

CÁC THAM SỐ PLASMA CƠ BẢN

1 Tốc độ nhiệt (thermal speed): v_T

Trong plasma, các ion và electron di chuyển với vận tốc khác nhau. Số electron trong một đơn vị thể tích gọi là mật độ electron n_e .

Ta có: $dn_e(v_x) = f_e(v_x)dv_x$ là số lượng electron có vận tốc trong khoảng $v_x \rightarrow v_x + dv_x$

Trong đó: $f_e(v_x)$ là hàm phân bố vận tốc trong không gian.

Khi electron ở trạng thái cân bằng nhiệt độ T_e thì $f_e(v_x)$ tuân theo hàm

phân bố Maxwell: $f_e(v_x) = n_e \left(\frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_e v_x^2}{2k_B T_e}\right)$ thỏa mãn: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_e(v_x) dx = n_e$

Ý nghĩa của v_T^2 là: $v_T^2 = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x = \frac{2k_B T}{m} \Rightarrow v_T = \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{1/2} = C$ gọi là tốc độ

nhiệt

2 Tần số cyclotron và bán kính Larmor:

Xét một hạt P có khối lượng m , tích điện Q , chuyển động với vận tốc \vec{w} trong trường E và B .

Lực tác động lên hạt P là: $Q(\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B})$

Gia tốc của hạt P là: $d\vec{w} = \frac{Q}{m}(\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B})$ (1)

Vận tốc \vec{w} của hạt P có thể tách thành hai thành phần:

- $v = \langle \vec{w} \rangle$: vận tốc trôi (the fluid velocity)

- c : vận tốc riêng (peculiar velocity) ($\langle c \rangle = 0$).

$\Rightarrow \vec{w} = \vec{v} + \vec{c} \Rightarrow d\vec{w} = d\vec{v} + d\vec{c}$

Trong đó: gia tốc trôi bằng gia tốc trung bình của hạt

$\Rightarrow d\vec{v} = \langle d\vec{w} \rangle = \frac{Q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow d\vec{c} = \frac{Q}{m} \vec{c} \times \vec{B}$, gọi \vec{b} là vector đơn vị của \vec{B} : $\vec{B} = B\vec{b}$

$\Rightarrow d\vec{c} = \frac{QB}{m} \vec{c} \times \vec{b} = \omega_c \vec{c} \times \vec{b}$ trong đó: $\omega_c = \frac{QB}{m}$ là tần số cyclotron

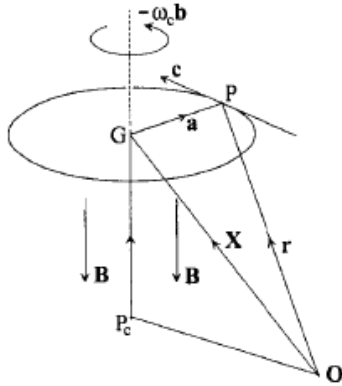


Figure 2.2: Gyration of a charged particle.

Hình vẽ bên mô tả chuyển động của hạt P chuyển động quanh điểm G với vận tốc \$c\$ trong từ trường \$B\$ hướng xuống. Khoảng cách giữa G và P là \$a\$.

$$a = |\vec{a}| (\vec{a} = \vec{r} - \vec{X}), a = \frac{|\vec{c}|}{|\omega_c|}$$

nếu ta thay \$c\$ bằng \$v_{th}\$ thì

$$C = (2k_B T / m)^{1/2}$$

thì \$a = r_L = C / |\omega_c|\$, \$r_L\$ gọi là bán kính Larmor

3 Tính toán plasma (plasma frequency):

Xét trường hợp có một nhiễu loạn nhỏ xảy ra trong plasma nên nhớt và các electron trong plasma di chuyển do nhiễu loạn.

Giả sử: ion không di chuyển do chúng có khối lượng lớn hơn nhiễu loạn so với electron.

Nhưng ý muốn tính trường điện từ trong trường này. Để tính toán chính xác nhớt và phương trình Gauss: \$\epsilon_0 \nabla E = -e(n_e - n_0)\$

Trong đó: \$n_e\$ là mật độ electron tại thời điểm đang xét.

\$n_0\$ là mật độ electron lúc ban đầu.

Lúc đó electron có gia tốc \$b\$ và phương trình chuyển động: $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$

Trong đó: \$\vec{v}\$ là vận tốc và khối lượng của electron

Do electron di chuyển nên mật độ electron có sự thay đổi theo phương trình liên tục:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{v}) = 0$$

thì: \$n_e - n_0 = n_1\$ và giả sử \$|n_1| \ll n_0\$ ta tìm được:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = -en_1 \quad (1), \quad m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E} \quad (2), \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3)$$

❖ **Cách 1:** Nếu giả định sự thay đổi chỉ diễn ra theo một chiều \$x\$, có dạng hình sin với tần số góc \$\omega\$. Nếu vậy bạn ta thay \$\frac{\partial}{\partial t}\$ bởi \$-i\omega\$, \$\frac{\partial}{\partial x}\$ bởi \$ik\$ ta có:

$$ik\epsilon_0 E = -en_1 \quad (1'), \quad -i\omega m_e v = -eE \quad (2'), \quad -i\omega n_1 = -ikn_0 v \quad (3')$$

Giả sử (1')(2')(3'): $\Rightarrow \omega^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} \Rightarrow \omega = \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} = 56.4 (n_e)^{1/2} \text{ rad/s}$

\$\omega\$: tần số electron plasma (electron plasma frequency)

❖ **Cách 2:** lấy đạo hàm phương trình (3): $\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + n_0 \nabla \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = 0$ (4)

Thay (2) vào (4) ta có: $\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} - \frac{n_0 e}{m_e} \nabla \vec{E} = 0$ (5)

Thay (1) vào (5) ta có: $\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} n_1 = 0$ t: $\omega = \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2}$ gọi là **tần số plasma**

4 **Va chạm coulomb (Coulomb collision):**

Giả sử một hạt có dạng hình cầu, bán kính a di chuyển với vận tốc v vào trong vùng có các hạt có dạng hình cầu, bán kính b, vùng này có mật độ n (hình 1). Khi khoảng cách giữa hai hạt nhỏ hơn (a+b) thì xảy ra va chạm. Tiết diện σ của va chạm này là $\sigma = \pi(a+b)^2$.

Khi hạt có bán kính a di chuyển qua khoảng cách $l = v\delta t$ trong thời gian δt thì xác suất va chạm với hạt hình cầu bán kính b là: $n l \sigma = n \sigma v \delta t$.

Giả sử τ_{coll} là thời gian va chạm, khi xác suất va chạm bằng 1 thì $\tau_{coll} = (n \sigma v)^{-1}$

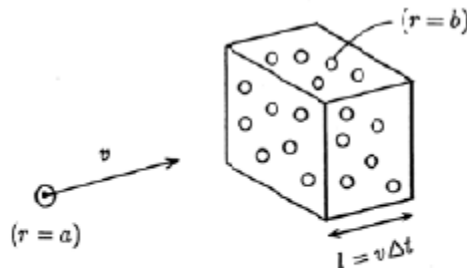


Fig. 2.6. Probability of collision between a sphere a and spheres b

a. **Xét trường hợp:** tương tác coulomb mạnh xảy ra giữa một electron tự do và một ion tích điện Ze (hình 2). Trong trường hợp này, quỹ đạo của một electron bị lệch như sau khi va chạm. Khi electron đi rất gần ion (cách ion khoảng cách b)

thì thế năng tĩnh của ion lúc này bằng năng lượng của electron thì: $\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b} = \frac{m_e v_e^2}{2}$

Tiết diện tương tác coulomb mạnh là: $\sigma = \pi b^2$

Nghĩa là thời gian tương tác τ_{coll} trong trường hợp này là:

$$\frac{1}{\tau_{coll}} = n_i \sigma v_e = n_i v_e \pi b^2 = \frac{n_i \pi (Ze^2)^2 v_e}{(4\pi\epsilon_0 m_e v_e^2 / 2)^2} = \frac{Z^2 e^4 n_i}{4\pi\epsilon_0 m_e^2 v_e^3}$$

Vì tương tác coulomb là tương tác xa nên quỹ đạo của electron bị lệch một góc nhỏ ngay cả khi electron đi rất gần ion. Khi electron đi gần thì chu vi lệch của nó và vận tốc góc lệch nhỏ thì quỹ đạo của electron bị lệch một góc nhỏ.

Khi tính n c nh ng góc l ch nh thì t ng ti t di n coulomb s t ng b i nh n t

Coulomb logarithm: $\ln \Lambda \approx \ln \left(\frac{2\lambda_D}{b} \right) \approx \int_{b/2}^{\lambda_D} \frac{1}{r} dr \approx 15 - 20$

o hàm thành ph n ng l ng song song v i h ng c a electron t i p theo

th i gian: $\int \frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{P_{\parallel}}{\tau_{ei}}, \quad \frac{1}{\tau_{ei}} = \frac{Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e^2 v_e^3}$

Trong ó τ_{ei} là th i gian gi m t c c a electron t i gây b i ion.

N u m t h t tích i n q, kh i l ng m, chuy n ng v i v n t c v va ch m v i tr ng h t có i n tích q*, kh i l ng m* và v n t c nhi t $v_T^* = (2k_B T^* / m^*)^{1/2}$

Th i gian va ch m gi a hai h t c tính b ng công th c:

$$\frac{1}{\tau_{\parallel}} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m m_r v^3} = \left(\frac{q q^* n^*}{\epsilon_0 m} \right)^2 \frac{\ln \Lambda}{4\pi (m_r / m) v^3 n^*}$$

Tr ng h p này gi s $v > v_T^* \cdot m_r$ là kh i l ng rút g n: $m_r = \frac{m m^*}{m + m^*}$

Giá tr trung bình c a ng n ng $\frac{mv^2}{2}$ là $\frac{3}{2} k_B T \Rightarrow \frac{1}{\tau_{\parallel}} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{12\sqrt{3}\pi \epsilon_0^2 (m_r / m^{1/2}) (k_B T)^{3/2}}$

Ngh ch o c a th i gian va ch m g i là t n s va ch m, kí hi u: v

❖ V y t n s va ch m c a electron v i ion là: $\frac{1}{\tau_{ei\parallel}} = \frac{Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda}{12\sqrt{3}\pi \epsilon_0^2 m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}$

❖ Khi hai ion gi ng nhau tích i n Z, kh i l ng m_i va ch m v i nhau. Thì t n

s va ch m: $\frac{1}{\tau_{ii\parallel}} = \frac{Z^4 e^4 n_i \ln \Lambda}{6\sqrt{3}\pi \epsilon_0^2 m_i^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}$

❖ Khi hai electron va ch m v i nhau: $\frac{1}{\tau_{ee\parallel}} = \frac{n_e e^4 \ln \Lambda}{6\sqrt{3}\pi \epsilon_0^2 m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}$

b. **Xét tr ng h p:** h t có kh i l ng M chuy n ng v i v n t c v_s n va ch m v i tr ng h t có kh i l ng m (hình 2). Trong h quy chỉ u kh i tâm: h t m chuy n ng v i v n t c $v_c = -Mv_s / (M + m)$, h t M chuy n ng v i v n t c $v_s - v_c = mv_s / (M + m)$

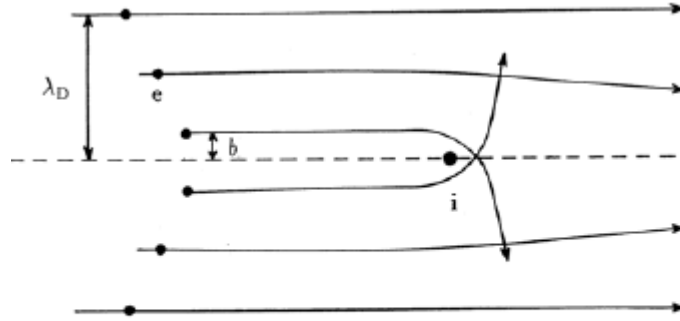


Fig. 2.7. Coulomb collision of electron with ion

Tính số va chạm $\frac{1}{\tau_{ei\perp}}$ (ion nhìn vào electron) bằng $\frac{m_e}{m_i}$ lần giá trị

$$\frac{1}{\tau_{ei\perp}} \Rightarrow \frac{1}{\tau_{ei\perp}} = \frac{m_e}{m_i} \frac{Z^2 e^4 n_e \ln \Lambda}{(2\pi)^{1/2} 3\pi \epsilon_0^2 m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}$$

Nguyên lý bảo toàn: $E = \frac{p_{\perp}^2}{2m} \Rightarrow \frac{dp_{\perp}^2}{dt} = 2m \frac{dE}{dt} = 2p_{\perp} \frac{dp_{\perp}}{dt}$

Trong đó: $\frac{dp_{\perp}^2}{dt} = \frac{p_{\perp}^2}{\tau_{\perp}}$, τ_{\perp} : thời gian khuếch tán v_⊥ t.c. $\frac{1}{\tau_{\perp}} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{2\pi \epsilon_0^2 m^* v^3}$

$\frac{dE}{dt} = \frac{-E}{\tau^{\epsilon}}$, τ^{ϵ} : thời gian hấp thụ năng lượng. $\frac{1}{\tau^{\epsilon}} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{2\pi \epsilon_0^2 m m^* v^3}$

❖ Thời gian hấp thụ electron và electron: $\frac{1}{\tau_{ei\perp}} \ll \frac{1}{\tau_{ei}^{\epsilon}}$, $\frac{1}{\tau_{ei}^{\epsilon}} = \frac{m_e}{m_i} \frac{2}{\tau_{ei\perp}}$

❖ Thời gian hấp thụ electron và electron:

$$\frac{1}{\tau_{ee\perp}} \ll \frac{1}{\tau_{ee}^{\epsilon}} = \frac{e^4 n_e \ln \Lambda}{6 \sqrt{3} \pi \epsilon_0^3 m_e^{1/2} (k_B T_e)^{3/2}}, \quad \frac{1}{\tau_{ee}^{\epsilon}} \ll \frac{1}{\tau_{ee\perp}}$$

❖ Thời gian hấp thụ ion và ion: $\frac{1}{\tau_{ii\perp}} \approx \frac{1}{\tau_{ii}^{\epsilon}} = \frac{Z^4 e^4 n_i \ln \Lambda}{6 \sqrt{3} \pi \epsilon_0^3 m_i^{1/2} (k_B T_i)^{3/2}}, \quad \frac{1}{\tau_{ii}^{\epsilon}} \ll \frac{1}{\tau_{ii\perp}}$

❖ Thời gian hấp thụ ion và electron: $\frac{1}{\tau_{ie\perp}} = \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\tau_{ei\perp}}$, $\frac{1}{\tau_{ie}^{\epsilon}} \ll \frac{m_e}{m_i} \frac{2.77}{\tau_{ei\perp}}$

5 Điện trở suất (electric resistivity):

Electron trong plasma có thể coi là chất dẫn điện và electron nhìn từ

trạng thái cân bằng, lúc đó: $\frac{m_e (v_e - v_i)}{\tau_{ei}} = -eE$

Trong đó: $v_e - v_i$ là vận tốc trôi của electron do tác động của ion

τ_{ei} là thời gian xảy ra tương tác giữa electron và ion.

M t dòng: $j = -en_e(v_e - v_i) = \frac{e^2 n_e \tau_{ei}}{m_e} E$

t: $\eta = \frac{m_e}{e^2 n_e \tau_{ei}} = 5.2 \cdot 10^{-5} Z \ln \Lambda \left(\frac{k_B T_e}{e} \right)^{3/2} \Omega m$

Lúc ó ta có: $j = \frac{E}{\eta}$, η : **i n t r s u t**.

6 Tham s plasma (plasma parameter):

S l ng electron ch a trong m t c u bán kính l à chi u dài Debye g i là tham s

plasma, c xác nh: $\Lambda \approx n_e \lambda_D^3 \approx \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{e^2} \right)^{3/2} \frac{1}{n_e^{1/2}}$

❖ N u: $\Lambda > 1$ thì g i là plasma liên k t y u (weakly coupled plasma) vì khi ó t s c a n ng l ng nhi t c a electron $k_B T_e$ và n ng l ng coulomb gi a hai

electron $E_{coulomb} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (r = n_e^{-1/3})$ r; kho ng cách trung bình gi a hai electron.

$\frac{k_B T_e}{E_{coulomb}} = 4\pi (n_e \lambda_D^3)^{2/3} > 1$. V y n ng l ng nhi t l n h n n ng l ng coulomb.

❖ N u: $\Lambda < 1$ thì g i là plasma liên k t m nh (strongly coupled plasma).