giờ: $\frac{d}{dt} (\gamma^4 v) = 4\gamma^3 \frac{d\gamma}{dt} v + \gamma^4 a$; $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \left(-\frac{2va}{c^2} \right) = \frac{va\gamma^3}{c^2}$. Do

đó:

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma^4 \dot{a} v dt = \gamma^4 v a \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \gamma^6 a^2 \left(1 + 3 \frac{v^2}{c^2}\right) dt \text{ và vì thế:}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma^4 \left(\dot{a} v + \frac{3 \gamma^2 a^2 v^2}{c^2} \right) dt = \gamma^4 v a \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[-\gamma^6 a^2 \left(1 + 3 \frac{v^2}{c^2}\right) + 3 \gamma^6 \frac{a^2 v^2}{c^2} \right] dt = \gamma^4 v a \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \gamma^6 a^2 dt. \text{ qed}$$

Bài tập 11.31:

(a) $P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^6}{6\pi c}$ (phỏng nghiệm 11.75). $\varpi = \sqrt{b^2 + c^2 t^2}$ (phỏng nghiệm 10.45);

$$v = \dot{\varpi} = \frac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}}; a = \dot{v} = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} - \frac{c^2 t (c^2 t)}{(b^2 + c^2 t^2)^{3/2}} = \frac{c^2}{(b^2 + c^2 t^2)^{3/2}} (b^2 + c^2 t^2 - c^2 t^2) = \frac{b^2 c^2}{(b^2 + c^2 t^2)^{3/2}};$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{1 - [c^2 t^2 / (b^2 + c^2 t^2)]} = \frac{b^2 + c^2 t^2}{b^2 + c^2 t^2 - c^2 t^2} = \frac{1}{b^2} (b^2 + c^2 t^2). \quad \text{Do đó:}$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \frac{b^4 c^4}{(b^2 + c^2 t^2)^3} \frac{(b^2 + c^2 t^2)^3}{b^6} = \frac{q^2 c}{6\pi \epsilon_0 b^2}. \text{ (Vâng, nó b\\c x\\) (Th\\c t\\ v\\ i t\\ c đ\\ không đ\\ i)}$$

(b) $F_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^4}{6\pi c} \left(\dot{a} + \frac{3 \gamma^2 a^2 v}{c^2} \right); \dot{a} = -\frac{3}{2} \frac{b^2 c^2 (2c^2 t)}{(b^2 + c^2 t^2)^{5/2}} = -\frac{3b^2 c^4 t}{(b^2 + c^2 t^2)^{5/2}};$

$$\left(\dot{a} + \frac{3 \gamma^2 a^2 v}{c^2} \right) = -\frac{3b^2 c^4 t}{(b^2 + c^2 t^2)^{5/2}} + \frac{3}{c^2} \frac{(b^2 + c^2 t^2)}{b^2} \frac{b^4 c^4}{(b^2 + c^2 t^2)^3} \frac{c^2 t}{\sqrt{(b^2 + c^2 t^2)}} = 0. \quad \boxed{F_{rad} = 0} \text{ (vì v\\y ph\\n}$$

\\ng b\\ c x\\ b\\ng 0)

Chương 12

ĐIỂN NG LỰC VÀ THUYẾT TƯƠNG ĐƯƠNG

Bài tập 12.1:

Điểm u là vận tốc của hạt trong S , $\bar{u}$ là vận tốc của nó trong $\bar{S}$, và v là vận tốc của $\bar{S}$ đối với S . Quy tắc cộng vận tốc Galileo cho biết: $u = \bar{u} + v$. Điều gì mới nhất từ đó, u là hằng số (Đó là định luật I Newton trong S).

(a) Nếu v là hằng số thì $\bar{u} = u - v$ cũng là hằng số, vì vậy định luật I Newton đúng trong $\bar{S}$, và vì thế S là quán tính.

(b) Nếu $\bar{S}$ là quán tính thì $\bar{u}$ cũng là hằng số, do đó $v = u - \bar{u}$ là hằng số.

Bài tập 12.2:

(a)

$$m_A u_A + m_B u_B = m_C u_C + m_D u_D; \quad u_i = \bar{u}_i + v. \quad m_A (\bar{u}_A + v) + m_B (\bar{u}_B + v) = m_C (\bar{u}_C + v) + m_D (\bar{u}_D + v),$$

$$m_A \bar{u}_A + m_B \bar{u}_B + (m_A + m_B) v = m_C \bar{u}_C + m_D \bar{u}_D + (m_C + m_D) v,$$

Giả sử khối lượng được bảo toàn: $(m_A + m_B) = (m_C + m_D)$ cho chúng ta:

$$m_A \bar{u}_A + m_B \bar{u}_B = m_C \bar{u}_C + m_D \bar{u}_D, \quad \text{do đó động lượng được bảo toàn trong } \bar{S}.$$

(b)

$$\frac{1}{2} m_A u_A^2 + \frac{1}{2} m_B u_B^2 = \frac{1}{2} m_C u_C^2 + \frac{1}{2} m_D u_D^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_A (\bar{u}_A^2 + 2\bar{u}_A \cdot v + v^2) + \frac{1}{2} m_B (\bar{u}_B^2 + 2\bar{u}_B \cdot v + v^2) = \frac{1}{2} m_C (\bar{u}_C^2 + 2\bar{u}_C \cdot v + v^2) + \frac{1}{2} m_D (\bar{u}_D^2 + 2\bar{u}_D \cdot v + v^2)$$

$$\frac{1}{2} m_A \bar{u}_A^2 + \frac{1}{2} m_B \bar{u}_B^2 + 2v \cdot (m_A \bar{u}_A + m_B \bar{u}_B) + \frac{1}{2} v^2 (m_A + m_B)$$

$$= \frac{1}{2} m_C \bar{u}_C^2 + \frac{1}{2} m_D \bar{u}_D^2 + 2v \cdot (m_C \bar{u}_C + m_D \bar{u}_D) + \frac{1}{2} v^2 (m_C + m_D).$$

Nhưng các số hạng giữa bằng nhau do bảo toàn động lượng, và các số hạng cuối bằng

$$\text{nhau do bảo toàn khối lượng, do đó: } \frac{1}{2} m_A \bar{u}_A^2 + \frac{1}{2} m_B \bar{u}_B^2 = \frac{1}{2} m_C \bar{u}_C^2 + \frac{1}{2} m_D \bar{u}_D^2. \quad \text{qed}$$

Bài tập 12.3:

$$v_G = v_{AB} + v_{BC}; v_E = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2} \approx v_G \left(1 - \frac{v_{AB}v_{BC}}{c^2} \right) \Rightarrow \frac{v_G - v_E}{v_G} = \frac{v_{AB}v_{BC}}{c^2}. \quad \text{Trong mi/h,}$$

$$c = (186,000 \text{ mi/s})(3600 \text{ sec/hr}) = 6.7 \text{ mi/hr} \dots \frac{v_G - v_E}{v_G} = \frac{(5)(60)}{(6.7 \times 10^8)^2} = 6.7 \times 10^{-16} \Rightarrow 6.7 \times 10^{-14} \%$$

sai số (khá nhỏ)

$$(b) \left(\frac{1}{2}c + \frac{3}{4}c \right) / \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) = \left(\frac{5}{4}c \right) / \left(\frac{11}{8} = \frac{10}{11}c \right) \quad (\text{Vấn đề nhúng húng n c})$$

(c) Để tính gia tốc hóa kí hiệu, đặt $\beta \equiv v_{AC}/c$, $\beta_1 \equiv v_{AB}/c$, $\beta_2 \equiv v_{BC}/c$. Thì thì phép trình

$$12.3 \text{ cho chúng ta: } \beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2},$$

$$\beta^2 = \frac{\beta_1^2 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_2^2}{(1 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_1^2\beta_2^2)} = \frac{1 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_1^2\beta_2^2}{(1 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_1^2\beta_2^2)} - \frac{(1 + \beta_1^2\beta_2^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2)}{(1 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_1^2\beta_2^2)} = 1 - \frac{(1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)}{(1 + \beta_1\beta_2)^2} = 1 - \Delta, \quad \square$$

đây $\Delta \equiv (1 - \beta_1^2)(1 - \beta_2^2)/(1 + \beta_1\beta_2)^2$ rõ ràng là số dương. Do đó $\beta_2 < 1$ và vì thế $|v_{AC}| < c$ *qed*

Bài tập 12.4:

$$(a) \text{ Vấn đề c của viên đạn đi với vận tốc } \frac{1}{2}c + \frac{1}{3}c = \frac{5}{6}c = \frac{10}{12}c.$$

$$\text{Vấn đề c của chiếc xe hơi: } \frac{3}{4}c = \frac{9}{12}. \text{ Vì rằng } v_b > v_g, \text{ (viên đạn đi nhanh hơn)} \quad \square$$

$$(b) \text{ Vấn đề c của viên đạn đi với vận tốc } \frac{\frac{1}{2}c + \frac{1}{3}c}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}c}{\frac{7}{6}} = \frac{5}{7}c = \frac{20}{28}c. \text{ Vấn đề c của xe hơi}$$

$$\frac{3}{4}c = \frac{21}{28}c. \text{ Vì rằng } v_g > v_b \text{ (viên đạn không đi nhanh hơn)}$$

Bài tập 12.5:

$$(a) \text{ Ánh sáng đi đúng hướng } 90 \text{ m/s } \frac{90 \times 10^9 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 300 \text{ s} = 5 \text{ min } \text{ đi đến tôi, vì vậy thời gian}$$

tôi thấy trên đồng hồ là 11:55 am).

(b) Tôi quan sát thấy hai buồm trôi.

Bài tập 12.6:

Tín hiệu ánh sáng rời a tới thí nghiệm t'_a ; thời gian đi tới thí nghiệm $t_a = t'_a + d_a / c$,

Tín hiệu ánh sáng rời b tới thí nghiệm t'_b ; Thời gian đi tới thí nghiệm $t_b = t'_b + d_b / c$

$$\therefore \Delta t = t_b - t_a = t'_b - t'_a + \frac{(d_b - d_a)}{c} = \Delta t' + \frac{(-v\Delta t' \cos \theta)}{c} = \Delta t' \left[1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right].$$

(ở đây d_a là khoảng cách từ a đến Trái đất, và d_b là khoảng cách từ b đến Trái đất).

$$\Delta s = v\Delta t' \sin \theta = \frac{v \sin \theta \Delta t}{\left(1 - v/c \cos \theta\right)}; \quad u = \frac{v \sin \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)} \text{ là vận tốc biểu kiến.}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{v \left[\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) (\cos \theta) - \sin \theta \left(\frac{v}{c} \sin \theta\right) \right]}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^2} = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) (\cos \theta) = \frac{v}{c} \sin^2 \theta \\ &\Rightarrow \cos \theta = \frac{v}{c} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{v}{c} \end{aligned}$$

$$\theta_{\max} = \cos^{-1}(v/c). \text{ Tại góc cực đại, } u = \frac{v\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v^2/c^2} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \text{ Khi } v \rightarrow c, u \rightarrow \infty \text{ Bởi vì}$$

$\sin \theta \rightarrow 0$, cho dù $v < c$.

Bài tập 12.7:

Sinh viên không tính đến sự giãn nở thời gian của đồng hồ bên trong cửa muon. Trong phòng thí nghiệm, muon tiếp tục kéo dài thêm một thời gian $\gamma\tau = \frac{\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, ở đây τ là

thời gian sống “riêng”, $2 \times 10^{-6} \text{ s}$. Do đó: $v = \frac{d}{\tau / \sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{d}{\tau} \sqrt{1-v^2/c^2}$, ở đây $d = 800 \text{ m}$.

$$\left(\frac{\tau}{d}\right)^2 v^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}; \quad v^2 \left[\left(\frac{\tau}{d}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \right] = 1; \quad v^2 = \frac{1}{(\tau/d)^2 + (1/c)^2}.$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1 + (\tau c/d)^2}; \quad \frac{\tau c}{d} = \frac{(2 \times 10^{-6})(3 \times 10^8)}{800} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}; \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1 + 9/16} = \frac{16}{25}; \quad v = \frac{4}{5}c.$$

Bài tập 12.8:

(a) Đồng hồ trên tên lửa chạy chậm; vì vậy đồng hồ trái đất cho $\gamma t = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cdot 1 \text{ hr}$. Ở đây

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-9/25}} = \frac{5}{4}$. Theo các đồng hồ Trái Đất, tín hiệu được gửi đi 1 giờ 15 phút sau khi cất cánh.

(b) Qua ngòi nhìn quan sát ở Trái Đất, bây giờ tên lửa ở khoảng cách $\left(\frac{3}{5}c\right)\left(\frac{5}{4}(1 \text{ hr})\right) = \frac{3}{4}c \text{ hr}$.

Do đó, tín hiệu ánh sáng mất $\frac{3}{4}$ giờ để quay lại Trái Đất. Bởi vì nó rời lúc 1 giờ 15 phút sau khi khởi hành, tín hiệu ánh sáng đến Trái Đất 2 giờ sau khi khởi hành.

(c) Đồng hồ Trái Đất chạy chậm: $t_{\text{rocket}} = \gamma \cdot (2 \text{ hrs}) = \frac{5}{4}(2 \text{ hrs}) = 2.5 \text{ hrs}$.

Bài tập 12.9:

$$L_c = 2L_v; \frac{L_c}{\gamma_c} = \frac{L_v}{\gamma_v}; \quad \text{do đó:} \quad \frac{2}{\gamma_e} = \frac{1}{\gamma_v} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}; \quad \frac{1}{\gamma_c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{16}; \quad \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16};$$

$$\boxed{v = \frac{\sqrt{13}}{4}c.}$$

Bài tập 12.10:

Giới số chiều dài cốt buồm (lúc đứng yên) là l . Đối với một người quan sát trên thuyền, chiều cao của cốt buồm là $l \sin \theta$, hình chiếu theo phương ngang là $l \cos \theta$. Đối với một người quan sát ở đuôi thuyền, cái đầu không nhìn thấy, nhưng cái sau bắt đầu như

$$\text{Lorentz mất } l \cos \theta. \text{ Thành ra: } \tan \bar{\theta} = \frac{l \sin \theta}{\frac{1}{\gamma} l \cos \theta} = \gamma \tan \theta. \text{ hoặc } \tan \bar{\theta} = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Bài tập 12.11:

Mất cách thô sơ, chu vi đường kính $= \frac{1}{\gamma}(2\pi R)/(2R) = \pi/\gamma = \pi\sqrt{1-(\omega R/c)^2}$ - nhưng điều này không có nghĩa. Vấn đề ở đây là: một vật có gia tốc không thể giữ nguyên tính cốt cách thông thường. Để quyết định điều gì thực sự xảy ra, bạn cần một mô hình đặc biệt để vẽ các lực bên trong đĩa với nhau.

Bài tập 12.12:

(iv) $\Rightarrow t = \frac{\bar{t}}{\gamma} + \frac{v\bar{x}}{c^2}$. Đăt cái này vào (i) và tìm x :

$$\bar{x} = \gamma x - \gamma v \left(\frac{\bar{t}}{\gamma} + \frac{v\bar{x}}{c^2} \right) = \gamma x \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - v\bar{t} = \gamma x \frac{1}{\gamma^2} - v\bar{t} = \frac{x}{\gamma} - v\bar{t}; \quad \boxed{x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})}.$$

Tương tự, (i) $\Rightarrow t = \frac{\bar{t}}{\gamma} + v\bar{t}$. Đăt cái này vào đũa v (iv) và tìm t :

$$\bar{t} = \gamma t - \frac{\gamma v}{c^2} \left(\frac{\bar{x}}{\gamma} + v\bar{t} \right) = \gamma t \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v}{c^2} \bar{x} = \frac{t}{\gamma} - \frac{v}{c^2} \bar{x}; \quad \boxed{t = \gamma \left(\bar{t} + \frac{v}{c^2} \bar{x} \right)}.$$

Bài tập 12.13:

Đăt s c c a anh trai xuất hiện t i g c t a đ, th i đi m không, trong c hai h quy chi u. Trong h S (c a Sophie), các t a đ c a t i ng là c a Sophie t i $x = 5 \times 10^5 m, t = 0$.

Trong h $\bar{S}$ (c a nhà khoa h c), $\bar{t} = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) = -\gamma v x / c^2$. Vì nó có giá tr âm, t i ng là c a

Sophie xuất hiện tr c khi tại n n trong $\bar{S}$. $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (12/13)^2}} = \frac{13}{\sqrt{169 - 144}} = \frac{13}{5}$. Nên

$$\bar{t} = - \left(\frac{13}{5} \right) \left(\frac{12}{13} c \right) (5 \times 10^5) / c^2 = -12 \times 10^5 / 3 \times 10^8 = -4 \times 10^{-3}. \quad \boxed{4 \times 10^{-3} \text{ s m h n}}$$

Bài tập 12.14:

(a) Trong S nó di chuy n m t kho ng cách dy trong kho ng th i gian dt, trong khi đó $\bar{S}$ nó di chuy n m t kho ng cách $d\bar{y} = dy$ trong th i gian $d\bar{t} = \gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right)$.

$$\therefore \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{dy}{\gamma \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right)} = - \frac{(dy/dt)}{\gamma \left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)}; \text{ ho c } \bar{u}_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{v u_x}{c^2} \right)}; \bar{u}_z = - \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{v u_x}{c^2} \right)}.$$

$$(b) \tan \bar{\theta} = - \frac{\bar{u}_y}{\bar{u}_x} = - \frac{u_y / \left[\gamma \left(1 - \frac{v u_x}{c^2} \right) \right]}{\gamma (u_x - v)} = \frac{1}{\gamma} \frac{(-u_y)}{(u_x - v)}.$$

Trong tr ng h p này:

$$u_x = -c \cos \theta; u_y = c \sin \theta \Rightarrow \tan \bar{\theta} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{-\sin \theta}{-c \cos \theta - v} \right), \boxed{\tan \bar{\theta} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta + v/c} \right)}. \quad (\text{So sánh})$$

$\tan \bar{\theta} = \gamma \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ trong bài tập 12.10. Vấn đề ở đây là vận tốc không chuyển động theo cách mà còn vận tốc thời gian.

Bài tập 12.15:

Viên đạn đi với vận tốc: $\frac{5}{7}c$, tên tìi phm đi với vận tốc $\frac{3}{4}c - \frac{1}{2}c = \frac{(1/4)c}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{(1/4)c}{(5/8)} = \frac{2}{5}c$. Viên

đi với vận tốc tên tìi phm $\frac{\frac{5}{7}c - \frac{3}{4}c}{1 - \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{-(1/28)}{(13/28)} = -\frac{1}{13}c$. [Vận tốc của B đi với A bằng vận

tốc của A đi với B, vì vận tốc các đi tìi ng bên dđi đđi ng chéo là tìi m thđi ng. Chú ý trong rít nhđu trđi ng hp: $v_{bullet} \langle v_{outlaws}$, do đó bñn nhìn nó nhđ thđ nào không quan trđi ng, nhđ ng gđ xđu này đi rđi]

Tìi c đđ cđ a: → Đđi vđi ↓	Mđt đđt	Cđnh sát	Viên đđn	Tên tìi phm	Có lđi thđi không?
Mđt đđt	0	$\frac{1}{2}c$	$\frac{3}{4}c$	$\frac{5}{7}c$	Có
Cđnh sát	$-\frac{1}{2}c$	0	$\frac{2}{5}c$	$\frac{1}{3}c$	Có
Viên đđn	$-\frac{3}{4}c$	$-\frac{2}{5}c$	0	$-\frac{1}{13}c$	Có
Tên tìi phm	$-\frac{5}{7}c$	$-\frac{1}{3}c$	$\frac{1}{13}c$	0	có

Bài tập 12.16:

(a) Đồng hồ chuyển động chệch chệch mét thì a s $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(4/5)^2}} = \frac{5}{3}$. Bởi vì 18 năm trôi

qua trên đồng hồ đang chuyển động, $\frac{5}{3} \times 18 = 30$ năm trôi qua trên đồng hồ đang đứng yên.

(b) Đồng hồ ở trái đất, phải mất 15 năm để đến đó, tức $\frac{4}{5}c$, nên

$$d = \frac{4}{5}c \times 15 \text{ năm} = \boxed{12c \text{ năm}} \quad (12 \text{ năm ánh sáng})$$

(c) $t = 15 \text{ năm}, x = 12c \text{ năm}$

(d) $\bar{t} = 9 \text{ năm}, \bar{x} = 0$. [Cơ sở đến thời gian t a đ trong $\bar{S}$, và đã bay đi c theo $\bar{S}$, vì vậy cơ sở vẫn còn ở thời gian t a đ. Nếu bạn nghĩ rằng rằng giá trị này, dùng phép biến đổi Lorentz, với x và t từ (c)]

(e) Biến đổi Lorentz: $\begin{cases} \tilde{x} = \gamma(x + vt) \\ \tilde{t} = \gamma\left(t + \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$ (Chú ý rằng v âm, vì $\bar{S}$ đi sang phía trái).

$$\therefore \tilde{x} = \frac{5}{3}\left(12 \text{ yrs} + \frac{4}{5}c \cdot 15 \text{ yrs}\right) = \frac{5}{3} \cdot 24c \text{ yrs} = \boxed{40c \text{ năm.}}$$

$$\tilde{t} = \frac{5}{3}\left(15 \text{ yrs} + \frac{4}{5} \frac{c}{c^2} \cdot 12c \text{ yrs}\right) = \frac{5}{3}\left(15 + \frac{48}{5}\right) \text{ yrs} = (15 + 16) \text{ yrs} = 41 \text{ năm}$$

(f) Quay đồng hồ của cô ấy sẽ mất 32 năm, tức 9 đến 41 ($\bar{t} \rightarrow \tilde{t}$). Quay lại chuyển đi mất 9 năm (thời gian di chuyển), vì vậy bây giờ đồng hồ của cô ấy sẽ chỉ 50 năm khi cô ấy tới. Chú ý rằng đây là 5/3 nhân 30 năm, đúng bằng giá trị mà cô ấy sẽ tính nếu ở thời nhà đã từng là khách du lịch, khoảng 30 năm cuối đời anh ấy.

(g) (i) $\bar{t} = 9 \text{ yrs}, x = 0$. t là thời nào? $t = \frac{v}{c^2}x + \frac{\bar{t}}{\gamma} = \frac{3}{5} \cdot 9 = \frac{27}{5} = 5.4 \text{ năm}$, và anh ta bắt đầu lúc

21 tuổi, vì vậy anh ta 26.4 tuổi (trẻ hơn người đi du lịch bởi vì người đi du lịch ở thời nhà đang di chuyển)

(ii) $x\bar{t} = 41 \text{ yrs}$, $x = 0$. t là gì? $t = \frac{\bar{t}}{\gamma} = \frac{3}{5} \cdot 41 = \frac{123}{5} = 24.6 \text{ n m}$, anh ta đã bít đờu lúc 21 tuổ i,

do đó anh ta 45.6 tuổ i.

(h) Nó sẽ mĩt 5.4 năm cĩa thĩ gian trái đĩt đĩ quay lĩi, vì vĩy khi cĩ ta quay lĩi, cĩ y sĩ nĩi vĩi cĩ y tuổ i cĩa cĩp song sinh là $45.6 + 5.4 = 51$ năm – đó là kĩt quĩ chúng ta đã thĩy trong câu a). Nhĩng chú ý rĩng đĩ nó đĩng theo quan đĩm cĩa ngĩĩi đi du lĩch, bĩn phĩi tĩnh đĩn sĩ nhĩy trong tuổ i nhĩn thĩ c cĩa tĩi nhĩ khi cĩ y thay đĩi tĩa đĩ tĩ S sang $\bar{S}$

Bài tập 12.17:

$$\begin{aligned} -\bar{a}^0\bar{b}^0 + \bar{a}^1\bar{b}^1 + \bar{a}^2\bar{b}^2 + \bar{a}^3\bar{b}^3 &= -\gamma^2(a^0 - \beta a^1)(b^0 - \beta b^1) + \gamma^2(a^1 - \beta a^0)(b^1 - \beta b^0) + a^2b^2 + a^3b^3 \\ &= -\gamma^2(a^0b^0 - \beta a^0b^1 - \beta a^1b^0 + \beta^2 a^1b^1 - a^1b^1 + \beta a^1b^0 + \beta a^0b^1 - \beta^2 a^0b^0) + a^2b^2 + a^3b^3 \\ &= -\gamma^2 a^0b^0(1 - \beta^2) + \beta^2 a^1b^1(1 - \beta^2) + a^2b^2 + a^3b^3 \\ &= -a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3. \quad \text{qed} \quad [\text{Chú ý: } \gamma^2(1 - \beta^2) = 1.] \end{aligned}$$

Bài tập 12.18:

(a) $\begin{pmatrix} ct \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (Sĩ đĩng chú giĩi cĩa phĩĩng trĩnh 12.24, đĩ so sỏnh tĩt

nhĩt)

(b) $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Nhân các ma trĩn:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \bar{\gamma} & 0 & -\bar{\gamma}\bar{\beta} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{\gamma}\bar{\beta} & 0 & \bar{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}\gamma & \bar{\gamma}\gamma\beta & -\bar{\gamma}\bar{\beta} & 0 \\ -\gamma\beta & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{\gamma}\bar{\gamma}\bar{\beta} & \bar{\gamma}\bar{\gamma}\bar{\beta} & \bar{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vĩng, thĩ tĩ rĩt quan trĩng.

Bài tập 12.19:

(a) Vì $\tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta}$, và $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$, ta có:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \theta}} = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta}} = \cosh \theta. \quad \gamma\beta = \cosh \theta \sinh \theta = \sinh \theta.$$

$$\therefore \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \theta & -\sinh \theta & 0 & 0 \\ -\sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ So sánh } R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $\bar{u} = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} \Rightarrow \frac{\bar{u}}{c} = \frac{(u/c) - (v/c)}{1 - \left(\frac{u}{c}\right)\left(\frac{v}{c}\right)} \Rightarrow \tanh \phi = \frac{\tanh \phi - \tanh \theta}{1 - \tanh \phi \tanh \theta}, \quad \square \quad \text{đây} \quad \tanh \phi = u/c,$

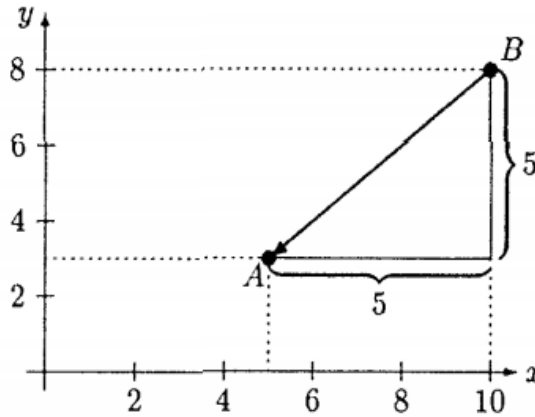
$\tanh \theta = (v/c); \tanh \bar{\phi} = \bar{u}/c$. Nhận xét công thức liên hệ góc cho các hàm hyperbolic $\frac{\tanh \phi - \tanh \theta}{1 - \tanh \phi \tanh \theta} = \tanh(\phi - \theta). \therefore \tanh \bar{\phi} = \tanh(\phi - \theta), \text{ hoặc } \bar{\phi} = \phi - \theta$

Bài tập 12.20:

(a) (i) $I = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = -(5-15)^2 + (10-5)^2 + (8-3)^2 + (0-0)^2 = -100 + 25 + 25 = -50.$

(ii) Không. (Trong hình vẽ, $\Delta \bar{t} = 0$, do đó, I phải đúng, là không đúng)

(iii) Có. $\bar{S}$ di chuyển theo hình vẽ B tại A, hoàn thành hành trình trong thời gian $10/c$.



$$\therefore \mathbf{v} = \frac{-5\hat{x} - 5\hat{y}}{10/c} = -\frac{c}{2}\hat{x} - \frac{c}{2}\hat{y}.$$

Chú ý rằng: $\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, do đó $v = \frac{1}{\sqrt{2}}c$, chắc chắn bé hơn c

(b) (i) $I = -(3-1)^2 + (5-2)^2 + 0 + 0 = -4 + 9 = 5$.

(ii) Đúng. Bảng biến đổi Lorentz: $\Delta(ct) = \gamma[\Delta(ct) - \beta(\Delta x)]$. Ta muốn: $\Delta\bar{t} = 0$ do đó

$\Delta(ct) = \beta(\Delta x)$; hoặc $\frac{v}{c} = \frac{\Delta(ct)}{\Delta x} = \frac{3-1}{5-2} = \frac{2}{3}$. Do đó $v = \frac{2}{3}c$ theo hướng $+x$.

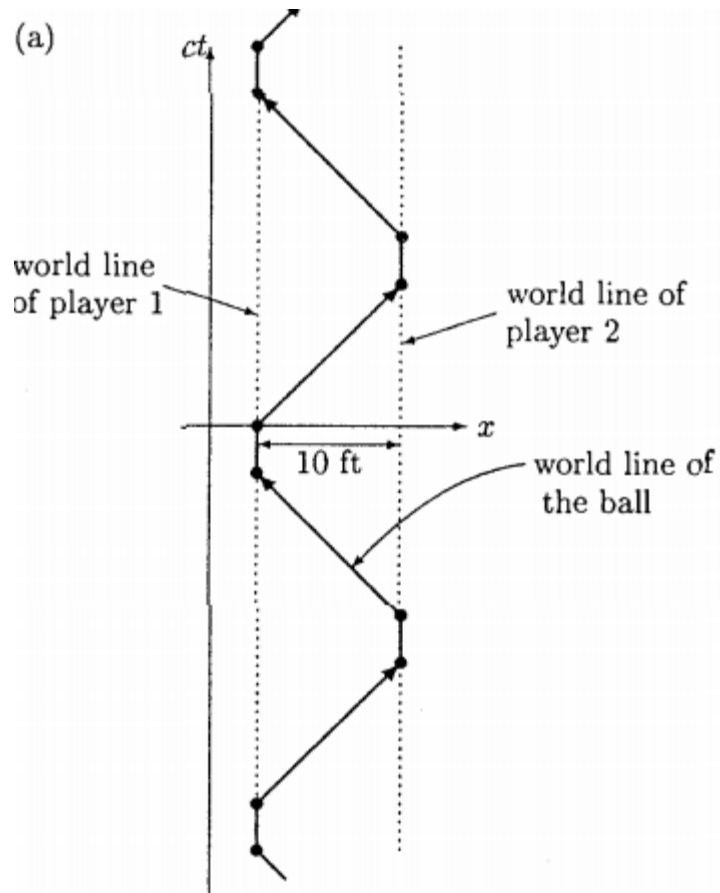
(iii) Không. (Trong hệ nhúng thì: $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ vì vậy I sai âm, là điều không đúng)

Bài tập 12.21:

Sử dụng phương trình 12.18 (iv): $\Delta\bar{t} = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = 0 \Rightarrow \Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta x$, hoặc:

$$v = \frac{\Delta t}{\Delta x} c^2 = \frac{t_B - t_A}{x_B - x_A} c^2.$$

Bài tập 12.22:

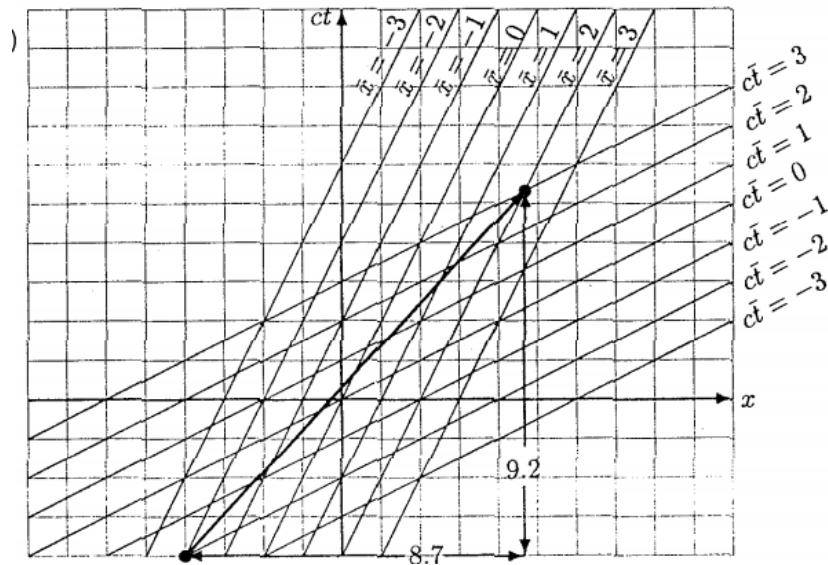


(a) Số thời gian là bốn không bao giờ giao tiếp với người khác lúc này – bốn giao tiếp với một người anh em/cô em số đó khi tin nhắn đến đó; và đáp ứng quay lại và già dặn và thông minh hơn bốn.

(b) Không thể thoát. Đúng là một người quan sát đang di chuyển có thể nói cô em đến B trước khi cô em rời A, nhưng người với toàn bộ chuyển đi, mọi người phải đồng ý rằng cô em sẽ quay lại sau khi cô em đã rời ra.

Bài tập 12.23:

(a)



(b) $\frac{c}{v} = \tan \theta = \frac{9.2}{8.7} \Rightarrow \frac{8.7}{9.2}c = 0.95c.$

(c) $v' = \frac{4}{5}c$, do $v = \frac{\frac{4}{5}c + \frac{3}{5}c}{1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{(7/5)c}{(37/25)c} = \frac{35}{37}c = 0.95c.$

Bài tập 12.24:

(a) $\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\eta^2 = u^2; u^2\left(1 + \frac{\eta^2}{c^2}\right) = \eta^2; u = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{c^2}}}n.$

$$(b) \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 \theta}} = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta}} = \cosh \theta; \eta = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} u = \cosh \theta c \tanh \theta = c \sinh \theta.$$

Bài tập 12.25:

$$(a) u_x = u_y = u \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{5}} c = \sqrt{\frac{2}{5}} c.$$

$$(b) \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4/5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5-4}} = \sqrt{5}; \eta = \frac{u}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow \eta_x = \eta_y = \sqrt{2}c.$$

$$(c) \eta^0 = \gamma c = \sqrt{5}c.$$

$$(d) \text{Phân tích trình 12.45: } \Rightarrow \begin{cases} \bar{u}_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{\sqrt{2/5}c - \sqrt{2/5}c}{1 - 2/5} = 0. \\ \bar{u}_y = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{u_y}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \right) = \sqrt{1-2/5} \frac{\sqrt{2/5}c}{1-2/5} = \frac{\sqrt{2/5}}{\sqrt{3/5}} c = \sqrt{2/3}c. \end{cases}$$

$$(e) \bar{\eta}_x = \gamma(\eta_x - \beta \eta^0) = \sqrt{1-2/5}(\sqrt{2}c - \sqrt{2/5}\sqrt{5}c) = 0. \quad \bar{\eta}_y = \eta_y = \sqrt{2}c.$$

$$(f) \frac{1}{\sqrt{1-\bar{u}^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(2/3)}} = \sqrt{3}; \bar{\eta} = \sqrt{3}\bar{u} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\eta}_x = \sqrt{3}\bar{u}_x = 0. \\ \bar{\eta}_y = \sqrt{3}\bar{u}_y = \sqrt{2}c. \end{cases}$$

Bài tập 12.26:

$$\eta^\mu \eta_\mu = -(\eta^0)^2 + \eta^2 = \frac{1}{1-u^2/c^2}(-c^2 + u^2) = -c^2 \frac{1-u^2/c^2}{(1-u^2/c^2)} = -c^2.$$

Bài tập 12.27:

$$(a) \text{Từ bài tập 11.31 ta có: } \gamma = \frac{1}{b} \sqrt{b^2 + c^2 t^2}. \therefore \tau = \int \frac{1}{\gamma} dt = b \int \frac{dt}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} = \frac{b}{c} \ln \left(ct + \sqrt{b^2 + c^2 t^2} \right) + k;$$

$$\text{Tại } t = 0 \text{ ta muốn } \tau = 0; 0 = \frac{b}{c} \ln b + k, \text{ do đó } k = -\frac{b}{c} \ln b; \quad \boxed{\tau = \frac{b}{c} \ln \left[\frac{1}{b} \left(ct + \sqrt{b^2 + c^2 t^2} \right) \right]}.$$

$$(b) \sqrt{x^2 - b^2} + x = be^{c\tau/b}; \sqrt{x^2 - b^2} = be^{c\tau/b} - x; x^2 - b^2 = b^2 e^{2c\tau/b} - 2xbe^{c\tau/b} + x^2; 2xbe^{c\tau/b} = b^2 (1 + e^{c\tau/b});$$

$$x = b \left(\frac{e^{c\tau/b} + e^{-c\tau/b}}{2} \right) = b \cosh(c\tau/b). \quad \text{Cũng từ bài tập 11.31:}$$

$$v = c^2 t / \sqrt{b^2 + c^2 t^2}.$$

$$v = \frac{c}{x} \sqrt{x^2 - b^2} = \frac{c}{b \cosh(c\tau/b)} \sqrt{b^2 \cosh^2(c\tau/b) - b^2} = c \frac{\sqrt{\cosh^2(c\tau/b) - 1}}{\cosh(c\tau/b)} = c \frac{\sinh(c\tau/b)}{\cosh(c\tau/b)} = c \tanh\left(\frac{c\tau}{b}\right).$$

$$(c) \eta^\mu = \gamma(c, v, 0, 0); \gamma = \frac{x}{b} = \cosh\left(\frac{c\tau}{b}\right), \text{ do đó:}$$

$$\eta^\mu = \cosh \frac{c\tau}{b} \left(c, c \tanh \frac{c\tau}{b}, 0, 0 \right) = c \left(\cosh \frac{c\tau}{b}, \sinh \frac{c\tau}{b}, 0, 0 \right).$$

Bài tập 12.28:

$$(a) m_A u_A + m_B u_B = m_C u_C + m_D u_D; u_i = \frac{\bar{u}_i + v}{1 + (\bar{u}_i^2 v / c^2)}.$$

$$m_A \frac{\bar{u}_A + v}{1 + (\bar{u}_A v / c^2)} + m_B \frac{\bar{u}_B + v}{1 + (\bar{u}_B v / c^2)} = m_C \frac{\bar{u}_C + v}{1 + (\bar{u}_C v / c^2)} + m_D \frac{\bar{u}_D + v}{1 + (\bar{u}_D v / c^2)}.$$

Trong hệ này, bởi vì tất cả mô-men khác nhau, chúng ta không thể kết luận rằng:

$$m_A \bar{u}_A + m_B \bar{u}_B = m_C \bar{u}_C + m_D \bar{u}_D$$

Chúng ta hãy xem xét một ví dụ, giả sử tất cả khối lượng bằng nhau, và $u_A = -u_B = v; u_C = u_D = 0$. Đây là va chạm ‘**hoàn toàn không đàn hồi**’ điển hình trong S và rõ ràng động lượng tổng bằng 0. Nhưng định luật bảo toàn (0 = 0). Nhưng định luật bảo toàn của Einstein cho: $\bar{u}_A = 0, \bar{u}_B = -2u / (1 + u^2 / c^2), \bar{u}_C = \bar{u}_D = -u$, vì vậy trong $\bar{S}$ (định luật bảo toàn không chính xác) động lượng không bảo toàn:

$$m \left(\frac{-2u}{1 + u^2 / c^2} \right) \neq -2mu.$$

$$(b) m_A \eta_A + m_B \eta_B = m_C \eta_C + m_D \eta_D; \eta_i = \gamma(\bar{\eta}_i + \beta \bar{\eta}_i^0). \text{ (biến đổi Lorentz ngược c.)}$$

$$m_A \gamma (\bar{\eta}_A + \beta \bar{\eta}_A^0) + m_B \gamma (\bar{\eta}_B + \beta \bar{\eta}_B^0) = m_C \gamma (\bar{\eta}_C + \beta \bar{\eta}_C^0) + m_D \gamma (\bar{\eta}_D + \beta \bar{\eta}_D^0). \quad (\text{giả sử } \beta \text{ là } \gamma \text{ của } \text{gama}):$$

$m_A \bar{\eta}_A^0 + m_B \bar{\eta}_B + \beta(m_A \bar{\eta}_A^0 + m_B \bar{\eta}_B^0) = m_C \bar{\eta}_C + m_D \bar{\eta}_D + \beta(m_C \bar{\eta}_C^0 + m_D \bar{\eta}_D^0)$. Nhưng $m_i \eta_i^0 = p_i^0 = E_i / c$, do đó nếu năng lượng động lượng bảo toàn trong $\bar{S}$ ($\bar{E}_A + \bar{E}_B = \bar{E}_C + \bar{E}_D$), thì động lượng cũng vậy (định nghĩa chính xác):

$$m_A \bar{\eta}_A + m_B \bar{\eta}_B = m_C \bar{\eta}_C + m_D \bar{\eta}_D. \quad \text{qed}$$

Bài tập 12.29:

$$\gamma mc^2 = mc^2 = nmc^2 \Rightarrow \gamma = n+1 = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow 1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$\therefore \frac{u^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}; \quad u = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{(n+1)} c.$$

Bài tập 12.30:

$$E_T = E_1 + E_2 + \dots; \quad p_T = p_1 + p_2 + \dots; \quad \bar{p}_T = \gamma(p_T - \beta E_T / c) = 0 \Rightarrow \beta = v/c = p_T c / E_T.$$

$$v = c^2 p_T / E_T = c^2 (p_1 + p_2 + \dots) / (E_1 + E_2 + \dots).$$

Bài tập 12.31:

$$E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)}{2m_\mu} c^2 = \gamma m_\mu c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)}{2m_\pi m_\mu} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}; \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2};$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{4m_\pi^2 m_\mu^2}{(m_\pi^2 + m_\mu^2)^2} = \frac{m_\pi^4 + 2m_\pi^2 m_\mu^2 + m_\mu^4 - 4m_\pi^2 m_\mu^2}{(m_\pi^2 + m_\mu^2)^2} = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{(m_\pi^2 + m_\mu^2)^2}; \quad v = \left(\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_\pi^2 + m_\mu^2} \right) c.$$

Bài tập 12.32:

Động lượng ban đầu: $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \Rightarrow p^2 c^2 = (2mc^2)^2 - m^2 c^4 = 3m^2 c^4 \quad p = \sqrt{3}mc.$

Năng lượng ban đầu: $2mc^2 + mc^2 = 3mc^2.$

Có hai đầu động lượng bảo toàn, năng lượng cuối cùng là $3mc^2$, động lượng cuối cùng là: $\sqrt{3}mc$.

$$E^2 - p^2 c^2 = (3mc^2)^2 - (\sqrt{3}mc)^2 c^2 = 6m^2 c^4 = M^2 c^4 \Rightarrow M = \sqrt{6}m \approx 2.5m.$$

(Theo cách này, một lượng động năng động chuyển thành năng lượng nghỉ, do đó $M > 2m$.)

$$v = \frac{pc^2}{E} = \frac{\sqrt{3}mcc^2}{3mc^2} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Bài tập 12.33:

Đầu tiên tính năng lượng pion:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = \frac{9}{16} m^2 c^4 + m^2 c^4 = \frac{25}{16} m^2 c^4 \Rightarrow E = \frac{5}{4} m c^2.$$

Bảo toàn năng lượng: $\frac{5}{4} m c^2 = E_A + E_B$

Bảo toàn động lượng: $\frac{3}{4} m c^2 = p_A + p_B = \frac{E_A}{c} - \frac{E_B}{c} \Rightarrow \frac{3}{4} m c^2 = E_A - E_B$

Suy ra $2E_A = 2m c^2$.

$$\Rightarrow E_A = m c^2; E_B = \frac{1}{4} m c^2.$$

Bài tập 12.34:

Có định nghĩa: $E = \frac{1}{2} m v^2$. Trong thí nghiệm chùm va chạm, vận tốc tương đối (cộng động) gặp đôi vận tốc của hai cái. Do đó năng lượng tương đối là $4E$.

Đặt $\bar{S}$ là hệ trong đó 1 đứng yên. Tốc độ v của nó, đối với S , chính là tốc độ của 1 trong S

$$\bar{p}^0 = \gamma(p^0 - \beta p^1)$$

$$\bar{p}^0 = \gamma(p^0 - \beta p^1) \Rightarrow \frac{\bar{E}}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \beta p\right), \quad \text{đây } p \text{ là động lượng của } 2 \text{ trong } S.$$

$$E = \gamma M c^2 \gamma = \frac{E}{M c^2}; \quad p = -\gamma M v = -\gamma M \beta c; \quad \bar{E} = \gamma\left(\frac{E}{c} + \beta \gamma M \beta c\right) c = \gamma(E + \gamma M c^2 \beta^2).$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \Rightarrow 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \quad \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}; \quad \bar{E} = \frac{E}{M c^2} E + \left[\left(\frac{E}{M c^2}\right)^2 - 1\right] M c^2.$$

$$\bar{E} = \frac{E^2}{M c^2} + \frac{E^2}{M c^2} - M c^2; \quad \bar{E} = \frac{2E^2}{M c^2} - M c^2.$$

$$\text{Với } E = 30 \text{ GeV và } M c^2 = 1 \text{ GeV, Ta có: } \bar{E} = \frac{(2)(900)}{1} - 1 = 1800 - 1 = 1799 \text{ GeV} = 60E.$$

Bài tập 12.35:

Một photon là không thể đo được, bởi vì trong hệ tọa độ ‘tâm động lượng’ (bài tập 12.30) chúng ta còn lại một photon ở trạng thái nghỉ, trong khi đó các photon phải di chuyển với tốc độ c . Bảo toàn năng lượng: $\sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} + mc^2 = E_A + E_B$.

Bảo toàn động lượng

$$+ \text{ Theo phương ngang: } p_0 = \frac{E_A}{c} \cos 60^\circ + \frac{E_B}{c} \cos \theta \Rightarrow E_B \cos \theta = p_0 c - \frac{1}{2} E_A,$$

$$+ \text{ Theo phương thẳng đứng: } 0 = \frac{E_A}{c} \sin 60^\circ - \frac{E_B}{c} \sin \theta \Rightarrow E_B \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} E_A;$$

Bình phương và cộng các vế với nhau ta được:

$$\begin{aligned} E_B^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &= p_0^2 c^2 - p_0 c E_A + \frac{1}{4} E_A^2 + \frac{3}{4} E_A^2 \\ \Rightarrow E_B^2 &= p_0^2 c^2 - p_0 c E_A + E_A^2 = \left[\sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} + mc^2 - E_A \right]^2 \\ &= p_0^2 c^2 + m^2 c^4 + 2\sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} (mc^2 - E_A) + m^2 c^4 - 2E_A mc^2 + E_A^2. \end{aligned}$$

Hay:

$$\begin{aligned} -p_0 c E_A &= 2m^2 c^4 + 2mc^2 \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} - 2E_A \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} - 2E_A mc^2; \\ E_A &= mc^2 \frac{(mc^2 + \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4})}{(mc^2 + \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} - p_0 c / 2)} \cdot \frac{(mc^2 - \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} - p_0 c / 2)}{(mc^2 - \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} - p_0 c / 2)} \\ &= mc^2 \frac{\left(m^2 c^4 - p_0^2 c^2 - m^2 c^4 - \frac{1}{2} p_0 mc^3 - \frac{p_0 c}{2} \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4} \right)}{\left(m^2 c^4 - p_0 mc^3 + \frac{p_0^2 c^2}{4} - p_0^2 c^2 - m^2 c^4 \right)} = \frac{mc^2 (mc + 2p_0 + \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4})}{2 (mc + \frac{3}{4} p_0)}. \end{aligned}$$

Bài tập 13.36:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = m \left\{ \frac{\frac{d\mathbf{u}}{dt}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \mathbf{u} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{-\frac{1}{c^2} 2\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left(\mathbf{a} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - u^2)} \right). \text{ qed} \end{aligned}$$

Bài tập 13.37:

Một lờc không đợi tác đợng lên bñn khi bñn đi trong quđ đợo hypebol. Photon A rđi gđc tđa đợ tđi $t < 0$ bñt kđp bñn, nhđng photon B, đi qua gđc tđa đợ tđi $t > 0$, không bao giđ bñt kđp bñn.

Bài tập 13.38:

(a)

$$\begin{aligned}\alpha^0 &= \frac{d\eta_0}{d\tau} = \frac{d\eta_0}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{\left(-\frac{1}{c^2} \right) 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{(1-u^2/c^2)^2} \\ \alpha &= \frac{d\boldsymbol{\eta}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left\{ \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \mathbf{u} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{-\frac{1}{c^2} 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \right\} \\ &= \frac{1}{(1-u^2/c^2)} \left[\mathbf{a} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - u^2)} \right]\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\alpha_\mu \alpha^\mu &= -(\alpha^0)^2 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha} = -\frac{1}{c^2} \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2}{(1-u^2/c^2)^4} + \frac{1}{(1-u^2/c^2)^4} \left[a^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) \right]^2 \\ &= \frac{1}{(1-u^2/c^2)^4} \left\{ \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2 + a^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^2 + \frac{2}{c^2} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2 + \frac{1}{c^4} u^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(1-u^2/c^2)^4} \left\{ a^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^2 + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2}{c^2} \underbrace{\left(-1 + 2 - 2\frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2} \right)}_{\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)} \right\} \\ &= \frac{1}{(1-u^2/c^2)^2} \left[a^2 + \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})^2}{c^2 - u^2} \right].\end{aligned}$$

(c) $\eta^\mu \eta_\mu = -c^2$, vì $\frac{d}{d\tau}(\eta^\mu \eta_\mu) = \alpha^\mu \eta_\mu = \eta^\mu \alpha_\mu = 2\alpha^\mu \eta_\mu = 0$ do đó $\boxed{\alpha^\mu \eta_\mu = 0}.$

$$(d) K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(m\eta^\mu) = m\alpha^\mu. \quad \boxed{K^\mu \eta_\mu = m\alpha^\mu \eta_\mu = 0.}$$

Bài tập 12.39:

$$K_\mu K^\mu = -(K^0)^2 + \mathbf{K} \cdot \mathbf{K}. \quad \text{Tính bằng công thức 12.70, } \mathbf{K} \cdot \mathbf{K} = \frac{F^2}{(1-u^2/c^2)}. \quad \text{Tính bằng công thức 12.71:}$$

$$K^0 = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} = \frac{1}{c\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{d}{dt} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right) = \frac{mc}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left(-\frac{1}{2} \frac{(-1/c^2)}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} \right) = \frac{m}{c} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{(1-u^2/c^2)^2}.$$

$$\text{Nhân công thức 12.73: } \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = uF \cos \theta = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left[(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) + \frac{u^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{c^2 (1-u^2/c^2)} \right] = \frac{m(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(1-u^2/c^2)^{3/2}}, \text{ do}$$

$$\text{đó } K^0 = \frac{uF \cos \theta}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}; \quad K_\mu K^\mu = \frac{F^2}{(1-u^2/c^2)} - \frac{u^2 F^2 \cos^2 \theta}{c^2 (1-u^2/c^2)} = \left[\frac{1 - (u^2/c^2) \cos^2 \theta}{(1-u^2/c^2)} \right] F^2. \quad \text{qed}$$

Bài tập 12.40:

$$F = \frac{m}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left[\mathbf{a} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{c^2 - u^2} \right] = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \Rightarrow \mathbf{a} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{c^2 - u^2} = \frac{q}{m} \sqrt{1-u^2/c^2} (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Tích vô hướng với $\mathbf{u}$:

$$\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} + \frac{u^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{c^2 (1-u^2/c^2)} \right) = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(1-u^2/c^2)} = \frac{q}{m} \sqrt{1-u^2/c^2} \left[\mathbf{u} \cdot \mathbf{E} + \underbrace{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})}_{=0} \right];$$

$$\therefore \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - u^2)} = \frac{q}{m} \sqrt{1-u^2/c^2} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})}{c^2}.$$

$$\text{Do đó: } \mathbf{a} = \frac{q}{m} \sqrt{1-u^2/c^2} \left[\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \right]. \quad \text{qed}$$

Bài tập 12.41:

Một cách để hiểu nó là quay lại công thức tổng quát của $\mathbf{E}$ (phương trình 10.29). Đối với một phần tử vô hạn mang điện đều, di chuyển với tốc độ không đổi trong mặt phẳng $\mathbf{j} = 0$ và $\dot{\rho} = 0$, trong khi đó ρ (hoặc thay vào đó σ) không phụ thuộc vào t (vì vậy sẽ từ

hoàn không làm gì). Do đó, trường điện trường chỉ với mặt phẳng điện trường (mặt dù chính σ được thay bằng số Lorentz).

Mặt lí luận tính toán khám phá ra rằng $\mathbf{E}$ là một vector (trong khi đó $\mathbf{B}$ là giả vector). Điều này có nghĩa là bất cứ thành phần nào đi đến đầu cuối hình được phần x trong mặt phẳng vuông góc với hướng đó. Như trong hình 12.35 (b), nếu chúng ta cho phần x trong mặt phẳng xy , cấu hình không thay đổi, vì vậy thành phần z của $\mathbf{E}$ phải giống trường. Do đó nó phải thực sự bằng không. (Theo quy tắc, nếu bất kỳ phần x mặt phẳng vuông góc với hướng y , điện tích đi hướng, vì vậy thành phần y của $\mathbf{E}$ do ngược dấu là điều hợp lý).

Bài tập 12.42:

(a) Trường là σ_0 / ϵ_0 . Và nó vuông góc với bình diện, nên:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (\cos 45^\circ \hat{\mathbf{x}} + \sin 45^\circ \hat{\mathbf{y}}) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}\epsilon_0} (-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}).$$

(b) Trường điện trường trình 12.108: $E_x = E_{x_0} = -\frac{\sigma_0}{\sqrt{2}\epsilon_0}$; $E_y = \gamma E_{y_0} = \gamma \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}\epsilon_0}$. Do đó

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}\epsilon_0} (-\hat{\mathbf{x}} + \gamma \hat{\mathbf{y}}).$$

(c) Từ bài tập 12.10: $\tan \theta = \gamma$, $\theta = \tan^{-1} \gamma$.

(d) Cho $\hat{\mathbf{n}}$ là vectơ đơn vị vuông góc với bình diện S - hướng nhiên

$$\hat{\mathbf{n}} = -\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}; |\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\epsilon_0} \sqrt{1 + \gamma^2}.$$

Do đó, góc giữa $\hat{\mathbf{n}}$ và $\mathbf{E}$ là:

$$\frac{\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}}{E} = \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} (\sin \theta + \gamma \cos \theta) = \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \gamma^2}} (\tan \theta + \gamma) = \frac{2\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \cos \theta.$$

$$\text{Nhưng: } \gamma = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta} = \gamma^2 + 1 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}}.$$

Nên Hướng nhiên trường không vuông góc với bình diện trong S .

Bài tập 12.43:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(1-v^2/c^2)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \quad (\text{Phương trình 12.39})$$

$$\Rightarrow \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q(1-v^2/c^2)}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}. \text{ Cho } u = \cos\theta, \text{ nên } du = -\sin\theta d\theta, \sin^2\theta = 1-u^2.$$

$$= \frac{q(1-v^2/c^2)}{2\epsilon_0} \int_{-1}^1 \frac{du}{\left[1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}u^2\right]^{3/2}} = \frac{q(1-v^2/c^2)}{2\epsilon_0} \left(\frac{c}{v}\right)^3 \int_{-1}^1 \frac{du}{\left(\frac{v^2}{c^2}-1+u^2\right)^{3/2}}.$$

Tích phân ta được:

$$\left. \frac{u}{\left(\frac{c^2}{v^2}-1\right)\sqrt{\frac{v^2}{c^2}-1+u^2}} \right|_{-1}^{+1} = \frac{2}{\frac{u}{\left(\frac{c^2}{v^2}-1\right)\frac{c}{v}}} = \left(\frac{c}{v}\right)^2 \frac{2}{(1-v^2/c^2)}.$$

$$\text{Do đó: } \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q(1-v^2/c^2)}{2\epsilon_0} \left(\frac{c}{v}\right)^3 \left(\frac{v}{c}\right)^3 \frac{2}{(1-v^2/c^2)} = q.$$

(c) Sử dụng phương trình 12.111 và phương trình 12.92,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2(1-v^2/c^2)^2 v \sin\theta}{R^4 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^3} \underbrace{(\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}})}_{-\hat{\boldsymbol{\theta}}};$$

$$S = -\frac{q^2}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{(1-v^2/c^2)^2 v \sin\theta}{R^4 (1-v^2/c^2 \sin^2\theta)^3} \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Bài tập 12.44:

(a) Tính cường độ điện trường tại B: $\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{d^2} \hat{\mathbf{y}}; \mathbf{B} = 0$. Vì vậy lực tác động trên q_B là:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{d^2} \hat{\mathbf{y}}.$$

(b)(i) Từ phương trình 12.68: $\vec{F} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{d^2} \hat{y}$ (Chú ý: đây là hệt còn lại trong $\vec{S}$) (ii)

Từ phương trình 12.92: $\theta = 90^\circ$: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A(1-v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \frac{1}{d^2} \hat{y} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A}{d^2} \hat{y}$ (điều này cũng

tuân theo phương trình 12.108).

$\vec{B} \neq 0$, nhưng vì $v_B = 0$ trong $\vec{S}$, không có lực từ, và $\vec{F} = \frac{\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{d^2} \hat{y}$ (như trước)

Bài tập 12.45:

Ở đây $\theta = 90^\circ$, $\hat{r} = \hat{y}$, $R = r$, do đó (sử dụng $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$):

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma}{r^2} \hat{y}, \vec{B} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{v}{c^2} \frac{\gamma}{r^2} \hat{z}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Chú ý rằng: $(E^2 - B^2 c^2) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)^2$ là bất biến, bởi vì nó không phụ thuộc

vào v. Chúng ta có thể sử dụng điều này để kiểm tra.

Hệ A: $v_A = v$, do đó $\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{\gamma}}{r^2} \hat{y}$, $\vec{B} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{v}{c^2} \frac{\bar{\gamma}}{r^2} \hat{z}$, với $\bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

$$\vec{F} = q[\vec{E} + (-v\hat{x}) \times \vec{B}] = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{\gamma}}{r^2} \left[\hat{y} - \frac{v^2}{c^2} (\hat{x} \times \hat{z}) \right] = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{\gamma}}{r^2} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \hat{y}$$

Hệ B: $v_B = \frac{v+v}{1+v^2/c^2} = \frac{2v}{(1+v^2/c^2)}$

$$\gamma_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4v^2/c^2}{(1+v^2/c^2)^2}}} = \frac{(1+v^2/c^2)}{(1-v^2/c^2)} = \bar{\gamma}^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right); v_B \gamma_B = 2v\bar{\gamma}^2;$$

$$\therefore \vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \bar{\gamma}^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \hat{y}; \vec{B} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2v}{c^2} \frac{\bar{\gamma}^2}{r^2} \hat{z}$$

[Kiểm tra: $E^2 - B^2 c^2 = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \bar{\gamma}^4 \left(1 + \frac{2v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4} - \frac{4v^2}{c^2} \right) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2 \bar{\gamma}^4 \frac{1}{\bar{\gamma}^4} = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\right)^2]$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{\gamma}^2}{r^2} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{y}. \text{ (+q đứng yên } \Rightarrow \text{ không có } \mathbf{B}). \text{ [Kiểm chứng phương trình}$$

$$12.68 \Rightarrow F_A = \frac{1}{\bar{\gamma}} F_B]$$

$$\text{H\&C: } v_C = 0. \quad \mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{y} ; \quad \mathbf{B} = 0; \mathbf{F} = q\mathbf{E} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{y}.$$

[Vận tốc tương đối giữa C và B là $2v/(1+v^2/c^2)$, và tương đối γ là $\bar{\gamma}^2(1+v^2/c^2)$. Do đó

$$\text{phương trình 12.68} \Rightarrow F_C = \frac{1}{\bar{\gamma}^2(1+v^2/c^2)} F_B.]$$

Bảng tóm tắt:

$\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \hat{y}$	$\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \gamma^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{y}$	$\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \hat{y}$
$\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \frac{v}{c^2} \gamma^2 \hat{z}$	$\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \frac{2v}{c^2} \gamma^2 \hat{z}$	0
$\left(-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \gamma \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{y}$	$\left(-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \gamma^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \hat{y}$	$\left(-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right) \hat{y}$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Bài tập 12.46

(a) Tính phương trình 12.108:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{B}} &= \bar{E}_x \bar{B}_x + \bar{E}_y \bar{B}_y + \bar{E}_z \bar{B}_z = \bar{E}_x \bar{B}_x + \gamma^2 (E_y - vB_z) \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right) + \gamma (E_z + vB_y) \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) \\ &= E_x B_x + \gamma^2 \left\{ E_y B_y + \frac{v}{c^2} \cancel{E_y E_z} - v B_y B_z - \frac{v^2}{c^2} E_z B_z + E_z B_z - \frac{v}{c^2} \cancel{E_y E_z} + v \cancel{B_y B_z} - \frac{v^2}{c^2} E_y B_y \right\} \\ &= E_x B_x + \gamma^2 \left[E_y B_y \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + E_z B_z \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] = E_x B_x + E_y B_y + E_z B_z = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \bar{E}^2 - c^2 \bar{B}^2 &= \left[E_x^2 + \gamma^2 (E_y - vB_z)^2 + \gamma^2 (E_z - vB_y)^2 \right] - c^2 \left[B_x^2 + \gamma^2 \left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right)^2 + \gamma^2 \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right)^2 \right] \\
 &= E_x^2 + \gamma^2 \left(E_y^2 - 2E_y v B_z + v^2 B_z^2 + E_z^2 + E_z v B_y + v^2 B_y^2 - c^2 B_y^2 - c^2 2 \frac{v}{c^2} B_y E_z - c^2 \frac{v^2}{c^4} E_z^2 - c^2 B_z^2 \right. \\
 &\quad \left. + c^2 2 \frac{v}{c^2} B_z E_y - c^2 \frac{v^2}{c^4} E_y^2 \right) - c^2 B_x^2 \\
 &= E_x^2 - c^2 B_x^2 + \gamma^2 \left[E_y^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + E_z^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - c^2 B_y^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - c^2 B_z^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] \\
 &= (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) - c^2 (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) = E^2 - B^2 c^2. \text{qed}
 \end{aligned}$$

(c) Không. Nếu $B = 0$ trong một hệ, thì $(E^2 - c^2 B^2)$ là dương. Tuy đó, nó là bất biến, nó có thể là dương trong bất kỳ hệ nào. Do đó $E \neq 0$ trong tất cả các hệ.

Bài tập 12.47:

(a) Thúc nghiệm một số điều kiện thích hợp trong phương trình 9.48 (và chọn $\delta = 0$ cho thuận tiện), $\mathbf{E}(x, y, z, t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{y}$, $\mathbf{B}(x, y, z, t) = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t) \hat{z}$, ở đây $k \equiv \frac{\omega}{c}$.

(b) Sử dụng phương trình 12.108 để biến đổi các trường:

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_x &= \bar{E}_z = 0, \quad \bar{E}_y = \gamma (E_y - vB_z) = \gamma E_0 \left[\cos(kx - \omega t) - \frac{v}{c} \cos(kx - \omega t) \right] = \alpha E_0 \cos(kx - \omega t), \\
 \bar{B}_x &= \bar{B}_y = 0, \quad \bar{B}_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) = \gamma E_0 \left[\frac{1}{c} \cos(kx - \omega t) - \frac{v}{c^2} \cos(kx - \omega t) \right] = \alpha \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t),
 \end{aligned}$$

ở đây: $\alpha \equiv \gamma \left(1 - \frac{v}{c} \right) = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$.

Bây giờ biến đổi Lorentz ngược (phương trình 12.19) $\Rightarrow x = \gamma(\bar{x} + vt)$ và

$$t = \gamma \left(\bar{t} + \frac{v}{c^2} \bar{x} \right), \text{ do đó}$$

$$kx - \omega t = \gamma \left[k(\bar{x} + vt) - \omega \left(\bar{t} + \frac{v}{c^2} \bar{x} \right) \right] = \gamma \left[\left(k - \frac{\omega v}{c^2} \right) \bar{x} - (\omega - kv) \bar{t} \right] = \bar{k} \bar{x} - \bar{\omega} \bar{t},$$

ở đây (nhớ rằng $k = \omega/c$): $\bar{k} \equiv \gamma \left(k - \frac{\omega v}{c^2} \right) = \gamma k (1 - v/c) = \alpha k$ và $\bar{\omega} \equiv \gamma \omega (1 - v/c) = \alpha \omega$.

$$\text{Kí hiệu: } \bar{\mathbf{E}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \bar{E}_0 \cos(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}) \hat{\mathbf{y}}, \quad \bar{\mathbf{B}}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) = \frac{\bar{E}_0}{c} \cos(\bar{k}\bar{x} - \bar{\omega}\bar{t}) \hat{\mathbf{z}},$$

ở đây: $\bar{E}_0 = \alpha E_0$, $\bar{k} = \alpha k$, $\bar{\omega} = \alpha \omega$, và $\alpha \equiv \sqrt{\frac{1-\nu/c}{1+\nu/c}}$.

(c) $\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{1-\nu/c}{1+\nu/c}}$. Đây là dịch chuyển Doppler của ánh sáng. $\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{\bar{k}} = \frac{2\pi}{\alpha k} = \frac{\lambda}{\alpha}$.

Vận tốc của sóng trong $\bar{S}$ là $\bar{v} = \frac{\bar{\omega}}{2\pi} \bar{\lambda} = \frac{\omega}{\lambda} = c$. Yup, đây đúng là điều tôi mong đợi (vận tốc sóng ánh sáng là như nhau trong mọi hệ quán tính)

(d) Bởi vì cường độ tỉ lệ với E^2 , tỉ số là: $\frac{\bar{I}}{I} = \frac{\bar{E}_0^2}{E_0^2} = \alpha^2 = \frac{1-\nu/c}{1+\nu/c}$

Kính gửi mọi người,

Biên độ, tần số và cường độ của sóng ánh sáng sẽ giảm và không khi bạn chạy ngày càng xa. Nó sẽ trở nên quá yếu để nhìn thấy nó, và vì vậy kính nhìn đệm dịch chuyển để của bạn cũng sẽ không thấy. Nhưng nó vẫn là $3 \cdot 10^8$ m/s để nhìn thấy. Xin lỗi vì điều đó.

Thân chào,

David

Bài tập 12.48:

$$\bar{t}^{02} = \Lambda_{\lambda}^0 \Lambda_{\sigma}^2 t^{\lambda\sigma} = \Lambda_0^0 \Lambda_2^2 t^{02} + \Lambda_1^0 \Lambda_2^2 t^{12} = \gamma t^{02} + (-\gamma\beta) t^{12} = \gamma(t^{02} - \beta t^{12}).$$

$$\bar{t}^{03} = \Lambda_{\lambda}^0 \Lambda_{\sigma}^3 t^{\lambda\sigma} = \Lambda_0^0 \Lambda_3^3 t^{03} + \Lambda_1^0 \Lambda_3^3 t^{13} = \gamma t^{03} + (-\gamma\beta) t^{13} = \gamma(t^{03} - \beta t^{13}) = \gamma(t^{03} + \beta t^{31}).$$

$$\bar{t}^{23} = \Lambda_{\lambda}^2 \Lambda_{\sigma}^3 t^{\lambda\sigma} = \Lambda_2^2 \Lambda_3^3 t^{23} = t^{23}.$$

$$\bar{t}^{31} = \Lambda_{\lambda}^3 \Lambda_{\sigma}^1 t^{\lambda\sigma} = \Lambda_0^3 \Lambda_1^1 t^{30} + \Lambda_3^3 \Lambda_1^1 t^{31} = (-\gamma\beta) t^{30} + \gamma t^{31} = \gamma(t^{31} + \beta t^{03})$$

$$\bar{t}^{12} = \Lambda_{\lambda}^1 \Lambda_{\sigma}^2 t^{\lambda\sigma} = \Lambda_0^1 \Lambda_2^2 t^{02} + \Lambda_1^1 \Lambda_2^2 t^{12} = (-\gamma\beta) t^{02} + \gamma t^{12} = \gamma(t^{12} - \beta t^{02}).$$

Bài tập 12.49:

Gọi $t^{\nu\mu} = \pm t^{\mu\nu}$ (+ đối xứng, - phản đối xứng)

$$\bar{t}^{k\lambda} = \Lambda_{\mu}^k \Lambda_{\nu}^{\lambda} t^{\mu\nu}$$

$\bar{t}^{\lambda k} = \Lambda_{\mu}^{\lambda} \Lambda_{\nu}^k t^{\mu\nu} = \Lambda_{\nu}^{\lambda} \Lambda_{\mu}^k t^{\nu\mu}$ [Bí vì c μ và ν đều c μ c μ ng t $0 \rightarrow 3$, cái nào là μ và cái nào là ν không quan trọng]

$= \Lambda_{\mu}^k \Lambda_{\mu}^{\lambda} (\pm t^{\mu\nu})$ [Tôi đều c μ s μ d μ ng tính đều x μ ng c μ a $t^{\mu\nu}$ và đã viết các Λ 's theo thứ tự khác]

$$= \pm \bar{t}^{k\lambda}. \text{qed}$$

Bài tập 12.50:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= F^{00} F^{00} - F^{01} F^{01} - F^{02} F^{02} - F^{03} F^{03} - F^{10} F^{10} - F^{20} F^{20} - F^{30} F^{30} + F^{11} F^{11} \\ &\quad + F^{12} F^{12} + F^{13} F^{13} + F^{21} F^{21} + F^{22} F^{22} + F^{23} F^{23} + F^{31} F^{31} + F^{32} F^{32} + F^{33} F^{33} \\ &= -(E_x/c)^2 - (E_y/c)^2 - (E_z/c)^2 - (E_x/c)^2 - (E_y/c)^2 - (E_z/c)^2 + B_z^2 + B_y^2 + B_z^2 + B_x^2 + B_y^2 + B_x^2 \\ &= 2B^2 - 2E^2/c^2 = 2\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

nó, ngoài từ h μ s μ không đều $-\frac{2}{c^2}$, là b μ t bi μ n mà chúng ta tìm thấy trong bài tập 12.46(b).

$$G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} = 2(E^2/c^2 - B^2) \text{ (cùng b μ t bi μ n)}$$

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} G_{\mu\nu} &= -2(F^{01} G^{01} + F^{02} G^{02} + F^{03} G^{03}) + 2(F^{12} G^{12} + F^{13} G^{13} + F^{23} G^{23}) \\ &= -2\left(\frac{1}{c} E_x B_x + \frac{1}{c} E_y B_y + \frac{1}{c} E_z B_z\right) 2[B_z(-E_z/c) + B_y(-E_y/c) + B_x(-E_x/c)] \\ &= -\frac{2}{c}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) - \frac{2}{c}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = -\frac{4}{c}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}), \end{aligned}$$

Trong đó, ngoài các h μ s μ $4/c$ b μ t bi μ n trong bài tập 12.46 (a). [Chúng ngu μ nhiên là các b μ t bi μ n c μ b μ n mà b μ n có thể xây dựng từ $\mathbf{E}$ và $\mathbf{B}$]

Bài tập 12.51:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{x} \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\lambda c^2}{x} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\lambda v}{x} \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\lambda v}{x} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \right\} F^{\mu\nu} = \frac{\mu_0 \lambda}{2\pi x} \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & -v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài tập 12.52:

$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$. Lấy đạo hàm $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\mu J^\mu$. Nhưng $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$ (kết hợp là đối xứng) trong khi $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$ (phản đối xứng) $\therefore \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$ (Tại sao? Vì các chỉ số này đều đối xứng trong $0 \rightarrow 3$, vì vậy chúng ta gọi cái nào là μ , cái nào là ν không quan trọng. Nhưng nếu bạn đặt đối xứng bằng trọng tâm nó, nó phải bằng không $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu} = \partial_\mu \partial_\nu (-F^{\mu\nu}) = -\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}$.

Kết luận $\partial_\mu J^\mu = 0$. *qed*

Bài tập 12.53:

Chúng ta biết rằng $\partial_\nu G^{\mu\nu} = 0$ từ việc áp dụng hai phương trình Maxwell dưới dạng nhúng, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ và $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Chúng ta cần phải chứng minh $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ cũng từ việc áp dụng việc này. Lúc này phương trình này đối xứng cho 64 phương trình riêng biệt ($\mu = 0 \rightarrow 3, \nu = 0 \rightarrow 3, \lambda = 0 \rightarrow 3$ và $4 \times 4 \times 4 = 64$). Nhưng nhiều phương trình trong số đó hoặc đồng nhất hoặc tầm thường.

Giả sử rằng hai chỉ số đều giống nhau ($\mu = \nu$). Khi đó $\partial_\lambda F_{\mu\mu} + \partial_\mu F_{\mu\lambda} + \partial_\mu F_{\lambda\mu} = 0$. Nhưng $F_{\mu\mu} = 0$ và $F_{\mu\lambda} = -F_{\lambda\mu}$, vì vậy điều này tầm thường $0 = 0$. Để có được các bất đẳng thức khác thì μ, ν, λ phải khác nhau. Chúng có thể có được các không gian ($\mu, \nu, \lambda = 1, 2, 3 = x, y, z$ hoặc một số hoán vị chung), hoặc một không gian và hai không gian ($\mu = 0, \nu, \lambda = 1, 2$ hoặc $1, 3$ – hoặc một số hoán vị). Chúng ta hãy xét hai trường hợp riêng biệt.

Tất cả các không gian: giả sử $\mu = 1, \nu = 2, \lambda = 3$ (các hoán vị khác đều dẫn cùng cùng một phương trình hoặc trọng tâm nó)

$$\partial_3 F_{12} + \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(B_z) + \frac{\partial}{\partial x}(B_x) + \frac{\partial}{\partial y}(B_y) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Thời gian: giả sử $\mu = 0, \nu = 1, \lambda = 2$ (Nhưng hoán vị khác của các chỉ số này mang lại kết quả tương đương hoặc trọng tâm nó)

$$\partial_2 F_{01} + \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{E_x}{c}\right) + \frac{\partial}{\partial(ct)}(B_z) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E_y}{c}\right) = 0,$$

hay $-\frac{\partial B_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = 0$, đó là thành phần z của $-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}$. (Như $\mu = 0, \nu = 1, \lambda = 2$,

chúng ta nhận được thành phần y, đối với $\nu = 2, \lambda = 3$ chúng ta nhận được thành phần x)

Kết luận: $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ tương đương với $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ và $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \partial_\nu G^{\mu\nu} = 0$. *qed*.

Bài tập 12.54:

$$K^0 = q\eta_\nu F^{0\nu} = q(\eta_1 F^{01} + \eta_2 F^{02} + \eta_3 F^{03}) = q(\eta \cdot \mathbf{E})/c = \frac{q}{c} \gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}.$$

Từ phương trình 12.71 ta biết rằng $K_0 = \frac{1}{c} \frac{dW}{d\tau}$, ở đây W là năng lượng của hạt. Bởi vì

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt, \text{ ta có: } \frac{1}{c} \gamma \frac{dW}{dt} = \frac{q}{c} \gamma (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \Rightarrow \frac{dW}{dt} = q(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}).$$

Điều này có nghĩa là công suất được cung cấp cho hạt bằng tích $(q\mathbf{E})$ nhân vận tốc $(\mathbf{u})$ - nó phải là véc-tơ

Bài tập 12.55:

$$\overline{\partial^0 \phi} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_0} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \phi = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \bar{t}} \right).$$

Từ phương trình 12.19 ta có: $\frac{\partial t}{\partial \bar{t}} = \gamma, \frac{\partial x}{\partial \bar{t}} = \gamma v, \frac{\partial y}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial z}{\partial \bar{t}} = 0$.

Do đó: $\overline{\partial^0 \phi} = -\frac{1}{c} \gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + v \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$ hay (bởi vì $ct = x^0 = -x_0$):

$$\overline{\partial^0 \phi} = \gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_0} - \frac{v}{c} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \right) = \gamma \left[(\partial^0 \phi) - \beta (\partial^1 \phi) \right].$$

Kết luận: $\phi \partial^\mu$ biến đổi giống như a^μ (phương trình 12.27) - và do đó là 4 vectơ phản biến *qed*.

Bài tập 12.56:

Theo như bài tập 12.53 $\frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$ là tương đương với phương trình 12.129. Sử dụng phương trình 12.132, chúng ta tìm được (theo quy tắc của bài tập 12.55):

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} &= \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} \\ &= \partial_\lambda (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \partial_\mu (\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) + \partial_\nu (\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) \\ &= (\partial_\lambda \partial_\mu A_\nu - \partial_\lambda \partial_\nu A_\mu) + (\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda - \partial_\mu \partial_\lambda A_\nu) + (\partial_\nu \partial_\lambda A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu A_\lambda)\end{aligned}$$

[Chú ý rằng: $\partial_\lambda \partial_\mu A_\nu = \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} = \frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} = \partial_\mu \partial_\lambda A_\nu$, qua sự đồng đẳng chéo]

Bài tập 12.57:

Bài c 1: quay xy đến XY, sử dụng phép biến đổi 1.29:

$$\begin{aligned}X &= \cos\theta x + \sin\theta y \\ Y &= -\sin\theta x + \cos\theta y\end{aligned}$$

Bài c 2: biến đổi Lorentz từ XY đến $\overline{XY}$ sử dụng phép biến đổi 12.18:

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \gamma(X - vt) = \gamma[\cos\phi x + \sin\phi y - \beta ct] \\ \overline{Y} &= Y = -\sin\phi x + \cos\phi y \\ \overline{Z} &= Z = z \\ c\overline{t} &= \gamma(ct - \beta X) = \gamma[ct - \beta\cos\phi x + \sin\phi y]\end{aligned}$$

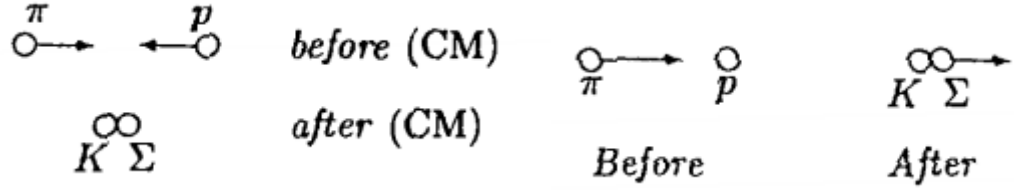
Bài c 3: quay $\overline{XY}$ đến $\overline{x}\overline{y}$, sử dụng phép biến đổi 1.29 với ϕ âm:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \cos\phi \overline{X} - \sin\phi \overline{Y} = \gamma\cos\phi[\cos\phi x + \sin\phi y - \beta ct] - \sin\phi[-\sin\phi x + \cos\phi y] \\ &= (\gamma\cos^2\phi + \sin^2\phi)x + (\gamma-1)\sin\phi\cos\phi y - \gamma\beta\cos\phi(ct) \\ \overline{y} &= \sin\phi \overline{X} + \cos\phi \overline{Y} = \gamma\sin\phi(\cos\phi x + \sin\phi y - \beta ct) + \cos\phi(-\sin\phi x + \cos\phi y) \\ &= (\gamma-1)\sin\phi\cos\phi x + (\gamma\sin^2\phi + \cos^2\phi)y - \gamma\beta\sin\phi(ct)\end{aligned}$$

$$\text{Dạng ma trận: } \begin{pmatrix} ct \\ \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta\cos\phi & -\gamma\beta\sin\phi & 0 \\ -\gamma\beta\cos\phi & (\gamma\cos^2\phi + \sin^2\phi) & (\gamma-1)\sin\phi\cos\phi & 0 \\ -\gamma\beta\sin\phi & (\gamma-1)\sin\phi\cos\phi & (\gamma\sin^2\phi + \cos^2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài tập 12.58:

Trong hệ tọa độ tâm động liên hệ, người quan sát hiện khi năng lượng liên hệ đủ bao trùm năng lượng nghỉ của các hạt cuội cùng. Do đó, trong hệ phòng thí nghiệm, chúng tôi muốn K và Σ đi ra có cùng vận tốc, tức đồng vận.



Động lượng ban đầu: p_π ; năng lượng ban đầu π : $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 \Rightarrow E_\pi^2 = m_\pi^2 c^4 + p_\pi^2 c^2$.

Tổng năng lượng ban đầu: $m_p c^2 + \sqrt{m_\pi^2 c^4 + p_\pi^2 c^2}$. Đây cũng là năng lượng và động lượng

của hệ cùng: $E^2 - p^2 c^2 = (m_K + m_\Sigma)^2 c^4$.

$$(m_p c^2 + \sqrt{m_\pi^2 c^4 + p_\pi^2 c^2})^2 - p_\pi^2 c^2 = (m_K + m_\Sigma)^2 c^4$$

$$m_p c^4 + \frac{2m_p c^2}{c^4} \sqrt{m_\pi^2 c^4 + p_\pi^2 c^2} + m_p c^4 + p_\pi^2 c^2 - p_\pi^2 c^2 = (m_K + m_\Sigma)^2 c^4$$

$$\frac{2m_p}{c} \sqrt{m_\pi^2 c^4 + p_\pi^2 c^2} = (m_K + m_\Sigma)^2 - m_p^2 - m_\pi^2$$

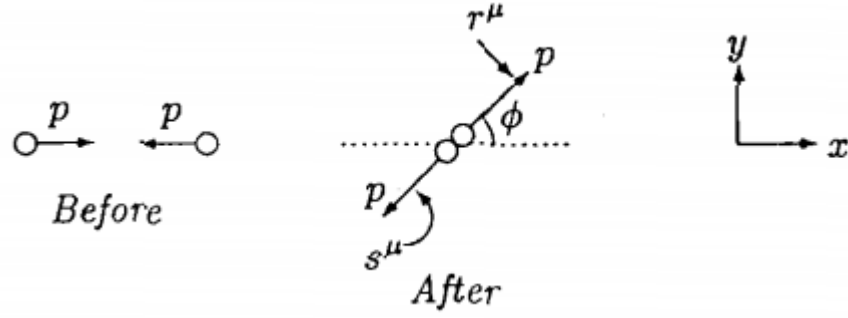
$$(m_\pi^2 c^2 + p_\pi^2) \frac{4m_p^2}{c^2} = (m_K + m_\Sigma)^4 - 2(m_p^2 + m_\pi^2)(m_K + m_\Sigma)^2 + m_p^4 + m_\pi^4 + 2m_p^2 m_\pi^2$$

$$\frac{4m_p^2}{c^2} p_\pi^2 = (m_K + m_\Sigma)^4 - 2(m_p^2 + m_\pi^2)(m_K + m_\Sigma)^2 + (m_p^2 - m_\pi^2)^2$$

$$\begin{aligned} p_\pi &= \frac{c}{2m_p} \sqrt{(m_K + m_\Sigma)^4 - 2(m_p^2 + m_\pi^2)(m_K + m_\Sigma)^2 + (m_p^2 - m_\pi^2)^2} \\ &= \frac{1}{(2m_p c^2)c} \sqrt{(m_K c^2 + m_\Sigma c^2)^4 - 2[(m_p c^2)^2 + (m_\pi c^2)^2](m_K c^2 + m_\Sigma c^2)^2 + [(m_p c^2)^2 - (m_\pi c^2)^2]^2} \\ &= \frac{1}{2c(900)} \sqrt{(1700)^2 - 2[(900)^2 + (150)^2](1700)^2 + [(900)^2 - (150)^2]^2} \\ &= \frac{1}{1800c} \sqrt{(8.35 \times 10^{12}) - (4.81 \times 10^{12}) + (0.62 \times 10^{12})} = \frac{1}{1800c} (2.04 \times 10^6) = 1133 \text{ MeV} / c. \end{aligned}$$

Bài tập 12.59:

Trong CM p là động lượng của ba động lượng trong CM, $\phi = CM$ là góc tán xạ



Trong phòng thí nghiệm:



Bài tập: tính θ theo p, ϕ .

Biến đổi Lorentz: $\bar{r}_x = \gamma(r_x - \beta r^0)$; $\bar{r}_y = r_y$; $\bar{s}_x = \gamma(s_x - \beta s^0)$; $\bar{s}_y = s_y$.

Bây giờ: $E = \gamma mc^2$; $p = -\gamma m v$ (v xét từ phía trái); $E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$, do đó

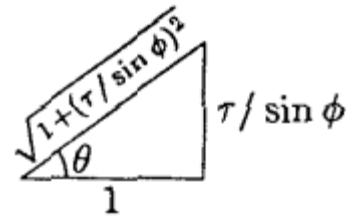
$$\beta = -\frac{pc}{E}. \therefore \bar{r}_x = \gamma \left(p \cos \phi + \frac{pc}{E} \frac{E}{c} \right) = \gamma p (1 + \cos \phi_y); \bar{r} = p \sin \phi; \bar{s}_x = \gamma p (1 - \cos \phi); \bar{s}_y = -p \sin \phi.$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{s}}}{\bar{r} \bar{s}} = \frac{\gamma^2 p^2 (1 - \cos^2 \phi) - p^2 \sin^2 \phi}{\sqrt{[\gamma^2 p^2 (1 + \cos \phi)^2 + p^2 \sin^2 \phi][\gamma^2 p^2 (1 - \cos \phi)^2 + p^2 \sin^2 \phi]}} \\ &= \frac{(\gamma^2 - 1) \sin^2 \phi}{\sqrt{[\gamma^2 (1 + \cos \phi)^2 + \sin^2 \phi][\gamma^2 (1 - \cos \phi)^2 + \sin^2 \phi]}} \\ &= \frac{(\gamma^2 - 1)}{\left[\gamma^2 \left(\frac{1 + \cos \phi}{\sin \phi} \right)^2 + 1 \right] \left[\gamma^2 \left(\frac{1 - \cos \phi}{\sin \phi} \right)^2 + 1 \right]} = \frac{(\gamma^2 - 1)}{\sqrt{\left[\left(\gamma^2 \cot^2 \frac{\phi}{2} + 1 \right) \left(\gamma^2 \tan^2 \frac{\phi}{2} + 1 \right) \right]}} \\ \cos \phi &= \frac{\omega}{\sqrt{\left(1 + \cot^2 \frac{\phi}{2} + \omega \cot^2 \frac{\phi}{2} \right) \left(1 + \tan^2 \frac{\phi}{2} + \omega \tan^2 \frac{\phi}{2} \right)}} \quad (\text{ở đây: } \omega \equiv \gamma^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\omega}{\sqrt{\left(\csc^2 \frac{\phi}{2} + \omega \cot^2 \frac{\phi}{2}\right)\left(1 + \tan^2 \frac{\phi}{2} + \omega \tan^2 \frac{\phi}{2}\right)}} = \frac{\omega \sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}}{\sqrt{\left(1 + \omega \cos^2 \frac{\phi}{2}\right)\left(1 + \omega \sin^2 \frac{\phi}{2}\right)}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \omega \sin \phi}{\sqrt{\left[1 + \frac{1}{2} \omega (1 + \cos \phi)\right]\left[1 + \frac{1}{2} \omega (1 - \cos \phi)\right]}} = \frac{\sin \phi}{\sqrt{\left[\left(\frac{2}{\omega} + 1\right) + \cos \phi\right]\left[\left(\frac{2}{\omega} + 1\right) - \cos \phi\right]}} \\
 &= \frac{\sin \phi}{\sqrt{\left(\frac{2}{\omega} + 1\right)^2 - \cos^2 \phi}} = \frac{\sin \phi}{\sqrt{\frac{4}{\omega^2} + \frac{4}{\omega} + \sin^2 \phi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau / \sin \phi)^2}},
 \end{aligned}$$

ở đây $\tau^2 = \frac{4}{\omega^2} + \frac{4}{\omega}$.

$\sin \theta = \frac{\tau}{\sin \phi}$. $\tau^2 = \frac{4}{\omega^2 (1 + \omega)} = \frac{4}{(\gamma^2 - 1)^2} \gamma^2$, do đó $\tan \theta = \frac{2\gamma}{(\gamma^2 - 1) \sin \phi}$. Hơn nữa vì:



$$(\gamma^2 - 1) = \gamma^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = \gamma^2 \frac{v^2}{c^2}, \quad \boxed{\tan \theta = \frac{2c^2}{\gamma v^2 \sin \phi}}.$$

Bài tập 12.60:

$\frac{dp}{d\tau} = K$ (hằng số) $\Rightarrow \frac{dp}{dt} \frac{dt}{d\tau} = K$. Hơn nữa $\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$; $p = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$.

$\therefore \frac{d}{dt} = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{K}{m} \sqrt{1 - u^2/c^2}$. Nhân với $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{u}$:

$\frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = \frac{K}{m} \sqrt{1 - u^2/c^2} u$. Cho

$\varpi = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$. $\frac{d\varpi}{dx} = \frac{K}{m} \frac{1}{\varpi}$; $\omega \frac{d\varpi}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \varpi^2 = \frac{k}{m}$; $\frac{d(\varpi^2)}{dx} = \frac{2K}{m} \Rightarrow d(\varpi^2) = \frac{2K}{m} (dx)$.

$\therefore \varpi^2 = \frac{2K}{m} x + \text{const}$. Hơn nữa tại $t = 0$, $x = 0$ và $u = 0$ (do $\varpi = 0$) và do đó hằng số là 0.

$$\omega^2 = \frac{2K}{m}x = \frac{u^2}{1-u^2/c^2}; u^2 = \frac{2Kx}{m} - \frac{2Kx}{mc^2}u^2; u^2 \left(1 + \frac{2Kx}{mc^2}\right) = \frac{2Kx}{m}.$$

$$u^2 = \frac{2Kx/m}{1 + \frac{2Kx}{mc^2}} = \frac{c^2}{1 + \left(\frac{mc^2}{2Kx}\right)}; \frac{dx}{dt} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc^2}{2Kx}\right)}}; ct = \int \sqrt{1 + \left(\frac{mc^2}{2Kx}\right)} dx. \text{ Đặt } \frac{mc^2}{2K} \equiv a^2; ct = \int \frac{\sqrt{x+a^2}}{\sqrt{x}} dx.$$

Đặt $x \equiv y^2; dx = 2ydy; \sqrt{x} = y.$

$$ct = \int \frac{\sqrt{y^2+a^2}}{y} 2ydy = 2 \int \sqrt{y^2+a^2} dy = \left[y\sqrt{y^2+a^2} + a^2 \ln(y + \sqrt{y^2+a^2}) \right] + \text{const.}$$

Tại $t = 0, x = 0 \Rightarrow y = 0$

do đó

$$0 = a^2 \ln a + \text{const} \Rightarrow \text{const} = -a^2 \ln a.$$

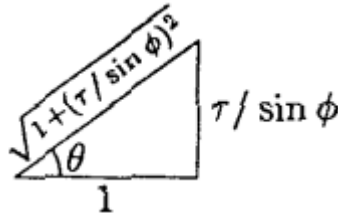
$$\therefore ct = y\sqrt{y^2+a^2} + a^2 \ln\left(y/a + \sqrt{(y/a)^2+1}\right) = a^2 \left[\left(\frac{y}{a}\right) \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2+1} + \ln\left(\left(\frac{y}{a}\right) + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2+1}\right) \right].$$

Đặt $z \equiv y/a = \sqrt{x} \sqrt{\frac{2K}{mc^2}} = \sqrt{\frac{2Kx}{mc^2}}.$ Thì: $\frac{2Kt}{mc} = z\sqrt{1+z^2} + \ln(z + \sqrt{1+z^2}).$

Bài tập 12.61:

(a) $x(t) = \frac{c}{\alpha} \left(\sqrt{1+(\alpha t)^2} - 1 \right),$ ở đây: $\alpha = \frac{F}{mc}.$ Lực do +q tác động lên -q sẽ là như qua giống

như lực do -q tác động lên +q (trên trục x), vì véc tơ lực toàn phần theo hướng x (lực từ toàn phần bằng 0). Chúng ta cần thành phần x của E.



Trên trục x thì +q do -q gây ra là (phương trình 10.65):

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u})^3} \left[\mathbf{u}(c^2 - v^2) + \mathbf{u}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}) \right].$$

$$\mathbf{u} = c\mathbf{R} - \mathbf{v} \Rightarrow u_x = c\frac{1}{R} - v = \frac{1}{R}(cl - vR); \mathbf{R} \cdot \mathbf{u} = cR - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} = (cR - lv); \mathbf{R} \cdot \mathbf{a} = la.$$

Do đó

$$E_x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\Re}{(c\Re - \nu l)^3} \left[\frac{1}{\Re} (c\Re - \nu l)(c^2 - \nu^2) + \underbrace{\frac{1}{\Re} (c\Re - \nu l)la - a(c\Re - \nu l)}_{\frac{1}{\Re} ca(l^2 - \Re^2) = -cad^2/\Re} \right]$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(c\Re - \nu l)^3} \left[(c\Re - \nu l)(c^2 - \nu^2) - cad^2 \right]$$

Lực tác động lên $+q$ là: qE_x và có mặt lực tác động trên $-q$, do đó lực toàn phần tác

dòng lên khối lượng m là: $\mathbf{F} = -\frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(c\Re - \nu l)^3} \left[(c\Re - \nu l)(c^2 - \nu^2) - cad \right] \hat{\mathbf{x}}$. Vậy phải xác định

$\Re, l, \nu$ và a và thay nhúng số húng này vào.

$$\nu(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{c}{\alpha} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+(\alpha t)^2}} 2\alpha^2 t = \frac{c\alpha t}{\sqrt{1-(\alpha t)^2}}; \nu = \nu(t_r) = \frac{c\alpha t_r}{T},$$

ở đây: $T \equiv \sqrt{1+(\alpha t)^2}$. $a(t_r) = \frac{d\nu}{dt_r} = \frac{c\alpha}{T} + c\alpha t_r \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2\alpha^2 t_r}{T^3} = \frac{c\alpha}{T^3} \left[1+(\alpha t_r)^2 - (\alpha t_r)^2 \right] = \frac{c\alpha}{T^3}$.

Bây giờ tính t_r : $c^2(t-t_r)^2 = \Re^2 = l^2 + d^2$; $l = x(t) - x(t_r) = \frac{c}{\alpha} \left[\sqrt{1+(\alpha t)^2} - \sqrt{1+(\alpha t_r)^2} \right]$,

do đó (*) $\sqrt{1+(\alpha t)^2} \sqrt{1+(\alpha t_r)^2} = 1 + \alpha^2 t t_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2$.

Bình phương hai vế:

$$1+(\alpha t)^2 + (\alpha t_r)^2 + \alpha^4 t^2 t_r^2 = 1 + \alpha^4 t^2 t_r^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^4 + 2\alpha^2 t t_r + \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 + \alpha^2 t t_r \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2$$

$$t^2 + t_r^2 - 2t t_r - t t_r \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 - \left(\frac{d}{c} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{d}{c} \right)^4 = 0.$$

Lúc này chúng ta có thể tìm t_r theo t , nhưng vì ν và a đã được biểu diễn theo t_r rồi, tìm t (theo t_r sẽ dễ dàng hơn), và biểu diễn mối liên hệ theo t_r :

$$\begin{aligned}
 t^2 - t t_r \left[2 + \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 \right] + \left[t_r^2 - \left(\frac{d}{c} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{4} \left(\frac{d}{c} \right)^4 \right] &= 0 \\
 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \left\{ t_r \left[2 + \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 \right] \pm \sqrt{t_r^2 \left[4 + 4 \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 + \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^4 \right] - 4 t_r^2 + 4 \left(\frac{d}{c} \right)^2 + \alpha^2 \left(\frac{d}{c} \right)^4} \right\} \\
 &= t_r \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 \right] \pm \sqrt{\left[1 + (\alpha t_r)^2 \right] \left(\frac{d}{c} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 \right]}
 \end{aligned}$$

Dù nào? Để ý với α nhỏ, chúng ta mu $\hat{n}$ $t \approx t_r + d/c$ và chúng ta c $\hat{n}$ d $\hat{u}$ +:

$$t = t_r \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 \right] + \frac{d}{c} TD, \quad D \equiv \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha d}{2c} \right)^2}.$$

Do đó: $\mathfrak{R} = c(t - t_r) \Rightarrow \mathfrak{R} = \frac{c t_r}{2} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 + dTD.$

Tr $\hat{u}$ l $\hat{u}$ i ph $\hat{u}$ $\hat{n}$ g tr $\hat{u}$ nh (*) và tìm $\sqrt{1 + (\alpha t)^2}$:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{1 + (\alpha t)^2} &= \frac{1}{T} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 + \alpha^2 t_r \left[t_r \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 \right) \right] + \frac{d}{c} TD \right\} \\
 &= \frac{1}{T} \left\{ \underbrace{\left[1 + (\alpha t)^2 \right]}_{T^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 \right] + \frac{\alpha^2 t_r d}{c} TD \right\} = \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 \right] T + \frac{\alpha^2 t_r d}{c} D.
 \end{aligned}$$

$$l = \frac{c}{\alpha} \left[\sqrt{1 + (\alpha t)^2} - \sqrt{1 + (\alpha t_r)^2} \right] = \frac{c}{\alpha} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 \right] T + \frac{\alpha^2 t_r d}{c} D - T \right\} = \alpha \left(\frac{d}{2c} T + t_r D \right).$$

Đ $\hat{u}$ t t $\hat{u}$ t c $\hat{n}$ nh $\hat{u}$ $\hat{n}$ g cái này vào, t $\hat{u}$ s $\hat{u}$ trong d $\hat{u}$ ngo $\hat{u}$ c vu $\hat{u}$ ng $\hat{n}$ F tr $\hat{u}$ thành:

$$\begin{aligned}
 [] &= \left\{ c \alpha d \left(\frac{d}{2c} T + t_r D \right) - \frac{c \alpha t_r}{T} \left[\frac{c t_r}{2} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 + dTD \right] \right\} \left(c^2 - \frac{c^2 \alpha^2 t_r^2}{T^2} \right) - c \frac{c \alpha}{T^3} d^2 \\
 &= c \alpha d \left[\frac{d}{2c} T + t_r D - \frac{d (at_r)^2}{2c} - t_r D \right] \frac{c^2}{T^2} \left[1 + (\alpha t_r)^2 - (\alpha t_r)^2 \right] - \frac{c^2 \alpha d^2}{T^3} \\
 &= \frac{c^2 \alpha d^2}{T^3} \left[\frac{1}{2} T^2 - \frac{1}{2} (\alpha t_r)^2 - 1 \right] = \frac{c^2 \alpha d^2}{T^3} \left[1 + (\alpha t_r)^2 - (\alpha t_r)^2 - 2 \right] = - \frac{c^2 \alpha d^2}{T^3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{c^2 \alpha d^2}{[(c\mathfrak{R} - lv)T]^3} \hat{X}. \text{ V\`n c\`on t\`inh m\`u s\` :}$$

$$\begin{aligned} (c\mathfrak{R} - lv)T &= \left\{ c \left[\frac{ct_r}{2} \left(\frac{\alpha d}{c} \right)^2 + dT D \right] - \alpha d \left(\frac{d}{2c} T + t_r D \right) \frac{c\alpha t_r}{T} \right\} T \\ &= \left[\frac{1}{2} \alpha^2 t_r d^2 + cdT D - \frac{1}{2} \alpha^2 t_r d^2 - \frac{cd(\alpha t_r)^2}{T} D \right] T = cdD \underbrace{\left[T^2 - (\alpha t_r)^2 \right]}_{1 + (\alpha t_r)^2 - (\alpha t_r)^2} = dcD \end{aligned}$$

$$\therefore F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{c^2 d^2 \alpha}{c^3 d^3 D^3} \hat{X} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha}{cd \left[1 + (\alpha d/2c)^2 \right]^{3/2}} \hat{X} \quad \left(\alpha = \frac{F}{mc} \right).$$

N\`ang l\`o\`ng ph\`oi đ\`n t\` “ $h\ \ ch\ a$ ” c\`a n\`ang l\`o\`ng đ\`i c\` l\`u tr\` trong tr\` \`ng đ\`n t\`.

$$(b) \ F = mc\alpha = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha}{cd \left[1 + (\alpha d/2c)^2 \right]^{3/2}} \Rightarrow \left[1 + (\alpha d/2c)^2 \right]^{3/2} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 mc^2 d} = \frac{\mu_0 q^2}{8\pi md}. \text{ (L\`c t\`c d\`ng}$$

tr\`n m\` t\` đ\`u)}

$$\therefore \alpha = \frac{2c}{d} \sqrt{\left(\frac{\mu_0 q^2}{8\pi md} \right)^{2/3} - 1}, \text{ do đ\`o } \boxed{F = \frac{2mc^2}{d} \sqrt{\left(\frac{\mu_0 q^2}{8\pi md} \right)^{2/3} - 1}}.$$

Bài tập 12.62:

(a) $A^\mu = (V/c, A_x, A_y, A_z)$ là 4-v\`c t\` (t\` \`ng t\`  $x^\mu = (ct, x, y, z)$ ), do đ\`o (s\` d\`ng ph\` \`ng

tr\`nh 12.19):  $V = \gamma(\bar{V} + v\bar{A}_z)$ . Nh\`ng $\bar{V} = 0$ và $\bar{A}_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\mathbf{m} \times \bar{\mathbf{r}})}{\bar{r}^3}$.

B\`y gi\` $(\mathbf{m} \times \mathbf{r})_x = m_y \bar{z} - m_z \bar{y} = m_y z - m_z y$. N\`n $V = \gamma v \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_y z - m_z y}{\bar{r}^3}$.

B\`y gi\` $\bar{x} = \gamma(x - vt) = \gamma R_x$, $\bar{y} = y = R_y$, $\bar{z} = z = R_z$, \` đ\`y $\mathbf{R}$ là vector (trong S) t\` v\` trí t\` c\` th\`i c\`a l\` \`ng c\` đ\`n đ\`m quan s\`t. Do đ\`o:

$$\bar{r}^2 = \gamma^2 R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = \gamma^2 (R_x^2 + R_y^2 + R_z^2) + (1 - \gamma^2) (R_y^2 + R_z^2) = \gamma^2 \left(R^2 - \frac{v^2}{c^2} R^2 \sin^2 \theta \right)$$

(\` đ\`y θ là góc gi\`a  $\mathbf{R}$  và tr\`c x , sao cho $(R_y^2 + R_z^2) = R^2 \sin^2 \theta$.)

$$\therefore V = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{v\gamma(m_y R_z - m_z R_y)}{\gamma^3 R^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}; \text{nhận } \mathbf{v} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{R}) = v(\mathbf{m} \times \mathbf{R})_z = v(m_y R_z - m_z R_y),$$

do đó
$$V = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{R}) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{R^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}},$$
 và sử dụng: $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ và

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{m}): V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2 R^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}.$$

(b) Trong giới hạn không tương đối ($v^2 \ll c^2$) $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{m})}{c^2 R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{p}}{R^2}$, với $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{m}}{c^2}$,

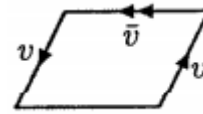
là thành phần dọc theo trục $\hat{\mathbf{R}}$.

Bài tập 12.63:

(a) $\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{2} K \hat{\mathbf{x}}$ (phương trình 5.56), $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ (phương trình 6.1) do đó $\mathbf{N} = -\frac{\mu_0}{2} mK (\mathbf{z} \times \mathbf{y})$.

$$\mathbf{N} = \frac{\mu_0}{2} mK \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_0}{2} (\lambda v l^2) (\sigma v) \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mu_0}{2} \lambda \sigma v^2 l^2 \hat{\mathbf{x}}$$

(b) Mật độ dòng tích điện mật trung bình: $\lambda_0 (\lambda = \gamma \lambda_0)$;



Mật độ dòng tích điện mật sau: $\bar{\lambda} = \gamma \lambda_0$, đây $\bar{v} = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}$

$$\Rightarrow \bar{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4v^2/c^2}{(1 + v^2/c^2)^2}}} = \frac{(1 + v^2/c^2)^2}{\sqrt{1 + 2\frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4} - 4\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(1 + v^2/c^2)^2}{\sqrt{1 - 2\frac{v^2}{c^2} + \frac{v^4}{c^4}}} = \frac{(1 + v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)} = \gamma^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Chiều dài mật trung bình và sau trong khung này là: l/γ . Vì vậy dòng tích điện toàn phần trên mật

sau là: $q_+ = \bar{\lambda} \frac{l}{\gamma} = \gamma^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\lambda}{\gamma} \frac{l}{\gamma} = \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \lambda l$.

Điện tích âm tập trung là: $q_- = \lambda_0 \frac{l}{\gamma} = \frac{\lambda}{\gamma} \frac{l}{\gamma} = \frac{1}{\gamma^2} \lambda l$.

Vì vậy moment lưỡng cực (ghi chú: điện tích trên các mặt bằng nhau):

$$\mathbf{p} = (q_+) \frac{l}{2} \hat{\mathbf{y}} - (q_-) \frac{l}{2} \hat{\mathbf{y}} = \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \lambda l \frac{l}{2} - \frac{1}{\gamma^2} \lambda l \frac{l}{2} \right] \hat{\mathbf{y}} = \frac{\lambda l^2}{2} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} - 1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \hat{\mathbf{y}} = \frac{\lambda l^2 v^2}{c^2} \hat{\mathbf{y}}. \quad \mathbf{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}},$$

ở đây $\sigma = \gamma \sigma_0$, $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = \frac{\lambda l^2 v^2}{c^2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \gamma} (\hat{\mathbf{y}} \times \hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu_0}{2} \lambda \sigma l^2 v^2 \hat{\mathbf{x}}$.

Vì vậy ngoi trục các hệ số tương ứng đối của γ . Momen là nhau của hai hệ - hệ trong S , đó là momen bất tác động bởi mặt tập trung vào mặt lưỡng cực tập, trong khi đó trong $\bar{S}$, nó là momen bất tác động bởi mặt tập trung điện trên mặt lưỡng cực điện.

Bài tập 12.64:

Chọn trục sao cho $\mathbf{E}$ hướng theo z và $\mathbf{B}$ nằm trong mặt phẳng yz : $\mathbf{E} = (0, 0, E)$; $\mathbf{B} = (0, B \cos \phi, B \sin \phi)$. Điện trường tập quy chiếu di chuyển với vận tốc v theo

hệ x : $\bar{\mathbf{E}} = (0, -\gamma v B \sin \phi, \gamma(E + v B \cos \phi))$; $\bar{\mathbf{B}} = \left(0, \gamma \left(B \cos \phi + \frac{v}{c^2} E \right), \gamma B \sin \phi \right)$.

(Tôi sẽ dùng phương trình 12.108). Điện trường có: $\frac{-\gamma v B \sin \phi}{\gamma \left(B \cos \phi + \frac{v}{c^2} E \right)} = \frac{\gamma(E + v B \cos \phi)}{\gamma B \sin \phi}$, hoặc:

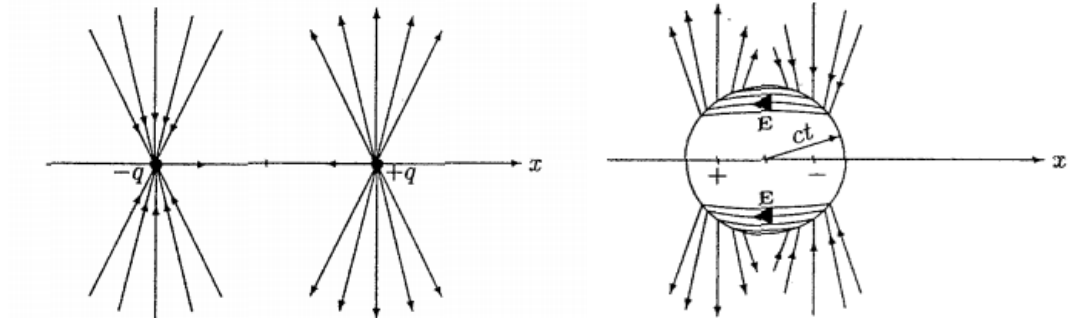
$$-v B^2 \sin^2 \phi = \left(B \cos \phi + \frac{v}{c^2} E \right) (E + v B \cos \phi) = E B \cos \phi + v B^2 \cos^2 \phi + \frac{v}{c^2} E^2 + \frac{v^2}{c^2} E B \cos \phi,$$

$$0 = v B^2 + \frac{v}{c^2} E^2 + E B \cos \phi \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right); \quad \frac{v}{1 + v^2/c^2} = -\frac{E B \cos \phi}{B^2 + E^2/c^2}. \quad \text{qed}$$

Bây giờ: $\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 0 & 0 & E \\ 0 & B \cos \phi & B \sin \phi \end{vmatrix} = -E B \cos \phi \hat{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{v}}{1 + v^2/c^2} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2 + E^2/c^2}. \quad \text{qed}$

Không, không có hệ quy chiếu trong đó $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, đối với $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$ bất biến, và bởi vì nó khác không trong S , nó không thể bằng 0 trong $\bar{S}$.

Bài tập 12.65:



Trên trục đó: Điện trường sẽ có trục đồng trục tại vị trí hình ảnh của hạt.

Ngay sau: Các đường sức điện trường đi ra ngoài hình cầu bán kính ct phát ra từ vị trí mà hạt đã đến, tiếp tục gọi "kéo hoạch bay" ban đầu của nó. Bên trong hình cầu $E = 0$. Trên bề mặt, các đường sức điện nối nhau (vì chúng không thể kết thúc trong không gian trống rỗng), như được thể hiện trong hình.

Điều này tạo ra một đám đông các đường sức điện trường hình tiếp tuyến, mà riêng với nó hình cầu. Đây là cách hình thức để hiểu về sự tạo ra các xấp xỉ.

Bài tập 12.66:

Phân tích 12.68 giúp suy ra: hạt (tức thoi) đang yên trong S . Đây hạt đang yên trong $\bar{S}$. Do đó: $F_{\perp} = \frac{1}{\gamma} F_{\perp}$, $F_{\parallel} = \bar{F}_{\parallel}$. Suy ra: $\bar{F} = q\bar{E}$, thì

$$F_x = \bar{F}_x = q\bar{E}_x, F_y = \frac{1}{\gamma} \bar{F}_y = \frac{1}{\gamma} q\bar{E}_y, F_z = \frac{1}{\gamma} \bar{F}_z = \frac{1}{\gamma} q\bar{E}_z.$$

Dẫn ra phân tích 12.108:

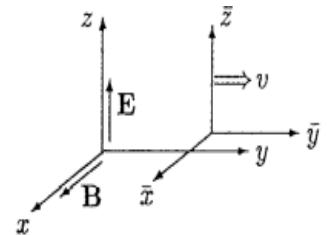
$$F_x = qE_x, F_y = \frac{1}{\gamma} q\gamma(E_y - vB_z) = q(E_y - vB_z), F_z = \frac{1}{\gamma} q\gamma(E_z + vB_y) = q(E_z + vB_y).$$

Nhưng $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -vB_z \hat{x} + vB_y \hat{z}$, do đó $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. *qed*

Bài tập 12.67:

Viết lại phân tích 12.108 với $x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$:

$$\begin{array}{lll} \bar{E}_y = E_y & \bar{E}_z = \gamma(E_z - vB_x) & \bar{E}_x = \gamma(E_x + vB_z) \\ \bar{B}_y = B_y & \bar{B}_z = \gamma\left(B_z + \frac{v}{c^2} E_x\right) & \bar{B}_x = \gamma\left(B_x - \frac{v}{c^2} E_z\right) \end{array}$$

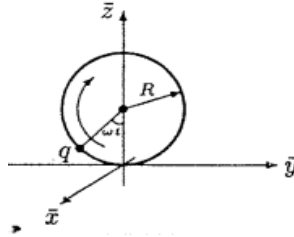


Điều này cho ta các trục trong hệ $\bar{S}$, di chuyển theo hướng y với vận tốc v .

Bây giờ: $\mathbf{E} = (0, 0, E_0)$; $\mathbf{B} = (B_0, 0, 0)$, do đó: $\bar{E}_y = 0$, $\bar{E}_z = \gamma(E_0 - vB_0)$, $\bar{E}_x = 0$.

Nếu ta muốn $\bar{E} = 0$, ta phải lựa chọn v để $E_0 - vB_0 = 0$; tức là $v = E_0 / B_0$.

(Điều kiện $E_0 / B_0 < c$ để đảm bảo rằng vận tốc phải nhỏ hơn vận tốc ánh sáng)



Với điều kiện này: $\bar{B}_y = 0$, $\bar{B}_z = 0$, $\bar{B}_x = \gamma\left(B_0 - \frac{v}{c^2}E_0\right) = \gamma B_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma B_0 \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma} B_0$; $\bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{\gamma} B_0 \hat{x}$.

Quỹ đạo trong $\bar{S}$: Bởi vì hạt ban đầu đứng yên tại gốc trong S , nó bắt đầu với vận tốc $-v\hat{y}$ trong $\bar{S}$. Theo phương trình 12.72, nó sẽ di chuyển trong một vòng tròn bán kính R

$$\text{bằng: } p = qBR, \text{ hoặc } \gamma mv = q\left(\frac{1}{\gamma} B_0\right)R \Rightarrow R = \frac{m\gamma^2 v}{qB_0}$$

Quỹ đạo thực là: $\bar{x} = 0$; $\bar{y} = -R \sin \omega \bar{t}$; $\bar{z} = R(1 - \cos \omega \bar{t})$; ở đây $\omega = \frac{v}{R}$

Quỹ đạo trong S : biến đổi Lorentz phương trình 12.18 và 12.19, để tìm trục trong hệ chuyển động theo hướng y , có:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x & x &= \bar{x} \\ \bar{y} &= \gamma(y - vt) & y &= \gamma(\bar{y} - v\bar{t}) \\ \bar{z} &= z & z &= \bar{z} \\ \bar{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right) & \bar{t} &= \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}y\right) \end{aligned}$$

Do đó quỹ đạo trong S là:

$$x = 0; \quad y = \gamma(-R \sin \omega \bar{t} + vt) = \gamma\left\{-R \sin\left[\omega \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right)\right] + v\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}y\right)\right\},$$

hoặc

$$\left. \begin{aligned} \underbrace{y \left(1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \right)}_{\gamma^2 y \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) = \gamma^2 y} &= \gamma^2 vt - \gamma R \sin \left[\omega \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} y \right) \right] \left\{ (y - vt) \gamma = -R \sin \left[\omega \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} y \right) \right] \right\}; \\ z &= R \left(1 - \cos^2 \omega t \right) = R \left[1 - \cos \omega \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} y \right) \right]. \end{aligned} \right\}$$

Do đó: $x = 0; y = vt - \frac{R}{\gamma} \sin \left[\omega \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} y \right) \right]; z = R - R \cos \left[\omega \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} y \right) \right].$

Chúng ta có thể loại bỏ các số hằng bằng cách nhân góc bằng thu thập thông tin:

$$\left. \begin{aligned} \gamma (y - vt) &= -R \sin \left[\omega \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} y \right) \right] \\ z - R &= -R \cos \left[\omega \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} y \right) \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma^2 (y - vt)^2 + (z - R)^2 = R^2.$$

Thấy γ^2 , đây sẽ là đường cong cycloid chúng ta đã học trong chương 5 (phần trình 5.9). γ^2 tỏ ra nó vì nó đã là một đường cong cycloid elip – cùng hình như trang 206, nhưng với trục nằm ngang kéo dài ra.

Bài tập 12.68:

(a) $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ suy ra: $\mathbf{E} \rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{D}$

$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$ suy ra: $\mathbf{B} \rightarrow \mu_0 \mathbf{H}$

Nhưng nó sẽ ít rõ ràng hơn nếu chúng ta chia cho μ_0 trong khi chúng ta viết nó, để cho:

$$\mathbf{E} \rightarrow \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \mathbf{D} = c^2 \mathbf{D}, \quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{H}. \quad \text{Thì: } D^{\mu\nu} = \begin{Bmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & H_z & -H_y \\ -cD_y & -H_z & 0 & H_x \\ -H_z & H_y & H_x & 0 \end{Bmatrix}$$

Theo điều đã được rút ra ở trang 539:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} D^{0\nu} = c \nabla \cdot \mathbf{D} = c \rho_f = J_f^0; \quad \frac{\partial}{\partial x^\nu} D^{1\nu} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-cD_x) + (\nabla \times \mathbf{H})_x = (J_f)_x;$$

do đó: $\frac{\partial D^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = J_f^\mu$, ở đây: $J_f^\mu = (c\rho f, \mathbf{J}_f)$. Trong khi đó, các phương trình Maxwell dưới dạng

nhật $\left(\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$ không thay đổi và từ đó $\frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$.

$$(b) H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & -D_z & cD_y \\ -H_y & cD_z & 0 & -cD_x \\ -H_z & -cD_y & cD_x & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Nếu vectơ chuyển động $\eta_\nu = (-c, 0, 0, 0)$ và tính trên ν rút vế phải thành:

$$D^{\mu 0} \eta_0 = c^2 \varepsilon F^{\mu 0} \eta_0 \Rightarrow D^{\mu 0} = c^2 \varepsilon F^{\mu 0} \Rightarrow -c\mathbf{D} = -c^2 \varepsilon \frac{\mathbf{E}}{c} \Rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \text{ (pt 4.32),}$$

$$H^{\mu 0} \eta_0 = \frac{1}{\mu} G F^{\mu 0} \eta_0 \Rightarrow H^{\mu 0} = c^2 \varepsilon G^{\mu 0} \Rightarrow -\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \text{ (pt 6.31),}$$

(c) Nói chung: $\eta_\nu = \gamma(-c, \mathbf{u})$, Vì vậy, để tính $\mu = 0$:

$$D^{0\nu} \eta_\nu = D^{01} \eta_1 + D^{02} \eta_2 + D^{03} \eta_3 = cD_x(\gamma u_x) + cD_y(\gamma u_y) + cD_z(\gamma u_z) = \gamma c(\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}),$$

$$F^{0\nu} \eta_\nu = F^{01} \eta_1 + F^{02} \eta_2 + F^{03} \eta_3 = \frac{F_x}{c}(\gamma u_x) + \frac{F_y}{c}(\gamma u_y) + \frac{F_z}{c}(\gamma u_z) = \frac{\gamma}{c}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}),$$

$$\text{do đó } D^{0\nu} \eta_\nu = c^2 \varepsilon F^{0\nu} \eta_\nu \Rightarrow \gamma c(\mathbf{D} \cdot \mathbf{u}) = c^2 \varepsilon \left(\frac{\gamma}{c} \right) (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}) \Rightarrow \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} = \varepsilon (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}). \quad (1)$$

$$H^{0\nu} \eta_\nu = H^{01} \eta_1 + H^{02} \eta_2 + H^{03} \eta_3 = H_x(\gamma u_x) + H_y(\gamma u_y) + H_z(\gamma u_z) = \gamma(\mathbf{H} \cdot \mathbf{u}),$$

$$G^{0\nu} \eta_\nu = G^{01} \eta_1 + G^{02} \eta_2 + G^{03} \eta_3 = B_x(\gamma u_x) + B_y(\gamma u_y) + B_z(\gamma u_z) = \gamma(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}),$$

$$\text{do đó: } H^{0\nu} \eta_\nu = \frac{1}{\mu} G^{0\nu} \eta_\nu \Rightarrow \gamma(\mathbf{H} \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{\mu} (\gamma)(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}) \Rightarrow (\mathbf{H} \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{\mu} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{u}). \quad [2]$$

Tính toán với $\mu = 1$:

$$\begin{aligned} D^{1\nu} \eta_\nu &= D^{10} \eta_0 + D^{12} \eta_2 + D^{13} \eta_3 = (-cD_x)(-\gamma c) + H_z(\gamma u_y) + (-H_y)(\gamma u_z) = \gamma(c^2 D_x + u_y H_z - u_z H_y) \\ &= \gamma[c^2 \mathbf{D} + (\mathbf{u} \times \mathbf{H})]_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^{1\nu} \eta_\nu &= F^{10} \eta_0 + F^{12} \eta_2 + F^{13} \eta_3 = \frac{-E_x}{c}(-\gamma c) + B_z(\gamma u_y) + (-B_y)(\gamma u_z) = \gamma(E_x + u_y B_z - u_z B_y) \\ &= \gamma[\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]_x, \end{aligned}$$

Do đó

$$D^{1\nu}\eta^\nu = c^2\varepsilon F^{1\nu}\eta^\nu \Rightarrow \gamma(c^2\mathbf{D} + [\mathbf{u} \times \mathbf{H}])_x = c^2\varepsilon(\gamma)[\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]_x \Rightarrow \mathbf{D} + \frac{1}{c^2}(\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = \varepsilon[\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]. \quad [3]$$

$$\begin{aligned} H^{1\nu}\eta_\nu &= H^{10}\eta_0 + H^{12}\eta_2 + H^{13}\eta_3 = (-H_x)(-\gamma c) + (-cD_z)(\gamma u_y) + (cD_y)(\gamma u_z) \\ &= \gamma c(H_x - u_y D_z + u_z D_y) = \gamma c[\mathbf{H} - (\mathbf{u} \times \mathbf{D})]_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{1\nu}\eta_\nu &= G^{10}\eta_0 + G^{12}\eta_2 + G^{13}\eta_3 = (-B_x)(-\gamma c) + \left(-\frac{E_z}{c}\right)(\gamma u_y) + \left(\frac{E_y}{c}\right)(\gamma u_z) \\ &= \frac{\gamma}{c}(c^2 B_x - u_y E_z + u_z E_y) = \frac{\gamma}{c}[c^2 \mathbf{B} - (\mathbf{u} \times \mathbf{E})]_x, \end{aligned}$$

Do đó $H^{1\nu}\eta_\nu = \frac{1}{\mu} G^{1\nu}\eta_\nu$

$$\Rightarrow \gamma c[\mathbf{H} - (\mathbf{u} \times \mathbf{D})]_x = \frac{1}{\mu} \frac{\gamma}{c}[c^2 \mathbf{B} - (\mathbf{u} \times \mathbf{E})]_x \Rightarrow \mathbf{H} - (\mathbf{u} \times \mathbf{D}) = \frac{1}{\mu} \frac{\gamma}{c} \left[\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{u} \times \mathbf{E}) \right]. \quad [4]$$

Sử dụng phương trình (4) như một biểu thức cho $\mathbf{H}$, thay vào phương trình ([3] và tìm $\mathbf{D}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \times \left\{ (\mathbf{u} \times \mathbf{D}) + \frac{1}{\mu} \left[\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{u} \times \mathbf{E}) \right] \right\} &= \varepsilon[\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]; \\ \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{D})\mathbf{u} - u^2 \mathbf{D}] &= \varepsilon[\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] - \frac{1}{\mu c^2}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu c^4}[\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{E})]. \end{aligned}$$

Sử dụng phương trình [1] để viết lại $\mathbf{u} \cdot \mathbf{D}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) &= -\frac{\varepsilon}{c^2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + \varepsilon[\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] - \frac{1}{\mu c^2}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu c^4}[(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} - u^2 \mathbf{E}] \\ &= \varepsilon \left\{ \left[1 - \frac{u^2}{\varepsilon \mu c^4} \right] \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \left[1 - \frac{1}{\varepsilon \mu c^2} \right] (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \left[1 - \frac{1}{\varepsilon \mu c^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Cho $\boxed{\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \nu \equiv \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}}$ Thì $\boxed{\mathbf{D} = \gamma^2 \varepsilon \left\{ \left(1 - \frac{u^2 \nu^2}{c^2} \right) \mathbf{E} + \left(1 - \frac{\nu^2}{c^2} \right) \left[(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} \right] \right\}}.$

Bây giờ sử dụng phương trình (3) như biểu thức để thay vào $\mathbf{D}$, thay vào phương trình (4) và

tìm $\mathbf{H}$: $\mathbf{H} - \mathbf{u} \times \left\{ -\frac{1}{c^2}(\mathbf{u} \times \mathbf{H}) + \varepsilon[\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] \right\} = \frac{1}{\mu} \left[\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{u} \times \mathbf{E}) \right];$

$$\mathbf{H} + \frac{1}{c^2} [(\mathbf{u} \cdot \mathbf{H})\mathbf{u} - u^2 \mathbf{H}] = \frac{1}{\mu} \left[\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{u} \times \mathbf{E}) \right] + \varepsilon(\mathbf{u} \times \mathbf{E}) + \varepsilon[\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})].$$

Sơ đồ ng ph ̣ ng tṛnh [2] đ ̣ vi ̣t l ̣i $\mathbf{u}, \mathbf{H}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) &= -\frac{1}{\mu c^2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} + \frac{1}{\mu}\left[\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{u}\times\mathbf{E})\right] + \varepsilon(\mathbf{u}\times\mathbf{E}) + \varepsilon[(\mathbf{B}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u} - u^2\mathbf{B}] \\ &= \frac{1}{\mu}\left\{\left[1-\mu\varepsilon u^2\right]\mathbf{B} + \left(\varepsilon\mu - \frac{1}{c^2}\right)[(\mathbf{u}\times\mathbf{E}) + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}]\right\}. \\ \mathbf{H} &= \frac{\gamma^2}{\mu}\left\{\left(1-\frac{u^2}{v^2}\right)\mathbf{B} + \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}\right)[(\mathbf{u}\times\mathbf{E}) + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{u})\mathbf{u}]\right\}.\end{aligned}$$

Bài tập 12.69:

Chúng ta bi ̣t r ̣ng phép bi ̣n đ ̣i thích h ̣p nh ̣ thành ph ̣n th ̣ không c ̣a 4-vector:

$K^0 = \frac{1}{c} \frac{dW}{d\tau}$. Công th ̣c Larmor nói r ̣ng: $v=0$, $\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$ (ph ̣ ng tṛnh 11.70) Chúng ta

có nghĩ đ ̣n mà thành ph ̣n c ̣a nó b ̣ng cái này khi v ̣n t ̣c b ̣ng không hay không?

T ̣t, a^2 t ̣ ng t ̣ $\alpha^\nu \alpha_\nu$, nh ̣ ng làm th ̣ nào đ ̣ chúng ta có 4-vector t ̣i đây? Còn η^μ , thành

ph ̣n th ̣ không c ̣a nó đ ̣ng b ̣ng c khi $v=0$ thì sao? Sau đó th ̣: $K^\mu = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c^3} (\alpha^\nu \alpha_\nu) \eta^\mu$.

Cái này có nh ̣ ng thu ̣c tính bi ̣n đ ̣i đ ̣ng nh ̣ ng chúng ta ph ̣i ki ̣m tra nó có rút v ̣

công th ̣c Larmor khi $v \rightarrow 0$: $\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{\gamma} c K^0 = \frac{1}{\gamma} c \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c^3} (\alpha^\nu \alpha_\nu) \eta^0$, nh ̣ ng $\eta^0 = c\gamma$ do đó

$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} (\alpha^\nu \alpha_\nu)$. Chúng ta đã bi ̣t, chính công su ̣t (ng ̣ ̣ c v ̣ i công su ̣t riêng) là m ̣t

đại l ̣ ng vô h ̣ ng. N ̣u đ ̣u này đã rõ ràng t ̣ đ ̣u, chúng ta ph ̣i tìm vô h ̣ ng Lorentz khái quát hóa công th ̣c Lorentz.

Trong bài tập 12.38 (b), chúng ta đã tính $(\alpha^\nu \alpha_\nu)$ theo v ̣n t ̣c th ̣ ng và gia t ̣c:

$$\begin{aligned}\alpha^\nu \alpha_\nu &= \gamma^4 \left[a^2 + \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})^2}{(c^2 - v^2)} \right] = \gamma^6 \left[a^2 \gamma^{-2} + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})^2 \right] \\ &= \gamma^6 \left[a^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c^2} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})^2 \right] = \gamma^6 \left\{ a^2 - \frac{1}{c^2} [v^2 a^2 - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})^2] \right\}.\end{aligned}$$

Bây gi ̣: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = va \cos\theta$, ̣ đây: θ là góc t ̣o b ̣ i $\mathbf{v}$ và $\mathbf{a}$, do đó:

$$v^2 a^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2 = v^2 a^2 (1 - \cos^2 \theta) = v^2 a^2 \sin^2 \theta = |\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2.$$

$$\alpha^\nu \alpha_\nu = \gamma^6 \left(a^2 - \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right|^2 \right).$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \gamma^6 \left(a^2 - \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right|^2 \right), \text{ đó là công thức Liensard (phương trình 11.73)}$$

Bài tập 12.70:

(a) Nó mâu thuẫn với điều kiện ràng buộc $\eta_\mu K^\mu = 0$ (phương trình 12.38(d)).

(b) Chúng ta muốn tìm 4 vector b^μ với tính chất $\left(\frac{d\alpha^\mu}{d\tau} + b^\mu \right) \eta_\mu = 0$. Còn $b^\mu = k \left(\frac{d\alpha^\nu}{d\tau} \eta_\nu \right) \eta^\mu$

thì sao? Thì $\left(\frac{d\alpha^\mu}{d\tau} + b^\mu \right) \eta^\mu = \frac{d\alpha^\mu}{d\tau} \eta^\mu + k \frac{d\alpha^\mu}{d\tau} \eta^\mu (\eta^\mu \eta_\mu)$. Nhớ rằng $\eta^\mu \eta_\mu = -c^2$, vì vậy điều

này trở thành: $\left(\frac{d\alpha^\mu}{d\tau} \eta^\mu \right) - c^2 k \left(\frac{d\alpha^\nu}{d\tau} \eta^\nu \right)$, nó bằng không, nếu ta chọn $k = 1/c^2$. Điều này cho

thấy: $K_{rad}^\mu = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \left(\frac{d\alpha^\mu}{d\tau} + \frac{1}{c^2} \frac{d\alpha^\nu}{d\tau} \eta_\nu \eta^\mu \right)$. Chú ý rằng $\eta^\mu = (c, \mathbf{v})\gamma$, vì vậy, các thành phần

không gian của b^μ triệt tiêu trong giới hạn không tương đối $v \ll c$ và công thức này sẽ trở thành công thức Abraham-Lorentz.

$$[\text{Ngoài ra, } \alpha^\nu \eta_\nu = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(\alpha^\nu \eta_\nu) = 0 \Rightarrow \frac{d\alpha^\nu}{d\tau} \eta_\nu + \alpha^\nu \frac{d\eta_\nu}{d\tau} = 0, \text{ do đó: } \frac{d\alpha^\nu}{d\tau} \eta_\nu = -\alpha^\nu \alpha_\nu, \text{ và}$$

thì đó b^μ có thể viết dưới dạng $-\frac{1}{c^2}(\alpha^\nu \alpha_\nu) \eta^\mu$.]

Bài tập 12.71:

Xác định dòng điện 4-vector như trong (12.70): $j_e^\mu = (c\rho_e, \mathbf{J}_e)$, và dòng điện theo cách tương tự

$J_m^\mu = (c\rho_m, \mathbf{j}_m)$. Các định luật cần biết là:

$$\boxed{\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J_e^\mu, \quad \partial_\nu G^{\mu\nu} = \frac{\mu_0}{c} J_m^\mu, \quad K^\mu = \left(q_e F^{\mu\nu} + \frac{q_m}{c} G^{\mu\nu} \right) \eta_\nu.}$$

Công thức đầu tiên cho $\nabla \cdot \mathbf{E} = (1/\epsilon_0)\rho_e$ và $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$, như trước (trang 539);
 Sử dụng hai cho: $\nabla \cdot \mathbf{B} = (\mu_0/c)(c\rho_m) = \mu_0 \rho_m$ và $-(1/c)(\partial \mathbf{B} / \partial t + \nabla \times \mathbf{E}) = (\mu_0/c) \mathbf{J}_m$, hoặc:
 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m - \partial \mathbf{B} / \partial t$ (tổng quát hóa trang 540). Đây là những phương trình Maxwell với
 điện tích. Sử dụng ba (theo lập luận trang 540) cho chúng ta

$$K^1 = \frac{q_e}{\sqrt{1-u^2/c^2}} [\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})]_x + \frac{q_m}{c} \left[\frac{-c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} (-B_x) + \frac{u_y}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left(-\frac{E_z}{c} \right) + \frac{u_z}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left(\frac{E_y}{c} \right) \right],$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \left\{ q_e [\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] + q_m \left[\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \times \mathbf{E}) \right] \right\},$$

hoặc $\mathbf{F} = q_e [\mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] + q_m \left[\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \times \mathbf{E}) \right]$, là định luật Lorentz suy rộng (phương trình 7.69)