HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

BÀI GIẢNG MÔN

GHÉP KÊNH TÍN HIỆU SỐ

Giảng viên: Ngô Thu Trang

E-mail: ntttrang@ptit.edu.vn

Bộ môn: Thông tin quang - Khoa VT1

Học kỳ: I/ 2009-2010

GIỚI THIỆU MÔN HỌC

- Thời lượng môn học:
  - 4ĐVHT (48LT + 2KT + 10TH)
- Mã học phần: 411GKS360
- Mục tiêu:
  - Nắm được kiến thức cơ bản về tín hiệu; cách thức tín hiệu số được ghép kênh và truyền đi trong mạng; và các giải pháp bảo vệ của mạng để duy trì kết nối
- Nội dung:
  - Chương 1: Một số khái niệm cơ bản trong truyền dẫn tín hiệu
  - Chương 2: Ghép kênh PCM, PDH và SDH
  - Chương 3: Các giải pháp duy trì mạng
  - Chương 4: Các phương thức truyền tải số liệu

GIỚI THIỆU MÔN HỌC

❖ Tài liệu tham khảo:

- Cao Phán, Cao Hồng Sơn, Ghép kênh PDH và SDH, Bài giảng HVCNBCVT
- Bùi Trung Hiếu, Hệ thống truyền dẫn đồng bộ số SDH, NXB Bưu điện, 2001
- P. Tomsu, C. Schmutzer, Next Generation Optical Networks, Prentice Hall, 2002
- Stefano Begni, Synchronization of Digital Telecommunications Network, John Wiley&Sons, 2002
- EURESCOM Project P918, Integration of IP over Optical Networks: Networking and Management, Deliverable 1, 2, 3, 2000
- ITU-T Recommendation G.7041/Y.1303, Generic Framing Procedure, 2002
- ITU-T Recommendation G.707/Y.1322, Network Node Interface for SDH, 2002

GIỚI THIỆU MÔN HỌC

❖ Tài liệu tham khảo:

- ITU-T Recommendation G.7042/Y.1305, Link Capacity Adjustment Scheme (LCAS) for Virtual Concatenated Signals, 2001
- ITU-T Recommendation X.85/Y.1321, IP over SDH using LAPS, 2000
- ITU-T Recommendation X.86, Ethernet over LAPS, 2001

❖ Đánh giá:

- Chuyên cần: 10%
- Kiểm tra: 10%
- Thực hành: 20%
- Thi kết thúc: 60%

CHƯƠNG 1

MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN TRONG TRUYỀN DẪN TÍN HIỆU SỐ

NHẬP MÔN GHÉP KÊNH TÍN HIỆU SỐ

❖ Khái niệm ghép kênh (Multiplexing)

- Thuật ngữ "ghép kênh": chỉ quá trình kết hợp hay tổ hợp nhiều tín hiệu lối vào (có tốc độ bit thấp) tạo nên một tín hiệu lối ra (có tốc độ bit cao hơn)
- Điều kiện đơn kênh: Tại một thời điểm, môi trường truyền dẫn chỉ cho phép duy nhất một kênh truyền/tín hiệu truyền qua
- Trong trường hợp nhiều kênh truyền cùng chia sẻ một môi trường truyền dẫn: khi đó tài nguyên của môi trường truyền sẽ phải chia nhỏ, môi kênh truyền sẽ được chia một phần tài nguyên đó
- Tài nguyên của môi trường truyền dẫn: thời gian, tần số, mã, không gian

❖ Mục tiêu của ghép kênh:

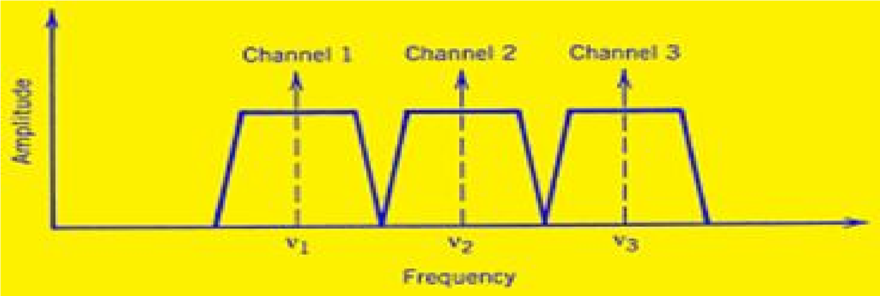
- Tăng hiệu suất sử dụng môi trường truyền dẫn → tăng dung lượng truyền dẫn của hệ thống

NHẬP MÔN GHÉP KÊNH TÍN HIỆU SỐ

- Các kỹ thuật ghép kênh:
  - TDM – Time Division Multiplexing
    - Synchronous TDM
    - Statistical TDM
  - FDM – Frequency Division Multiplexing
    - OFDM: Orthogonal FDM
    - WDM – Wavelength Division Multiplexing: FDM in optical domain
  - CDM – Code Division Multiplexing

GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO TẦN SỐ (1)

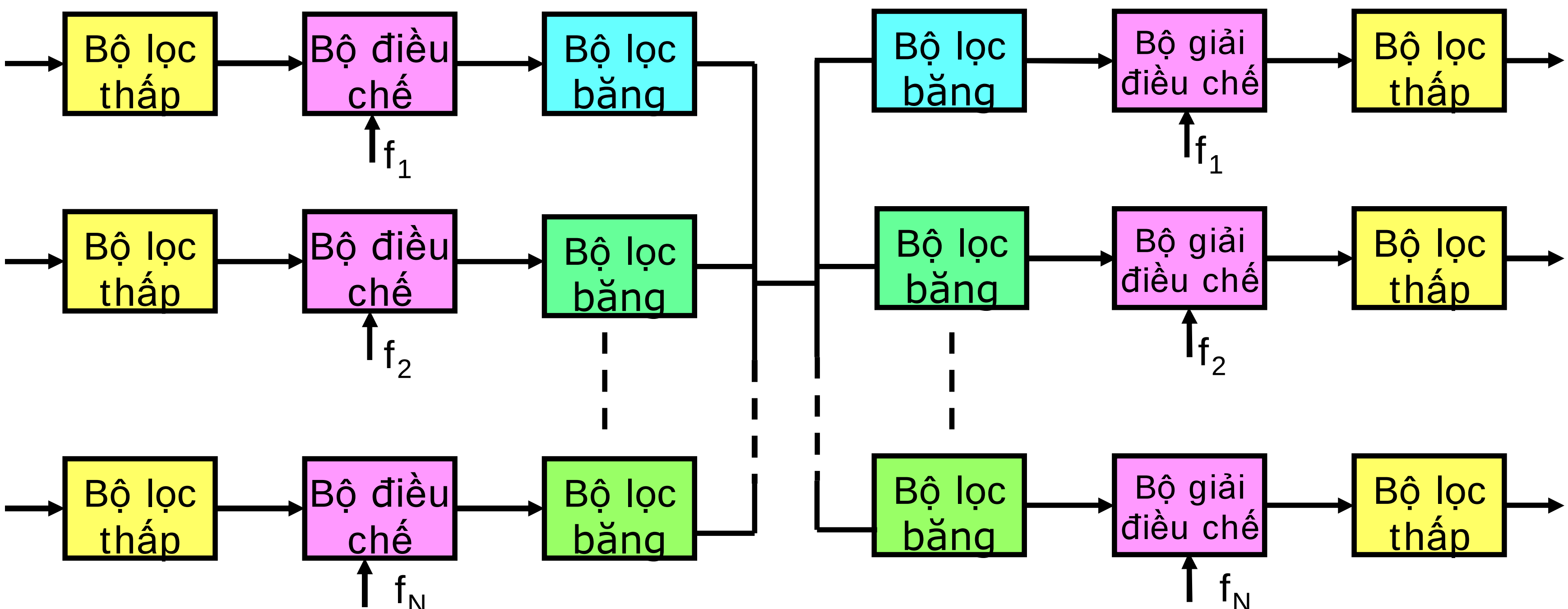
- Khái niệm:
  - Băng thông hệ thống được chia thành nhiều băng thông nhỏ hơn, không chồng lấn lên nhau; mỗi băng tần nhỏ này được gán cho mỗi "người dùng" hay một tín hiệu



- Thiết bị
  - Bộ ghép kênh ở phía phát: ghép các tín hiệu với tần số khác nhau (nằm trong dải băng tần hệ thống) thành tín hiệu tổng để truyền đi
  - Bộ tách kênh ở phía thu: tách tín hiệu tổng thành các tín hiệu có tần số khác nhau phù hợp với phía phát

GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO TẦN SỐ (2)

- FDM thích hợp cho tín hiệu tương tự → chịu nhiễu lớn
- Các hệ thống ứng dụng FDM: phát thanh truyền hình, truyền hình cáp, hệ thống điện thoại di động,…



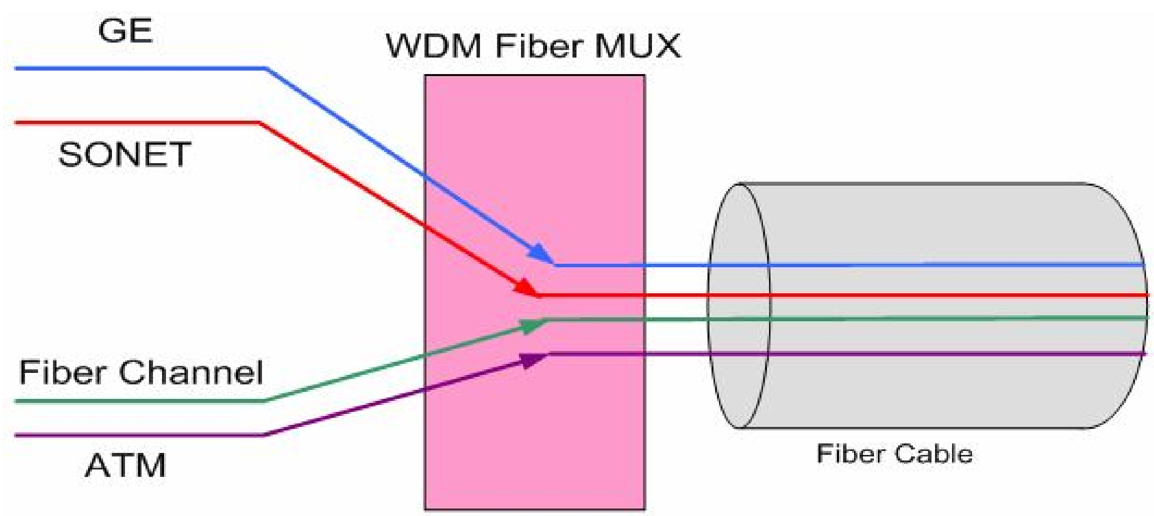
GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO BƯỚC SÓNG (1)

❖ Khái niệm:

- FDM trong miền quang
- Ghép các bước sóng khác nhau truyền đi trên một sợi quang
- Tần số sóng mang rất lớn so với tần số trong FDM thông thường

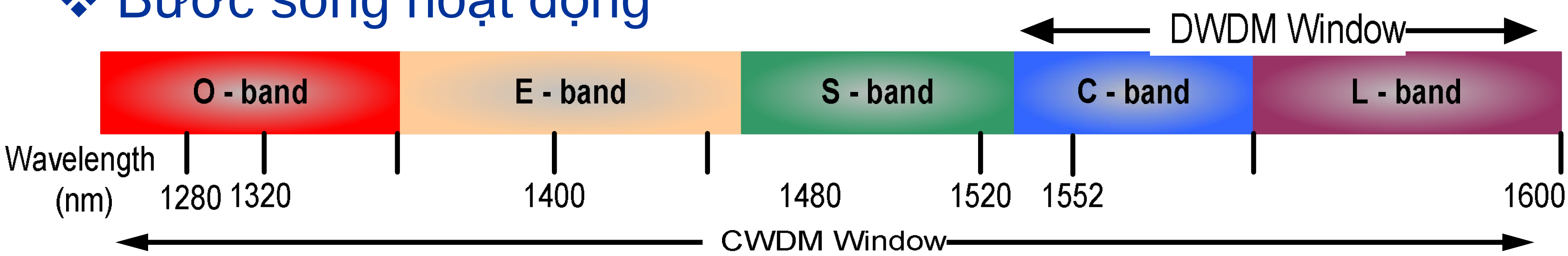
❖ Phân loại:

- CWDM
- DWDM

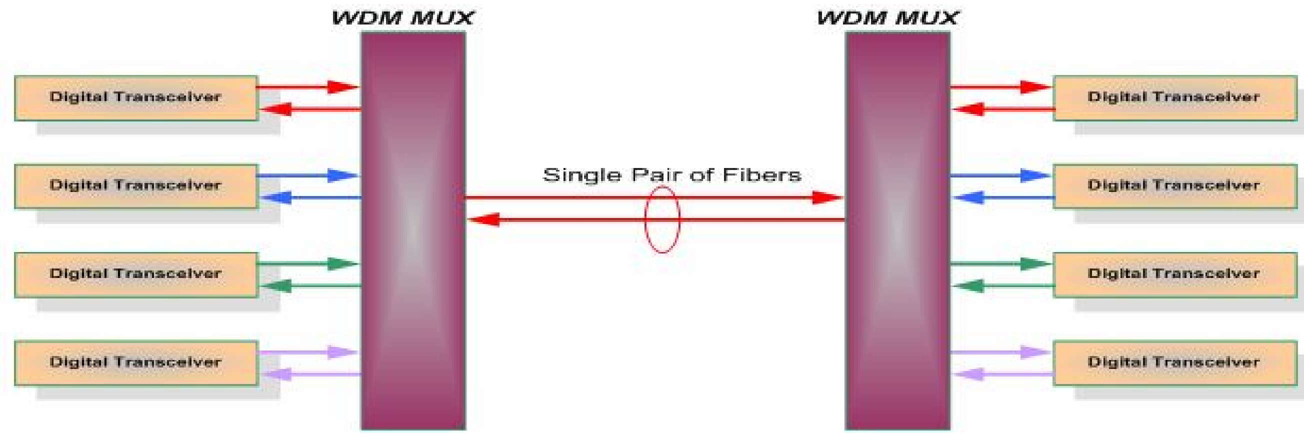


GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO BƯỚC SÓNG (2)

❖ Bước sóng hoạt động

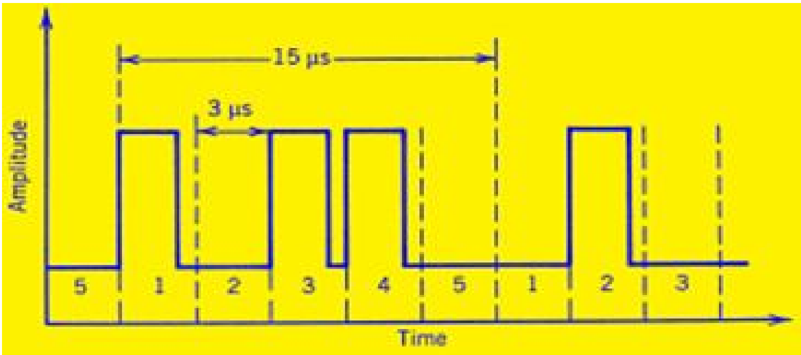


❖ Sơ đồ khối hệ thống WDM



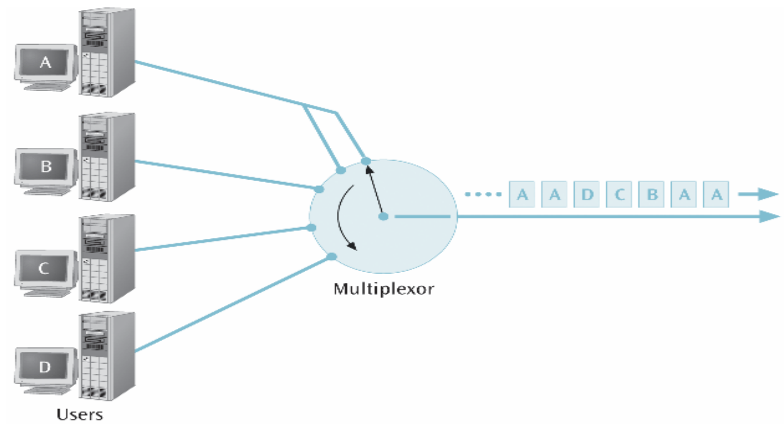
GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO THỜI GIAN (1)

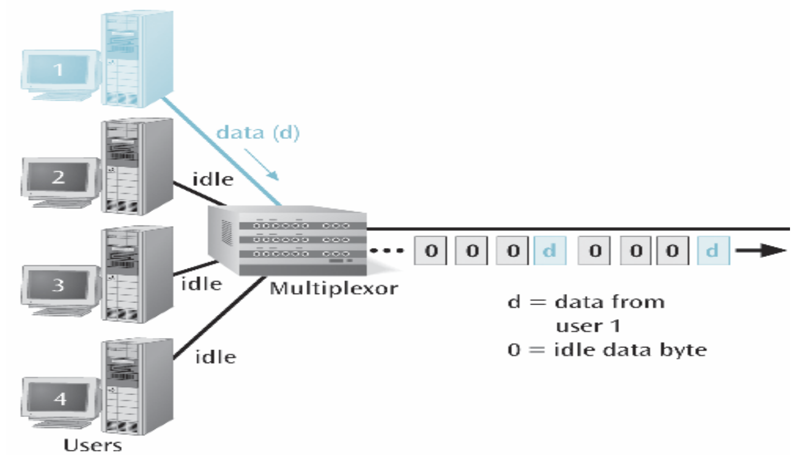
- Khái niệm:
  - Thời gian truyền dẫn được chia thành các khe thời gian đều nhau, mỗi "người dùng" hay tín hiệu được gán một khe thời gian để truyền đi
  - TDM tín hiệu số và TDM tín hiệu tương tự
- Đặc điểm
  - Tối ưu cho tín hiệu số
  - TDM cho phép mỗi kênh truyền được sử dụng toàn bộ băng thông hệ thống
- Phân loại
  - TDM đồng bộ
  - TDM thống kê



GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO THỜI GIAN (2)

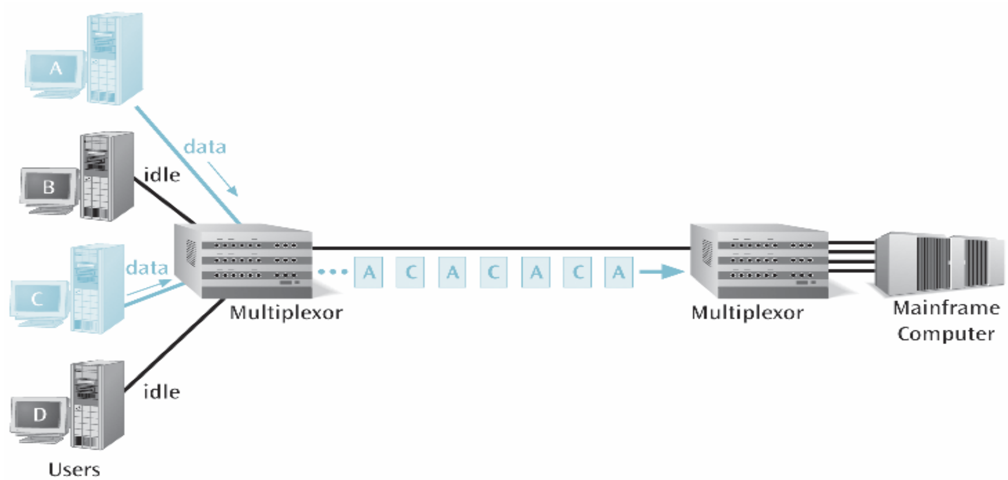
- TDM đồng bộ
  - Kỹ thuật TDM ra đời đầu tiên
  - Đặc điểm
    - Kiểu ghép: “round robin”
    - Đồng bộ về mặt thời gian: không cần các bit phụ
    - Các kênh TH đầu vào có tốc độ như nhau.
    - Các kênh TH không cùng tốc độ: sử dụng bộ đệm hoặc bộ ghép đọc nhiều lần liên tiếp kênh TH tốc độ cao
    - Tại thời điểm: kênh TH không có dữ liệu: dành khe thời gian
  - Ứng dụng: Tín hiệu thoại T1, ISDN,…





GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO THỜI GIAN (4)

- TDM thống kê
  - Đặc điểm
    - Truyền dẫn chỉ những kênh có dữ liệu, tại thời điểm kênh nào không có dữ liệu thì khe thời gian đó sẽ được dùng cho kênh khác → cần thêm các bit phụ
    - Tốc độ các kênh TH đến có thể khác nhau
  - Bộ ghép kênh
    - Tạo ra cấu trúc khung phù hợp để có thể tách tín hiệu ở phía thu



GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO THỜI GIAN (5)

❖ TDM thống kê

- Để phân biệt dữ liệu từ các kênh khác nhau, cần thêm các byte địa chỉ

Address of C (10)	Data of C	Address of A (00)	Data of A	Address of C (10)	Data of C	Address of A (00)	Data of A

- Nếu dữ liệu đến từ các kênh có độ lớn khác nhau, cần thêm các byte xác định độ lớn dữ liệu

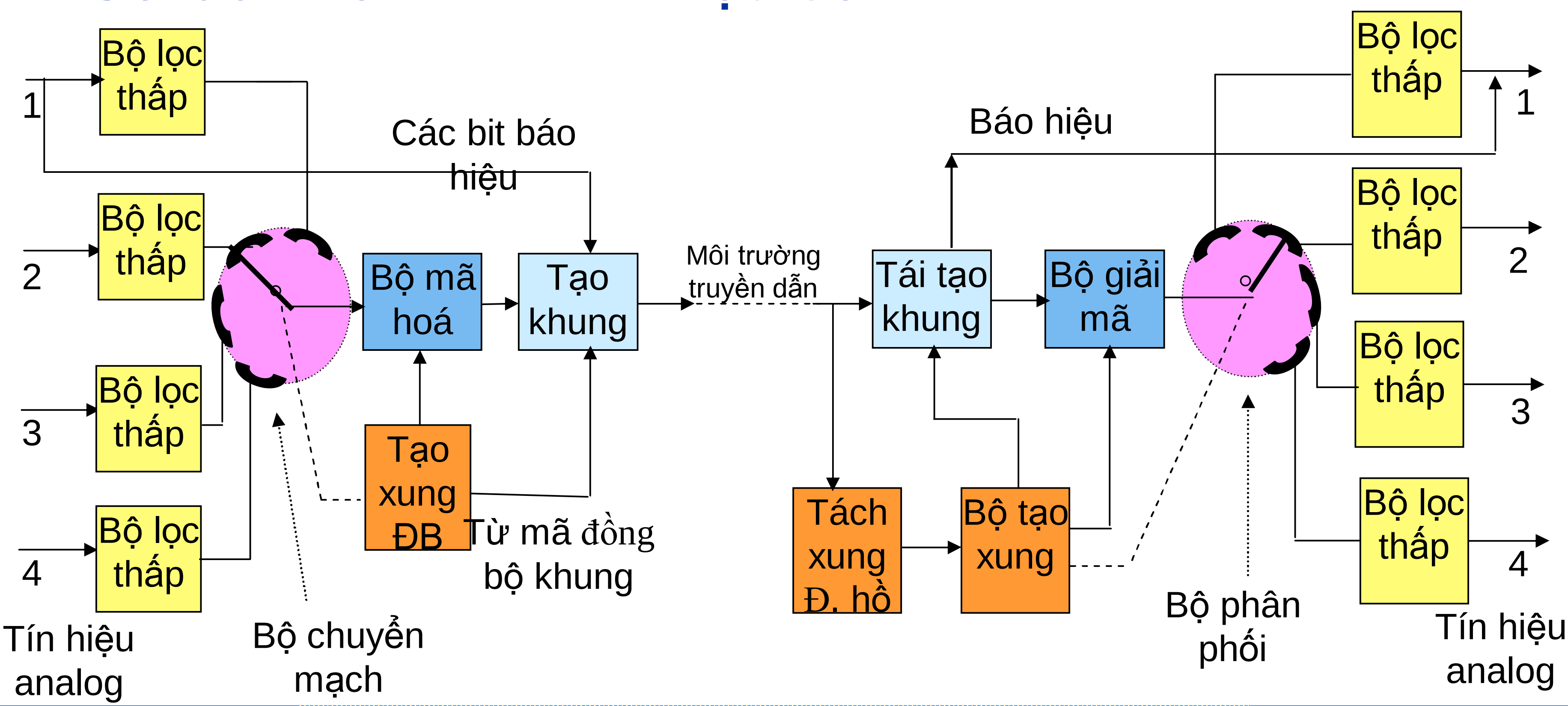
Address of A (00)	Length of A	Data of A	Address of C (10)	Length of C	Data of C	Address of A (00)	Length of A	Data of A

- Cấu trúc khung hoàn chỉnh của tín hiệu TDM thống kê

FLAG	CONTROL	ADDRESS	LENGTH	DATA	...	ADDRESS	LENGTH	DATA	FCS	FLAG

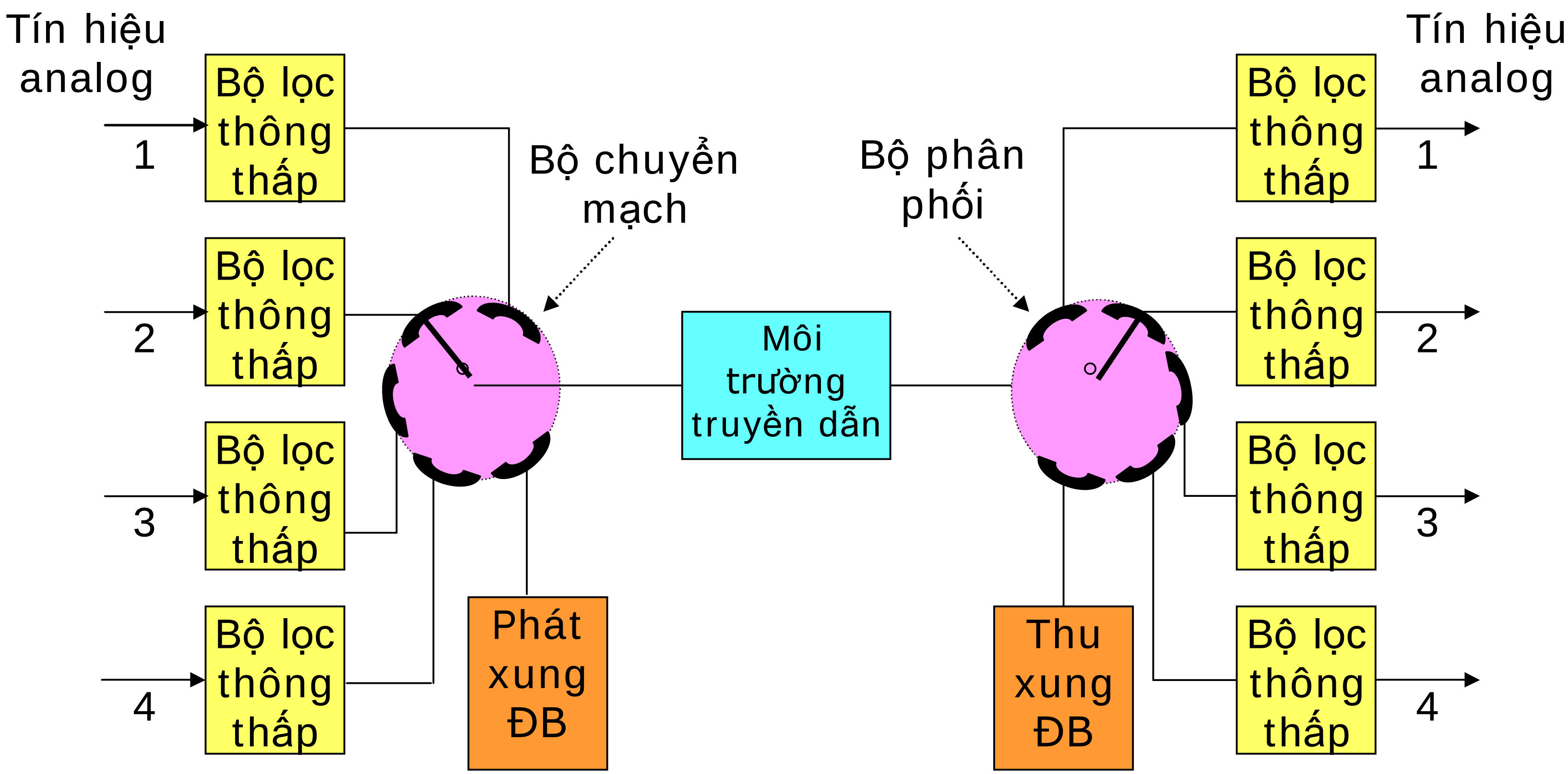
GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO THỜI GIAN (6)

❖ Sơ đồ khối TDM tín hiệu số



GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO THỜI GIAN (7)

❖ Sơ đồ khối hệ thống TDM tín hiệu tương tự

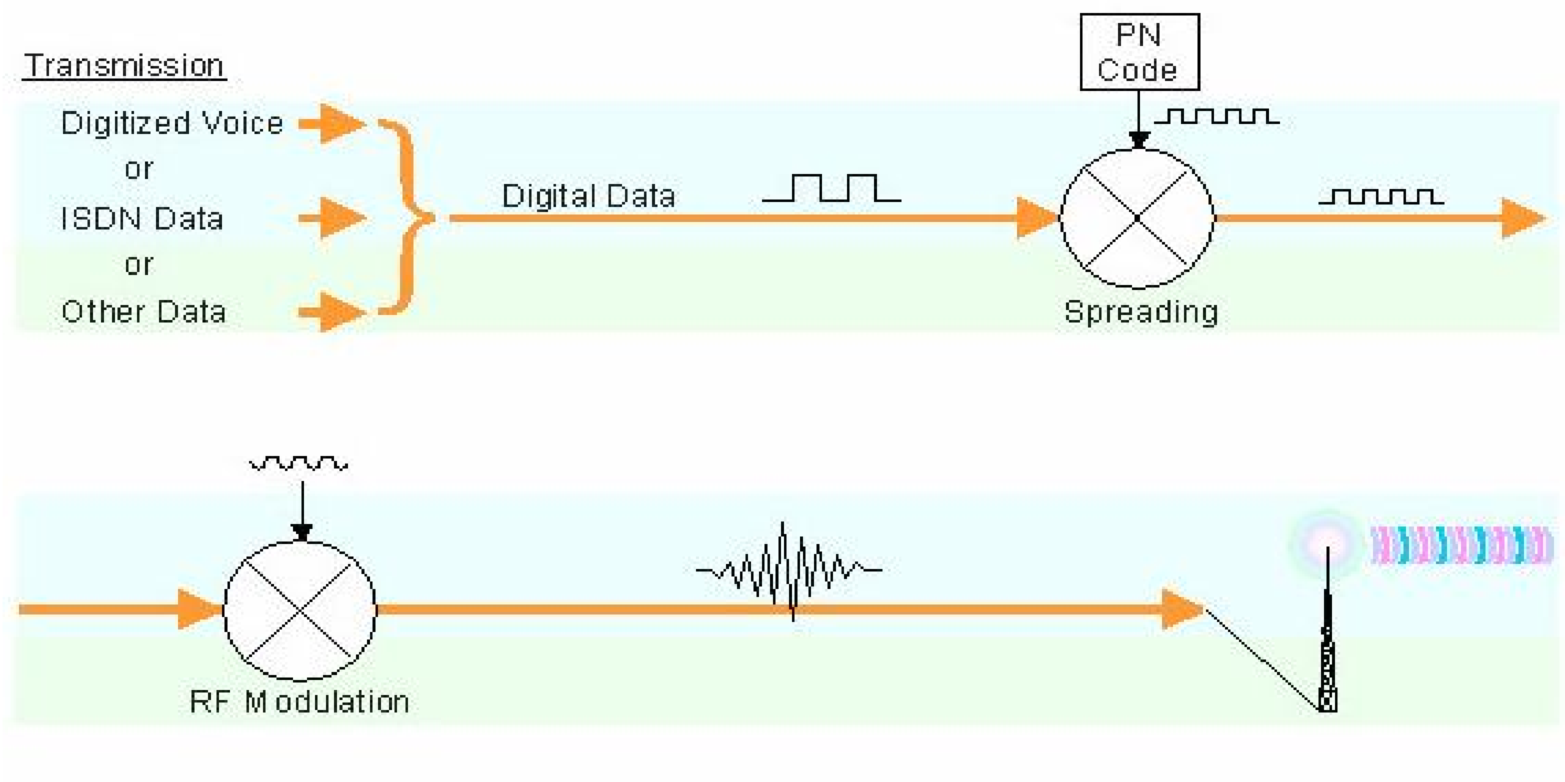


GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO MÃ (1)

- Khái niệm
  - Mỗi "người dùng" hay tín hiệu được gán một từ mã trong không gian mã trực giao cho trước, sau đó các kênh tín hiệu được ghép lại và truyền đi
- Đặc điểm
  - Mỗi kênh tín hiệu được sử dụng toàn bộ băng thông của hệ thống và toàn bộ khung thời gian truyền dẫn
  - Bộ ghép và giải ghép phức tạp

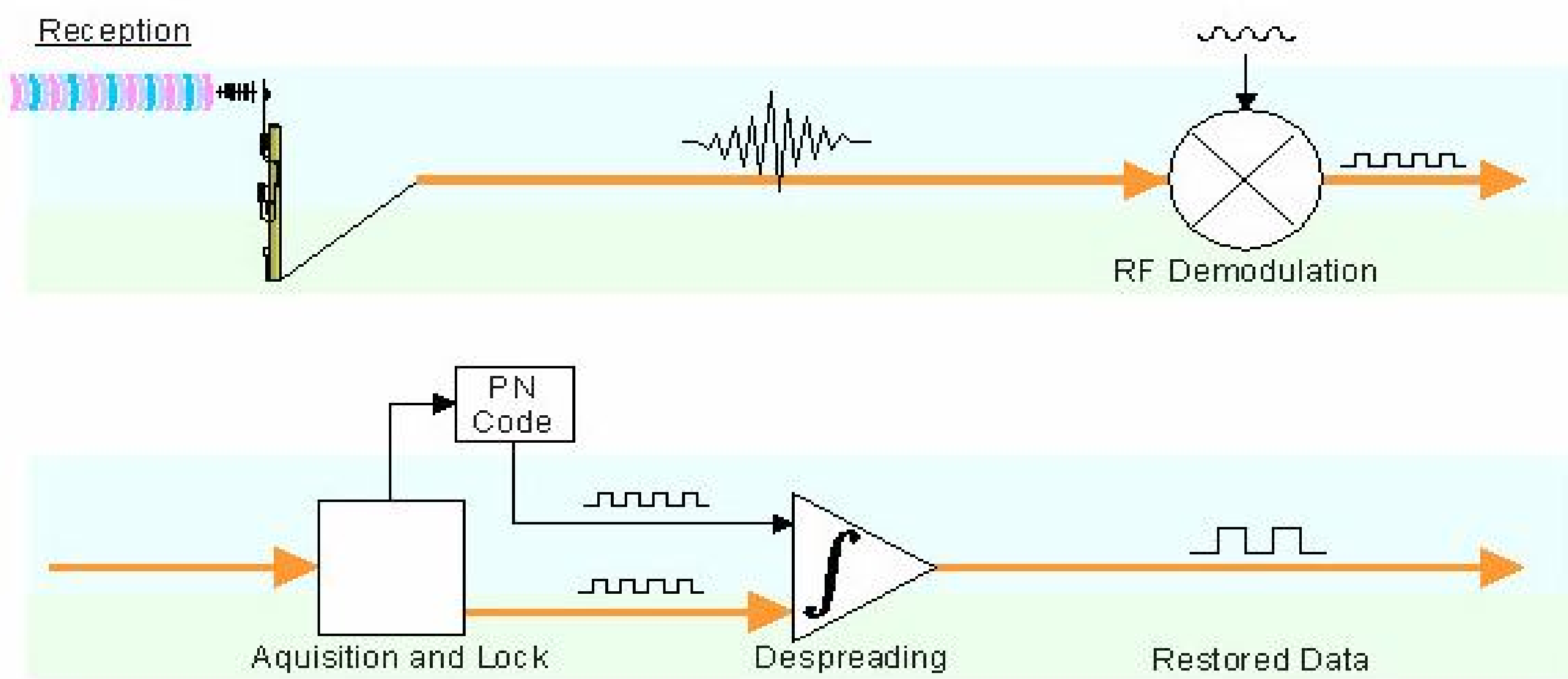
GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO MÃ (2)

❖ Sơ đồ bộ phát CDMA



GHÉP KÊNH PHÂN CHIA THEO MÃ (3)

❖ Sơ đồ bộ thu CDMA



Kỹ thuật ghép kênh	Ưu điểm	Nhược điểm
FDM	-Đơn giản -Giá thành thấp -Ứng dụng: radio, (cable)TV -Các bộ thu của từng kênh không nhất thiết phải ở cùng vị trí (cellular phones)	-Chỉ phù hợp với TH tương tự -Chịu giới hạn về băng thông
TDM đồng bộ	-Ứng dụng cho TH số -Đơn giản -Ứng dụng: E1/T1, ISDN	- Lãng phí băng thông
TDM thống kê	-Sử dụng hiệu quả băng thông -Độ dài gói dữ liệu có thể thay đổi -Khung dữ liệu có các bit phụ: điều khiển, sửa lỗi,…	- Phức tạp hơn so với TDM đồng bộ
DWDM	-Đạt dung lượng ghép kênh rất lớn -Các kênh TH có thể có tốc độ khác nhau	-Đắt đỏ -Phức tạp
CDMA	-Đạt dung lượng lớn	- Phức tạp

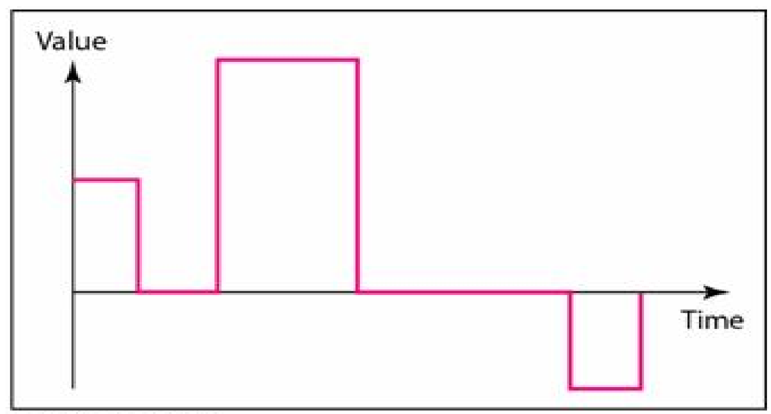
SỐ HÓA TÍN HIỆU ANALOG (1)

- Định nghĩa:
  - Chuyển đổi tín hiệu tương tự thành tín hiệu số
- Phương pháp:
  - Điều chế xung mã – PCM
  - Điều chế xung mã vi sai – DPCM
  - Điều chế Delta – DM
- Chuyển đổi A/D:
  - Lấy mẫu, lượng tử hóa, mã hóa
- Chuyển đổi D/A:
  - Giải mã và lọc

SỐ HÓA TÍN HIỆU ANALOG (2)

- Tín hiệu tương tự:
  - Có vô hạn các giá trị trong một khoảng biên độ nhất định
  - Liên tục về thời gian
- Tín hiệu rời rạc:
  - Tín hiệu rời rạc về thời gian hoặc biên độ
- Tín hiệu số:
  - Có một số giới hạn các giá trị trong một khoảng biên độ nhất định
  - Rời rạc về thời gian

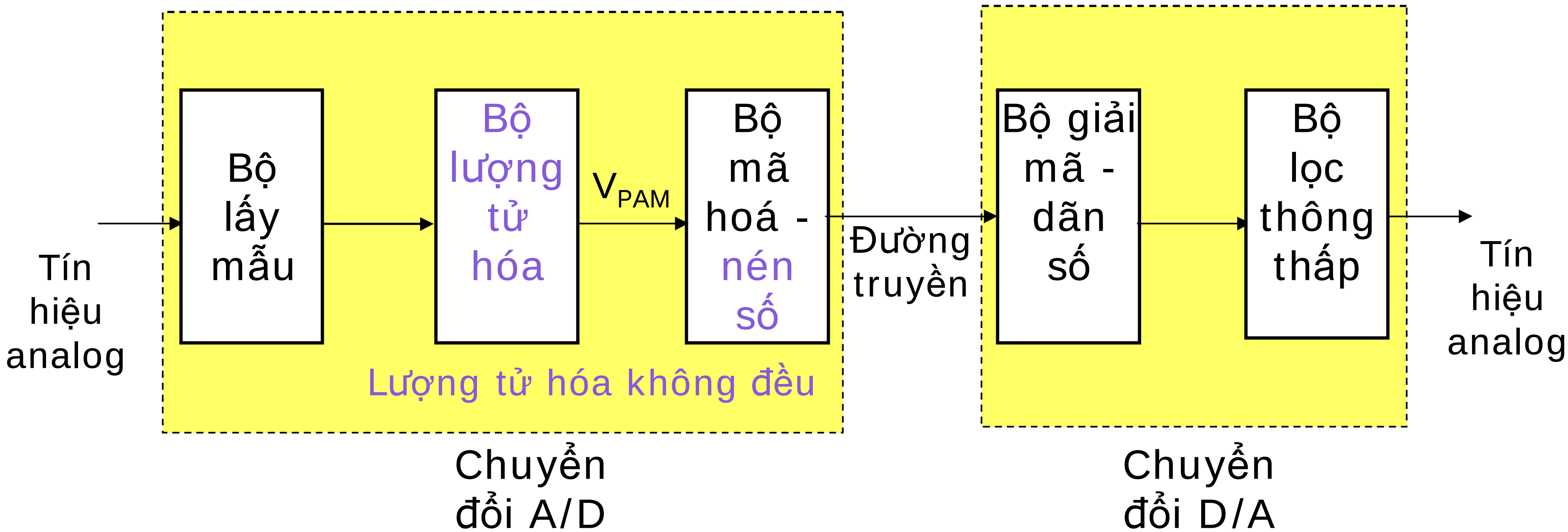
a. Analog signal



b. Digital signal

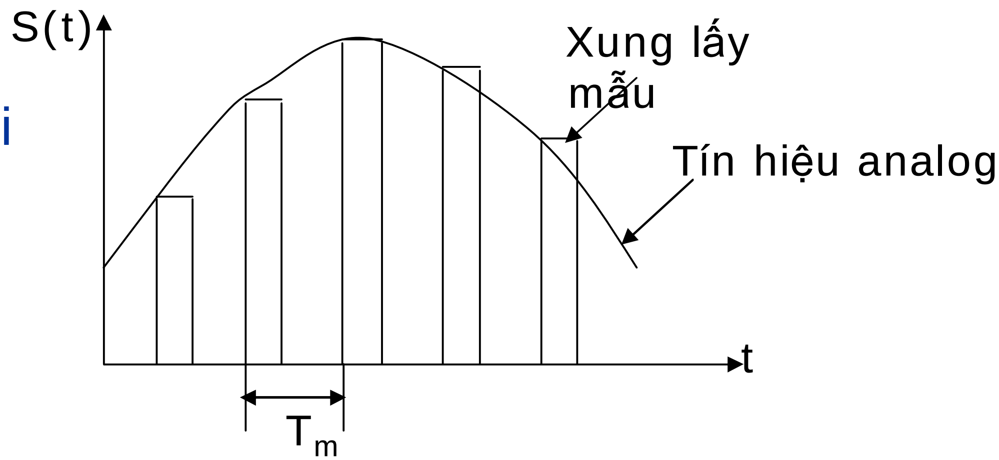
PULSE CODE MODULATION

❖ Sơ đồ khối hệ thống điều chế PCM



LẤY MẪU (1)

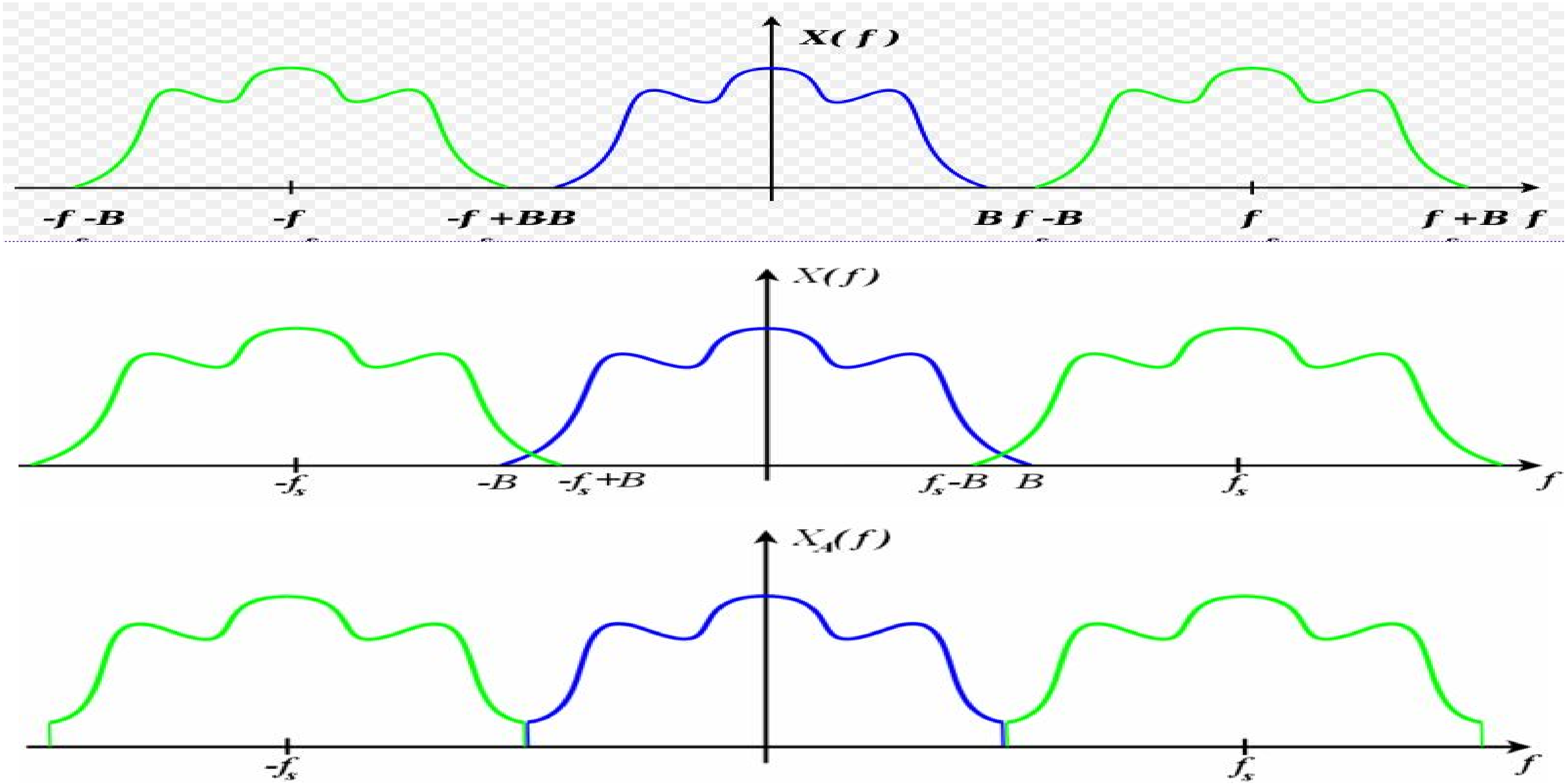
- Chuyển đổi tín hiệu tương tự thành dãy xung điều biên độ-PAM (tín hiệu rời rạc về mặt thời gian)
- Yêu cầu: Chu kì lấy mẫu phải thỏa mãn định lí Nyquist
  - $T_{max} \leq 1/2f_{max}$



- Định lí Shannon – Nyquist:
  - Một tín hiệu có dải tần giới nội là B(Hz) (tín hiệu mà biến đổi Fourier của nó đều bằng 0 với $|\omega|>2\pi B$ hay $f>B$) được xác định một cách duy nhất bởi các giá trị của nó lấy tại các khoảng cách đều nhau bé hơn 1/2B giây.
  - Một tín hiệu có dải tần giới nội là B(Hz) có thể được thiết lập lại từ các mẫu của nó lấy đều đặn với tốc độ không ít hơn 2B mẫu trên một giây.
  - $T_S=1/2B$ giây: khoảng Nyquist
  - 2B mẫu/s: tốc độ lấy mẫu Nyquist

LẤY MẪU (2)

❖ Hiện tượng chồng phổ - Aliasing error



LƯỢNG TỬ HÓA (1)

❖ Định nghĩa:

- Làm tròn biên độ xung lấy mẫu tới một mức lượng tử gần nhất (bằng một số nguyên lần các bước lượng tử)

❖ Mục đích:

- Rời rạc hóa tín hiệu về mặt biên độ

❖ Phương pháp:

- Lượng tử hóa đều:
  - Chia biên độ tín hiệu thành các khoảng đều nhau (các mức lượng tử hóa có biên độ cách đều nhau) – bước lượng tử hóa đều
- Lượng tử hóa không đều:
  - Chia biên độ tín hiệu thành các khoảng không đều nhau theo một qui luật nhất định (các mức lượng tử hóa có biên độ cách không đều nhau)

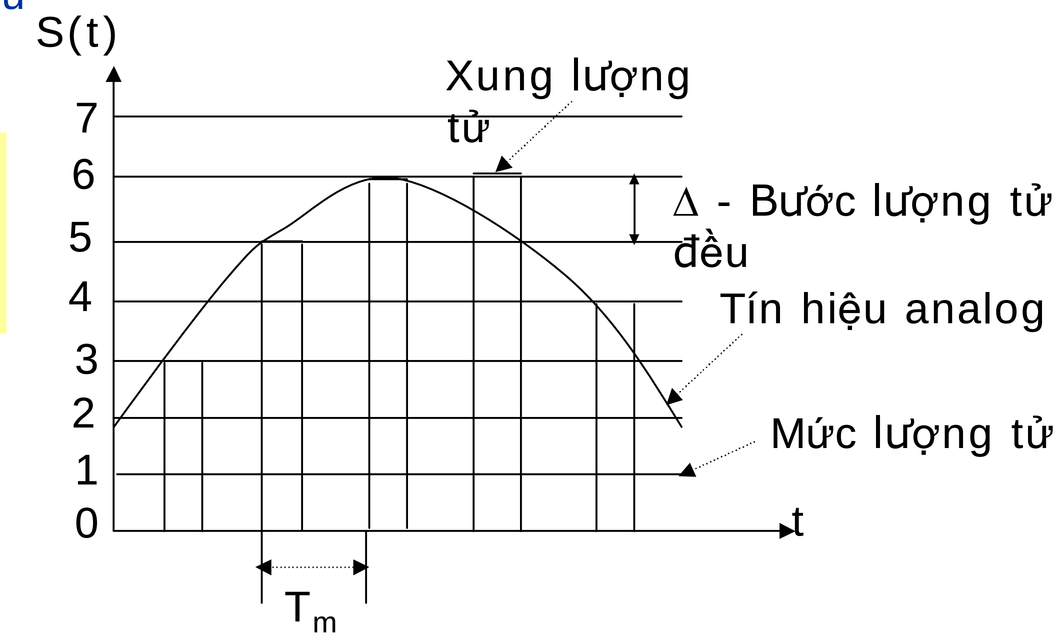
LƯỢNG TỬ HÓA (2)

❖ Lượng tử hóa đều:

- Bước lương tử hóa
  - Q: số lượng mức lượng tử
  - a: biên độ xung lấy mẫu
- Méo lượng tử

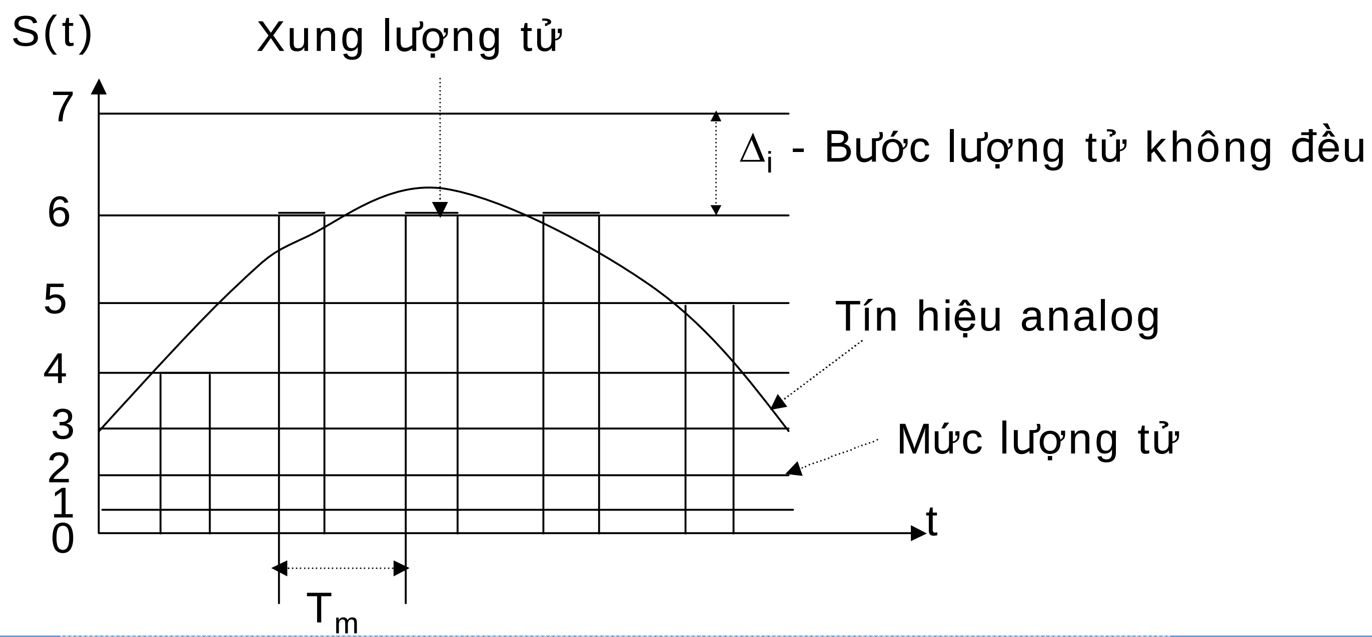
$$\frac{2a}{Q} = \Delta$$

$$P_{MLT} = \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} a^2 W_{LT}(a)\,da$$



LƯỢNG TỬ HÓA (3)

- Lượng tử hóa không đều:
  - Qui luật lượng tử:
    - Biên độ xung lấy mẫu càng lớn thì độ dài bước lượng tử càng lớn



MÃ HÓA

- Mục đích:
  - Mã hóa mỗi xung lấy mẫu thành một từ mã có số lượng bit ít nhất
- Mã cơ số L:
  - L càng lớn, số lượng bit mã hóa cho một xung lấy mẫu càng nhỏ
  - Thực hiện quyết định bit phía thu khó
- Mã cơ số 2 (L=2):
  - Số lượng bit mã hóa cho một xung là lớn nhất
  - Thực hiện quyết định bit phía thu dễ dàng, có độ chính xác cao
  - Được sử dụng chủ yếu

NGẪU NHIÊN HÓA TÍN HIỆU (1)

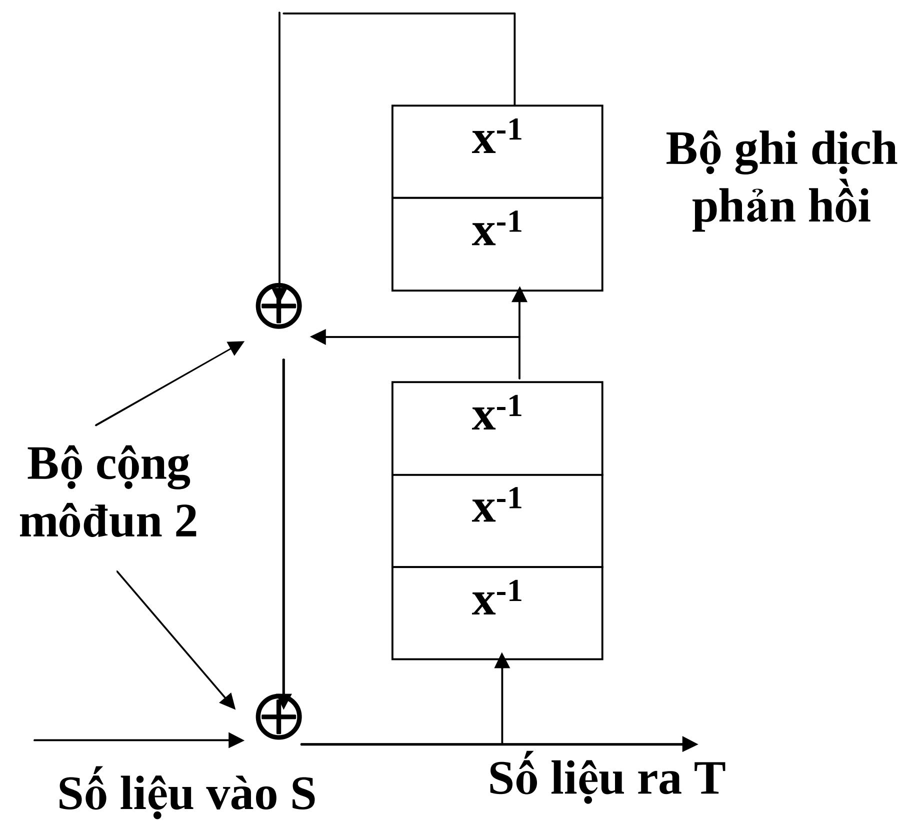
- Khái niệm:
  - Xáo trộn tín hiệu hiện có (mất tính ngẫu nhiên) thành một dãy tín hiệu có tính ngẫu nhiên
  - Ví dụ: tín hiệu phát gồm một dãy bit 1 hay bit 0 liên tiếp hoặc một tổ hợp từ mã được truyền đi liên tục → mất tính ngẫu nhiên
- Phương pháp thực hiện:
  - Thiết kế bộ ngẫu nhiên hóa (bộ trộn) ở phía phát: sử dụng bộ ghi dịch phản hồi âm
  - Thiết kế bộ khử ngẫu nhiên hóa (bộ giải trộn) ở phía thu: sử dụng bộ ghi dịch phản hồi dương

NGẪU NHIÊN HÓA TÍN HIỆU (2)

- Bộ ngẫu nhiên hóa:
  - Phương trình:

$$T = S \oplus D^3T \oplus D^5T$$

$$T = S \oplus (D^3 \oplus D^5)T$$



NGẪU NHIÊN HÓA TÍN HIỆU (3)

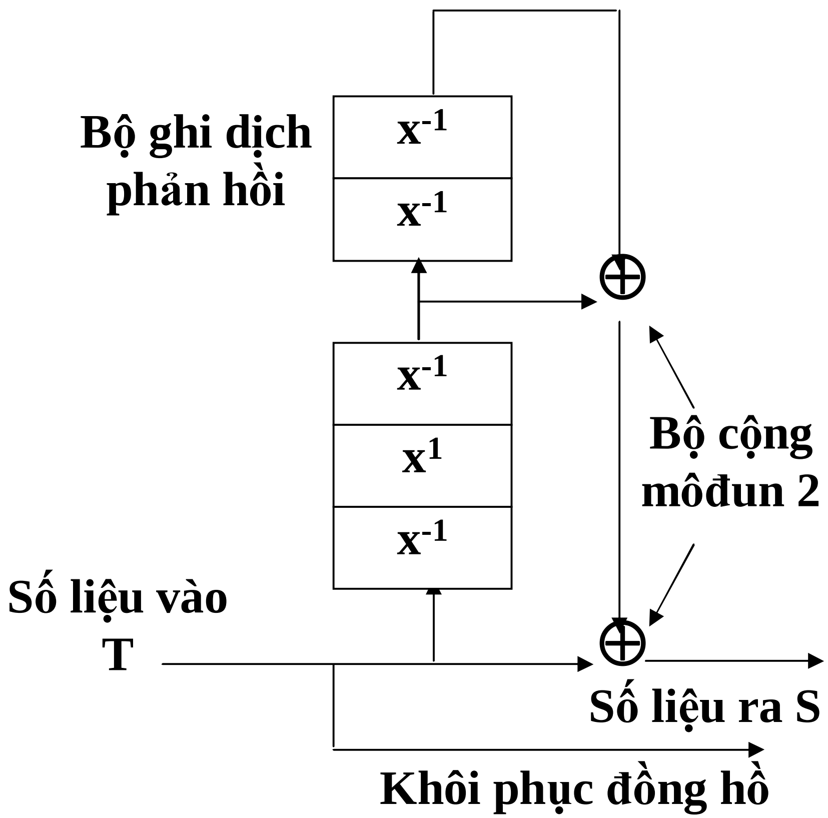
❖ Bộ khử ngẫu nhiên hóa:

- Phương trình:

$T \oplus (D^3 \oplus D^5)T = S$

Đặt $D^3 \oplus D^5 = F$

$T = S \oplus FT$



NGẪU NHIÊN HÓA TÍN HIỆU (4)

❖ Ví dụ 1:
- $S = 10100000111$. Tìm T?

❖ Trả lời:

$T = S \oplus FT = S \oplus F(S \oplus FT) = S \oplus FS \oplus F^2T = S \oplus FS \oplus F^2S \oplus F^3T$

$F = D^3 \oplus D^5$

$F^2 = (D^3 \oplus D^5)(D^3 \oplus D^5) = D^6 \oplus D^{10}$

$F^3 = (D^3 \oplus D^5)(D^6 \oplus D^{10}) = D^9 \oplus D^{11} \oplus D^{13} \oplus D^{15}$

$F^4 = \ldots$

$T = S(1 \oplus D^3 \oplus D^5 \oplus D^6 \oplus D^9 \oplus D^{10} \oplus D^{11}$

$T = 10110011000$

❖ Ví dụ 2:
- $S = 111000111001$
- $T = S \oplus (D^2 \oplus D^5)T$
- Yêu cầu:
  - Tìm T
  - Xác định bộ khử ngẫu nhiên hóa
  - Tìm S

VẤN ĐỀ ĐỒNG BỘ TRONG VIỄN THÔNG

- Khái niệm:
  - Quá trình đồng bộ hoạt động của các thiết bị khác nhau hoặc tiến trình của các quá trình khác nhau bằng cách đồng chỉnh thang độ thời gian của chúng được gọi là đồng bộ.
- Đồng bộ trong viễn thông:
  - Đồng bộ sóng mang: cấu trúc lại sóng mang
  - Đồng bộ kí hiệu: khôi phục thời điểm quyết định
  - Đồng bộ khung: khôi phục trật tự các bit trong khung
  - Đồng bộ gói: thông tin được phân thành các gói để truyền theo các đường khác nhau, đồng bộ gói tức là khôi phục lại thông tin từ các gói thu được
  - Đồng bộ mạng: hoạt động của một node trong mạng sẽ phải đồng bộ với các node khác trong mạng và luồng dữ liệu đến
    - Đồng bộ đồng hồ thời gian thực: phân phối thời gian tuyệt đối (thời gian theo chuẩn quốc gia) có liên quan đến mục đích quản lí mạng
  - Đồng bộ đa phương tiện (multi-media): sắp xếp các phần tử hỗn độn (hình ảnh, văn bản, audio, video,…) thành thông tin đa phương tiện

CHƯƠNG 2

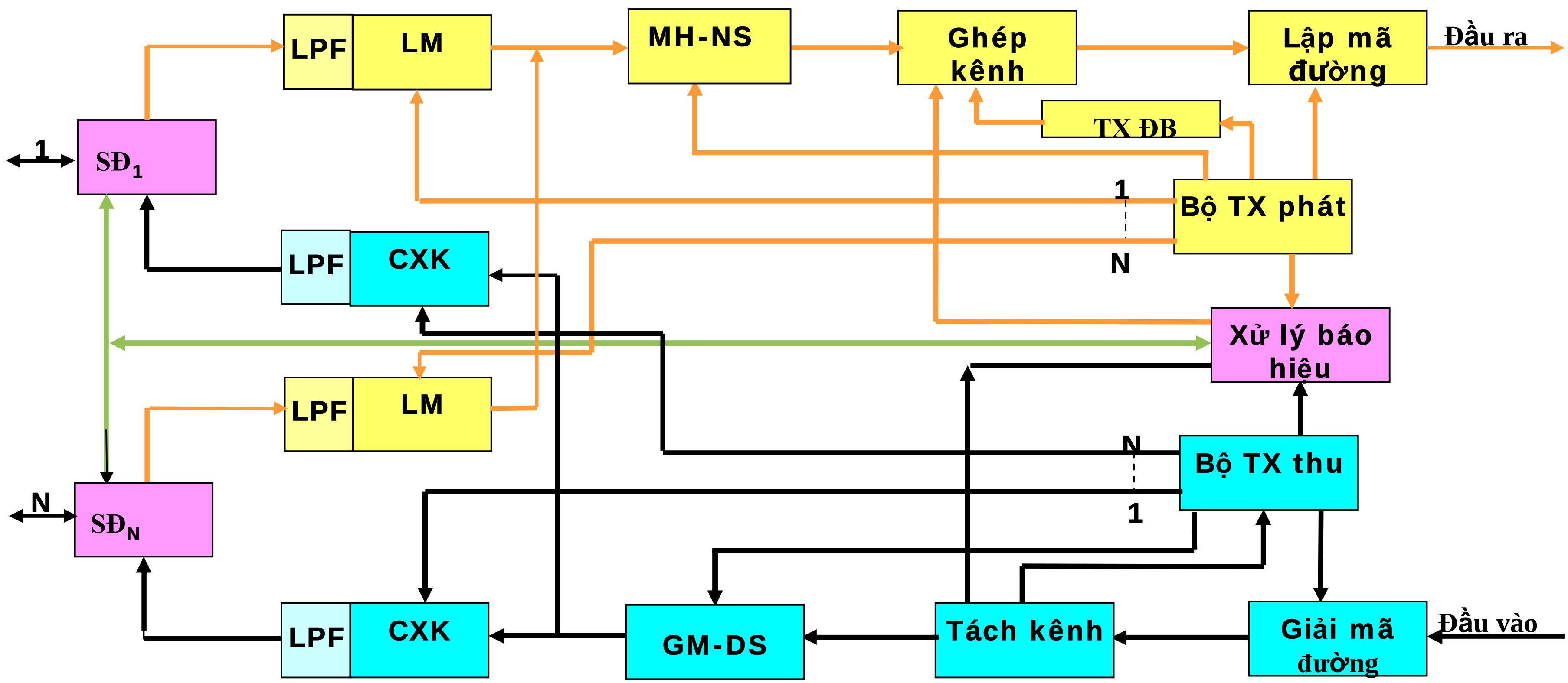
GHÉP KÊNH PCM, PDH, SDH

GHÉP KÊNH PCM (1)

- Mục đích:
  - Ghép các kênh thoại thành một luồng số chuẩn hóa
- Kĩ thuật ghép kênh:
  - TDM đồng bộ
- Nguyên lí hoạt động:
  - Chuyển đổi tín hiệu thoại tương tự tại mỗi máy đầu cuối ở dạng tương tự thành tín hiệu số sử dụng lượng tử hóa không đều, sau đó ghép lại thành luồng số tốc độ cao
- Phân loại:
  - N: số lượng kênh thoại được ghép
  - N=30: tiêu chuẩn châu Âu, luồng số E1; bộ nén A
  - N=24: tiêu chuẩn Bắc Mĩ, luồng số T1; bộ nén μ

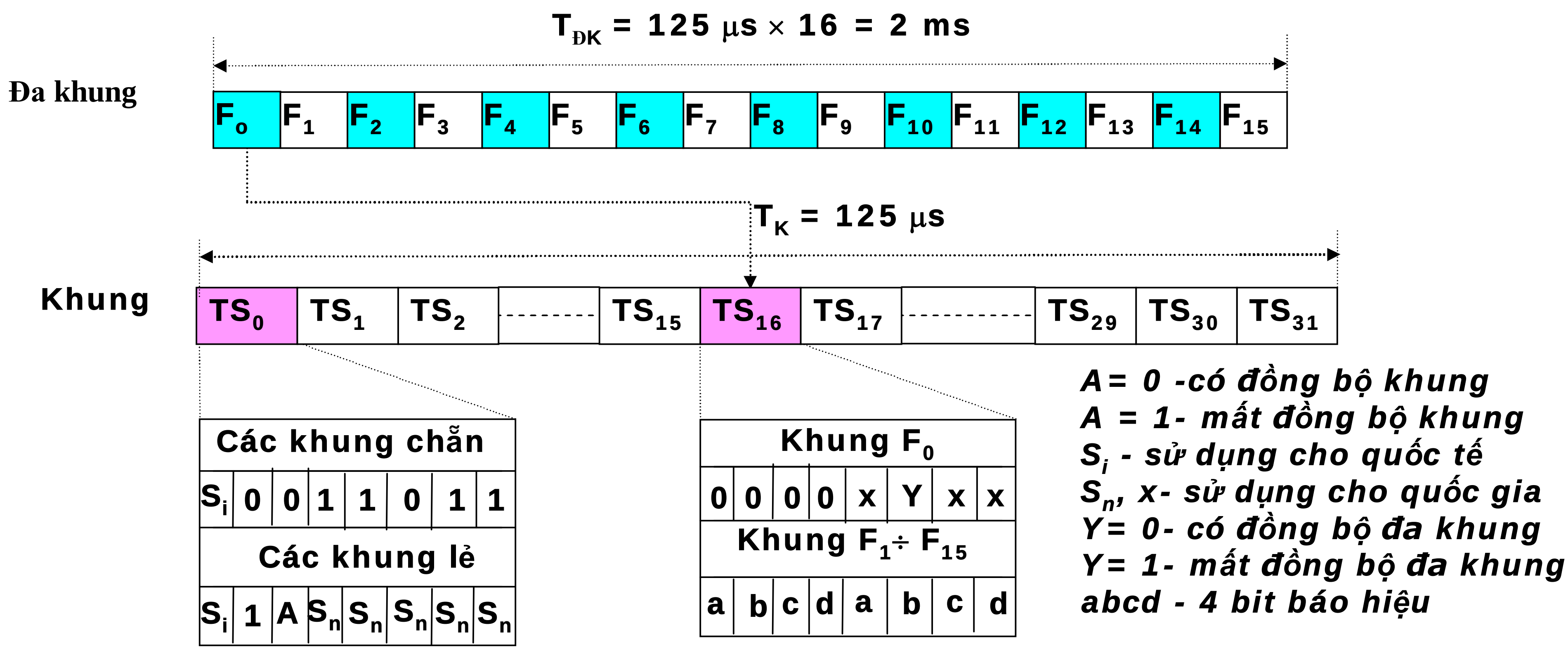
GHÉP KÊNH PCM (2)

❖ Sơ đồ khối bộ ghép kênh PCM



GHÉP KÊNH PCM (3)

❖ Cấu trúc khung và đa khung PCM-30



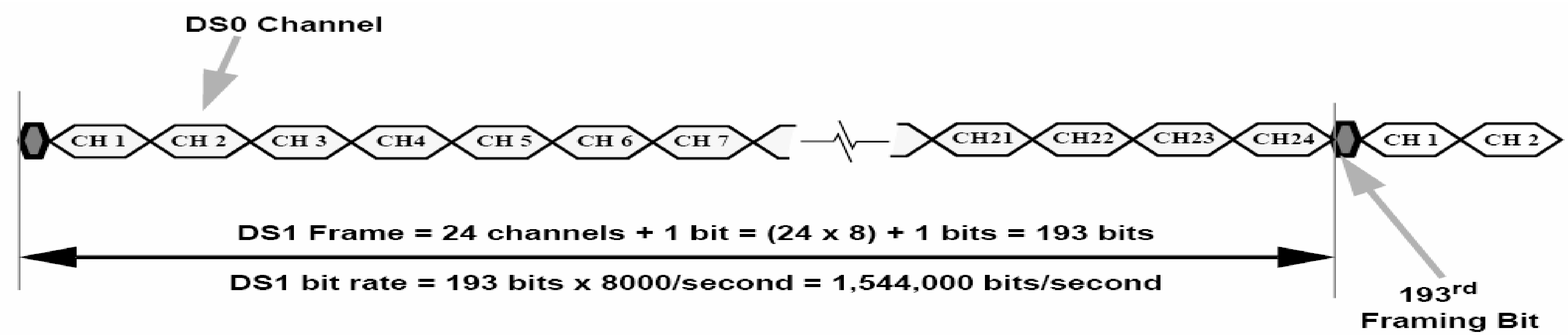
GHÉP KÊNH PCM (4)

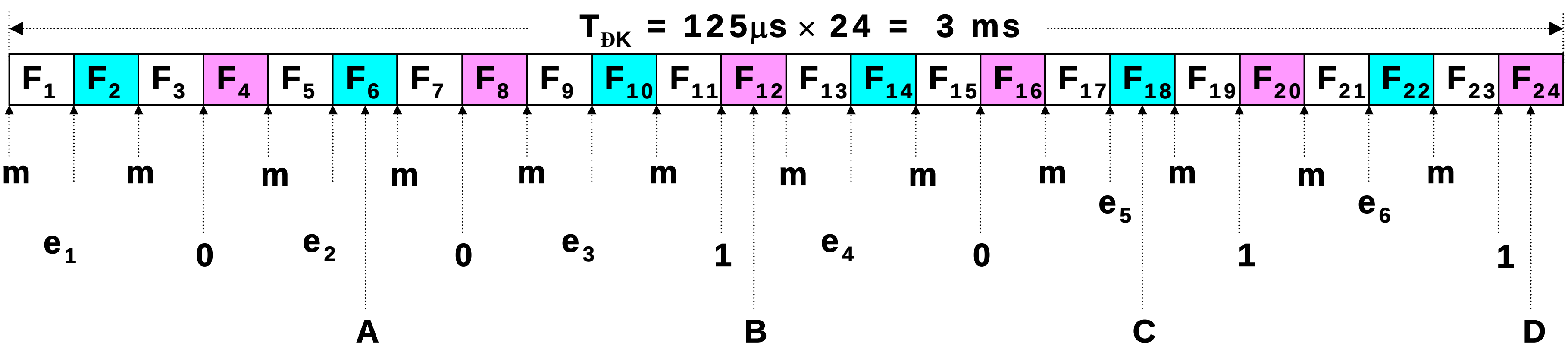
❖ Cấu trúc khung và đa khung PCM – 30:

- Tốc độ bit:
  $V=8bit/TS*32TS/khung*8.10^3 khung/s=2048Kb/s$
- Mô tả:
  - Đa khung gồm 16 khung
  - Mỗi khung gồm 32 TS: chứa 30 kênh thoại và 1 kênh đồng bộ, 1 kênh báo hiệu
  - Khe TS0 của:
    - Các khung chẵn: bit Si dùng cho quốc tế và từ mã đồng bộ khung
    - Các khung lẻ: bit Si dùng cho quốc tế, bit thứ 2 luông đặt bằng 1, bit thứ 3 dùng cho cảnh báo xa khi mất đồng bộ khung, 5 bit còn lại dùng cho quốc gia
  - Khe TS16 của:
    - Khung F0: 4 bit đầu tiên là từ mã đồng bộ đa khung, bit thứ 6 dùng cho cảnh báo xa khi mất đồng bộ đa khung, các bit còn lại dùng cho quốc gia
    - Khung F1-F15: 4 bit đầu truyền báo hiệu của các kênh 1 đến kênh 15; 4 bit cuối truyền báo hiệu của các kênh 16 đến 30

GHÉP KÊNH PCM (5)

❖ Cấu trúc khung và đa khung PCM – 24:





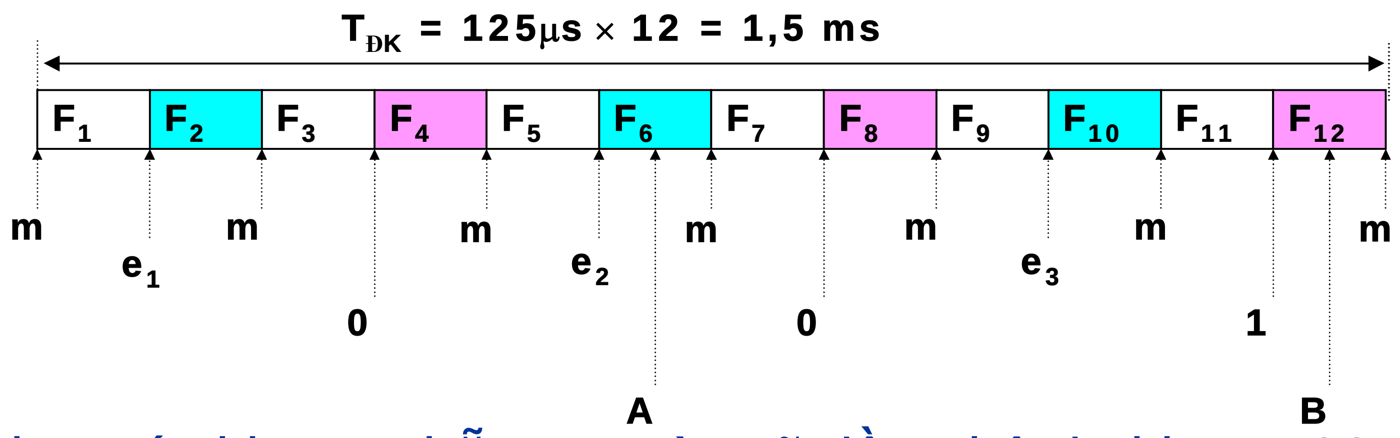
GHÉP KÊNH PCM (6)

- Cấu trúc khung PCM – 24
  - Mô tả:
    - Mỗi khung gồm 24 TS chứa 24 kênh thoại và 1 bit cờ
  - Tốc độ bit:

    $V=(8bit/TS*24TS/khung+1)*8.10^3 khung/s=1544Kb/s$
- Cấu trúc đa khung 24 khung
  - Đa khung gồm 12 khung hoặc 24 khung
  - Đa khung 24 khung:
    - Bit F các khung F4, F8, F12, F16, F20, F24: tạo từ mã đồng bộ đa khung 001011
    - Bit F các khung F2, F6, F10, F14, F18, F22: tạo mã CRC-6
    - Bit F các khung còn lại: dùng cho đồng bộ khung và cảnh báo mất đồng bộ khung
    - Khung F6, F12, F18, F24: bit thứ 8 của tất cả các TS được sử dụng để truyền báo hiệu

GHÉP KÊNH PCM (7)

❖ Cấu trúc đa khung 12 khung:



- Bit F các khung chẵn: tạo từ mã đồng bộ đa khung 00111 và bit S cảnh báo mất đồng bộ đa khung
- Bit F các khung lẻ: tạo từ mã đồng bộ khung 101010
- Khung F6 và F12: bit thứ 8 của tất cả các TS được sử dụng để truyền báo hiệu

GHÉP KÊNH PCM (8)

❖ Nén – dãn tín hiệu:

- Lượng tử hóa không đều áp dụng cho tín hiệu thoại
- Khái niệm:
  - Thực hiện lượng tử hóa đều toàn bộ biên độ của tín hiệu đòi hỏi số lượng mức lượng tử hóa lớn -> số lượng bit mã hóa lớn.
  - Đưa ra qui luật lượng tử hóa không đều: nén biên độ tín hiệu về các giá trị nhỏ hơn → giảm số lượng mức lượng tử hóa
  - Ở phía phát có bộ nén được đặt trước bộ mã hóa thì phía thu phải có bộ dãn đặt trước bộ giải mã
  - Tín hiệu đầu vào, đầu ra của bộ nén và bộ dãn đều là tín hiệu analog → bộ nén – dãn analog: sử dụng các phần tử phi tuyến
  - Tín hiệu đầu vào, đầu ra của bộ nén và bộ dãn đều là tín hiệu số → bộ nén – dãn số: sử dụng các vi mạch

GHÉP KÊNH PCM (9)

- ❖ Nén – dãn analog:
  - Đặc tính biên độ:
    - Luật A:

$$y = \begin{cases} \dfrac{Ax}{1+\ln A} & khi\ 0 \le x \le \dfrac{1}{A} \\ \dfrac{1+\ln Ax}{1+\ln A} & khi\ \dfrac{1}{A} < x \le 1 \end{cases}$$

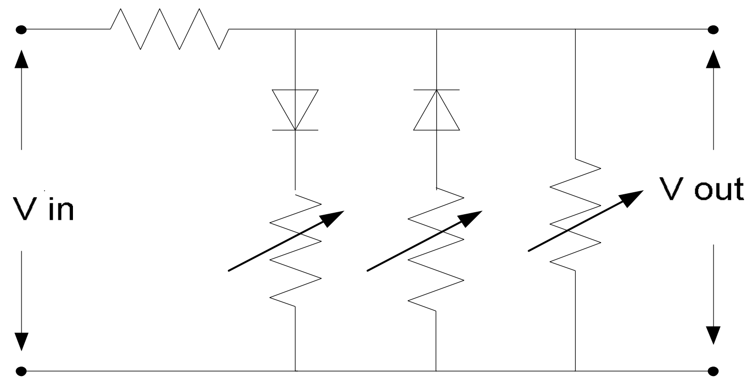
    - Luật μ:

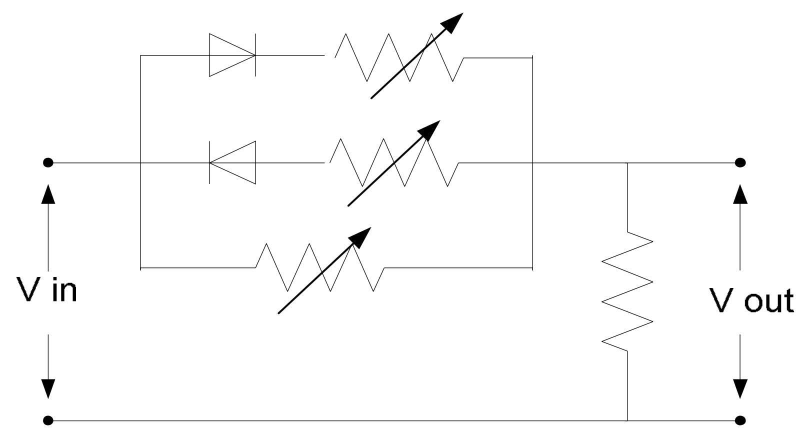
$$y = \frac{\ln(1+\mu x)}{\ln(1+\mu)}\ khi\ 0 \le x \le 1$$

    - Trong đó: $x=V_{in}/V_{max}$; V_{max}: điện áp vào ứng với điểm bão hòa của đặc tính biên độ bộ nén
    - V_{in}: điện áp vào (biến thiên từ 0÷2048Δ; Δ: mức lượng tử hóa đều)
  - Đặc điểm bộ nén:
    - Số lượng mức lượng tử giảm từ 2048 xuống còn 128 mức
    - Lượng tử hóa không đều: biên độ mức lượng tử tăng khi biên độ tín hiệu tăng

GHÉP KÊNH PCM (10)

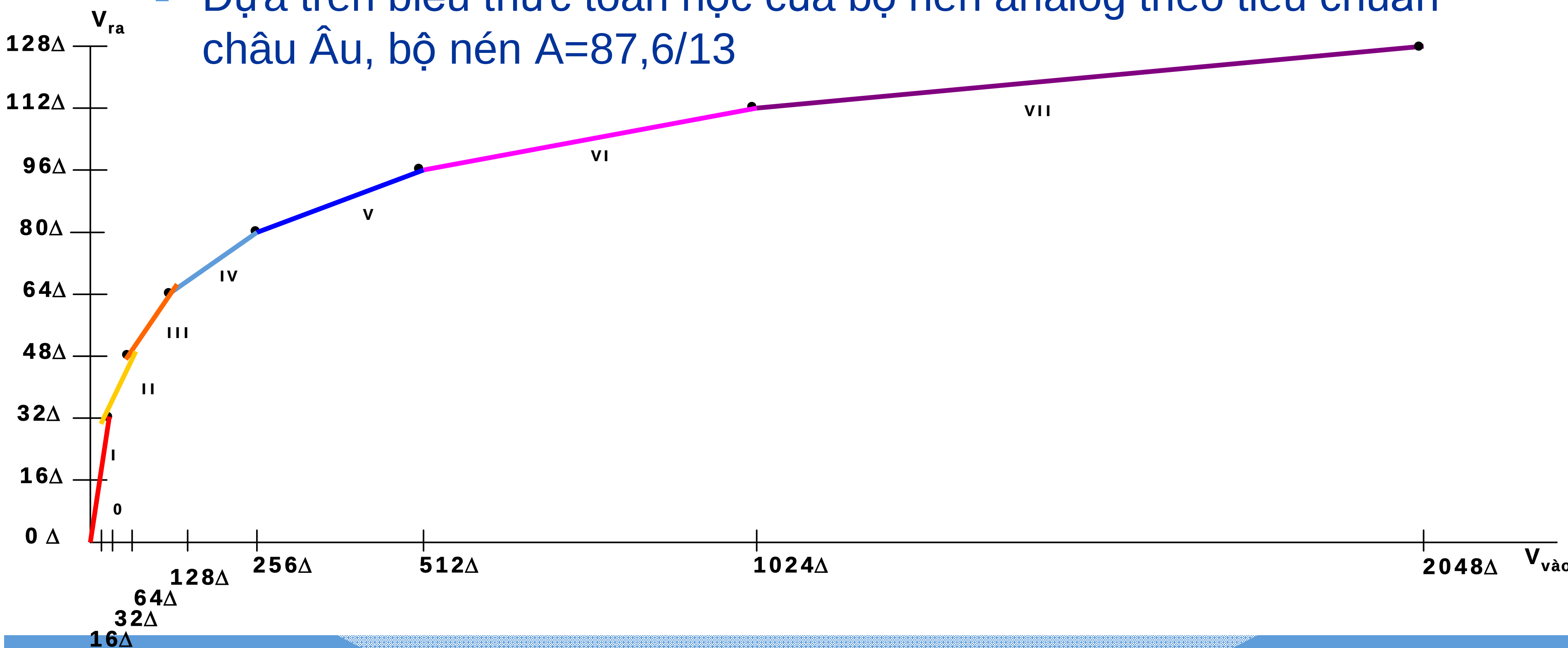
- ❖ Cấu tạo bộ nén – dãn analog:
- ❖ Hoạt động của bộ nén:
  - Tín hiệu vào bé →một trong hai diode mở ít (điện trở lớn) →tín hiệu rẽ mạch ít →suy hao bộ nén bé
  - Tín hiệu vào tăng →điện trở thuận diode giảm →suy hao bộ nén lớn → biên độ vào càng lớn sẽ bị nén nhiều
  - Hình trên: bộ nén
  - Hình dưới: bộ dãn





GHÉP KÊNH PCM (11)

- Nén – dãn số:
  - Dựa trên biểu thức toán học của bộ nén analog theo tiêu chuẩn châu Âu, bộ nén A=87,6/13



GHÉP KÊNH PCM (12)

- Đặc điểm của đặc tính biên độ:
  - Hình vẽ đặc tính biên độ thể hiện cho nhánh dương, nhánh âm đối xứng qua gốc tọa độ
  - Biên độ chia thành 13 đoạn:
    - Mỗi nhánh có 8 đoạn, đoạn I và đoạn II có cùng bước lượng tử hóa và có cùng độ dốc được ghép lại thành một đoạn →còn 7 đoạn
    - Hai đoạn bắt đầu từ gốc tọa độ có cùng độ dốc và cùng bước lượng tử hóa → ghép thành 1 đoạn
  - Trong mỗi đoạn được lượng tử hóa đều với 16 mức lượng tử hóa
  - Sử dụng một bit b1 để mã hóa dấu của giá trị biên độ (biên độ mang giá trị âm và dương)
  - Việc mã hóa biên độ tín hiệu chỉ cần quan tâm đến giá trị tuyệt đối

GHÉP KÊNH PCM (13)

❖ Lượng tử hóa trong đoạn:

- Mỗi đoạn được chia thành 16 mức lượng tử hóa với bước lượng tử hóa đều nhau, đánh số từ 0 đến 15
- Bước lượng tử hóa của các đoạn khác nhau là khác nhau, bước lượng tử hóa của đoạn sau lớn hơn gấp đôi bước lượng tử hóa của đoạn trước liền kề→lượng tử hóa không đều

❖ So sánh bước lượng tử hóa đều Δ và không đều Δn:

$$\Delta n = (V_{2n}-V_{1n})/16$$

Trong đó: n là chỉ số thứ tự đoạn từ 0 đến 7

V_{2n}, V_{1n}: giá trị điện áp tại đầu đoạn và cuối đoạn thứ n

GHÉP KÊNH PCM (14)

❖ Mã hóa – nén số:

- Xung lấy mẫu V_{PAM} được chuyển thành từ mã 8 bit
- Bit b1: chỉ thị dấu của giá trị biên độ đoạn
- Bit b2b3b4: mã hóa đoạn
- Bit b5b6b7b8: mã hóa mức lượng tử trong đoạn

Thứ tự đoạn	Số lượng bước lượng tử đều
0	16Δ
I	16Δ
II	32Δ
III	64Δ
IV	128Δ
V	256Δ
VI	512Δ
VII	1024Δ

GHÉP KÊNH PCM (15)

- Mã hóa đoạn:
  - Sử dụng ba bit b2b3b4 để đánh số thứ tự các đoạn từ 0 đến 7 trong nhánh dương

Thứ tự đoạn	Từ mã đoạn $b_2\ b_3\ b_4$
0	0 0 0
I	0 0 1
II	0 1 0
III	0 1 1
IV	1 0 0
V	1 0 1
VI	1 1 0
VII	1 1 1

TỪ MÃ CÁC BƯỚC

TT bước	b_5 b_6 b_7 b_8	TT bước	b_5 b_6 b_7 b_8
0	0 0 0 0	8	1 0 0 0
1	0 0 0 1	9	1 0 0 1
2	0 0 1 0	10	1 0 1 0
3	0 0 1 1	11	1 0 1 1
4	0 1 0 0	12	1 1 0 0
5	0 1 0 1	13	1 1 0 1
6	0 1 1 0	14	1 1 1 0
7	0 1 1 1	15	1 1 1 1

CÁC NGUỒN ĐIỆN ÁP CHUẨN

Thứ tự đoạn	Mã đoạn $b_2\ b_3\ b_4$	Điện áp mẫu chọn bước trong đoạn b_8	b_7	b_6	b_5	Điện áp mẫu đầu đoạn
0	000	Δ	2Δ	4Δ	8Δ	0Δ
I	001	Δ	2Δ	4Δ	8Δ	16Δ
II	010	2Δ	4Δ	8Δ	16Δ	32Δ
III	011	4Δ	8Δ	16Δ	32Δ	64Δ
IV	100	8Δ	16Δ	32Δ	64Δ	128Δ
V	101	16Δ	32Δ	64Δ	128Δ	256Δ
VI	110	32Δ	64Δ	128Δ	256Δ	512Δ
VII	111	64Δ	128Δ	256Δ	512Δ	1024Δ

GHÉP KÊNH PCM (16)

- ❖ Quy trình mã hóa:
  - So sánh giá trị biên độ xung lượng tử chưa nén với nguồn điện áp mẫu để xác định giá trị các bit
  - Xác định giá trị các bit trong từ mã theo lần lượt: bit b1 trước (bit dấu), đến các bit b2b3b4 (chọn đoạn), cuối cùng là các bit b5b6b7b8 (chọn bước lượng tử hóa)
- ❖ Bước 1: Chọn bit dấu b1
  - $V_{PAM} \geq 0\Delta$ thì $b_1=1$; $V_{PAM} < 0\Delta$ thì $b_1=0$

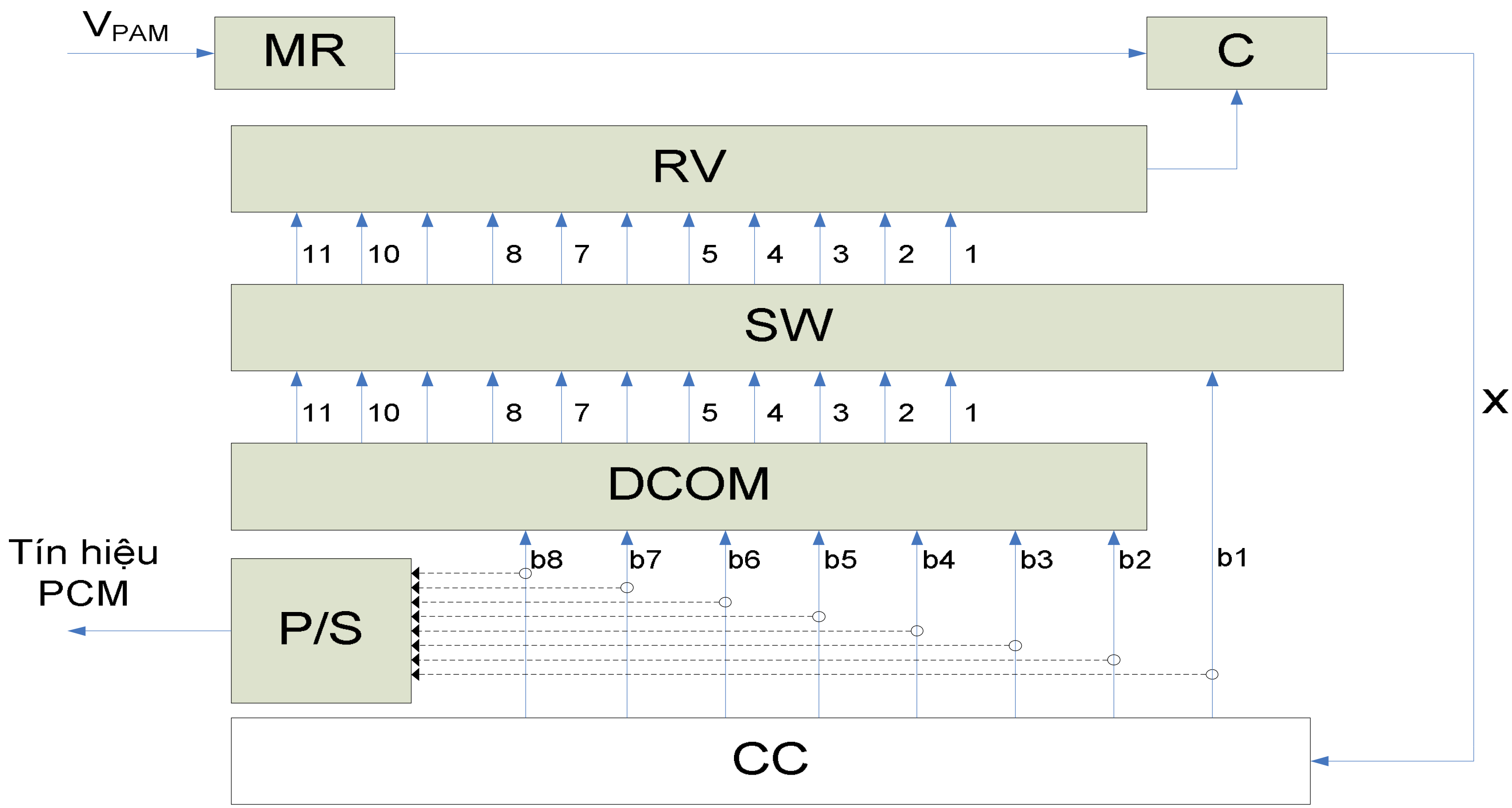
GHÉP KÊNH PCM (17)

- Bước 2: Chọn đoạn (b2b3b4)
  - Xác định b2:
    - $V_{PAM} \geq 128\Delta$ thì $b_2=1$; $V_{PAM} < 128\Delta$ thì $b_2=0$
  - Xác định b3: 2 trường hợp
    - Trường hợp 1: $b_2=1$
      - $V_{PAM} \geq 512\Delta$ thì $b_3=1$; $V_{PAM} < 512\Delta$ thì $b_3=0$
    - Trường hợp 2: $b_2=0$
      - $V_{PAM} \geq 32\Delta$ thì $b_3=1$; $V_{PAM} < 32\Delta$ thì $b_3=0$
  - Xác định b4: 4 trường hợp
    - Trường hợp 1: $b_2b_3=00$
      - $V_{PAM} \geq 16\Delta$ thì $b_4=1$; $V_{PAM} < 16\Delta$ thì $b_4=0$
    - Trường hợp 2: $b_2b_3=01$
      - $V_{PAM} \geq 64\Delta$ thì $b_4=1$; $V_{PAM} < 64\Delta$ thì $b_4=0$
    - Trường hợp 3: $b_2b_3=10$
      - $V_{PAM} \geq 256\Delta$ thì $b_4=1$; $V_{PAM} < 256\Delta$ thì $b_4=0$
    - Trường hợp 4: $b_2b_3=11$
      - $V_{PAM} \geq 1024\Delta$ thì $b_4=1$; $V_{PAM} < 1024\Delta$ thì $b_4=0$

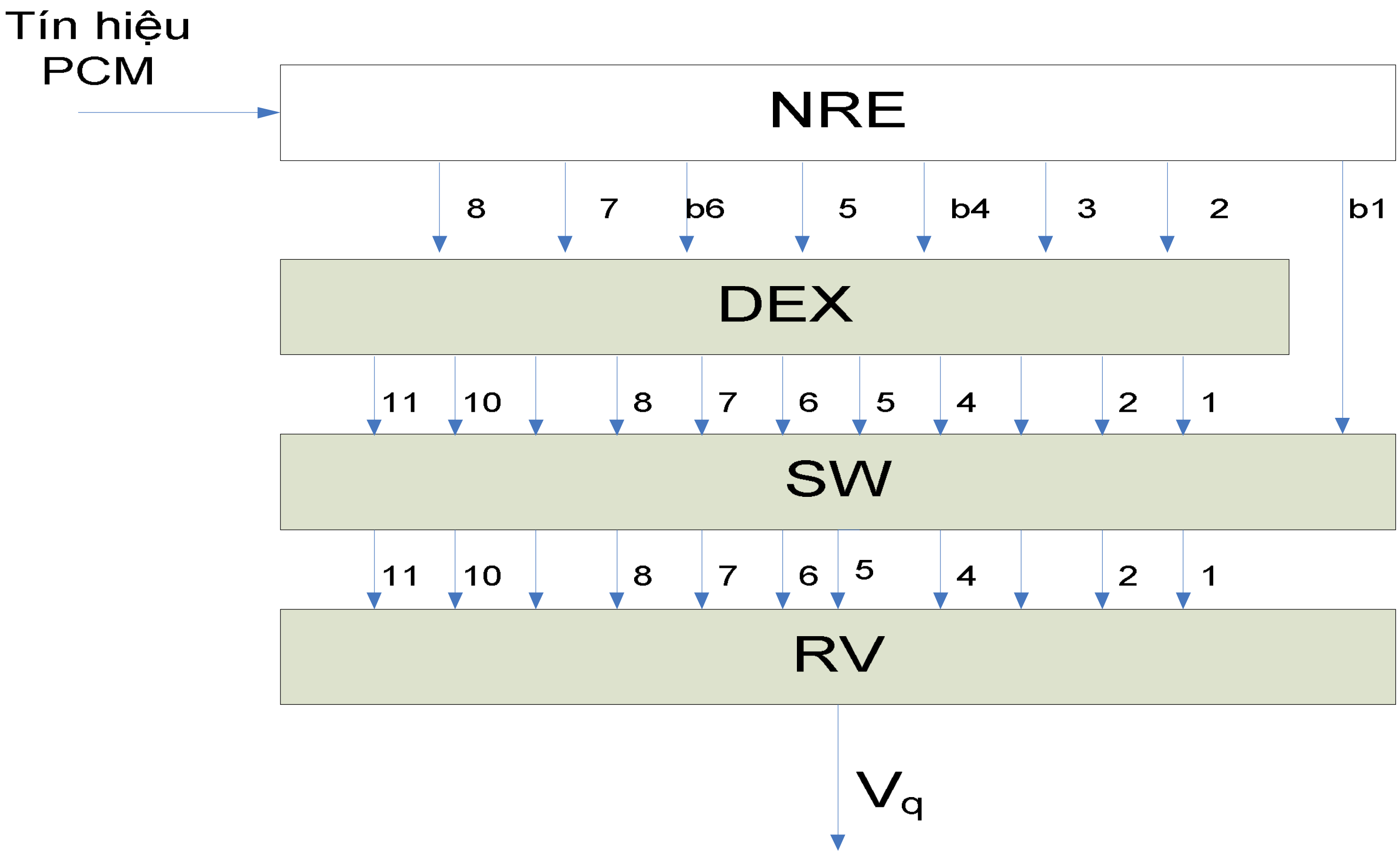
GHÉP KÊNH PCM (18)

- Bước 3: Chọn bước trong đoạn (b5b6b7b8)
  - Xác định b5:
    - $V_{PAM} \geq \Sigma V_{m1}$ thì b_5=1; $V_{PAM} < \Sigma V_{m1}$ thì b_5=0, trong đó $\Sigma V_{m1} = V_{mđđ} + V_m(b_5)$
  - Xác định b6:
    - $V_{PAM} \geq \Sigma V_{m2}$ thì b_6=1; $V_{PAM} < \Sigma V_{m2}$ thì b_6=0, trong đó $\Sigma V_{m1} = V_{mđđ} + V_m(b_6) + V_m(b_5=1)$
  - Xác định b7:
    - $V_{PAM} \geq \Sigma V_{m3}$ thì b_7=1; $V_{PAM} < \Sigma V_{m3}$ thì b_7=0, trong đó $\Sigma V_{m1} = V_{mđđ} + V_m(b_7) + V_m(b_6=1) + V_m(b_5=1)$
  - Xác định b8:
    - $V_{PAM} \geq \Sigma V_{m4}$ thì b_8=1; $V_{PAM} < \Sigma V_{m4}$ thì b_8=0, trong đó $\Sigma V_{m1}=V_{mđđ}+V_m(b_8)+V_m(b_7=1)+V_m(b_6=1)+V_m(b_5=1)$

SƠ ĐỒ KHỐI BỘ MÃ HÓA – NÉN SỐ



SƠ ĐỒ KHỐI BỘ GIẢI MÃ – DÃN SỐ



GHÉP KÊNH PCM (19)

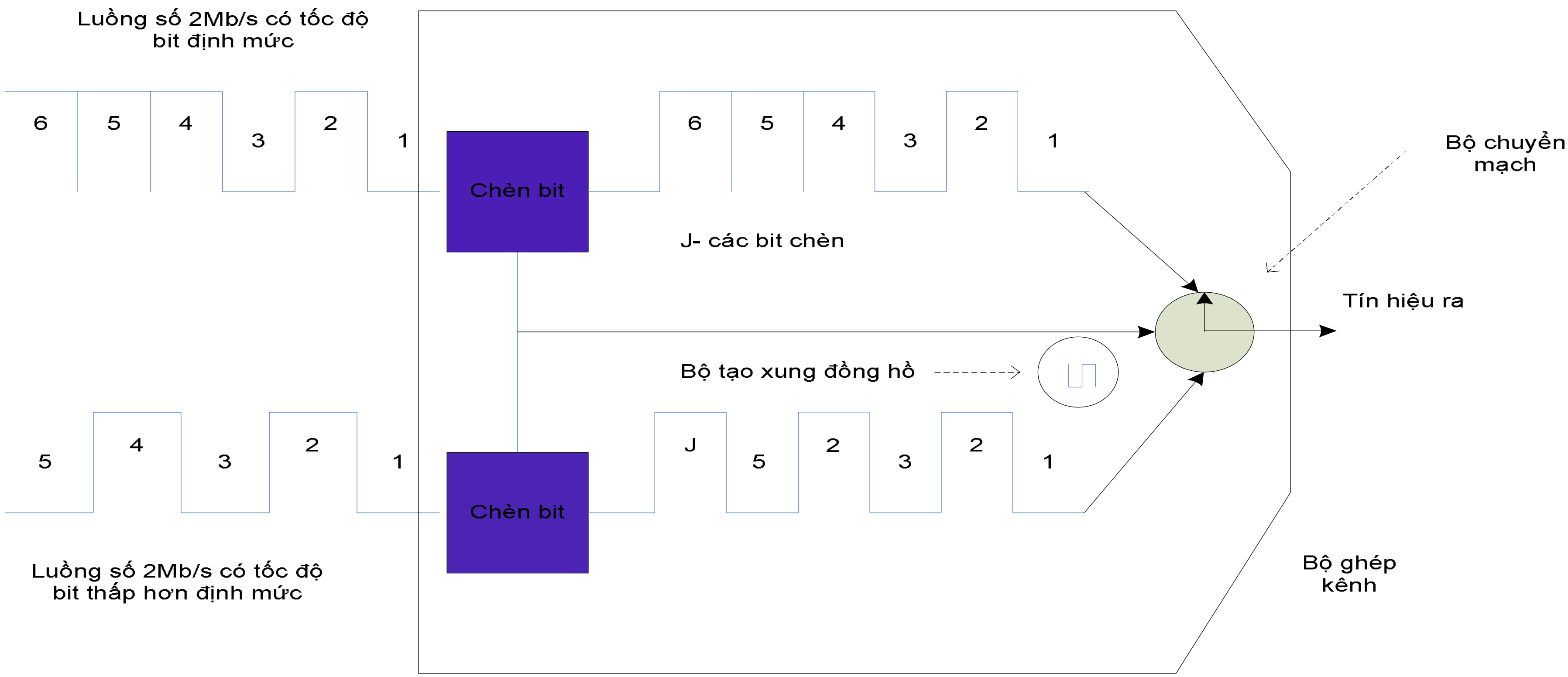
- Ví dụ 1:
  - Đầu vào bộ mã hóa – nén số có một xung lấy mẫu có biên độ tương đối x=0,26. Xác định giá trị 8 bit đầu ra.
- Ví dụ 2:
  - Đầu váo bộ mã hóa – nén số có một xung lượng tử V_{PAM}=-1898Δ. Xác định giá trị 8 bit đầu ra.
- Ví dụ 3:
  - Có từ mã 8 bit: 11001010. Xác định giá trị xung lượng tử đầu ra.

GHÉP KÊNH PDH (1)

- PDH – Plesiochronous Digital Hierarchy
- Khái niệm:
  - Ghép kênh PDH thực hiện ghép các luồng số cơ sở để tạo thành các luồng số mức cao hơn theo kỹ thuật ghép TDM
  - Mạng thông tin PDH không sử dụng đồng bộ tập trung, tất cả các phần tử trong mạng không bị khống chế bởi một đồng hồ chủ
  - Các luồng số do các phần tử trong mạng tạo ra có sự chênh lệch về tốc độ bit so với tốc độ danh định

GHÉP KÊNH PDH (2)

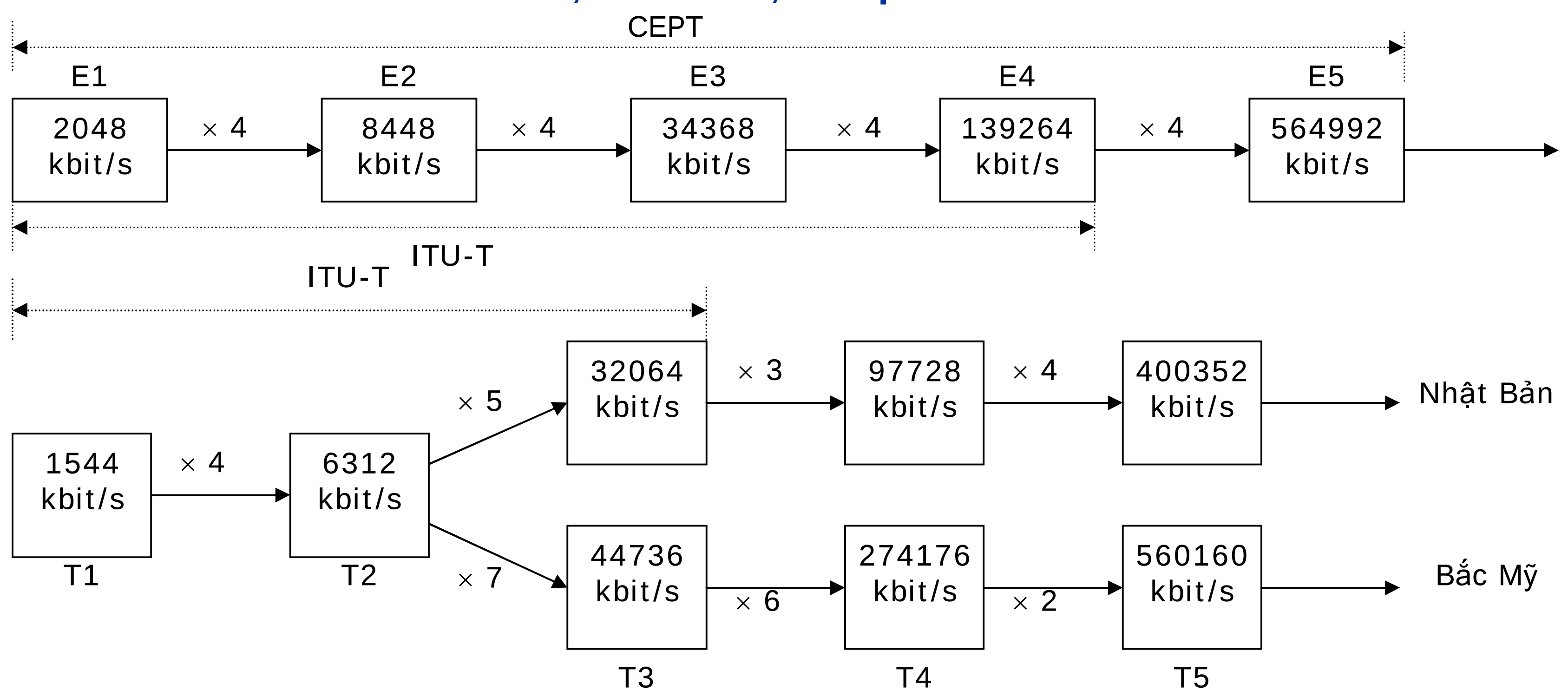
❖ Sơ đồ nguyên lý bộ ghép PDH



GHÉP KÊNH PDH (3)

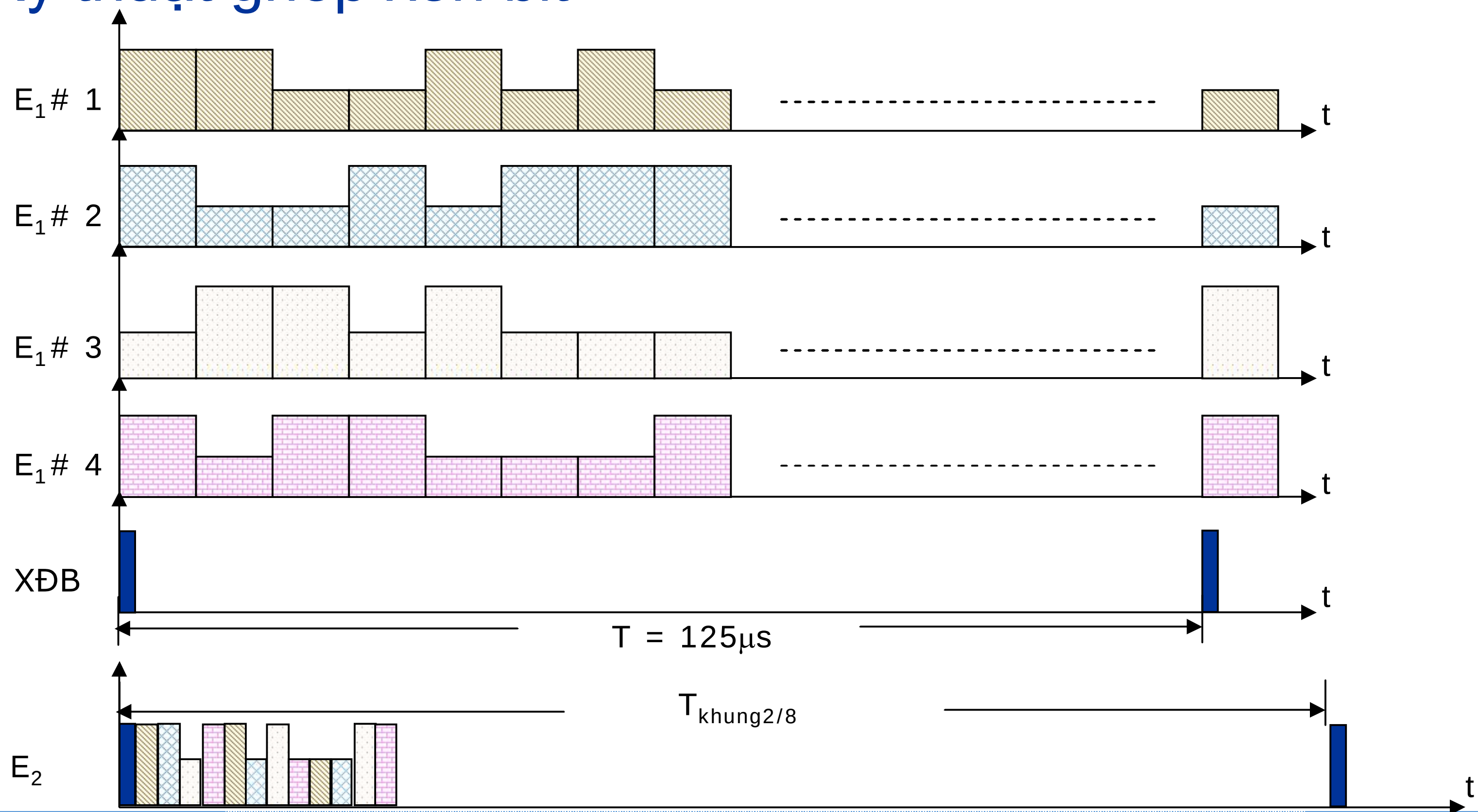
❖ Các tiêu chuẩn tốc độ bit PDH

- Tiêu chuẩn Châu Âu, Bắc Mĩ, Nhật Bản



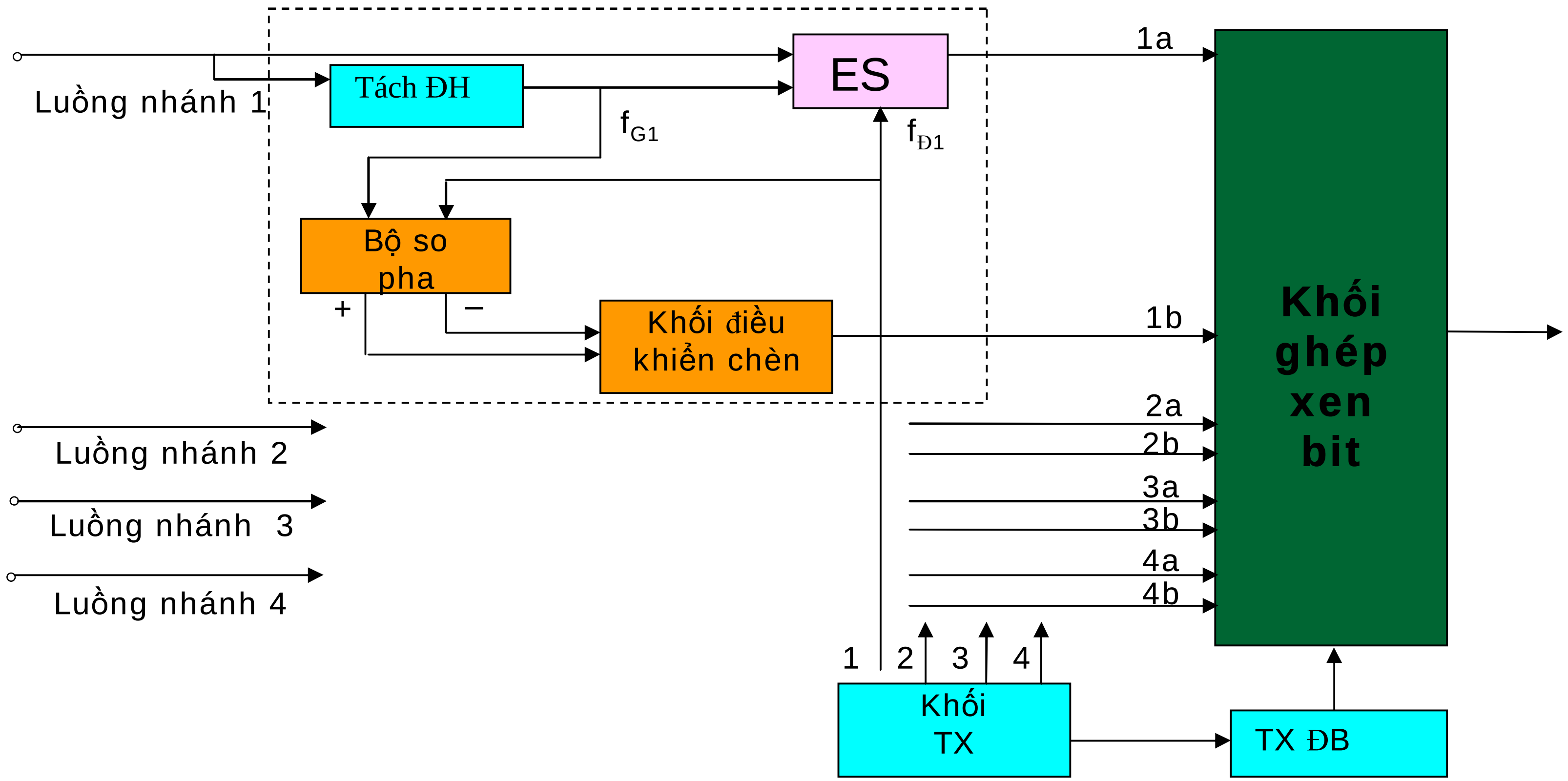
GHÉP KÊNH PDH (4)

❖ Kỹ thuật ghép xen bit



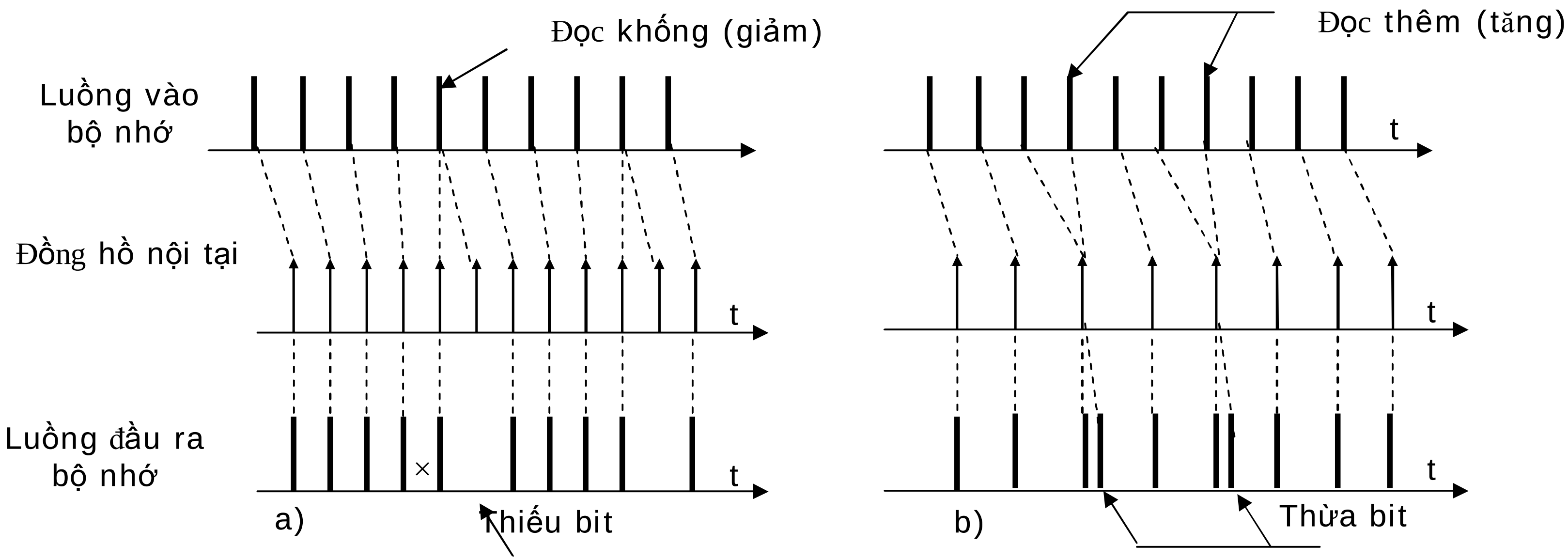
GHÉP KÊNH PDH (5)

❖ Sơ đồ khối bộ ghép PDH



GHÉP KÊNH PDH (6)

- Hiện tượng trượt bit:
  - Tần số đồng hồ tách từ luồng bit đến khác tần số đồng hồ nội tại bộ ghép kênh



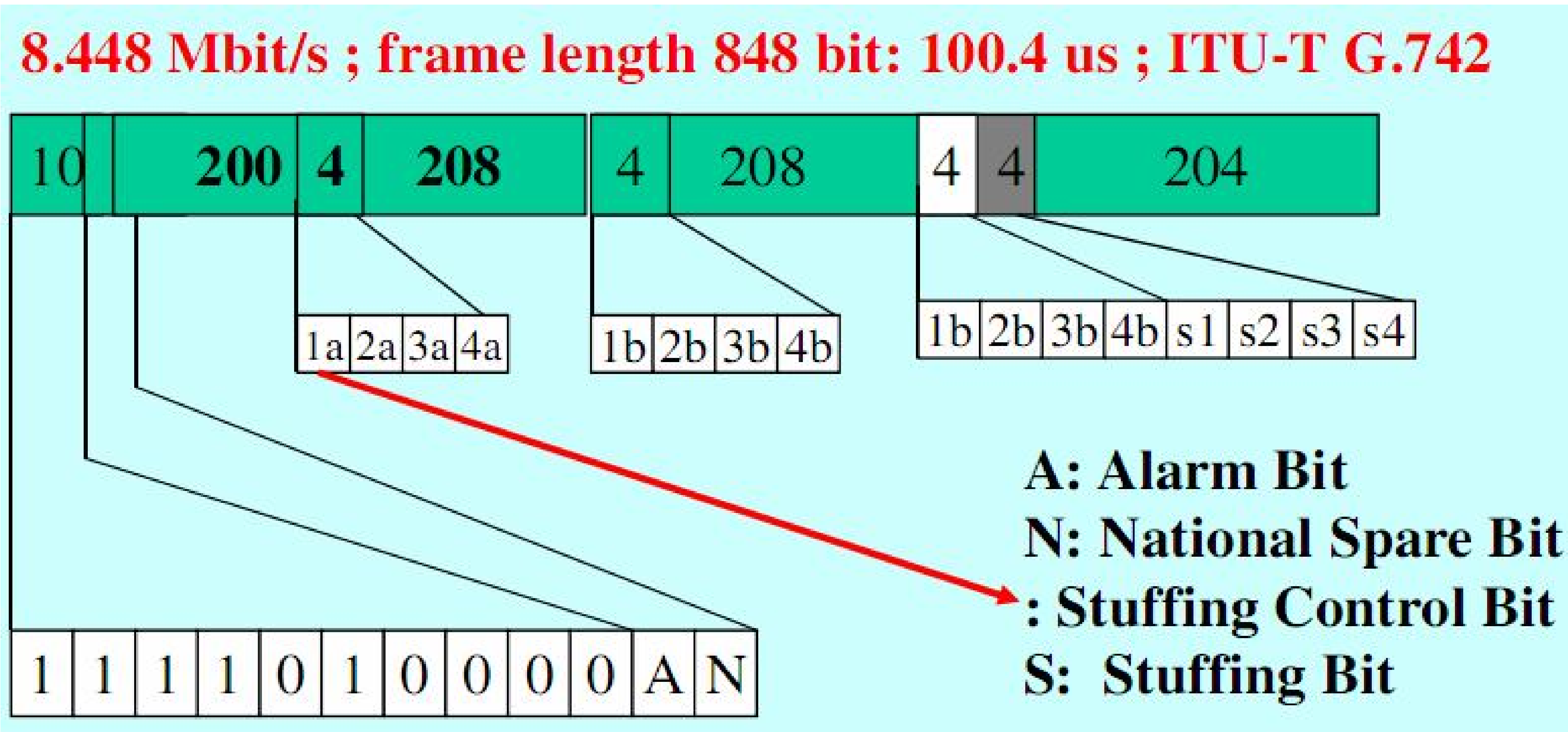
a) Tần số đồng hồ nội tại lớn hơn tần số luồng vào
b) Tần số đồng hồ nội tại nhỏ hơn tần số luồng vào

GHÉP KÊNH PDH (7)

- Kỹ thuật chèn trong PDH:
  - Khái niệm:
    - Điều khiển được hiện tượng trượt bit trong ghép kênh PDH
  - Phân loại:
    - Chèn âm:
      - Tần số đồng hồ ghi lớn hớn tần số đồng hồ đọc; hay chu kì đồng hồ ghi bé hơn chu kì đồng hồ đọc -> tại một thời điểm ghi có hai bit thông tin.
      - Một bit sẽ được ghi vào một vị trí khác được qui định trong khung
      - Chỉ thị chèn âm là 000
    - Chèn dương:
      - Tần số đồng hồ ghi nhỏ hớn tần số đồng hồ đọc; hay chu kì đồng hồ ghi lớn hơn chu kì đồng hồ đọc -> tại một thời điểm ghi sẽ không có bit thông tin nào hay tồn tại một vị trí bỏ trống.
      - Một bit mang thông tin giả sẽ được ghi vào vị trí bỏ trống này
      - Chỉ thị chèn âm là 111
    - Không chèn:
      - Tần số đồng hồ ghi bằng tần số đồng hồ đọc
    - Trong ghép kênh PDH chỉ có chèn dương

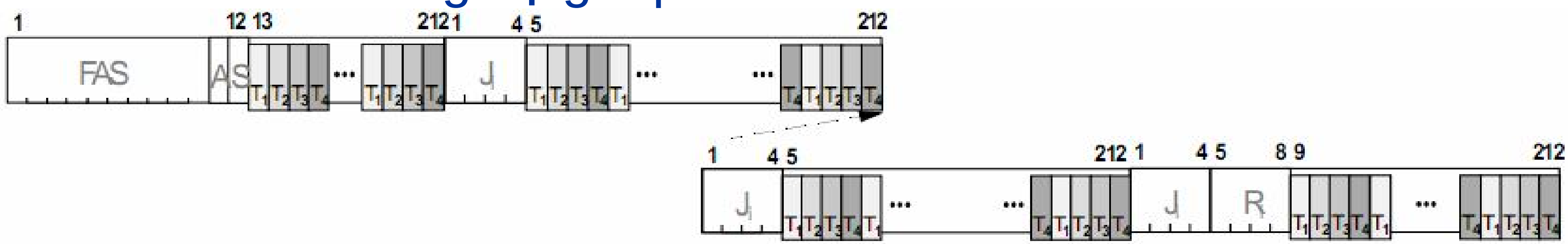
GHÉP KÊNH PDH (8)

❖ Cấu trúc khung bộ ghép 2/8



GHÉP KÊNH PDH (9)

❖ Cấu trúc khung bộ ghép 2/8



Binary rate = 8448.0 Kbit/s ± 30 ppm

Line Code = HDB3

Nominal amplitude = 2.37 V

Impedance = 75 Ω

Tolerated input level attenuation = 0 to 6 dB at 4224 Khz according to $\sqrt{f}$

Number of tributaries = 4

Justification : Positive

bits J_{ij} = 1 → R_i = fill-in (justification)

bits J_{ij} = 0 → R_i = information (no justification)

(decision is based on majority count of bits J_{ij})

Multiplexing method = bit interleaving

Frame rate = 9962.264 frame/s

FAS bits rate = 99622.64 bit/s

Maximum justification rate per tributary = 10000 bit/s approx.

Nominal justification ratio = 0.424

Frame length = 848 bits

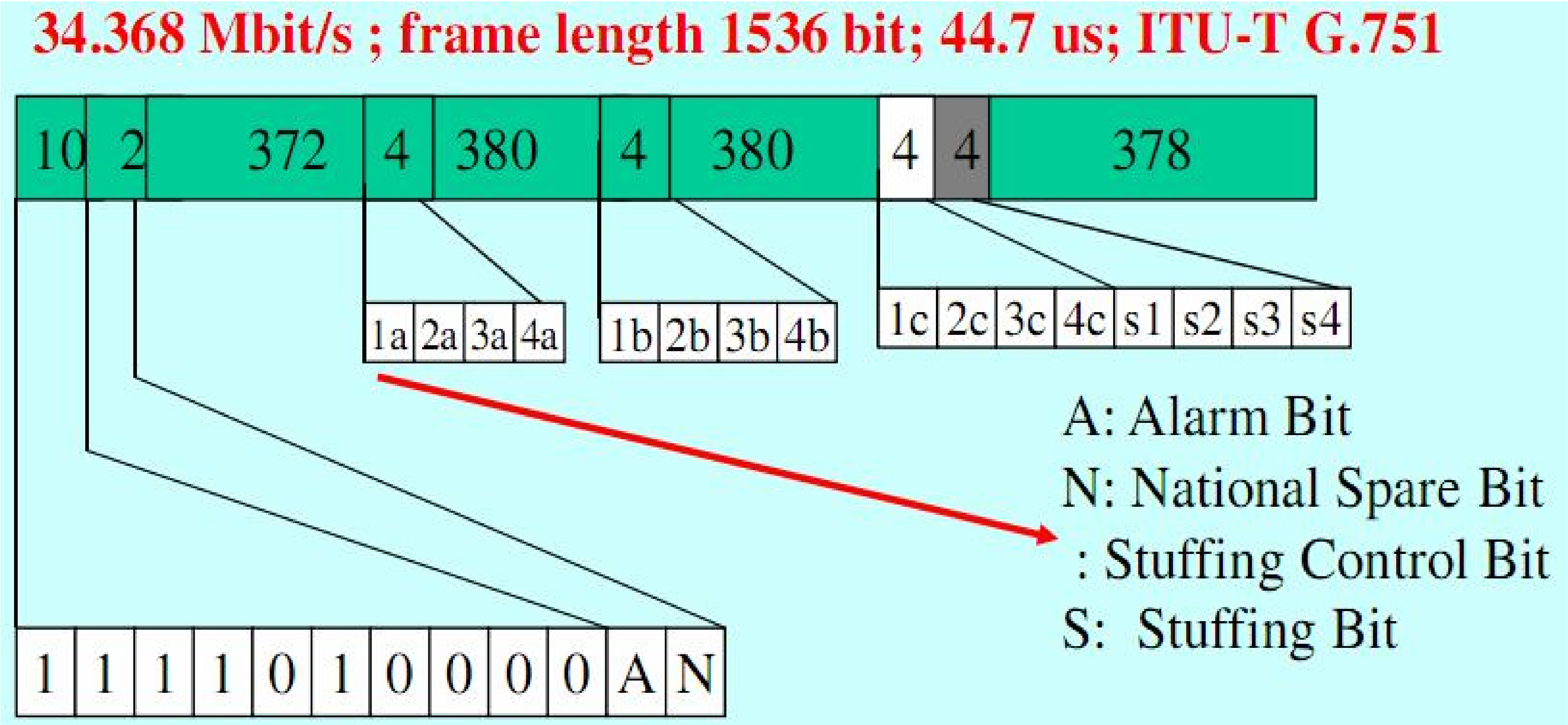
Available bits per tributary per frame = 206 bits

$$\text{Frame duration} = \frac{848 \text{ bits}}{8448 \text{ kbit/s}} = 100.4\ \mu s$$

$$\text{Tributary Rate} = \frac{\text{bits per tributary (per frame)}}{\text{frame duration}} = \frac{206 \text{ bits}}{100.4\ \mu s} = 2051{,}7 \text{ kbit/s}$$

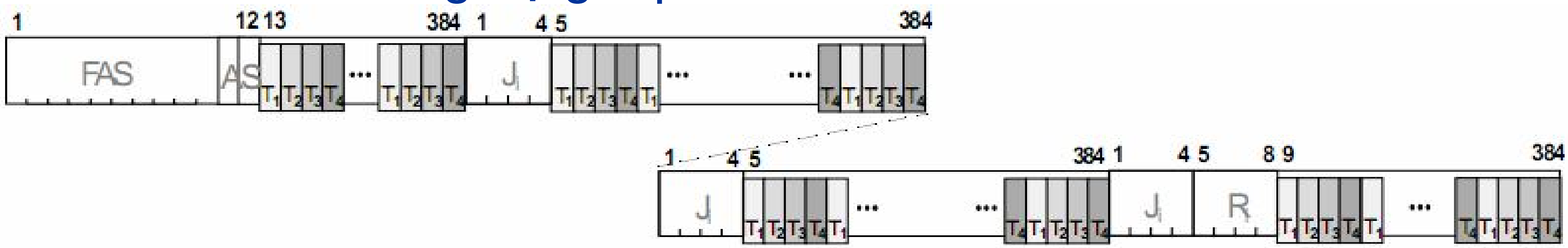
GHÉP KÊNH PDH (10)

❖ Cấu trúc khung bộ ghép 8/34:



GHÉP KÊNH PDH (11)

❖ Cấu trúc khung bộ ghép 8/34



Binary rate = 34368.0 Kbit/s ± 20 ppm

Line Code = HDB3

Nominal amplitude = 1 V

Impedance = 75 Ω

Tolerated input level attenuation = 0 to 12 dB at 17.184 Mhz according to $\sqrt{f}$

Number of tributaries = 4

Justification : Positive

bits J_{ij} = 1 → R_i = fill-in (justification)

bits J_{ij} = 0 → R_i = information (no justification)

(decision is based on majority count of bits J_{ij})

Multiplexing method = bit interleaving

Multiplexing method = bit interleaving

Frame rate = 22375.0 frame/s

FAS bits rate = 223750.0 bit/s

Maximum justification rate per tributary = 22735 bit/s approx.

Nominal justification ratio = 0.436

Frame length = 1536 bits

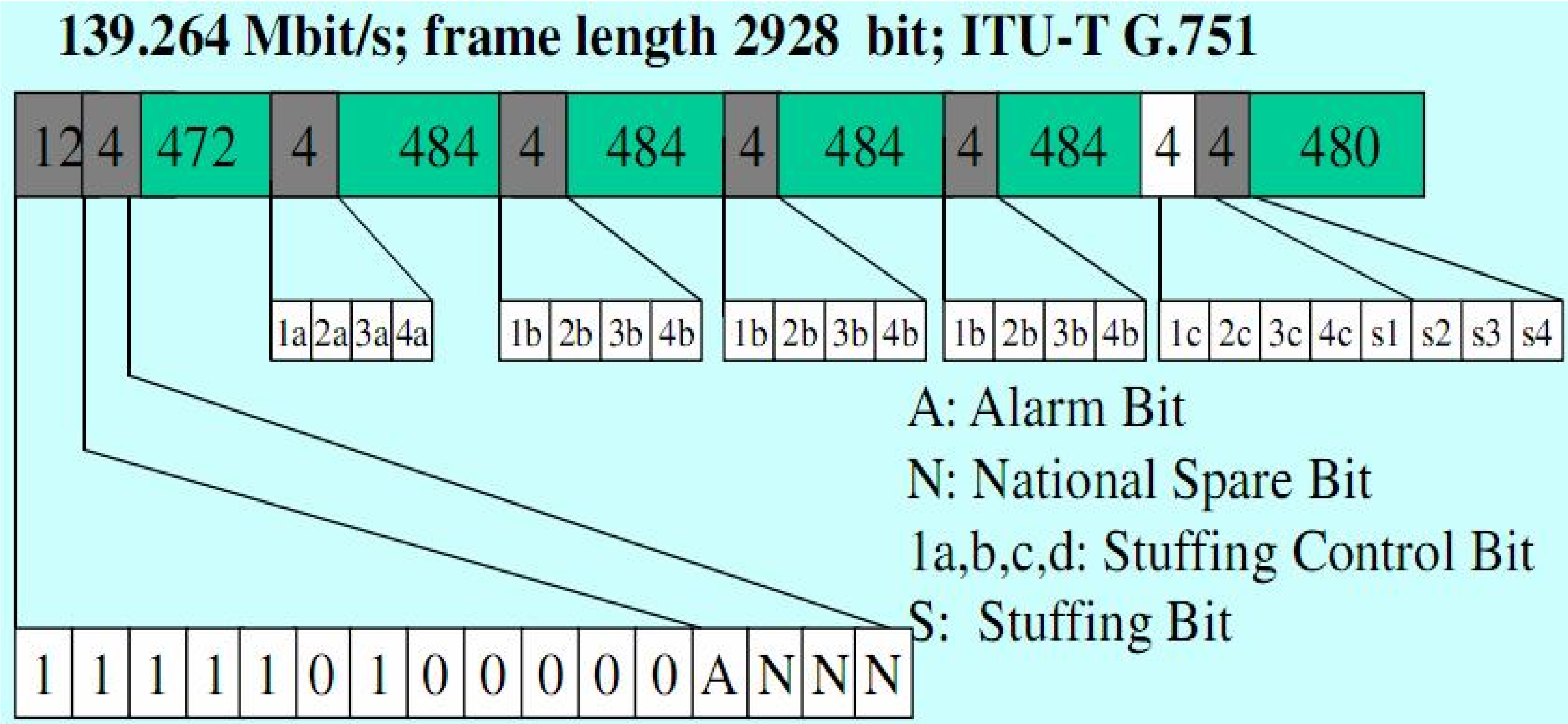
Available bits per tributary per frame = 378 bits

$$\text{Frame duration} = \frac{1536 \text{ bits}}{34368 \text{ kbit/s}} = 44.7\ \mu s$$

$$\text{Tributary Rate} = \frac{\text{bits per tributary (per frame)}}{\text{frame duration}} = \frac{378 \text{ bits}}{44.7\ \mu s} = 8456{,}4 \text{ kbit/s}$$

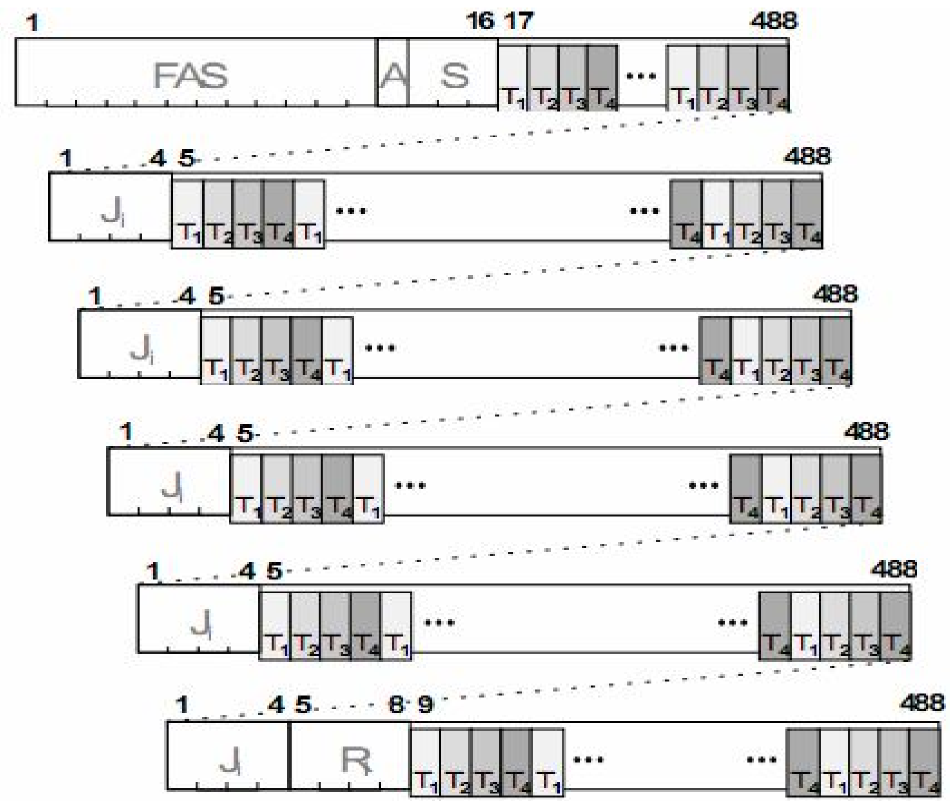
GHÉP KÊNH PDH (12)

❖ Cấu trúc khung bộ ghép 34/140



GHÉP KÊNH PDH (13)

❖ Cấu trúc khung bộ ghép 34/140



Binary rate = 139264.0 Kbit/s ± 15 ppm
Line Code = CMI
V_{pp} **nominal** = 1 V
Impedance = 75 Ω
Tolerated input level attenuation = 0 to 12 dB at 70 Mhz according to $\sqrt{f}$
Number of tributaries = 4
Justification: Positive

bits $J_{ij} = 1 \rightarrow R_i$ = fill-in (justification)
bits $J_{ij} = 0 \rightarrow R_i$ = information (no justification)
(decision is based on majority count of bits J_{ij})

Multiplexing method = bit interleaving
Frame rate = 47562.842 frame/s
FAS bits rate = 570754.098 bit/s
Maximum justification rate per tributary = 47563 bit/s approx.
Nominal justification ratio = 0.419

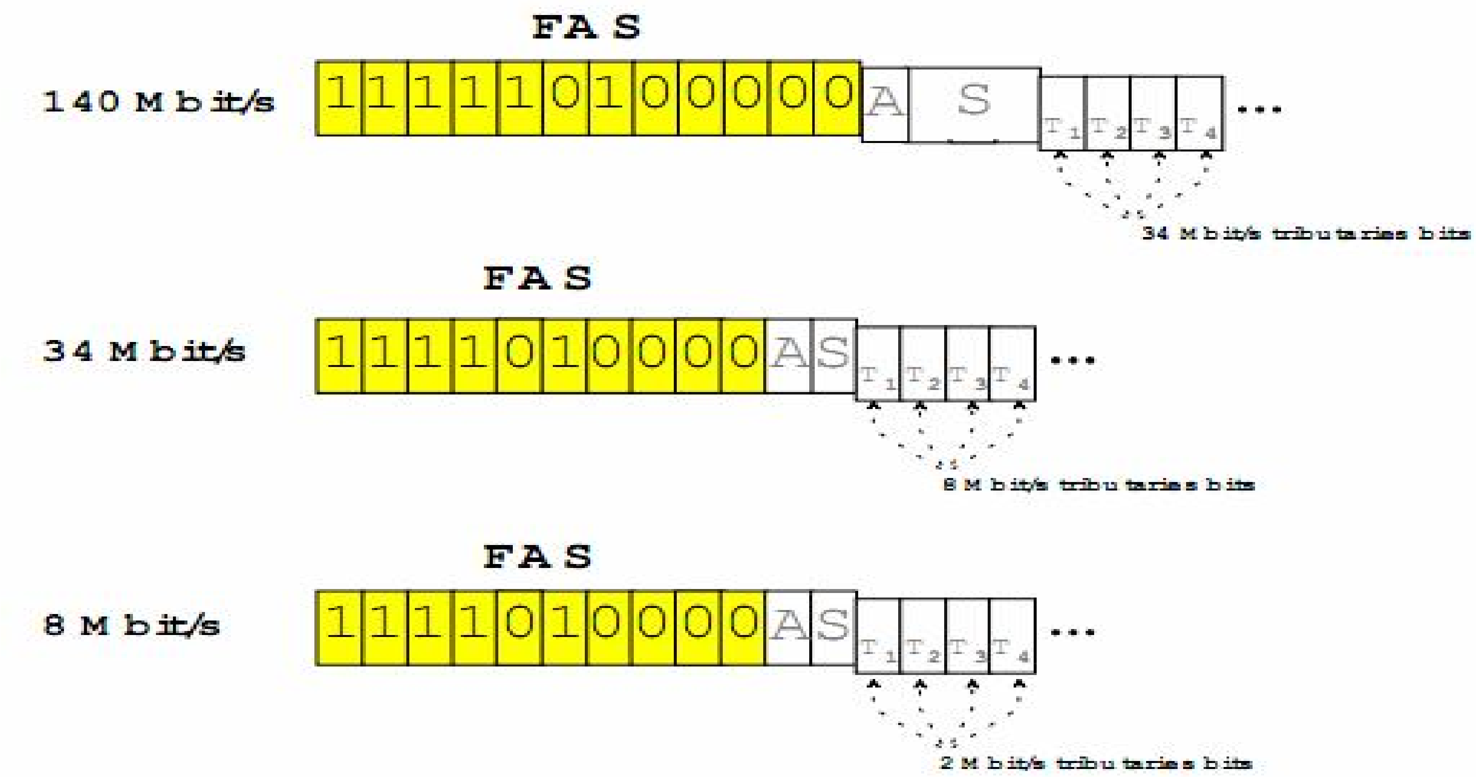
Frame length = 2928 bits
Available bits per tributary per frame = 723 bits

Frame duration = $\frac{2928 \text{ bits}}{139264 \text{ kbit/s}} = 21.02\ \mu s$

Tributary Rate = $\frac{\text{bits per tributary (per frame)}}{\text{frame duration}} = \frac{723 \text{ bits}}{21.02\ \mu s} = 34394{,}2 \text{ kbit/s}$

GHÉP KÊNH PDH (14)

❖ Từ mã đồng bộ khung – FAS (Frame Alignment Signal)



GHÉP KÊNH PDH (15)

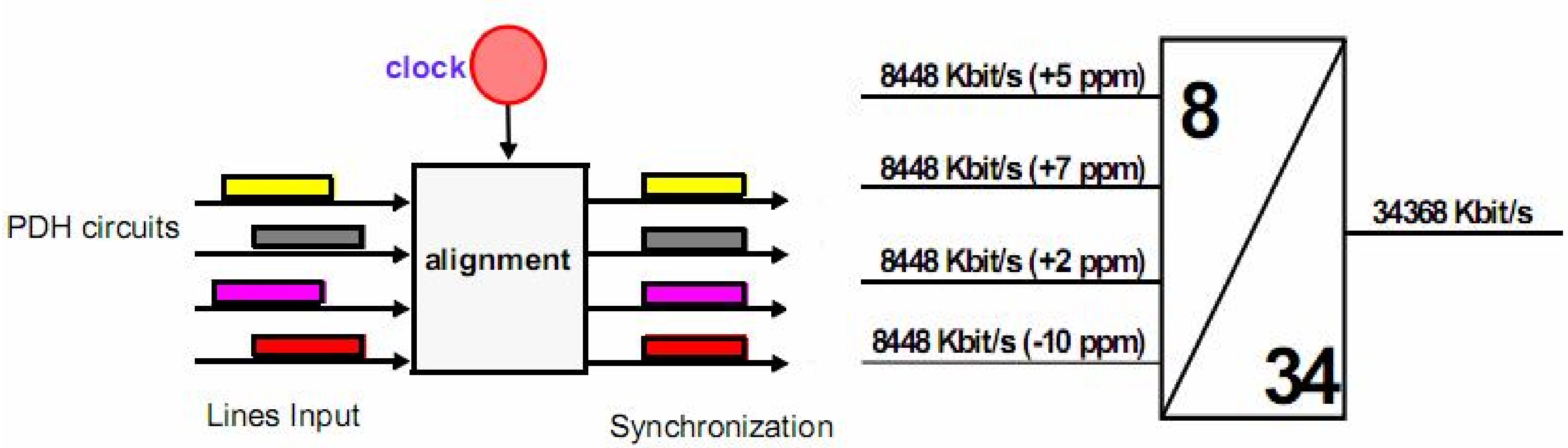
❖ Điều kiện khôi phục đồng bộ khung

Tốc độ bit (Kb/s)	Số khung liên tiếp mất FAS	Số khung liên tiếp khôi phục được FAS	Số đa khung liên tiếp mất MFAS	Số đa khung liên tiếp khôi phục được MFAS
2048	3 hoặc 4	❖ FAS có trong khung chẵn, không có trong khung lẻ ❖ FAS xuất hiện tiếp trong khung sau	2	Phát hiện bit 5 trong TS16 thuộc khung F0 bằng 1
8448	4	Sau 1 FAS đúng		
34368	4	3		
139264	4	3		
564992	4	3		

GHÉP KÊNH PDH (16)

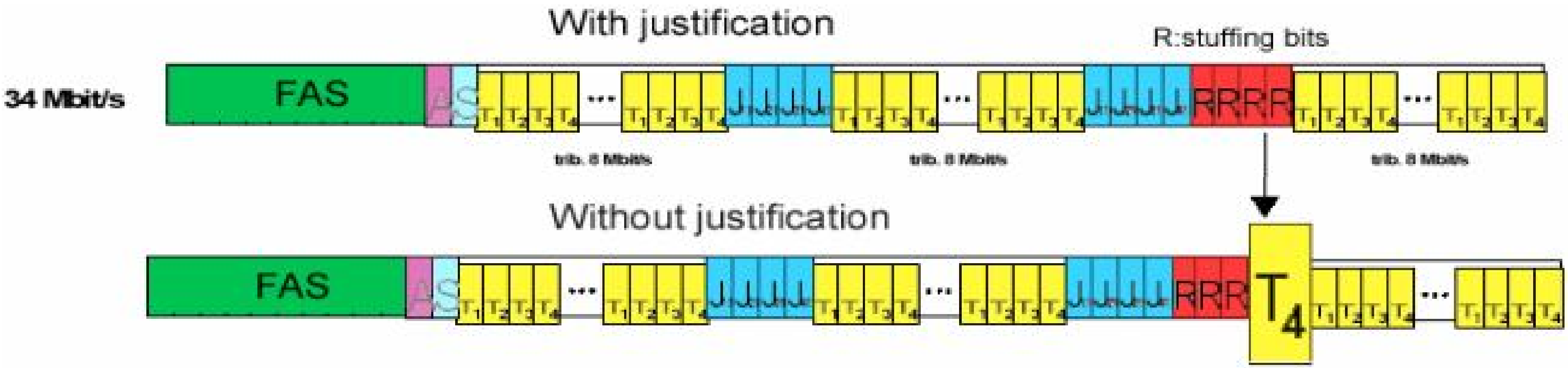
❖ Vấn đề đồng bộ

- Do hệ thống PDH không hoàn toàn đồng bộ nên bộ ghép cho phép điều chỉnh sự đồng bộ về thời gian và tốc độ bit để đạt được tốc độ danh định
- Vấn đề này xảy ra khi ghép các luồng số bậc cao DS2, DS3, DS4, DS5
- Để tránh lỗi, các bộ ghép bậc cao có cơ chế bù lại những sai khác tốc độ → thực hiện chèn



GHÉP KÊNH PDH (17)

❖ Các tiêu chuẩn chèn

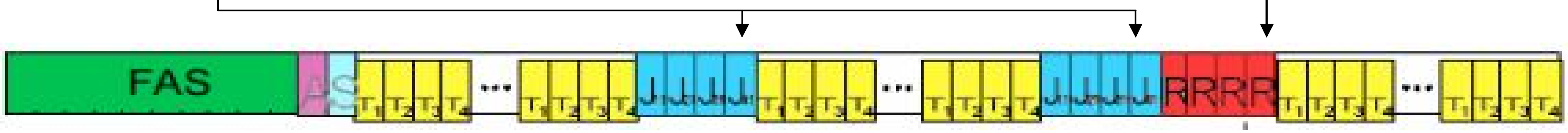


- Nếu như các luồng nhánh được đồng bộ hoàn toàn thì xác suất sử dụng các bit chèn R là 50%
- Khi đó, bộ ghép sẽ thiết lập các bit điều khiển chèn của luồng nhánh tương ứng lên mức 1 (VD: luồng nhánh thứ 2 cần chèn thì các bit J21,J22,J23=1 và R2=1)
- Phía thu, dựa vào tiêu chuẩn chèn để xác định các bit R có mang thông tin hay không → khôi phục dữ liệu

GHÉP KÊNH PDH (18)

❖ Cơ chế điều khiển chèn

J_{41}, J_{42}, J_{43}=1hoặc 0 tùy vào bit chèn thứ 4 mang thông tin luồng nhánh hay không



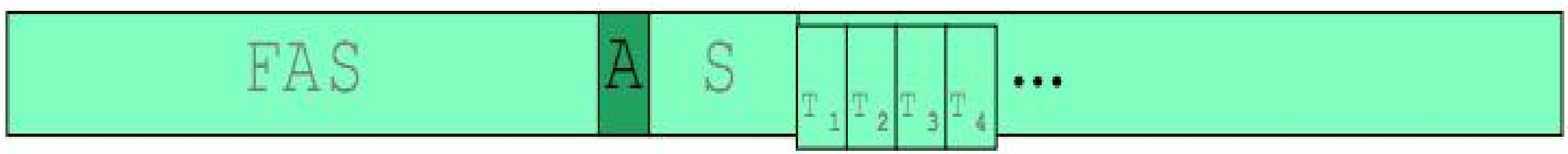
J_{ij} Bit điều khiển thứ j của luồng nhánh thứ i

i=1,2,3,4 (4 luồng nhánh)
j=1,2,3 (8/34 Mb/s)
j=1,2,3,4,5 (140 Mb/s)

- Bit J_{ik}=1 nếu R_i là bit chèn, không mang thông tin
- Bit J_{ik}=0 nếu R_i là bit mang thông tin luồng nhánh
- Nếu các bit J_{ik}=0/1 thì việc quyết định phải dựa vào việc đếm xem số lượng bit J_{ik} xuất hiện với giá trị nào nhiều hơn
- Tốc độ bit chèn lớn nhất: DS2: 9962,264b/s; DS3: 22375,0b/s; DS4: 47562,842b/s

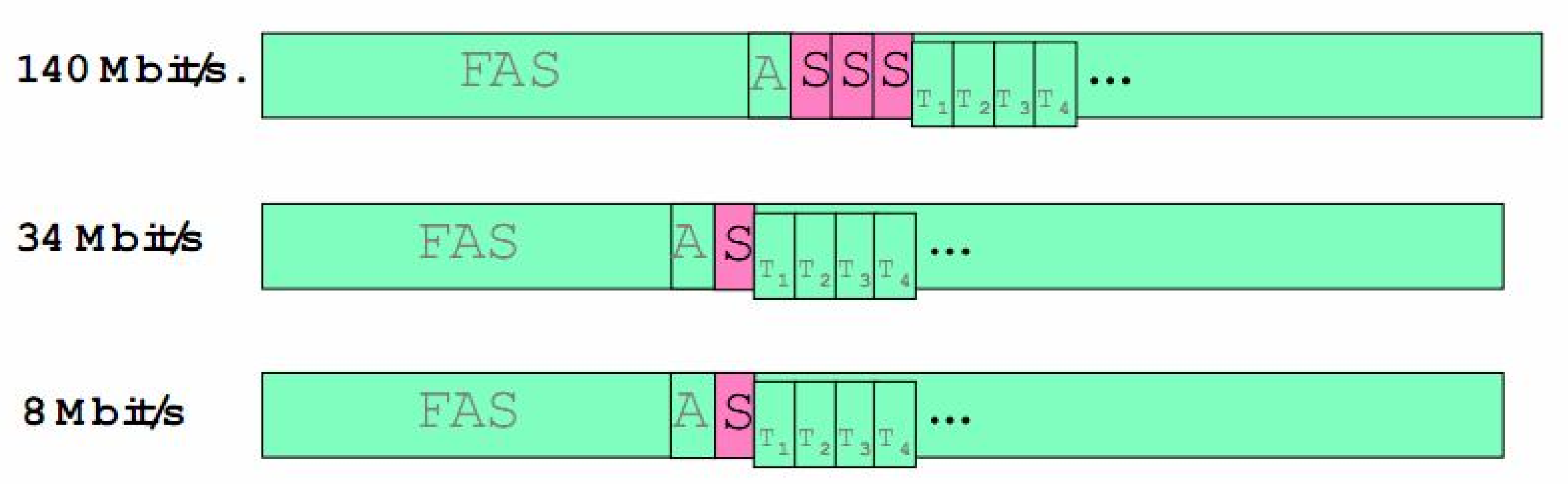
GHÉP KÊNH PDH (19)

- Cảnh báo:
  - Luồng 2Mb/s:
    - Power fault, lost of signal, lost of frame, coder/decoder fault, high BER
  - Luồng 8, 34, 140Mb/s:
    - Lost of signal, lost of frame/ alignment frame signal (where the frame starts?)

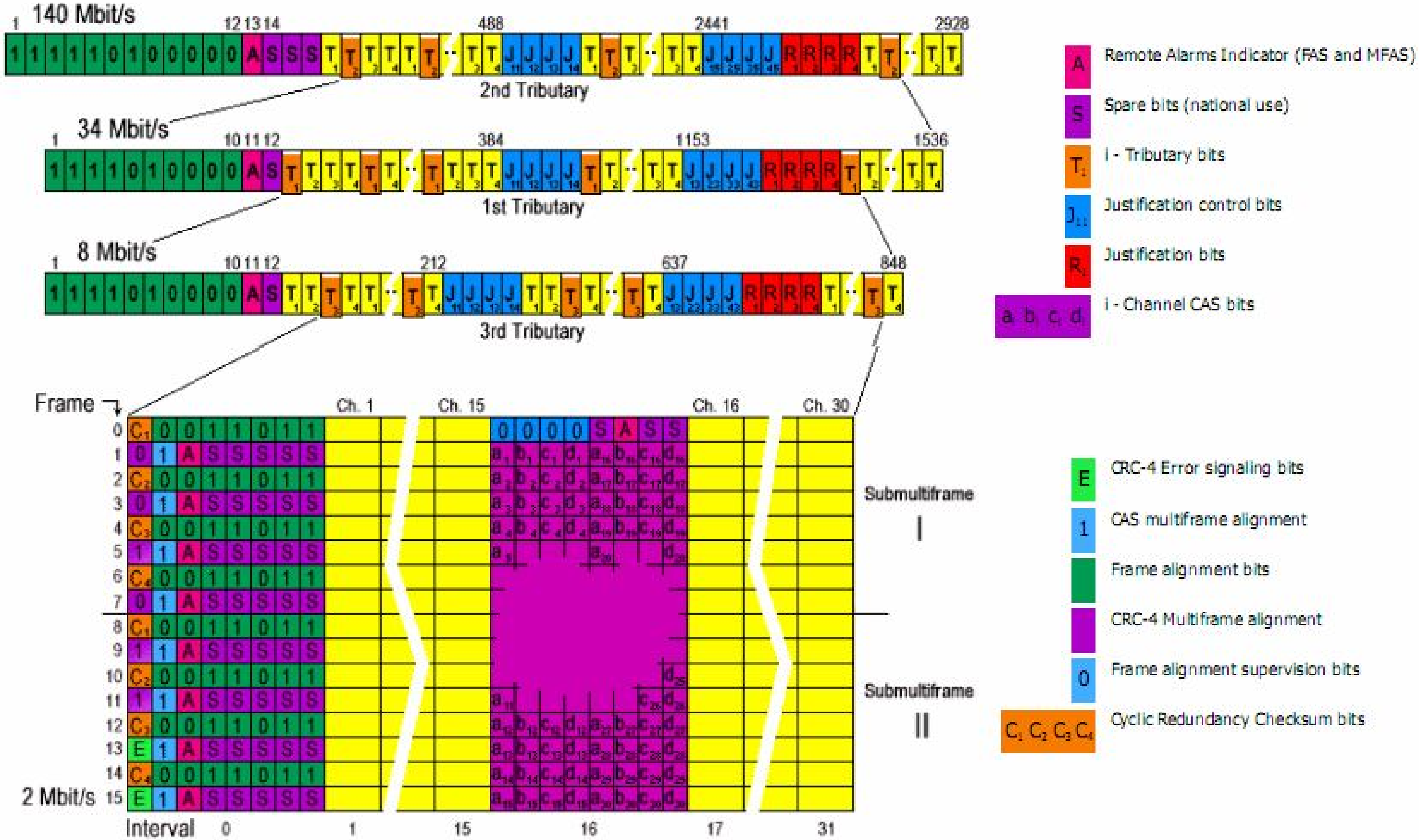


GHÉP KÊNH PDH (20)

❖ Các bit dự trữ:



- Mục đích chung: chỉ thị xem kênh tín hiệu của nhà cung cấp mạng nào
- Mang thông tin quản lí, giám sát, bảo dưỡng


140 Mbit/s
2nd Tributary
34 Mbit/s
1st Tributary
8 Mbit/s
3rd Tributary
Frame
Ch. 1
Ch. 15
Ch. 16
Ch. 30
Submultiframe
I
Submultiframe
II
2 Mbit/s
Interval
Remote Alarms Indicator (FAS and MFAS)
Spare bits (national use)
i - Tributary bits
Justification control bits
Justification bits
i - Channel CAS bits
CRC-4 Error signaling bits
CAS multiframe alignment
Frame alignment bits
CRC-4 Multiframe alignment
Frame alignment supervision bits
Cyclic Redundancy Checksum bits

MÃ ĐƯỜNG TRUYỀN (1)

❖ Mã đường truyền – Line codes

- Khái niệm:
  - Trước khi truyền tín hiệu số qua môi trường truyền dẫn phải chuyển đổi mã tín hiệu thành mã hai cực (mã ba mức) thỏa mãn một số đặc tính nhất định của môi trường truyền dẫn.
  - Mã đường truyền thường là các xung hai cực giả ngẫu nhiên
- Yêu cầu:
  - Không có thành phần một chiều
  - Đặc tính phân bố phổ công suất của tín hiệu gần giống đặc tính hàm truyền đạt của hệ thống
  - Giải tần hẹp
  - Biến đổi có qui luật để đảm bảo máy thu kiểm soát được lỗi
  - Số lượng các bit 0 hay bit 1 liên tiếp không quá lớn

MÃ ĐƯỜNG TRUYỀN (2)

- Mã NRZ và mã RZ
  - Mã NRZ – Mã không trở về 0
    - Đặc điểm: độ rộng xung bằng chu kì xung
    - Qui tắc chuyển đổi:
      - Bit 1 trong mã gốc chuyển thành bit 1 trong mã chuyển đổi
      - Bit 0 trong mã gốc chuyển thành bit 0 trong mã chuyển đổi
  - Mã RZ – Mã trở về 0
    - Đặc điểm: độ rộng xung bằng nửa chu kì xung
    - Qui tắc chuyển đổi:
      - Bit 1 trong mã gốc chuyển thành bit 1 trong mã chuyển đổi
      - Bit 0 trong mã gốc chuyển thành bit 0 trong mã chuyển đổi

MÃ ĐƯỜNG TRUYỀN (3)

❖ Mã AMI – Mã đổi dấu lần lượt

- Qui tắc chuyển đổi:
  - Các bit 1 trong mã gốc chuyển thành các bit 1 và -1 đan xen nhau, có độ rộng xung bằng một nửa chu kì trong mã gốc
  - Các bit 0 giữ nguyên
- Đặc điểm:
  - Không chứa thành phần một chiều
  - Chưa giảm được số lượng bit 0 liên tiếp
  - Chỉ dùng trong hệ thống 2Mb/s

MÃ ĐƯỜNG TRUYỀN (4)

❖ Mã CMI – Mã đổi dấu

- Qui tắc chuyển đổi:
  - Bit 1 trong mã gốc chuyển thành 11 hoặc -1-1 liên tiếp
  - Bit 0 trong mã gốc chuyển thành -11
  - Chu kì bit trong mã CMI giảm một nửa so với mã gốc
- Đặc điểm:
  - Không còn bit 0 liên tiếp
  - Độ rộng phổ tăng
  - Còn được gọi là mã 1B2T (một bit mã hai mức được thay thế bởi 2 bit mã ba mức)
  - Dùng cho hệ thống 140Mb/s và STM1-E

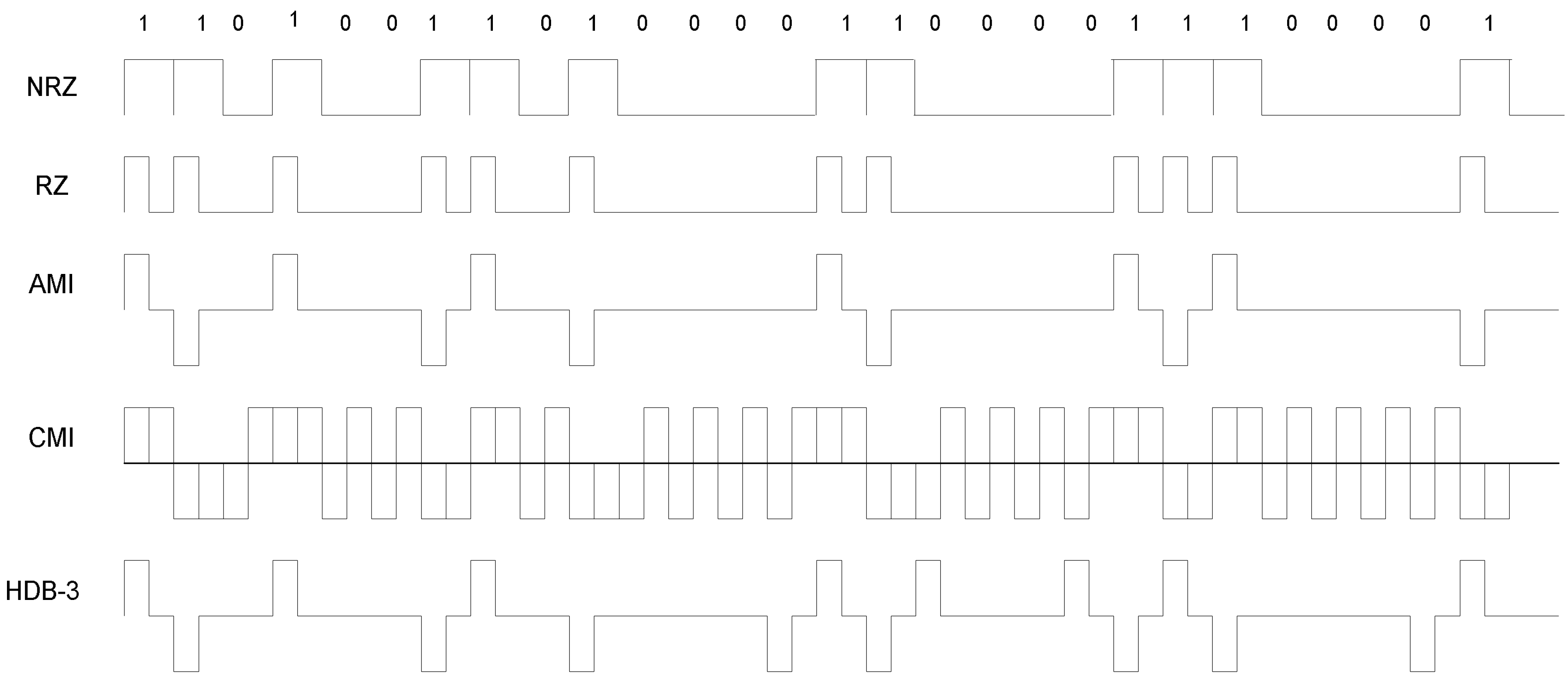
MÃ ĐƯỜNG TRUYỀN (5)

❖ Mã HDB-3

- Qui tắc chuyển đổi:
  - Các bit 1 trong mã gốc chuyển thành các bit 10 hoặc -10 liên tiếp (độ rộng xung giảm đi một nửa)
  - Dãy 3 bit 0 liên tiếp trở xuống trong mã gốc vẫn giữ nguyên
  - Dãy 4 bit 0 liên tiếp thì chia thành nhóm 4 bit 0 và chuyển đổi như sau:
    - **0000→A00V:** bit 1 đứng trước nhóm 4 bit 0 **cùng dấu** với bit V đứng trước gần nhất
    - **0000→000V:** bit 1 đứng trước dãy 4 bit 0 **trái dấu** với bit V đứng trước gần nhất
  - A: bit trái dấu với bit trước nó
  - V: bit cùng dấu với bit trước nó → **vi phạm qui tắc đan dấu**
- Đặc điểm:
  - Giảm số bit 0 liên tiếp → mật độ xung dòng cao
  - Không chứa thành phần một chiều
  - Độ rộng phổ tăng

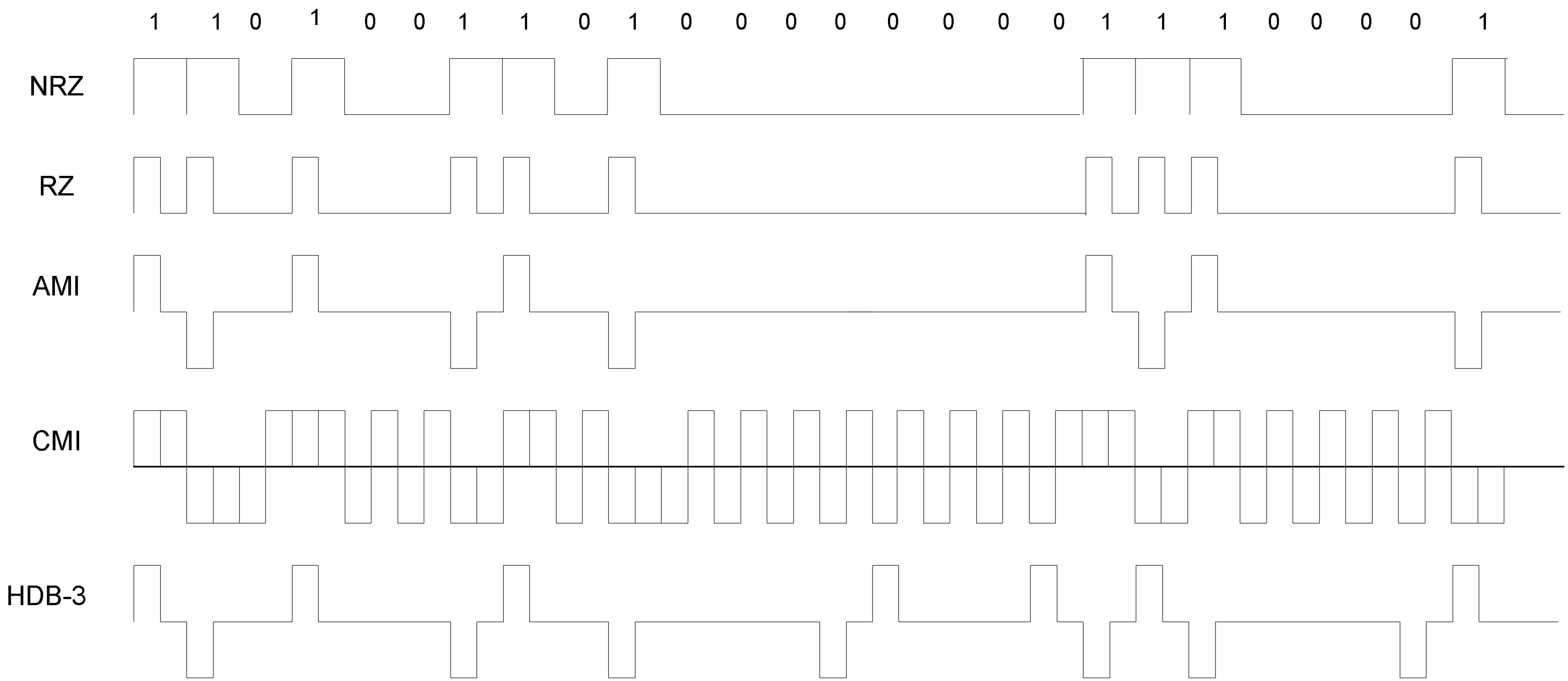
MÃ ĐƯỜNG TRUYỀN (6)

❖ Ví dụ 1



MÃ ĐƯỜNG TRUYỀN (7)

❖ Ví dụ 2



GHÉP KÊNH SDH (1)

- SDH – Synchronous Digital Hierarchy
- Khái niệm:
  - Mạng viễn thông dựa trên công nghệ SDH được gọi là mạng SDH đồng bộ
  - Mỗi phần tử trong mạng đều sử dụng chung một tín hiệu đồng hồ được cung cấp bởi một nguồn đồng hồ chuẩn quốc gia
  - Tín hiệu đồng hồ này được truyền trên một mạng riêng độc lập với mạng truyền các kênh tín hiệu

GHÉP KÊNH SDH (2)

❖ Một số đặc điểm của công nghệ ghép kênh SDH

- Thực hiện chức năng ghép các kênh có tốc độ thấp thành luồng số tốc độ cao
- Cho phép truyền tải tín hiệu PDH và tế bào ATM trên một giao diện đồng bộ, thống nhất
- Cho phép mang nhiều thông tin quản lí, bảo dưỡng
- Dễ dàng tách/ ghép các tín hiệu luồng nhánh tốc độ thấp từ các luồng tổng tốc độ cao và ngược lại
- Cung cấp nhiều cấu hình mạng phù hợp với các yêu cầu ứng dụng cụ thể khác nhau
- Cho phép nhiều nhà cung cấp thiết bị và kết nối liên mạng dựa trên những khuyến nghị do ITU-T ban hành

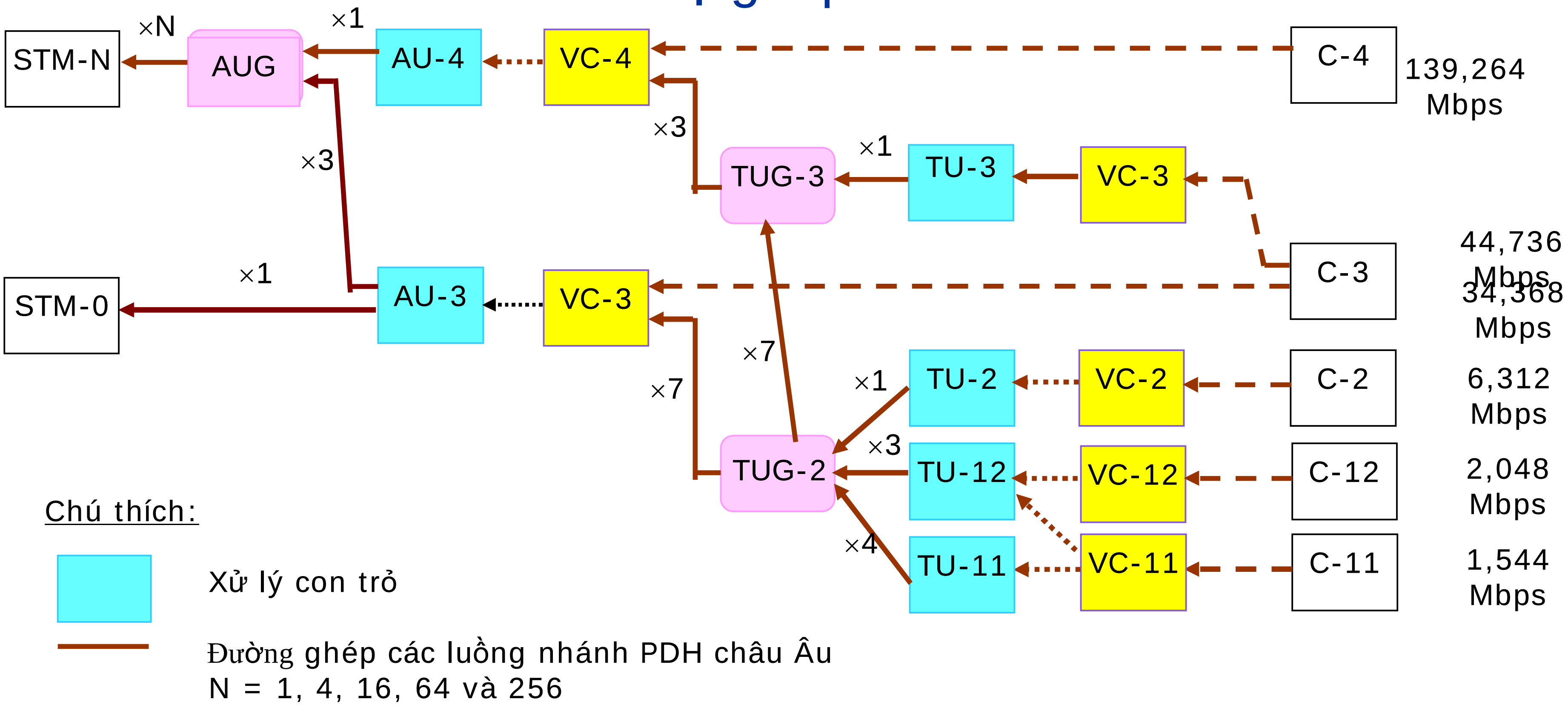
GHÉP KÊNH PDH (3)

- Tốc độ bit của SDH
  - Tốc độ bit phân cấp SDH có 6 mức; được ký hiệu là STM – Synchronous Transmit Module
  - Mức 0 ít được sử dụng
  - Các luồng nhánh PDH được ghép vào STM gồm:
    - CEPT: 2Mb/s, 8Mb/s, 34Mb/s và 140Mb/s
    - Bắc Mĩ: 1,5Mb/s, 6Mb/s và 45Mb/s

STM-0 OC-1	51,840 Mbps
STM-1 OC-3	155,520 Mbps
STM- 4 OC-12	622,08 Mbps
STM- 16 OC-48	2488,32 Mbps
STM- 64 OC-192	9953,28 Mbps
STM- 256 OC-768	39813,120 Mbps

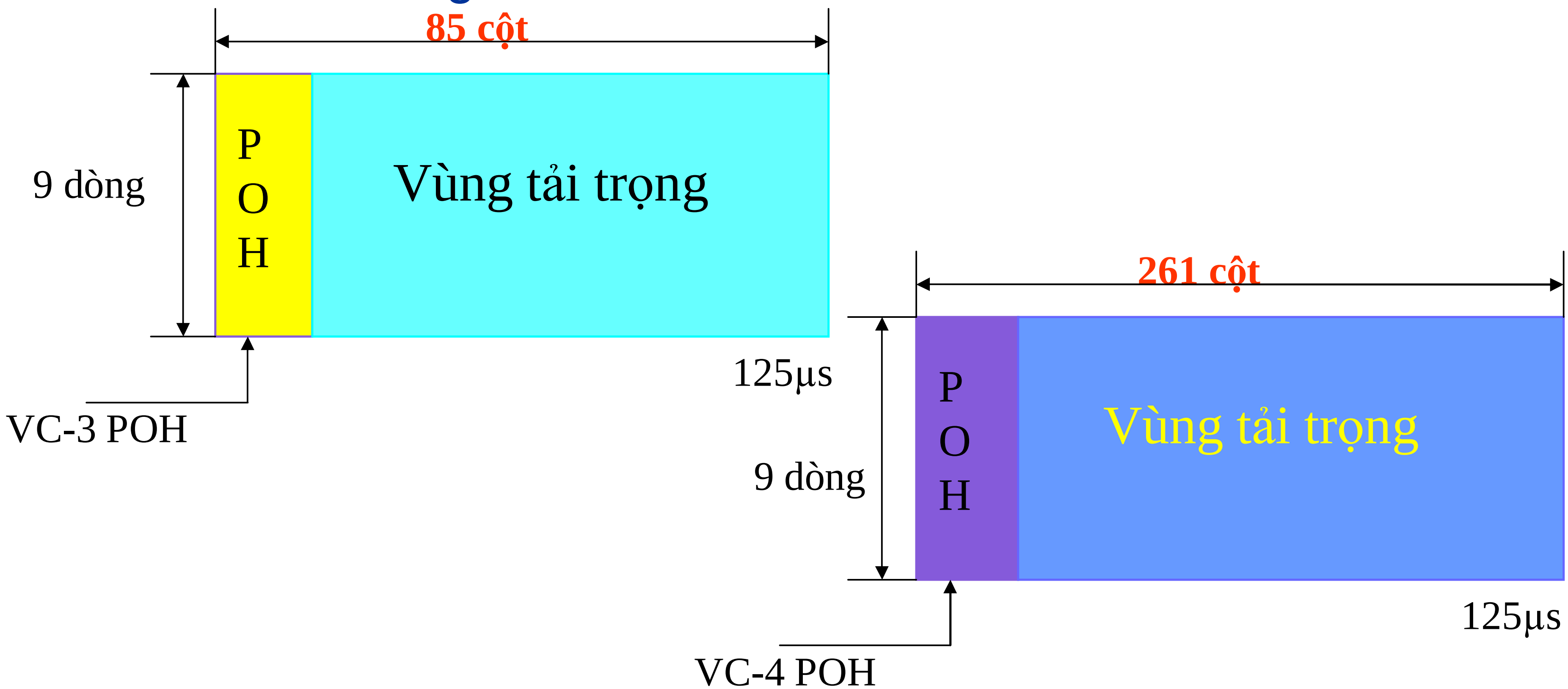
GHÉP KÊNH SDH (4)

❖ Sơ đồ khối tiêu chuẩn bộ ghép SDH



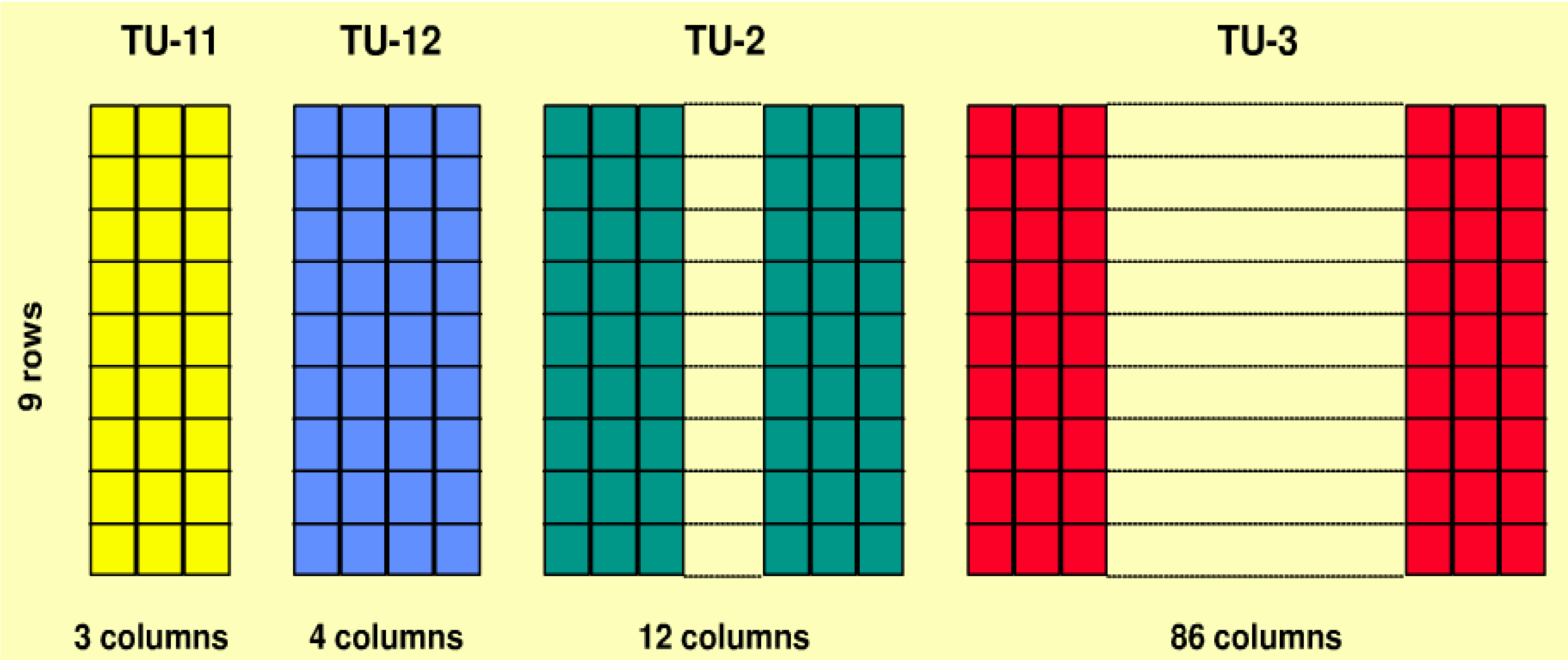
GHÉP KÊNH SDH (5)

❖ Cấu trúc khung VC-3 và VC-4



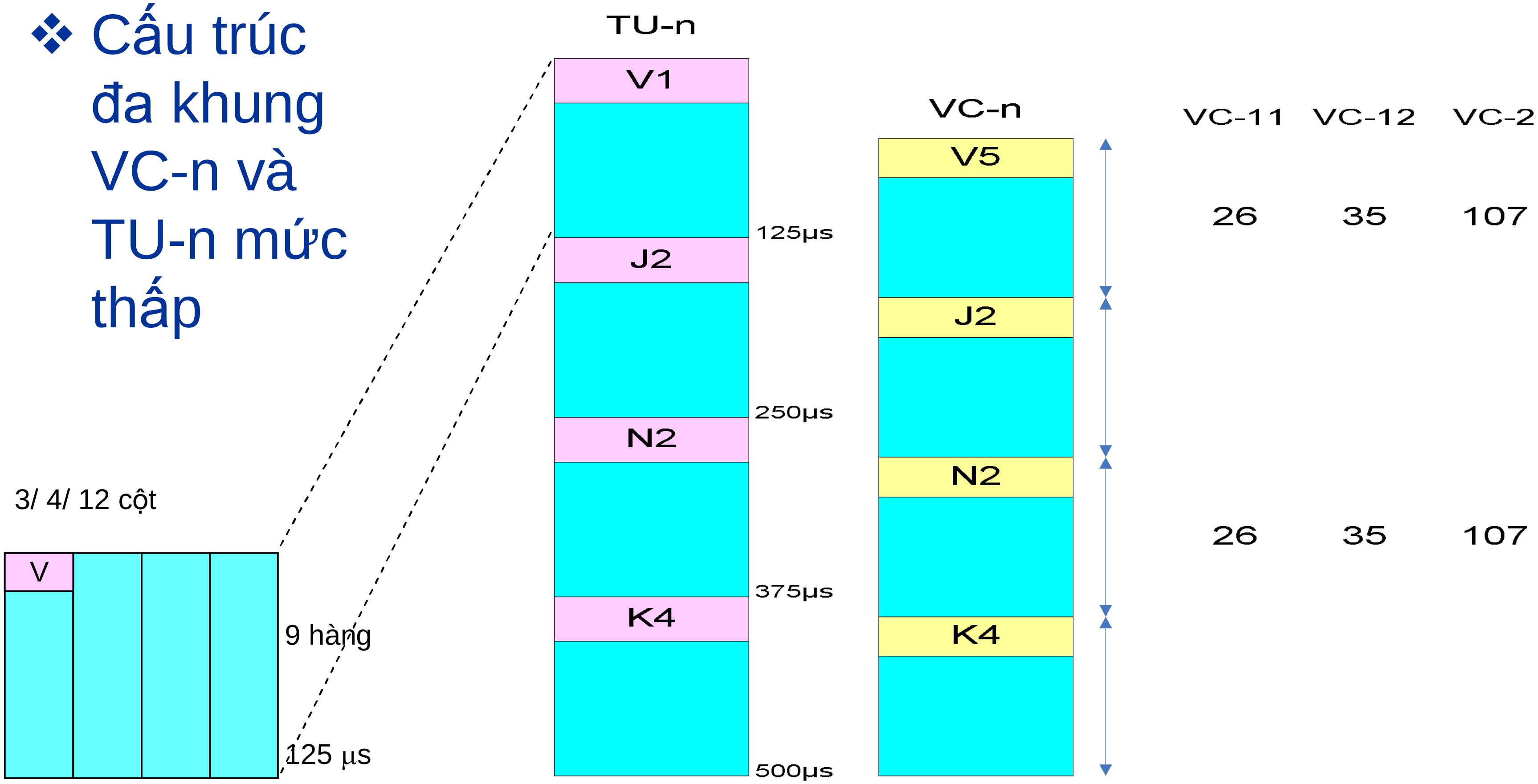
GHÉP KÊNH SDH (6)

❖ Cấu trúc khung TU-n



GHÉP KÊNH SDH (7)

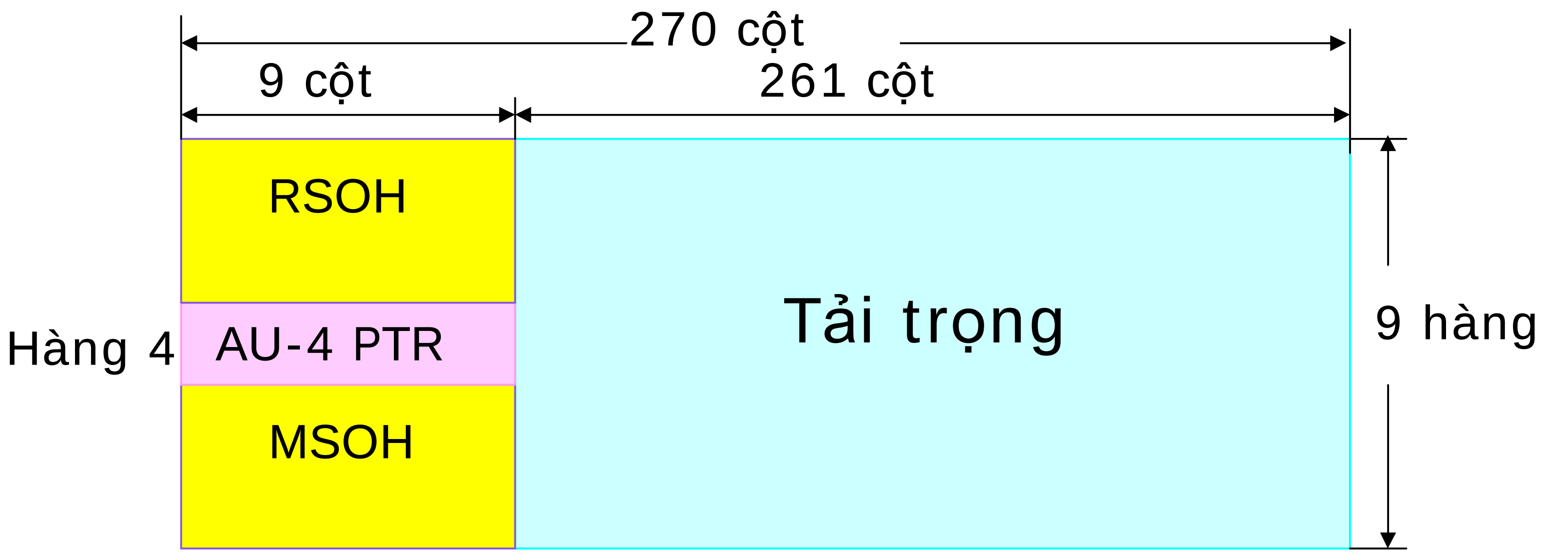
❖ Cấu trúc đa khung VC-n và TU-n mức thấp



GHÉP KÊNH SDH (8)

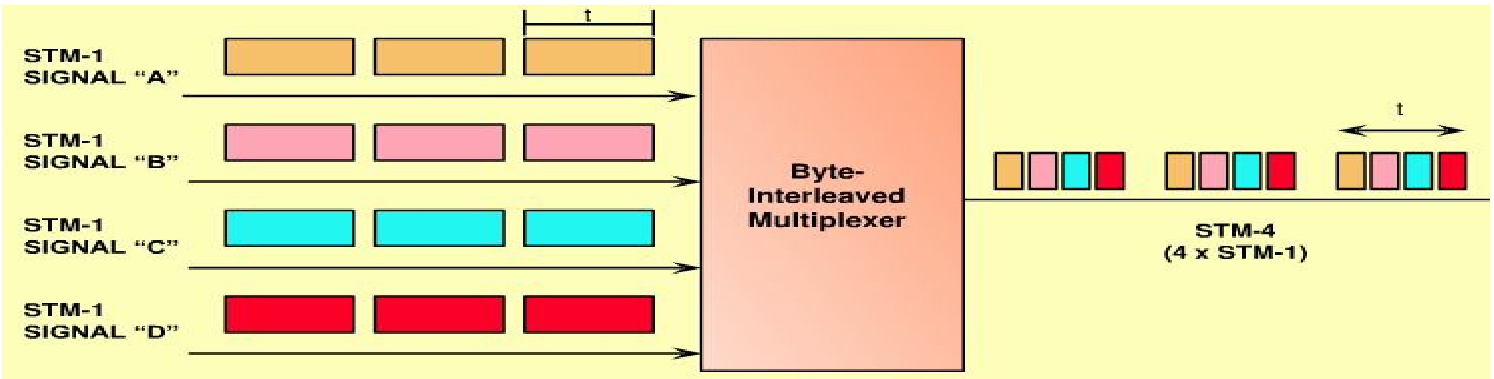
❖ Cấu trúc khung STM-1

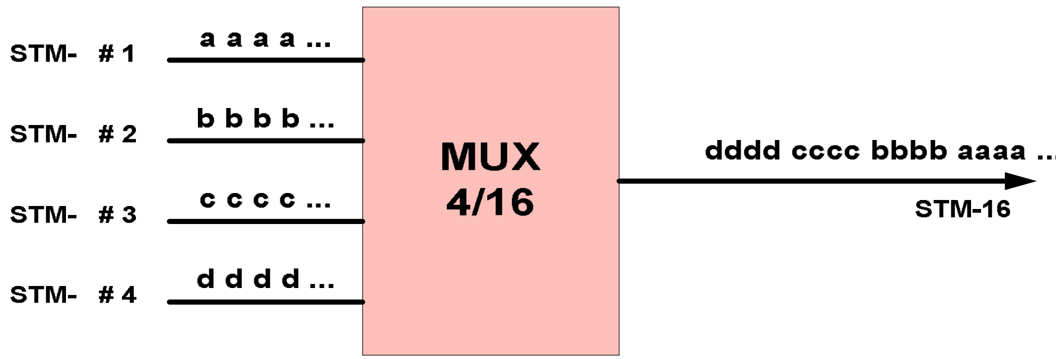
- Thời hạn khung là 125µs
- Số byte trong khung = 9 x 270 = 2430byte
- $R_{STM\text{-}1}$=2430byte/khung x 8bit/byte x 8.10^{-3}s/khung = 155,52 Mbps



GHÉP KÊNH SDH (9)

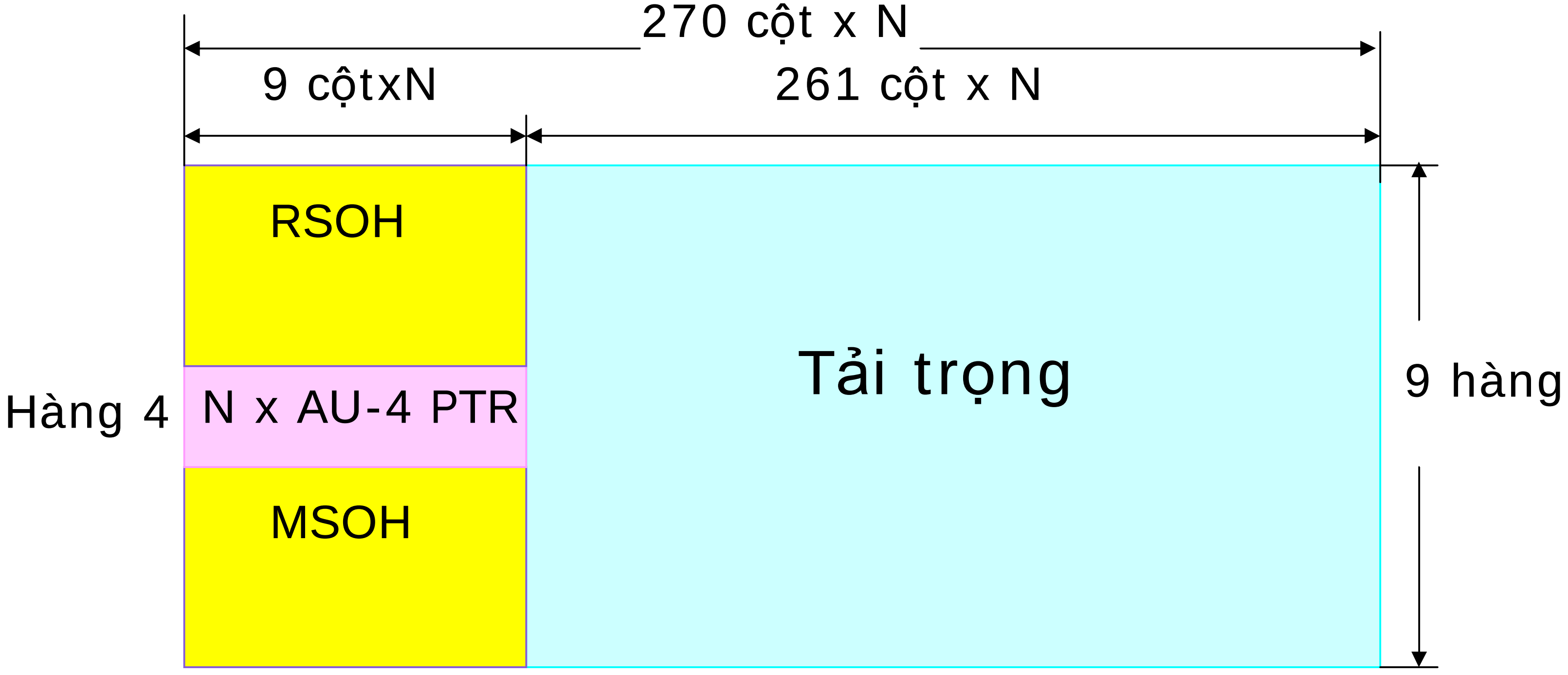
❖ Nguyên lý ghép kênh SDH là ghép xen byte





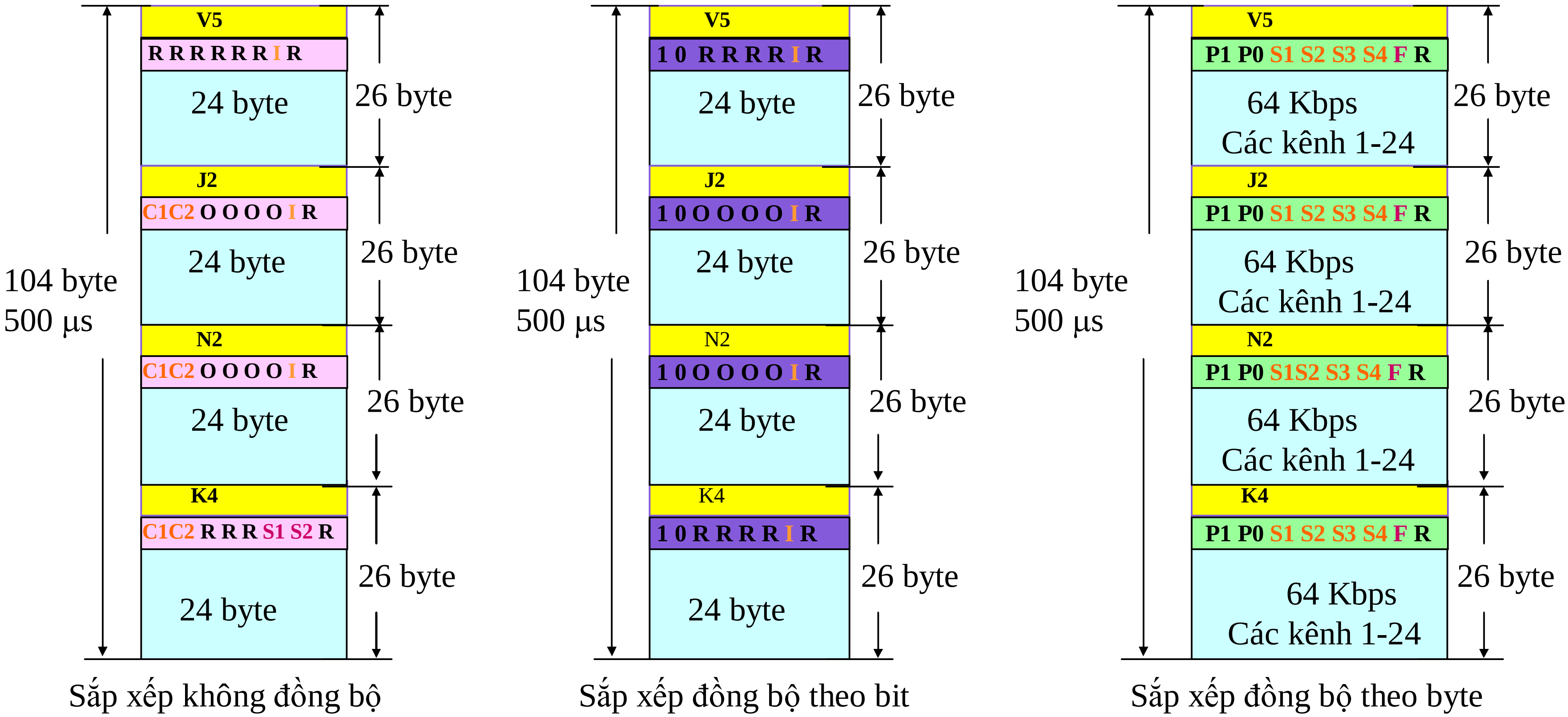
GHÉP KÊNH SDH (10)

- Cấu trúc khung STM-N
  - Thời hạn khung là 125μs



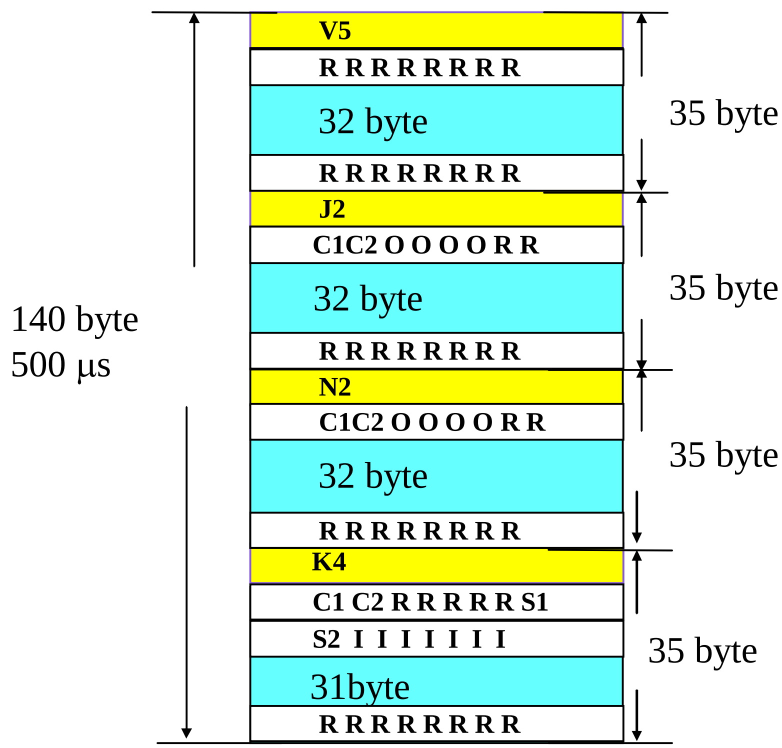
GHÉP KÊNH SDH (11)

❖ Sắp xếp các luồng 1544 Kbps vào VC-11

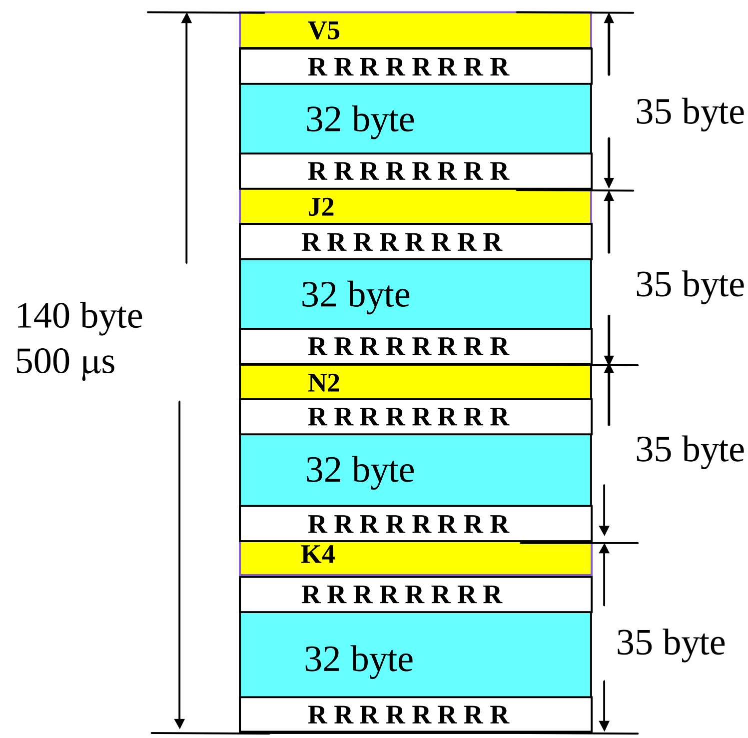


GHÉP KÊNH SDH (12)

❖ Sắp xếp luồng 2048 Kbps vào VC-12



Sắp xếp không đồng bộ

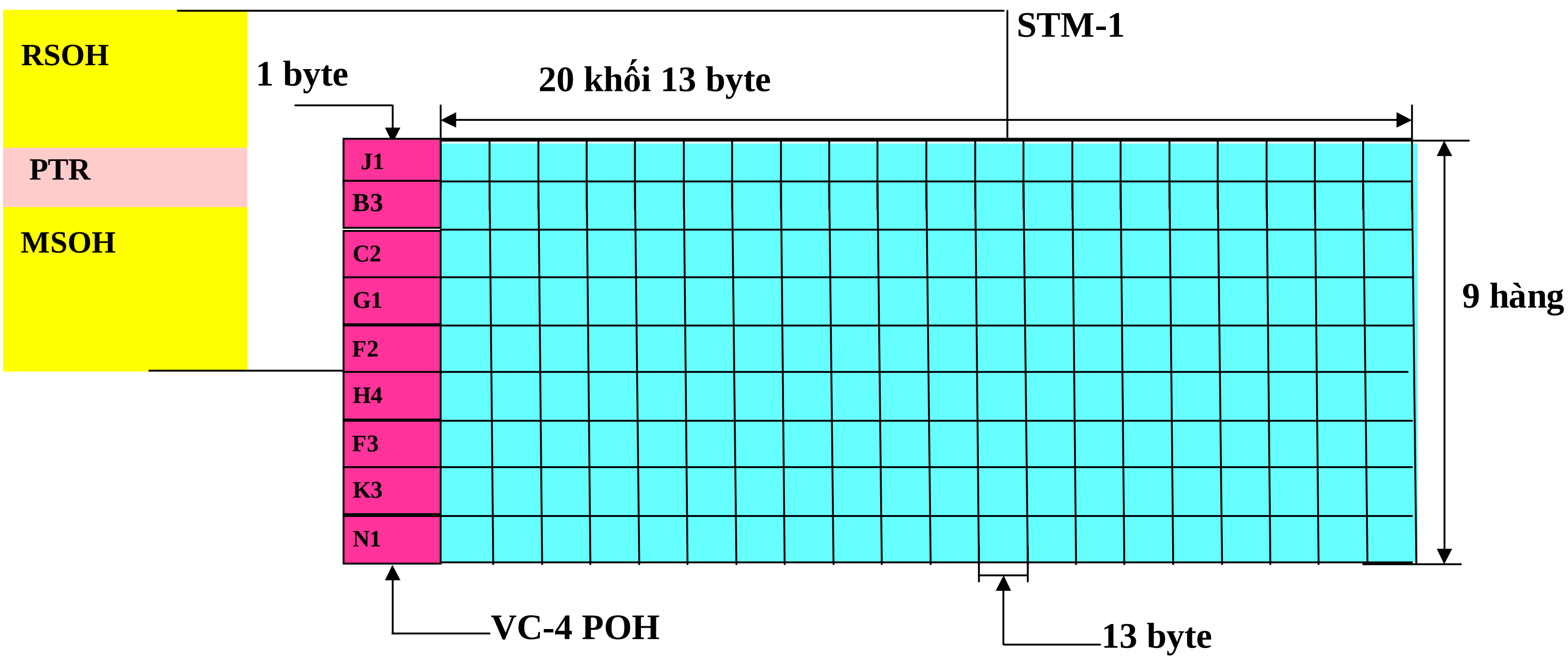


Sắp xếp đồng bộ theo byte

GHÉP KÊNH SDH (13)

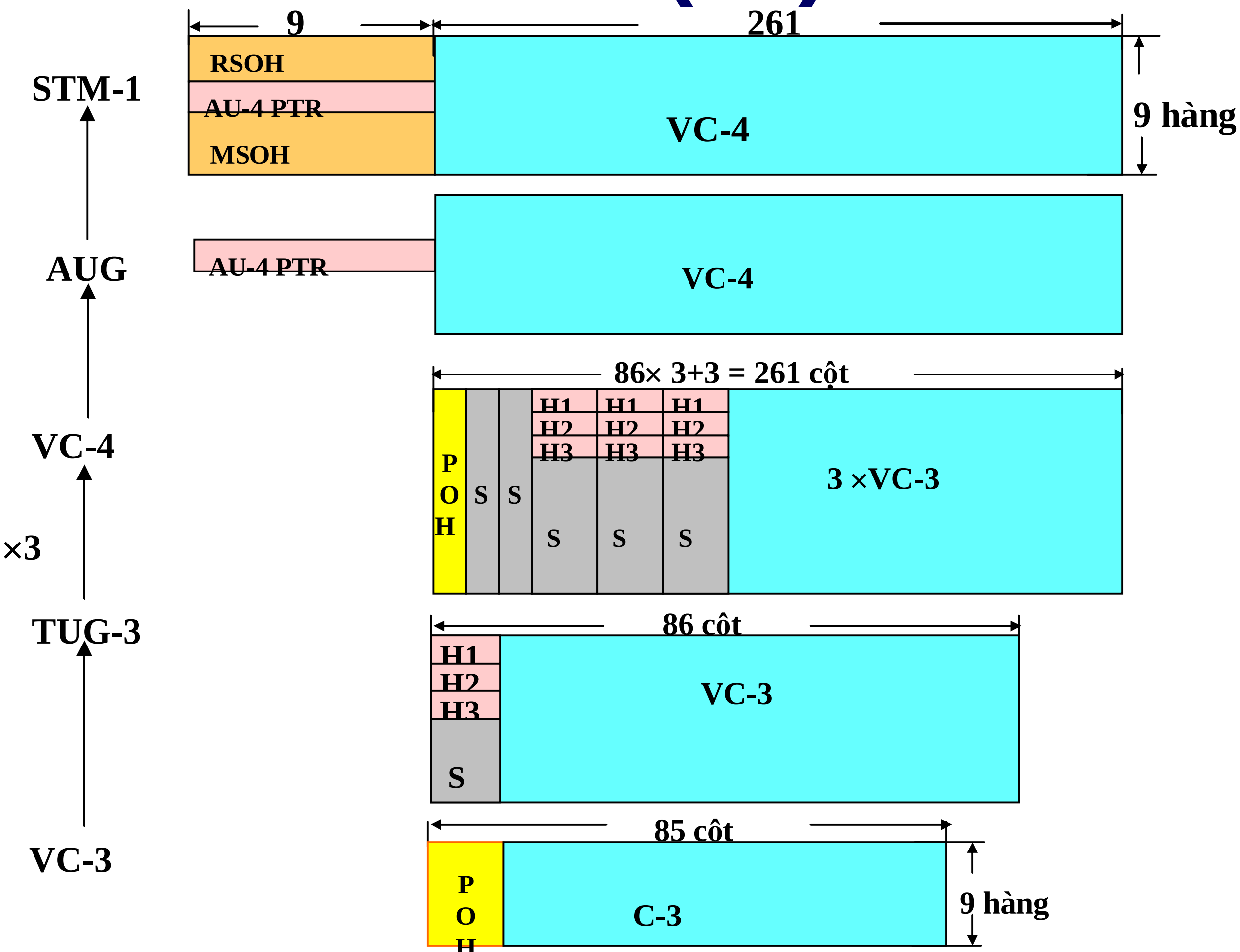
❖ Ghép VC-4 vào STM-1

- C-4(+POH) →VC-4(+PTR) →AU-4 →AUG(+SOH) →STM-1



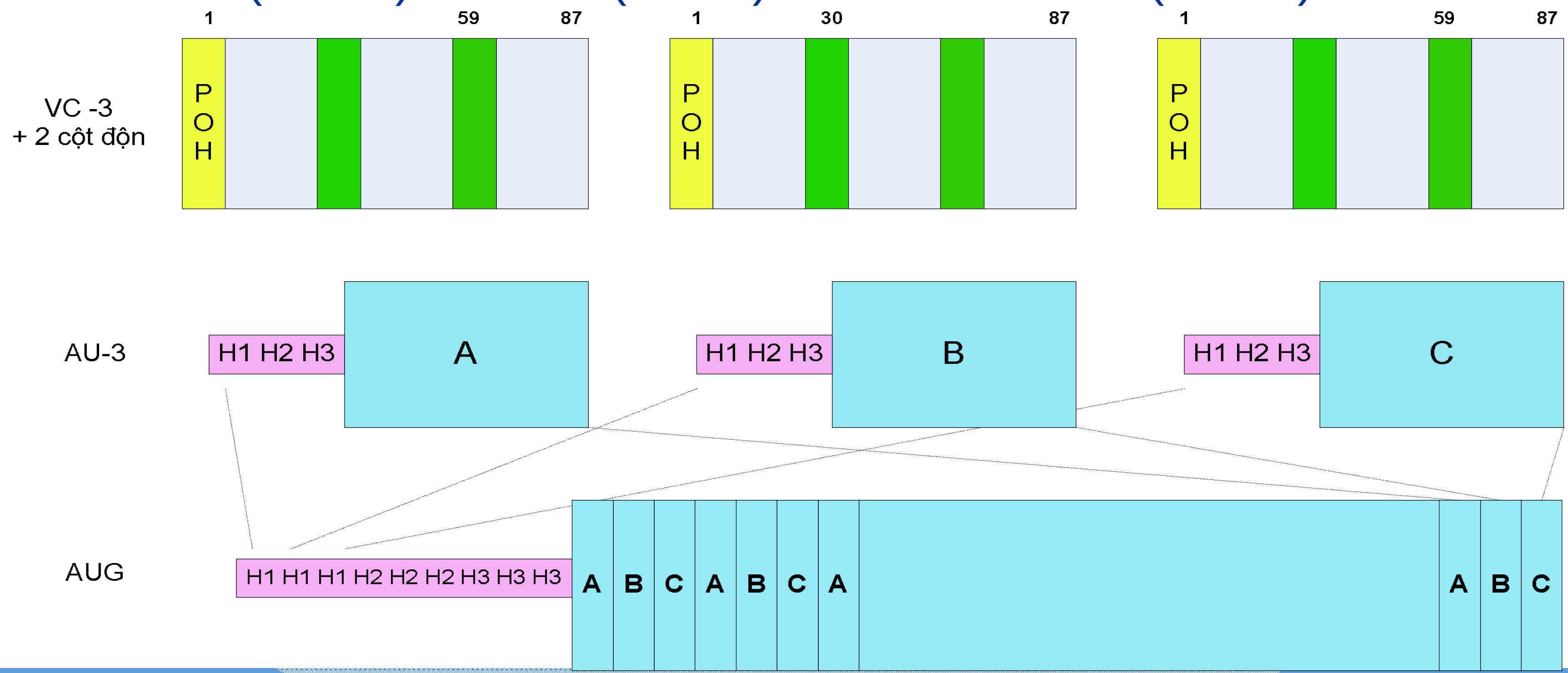
GHÉP KÊNH SDH (14)

- ❖ Ghép 3 VC-3 vào STM-1 (AU-4)
  - C-3 (+POH)
  - → VC-3 (+PTR)
  - → TUG-3
  - → VC-4 (+PTR)
  - → AU-4
  - → AUG (+SOH)
  - → STM-1



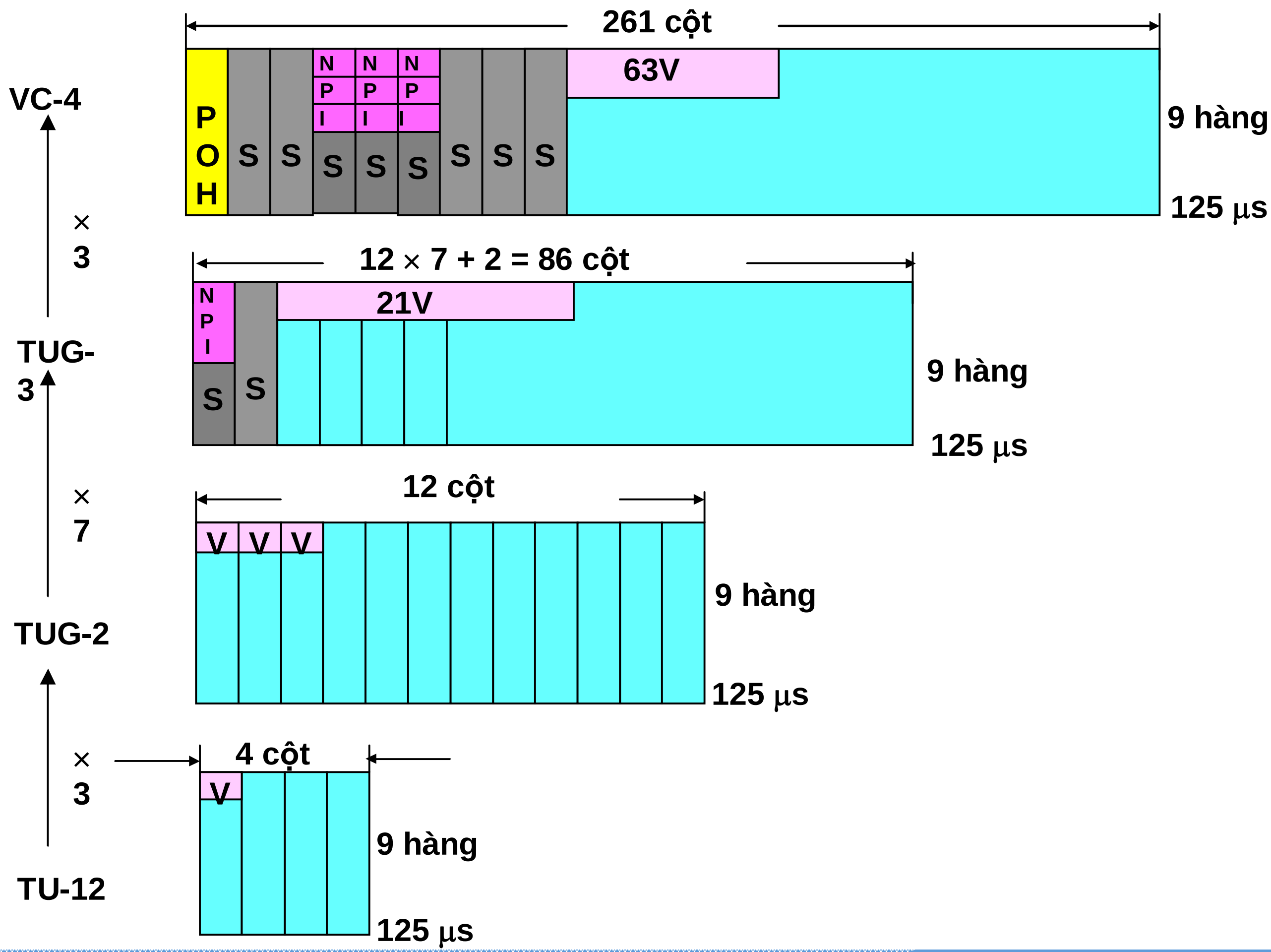
GHÉP KÊNH SDH (15)

❖ Ghép 3 VC-3 vào STM-1 (AU-3)
- C-3 (+POH) → VC-3 (+PTR) → AU-3 → AUG (+SOH) → STM-1



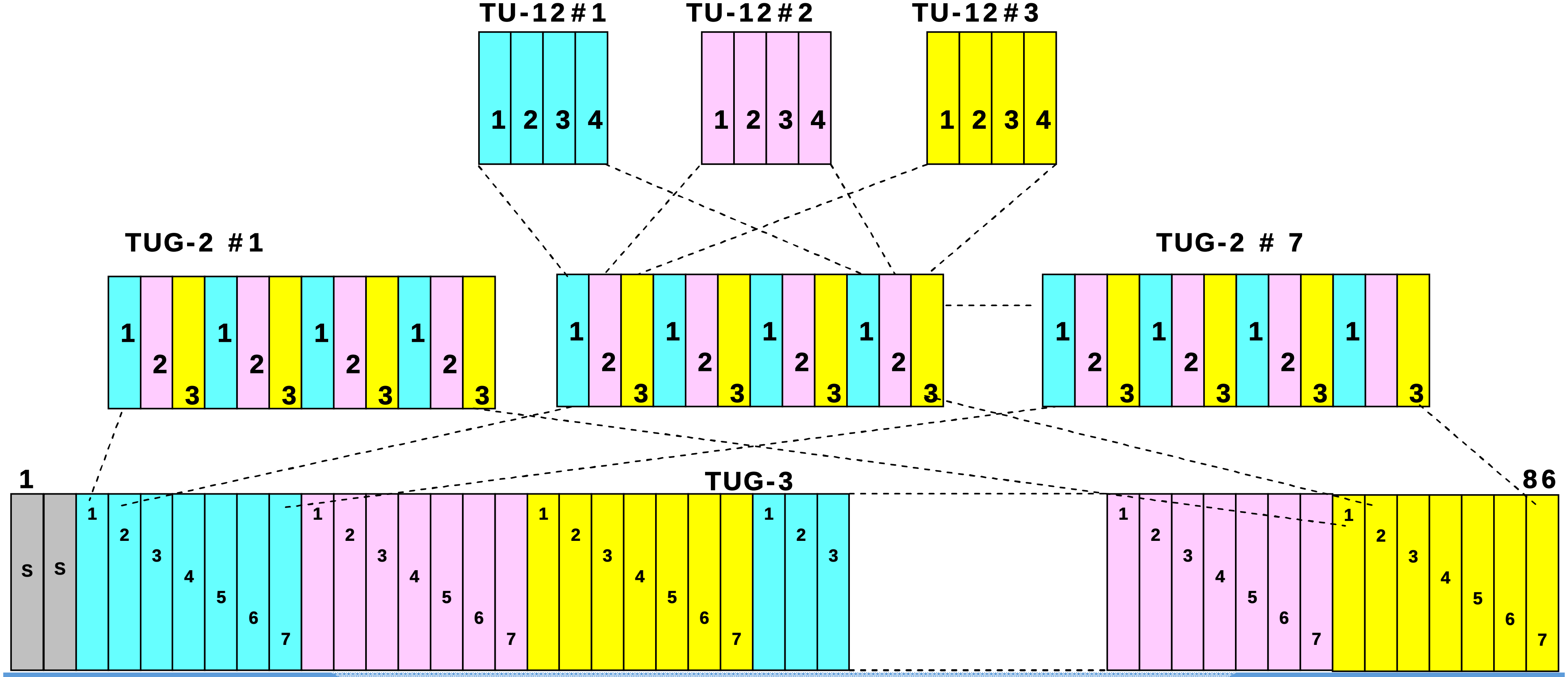
GHÉP KÊNH SDH (16)

- Ghép 63 VC-12 vào STM-1
  - C-12 (+POH)
  - → VC-12 (+PTR)
  - → TU-12
  - → TUG-2
  - → TUG-3
  - → VC-4 (+PTR)
  - → AU-4 → AUG (+SOH) → STM-1



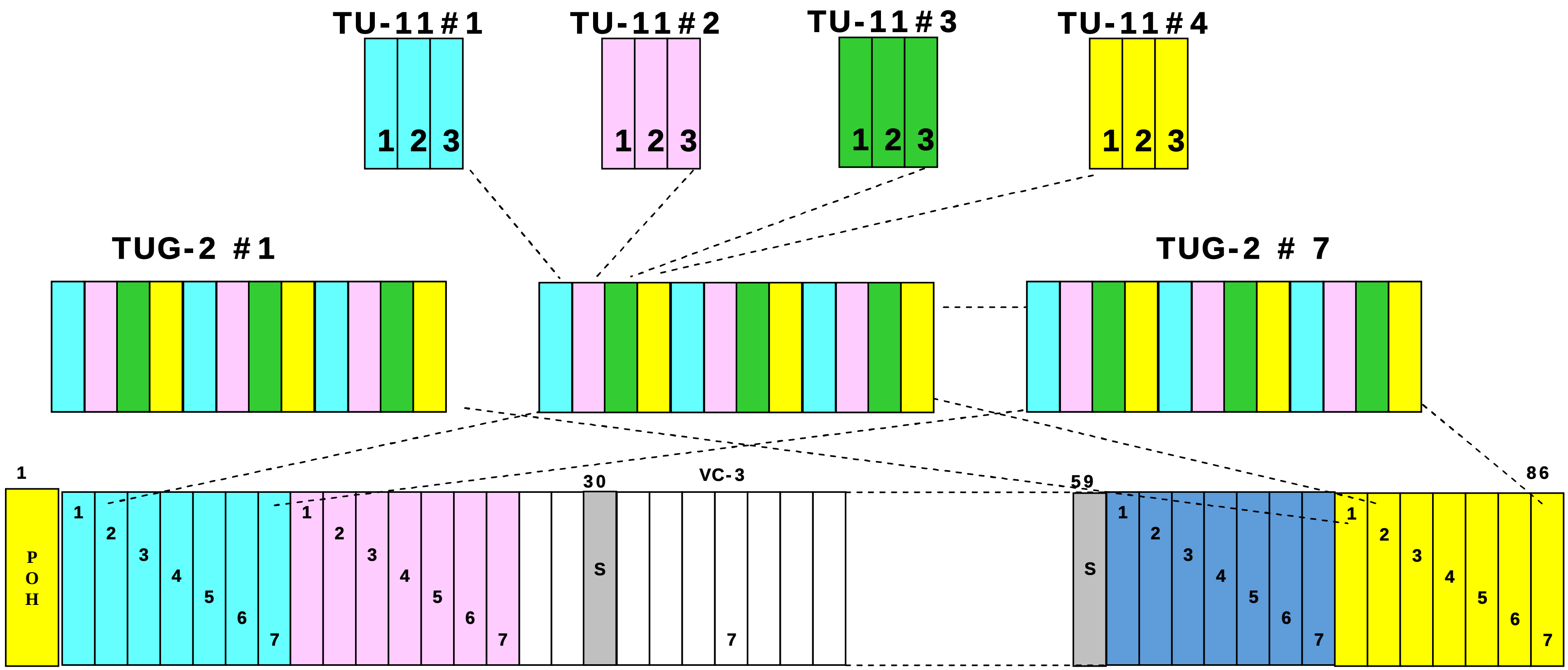
GHÉP KÊNH SDH (17)

❖ Ghép 3TU-12 vào TUG-2, ghép 7TUG-2 vào TUG-3



GHÉP KÊNH SDH (18)

❖ Ghép 4TU-11 vào TUG-2, ghép 7TUG-2 vào VC-3



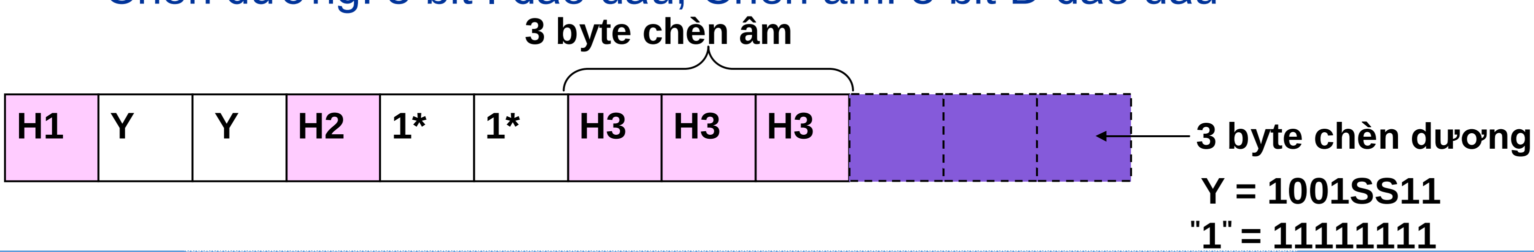
GHÉP KÊNH SDH (19)

- Vị trí và chức năng của con trỏ
  - Vị trí:
    - AU-4 PTR, 3 AU-3 PTR: 9byte, cột 1 ÷ 9, hàng 4 của khung AUG
    - 3 TU-3 PTR: 9byte, hàng 1÷3, cột 4÷6 của VC-4
    - TU-n PTR (n=2, 12, 11): 3byte, ghép vào đầu khung 1, 2, 3 của đa khung TU-n tương ứng
  - Chức năng:
    - Đồng chỉnh VC-n trong AUG/ TU-n tương ứng
    - Giá trị con trỏ chỉ thị vị trí byte đầu tiên của VC-n tương ứng
    - Các con trỏ hoạt động độc lập với nhau

GHÉP KÊNH SDH (20)

❖ Cấu tạo của con trỏ

- AU-4 PTR, AU-3 PTR, TU-3 PTR
  - AU-4 PTR gồm 9byte: H1 Y Y H2 1* 1* H3 H3 H3
  - AU-3 PTR, TU-3 PTR gồm 3 byte: H1, H2, H3
  - Y = 1001SS11; SS: chỉ thị con trỏ (10-PTR bậc cao)
  - 1* = 11111111; H3: byte chèn âm, byte kề sau H3: byte chèn dương
  - H1H2 = NNNNSSIDIDIDIDID
  - NNNN: cờ số liệu mới: chỉ thị sự thay đổi giá trị của con trỏ khi có sự thay đổi của tải trọng;
    - NNNN = 0110: bình thường
    - NNNN = 1001: có sự thay đổi giá trị con trỏ
  - Chèn dương: 5 bit I đảo dấu; Chèn âm: 5 bit D đảo dấu



GHÉP KÊNH SDH (21)

❖ Cấu tạo của con trỏ

- TU-2 PTR, TU-12 PTR, TU-11 PTR
  - Gồm 3 byte: V1, V2, V3, chỉ thị vị trí đầu của đa khung VC-n (byte V5) trong đa khung TU-n
  - Byte V4 dự trữ
  - Cấu tạo giống byte H1, H2, H3
  - TU-2 PTR: SS=00
  - TU-12 PTR: SS=01
  - TU-11 PTR: SS=11

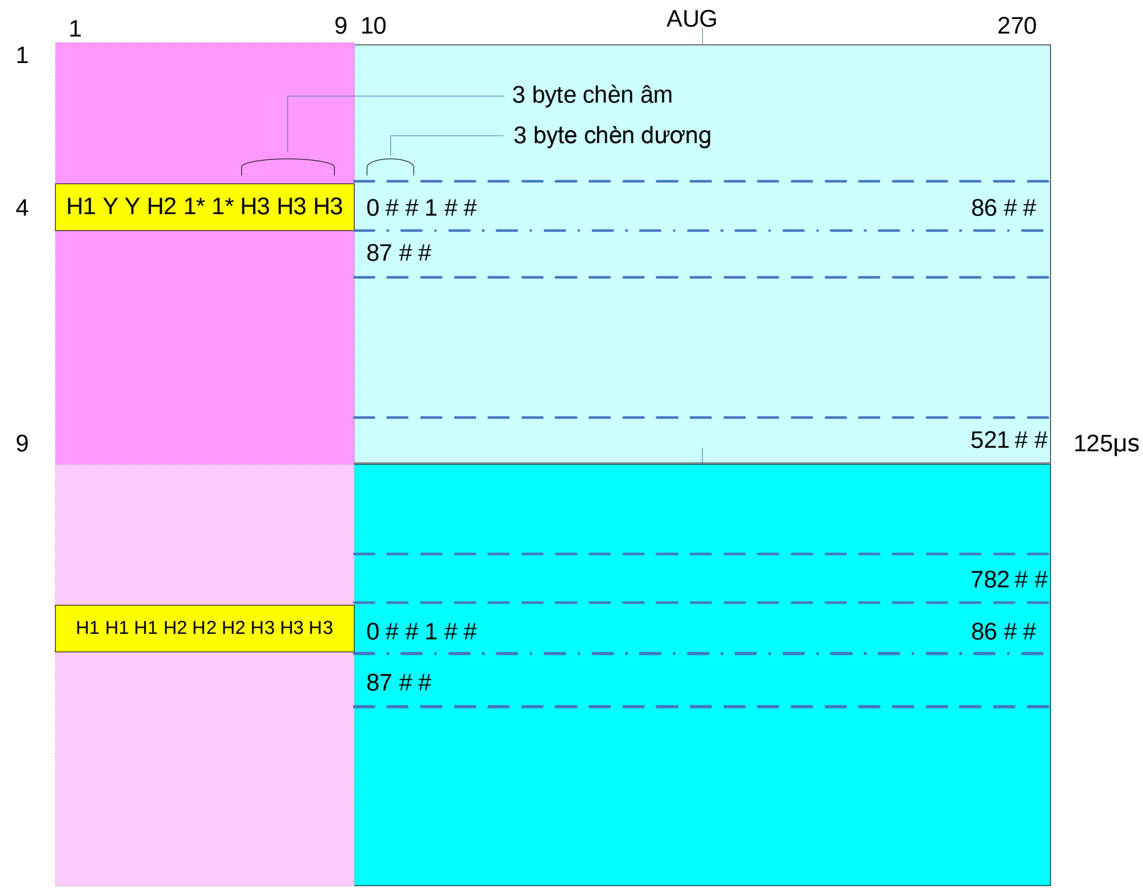
H1/V1								H2/V2							
N	N	N	N	S	S	I	D	I	D	I	D	I	D	I	D

10 bit giá trị con trỏ

H1/V1 = NNNNSSID
H2/V2 = IDIDIDID

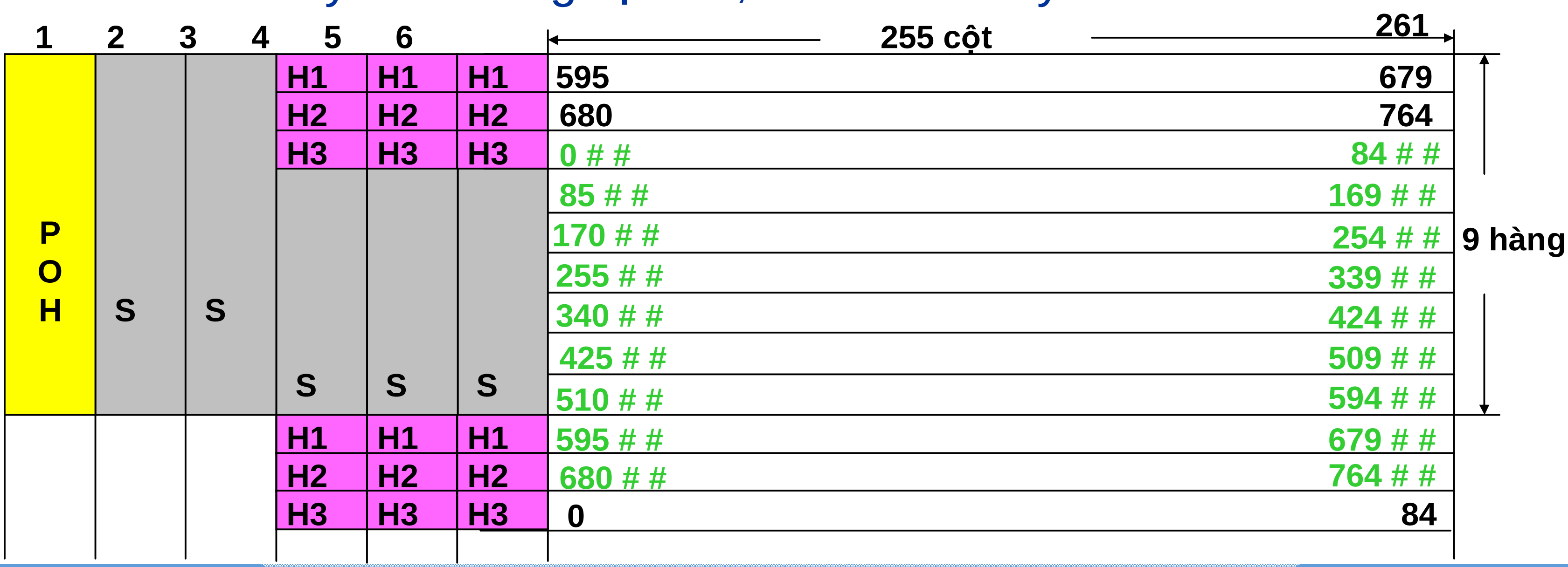
GHÉP KÊNH SDH (22)

- Đánh số địa chỉ các nhóm byte của AUG
  - AU-4 PTR, AU-3 PTR
  - AUG = 9byte PTR + 2349byte tải trọng
  - Nhóm 3byte có cùng địa chỉ
  - Số nhóm 3 byte 2349:3=783 nhóm
  - Giá trị con trỏ: 0 0 0 ÷ 782 782 782



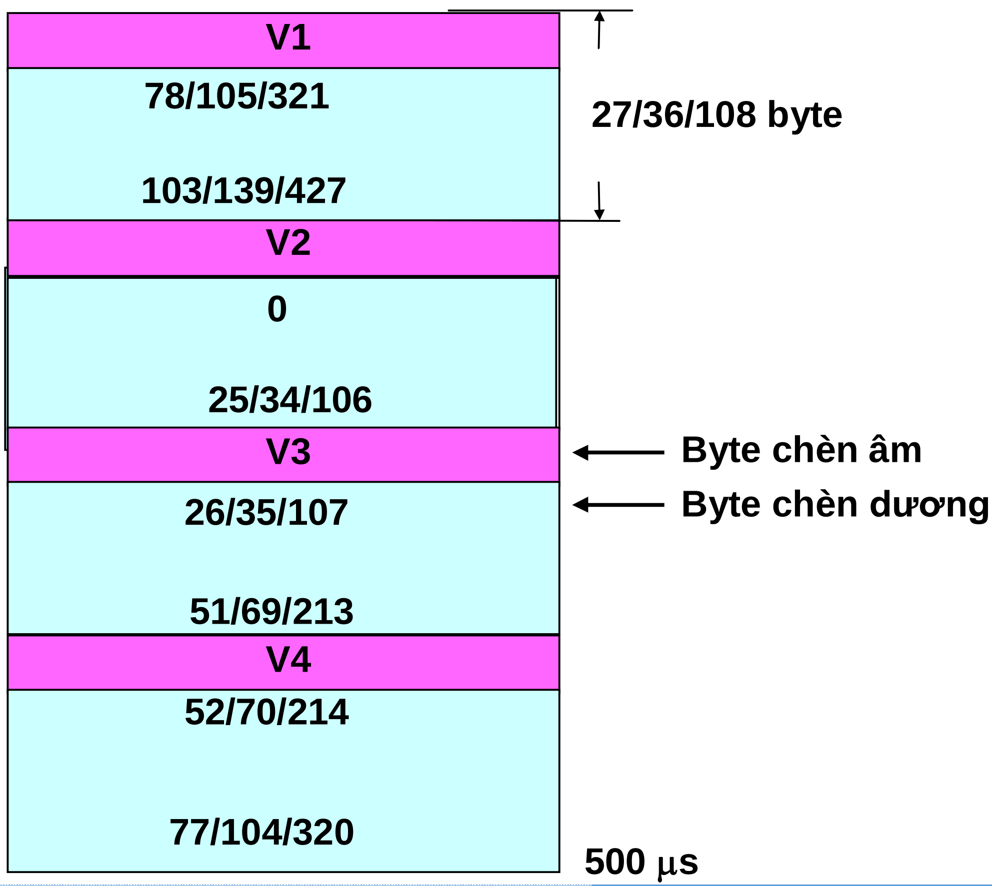
GHÉP KÊNH SDH (23)

- Đánh số địa chỉ các nhóm byte của VC-4
  - TU-3 PTR; giá trị con trỏ: 0 0 0÷764 764 764
  - Vùng tải trọng của 3 TU-3 trong VC-4: 9x255=2295 byte
  - Nhóm 3 byte có cùng địa chỉ, số nhóm 3 byte: 2259:3=765



GHÉP KÊNH SDH (24)

- Đánh số địa chỉ các byte của đa khung TU-n (n=2, 12, 11)
  - TU-n PTR
  - Mỗi byte có một địa chỉ
  - Khi tính giá trị địa chỉ, không đếm các byte con trỏ V1, V2, V3, V4
  - Giá trị con trỏ:
    - TU2-PTR: 0÷427
    - TU12-PTR: 0÷139
    - TU11-PTR: 0÷103



GHÉP KÊNH SDH (25)

❖ Hoạt động của con trỏ

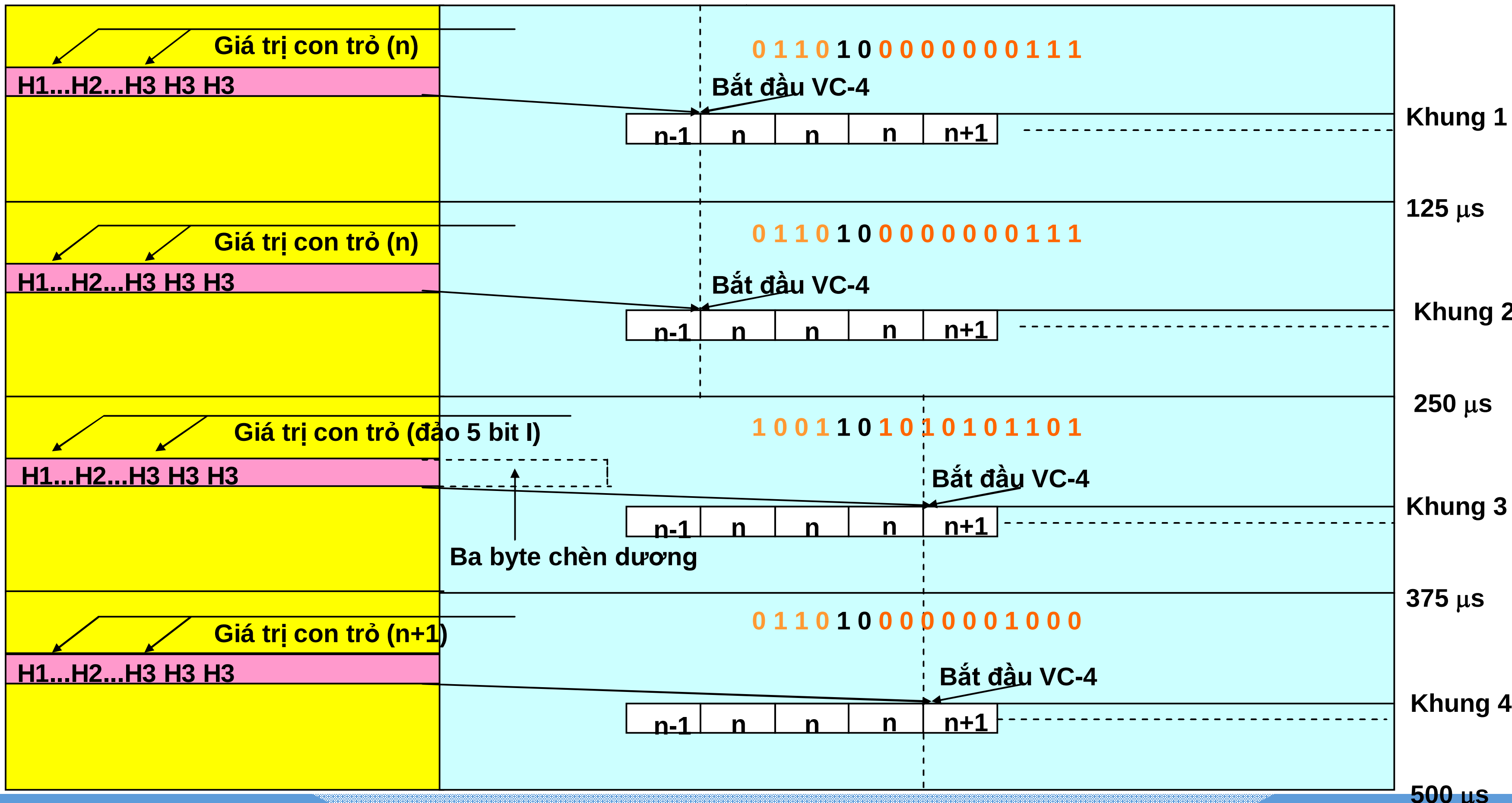
- Giám sát hoạt động của HT để đồng chỉnh độ lệch pha giữa TH ghép (VC-n) và khung ghép (AUG/ TU-n,)
- Thực hiện đồng chỉnh: khôi phục sự đồng bộ giữa các HT SDH: chèn byte
- Chèn dương:
  - Tốc độ khung VC-n chậm hơn khung ghép AUG/ TU-n: chèn các byte không mang thông tin vào vị trí các byte sau byte H3/ V3
  - Giá trị con trỏ sau chèn dương tăng lên 1; Các bit I trong đảo dấu
- Chèn âm:
  - Tốc độ khung VC-n nhanh hơn khung ghép AUG/ TU-n: chèn các byte mang thông tin vào vị trí các byte H3/ V3
  - Giá trị con trỏ sau chèn âm giảm đi 1; Các bit D đảo dấu

GHÉP KÊNH SDH (26)

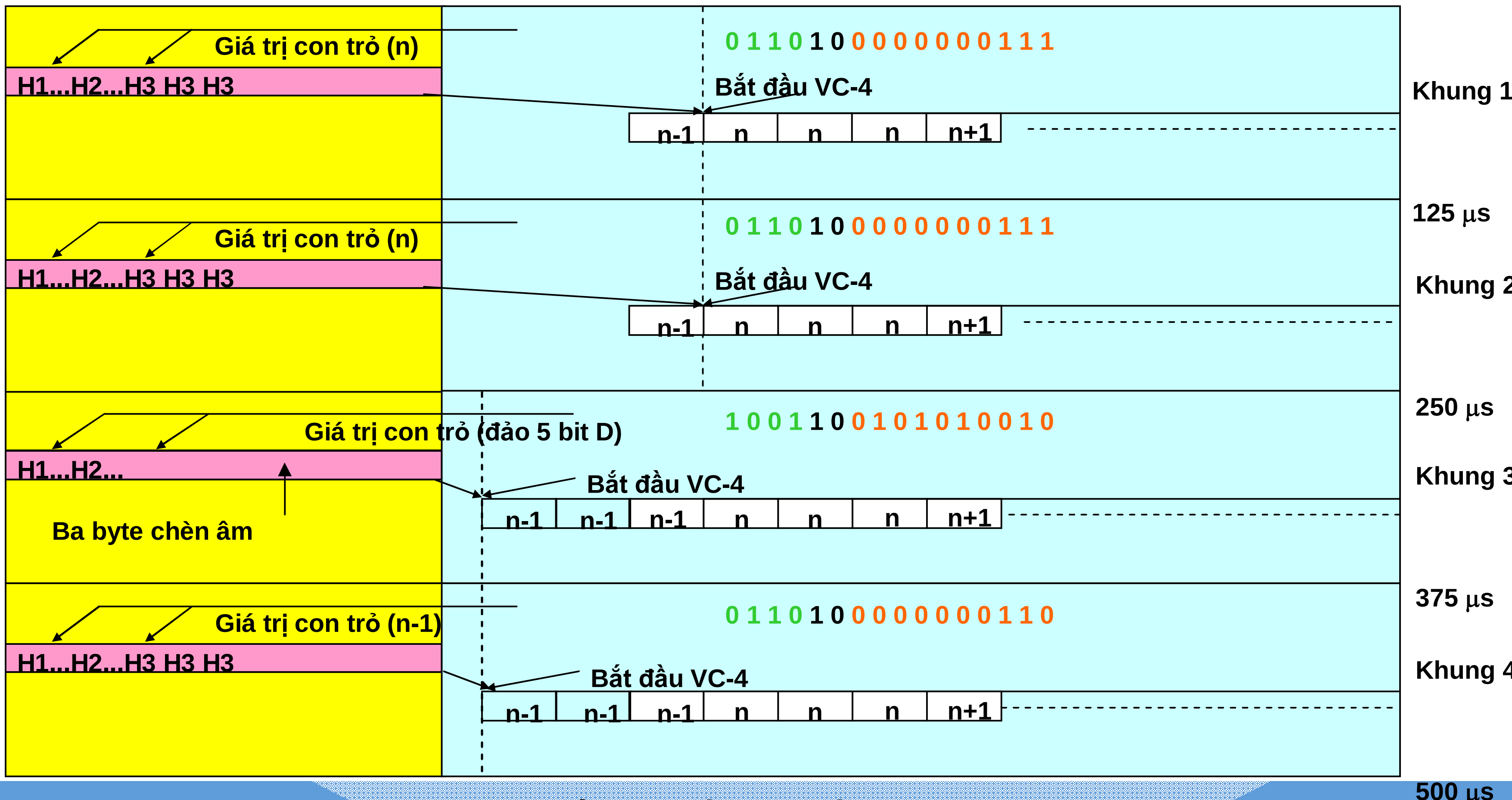
❖ Hoạt động của con trỏ (t.t)

- Yêu cầu: tối thiểu trong 3 khung ghép liên tiếp giá trị con trỏ không được thay đổi → quá trình chèn chỉ được xảy ra cách nhau tối thiểu 3 khung
- Chú ý 1: Quá trình chèn khi sắp xếp các luồng nhánh PDH vào C-n là do sự chênh lệch về tốc độ bit giữa đồng hồ HT PDH và HT SDH → **không liên quan** đến hoạt động của con trỏ
- Chú ý 2: Quá trình **chèn do hoạt động của con trỏ** xảy ra do đồng hồ các HT SDH chưa hoàn toàn khớp nhau → gây ra lệch tốc độ giữa tín hiệu ghép và khung ghép

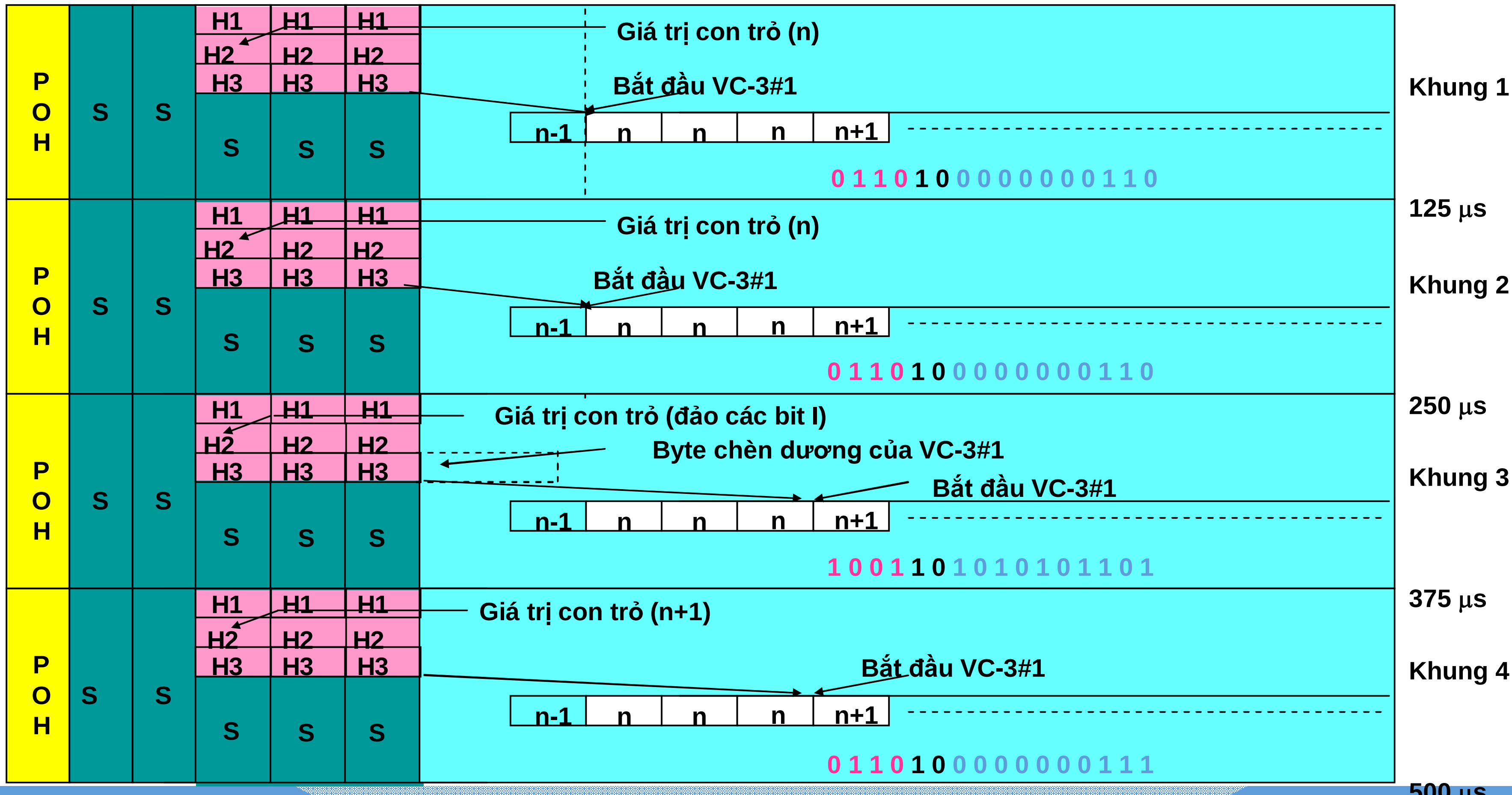
GHÉP KÊNH SDH (27)



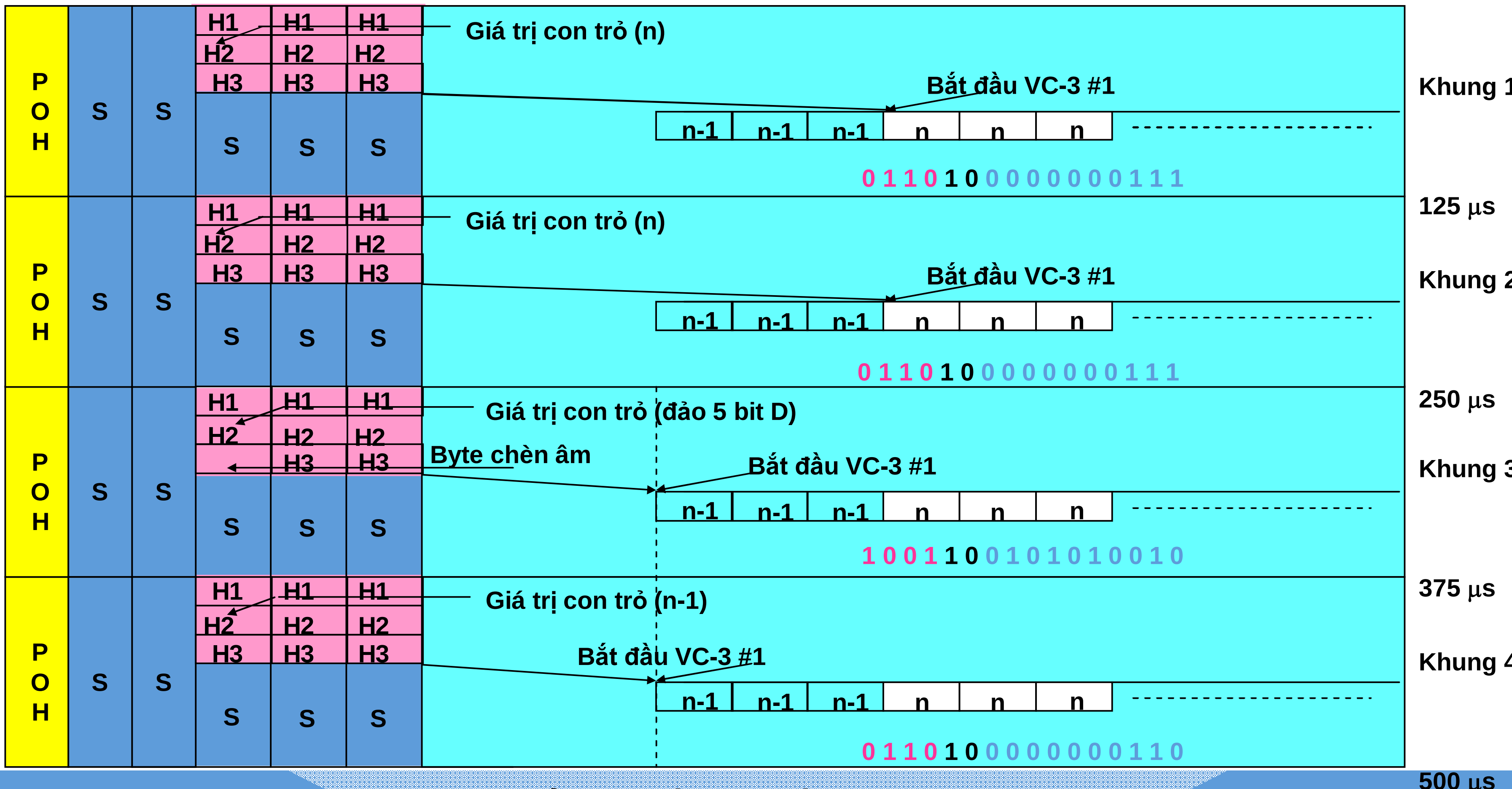
GHÉP KÊNH SDH (28)



GHÉP KÊNH SDH (29)



GHÉP KÊNH SDH (30)



GHÉP KÊNH SDH (31)

- Xử lý con trỏ tại phía thu
  - Mỗi luồng nhánh có con trỏ tương ứng chỉ thị địa chỉ của nó → tách luồng nhánh dựa vào con trỏ mà không cần trải qua tất cả các bước giải ghép lần lượt
  - Trong HT SDH, tín hiệu thu được sẽ được chuyển về dạng cấu trúc khung và giá trị con trỏ được biên dịch sang vị trí tọa độ trong khung
  - Xác định vị trí VC-4 trong AU-4
    - Giá trị con trỏ là X, cần xác định vị trí hàng H, cột C trong khung
    - H = round(X,87) + 4
    - C = remain(X,87)*3
  - Xác định vị trí TU-3 trong VC-4
    - TU-3(K,L,M); K=1,2,3; L=0, M=0
    - Giá trị con trỏ là X, cần xác định vị trí hàng H, cột C trong khung
    - H = round(X,85) + 3
    - C = 4+(K-1)+3*[X-(H-1)*85]

GHÉP KÊNH SDH (32)

- Xử lý con trỏ tại phía thu
  - Xác định vị trí TU-2 trong VC-4
    - TU-2(K,L,M); K=1,2,3; L=1÷7, M=0
    - Giá trị con trỏ là X, cần xác định vị trí hàng H, cột C trong khung
    - H = round[remain(X,108),12] + 3
    - C = 10+(K-1)+3*(L-1)+21*[X-(H-1)*12]
  - Xác định vị trí TU-12 trong VC-4
    - TU-2(K,L,M); K=1,2,3; L=1÷7, M=1÷3
    - Giá trị con trỏ là X, cần xác định vị trí hàng H, cột C trong khung
    - H = round[remain(X,34),4] + 3
    - C = 10+(K-1)+3*(L-1)+21*(M-1)+63*[X-(H-1)*4]
  - Xác định vị trí TU-11 trong VC-4
    - TU-3(K,L,M); K=1,2,3; L=1÷7, M=1÷4
    - Giá trị con trỏ là X, cần xác định vị trí hàng H, cột C trong khung
    - H = round[remain(X,27),3] + 3
    - C = 10+(K-1)+3*(L-1)+21*(M-1)+84*[X-(H-1)*3]

GHÉP KÊNH SDH (33)

❖ Chức năng của phần mào đầu

- Cho phép xác định và tạo ra cấu trúc khung SDH (dựa vào các byte đồng bộ khung A1)
- Cung cấp các byte cảnh báo để giám sát việc truyền dẫn dữ liệu
- Đưa ra các trạng thái cảnh báo
- Cho phép thực hiện các hoạt động bảo dưỡng
- Cung cấp chức năng định tuyến (chuyển mạch bảo vệ: byte K1, K2 trong MSOH và K3 trong POH)

CHƯƠNG 3

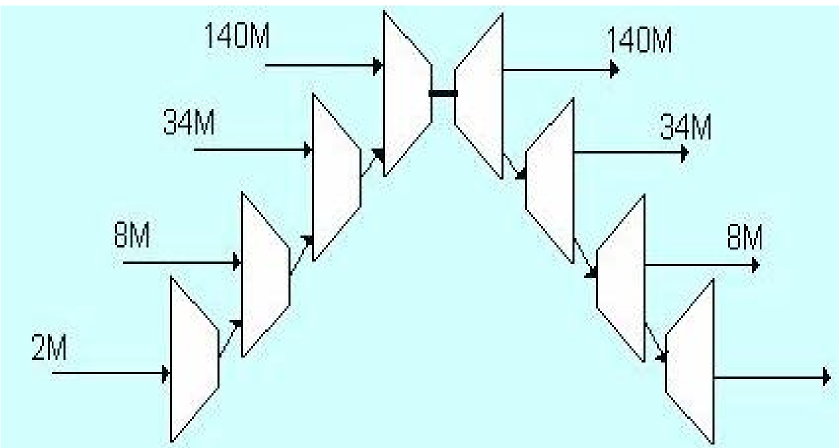
CÁC GIẢI PHÁP DUY TRÌ MẠNG

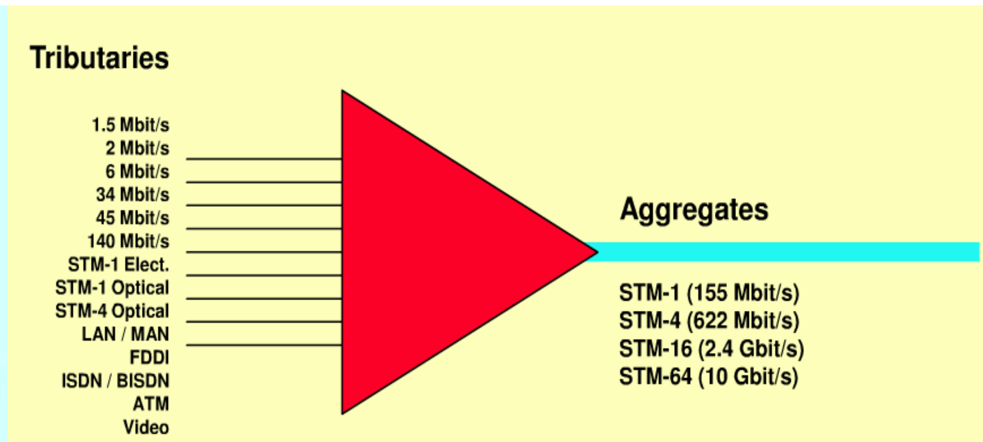
KHÁI NIỆM DUY TRÌ MẠNG

- Duy trì mạng: khi mạng truyền dẫn xảy ra sự cố thì vẫn có khả năng tiếp tục cung cấp được dịch vụ (truyền tin vẫn thông suốt)
  - Thực tế, chỉ có 99,999% khả năng là duy trì được mạng (thời gian sự cố < 5 phút/năm)
  - Một kết nối giữa nguồn và đích: gồm nhiều node mạng và cáp: các phần tử này có thể bị hỏng
- Để đảm bảo duy trì được mạng: sử dụng kĩ thuật chuyển mạch bảo vệ
  - Các kĩ thuật bảo vệ thường cung cấp một số dung lượng dự trữ trong mạng và khi có sự cố kết nối sẽ được định tuyến lại lưu lượng bằng cách sử dụng dung lượng dự trữ này (còn gọi là phục hồi)
- Đối với mạng tốc độ cao: yêu cầu phải tự phục hồi khi có sự cố

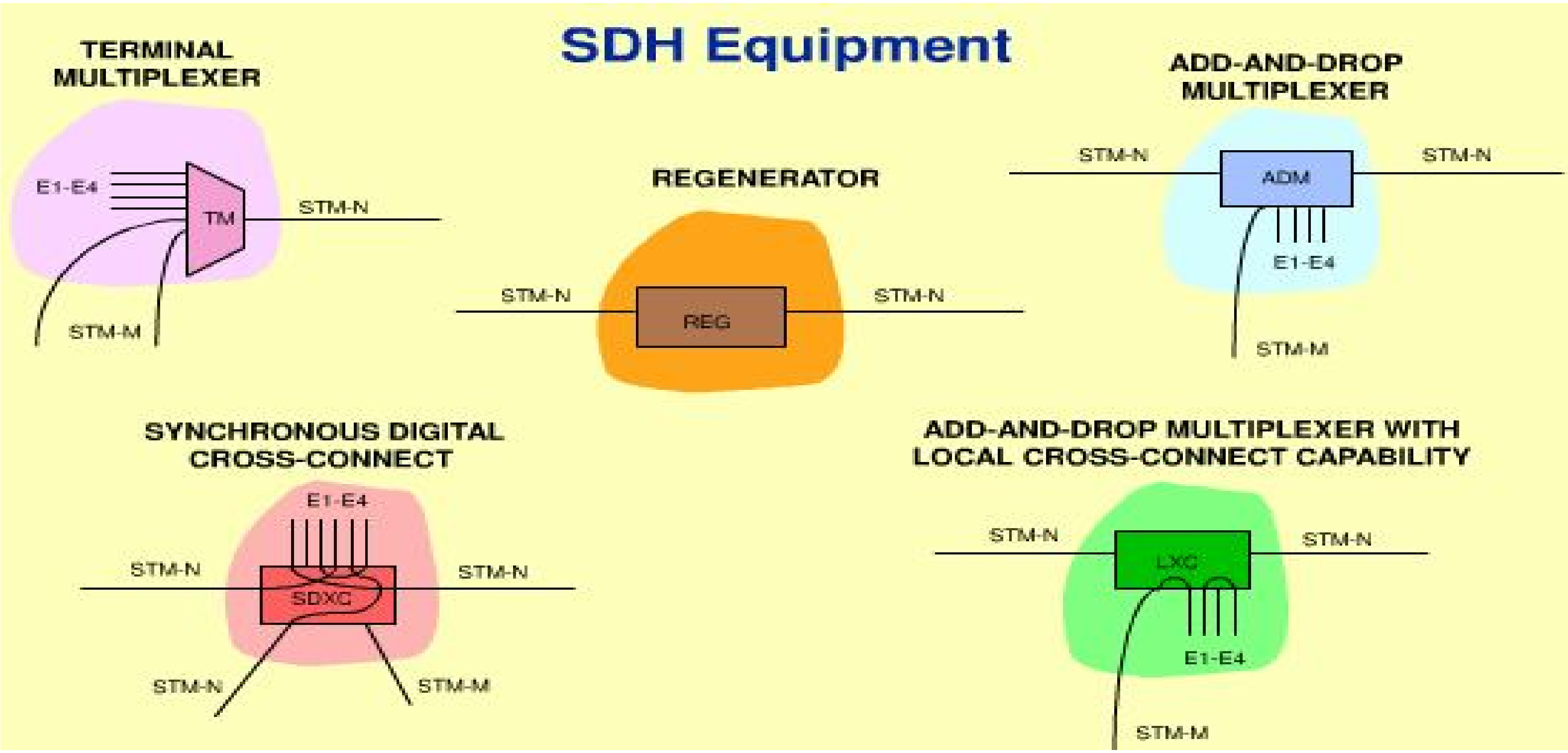
CÁC CẤU HÌNH THIẾT BỊ

- PDH
  - Đầu cuối (TE)
  - Xen rẽ (D/I)
  - Lặp (REG)
- SDH
  - Đầu cuối (TRM)
  - Xen rẽ (ADM)
  - Lặp (REG)
  - Nối chéo số (DXC)

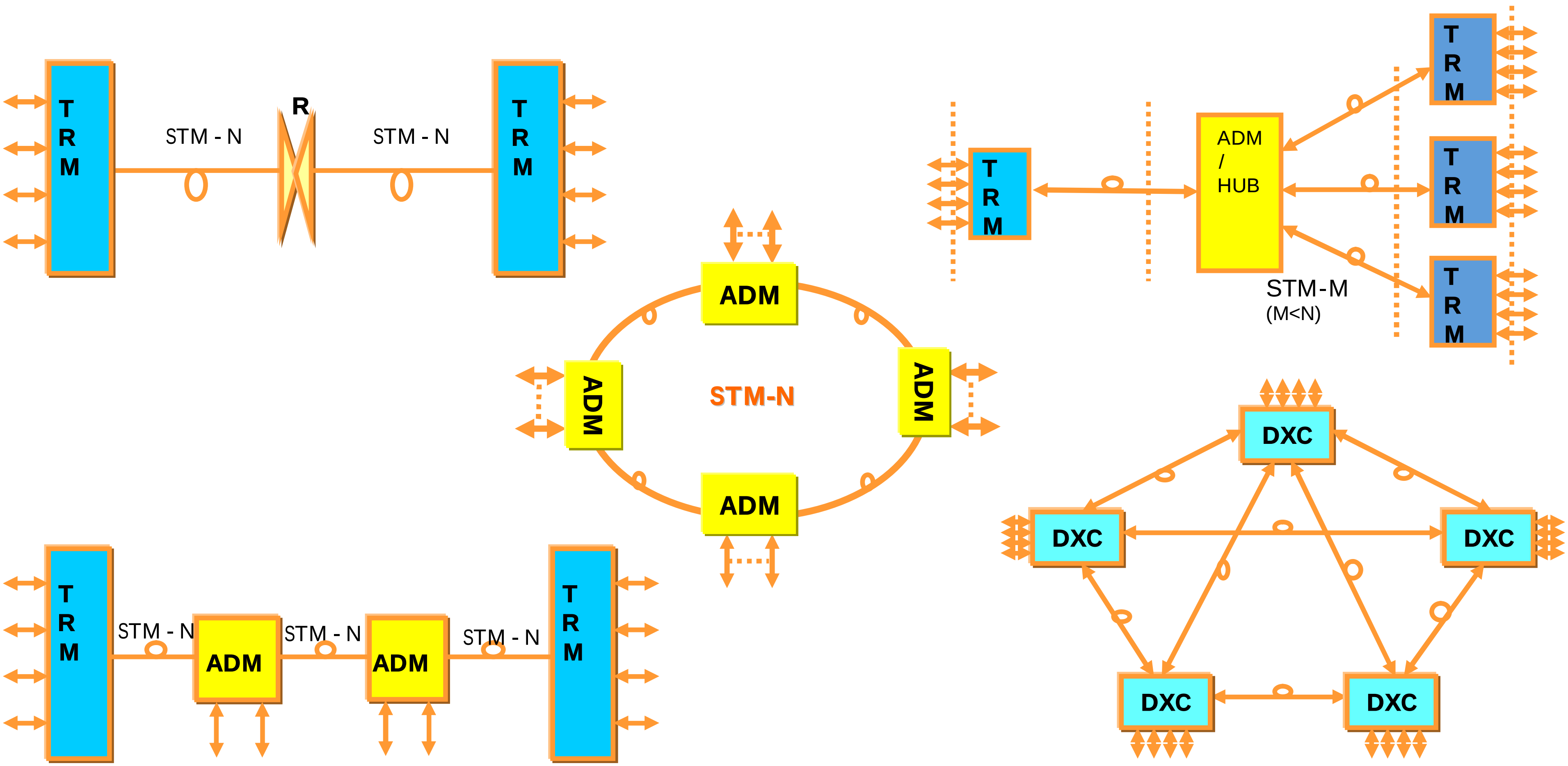




CÁC CẤU HÌNH THIẾT BỊ SDH



CÁC CẤU HÌNH MẠNG SDH



BẢO VỆ MẠNG SDH

- Mạng SDH có nhiều cấu hình đa dạng
- Nhiều phương thức bảo vệ mạng khác nhau

→ Khả năng bảo vệ mạng rất cao

Đặc biệt là cấu hình mạng vòng

BẢO VỆ MẠNG SDH

- Khi xảy ra sự cố thì quá trình chuyển mạch bảo vệ trong mạng SDH được thực hiện hoàn toàn tự động

→ Chuyển mạch bảo vệ tự động APS

(APS: Automatic Protection Switching)

CÁC ĐẶC ĐIỂM CỦA CHUYỂN MẠCH BẢO VỆ (1)

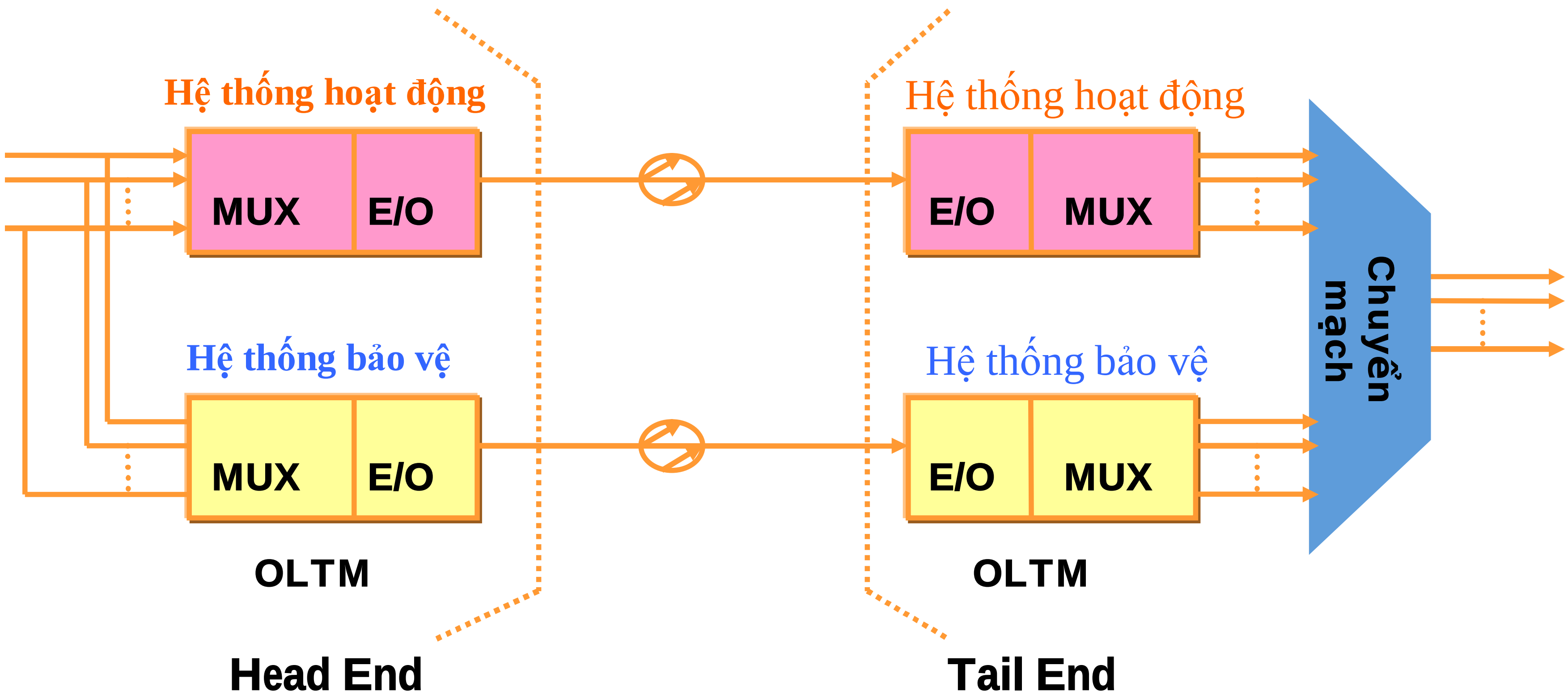
- Chế độ chuyển mạch
  - Đơn hướng (Un-direction)
  - Hai hướng (Bi-direction)
- Chế độ hoạt động
  - Trở về (Revertive)
  - Không trở về (Non-revertive)
- Các nguyên nhân cần chuyển mạch bảo vệ
  - Lỗi tín hiệu (SF: Signal Failure): LOS, LOF, AIS,…
  - Suy giảm tín hiệu (SD: Signal Degrade)
  - Đợi phục hồi (WTR: Wait To Restore)
  - Yêu cầu đảo chiều (RR: Reverse Request)

CÁC ĐẶC ĐIỂM CỦA CHUYỂN MẠCH BẢO VỆ (2)

- Các loại lưu lượng
  - Lưu lượng được bảo vệ
  - Lưu lượng không được bảo vệ
  - Lưu lượng mở rộng
- Yêu cầu đối với chuyển mạch bảo vệ
  - Thời gian phát hiện lỗi
  - Thời gian chuyển mạch bảo vệ
  - Phạm vi bảo vệ
  - Phương thức chuyển mạch bảo vệ
  - Phương thức hoạt động
  - Giao thức và thuật toán

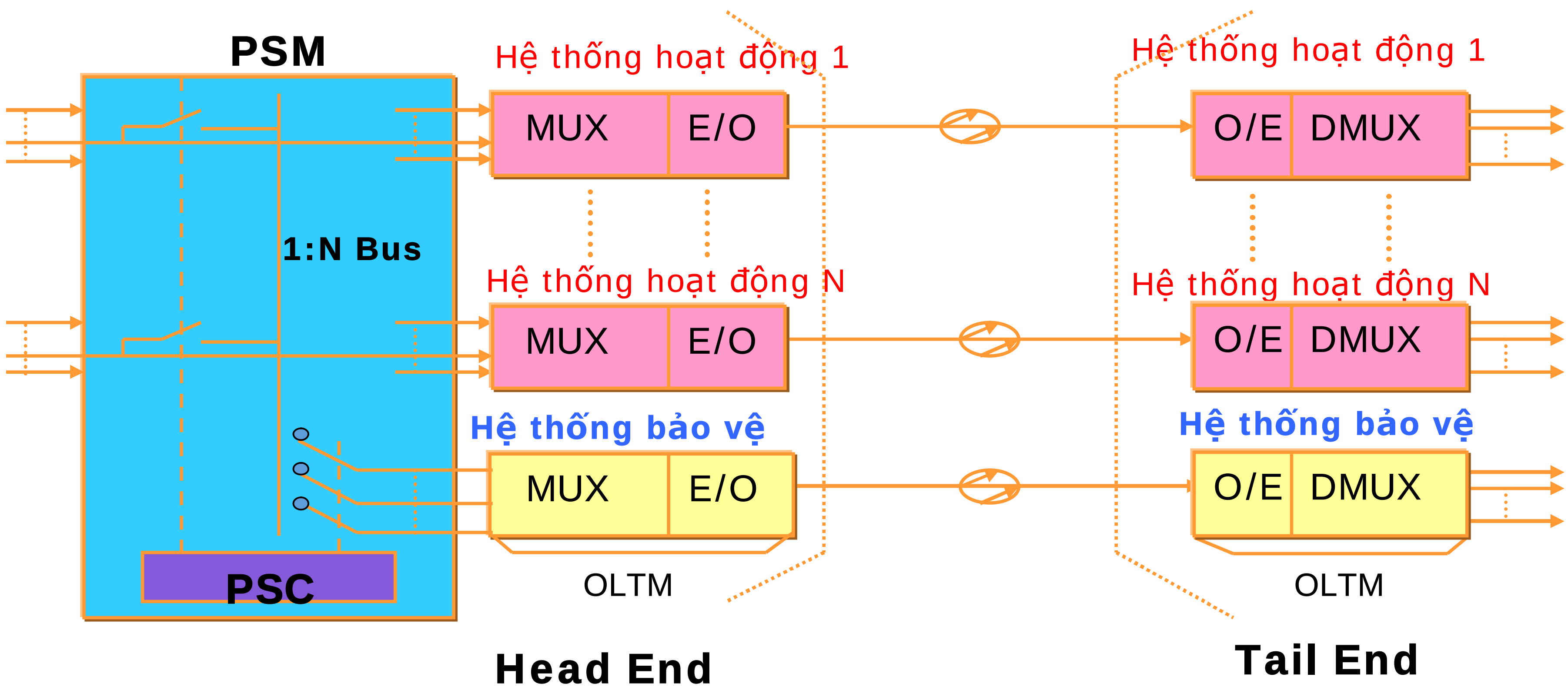
CÁC CƠ CHẾ BẢO VỆ TỰ ĐỘNG APS (1)

❖ Cơ chế APS 1+1



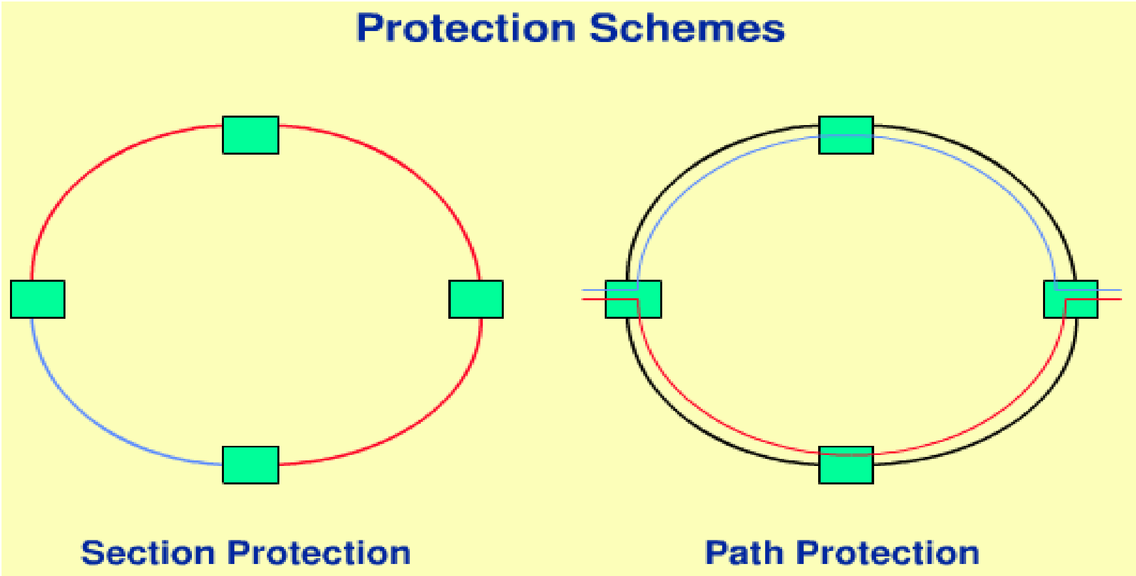
CÁC CƠ CHẾ BẢO VỆ TỰ ĐỘNG APS (2)

❖ Cơ chế APS 1:N (N≥1)

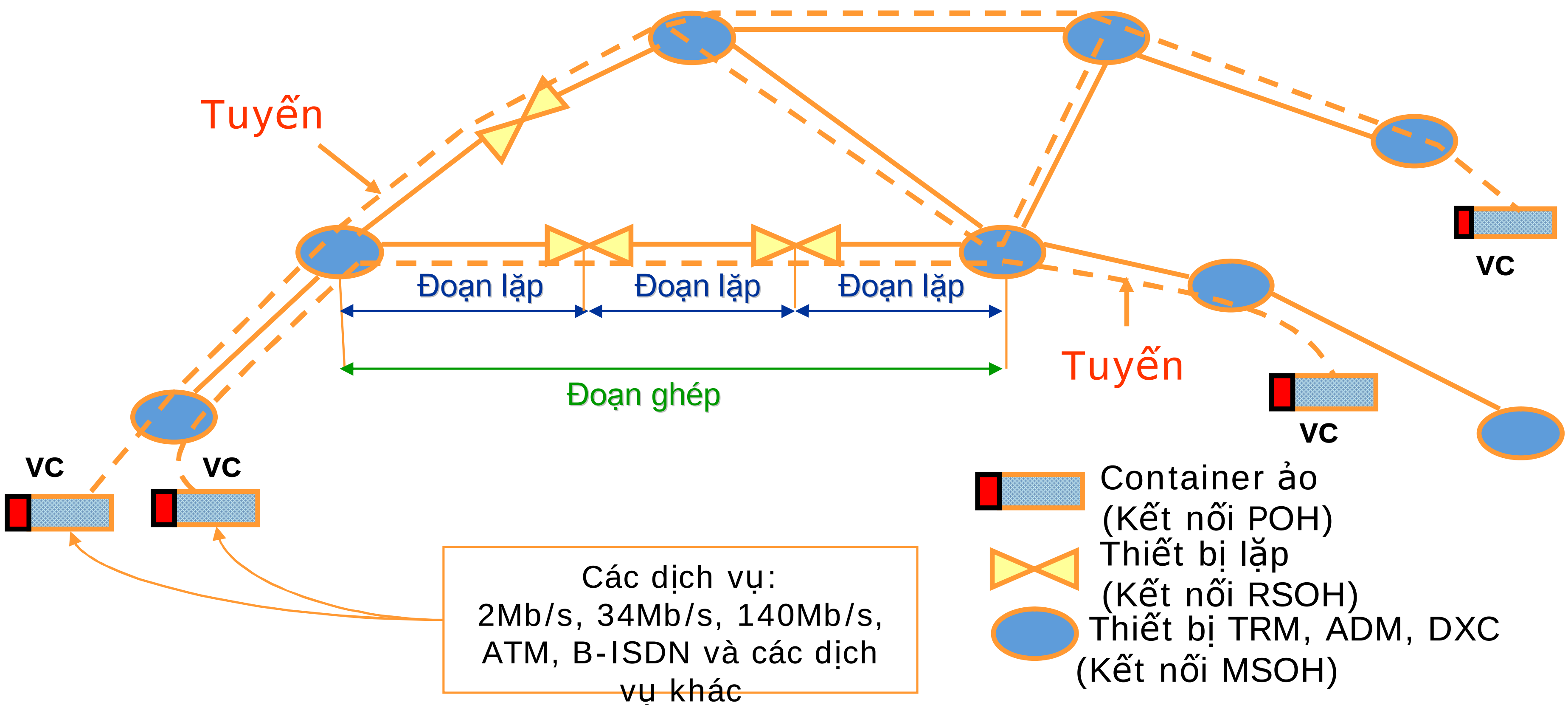


CHUYỂN MẠCH BẢO VỆ TRONG MẠNG SDH

- ❖ Chuyển mạch bảo vệ đoạn ghép (MSP)
- ❖ Chuyển mạch bảo vệ tuyến (PPS)
  - Chú ý: Thời gian hồi phục của MSP chậm hơn so với PPS do cần xử lí hai byte K1, K2 trong MSOH

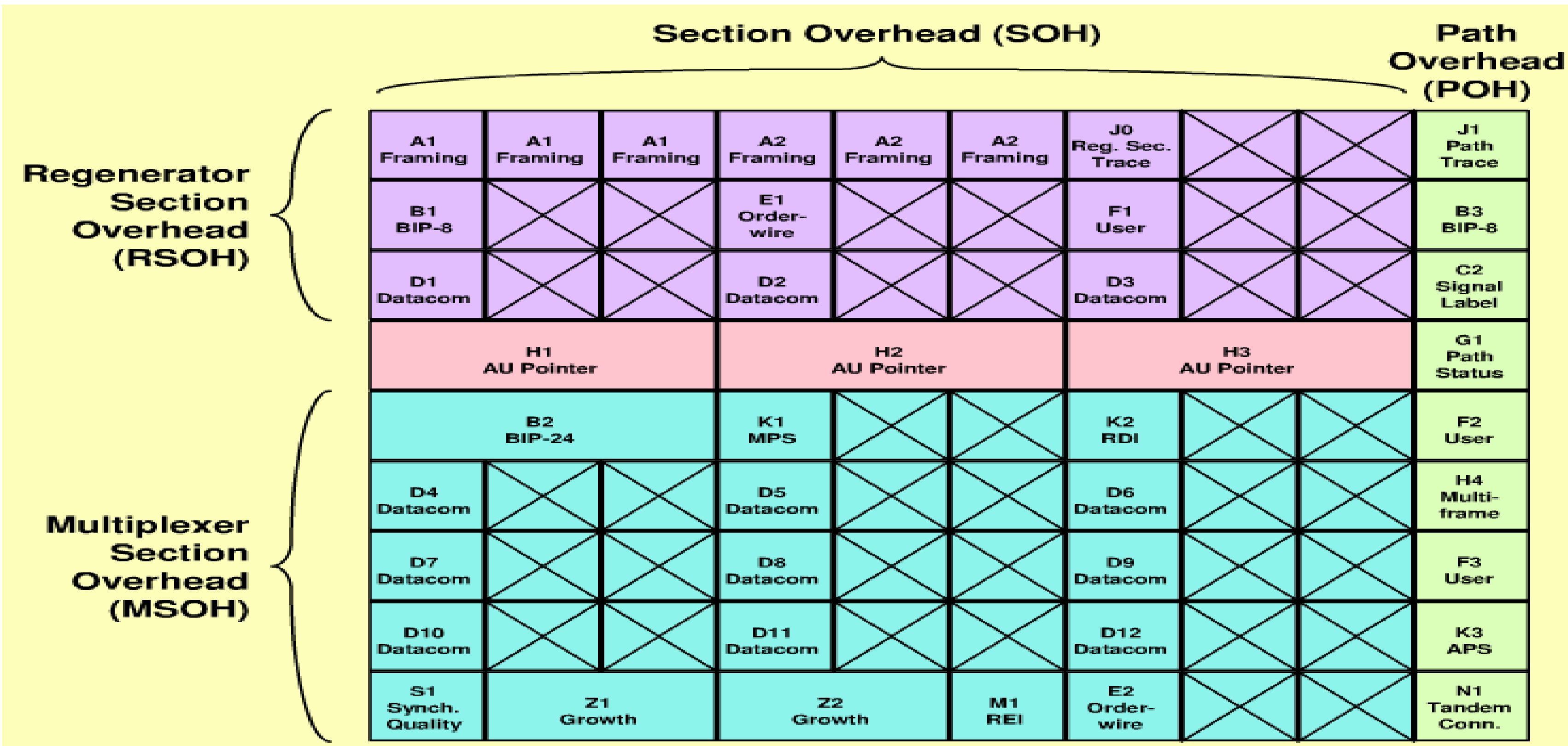


ĐOẠN VÀ TUYẾN



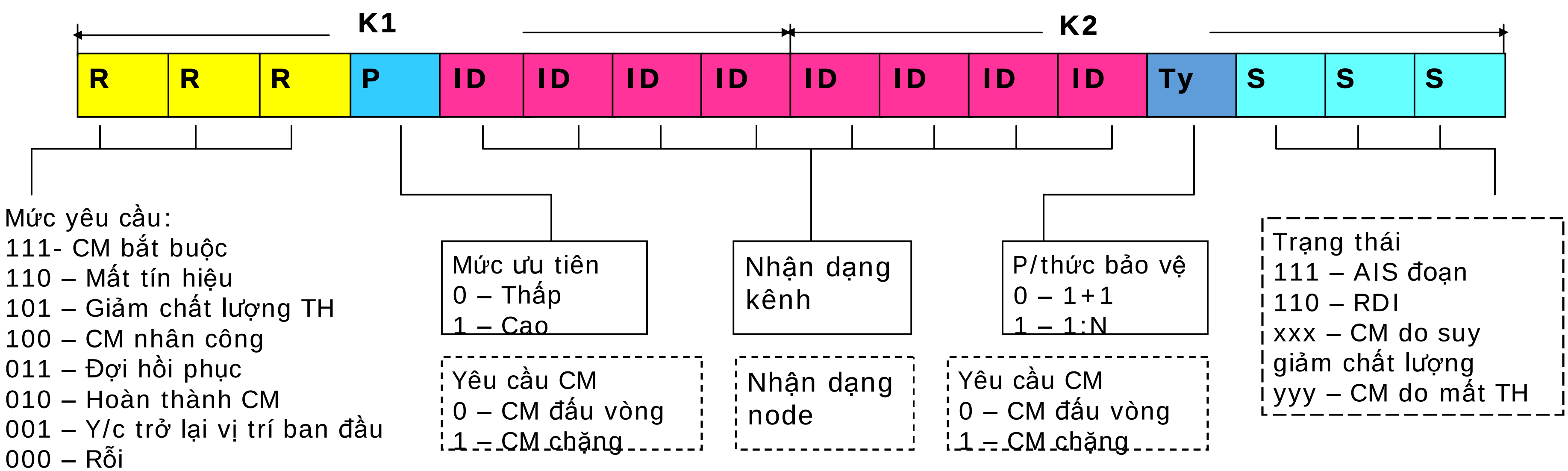
TÍN HIỆU QUẢN LÍ VÀ BẢO DƯỠNG (1)

❖ Cấu trúc SOH/ POH trong STM-N



TÍN HIỆU QUẢN LÍ VÀ BẢO DƯỠNG (1)

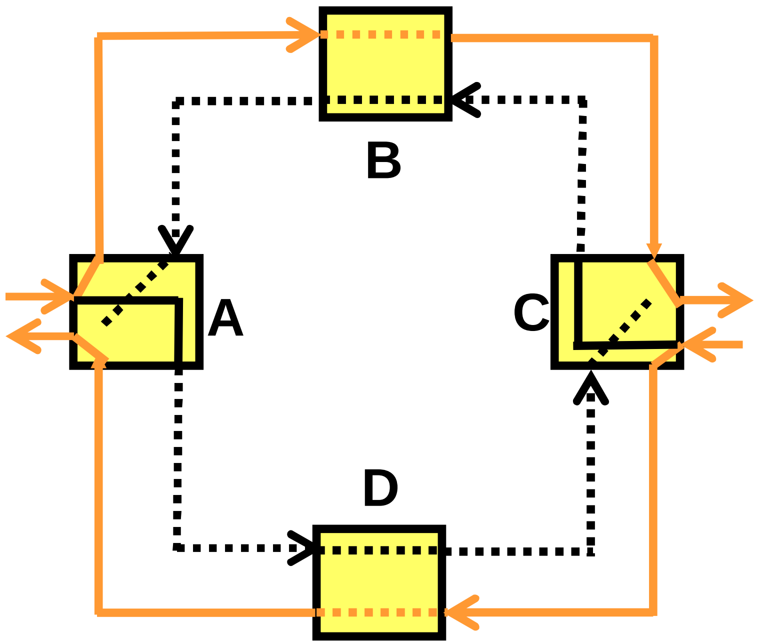
- Chuyển mạch bảo vệ đoạn ghép MSP
  - MSOH: K1, K2 – Kênh CM bảo vệ tự động APS



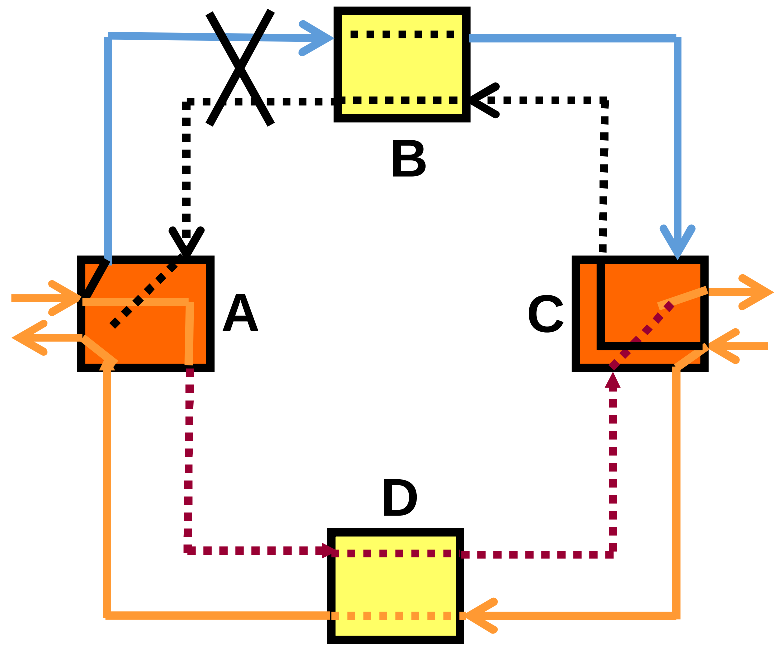
- Chuyển mạch bảo vệ tuyến PPS
  - POH: K3/V5 – Kênh CM bảo vệ tự động APS

BẢO VỆ TRONG MẠNG VÒNG (1)

❖ Mạng vòng 2 sợi đơn hướng chuyển mạch bảo vệ tuyến (UPSR-2F: Unidirectional Path protection Switching Ring – 2 Fibers)



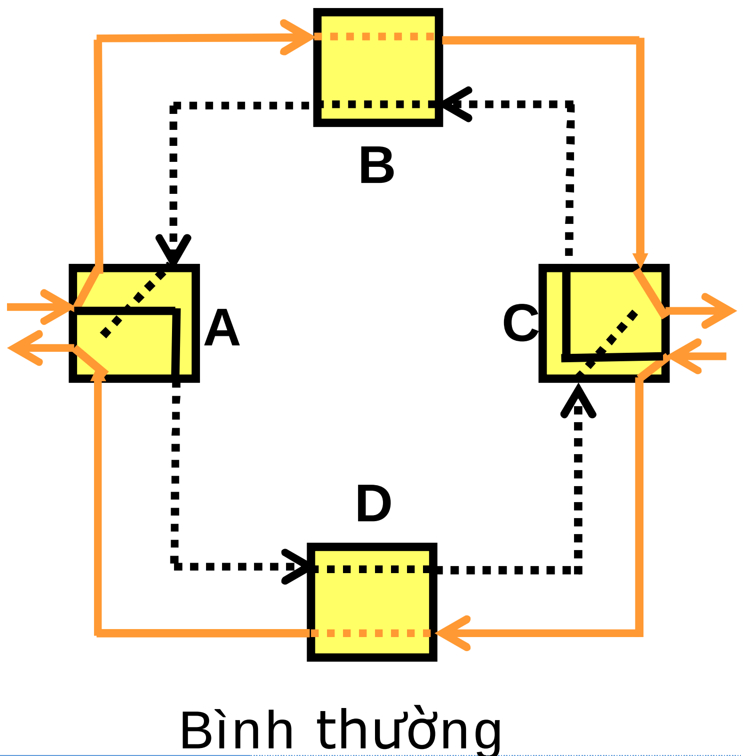
Bình thường

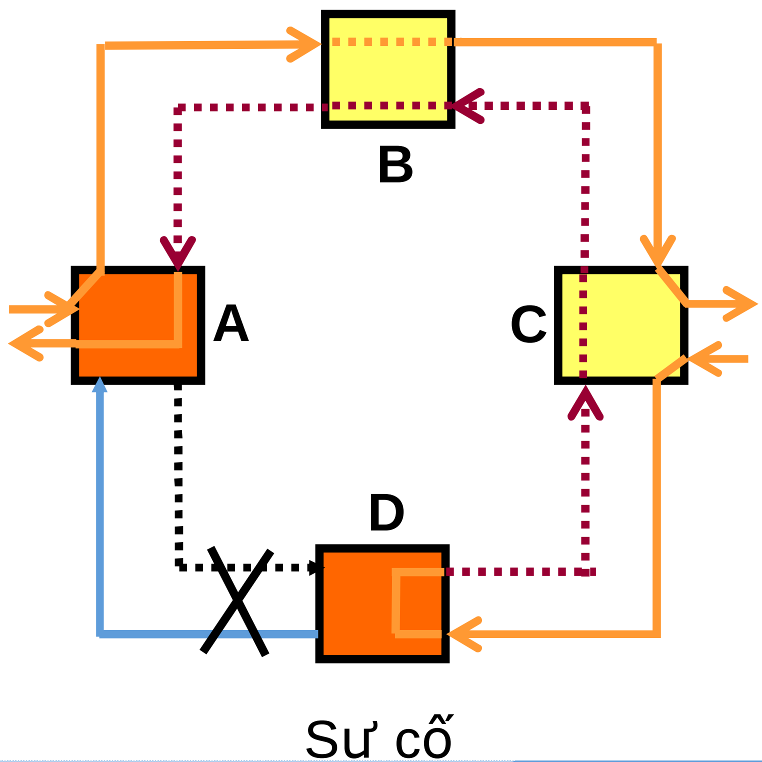


Sự cố

BẢO VỆ TRONG MẠNG VÒNG (1)

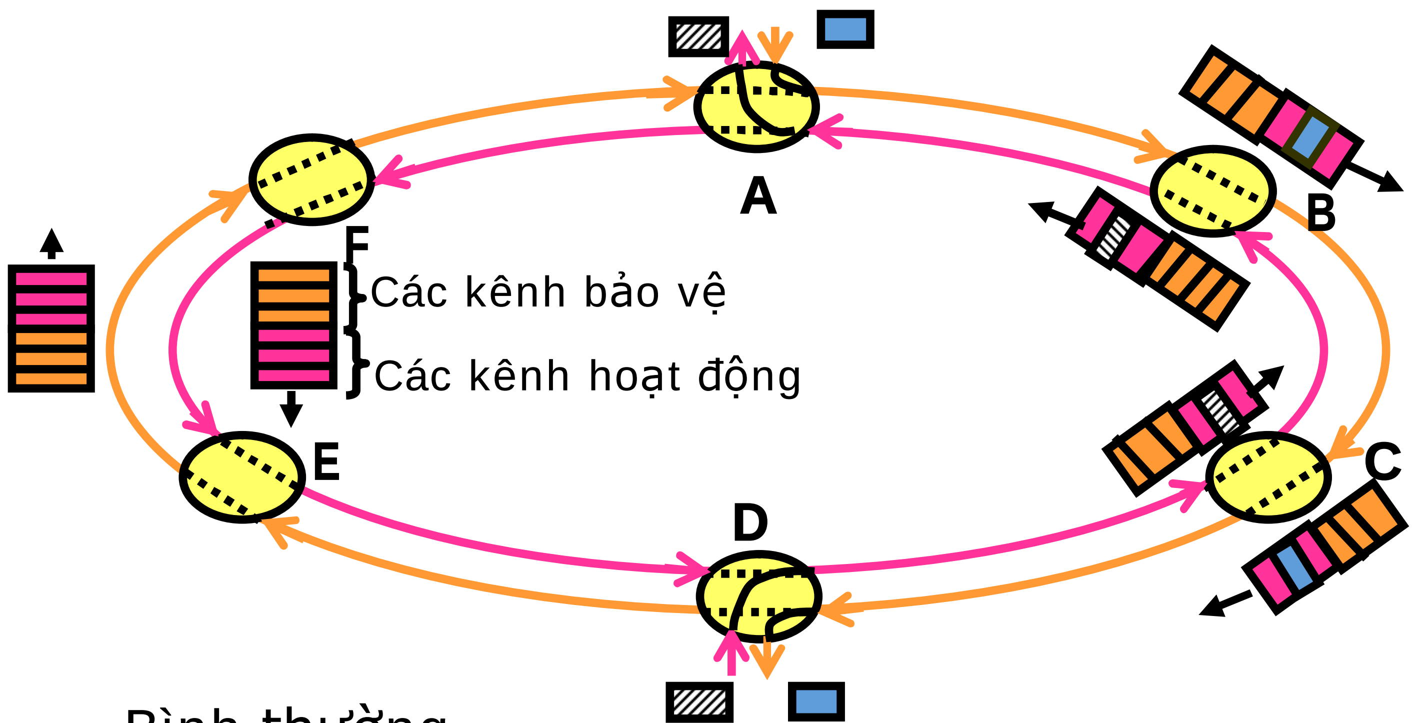
❖ Mạng vòng 2 sợi đơn hướng chuyển mạch bảo vệ đoạn (ULSR-2F: Unidirectional Line protection Switching Ring – 2 Fibers)





BẢO VỆ TRONG MẠNG VÒNG (1)

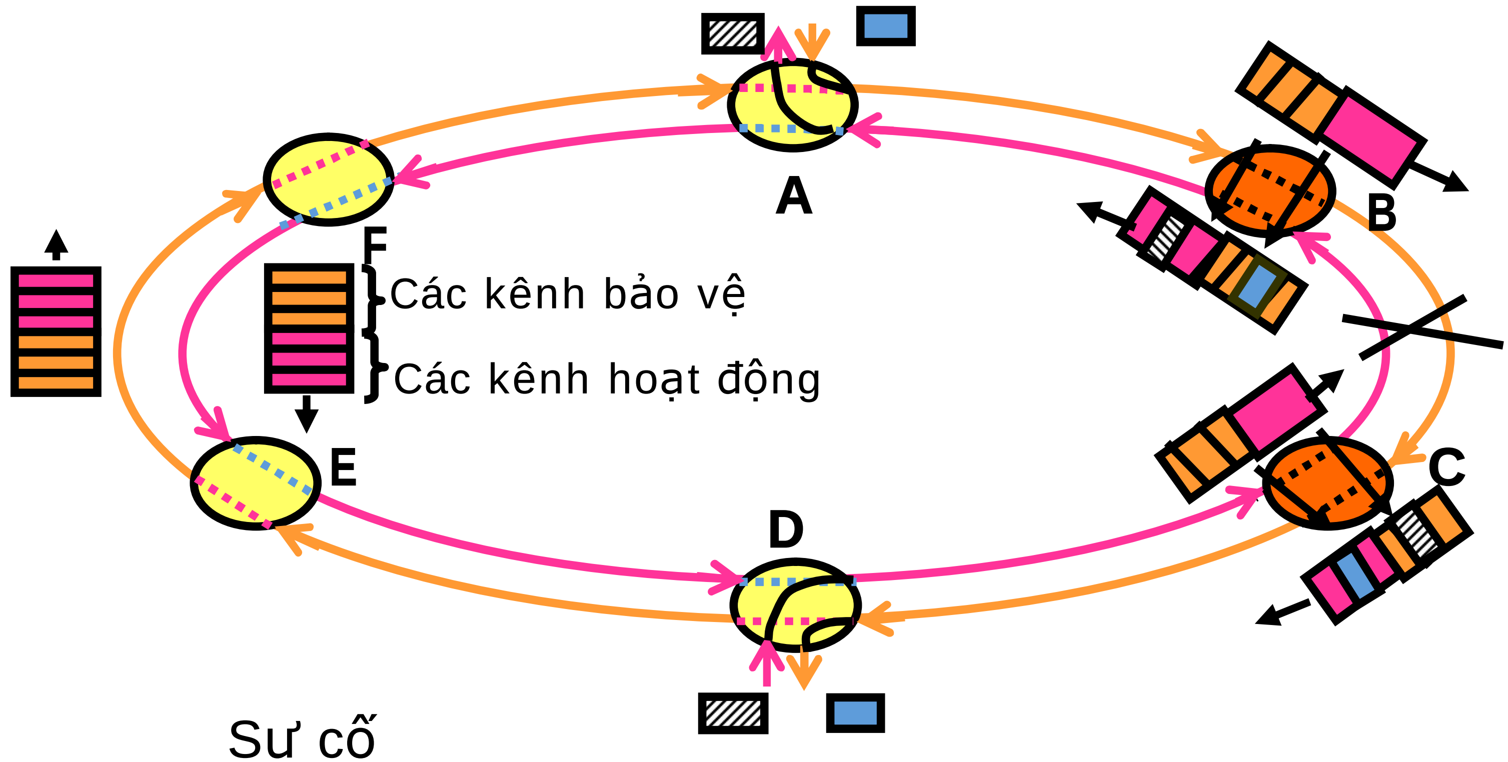
- Mạng vòng 2 sợi song hướng chuyển mạch bảo vệ đoạn (BLSR-2F: Bidirectional Line protection Switching Ring – 2 Fibers)



Bình thường

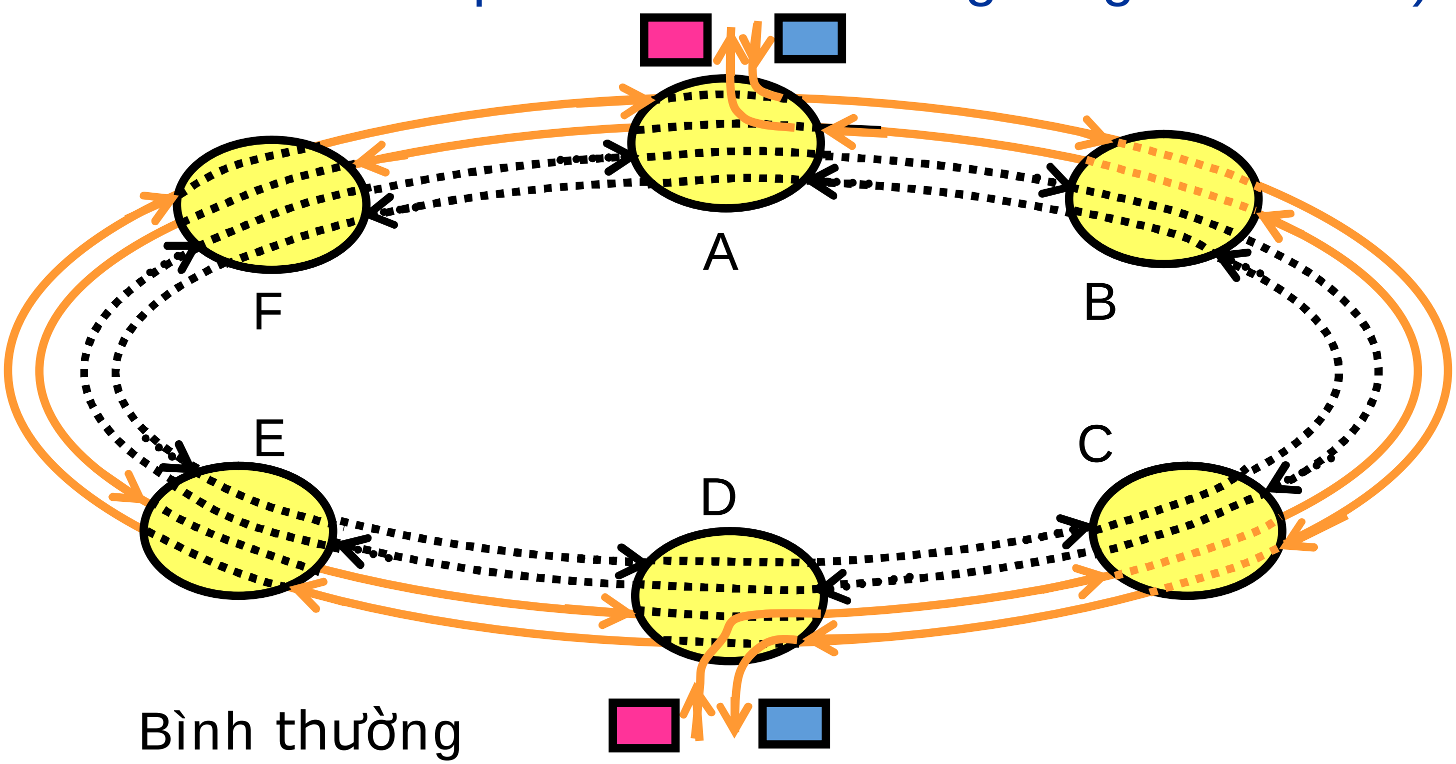
BẢO VỆ TRONG MẠNG VÒNG (1)

- Mạng vòng 2 sợi song hướng chuyển mạch bảo vệ đoạn (BLSR-2F: Bidirectional Line protection Switching Ring – 2 Fibers)



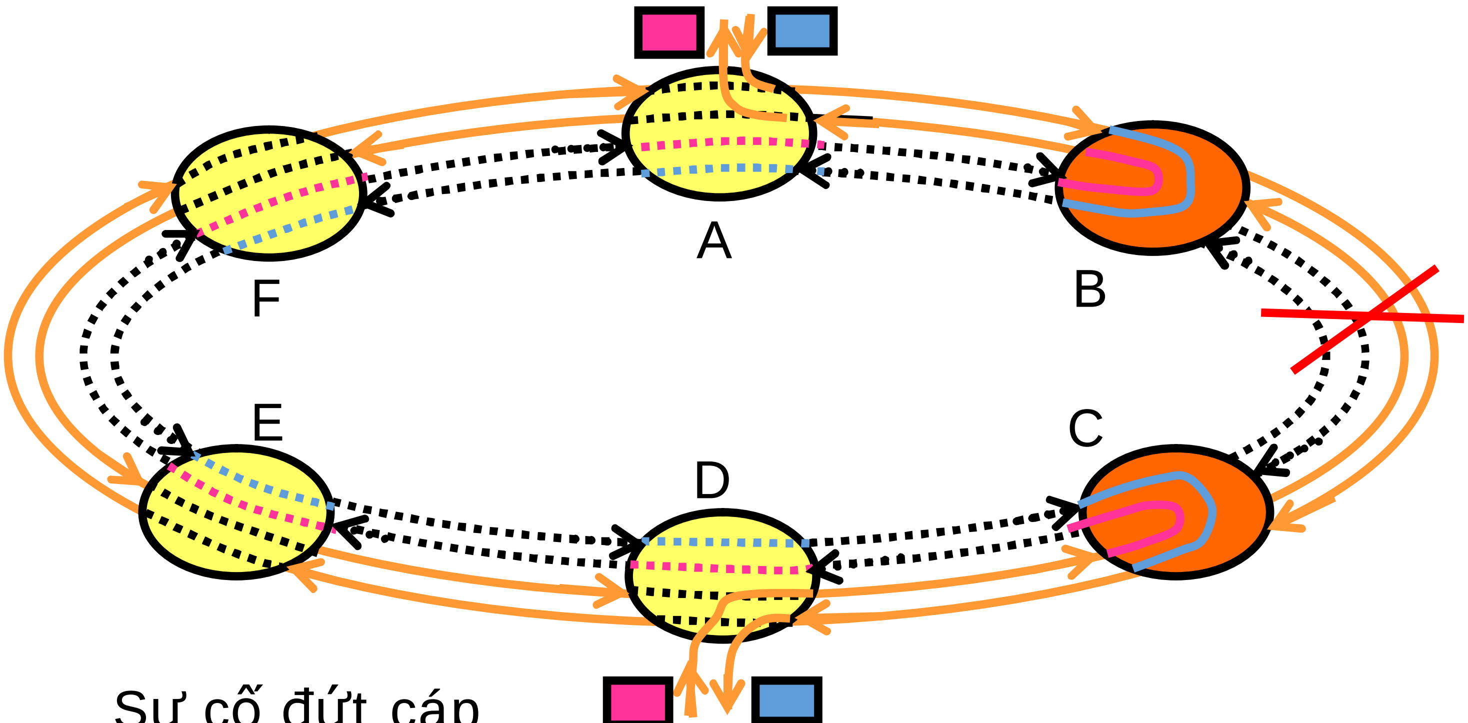
BẢO VỆ TRONG MẠNG VÒNG (1)

❖ Mạng vòng 4 sợi song hướng chuyển mạch bảo vệ đoạn (BLSR-4F: Bidirectional Line protection Switching Ring – 4 Fibers)



BẢO VỆ TRONG MẠNG VÒNG (1)

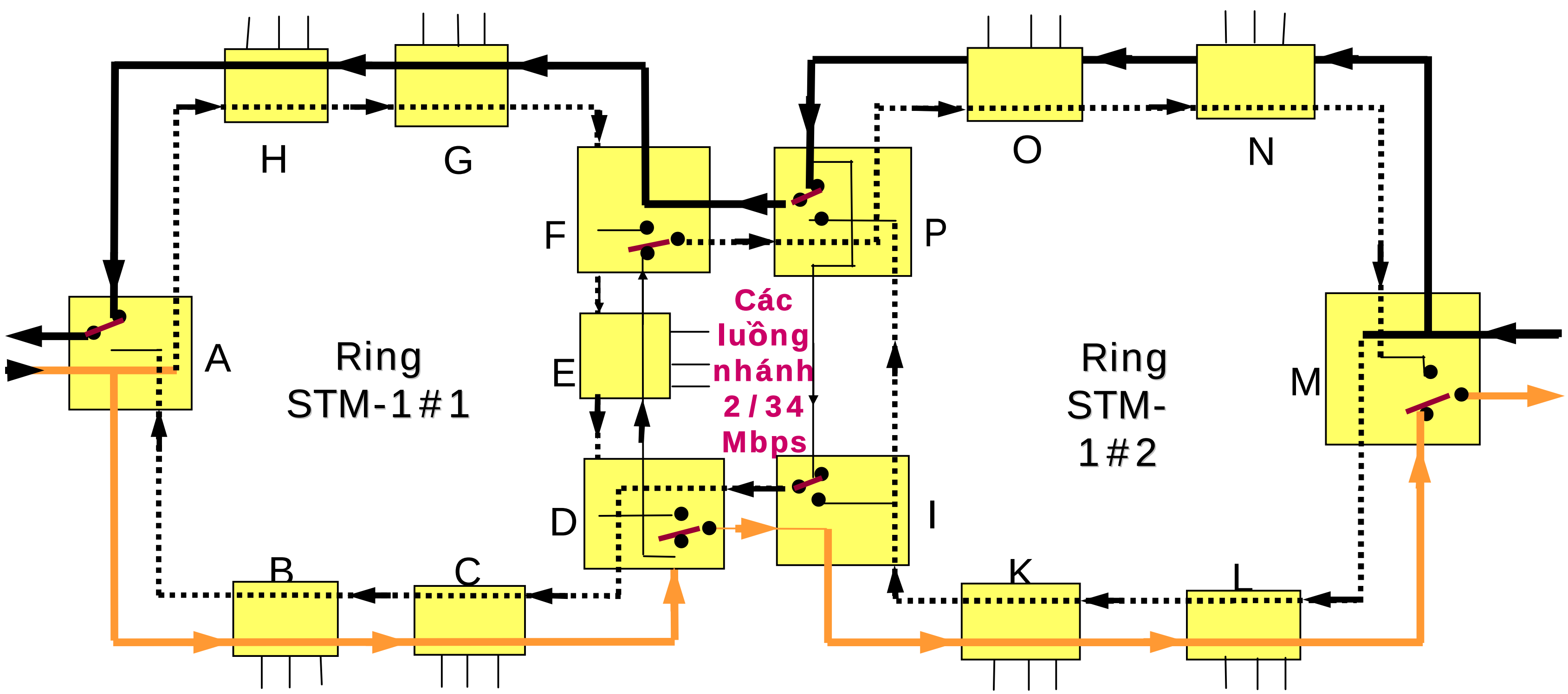
❖ Mạng vòng 4 sợi song hướng chuyển mạch bảo vệ đoạn (BLSR-4F: Bidirectional Line protection Switching Ring – 4 Fibers)



Sự cố đứt cáp

BẢO VỆ TRONG MẠNG VÒNG (1)

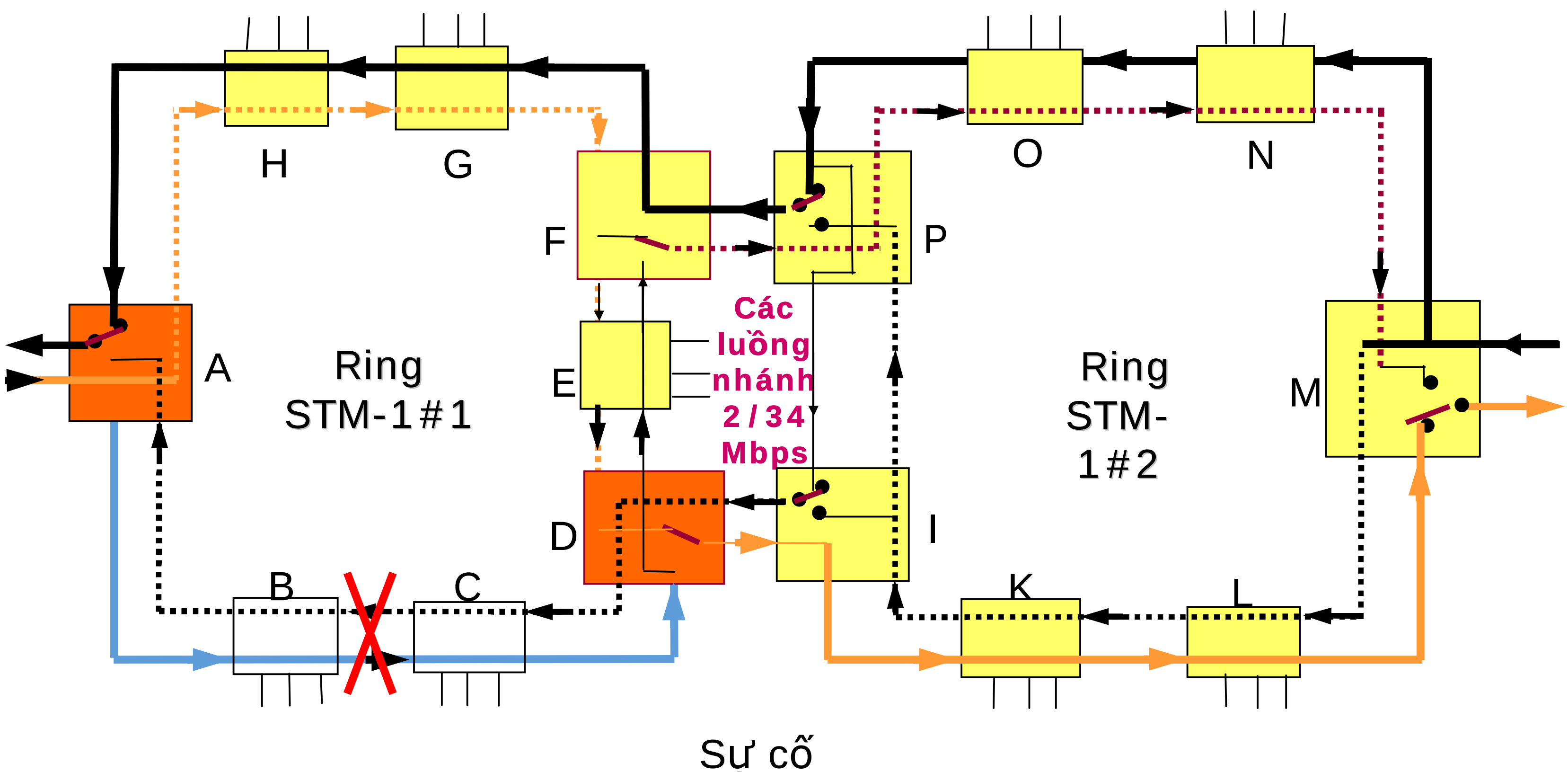
❖ Mạng đa vòng



Bình thường

BẢO VỆ TRONG MẠNG VÒNG (1)

❖ Mạng đa vòng



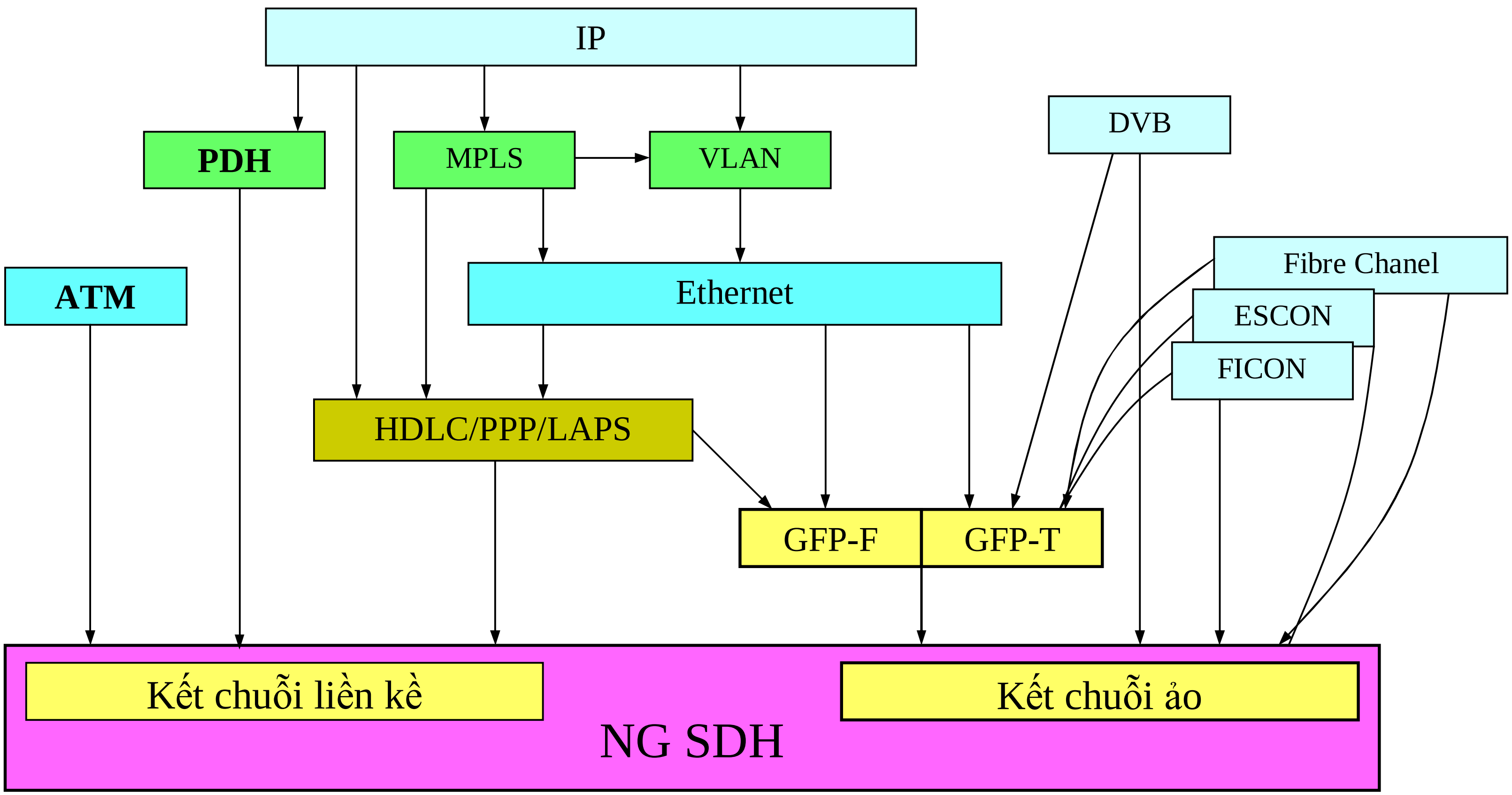
CHƯƠNG 4

CÁC PHƯƠNG THỨC TRUYỀN TẢI SỐ LIỆU

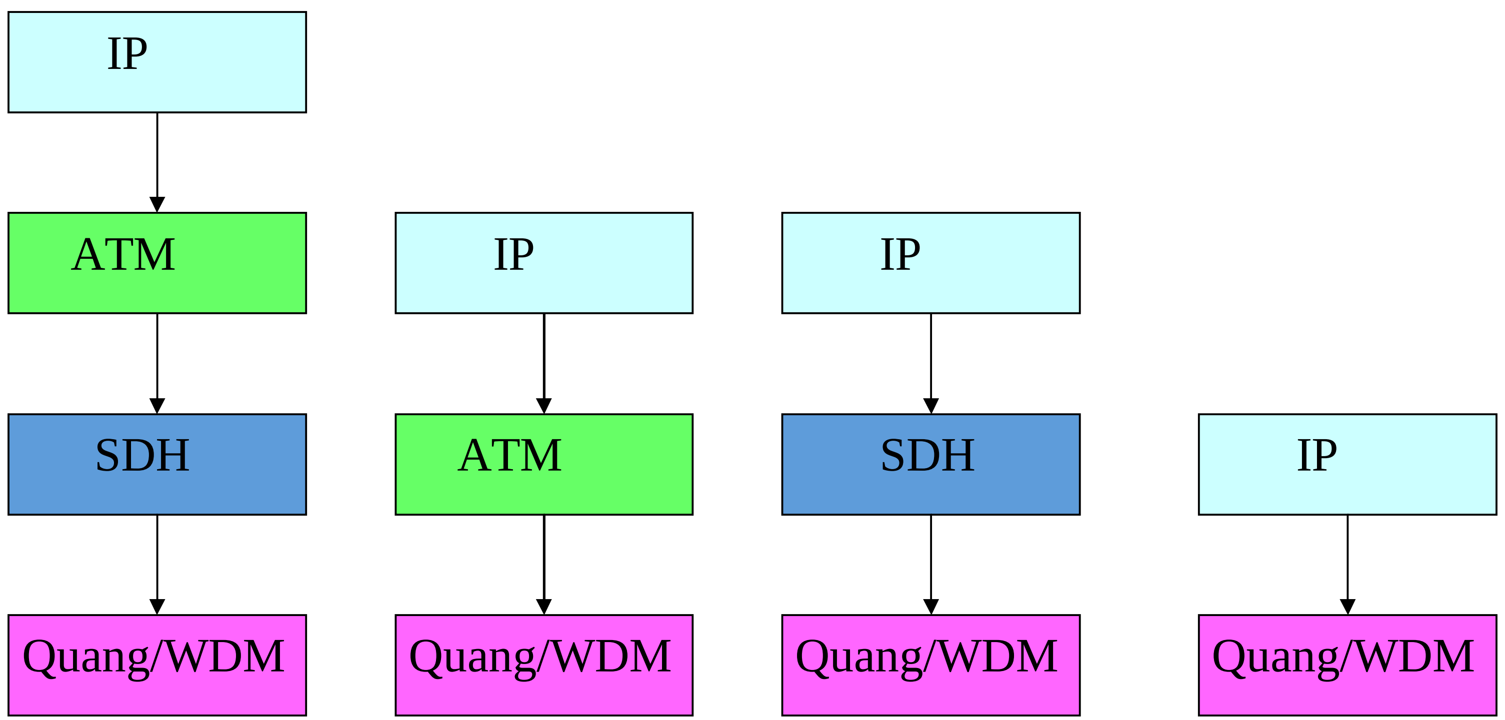
CÁC PHƯƠNG THỨC TRUYỀN TẢI SỐ LIỆU (1)

- Đặt vấn đề
  - Các công nghệ truyền dẫn trước đây thường tối ưu cho lưu lượng thoại và dữ liệu kênh có hướng (lưu lượng chủ yếu)
  - Lưu lượng chủ yếu hiện nay là gói dữ liệu (IP) → công nghệ truyền dẫn cần có sự cải tiến
  - Các dịch vụ càng đa dạng nên dạng lưu lượng cũng đa dạng hơn: DVB, Fiber Channel, ESCON, FICON,…
- Nội dung
  - Truyền tải số liệu qua SDH
  - IP/quang
  - Công nghệ mạng vòng thẻ bài (Token Ring) và FDDI
  - Công nghệ Ethernet
  - Công nghệ mạng vòng gói tự phục hồi RPR

TRUYỀN TẢI SỐ LIỆU QUA SDH



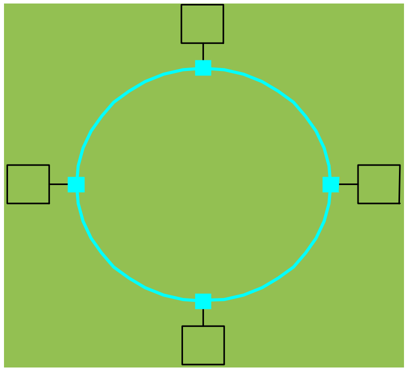
TRUYỀN TẢI IP/ QUANG



CÔNG NGHỆ TOKEN RING VÀ FDDI

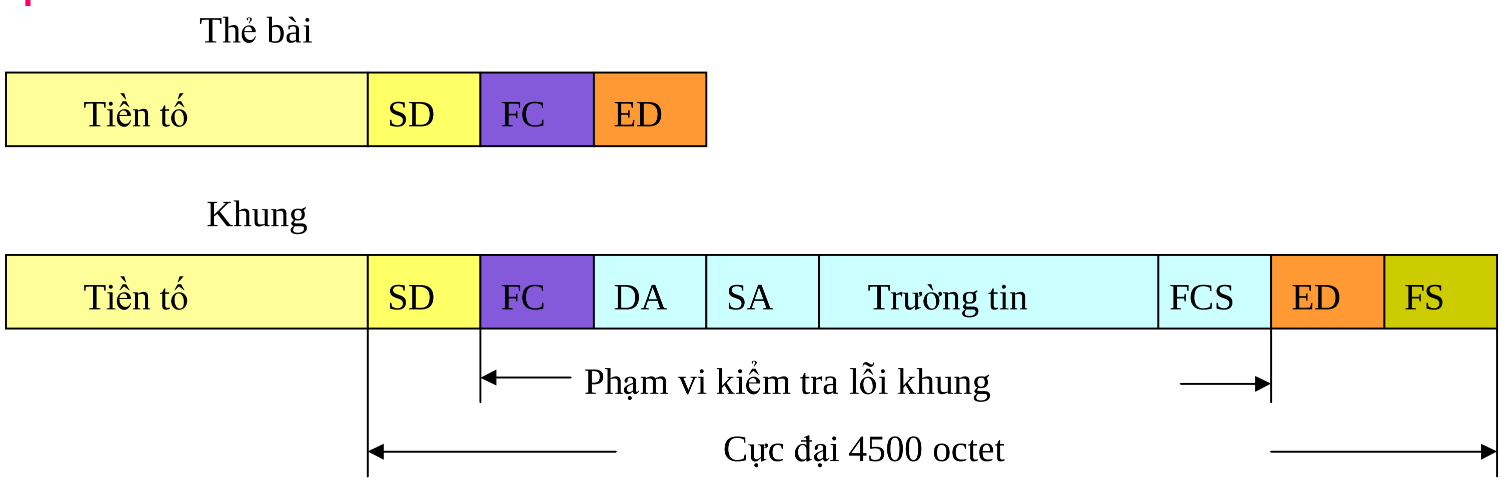
❖ Token Ring:

- Standard IEEE 802.5 “Token Ring”
- Trước khi truyền đi, mỗi nhóm dữ liệu được cấp một thẻ bài (token=bit sequence)→tạo khung truyền dẫn
- Đến nơi thu, thẻ bài được giải phóng→xóa khung truyền dẫn
- Truyền dẫn một chiều trong vòng (upstream/ downstream)
- Kết nối giữa các node trong vòng theo kiểu điểm – điểm
- Phương thức truyền dẫn: round – robin
- Không bị xung đột (no collisions)
- Sử dụng hiệu quả tài nguyên mạng
- Thời gian đáp ứng nhanh



CÔNG NGHỆ TOKEN RING VÀ FDDI

- FDDI – Fiber Distributed Data Interface
  - Token Ring cho mạng LAN sử dụng sợi quang → high performance



SD- Giới hạn khởi đầu khung; FC- Điều khiển khung, 8bit;
DA- Địa chỉ đích, 16 hoặc 48 bit; SA- Địa chỉ nguồn, 16 hoặc 48 bit;
FCS- Dãy kiểm tra khung, 32 bit; FS- Trạng thái khung;
ED- Giới hạn cuối khung.

CÔNG NGHỆ ETHERNET

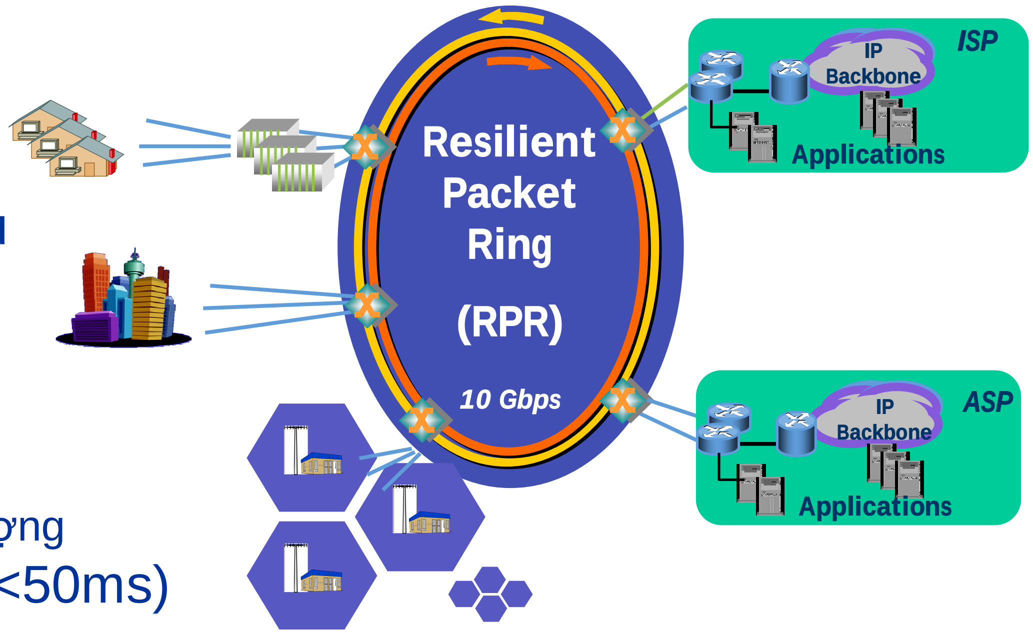
- ❖ Công nghệ chuyển mạch gói ứng dụng cho mạng LAN
- ❖ Băng thông: 10Mbps, 100Mbps, 1Gbps
- ❖ Broadcasting → cấu hình mạng phổ biến: bus, star
- ❖ Dữ liệu truyền dẫn trên mạng phải được đóng gói theo chuẩn Ethernet
- ❖ Khuôn dạng khung Ethernet chung

7 byte	1 byte	6 byte	6 byte	2 byte	Độ dài thay đổi từ 46 ÷1500 byte	4 byte
Đầu đề	SFD	D_MAC_Addr	S_MAC_Addr	Độ dài/Kiểu	Số liệu khách hàng MAC	FCS

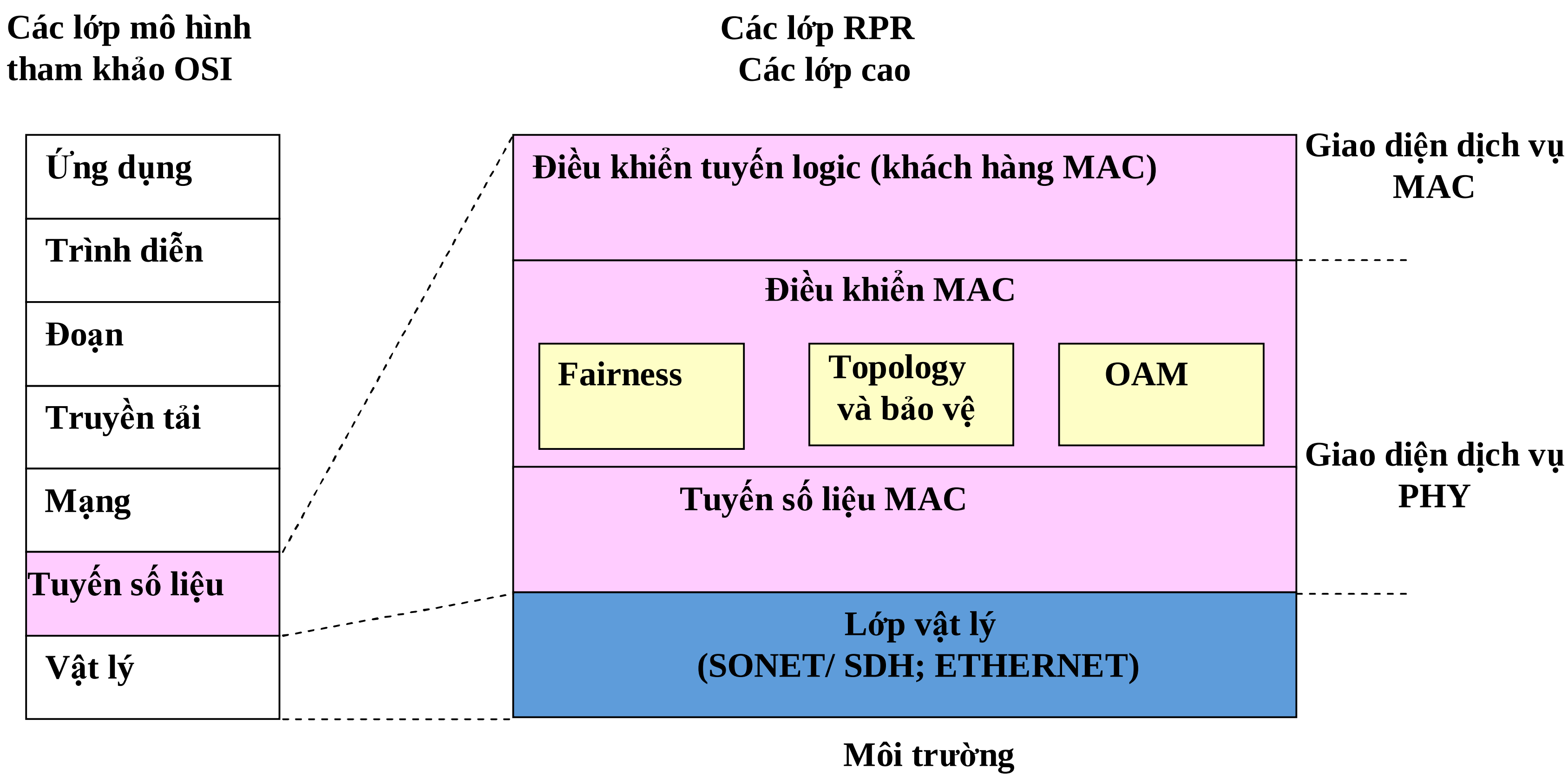
64 byte ≤ kích cỡ khung ≤ 1518 byte

CÔNG NGHỆ MẠNG VÒNG GÓI TỰ PHỤC HỒI (RPR)

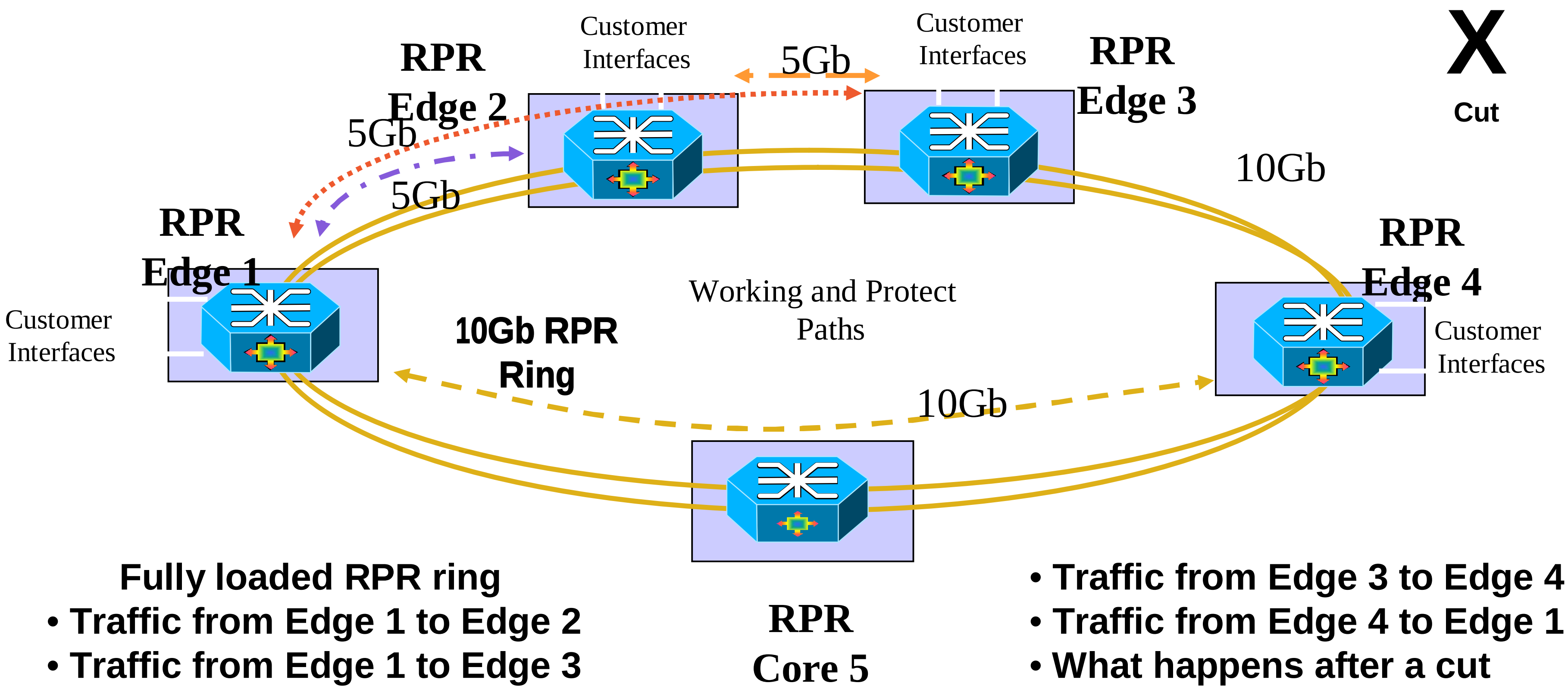
- Cấu hình vòng dựa trên lớp MAC
  - Standard IEEE 802.17
- Đặc điểm cơ bản:
  - Dữ liệu truyền trên vòng theo hai hướng ngược chiều nhau và có thể tách/ xen tại tất cả các node
  - Quản lí băng thông tốt:
    - Tái sử dụng băng thông
    - Thuật toán cân bằng lưu lượng
  - Cơ chế phục hồi nhanh: (<50ms)
  - Dịch vụ đa dạng:
    - Hỗ trợ các dịch vụ tốc độ cố định hoặc thay đổi
    - Giảm trễ đối với các ứng dụng thời gian thực



CÔNG NGHỆ MẠNG VÒNG GÓI TỰ PHỤC HỒI (RPR)



CÔNG NGHỆ MẠNG VÒNG GÓI TỰ PHỤC HỒI (RPR)

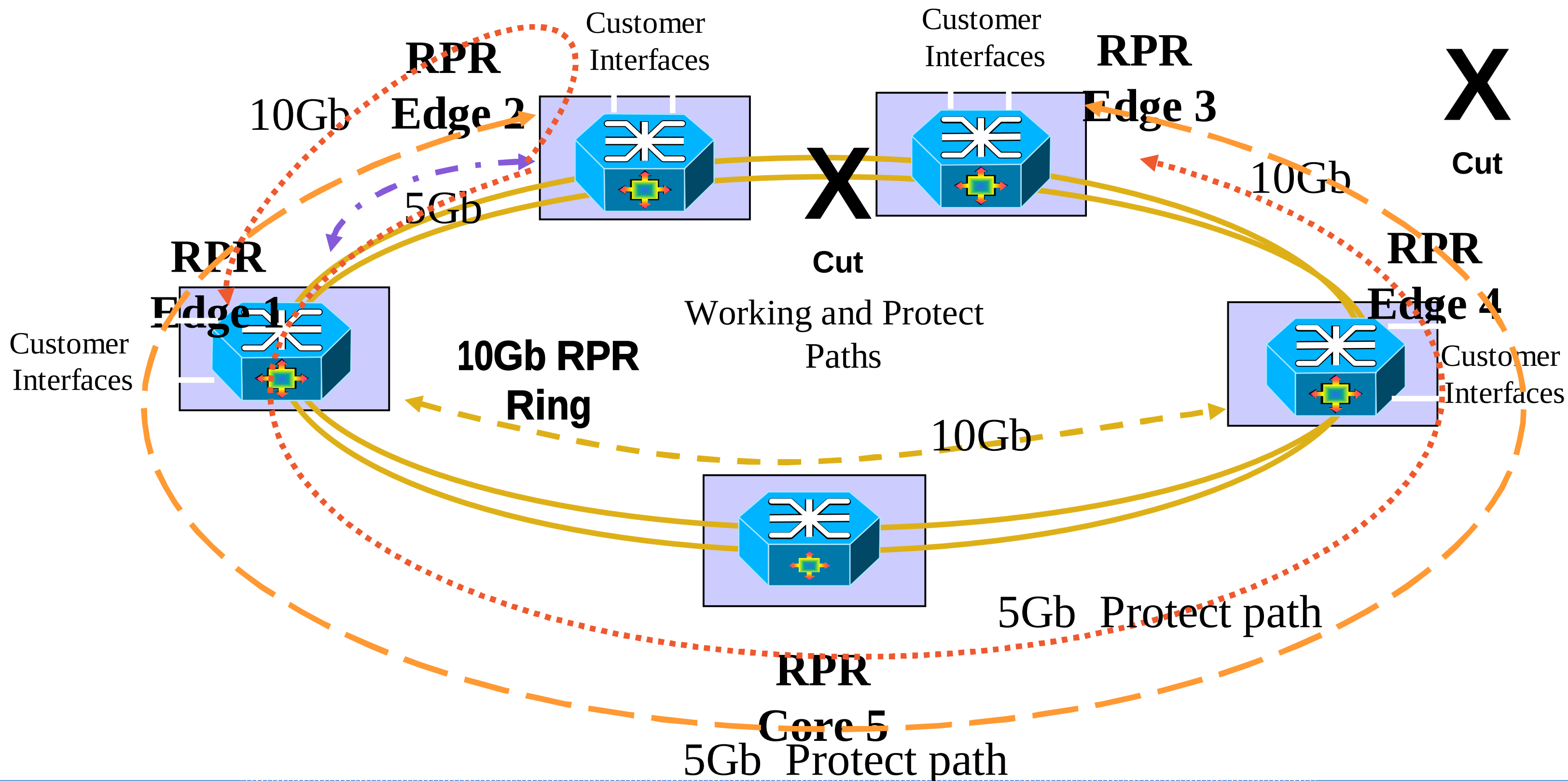


Fully loaded RPR ring

- Traffic from Edge 1 to Edge 2
- Traffic from Edge 1 to Edge 3
- Traffic from Edge 2 to Edge 3
- Traffic from Edge 3 to Edge 4
- Traffic from Edge 4 to Edge 1
- What happens after a cut between Edge 2 and Edge 3

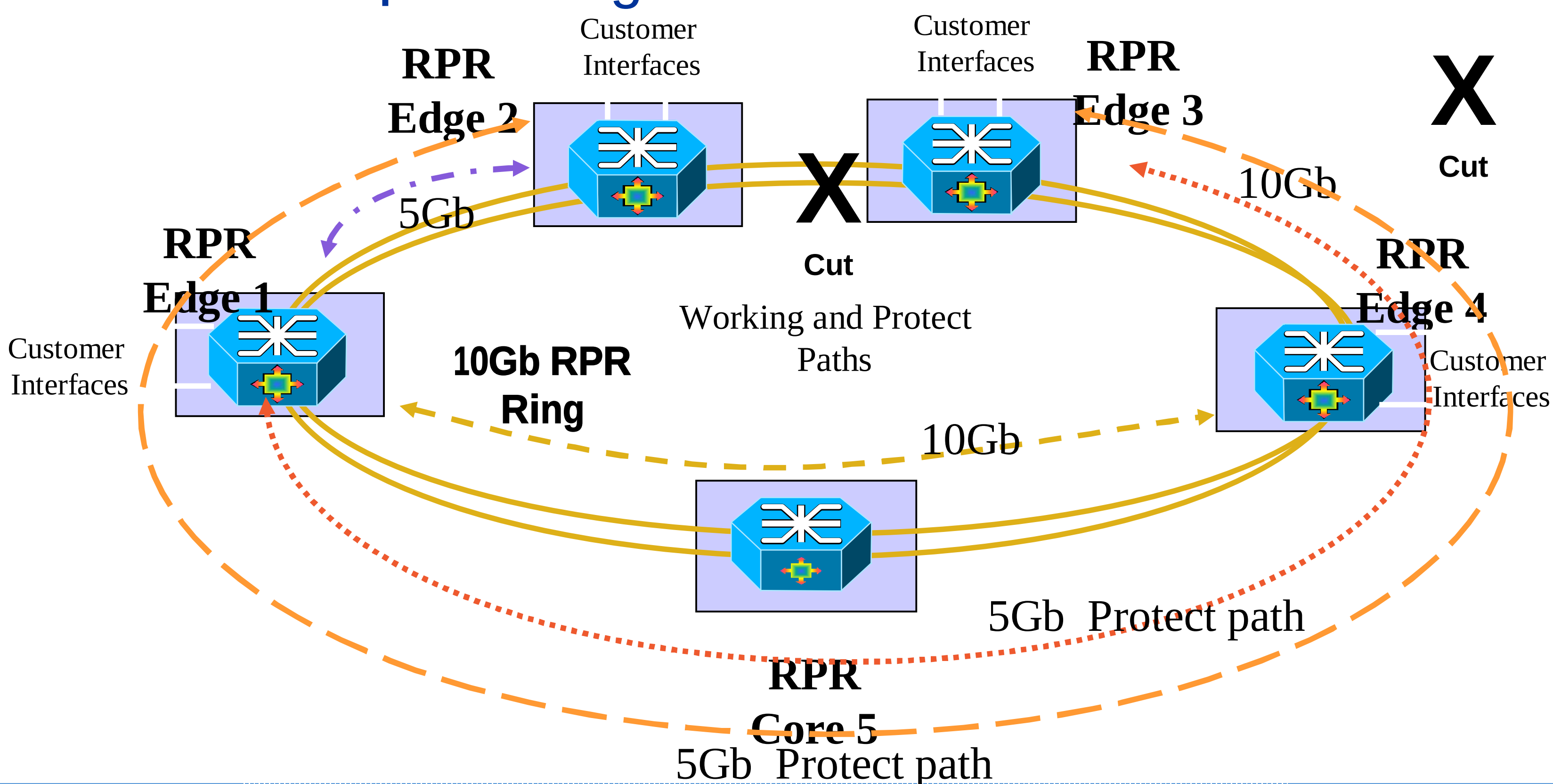
CÔNG NGHỆ MẠNG VÒNG GÓI TỰ PHỤC HỒI (RPR)

❖ Cơ chế bảo vệ Wrapping



CÔNG NGHỆ MẠNG VÒNG GÓI TỰ PHỤC HỒI (RPR)

❖ Cơ chế bảo vệ Steering



Chương 1

GIỚI THIỆU VỀ XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

T.S. Đinh Đức Anh Vũ

BK
TP.HCM

Faculty of Computer Science and Engineering
HCMC University of Technology
268, av. Ly Thuong Kiet,
District 10, HoChiMinh city
Telephone : (08) 864-7256 (ext. 5843)
Fax : (08) 864-5137
Email : anhvu@hcmut.edu.vn
http://www.cse.hcmut.edu.vn/~anhvu

Tín hiệu và Hệ thống

- Tín hiệu (t/h)
  - Đại lượng vật lý biến thiên theo thời gian, theo không gian, theo một hoặc nhiều biến độc lập khác
    - Âm thanh, tiếng nói: dao động sóng ~ thời gian (t)
    - Hình ảnh: cường độ ánh sáng ~ không gian (x,y,z)
    - Địa chấn: chấn động địa lý ~ thời gian
  - Biểu diễn toán học: hàm theo biến độc lập
    - $u(t) = 2t^2 - 5$
    - $f(x,y) = x^2 - 2xy - 6y^2$
    - Các t/h tự nhiên thường không biểu diễn được bởi một hàm sơ cấp
      - Hàm xấp xỉ cho các t/h tự nhiên

Tín hiệu và Hệ thống

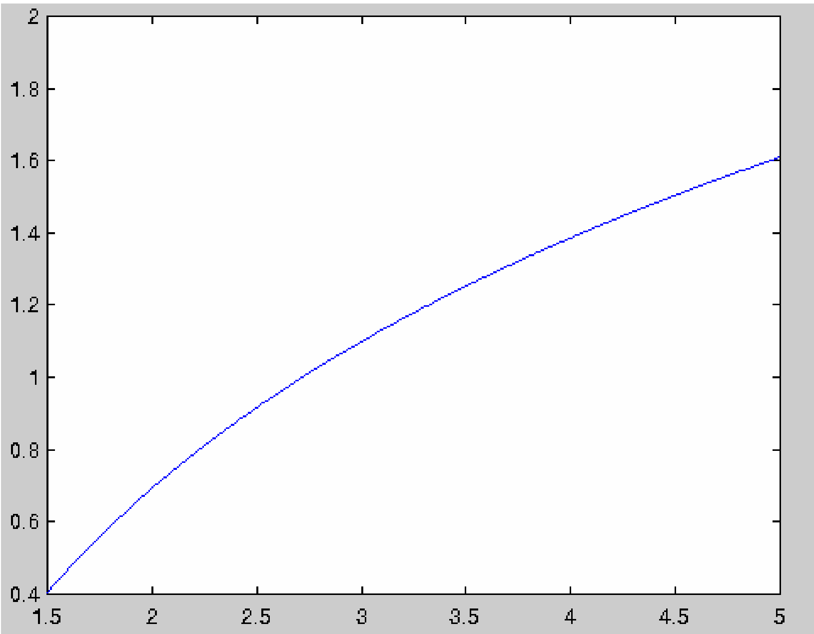
- Hệ thống (h/t)
  - Thiết bị vật lý, thiết bị sinh học, hoặc chương trình thực hiện các phép toán trên tín hiệu nhằm biến đổi tín hiệu, rút trích thông tin, ...
  - Việc thực hiện phép toán còn được gọi là xử lý tín hiệu
  - Ví dụ
    - Các bộ lọc t/h
    - Các bộ trích đặc trưng thông tin trong t/h
    - Các bộ phát, thu, điều chế, giải điều chế t/h, ...

Phân loại tín hiệu, hệ thống

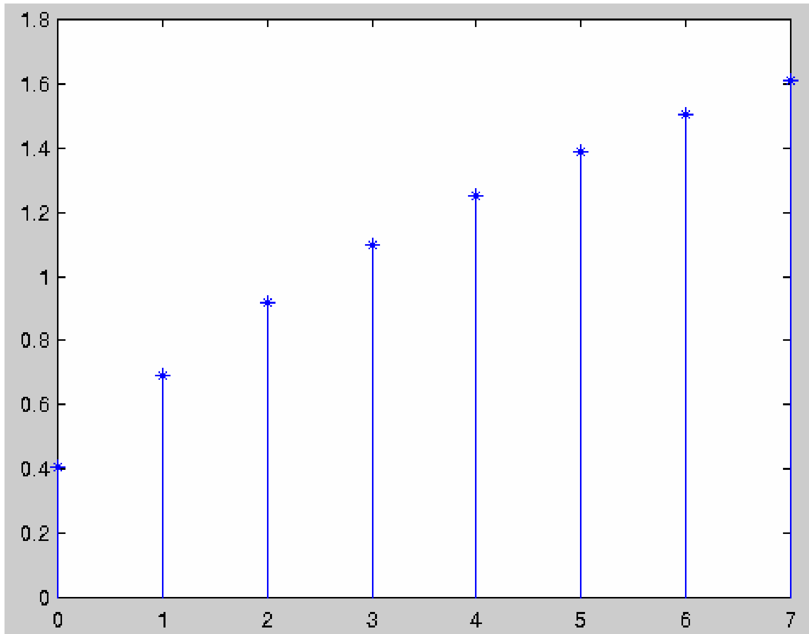
- T/h đa kênh – T/h đa chiều
  - T/h đa kênh: gồm nhiều t/h thành phần, cùng chung mô tả một đối tượng nào đó (thường được biểu diễn dưới dạng vector)
    - T/h điện tim (ECG – ElectroCardioGram)
    - T/h điện não (EEG – ElectroEncephaloGram)
    - T/h ảnh màu RGB
  - T/h đa chiều: biến thiên theo nhiều hơn một biến độc lập
    - T/h hình ảnh: ~ (x, y)
    - T/h TV trắng đen: ~ (x, y, t)
  - Có t/h vừa đa kênh và đa chiều
    - T/h TV màu

Phân loại tín hiệu, hệ thống

- T/h LTTG
  - T/h được định nghĩa tại mọi điểm trong đoạn thời gian [a, b]
  - x(t)

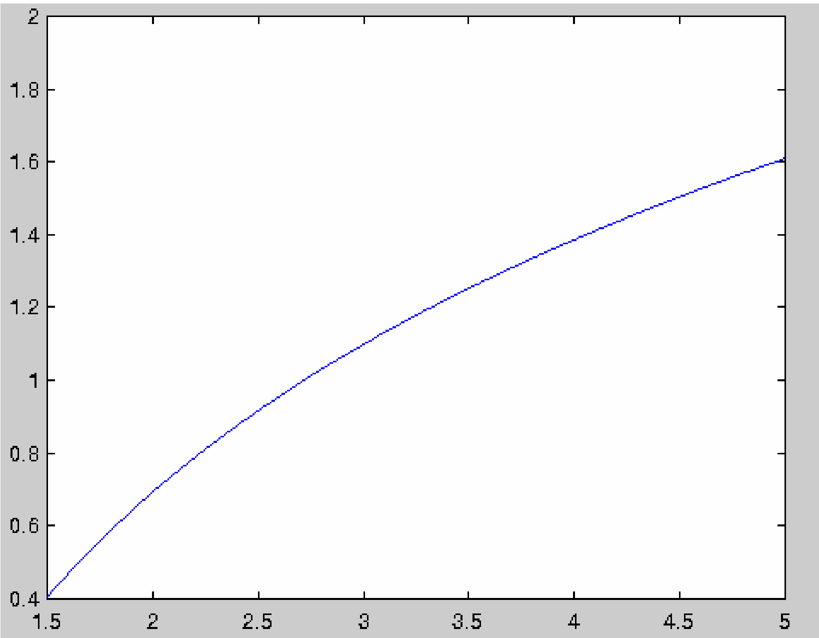


- T/h RRTG
  - T/h chỉ được định nghĩa tại những thời điểm rời rạc nhau
  - x(n)

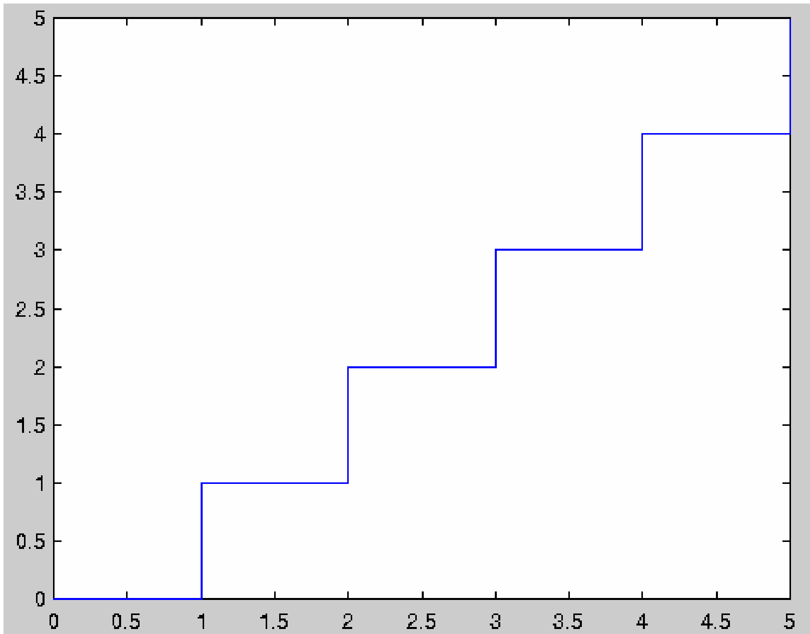


Phân loại tín hiệu, hệ thống

- T/h liên tục giá trị
  - T/h có thể nhận trị bất kỳ trong đoạn [Ymin, Ymax]

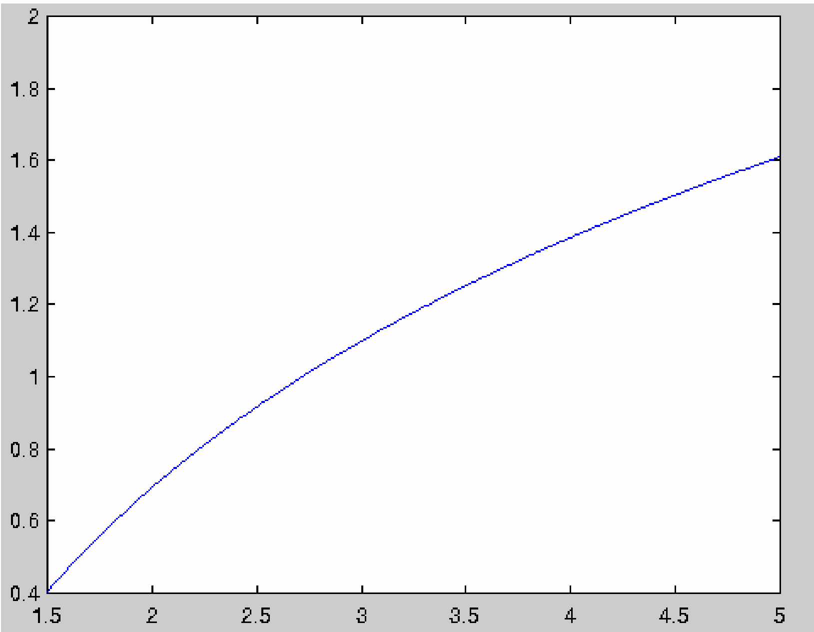


- T/h rời rạc giá trị
  - T/h chỉ nhận trị trong một tập trị rời rạc định trước

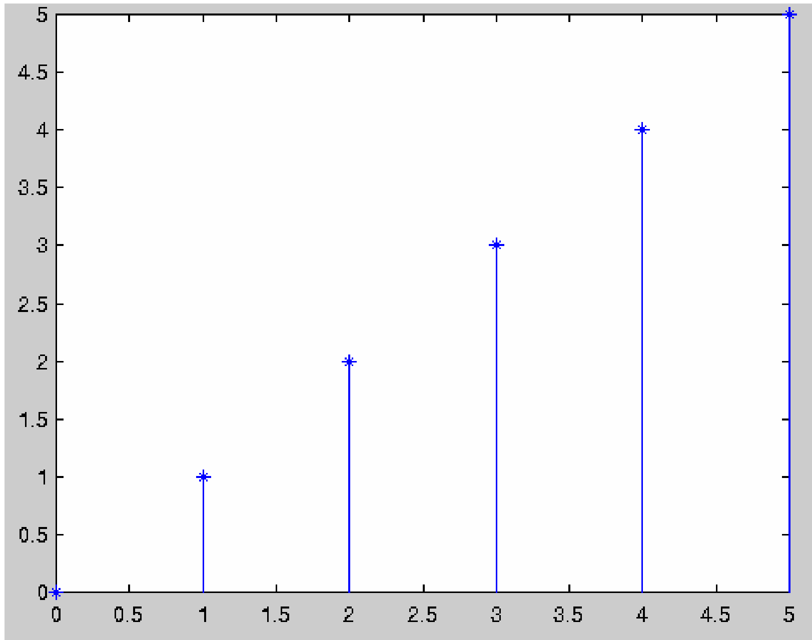


Phân loại tín hiệu, hệ thống

- T/h LTTG, liên tục giá trị
  - T/h tương tự (analog)



- T/h RRTG, rời rạc giá trị
  - T/h số (digital)

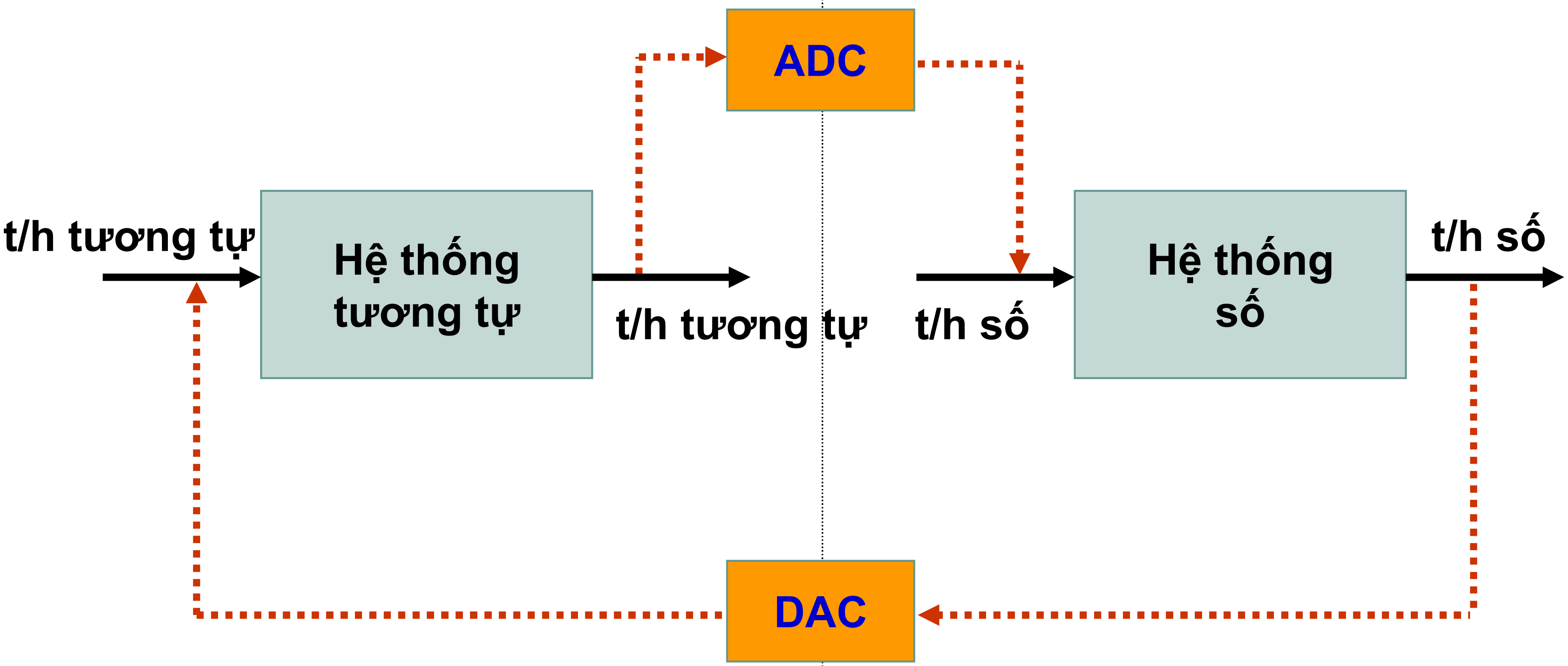


Phân loại tín hiệu, hệ thống

- T/h ngẫu nhiên
  - Giá trị của t/h trong tương lai không thể biết trước được
  - Các t/h trong tự nhiên thường thuộc nhóm này
- T/h tất định
  - Giá trị t/h ở quá khứ, hiện tại và tương lai đều được xác định rõ
  - T/h có công thức xác định rõ ràng

Phân loại tín hiệu, hệ thống

- H/t xử lý t/h tương tự
- H/t xử lý t/h số



Phân loại tín hiệu, hệ thống

- H/t xử lý t/h số
  - Có thể lập trình được
  - Dễ mô phỏng, cấu hình - sản xuất hàng loạt với độ chính xác cao
  - Giá thành hạ
  - T/h số dễ lưu trữ, vận chuyển và sao lưu

<u>Nhược điểm</u>

  - Khó thực hiện với các t/h có tần số cao

Tần số

- T/h liên tục thời gian
  - Tần số liên quan mật thiết với dao động điều hòa (harmonic oscillation) được mô tả bởi các hàm sin
  - Xét thành phần t/h cơ bản

$$\mathbf{x_a(t) = ACos(\Omega t + \theta),} \qquad -\infty < t < +\infty$$

A	: biên độ t/h
$\Omega = 2\pi F$	: Tần số góc (rad/s)
F	: Tần số - chu kỳ/s – (Hz)
θ	: Pha (rad)
$T_p = 1/F$	: Chu kỳ (s)

  - 3 đặc trưng cơ bản
    1) Với F xác định, $x_a(t)$ tuần hoàn với chu kỳ: $T_p = 1/F$
    2) Tần số khác nhau thì hai tín hiệu sẽ khác nhau
    3) Khi F tăng thì hệ số dao động tăng

Tần số

- T/h rời rạc thời gian
  - Xét thành phần t/h cơ bản

$$x(n) = A\, Cos(\omega n + \theta) \qquad -\infty < n < +\infty$$

n	: chỉ số mẫu (nguyên)
A	: biên độ
$\omega = 2\pi f$	: tần số (radian/mẫu)
f	: tần số (chu kỳ/mẫu)
θ	: pha (rad)

  - 3 đặc trưng cơ bản

1) x(n) tuần hoàn ⇔ f là số hữu tỉ
2) Các t/h có tần số ω cách nhau một bội 2π là đồng nhất nhau
3) Hệ số dao động cao nhất của x(n) khi: $\omega=\pi$ (hay $\omega=-\pi$), tức f = 1/2 hay –1/2

Tần số

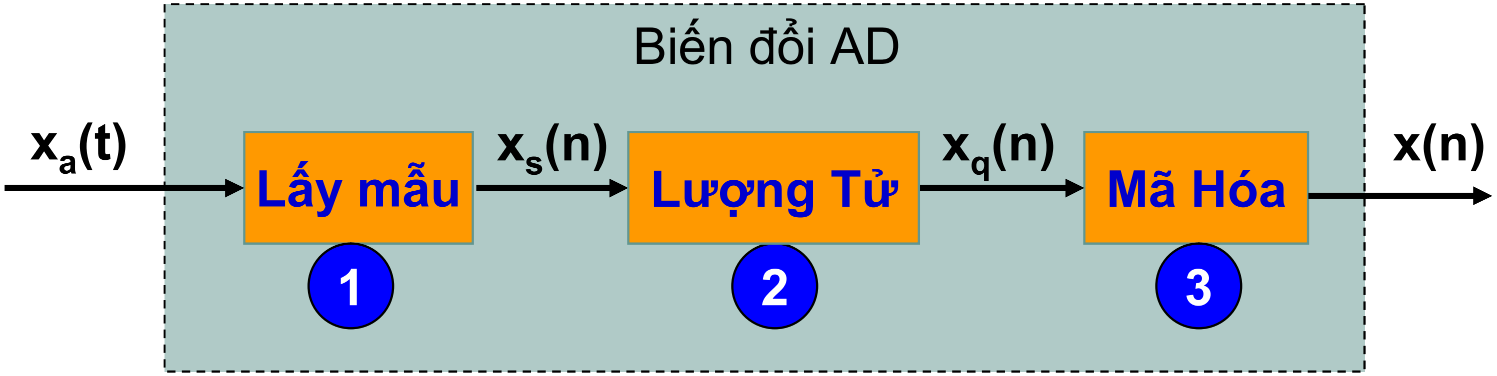
- Khoảng tần số
  - T/h LTTG

    $-\infty < \Omega < +\infty$
  - T/h RRTG

    ω: một đoạn 2π bất kỳ, thường ω: $[0, 2\pi]$ hoặc $[-\pi, \pi]$

- T/h mũ phức
  - LTTG
    - Cơ bản: $s_k(t) = e^{jk\Omega_0 t}$ với k: nguyên
    - Tổng hợp: $x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k s_k(t)$
  - RRTG
    - Cơ bản: $s_k(n) = e^{jk\omega_0 n}$ $\omega_0 = 2\pi f_0$, $f_0 = 1/N$
    - Tổng hợp: $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k s_k(n)$

Quá trình rời rạc hoá



- $x_a(t)$: LTTG, LTBĐ
- $x_s(n)$: RRTG, LTBĐ
- $x_q(n)$: RRTG, RRBĐ
- $x(n)$: RRTG, RRBĐ

- Sai số lượng tử $e_q(n) = x_q(n) - x_s(n)$

Quá trình rời rạc hoá

- Lấy mẫu
  - Đo đạc t/h $x_a(t)$ tại những thời điểm rời rạc, thường là cách đều nhau
    $t = nT_s$ (n: nguyên)

    $x_s(n) = x_a(nT_s)$ với $-\infty < n < +\infty$

    T_s : chu kỳ lấy mẫu

    $F_s = 1/T_s$: tần số lấy mẫu

  - Lấy mẫu t/h cơ bản: $x_a(t) = ACos(2\pi Ft + \theta)$

$$x_a(t) = ACos(2\pi Ft + \theta) \longrightarrow \boxed{\text{Lấy mẫu}} \longrightarrow x_s(n)$$

$$\begin{aligned} x_s(n) &= ACos(2\pi FnT_s + \theta) \\ &= ACos(2\pi[F/F_s]n + \theta) \\ &= ACos(2\pi fn + \theta) \end{aligned}$$

  - Quan hệ giữa tần số F của t/h tương tự và tần số f của t/h RRTG

    $$\mathbf{f = F/F_s}$$

  - Ràng buộc: $-½ < f < ½ \Leftrightarrow -½ < F/F_s < ½ \Leftrightarrow -F_s/2 < F < F_s/2$

Quá trình rời rạc hoá

- Vi phạm ràng buộc - Hiện tượng xen phủ
  - Ví dụ cho 2 t/h $x_1(t) = 3Cos(20\pi t)$
    $x_2(t) = 3Cos(220\pi t)$

  lấy mẫu $x_1(t)$ và $x_2(t)$ với $F_s = 100Hz$

$x_1(t)$

$x_2(t)$

Quá trình lấy mẫu

$x_2(t)$: vi phạm ràng buộc về lấy mẫu

$x_1(n) = 3Cos([20/100]\pi n)$
$= 3Cos(\pi n/5)$

$x_2(n) = 3Cos([220/100]\pi n)$
$= 3Cos([11/5]\pi n)$
$= 3Cos([(10 + 1)/5]\pi n)$

$x(n) = 3Cos(\pi n/5)$

Hai tín hiệu cho cùng một kết quả

Quá trình rời rạc hoá

- Tổng quát của hiện tượng xen phủ

$x_0(t) = ACos(2\pi F_0 t + \theta)$

$x_k(t) = ACos(2\pi F_k t + \theta)$ với $F_k = F_0 + kF_s$ (k: nguyên)

Với tần số lấy mẫu F_s các t/h trong họ $x_k(t)$ cho cùng kết quả như $x_0(t)$

Quá trình rời rạc hoá

- Định lý lấy mẫu
  - $x_a(t)$ có tần số lớn nhất là $F_{max} = B$
  - Nếu lấy mẫu $x_a(t)$ với tần số $F_s > 2F_{max} = 2B$, thì có thể phục hồi $x_a(t)$ mà không bị mất thông tin
  - Công thức phục hồi
    - Hàm nội suy $g(t) = [\mathrm{Sin}(2\pi Bt)]/(2\pi Bt)$
    - $x_s(n)$: kết quả lấy mẫu
    - $T_s = 1/F_s$: chu kỳ mẫu

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_s(nT_s) * g(t - nT_s)$$

(CM : xem chương 4)

Quá trình rời rạc hoá

- Lượng tử
  - Quá trình rời rạc hoá biên độ
  - Phương pháp: làm tròn hay cắt bỏ
  - Qui ước:
    - L số mức lượng tử
    - Y_{max}, Y_{min}: trị lớn nhất và nhỏ nhất của t/h
    - Δ: bước lượng tử

$\Delta = (Y_{max} - Y_{min})/(L-1)$

Sai số lượng tử:

- Làm tròn: $| e_q(n) | <= \Delta/2$
- Cắt: $| e_q(n) | < \Delta$

Quá trình rời rạc hoá

- Mã hoá
  - ✦Phép gán một con số cho mỗi mức lượng tử
  - ✦Nếu mỗi mức biểu diễn bởi b bit nhị phân thì:

    $2^b >= L$

    hay

    $b >= ceil(log_2 L)$

    ceil: hàm lấy số nguyên cận trên (Matlab)
  - ✦Ví dụ
    - L = 100 thì b>=7
    - L = 256 thì b>=8

Quá trình liên tục hoá

- Quá trình tái tạo tín hiệu LTTG từ t/h RRTG
- Các phương pháp
  - Bộ xấp xỉ zero-order
  - Bộ xấp xỉ first-order
  - Bộ xấp xỉ bậc cao + bộ lọc tương tự

Bài tập và thảo luận

Bằng Matlab hãy thực hiện:

Cho t/h: $x_a(t) = 4Cos(200\pi t - \pi/6) + 20Cos(300\pi t - \pi/3)$

1) Vẽ ở dạng liên tục trong 4 chu kỳ
2) Lấy mẫu $x_a(t)$ với các tần số lấy mẫu sau đây: F_s= 100, 200, 300, 400, 500, 600, 800, 1200
   Vẽ các t/h rời rạc thời gian tương ứng
3) Lượng tử các mẫu ở câu 2) với số bit là: 4, 8, 16
   a) Vẽ t/h sau lượng tử
   b) Ghi vào file dãy số đã lượng tử từ 1 chu kỳ của t/h
4) Tìm hiểu các hàm để mở các tập tin âm thanh, hình ảnh và hiển thị chúng

BK
TP.HCM

Chương 2

Tín hiệu và Hệ thống Rời Rạc Thời Gian

T.S. Đinh Đức Anh Vũ

Faculty of Computer Science and Engineering
HCMC University of Technology
268, av. Ly Thuong Kiet,
District 10, HoChiMinh city
Telephone : (08) 864-7256 (ext. 5843)
Fax : (08) 864-5137
Email : anhvu@hcmut.edu.vn
http://www.cse.hcmut.edu.vn/~anhvu

Nội dung (1)

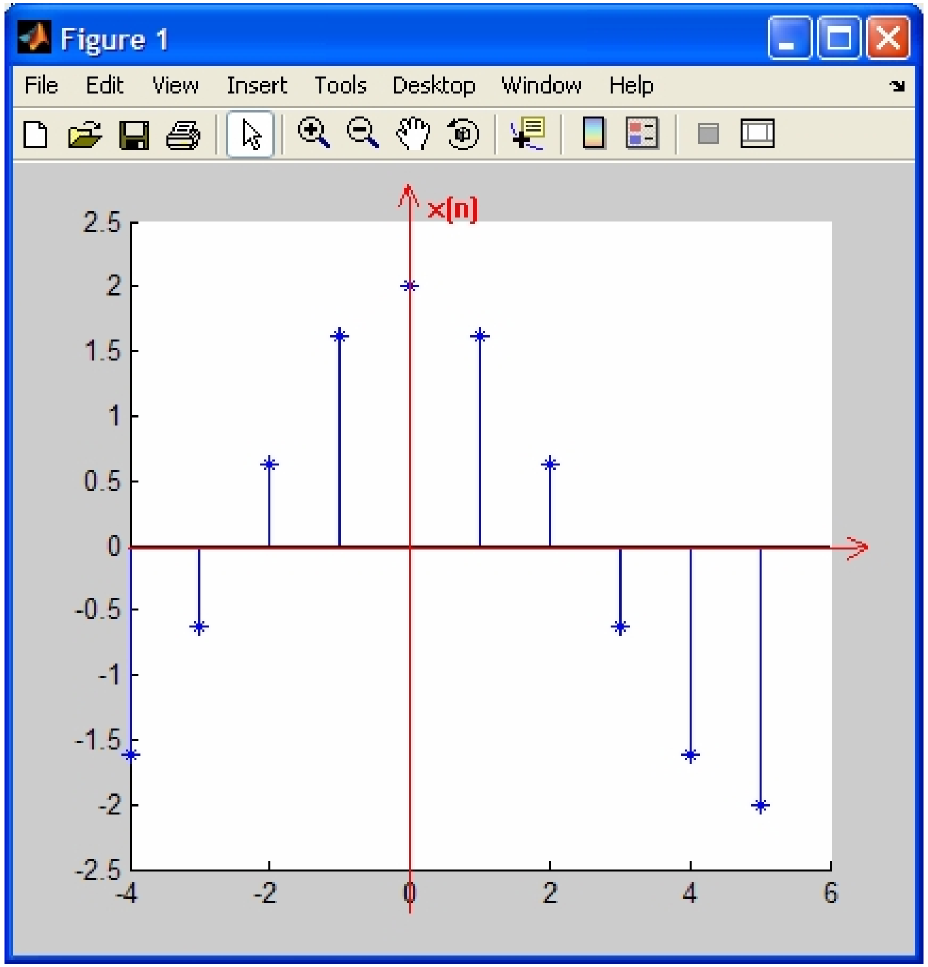
- Tín hiệu RRTG
  - Các t/h cơ bản
  - Phân loại t/h
  - Các phép toán cơ bản
- Hệ thống RRTG
  - Mô tả vào-ra
  - Mô tả sơ đồ khối
  - Phân loại h/t RRTG
- Phân tích hệ LTI trong miền thời gian
  - Phân giải t/h RRTG ra đáp ứng xung đơn vị
  - Tích chập và các thuộc tính
  - Biểu diễn hàm đáp ứng xung đơn vị cho hệ: nhân quả, ổn định
  - Hệ FIR, IIR

Nội dung (2)

- Phương trình sai phân
  - LTI và phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng
  - Giải PTSPTT HSH
  - Đáp ứng xung đơn vị của h/t đệ qui LTI
- Hiện thực hệ RRTG
  - Cấu trúc trực tiếp dạng 1
  - Cấu trúc trực tiếp dạng 2
- Tương quan giữa các t/h
  - Tương quan và tự tương quan
  - Thuộc tính của tương quan
  - Tương quan của các t/h tuần hoàn
  - Giải thuật tính sự tương quan

Tín hiệu RRTG

- Giới thiệu
  - Ký hiệu: x(n), n: nguyên
  - x(n) chỉ được định nghĩa tại các điểm rời rạc n, không được định nghĩa tại các điểm khác (không có nghĩa là x(n) bằng 0 tại các điểm đó)
  - $x(n) = x_a(nT_s)$ (T_s: chu kỳ mẫu)
  - n: chỉ số của mẫu tín hiệu, ngay cả khi t/h x(n) không phải đạt được từ lấy mẫu t/h $x_a(t)$



Tín hiệu RRTG

- Một số dạng biểu diễn

  1) Dạng hàm

$$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, 3 \\ 4, & n = 2 \\ 0, & n \text{ khác} \end{cases}$$

  2) Dạng bảng

n	...-2 -1 0 1 2 3 4 5...
x(n)	... 0 0 0 1 4 1 0 0...

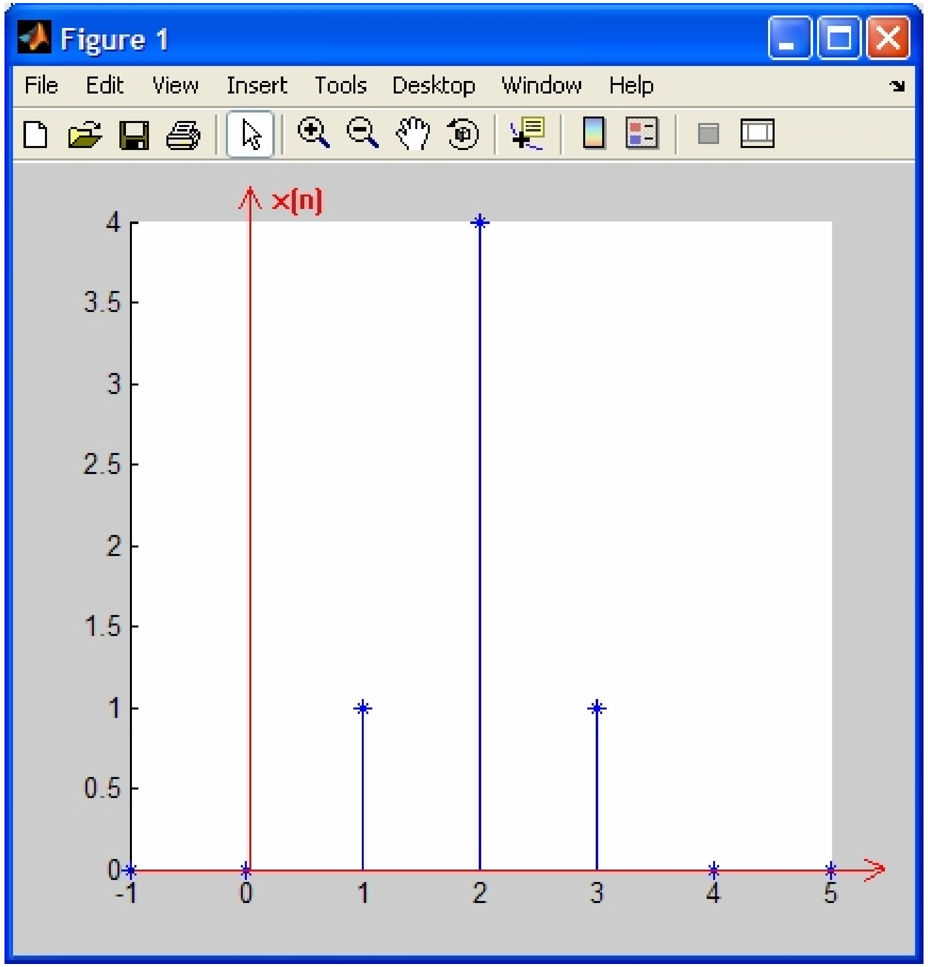
  3) Dạng chuỗi

  $\uparrow$: chỉ vị trí n=0

  $\{\ldots,0,\underset{\uparrow}{0},1,4,1,0,0,\ldots\}$ t/h vô hạn

  $\{0,\underset{\uparrow}{0},1,4,1,0,0\}$ t/h hữu hạn

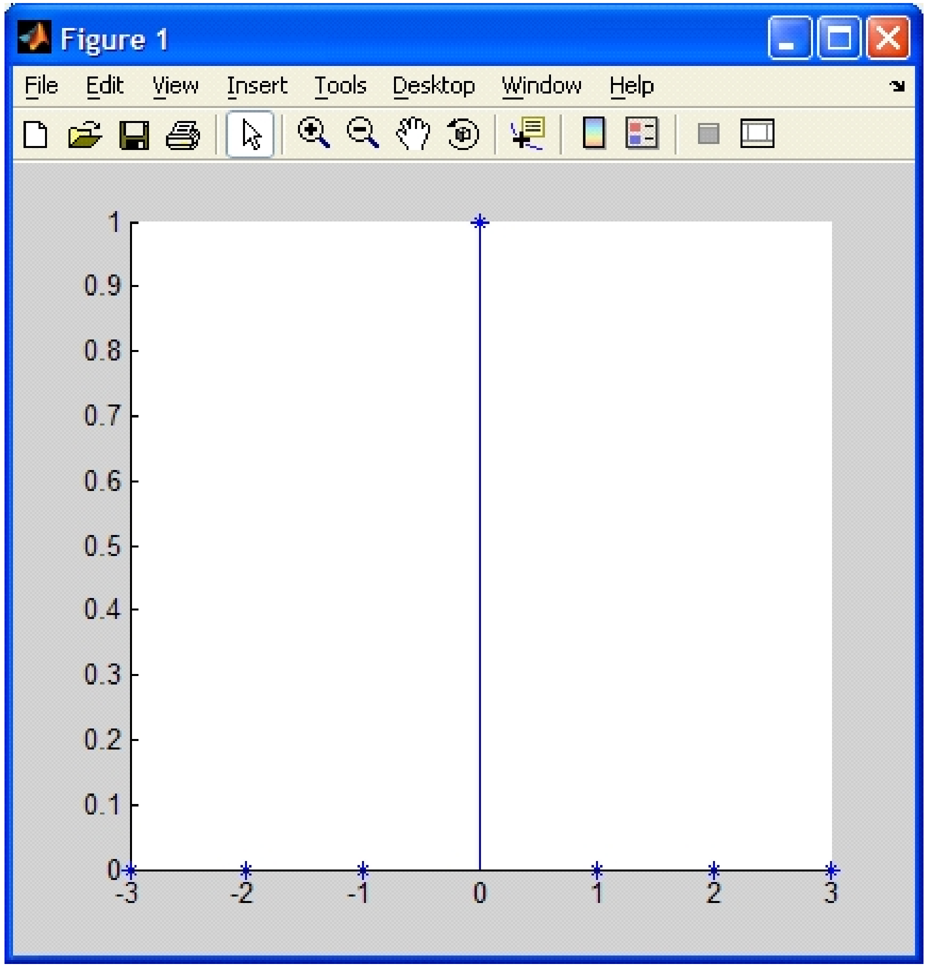
  4) Dạng đồ thị



Tín hiệu RRTG cơ bản

- T/h mẫu đơn vị (xung đơn vị)
  - ✦Ký hiệu: δ(n)
  - ✦Định nghĩa:

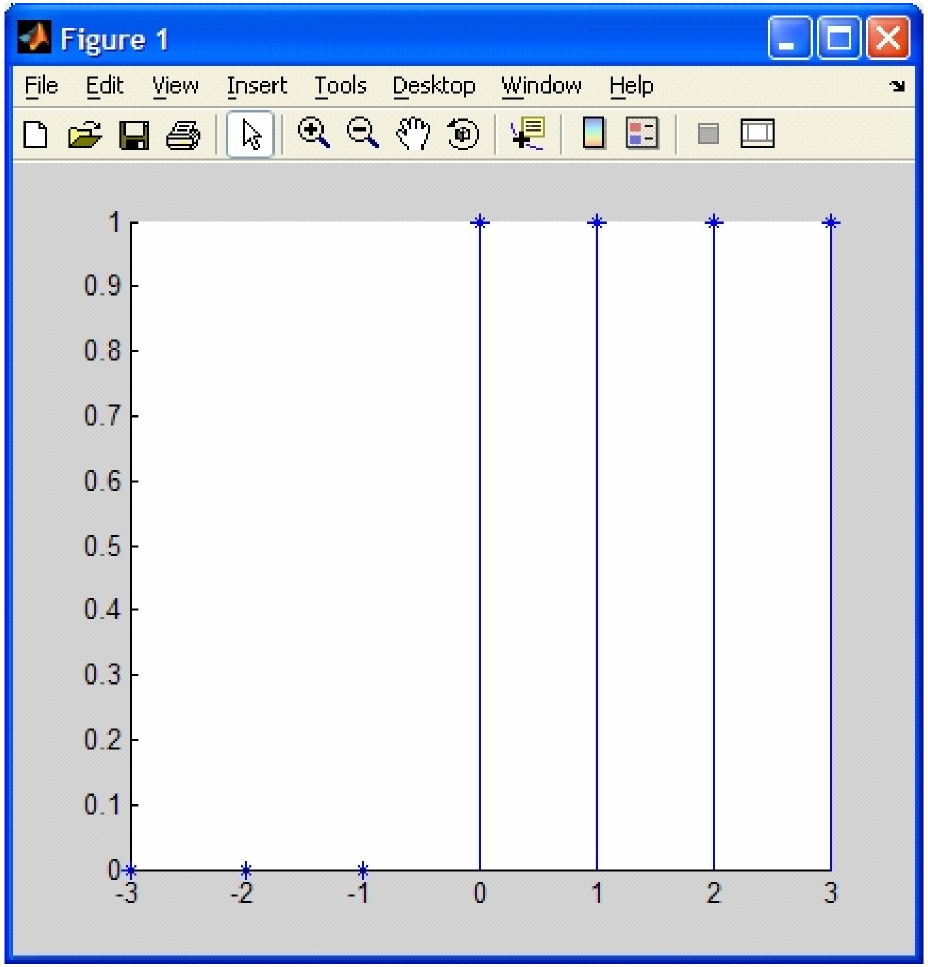
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



Tín hiệu RRTG cơ bản

- T/h bước đơn vị
  - ✦Ký hiệu: u(n)
  - ✦Định nghĩa:

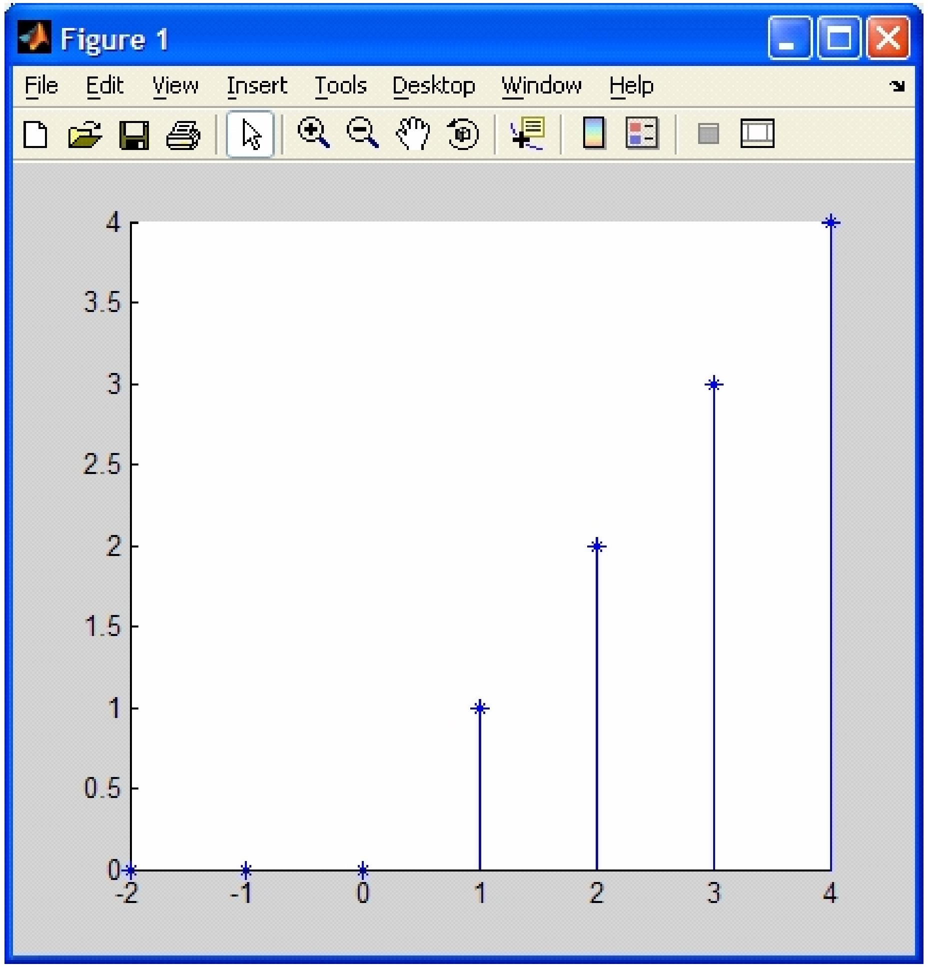
$$u(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



Tín hiệu RRTG cơ bản

- T/h dốc đơn vị
  - ✦Ký hiệu: $u_r(n)$
  - ✦Định nghĩa:

$$u_r(n) = \begin{cases} n & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



Tín hiệu RRTG cơ bản

- T/h mũ
  - Định nghĩa: $x(n) = a^n, \forall n$
  - Hằng số a
    - a: thực $\rightarrow$ x(n): t/h thực
    - a: phức $\rightarrow a \equiv re^{j\theta}$

$\rightarrow x(n) = r^n e^{j\theta n}$

$= r^n(\cos\theta n + j\sin\theta n)$

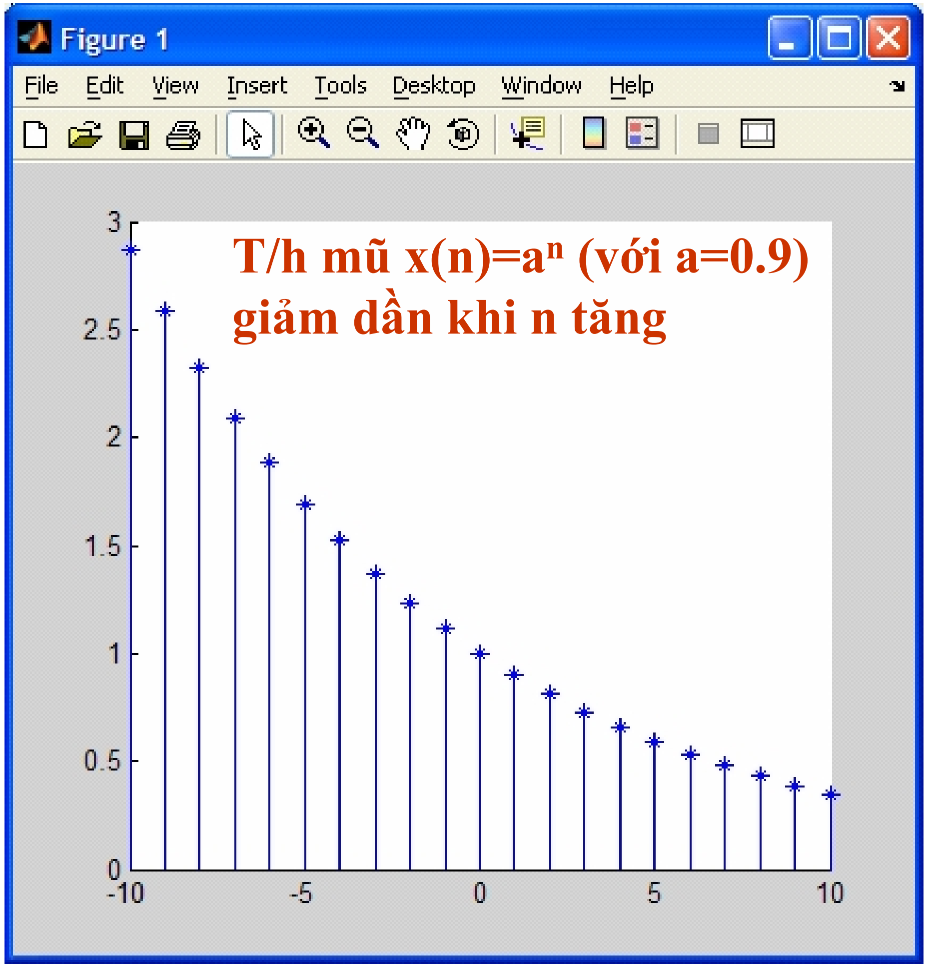
2 cách biểu diễn

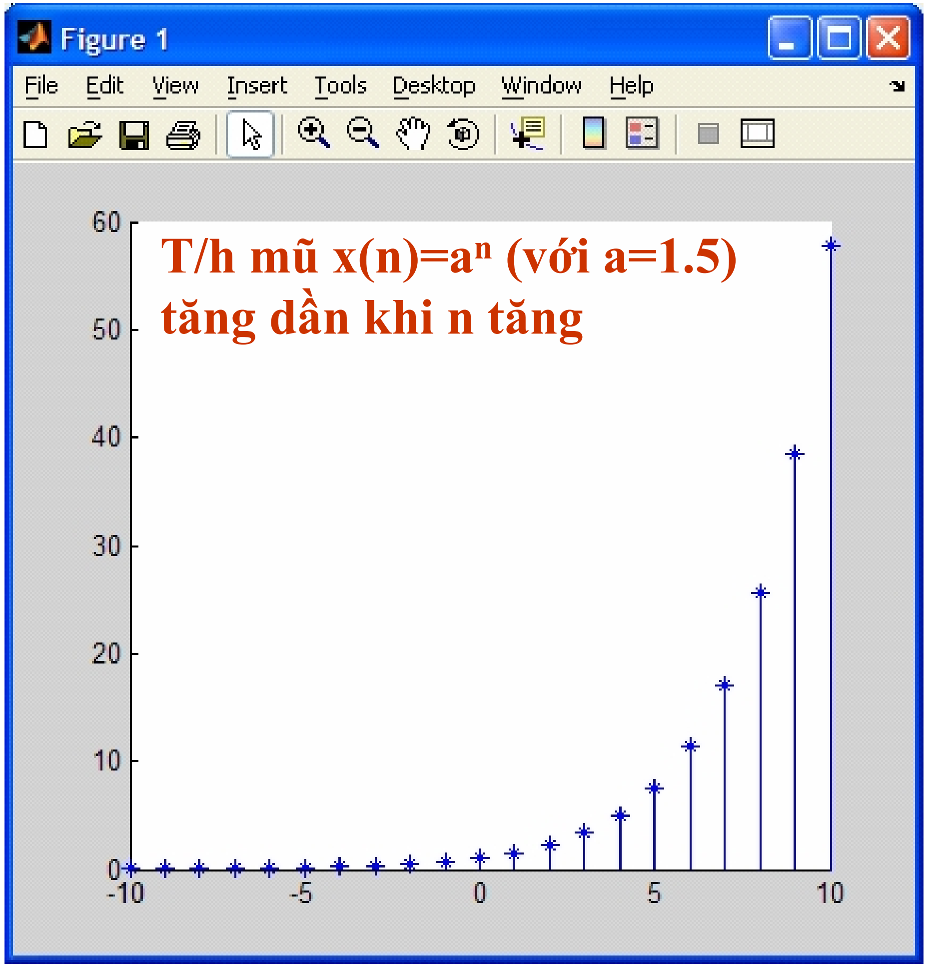
$$\begin{cases} x_R(n) = r^n\cos\theta n \\ x_I(n) = r^n\sin\theta n \end{cases}$$

hoặc

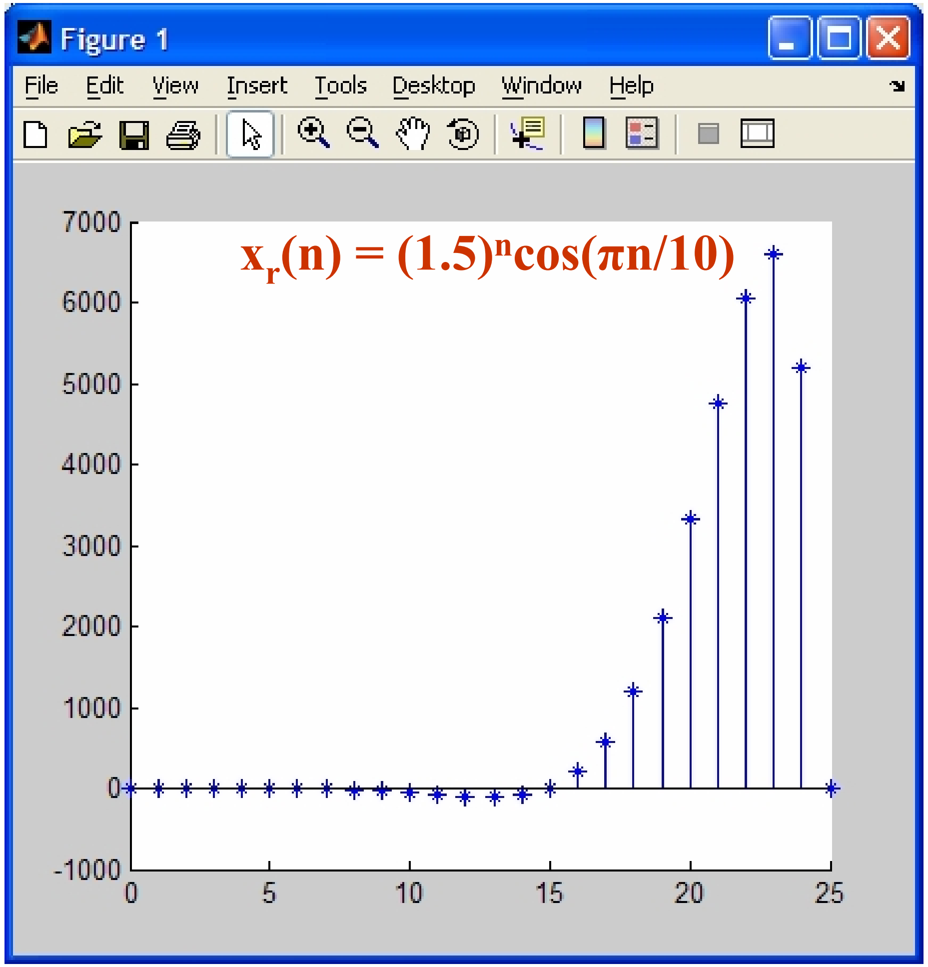
$$\begin{cases} |\, x(n)\, | = r^n \\ \angle x(n) = \theta n \end{cases}$$

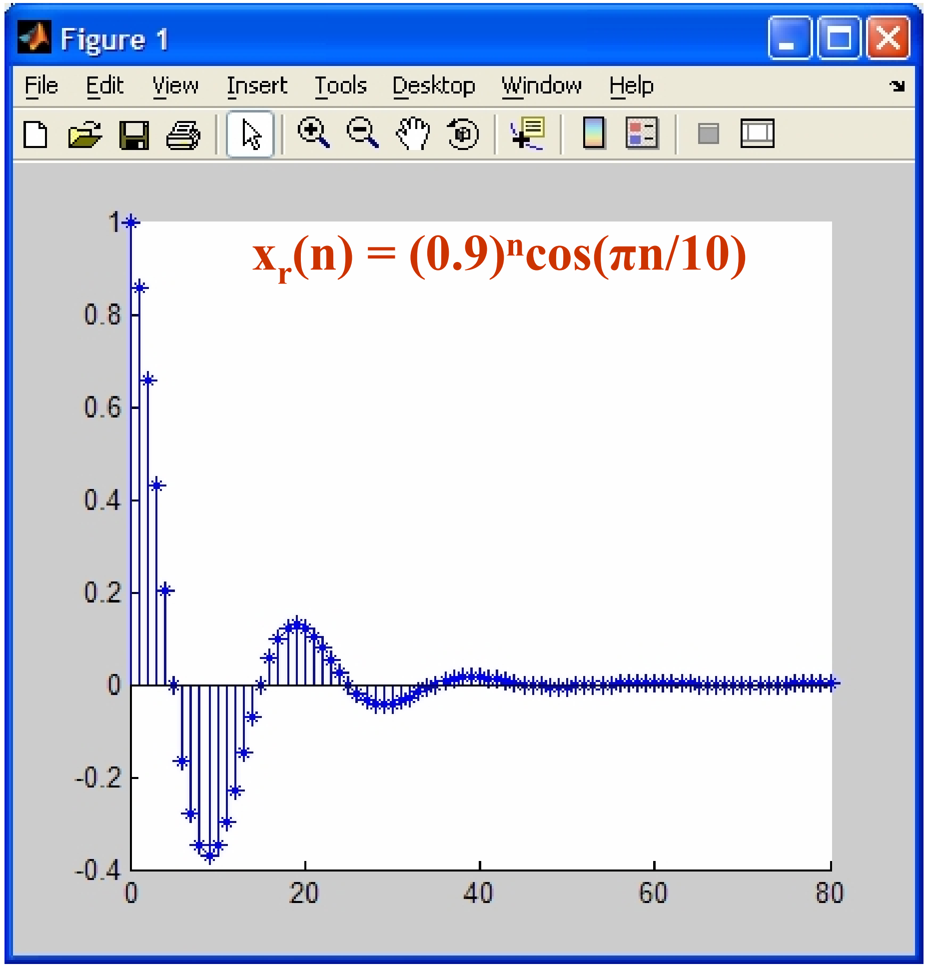
Tín hiệu RRTG cơ bản





Tín hiệu RRTG cơ bản





Phân loại tín hiệu RRTG

- T/h năng lượng và t/h công suất
  - Năng lượng của t/h x(n)

$$E_x = \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

    - Nếu E_x hữu hạn ($0 < E_x < \infty$) $\rightarrow$ x(n): t/h năng lượng
  - Công suất TB của t/h x(n)

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

    - Nếu P_x hữu hạn ($0 < P_x < \infty$) $\rightarrow$ x(n): t/h công suất
  - Năng lượng t/h trên khoảng [-N,N]

$$E_N = \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

    - Năng lượng t/h $\quad E = \lim_{N \to \infty} E_N$
    - Công suất t/h $\quad P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} E_N$

Phân loại tín hiệu RRTG

- T/h tuần hoàn và không tuần hoàn
  - ✦ x(n) tuần hoàn chu kỳ N $\Leftrightarrow$ x(n+N) = x(n), $\forall$n
  - ✦ Năng lượng
    - Hữu hạn nếu $0 \le n \le N - 1$ và x(n) hữu hạn
    - Vô hạn nếu $-\infty \le n \le +\infty$
  - ✦ Công suất hữu hạn

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

$\Rightarrow$ T/h tuần hoàn là t/h công suất

Phân loại tín hiệu RRTG

- T/h đối xứng (chẵn) và bất đối xứng (lẻ)
  - ✦Cho t/h x(n) thực
    - $x(n) = x(-n), \forall n$ $\rightarrow$ t/h chẵn
    - $x(n) = -x(-n), \forall n$ $\rightarrow$ t/h lẻ
  - ✦Bất cứ t/h nào cũng được biểu diễn

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

    - Thành phần t/h chẵn $x_e(n) = (½)[x(n) + x(-n)]$
    - Thành phần t/h lẻ $x_o(n) = (½)[x(n) - x(-n)]$

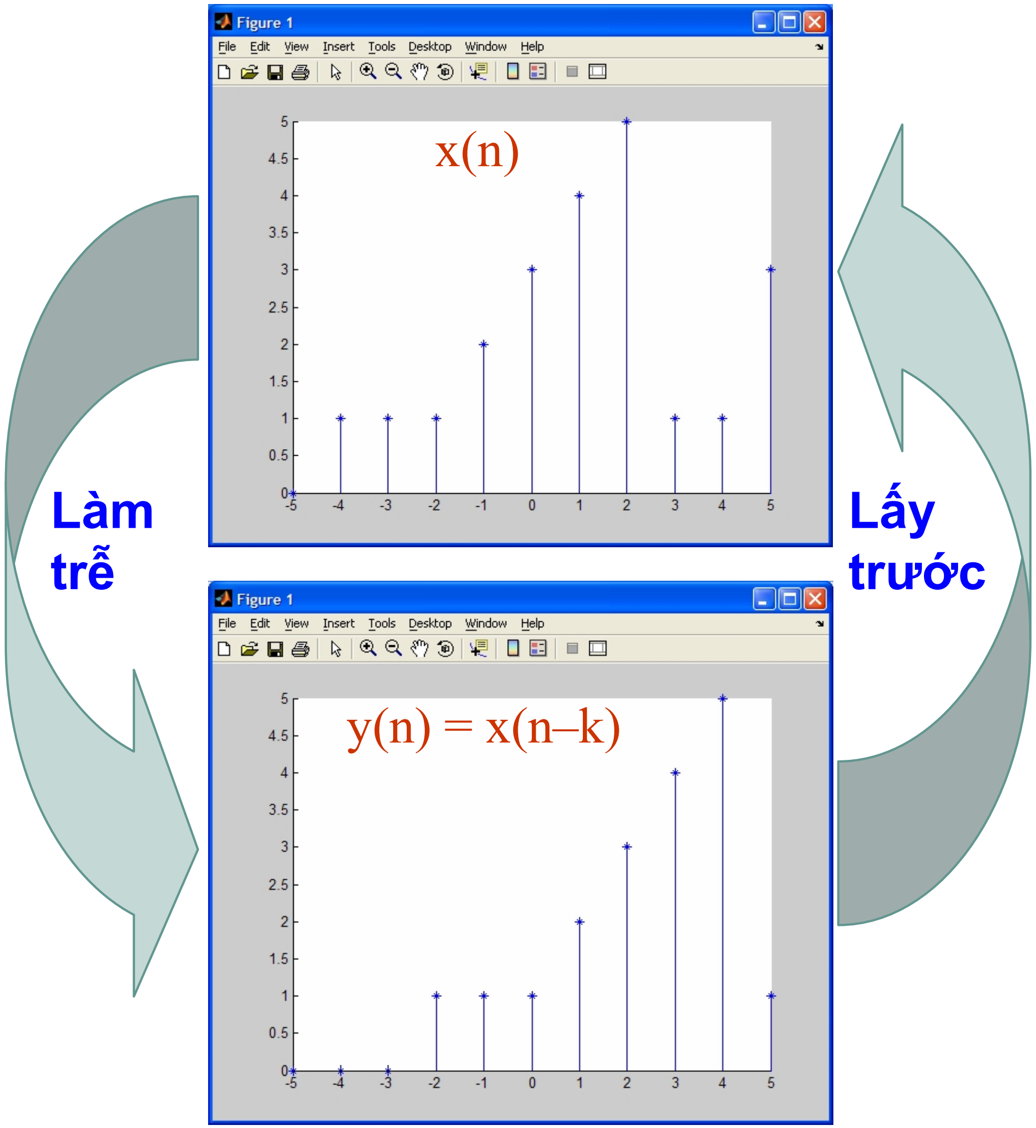
T/h RRTG: Các phép toán cơ bản

- Các phép toán cơ bản
  - ✦Delay : làm trễ (TD)
  - ✦Advance : lấy trước (TA)
  - ✦Folding : đảo (FD)
  - ✦Addition : cộng
  - ✦Multiplication : nhân
  - ✦Scaling : co giãn

Phép biến đổi
biến độc lập (thời gian)

T/h RRTG: Các phép toán cơ bản

- Biến đổi biến độc lập (thời gian)
  - Phép làm trễ: dịch theo thời gian bằng cách thay thế n bởi n–k
    - y(n) = x(n–k)   ∀k >0
    - y(n) là kết quả của làm trễ x(n) đi k mẫu
    - Trên đồ thị: phép delay chính là **DỊCH PHẢI** chuỗi t/h đi k mẫu
  - Phép lấy trước: dịch theo thời gian bằng cách thay thế n bởi n+k
    - y(n) = x(n+k)   ∀k >0
    - y(n) là kết quả của lấy trước x(n) đi k mẫu
    - Trên đồ thị: phép lấy trước chính là **DỊCH TRÁI** chuỗi t/h đi k mẫu

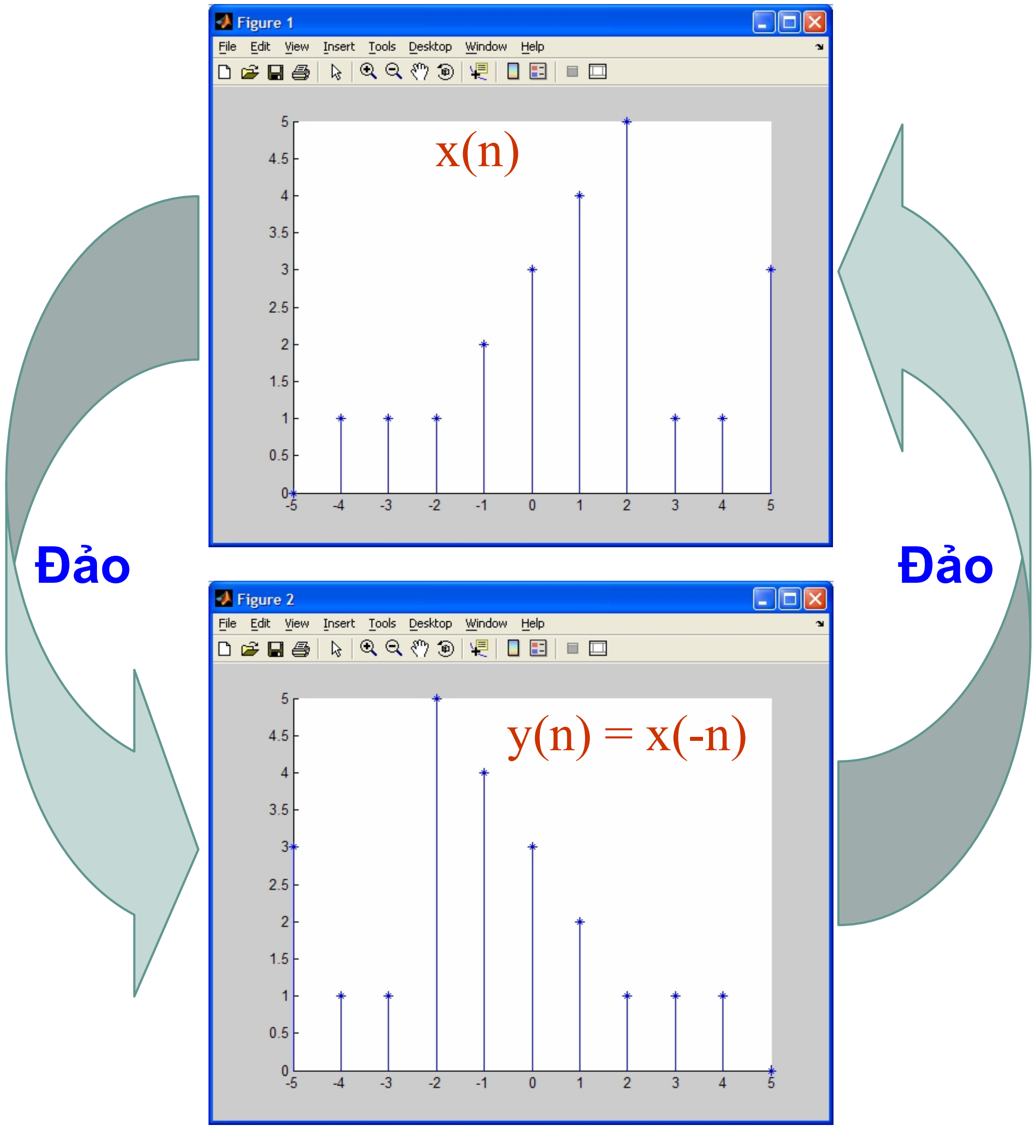


T/h RRTG: Các phép toán cơ bản

- Biến đổi biến độc lập (thời gian)
  - Phép đảo: thay thế n bởi –n
    - y(n) = x(–n)
    - y(n) là kết quả của việc đảo tín hiệu x(n)
    - Trên đồ thị: phép folding chính là **ĐẢO** đồ thị quanh trục đứng

    Chú ý
    - $FD[TD_k[x(n)]] \neq TD_k[FD[x(n)]]$
    - Phép đảo và làm trễ không hoán vị được

  - Phép co giãn theo thời gian: thay thế n bởi μn (μ nguyên)
    - y(n) = x(μn)   μ: nguyên
    - y(n) là kết quả của việc co giãn t/h x(n) hệ số μ
    - Phép tái lấy mẫu nếu t/h x(n) có được bằng cách lấy mẫu $x_a(t)$



T/h RRTG: Các phép toán cơ bản

Cho hai t/h $x_1(n)$ và $x_2(n)$ n: $[-\infty,+\infty]$

- Phép cộng

  $y(n) = x_1(n) + x_2(n)$ n: $[-\infty,+\infty]$

- Phép nhân

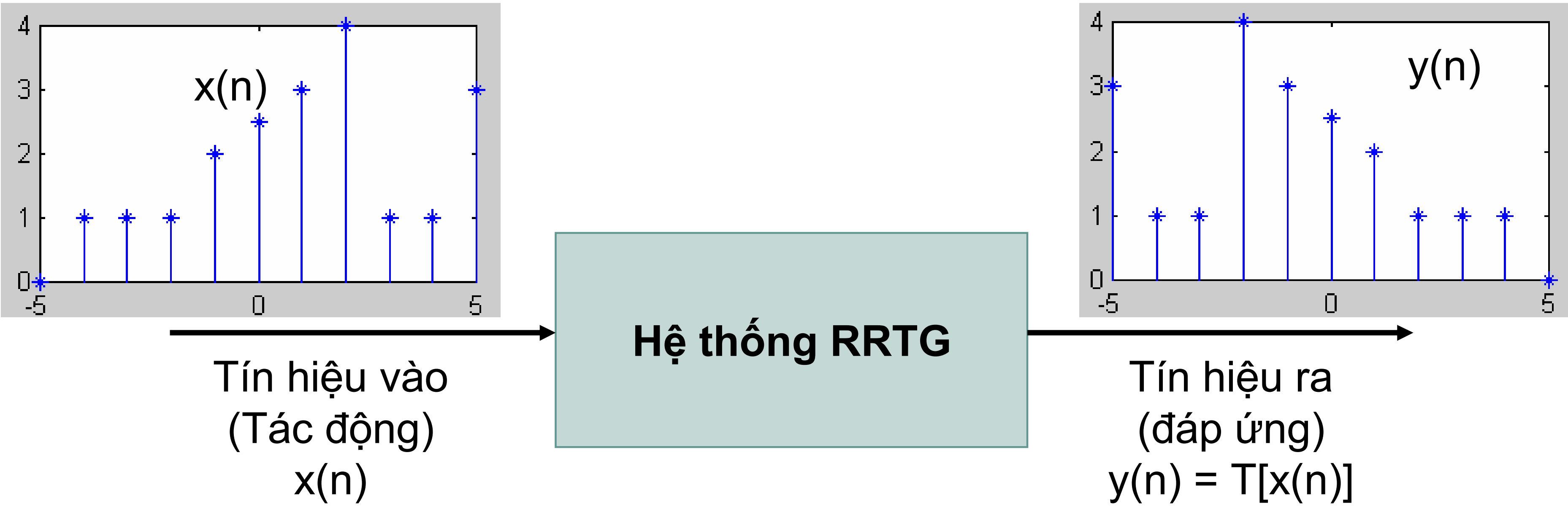
  $y(n) = x_1(n).x_2(n)$ n: $[-\infty,+\infty]$

- Phép co giãn biên độ

  $y(n) = ax_1(n)$ n: $[-\infty,+\infty]$

Hệ thống RRTG

- Giới thiệu
  - Tín hiệu đã chuyển sang dạng biểu diễn số ⇒ Cần thiết kế thiết bị, chương trình để xử lý nó
  - Hệ thống RRTG = thiết bị, chương trình nói trên



H/t RRTG: Mô tả quan hệ vào-ra

- Chỉ quan tâm mối quan hệ vào–ra
- Không để ý đến kiến trúc bên trong của hệ
- Xem hệ như là

$$y(n) = T[x(n)]$$

- Ví dụ bộ tích lũy

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{-\infty}^{n} x(k) \\ &= \sum_{-\infty}^{n-1} x(k) + x(n) \\ &= y(n-1) + x(n) \end{aligned}$$

Nếu $n \geq n_0$ (chỉ tính đáp ứng từ thời điểm n_0),

$\rightarrow$ $y(n_0) = y(n_0 - 1) + x(n_0)$

$y(n_0 - 1)$: điều kiện đầu, bằng tổng các t/h áp lên h/t trước thời điểm n_0

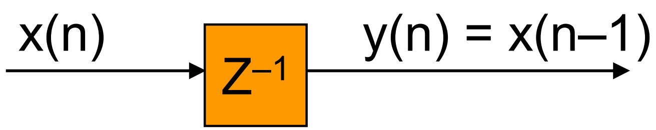
Nếu $y(n_0 - 1) = 0$

$\rightarrow$ h/t ở trạng thái nghỉ (không có tác động trước n_0)

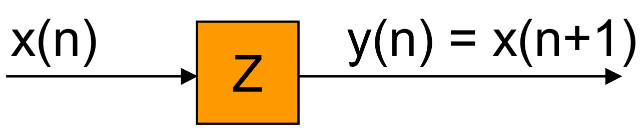
H/t RRTG: Mô tả sơ đồ khối

- Kết nối các khối phần tử cơ bản

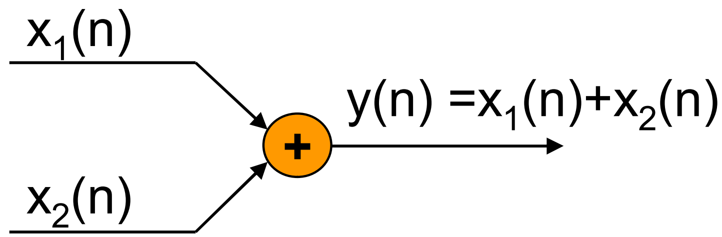
✦ Bộ trễ đơn vị



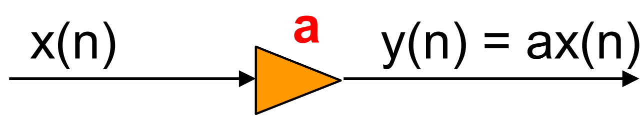
✦ Bộ tiến đơn vị



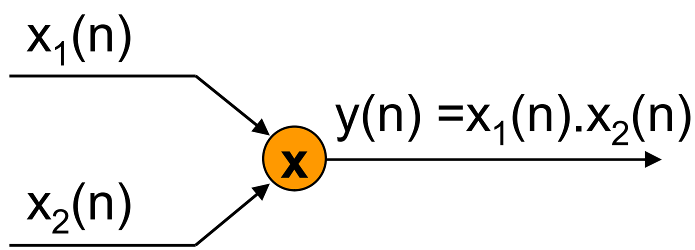
✦ Bộ cộng



✦ Bộ co-giãn



✦ Bộ nhân



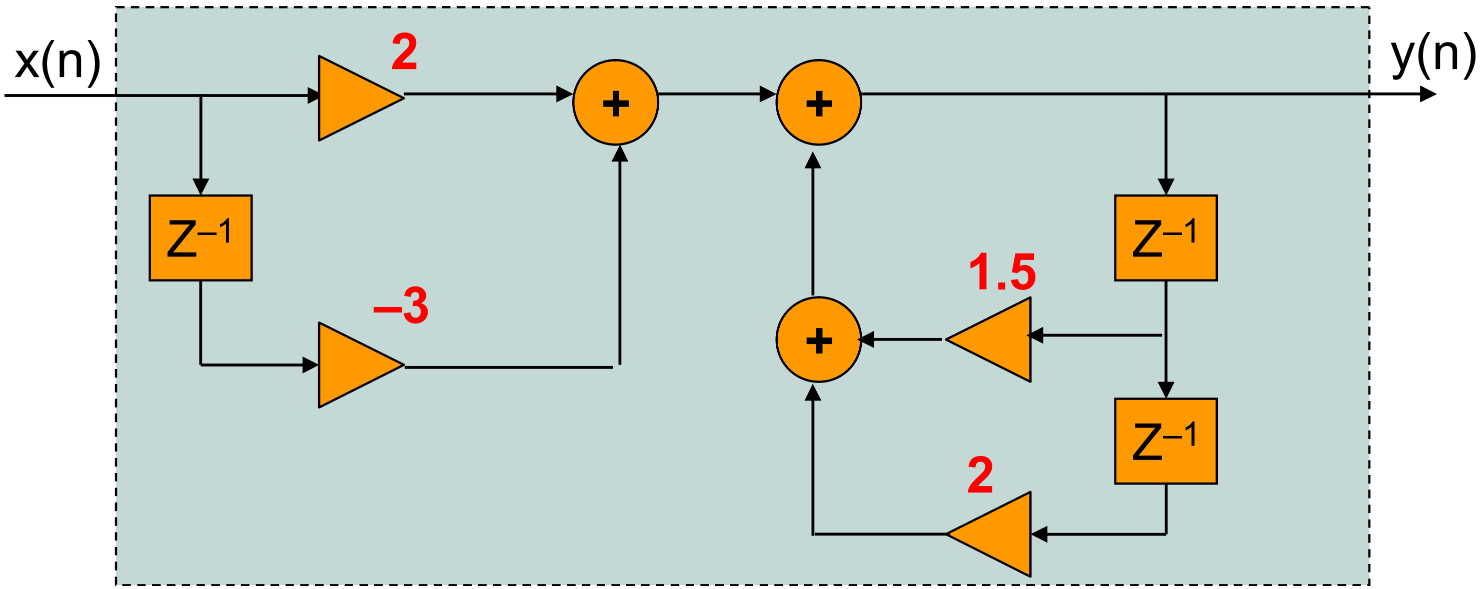
Dấu * dùng để chỉ một phép toán khác – tích chập (nói sau)

H/t RRTG: Mô tả sơ đồ khối

- Ví dụ
  - ✦ Mô tả bằng sơ đồ cấu trúc cho hệ có quan hệ vào ra sau:

$$y(n) = 2x(n) - 3x(n-1) + 1.5y(n-1) + 2y(n-2)$$

  - ✦ Đặc tả điều kiện đầu của hệ: {trị các ô Z^{-1}}



H/t RRTG: Phân loại

- Một hệ thống được gọi là có tính chất X nếu tính chất X thoả mãn cho mọi tín hiệu vào của hệ thống đó
- Hệ động – hệ tĩnh
  - ✦ Hệ tĩnh
    - Ngõ xuất chỉ phụ thuộc các mẫu ở thời điểm hiện tại (không phụ thuộc mẫu tương lai hay quá khứ)
    - Không dùng bộ nhớ
      - Không xuất hiện các ô Z^{-1} trong sơ đồ khối
      - Không xuất hiện các x(n–k) hay y(n–k) trong quan hệ vào ra
  - ✦ Hệ động
    - Ngõ xuất tại thời điểm n phụ thuộc các mẫu trong [n–N, n] ($N \geq 0$)
    - Hệ có dùng bộ nhớ
      - Có xuất hiện các ô Z^{-1} trong sơ đồ khối
      - Có xuất hiện các x(n–k) hay y(n–k) trong quan hệ vào ra
    - $N = 0 \quad \rightarrow$ h/t tĩnh
    - $\infty > N > 0 \quad \rightarrow$ h/t có bộ nhớ hữu hạn
    - $N = \infty \quad \rightarrow$ h/t có bộ nhớ vô hạn

H/t RRTG: Phân loại

- Hệ biến thiên và bất biến theo thời gian
  - Hệ bất biến theo thời gian
    - Đặc trưng vào-ra không thay đổi theo thời gian
    - Định lý:

      Hệ nghỉ T là bất biến nếu và chỉ nếu $x(n) \xrightarrow{T} y(n)$

$$\Rightarrow \quad x(n-k) \xrightarrow{T} y(n-k) \qquad \forall x(n), \forall k$$

  - Hệ biến thiên theo thời gian
    - Hệ không có tính chất trên

H/t RRTG: Phân loại

- Hệ tuyến tính và phi tuyến
  - Hệ tuyến tính
    - Hệ thoả nguyên lý xếp chồng
    - Định lý:

      Hệ là tuyến tính nếu và chỉ nếu:

      $T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)] \quad \forall a_i, \forall x_i(n)$
    - Tính chất co giãn:

      nếu $a_2 = 0 \rightarrow T[a_1x_1(n)] = a_1T[x_1(n)]$
    - Tính chất cộng:

      nếu $a_1 = a_2 = 1 \rightarrow T[x_1(n) + x_2(n)] = T[x_1(n)] + T[x_2(n)]$

  - Hệ phi tuyến
    - Hệ không thoả mãn nguyên lý xếp chồng

      $y(n) = T(0) \neq 0$

H/t RRTG: Phân loại

- Hệ nhân quả và không nhân quả
  - ✦Hệ nhân quả
    - Hệ chỉ phụ thuộc các mẫu hiện tại và quá khứ, không phụ thuộc các mẫu tương lai
    - Định lý:

      Hệ T được gọi là nhân quả nếu như đáp ứng tại n_0 chỉ phụ thuộc vào tác động tại các thời điểm trước n_0 (ví dụ: $n_0 - 1$, $n_0 - 2$, …)

      $$y(n) = F[x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots]$$

  - ✦Hệ không nhân quả: hệ không thoả định lý trên

H/t RRTG: Phân loại

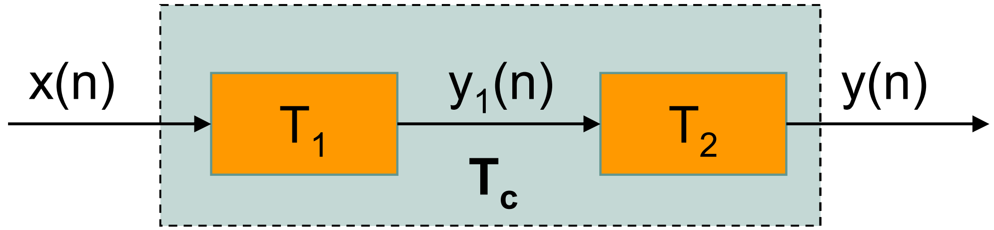
- Hệ ổn định và không ổn định
  - ✦Hệ ổn định
    - Định lý:

      Hệ nghỉ được gọi là BIBO ổn định nếu và chỉ nếu mọi ngõ nhập hữu hạn sẽ tạo ra ngõ xuất hữu hạn

$$\forall x(n):\ |x(n)| \le M_x < \infty \quad \rightarrow\ |y(n)| = |T[x(n)]| \le M_y < \infty$$

H/t RRTG: Kết nối

- Có thể kết nối các hệ RRTG nhỏ, cơ bản, thành các hệ thống phức tạp hơn

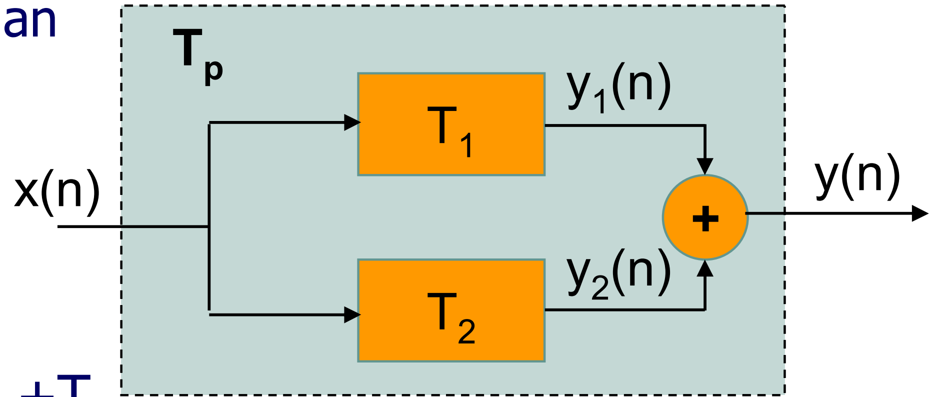


- Hai cách kết nối
  - ✦ Nối tiếp

$$\left.\begin{aligned} y_1(n) &= T_1[x(n)] \\ y(n) &= T_2[y_1(n)] \end{aligned}\right\} \qquad y(n) = T_2[T_1[x(n)]] = T_c[x(n)] \qquad \text{với } T_c \equiv T_2T_1$$

    - Thứ tự kết nối là quan trọng $T_2T_1 \neq T_1T_2$
    - Nếu T1, T2 tuyến tính và bất biến theo thời gian
      - $T_c \equiv T_2T_1$ bất biến theo thời gian
      - $T_1T_2 = T_2T_1$
  - ✦ Song song

$$\begin{aligned} y(n) &= T_1[x(n)] + T_2[x(n)] \\ &= (T_1+T_2)[x(n)] \\ &= T_p[x(n)] \qquad \text{với } T_p \equiv T_1+T_2 \end{aligned}$$



H/t LTI: Phân tích h/t tuyến tính

- Kỹ thuật phân tích h/t tuyến tính
  - Biểu diễn quan hệ vào/ra bằng phương trình sai phân và giải nó
  - Phân tích t/h nhập thành tổng các t/h cơ sở sao cho đáp ứng của h/t đối với các t/h cơ sở là xác định trước. Nhờ tính chất tuyến tính của h/t, đáp ứng của h/t đối với t/h nhập đơn giản bằng tổng các đáp ứng của h/t với các t/h cơ sở

- Phân giải t/h nhập $x(n) = \sum_k c_k x_k(n)$

giả sử $y_k(n) = T[x_k(n)]$

$$
\begin{aligned}
y(n) &= T[x(n)] \\
&= T[\sum_k c_k x_k(n)] \\
&= \sum_k c_k T[x_k(n)]
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_k c_k y_k(n)$$

H/t LTI – Phân giải t/h nhập

- Phân giải t/h nhập ra đáp ứng xung đơn vị
  - Chọn các t/h thành phần cơ sở $x_k(n) = \delta(n-k)$
  - Ta có $x(n)\delta(n-k) = x(k)\delta(n-k) \quad \forall k$
  - Biểu thức phân tích t/h x(n) $$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$
  - Ví dụ: $x(n) = \{2 \quad 4 \quad \underset{\uparrow}{3} \quad 1\}$

    thì $x(n) = 2\delta(n+2) + 4\delta(n+1) + 3\delta(n) + \delta(n-1)$

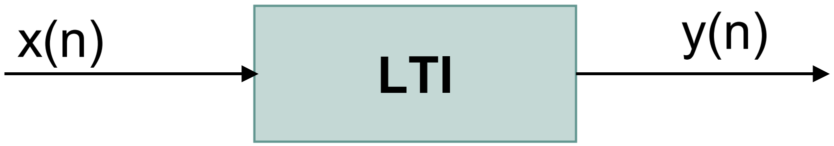
- Đáp ứng của h/t LTI với t/h nhập bất kỳ: tích chập
  - Đáp ứng y(n, k) của h/t với xung đơn vị tại n=k được biểu diễn bằng h(n, k)

    $y(n, k) \equiv h(n, k) = T[\delta(n-k)] \qquad -\infty < k < \infty$
    - n: chỉ số thời gian
    - k: tham số chỉ vị trí xung đơn vị
  - Nếu t/h nhập được co giãn hệ số $c_k \equiv x(k)$, đáp ứng của h/t cũng co giãn

    $c_k h(n, k) = x(k)h(n, k)$

H/t LTI – Tích chập

- Tích chập



$$
\begin{aligned}
y(n) &= T[x(n)] \\
&= T[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k)
\end{aligned}
$$

- ✦ Biểu thức trên đúng với mọi h/t tuyến tính nghỉ (bất biến hoặc biến thiên)
- ✦ Đối với hệ LTI, nếu h(n) = T[δ(n)] thì h(n–k) = T[δ(n–k)]

$$\Rightarrow \qquad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- ✦ H/t LTI được đặc trưng hoàn toàn bằng hàm h(n), trong khi h/t tuyến tính biến thiên thời gian yêu cầu một số vô hạn các đáp ứng xung đơn vị h(n, k): mỗi hàm h(n, k) cho mỗi thời gian trễ

H/t LTI – Tích chập

- Cách tính ngõ xuất của h/t tại một thời điểm n_0

$$y(n_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n_0 - k)$$

1. **Đảo**: $h(k) \rightarrow h(-k)$: đối xứng h(k) quanh trục k=0
2. **Dịch**: $h(-k) \rightarrow h(-k + n_0)$: dịch h(–k) đi một đoạn n_0 sang phải (trái) nếu n_0 dương (âm)
3. **Nhân**: $v_{n0}(k) = x(k)\, h(-k + n_0)$
4. **Cộng**: tổng tất cả chuỗi $v_{n0}(k)$

H/t LTI – Tích chập

- Trong biểu thức tích chập, nếu thay m=n–k (tức k=n–m), ta có

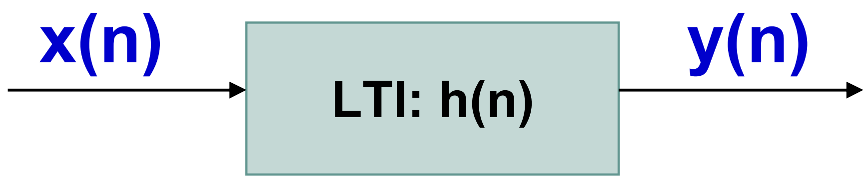
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)$$

  - ✦ Công thức này cho cùng kết quả như công thức tích chập, nhưng thứ tự tính toán khác nhau
  - ✦ Nếu $\left.\begin{aligned} v_n(k) &= x(k)h(n-k) \\ w_n(k) &= x(n-k)h(k) \end{aligned}\right\} \quad v_n(k) = w_n(n-k)$

$$\Rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_n(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_n(n-k)$$

H/t LTI – Tích chập

- Tóm tắt



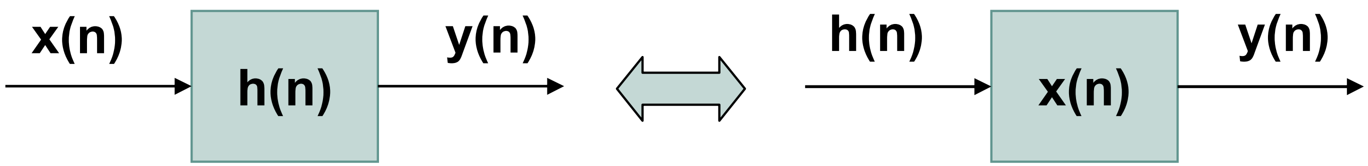
h(n) : Hàm đáp ứng xung đơn vị của hệ LTI

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n) * h(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \end{aligned}$$

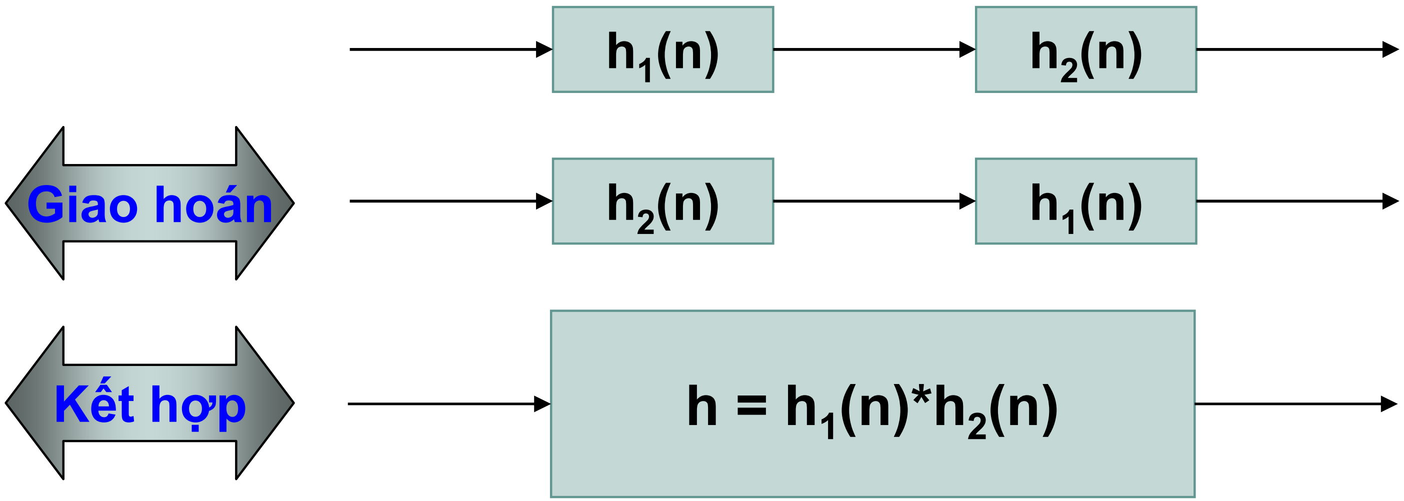
$$\begin{aligned} y(n) &= h(n) * x(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \end{aligned}$$

H/t LTI – Tính chất tích chập

- Giao hoán $x(n)*h(n) = h(n)*x(n)$



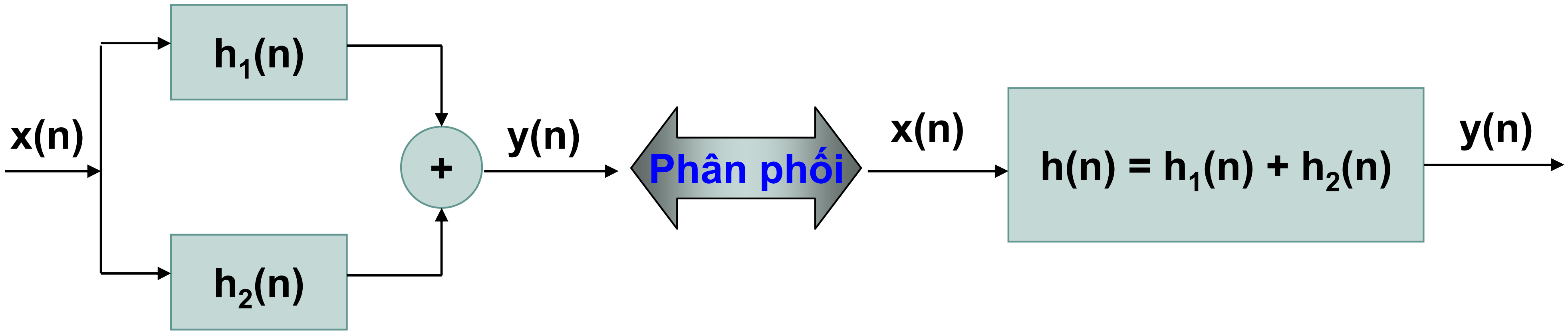
- Kết hợp $[x(n)*h_1(n)]*h_2(n) = x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$



H/t LTI – Tính chất tích chập

- Phân phối

$$x(n)*[h_1(n) + h_2(n)] = x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n)$$



✦ Ví dụ: dùng tích chập, xác định đáp ứng của hệ thống

- $x(n) = a^n u(n)$ và $h(n) = b^n u(n)$ trong cả 2 trường hợp a=b và a≠b
- $x(n) = \{\ldots 0, 1, \underset{\uparrow}{2}, 1, 1, 0 \ldots\}$ và $h(n) = \delta(n) - \delta(n-1) + \delta(n-4) + \delta(n-5)$

H/t LTI – Tính nhân quả

- Một hệ LTI là nhân quả nếu và chỉ nếu các đáp ứng xung của nó bằng 0 đối với các giá trị âm của n
[tức, h(n) = 0, ∀n < 0]

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

Qui ước

✦ Chuỗi bằng 0 ∀n < 0 → chuỗi nhân quả
✦ Chuỗi khác 0 ∀n: n<0 và n>0 → chuỗi không nhân quả

- Nếu t/h nhập là chuỗi nhân quả [x(n) = 0, ∀n < 0]

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

✦ Đáp ứng của h/t nhân quả với chuỗi nhân quả là nhân quả [y(n) = 0, ∀n<0]

H/t LTI – Tính ổn định

- Hệ LTI là ổn định nếu hàm đáp ứng xung đơn vị là khả tổng tuyệt đối
  - Chứng minh

$$\text{Ta có}\quad \begin{cases} y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) \\ |x(n)| \le M_x \end{cases}$$

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(n-k)||h(k)| \le M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$$

$$|y(n)| \le M_y < \infty \qquad \text{nếu} \qquad S_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

- Ví dụ: xác định tầm giá trị a, b sao cho hệ LTI sau ổn định

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \ge 0 \\ 1 & -1 \le n < 0 \\ b^n & n < -1 \end{cases}$$

H/t LTI – FIR và IIR

- Hệ có đáp ứng xung hữu hạn – FIR (Finite-duration Impulse Response)
  - h(n) = 0 ∀n: n < 0 và n ≥ M

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

  - Hệ FIR có bộ nhớ độ dài M

- Hệ có đáp ứng xung vô hạn – IIR (Infinite-duration Impulse Response)
  - Giả sử h/t có tính nhân quả

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

  - Hệ IIR có bộ nhớ vô hạn

H/t RRTG – Đệ qui

- Trung bình tích lũy của t/h x(n) trong khoảng $0 \le k \le n$

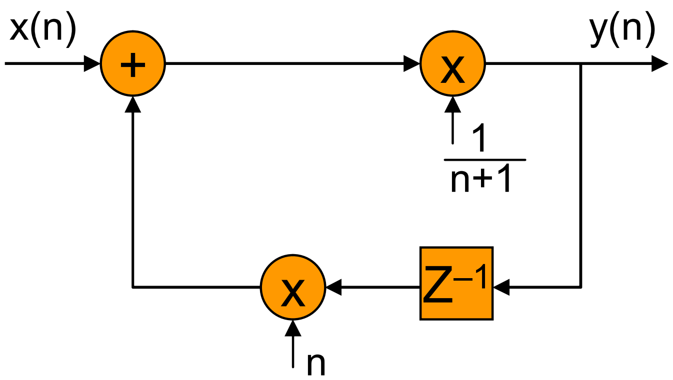
$$y(n) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x(k)$$

  ✦ Việc tính y(n) đòi hỏi lưu trữ tất cả giá trị của x(k) $\Rightarrow$ khi n tăng, bộ nhớ cần thiết cũng tăng

- Cách khác để tính y(n): đệ qui

$$(n+1)y(n) = \sum_{k=0}^{n-1} x(k) + x(n) = ny(n-1) + x(n)$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{n}{n+1}y(n-1) + \frac{1}{n+1}x(n)$$

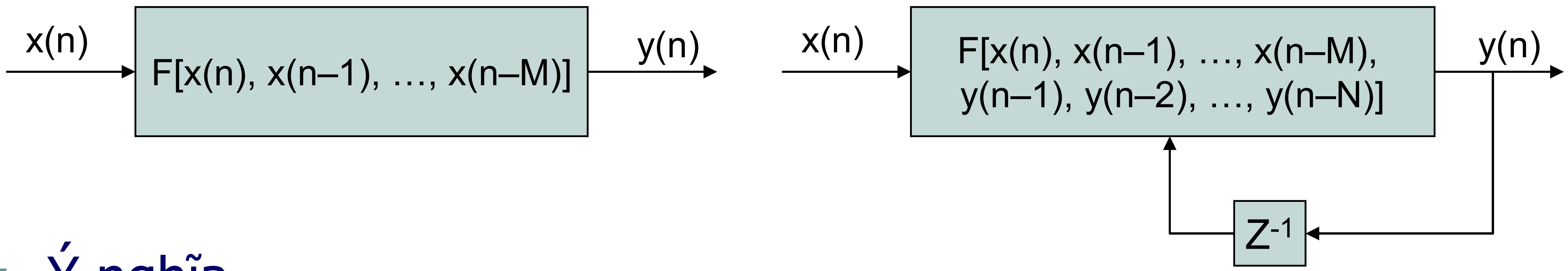


  • $y(n_0 - 1)$: điều kiện đầu

- H/t đệ qui là hệ có y(n) phụ thuộc không chỉ t/h nhập mà còn giá trị quá khứ của ngõ xuất

H/t RRTG – Đệ qui

- H/t không đệ qui nếu $y(n) = F[x(n), x(n-1), \ldots, x(n-M)]$
- Khác nhau cơ bản giữa h/t đệ qui và h/t không đệ qui



- Ý nghĩa
  - H/t đệ qui phải tính các giá trị ngõ xuất ở quá khứ trước
  - H/t không đệ qui có thể xác định giá trị ngõ xuất ở thời điểm bất kỳ mà không cần tính giá trị ngõ xuất ở quá khứ
  - Hệ đệ qui: hệ tuần tự
  - Hệ không đệ qui: hệ tổ hợp

H/t LTI RRTG – ph/trình sai phân hệ số hằng

- Tập con của h/t đệ qui và không đệ qui
- Ví dụ h/t đệ qui được mô tả bởi PTSP bậc 1: $y(n) = ay(n-1) + x(n)$
  - ✦ Phương trình xuất nhập cho hệ LTI
  - ✦ Tác động vào h/t t/h $x(n)$ $\forall n \geq 0$ và giả sử tồn tại $y(-1)$

    $y(0) = ay(-1) + x(0)$

    $y(1) = ay(0) + x(1) = a^2y(-1) + ax(0) + x(1)$

    …

    $y(n) = ay(n-1) + x(n) = a^{n+1}y(-1) + a^nx(0) + a^{n-1}x(1) + \dots + ax(n-1) + x(n)$

    Hoặc

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \qquad \forall n \geq 0$$

  - ✦ Nếu h/t nghỉ tại n=0, bộ nhớ của nó bằng 0, do đó $y(-1) = 0$
    - Bộ nhớ biểu diễn trạng thái h/t $\rightarrow$ h/t ở trạng thái 0 (đáp ứng trạng thái 0 hoặc đáp ứng cưỡng bức – $y_{zs}(n)$)

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)$$

    - Đây là tích chập của $x(n)$ và $h(n) = a^nu(n)$
    - Đáp ứng trạng thái 0 phụ thuộc bản chất h/t và t/h nhập

H/t LTI RRTG – ph/trình sai phân hệ số hằng

- Nếu h/t không nghỉ [tức $y(-1) \neq 0$] và $x(n) = 0\ \forall n$: hệ thống không có t/h nhập
  - Đáp ứng không ngõ nhập (hay đáp ứng tự nhiên) $y_{zi}(n)$

$$y_{zi}(n) = a^{n+1} y(-1)$$

  - H/t đệ qui với điều kiện đầu khác không là hệ không nghỉ, tức nó vẫn tạo ra đáp ứng ngõ ra ngay cả khi không có t/h nhập (đáp ứng này do bộ nhớ của h/t)
  - Đáp ứng không ngõ nhập đặc trưng cho chính h/t: nó phụ thuộc bản chất h/t và điều kiện đầu
- Tổng quát $y(n) = y_{zi}(n) + y_{zs}(n)$
- Dạng tổng quát của PTSPTT HSH

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$hoac$$

  - N: bậc của PTSP

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad (a_0 \equiv 1)$$

H/t LTI RRTG – ph/trình sai phân hệ số hằng

- Xem lại các t/chất tuyến tính, bất biến thời gian và ổn định của h/t đệ qui được mô tả bằng PTSP TT HSH
  - Hệ đệ qui có thể nghỉ hay không tùy vào điều kiện đầu
- Tuyến tính
  - Hệ là tuyến tính nếu nó thỏa
    1. Đáp ứng toàn phần bằng tổng đáp ứng trạng thái không và đáp ứng không ngõ nhập $y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$
    2. Nguyên tắc xếp chồng áp dụng cho đáp ứng trạng thái không (tuyến tính trạng thái không)
    3. Nguyên tắc xếp chồng áp dụng cho đáp ứng không ngõ nhập (tuyến tính không ngõ nhập)
  - Hệ không thoả một trong 3 đ/k trên là hệ phi tuyến
  - Hệ đệ qui được mô tả bằng PTSP HSH thỏa cả 3 đ/k trên $\rightarrow$ tuyến tính

H/t LTI RRTG – ph/trình sai phân hệ số hằng

- Ví dụ: xét tính chất tuyến tính của hệ y(n) = ay(n–1) + x(n)
  - Đ/k 1.

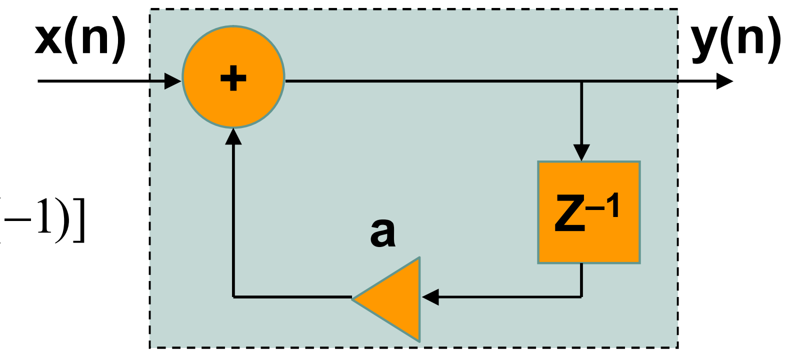
$$\left.\begin{aligned} y_{zs}(n) &= \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) && \forall n \ge 0 \\ y_{zi}(n) &= a^{n+1} y(-1) && \forall n \ge 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$$

  - Đ/k 2.
    - Giả sử $x(n) = c_1x_1(n) + c_2x_2(n)$

$$\begin{aligned} y_{zs}(n) &= \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} a^k [c_1x_1(n-k) + c_2x_2(n-k)] \\ &= c_1\sum_{k=0}^{n} a^k x_1(n-k) + c_2\sum_{k=0}^{n} a^k x_2(n-k) \\ &= c_1 y_{zs}^{(1)}(n) + c_2 y_{zs}^{(2)}(n) \end{aligned}$$

  - Đ/k 3.
    - Giả sử $y(-1) = c_1y_1(-1) + c_2y_2(-1)$

$$\begin{aligned} y_{zi}(n) &= a^{n+1} y(-1) = a^{n+1}[c_1y_1(-1) + c_2y_2(-1)] \\ &= c_1a^{n+1}y_1(-1) + c_2a^{n+1}y_2(-1) \\ &= c_1 y_{zi}^{(1)}(n) + c_2 y_{zi}^{(2)}(n) \end{aligned}$$



  - Vậy y(n) tuyến tính

H/t LTI RRTG – ph/trình sai phân hệ số hằng

- Bất biến thời gian
  - a_k và b_k là hằng số → PTSP HSH là bất biến theo thời gian
  - H/t đệ qui được mô tả bằng PTSP HSH là LTI
- Ổn định
  - H/t BIBO ổn định nếu và chỉ nếu với mọi ngõ nhập hữu hạn và mọi điều kiện đầu hữu hạn, đáp ứng của toàn h/t là hữu hạn
  - Ví dụ: xác định giá trị a để h/t $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ ổn định
    - Giả sử $|x(n)| \le M_x < \infty \quad \forall n \ge 0$

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \quad \le \left|a^{n+1}y(-1)\right| + \left|\sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k)\right|$$

$$\le |a|^{n+1}|y(-1)| + M_x \sum |a|^k$$

$$\le |a|^{n+1}|y(-1)| + M_x \frac{1-|a|^{n+1}}{1-|a|} \equiv M_y$$

    - n hữu hạn ⇒ M_y hữu hạn và y(n) hữu hạn độc lập với giá trị a
    - Khi $n \to \infty$, M_y hữu hạn chỉ nếu $|a| < 1 \Rightarrow M_y = M_x/(1 - |a|)$
    - Vậy h/t chỉ ổn định nếu $|a| < 1$

Giải ph/trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

- Xác định biểu thức chính xác của y(n) khi biết x(n) ($n \geq 0$) và tập các đ/k đầu
- 2 phương pháp
  - ✦Gián tiếp: biến đổi Z
  - ✦Trực tiếp

- Phương pháp trực tiếp
  - ✦Đáp ứng toàn phần $y(n) = y_h(n) + y_p(n)$
    - $y_h(n)$: đáp ứng thuần nhất, không phụ thuộc x(n) (x(n) = 0)
    - $y_p(n)$: đáp ứng riêng phần, phụ thuộc x(n)

Giải ph/trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

- Đáp ứng thuần nhất
  - Giả sử x(n) = 0 $$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$ PTSP thuần nhất
  - Cách giải PTSP TT HSH tương tự cách giải PT vi phân TT HSH
    - Giả sử đáp ứng có dạng $y_h(n) = \lambda^n$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^{(n-k)} = 0$$

hoặc $$\lambda^{n-N}(\lambda^N + a_1\lambda^{N-1} + a_2\lambda^{N-2} + \cdots + a_{N-1}\lambda + a_N) = 0$$

Biểu thức trong ngoặc đơn: **đa thức đặc trưng** của h/t

- PT này có N nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$
- Dạng tổng quát nhất của nghiệm PTSP thuần nhất (giả sử các nghiệm đơn riêng biệt) $$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \cdots + C_N\lambda_N^n$$

C_i có thể được xác định nhờ vào các đ/k đầu của h/t

- Nếu λ_1 là nghiệm bội bậc m,

$$y_h(n) = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3 n^2\lambda_1^n + \cdots + C_m n^{m-1}\lambda_1^n + C_{m+1}\lambda_{m+1}^n + \cdots + C_N\lambda_N^n$$

- PT này có thể được dùng để xác định đáp ứng không ngõ nhập của h/t (bởi vì x(n) = 0)

Giải ph/trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

- Đáp ứng thuần nhất
  - ✦Ví dụ $y(n) + a_1y(n-1) = x(n)$
    - Cho $x(n) = 0$ và giả sử $y_h(n) = \lambda^n$

    $\Rightarrow \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} = 0$

    $\Rightarrow \lambda^{n-1}(\lambda + a_1) = 0$

    $\Rightarrow \lambda = -a_1$
    - Đáp ứng đồng dạng $y_h(n) = C\lambda^n = C(-a_1)^n$
    - Mặt khác,

$$\left.\begin{array}{c} y(0) = -a_1 y(-1) \\ y_h(0) = C \end{array}\right\rangle \Rightarrow \quad C = -a_1 y(-1)$$

Do đó $\quad y_{zi}(n) = (-a_1)^{n+1} y(-1) \qquad \forall n \geq 0$

Giải ph/trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

- Đáp ứng riêng phần
  - Đáp ứng riêng phần $y_p(n)$ thoả mãn PT

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y_p(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad a_0 \equiv 1$$

  - Ví dụ $y(n) + a_1 y(n-1) = x(n)$ $(|a_1| < 1)$
    xác định $y_p(n)$ khi $x(n) = u(n)$
    - Đáp ứng riêng phần có dạng $y_p(n) = Ku(n)$
    K: hệ số co giãn
    $\Rightarrow Ku(n) + a_1Ku(n-1) = u(n)$
    - Khi $n \geq 1$, ta có $K + a_1K = 1$ $\Rightarrow K = 1/(1+a_1)$
    - Đáp ứng riêng phần

$$y_p(n) = \frac{1}{1+a_1} u(n)$$

  - Dạng tổng quát của đáp ứng riêng phần

$x(n)$	$y_p(n)$
A	K
AM^n	KM^n
An^M	$K_0n^M + K_1n^{M-1} + \ldots + K_M$
A^nn^M	$A^n(K_0n^M + K_1n^{M-1} + \ldots + K_M)$
$A\cos\omega_0 n$ $A\sin\omega_0 n$	$K_1\cos\omega_0 n + K_2\sin\omega_0 n$

Giải ph/trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

- Đáp ứng toàn phần
  - Ví dụ: xác định đáp ứng toàn phần của PTSP $y(n) + a_1y(n-1) = x(n)$ với $x(n) = u(n)$ và $y(-1)$ là đ/k đầu
    - Theo trên, ta có

$$\begin{cases} y_h(n) = C(-a_1)^n \\ y_p(n) = \dfrac{1}{1+a_1} \end{cases} \Rightarrow \quad y(n) = C(-a_1)^n + \frac{1}{1+a_1} \qquad n \geq 0$$

    - Muốn xác định đáp ứng trạng thái không, ta cho $y(-1) = 0$

$$\left.\begin{aligned} y(0) + a_1y(-1) = 1 \\ y(0) = C + \frac{1}{1+a_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad C = \frac{a_1}{1+a_1}$$

Vậy $$y_{zs}(n) = \frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1} \qquad n \geq 0$$

    - Nếu tìm C dưới đ/k $y(-1) \neq 0$, đáp ứng toàn phần sẽ bao gồm đáp ứng trạng thái không và đáp ứng không ngõ nhập

$$\left.\begin{aligned} y(0) + a_1y(-1) = 1 \\ y(0) = C + \frac{1}{1+a_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad C = -a_1y(-1) + \frac{a_1}{1+a_1} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y(n) &= (-a_1)^{n+1}y(-1) + \frac{1-(-a_1)^{n+1}}{1+a_1} \qquad n \geq 0 \\ &= y_{zi}(n) + y_{zs}(n) \end{aligned}$$

Giải ph/trình sai phân tuyến tính hệ số hằng

- Ngoài ra, có thể xác định đáp ứng riêng phần từ đáp ứng trạng thái không

$$y_p(n) = \lim_{n \to \infty} y_{zs}(n) = \frac{1}{1 + a_1}$$

  - ✦ $y_p(n) \neq 0$ khi $n \to \infty$: đáp ứng trạng thái đều
  - ✦ $y_p(n) = 0$ khi $n \to \infty$: đáp ứng tiệm cận

Đáp ứng xung của h/t đệ qui LTI

- $x(n) = \delta(n) \quad \Rightarrow \quad y_{zs}(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) \qquad (n \geq 0)$

$$= \sum_{k=0}^{n} h(k)\delta(n-k)$$

$$= h(n)$$

- $y_p(n) = 0$ vì $x(n) = 0$ khi $n > 0 \qquad \Rightarrow h(n) = y_h(n)$
- Bất kỳ h/t đệ qui nào được mô tả bằng PTSP TT HSH đều là IIR
- Đáp ứng thuần nhất $$y_h(n) \equiv h(n) = \sum_{k=1}^{N} C_k \lambda_k^n$$

$\{C_i\}$ được xác định nhờ đ/k đầu $y(-1) = y(-2) = \ldots = y(-N) = 0$

- Tính ổn định
  - Đ/k cần và đủ cho sự ổn định của một h/t nhân quả IIR được mô tả bởi PTSP TT HSH là tất cả các nghiệm của đa thức đặc trưng có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn đơn vị
  - CM $$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{N} C_k \lambda_k^n \right| \leq \sum_{k=1}^{N} |C_k| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k^n|$$

$$Nếu\,|\lambda_k| < 1 \forall k \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k^n| < \infty \;\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

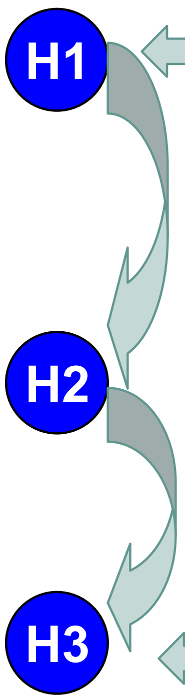
Ngược lại nếu $|\lambda| \geq 1$, h(n) không còn khả tổng, tức h/t không ổn định

Hiện thực hệ RRTG – Cấu trúc

- VD: Xét hệ bậc 1

$y(n) = a_1y(n–1) + b_0x(n) + b_1x(n–1)$

Sơ đồ cấu trúc



Cấu trúc trực tiếp dạng 1

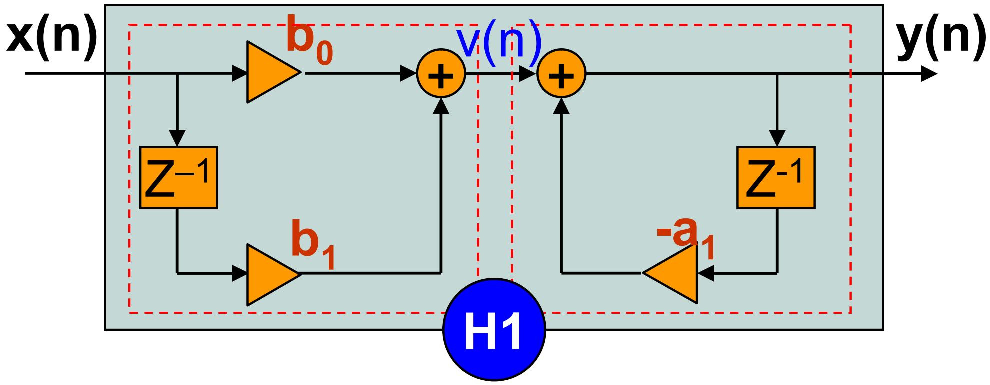
$$\begin{cases} v(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) \\ y(n) = -a_1y(n-1) + v(n) \end{cases}$$

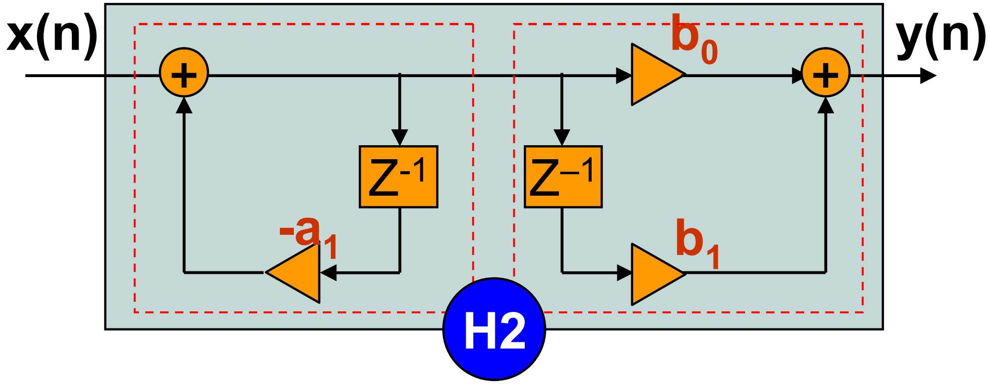
Hoán vị hai hệ con

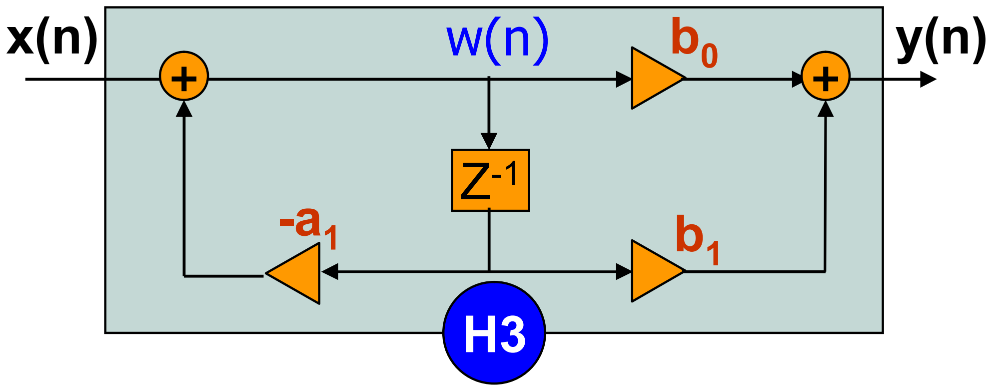
Gộp hai ô nhớ

Cấu trúc trực tiếp dạng 2 (dạng chuẩn tắc)

$$\begin{cases} w(n) = -a_1w(n-1) + x(n) \\ y(n) = b_0w(n) + b_1w(n-1) \end{cases}$$



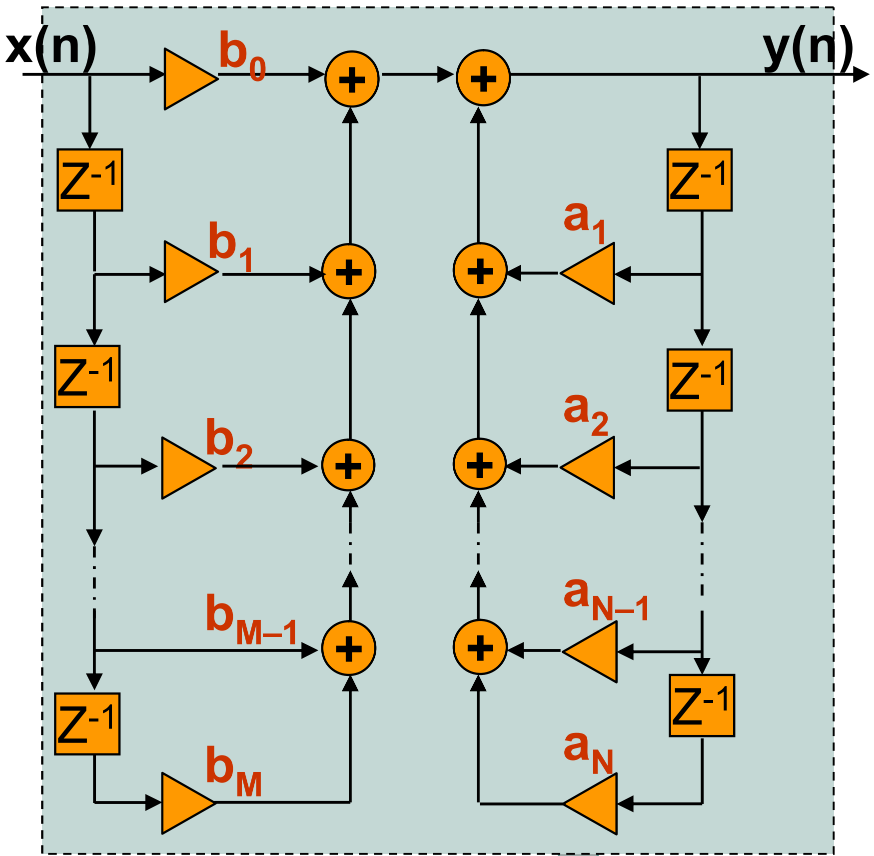




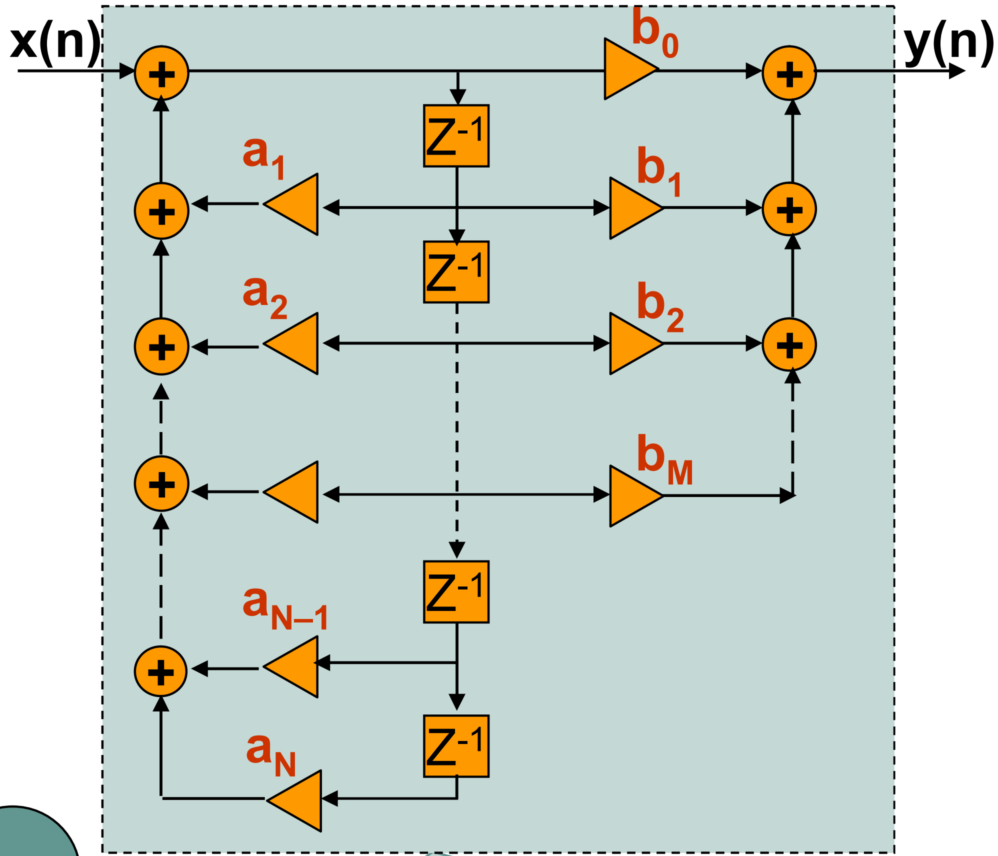
Hiện thực hệ RRTG – Cấu trúc

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Dạng I



Dạng II



Ô nhớ: M+N

Ô nhớ: Max(M,N)

Hoán vị

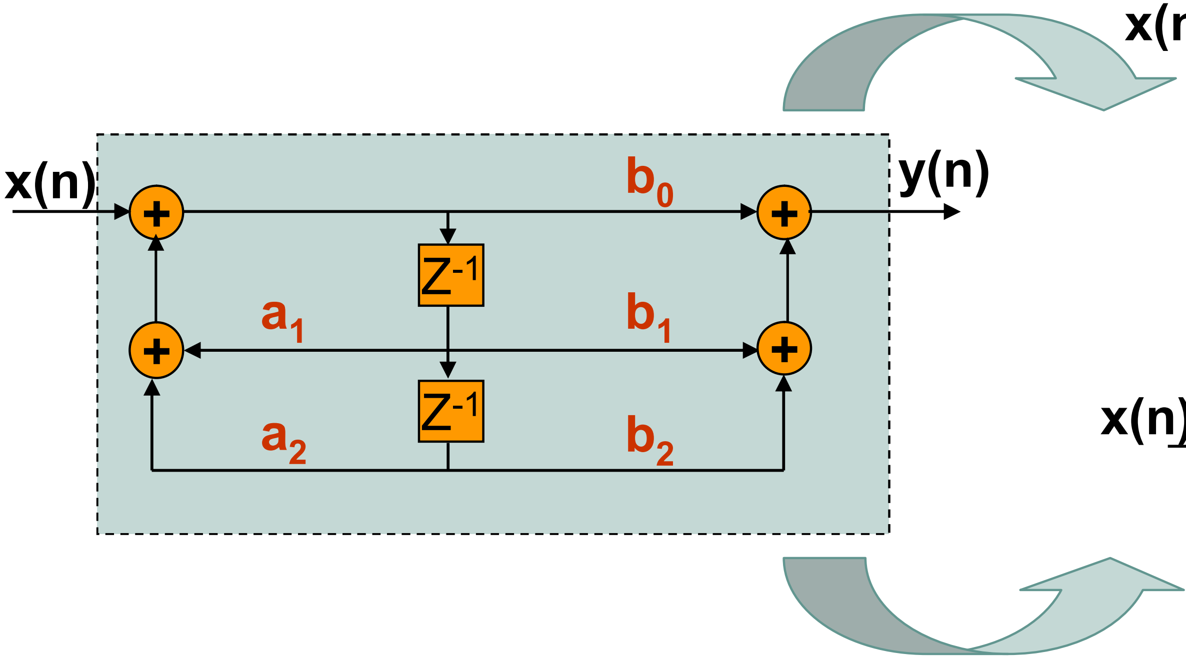
Gộp ô nhớ

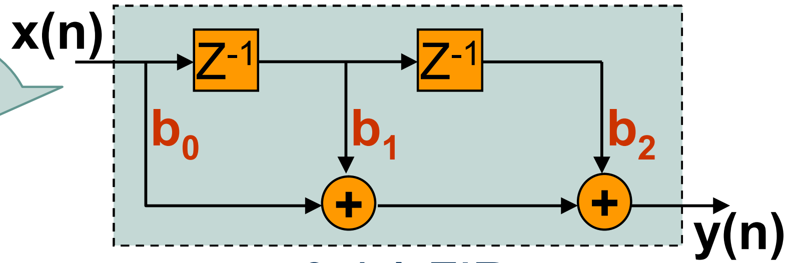
Hiện thực hệ RRTG – Cấu trúc

- Khi $a_k = 0 \Rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$

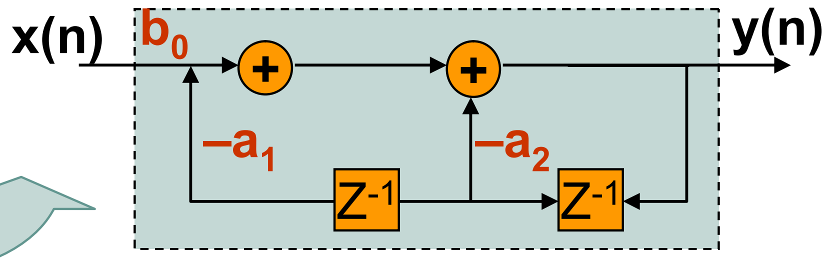
  hệ FIR không đệ qui với $\quad h(n) = \begin{cases} b_k & 0 \le k \le M \\ 0 & k\ khác \end{cases}$

- Hệ bậc 2: $y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$





$a_1 = a_2 = 0$: hệ FIR



$b_1 = b_2 = 0$: hệ đệ qui thuần

Hiện thực hệ FIR – bất đệ qui

- Hiện thực không đệ qui

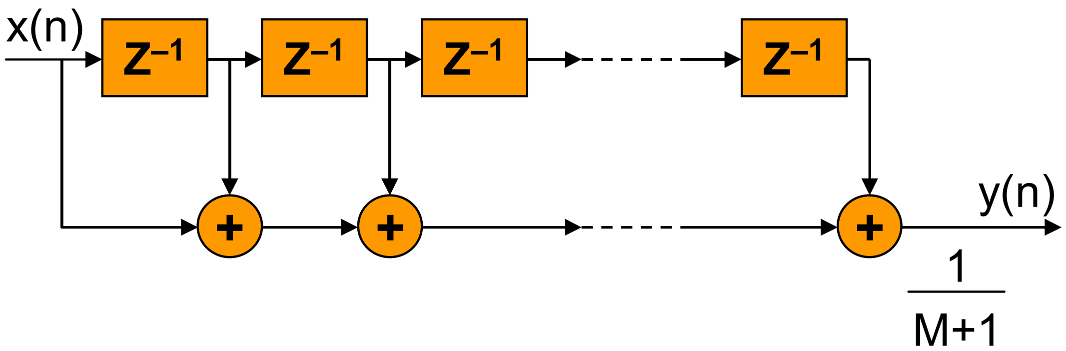
$$y(n)=\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

✦ Đáp ứng xung h(k) = b_k $(0 \le k \le M)$

✦ Ví dụ

$$y(n)=\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k)$$

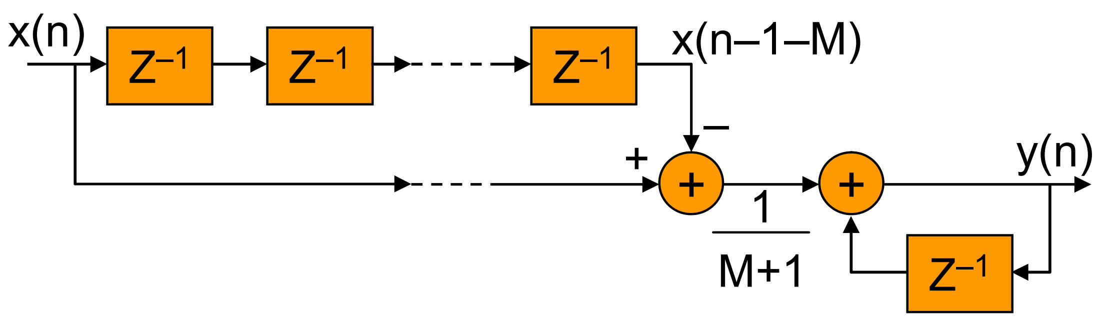
$$h(n)=\frac{1}{M+1} \qquad 0 \le n \le M$$



Hiện thực hệ FIR – đệ qui

- Hiện thực đệ qui
  - ✦ Bất kỳ h/t FIR nào cũng được thực hiện theo kiểu đệ qui
  - ✦ Ví dụ

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k) \\ &= \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-1-k) + \frac{1}{M+1}[x(n) - x(n-1-M)] \\ &= y(n-1) + \frac{1}{M+1}[x(n) - x(n-1-M)] \end{aligned}$$



Tương quan giữa các t/h RRTG

- Ứng dụng
  - Đo lường sự giống nhau giữa các tín hiệu
  - Trong các lĩnh vực: truyền tín hiệu, radar, sonar, …
- Định nghĩa

  T/h phát $x(n)$

  T/h nhận $y(n) = \alpha x(n-D) + w(n)$

  α : hệ số suy giảm t/h

  D : thời gian trễ truyền

  w(n) : nhiễu đường truyền

Tương quan chéo

y(n) so với x(n)

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n-l)$$

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+l)y(n)$$

x(n) so với y(n)

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)x(n-l)$$

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n+l)x(n)$$

Tương quan giữa các t/h RRTG

- Các bước để tính sự tương quan giữa y(n) so với x(n)
  1. Dịch: để có y(n–l), dịch y(n) sang
     + phải nếu l dương
     + trái nếu l âm
  1. Nhân: $v_l(n) = x(n)y(n-l)$
  2. Cộng: tổng các $v_l(n)$

- Nhận xét
  - $r_{xy}(l) = r_{yx}(-l)$
    $r_{yx}(l)$ là đảo của $r_{xy}(l)$ qua trục l = 0
  - So với tính tích chập, phép tính tương quan không phải thực hiện phép đảo
    - Có thể dùng giải thuật tính tích chập để tính tương quan và ngược lại
      $r_{xy}(l) = x(l)*y(-l)$

Tương quan giữa các t/h RRTG

- Tự tương quan

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n-l)$$

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n+l)x(n)$$

$$r_{xx}(l) = r_{xx}(-l)$$

- Tương quan của chuỗi nhân quả độ dài N [i.e x(n)=y(n)=0 khi n<0 và n≥N]

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n)y(n-l)$$

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=i}^{N-|k|-1} x(n)x(n-l)$$

Với $\begin{cases} i = l, k = 0 & l \geq 0 \\ i = 0, k = l & l < 0 \end{cases}$

Tương quan giữa các t/h RRTG

- Tính chất của sự tương quan giữa các t/h năng lượng
  - Năng lượng của t/h chính là sự tự tương quan tại l = 0

$$r_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) = E_x$$

  - Trung bình nhân của năng lượng là giá trị lớn nhất của chuỗi tương quan

$$|r_{xy}(l)| \le \sqrt{E_x E_y}$$

$$|r_{xx}(l)| \le E_x \equiv r_{xx}(0)$$

  - Chuỗi tương quan chuẩn hóa không phụ thuộc vào sự co giãn của t/h ($|\rho_{xy}(l)| \le 1$ và $|\rho_{xx}(l)| \le 1$)

$$\rho_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{E_x E_y}} \qquad \rho_{xx}(l) = \frac{r_{xx}(l)}{E_x}$$

Tương quan giữa các t/h RRTG

- Tương quan của t/h tuần hoàn
  - Cho x(n) và y(n) là 2 t/h công suất

$$r_{xy}(l) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n)y(n-l)$$

$$r_{xx}(l) = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n)x(n-l)$$

  - Nếu x(n) và y(n) tuần hoàn chu kỳ N
    - $r_{xy}(l)$ và $r_{xx}(l)$ tuần hoàn chu kỳ N

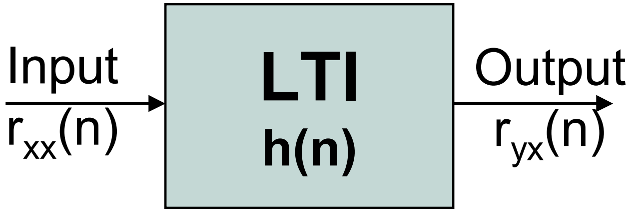
$$r_{xy}(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y(n-l)$$

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x(n-l)$$

    - T/c này được dùng để xác định chu kỳ của t/h (SV đọc thêm)

Tương quan giữa các t/h RRTG

- Giải thuật tính chuỗi tương quan giữa 2 t/h
  - x(n) $0 \le n \le N-1$
  - y(n) $0 \le n \le M-1$



M≤N

$$r_{xy}(l) = \begin{cases} \sum_{n=l}^{M-1+l} x(n)y(n-l) & 0 \le l \le N-M \\ \sum_{n=l}^{N-1} x(n)y(n-l) & N-M \le l \le N-1 \end{cases}$$

M>N

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=l}^{N-1} x(n)y(n-l) \quad 0 \le l \le N-1$$

- Chuỗi tương quan giữa ngõ nhập và xuất của h/t LTI

$$Voi\ y(n) = h(n) * x(n), ta\ có$$

$$r_{yx}(l) = y(l) * x(-l) = h(l) * [x(l) * x(-l)] = h(l) * r_{xx}(l)$$

$$Thay\ l\ bang\ -l,$$

$$\Rightarrow r_{xy}(l) = h(-l) * r_{xx}(l)$$

$$r_{yy}(l) = y(l) * y(-l) = [h(l) * x(l)] * [h(-l) * x(-l)] = r_{hh}(l) * r_{xx}(l)$$

$$\boxed{E_y \equiv r_{yy}(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{hh}(k) r_{xx}(k)}$$

BK

TP.HCM

Chương 3

BIẾN ĐỔI Z

T.S. Đinh Đức Anh Vũ

Faculty of Computer Science and Engineering
HCMC University of Technology
268, av. Ly Thuong Kiet,
District 10, HoChiMinh city
Telephone : (08) 864-7256 (ext. 5843)
Fax : (08) 864-5137
Email : anhvu@hcmut.edu.vn
http://www.cse.hcmut.edu.vn/~anhvu

Nội dung

- Biến đổi Z
  - BĐ thuận
  - BĐ ngược
- Các tính chất của BĐ Z
- BĐ Z hữu tỉ
  - Điểm không (Zero) – Điểm cực (Pole)
  - Pole và t/h nhân quả trong miền thời gian
  - Mô tả h/t LTI bằng hàm hệ thống
- Biến đổi Z ngược
  - Phương pháp tích phân
  - Phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa
  - Phương pháp phân rã thành các hữu tỉ
- Biến đổi Z một phía (Z^+)
  - Tính chất
  - Giải PTSP bằng BĐ Z^+
- Phân tích hệ LTI
  - Đáp ứng của hệ
  - Đáp ứng tức thời, quá độ
  - Tính ổn định và nhân quả

Biến đổi Z

- Tổng quát
  - Một cách biểu diễn t/h khác về mặt toán học
  - Biến đổi t/h từ miền thời gian sang miền Z
  - Dễ khảo sát t/h và h/t trong nhiều trường hợp (dựa vào các t/c của BĐ Z)

- Định nghĩa
  - Công thức $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$
  - Quan hệ $$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$
  - Ký hiệu $X(z) \equiv Z\{x(n)\}$
  - Biến z Điểm thuộc mặt phẳng z
    $z = a + jb$ hay $z = re^{j\delta}$
  - Miền hội tụ (ROC) $\{z \mid |X(z)| < \infty\}$
    Chỉ quan tâm X(z) tại những điểm z thuộc ROC

Biến đổi Z

- Ví dụ
  - T/h nhân quả x(n) = $a^n u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(az^{-1})^n$$

$$Khi\left|az^{-1}\right|<1(i.e.|z|>|a|),\qquad X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$\Rightarrow ROC:|z|>|a|$$

  - T/h phản nhân quả x(n) = $-a^n u(-n-1)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(-a^n)z^{-n}=-\sum_{l=1}^{\infty}(a^{-1}z)^l$$

$$Khi\left|a^{-1}z\right|<1(i.e.|z|<|a|),\qquad X(z)=-\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{1}{1-az^{-1}}$$

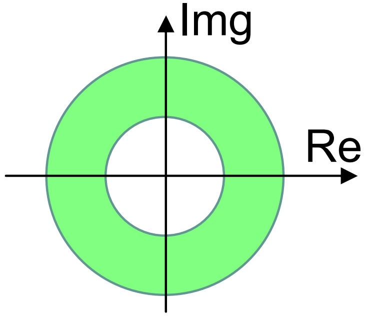
$$\Rightarrow ROC:|z|<|a|$$

  - Ý nghĩa
    - T/h RRTG x(n) được xác định duy nhất bởi biểu thức BĐ Z và ROC của nó
    - ROC của t/h nhân quả là phần ngoài của vòng tròn bán kính r_2, trong khi ROC của t/h phản nhân quả là phần trong của vòng tròn bán kính r_1

Biến đổi Z

- ROC của các t/h

T/h hữu hạn		T/h vô hạn	
T/h	ROC	T/h	ROC
Nhân quả [x(n)=0 n<0]	Mpz \ {0}	Nhân quả (t/h bên phải) [x(n)=0 n<0]	$\|z\| > r_2$
Phản nhân quả [x(n)=0 n>0]	Mpz \ {∞}	Phản nhân quả (t/h bên trái) [x(n)=0 n>0]	$\|z\| < r_1$
2 bên	Mpz \ {0, ∞}	2 bên	Vành khuyên $r_1 > \|z\| > r_2$



- BĐ Z một phía

$$X^{+}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Biến đổi Z

- Tích phân Cauchy

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{n-1-k}dz = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

- Biến đổi Z ngược
  - Từ $\quad X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k}$
  - Nhân 2 vế với z^{n-1}
  - Tích phân 2 vế theo đường cong kín C bao gốc O thuộc ROC của X(z)

$$\oint_C X(z) z^{n-1} dz = \oint_C \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{n-1-k} dz$$

  - Áp dụng tích phân Cauchy

$$\oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \oint_C z^{n-1-k} dz = 2\pi j x(n)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz}$$

Biến đổi Z – Tính chất

- ROC = $ROC_1 \cap ROC_2 \cap \ldots \cap ROC_n$
- Tuyến tính $$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)$$ $$x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)}$$

✦ Ví dụ $\quad x(n) = a^n u(n) + b^n u(-n-1)$

$$x_1(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad ROC: |z| > |a|$$

$$x_2(n) = -b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{z} X_2(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} \quad ROC: |z| < |b|$$

Do đó $$x(n) = x_1(n) - x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = X_1(z) - X_2(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{1}{1 - bz^{-1}}$$

$$ROC: |a| < |z| < |b|$$

Biến đổi Z – Tính chất

- Dịch theo thời gian $x(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{gathered} x(n-k) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} z^{-k}X(z) \\ ROC = ROC_{x(n)} \setminus \begin{cases} 0 & k>0 \\ \infty & k<0 \end{cases} \end{gathered}}$$

- ROC của việc kết hợp các BĐ Z
  - Nếu kết hợp tuyến tính của các BĐ Z có khoảng thời gian hữu hạn, ROC của BĐ Z được xác định bởi bản chất hữu hạn của t/h này, mà không phải ROC của các BĐ riêng lẻ
  - Ví dụ $x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & others \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} 1.z^{-n} = 1 + z^{-1} + \Lambda + z^{-(N-1)} = \begin{cases} N & z=1 \\ \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} & z \neq 1 \end{cases} \qquad ROC: mpz \setminus \{0\}$$

Mặt khác, có thể biểu diễn x(n) = u(n) – u(n–N)

X(z) = Z{u(n)} – Z{u(n–N)} = (1–z^{-N})Z{u(n)}

$$Z\{u(n)\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad ROC: |z| > 1$$

Biến đổi Z – Tính chất

- Co giãn trong miền Z $x(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(z)$ $ROC: r_1 < |z| < r_2$

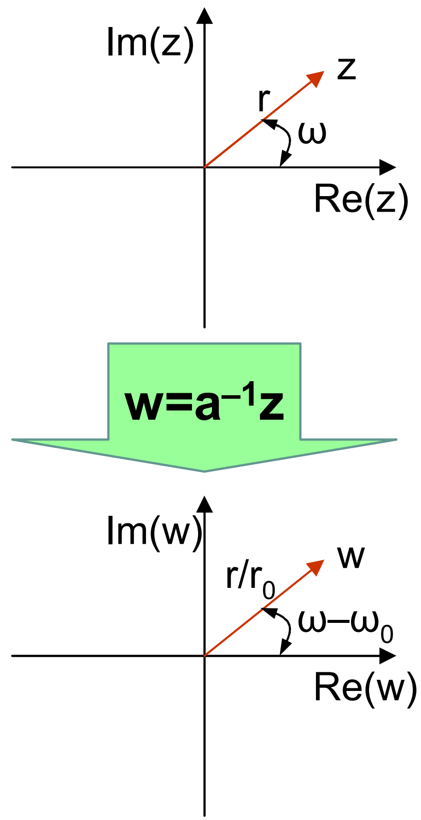
$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} a^n x(n) \stackrel{z}{\longleftrightarrow} X(a^{-1}z) \qquad \forall a\,(thuc\, hay\, phuc) \\ ROC: |a|r_1 < |z| < |a|r_2 \end{array}}$$

- Ý nghĩa

$$\left.\begin{array}{l} a = r_0 e^{j\omega_0} \\ z = re^{j\omega} \\ w = a^{-1}z \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} Z\{x(n)\} = X(z) \\ Z\{a^n x(n)\} = X(w) \end{array}$$

$$w = a^{-1}z = \left(\frac{1}{r_0} r\right) e^{j(\omega - \omega_0)}$$

$$Thay\, bien \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} co & r_0 > 1 \\ gian & r_0 < 1 \end{array}\right\} + quay\, mpz$$



Biến đổi Z – Tính chất

- Đảo thời gian $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$ $\qquad ROC: r_1 < |z| < r_2$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x(-n) \xleftrightarrow{Z} X(z^{-1}) \qquad ROC: \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}}$$

✦ Ý nghĩa
  - $ROC_{x(n)}$ là nghịch đảo của $ROC_{x(-n)}$
  - Nếu $z_0 \in ROC_{x(n)}$, $1/z_0 \in ROC_{x(-n)}$

- Vi phân trong miền Z $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{nx(n) \xleftrightarrow{z} -z\frac{dX(z)}{dz}}$$

Biến đổi Z – Tính chất

- Tích chập

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)$$

$$x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = X_1(z)X_2(z)}$$

- Tính tích chập của 2 t/h dùng phép BĐ Z
  - ✦ Xác định BĐ Z của 2 t/h

    $X_1(z) = Z\{x_1(n)\}$

    $X_2(z) = Z\{x_2(n)\}$ Miền thời gian $\rightarrow$ miền Z

  - ✦ Nhân 2 BĐ Z với nhau

    $X(z) = X_1(z)X_2(z)$ Xử lý trong miền Z

  - ✦ Tìm BĐ Z ngược của X(z)

    $x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$ Miền Z $\rightarrow$ miền thời gian

Biến đổi Z – Tính chất

- Tương quan

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)$$
$$x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{x_1x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n-l) \xleftrightarrow{z} R_{x_1x_2}(z) = X_1(z)X_2(z^{-1})}$$

- Việc tính tương quan giữa 2 t/h được thực hiện dễ dàng nhờ BĐ Z
- Ví dụ: xác định chuỗi tự tương quan của t/h x(n) = a^nu(n) (|a| < 1)

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad ROC: |z| > |a|$$

$$X(z^{-1}) = \frac{1}{1-az} \qquad ROC: |z| < \frac{1}{|a|}$$

$$R_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1}) = \frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-az} = \frac{1}{1-a(z+z^{-1})+a^2}$$

$$ROC: |a| < |z| < \frac{1}{|a|}$$

$$r_{xx}(l) = \frac{1}{1-a^2}a^{|l|} \qquad -\infty < l < \infty$$

Biến đổi Z – Tính chất

- Nhân 2 chuỗi

$$x_1(n) \xleftrightarrow{z} X_1(z)$$
$$x_2(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x(n) = x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \dfrac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2(\dfrac{z}{v})v^{-1}dv \\ C: bao\,dong\,quanh\,goc\,0, thuoc\,ROC\,chung\,cua\,X_1(v)\,va\,X_2(1/v) \end{array}}$$

- Cách xác định miền hội tụ

$$X_1(v) \quad hoi\,tu \quad r_{1l} < |v| < r_{1u}$$

$$X_2(z) \quad hoi\,tu \quad r_{2l} < |z| < r_{2u}$$

$$\Rightarrow X_2(z/v) \quad hoi\,tu \quad r_{2l} < \left|\frac{z}{v}\right| < r_{2u}$$

$$Do\,do, X(z) \quad hoi\,tu \quad r_{1l}r_{2l} < |z| < r_{1u}r_{2u}$$

Biến đổi Z – Tính chất

- Định lý giá trị đầu
  - Nếu x(n) nhân quả [x(n) = 0 ∀n<0]

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)}$$

- Phức hợp $x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$

$$\boxed{x^*(n) \xleftrightarrow{z} X^*(z^*)}$$

  - Phần thực

$$\boxed{\mathrm{Re}\{x(n)\} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]}$$

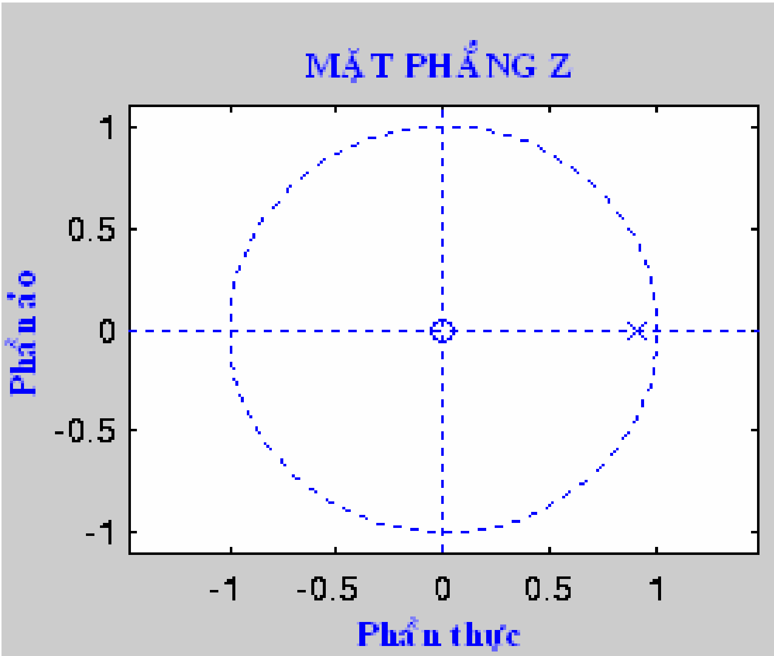
  - Phần ảo

$$\boxed{\mathrm{Im}\{x(n)\} \xleftrightarrow{z} \frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]}$$

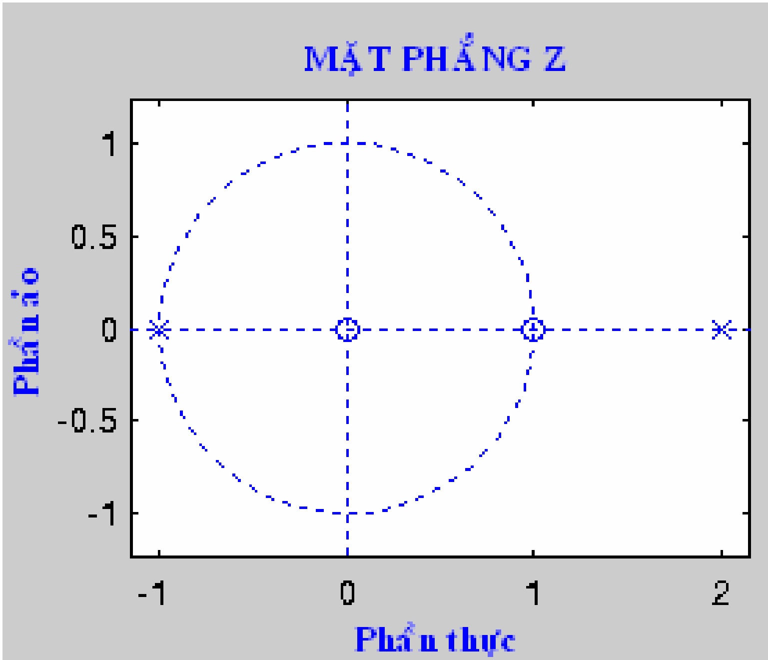
Biến đổi Z hữu tỉ – zero & pole

- Zero của BĐ X(z): các giá trị z sao cho X(z) = 0
- Pole của BĐ Z: các giá trị của z sao cho X(z) = ∞
- ROC không chứa bất kỳ pole nào
- Ký hiệu trên mpz: zero – vòng tròn (o) và pole – chữ thập (x)

$$X(z) = \frac{1}{1 - 0.9z^{-1}}$$



$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z^{-1} - 2z^{-2}}$$



Biến đổi Z hữu tỉ – zero & pole

- Biến đổi Z dạng hữu tỉ
  - Rất hữu ích để phân tích hệ LTI RRTG
  - Việc xét tính chất hay thiết kế hệ có tính chất nào đó → chỉ cần quan tâm trên vị trí của các điểm zero-pole
- Các cách biểu diễn
  - Dạng mũ âm

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\Lambda+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\Lambda+a_Nz^{-N}}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{M}a_kz^{-k}}$$

  - Dạng mũ dương

$$X(z)=\frac{b_0}{a_0}z^{N-M}\frac{z^M+\frac{b_1}{b_0}z^{M-1}+\Lambda+\frac{b_M}{b_0}}{z^N+\frac{a_1}{a_0}z^{N-1}+\Lambda+\frac{a_N}{a_0}}$$

  - Dạng Zero-Pole

$$X(z)=Gz^{N-M}\frac{(z-z_1)(z-z_2)\mathrm{K}\,(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\mathrm{K}\,(z-p_N)}=Gz^{N-M}\frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)}$$

$$G\equiv\frac{b_0}{a_0}$$

Biến đổi Z hữu tỉ – zero & pole

- Dạng hữu tỉ từ zeros-poles

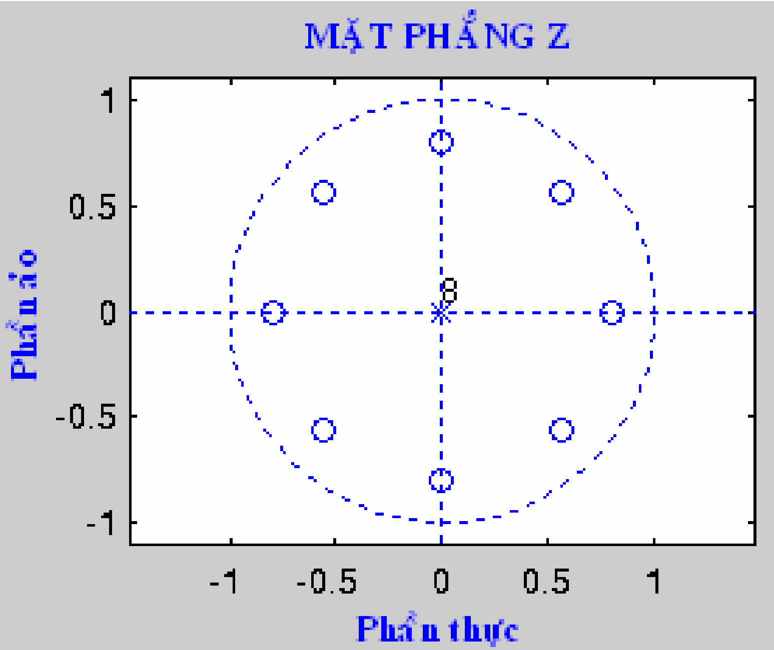
$$X(z) = Gz^{N-M}\frac{(z-z_1)(z-z_2)\text{K}\,(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\text{K}\,(z-p_N)}$$

  - G: độ lợi (gain)

- VD: Tìm dạng hữu tỉ và vẽ giản đồ zero-pole cho X(z):

  Zeros: $Z_k=0.8e^{j2\pi k/M}$, k=1..M

  Poles: M pole tại 0




```
%Tim Huu ti, zplane: zpm.m
%---------------------------------
M=8;
a=0.8;
p=zeros(M,1);
z=zeros(M,1);
for k=1:M,
    z(k,1)=a*exp((j*2*pi*k)/M);
end;
[num den] = zp2tf(z,p,1);
disp(num);
disp(den);
zplane(z,p);
```

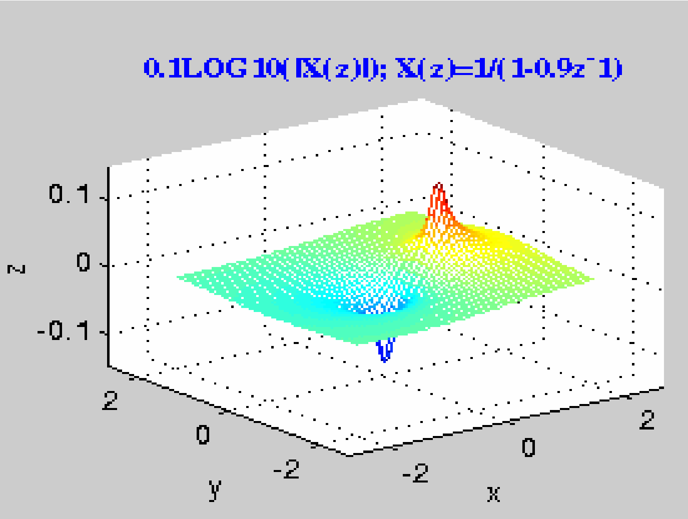
Biến đổi Z hữu tỉ – zero & pole

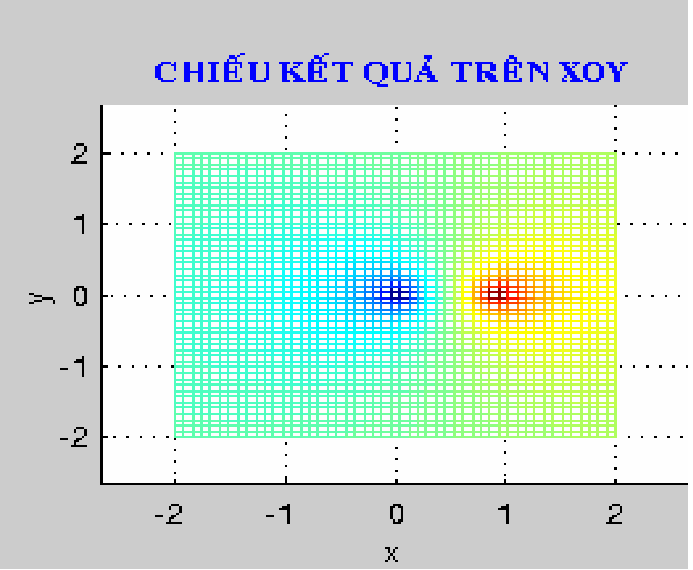
- Mô tả hình học cho X(z)
  - |X(z)| là hàm thực, dương của biến z → bề mặt
  - Zeros: các đỉnh dương, cao
  - Poles: các đỉnh âm, thấp
  - VD:

$$X(z) = \frac{1}{1-0.9z^{-1}}$$

Dạng hình học dùng Matlab

```
ezmesh('a', 'b',
        '0.1*log10(abs(1/(1 - 0.9*(a+j*b)^-1)))',
        [-2,2,-2,2]);
```

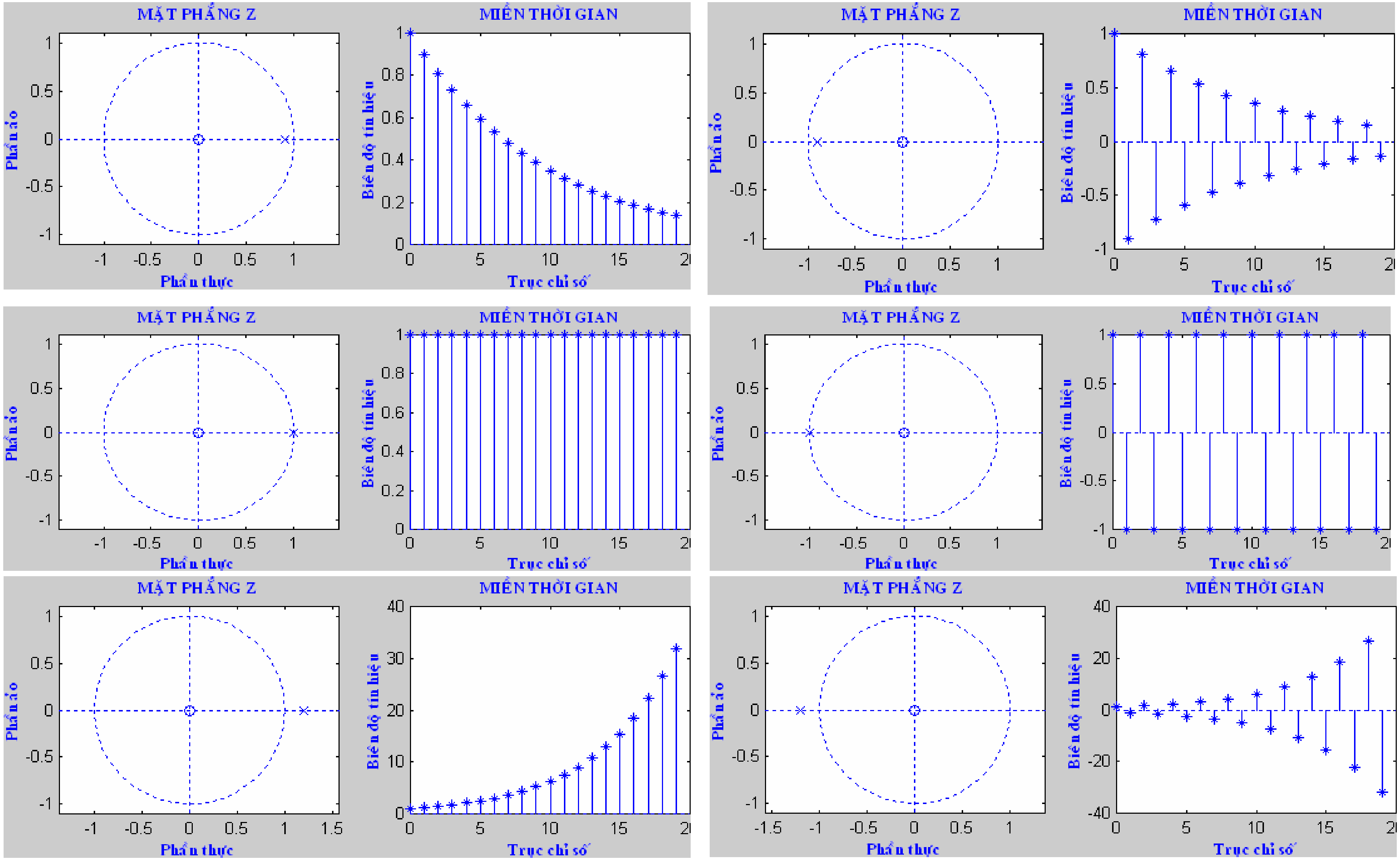




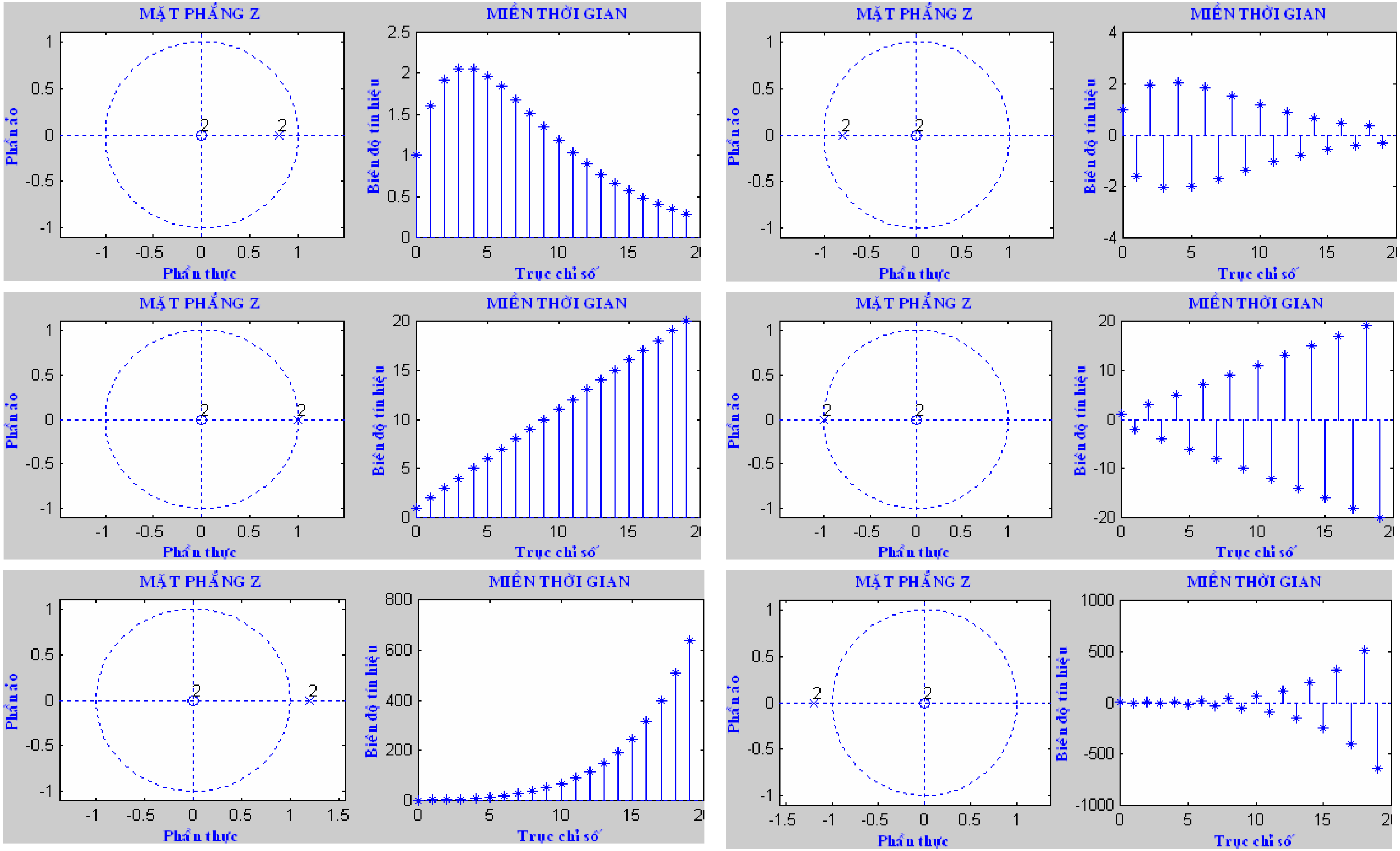
Biến đổi Z hữu tỉ

- Vị trí pole và hành vi của t/h nhân quả ở miền thời gian
  - Vị trí pole ảnh hưởng tính chất bị chặn, phân kỳ của tín hiệu nhân quả ở miền thời gian
  - Vị trí pole quyết định tính ổn định của hệ thống nhân quả
  - Tính chất của tín hiệu ở miền thời gian, trong trường hợp pole nằm ngoài hay trong hay trên *vòng tròn đơn vị* qua những ví dụ sau

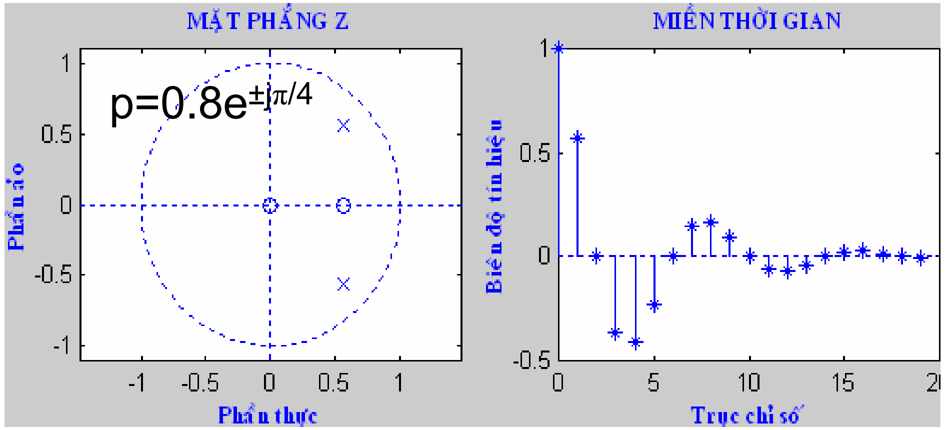
Biến đổi Z hữu tỉ – Vị trí pole

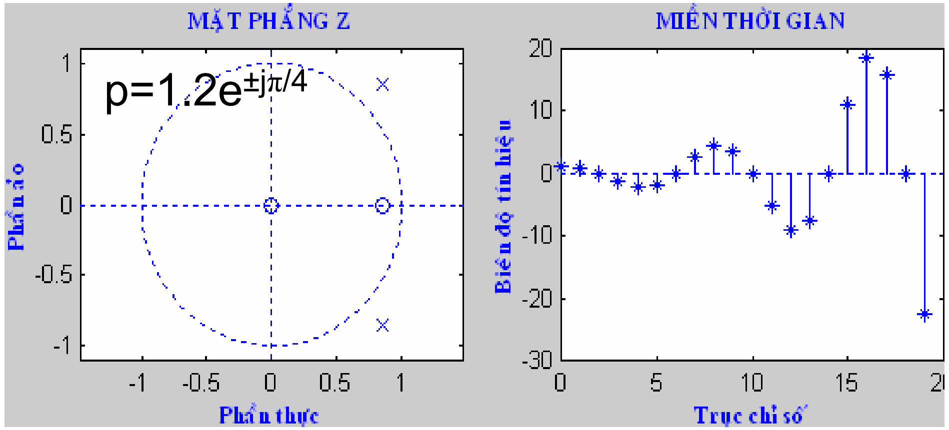


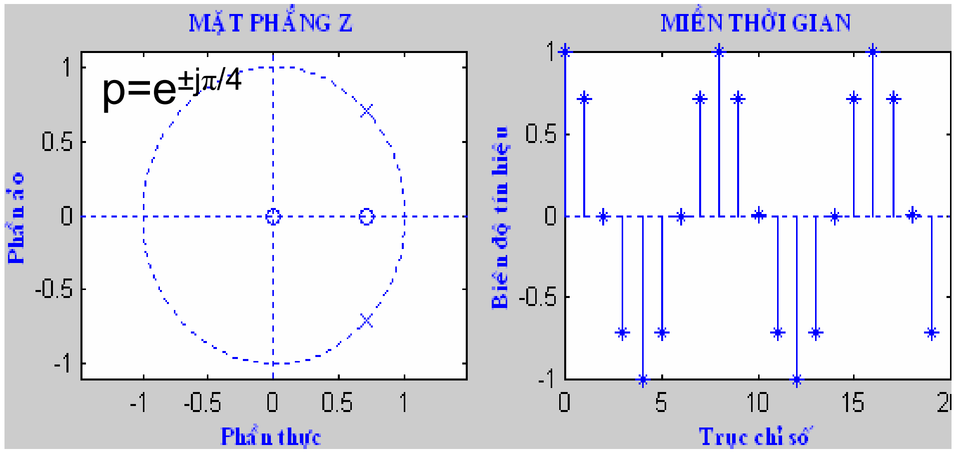
Biến đổi Z hữu tỉ – Vị trí pole

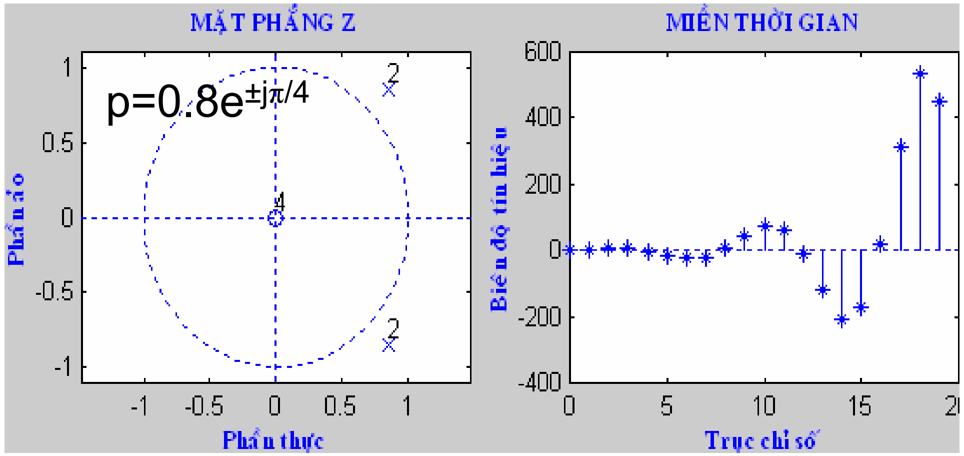


Biến đổi Z hữu tỉ – Vị trí pole

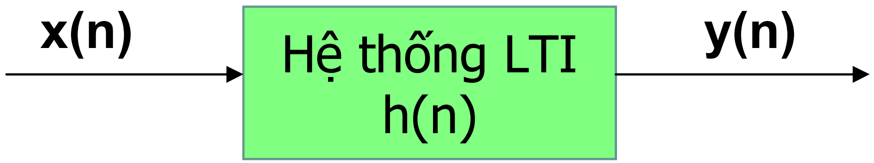








BĐ Z hữu tỉ – Hàm h/t của hệ LTI



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$\updownarrow z \qquad \updownarrow z \qquad \updownarrow z$$

$$Y(z) = X(z)\,H(z)$$

- Xác định y(n)
  - Tính X(z) và H(z)
  - Xác định Y(z)
  - Tìm y(n) bằng cách tính BĐ Z ngược của Y(z)
- Tìm đáp ứng đơn vị

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

- Hàm h/t: H(z)
  - H(z): đặc trưng cho h/t trong miền Z
  - h(n): đặc trưng cho h/t trong miền TG

- VD
  - $h(n) = (1/2)^n u(n)$
  - $x(n) = (1/3)^n u(n)$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

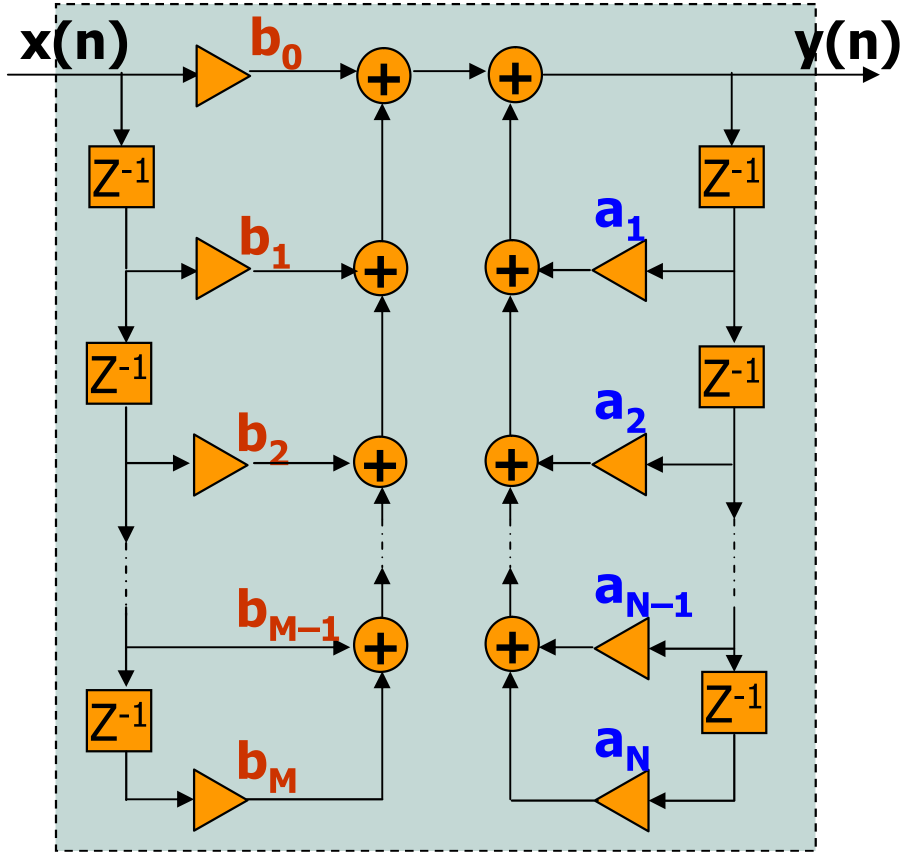
$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}}$$

$$= \frac{6}{(z^{-1} - 2)(z^{-1} - 3)}$$

BĐ Z hữu tỉ – Hàm h/t của hệ LTI

- Hàm hệ thống của hệ LTI mô tả bởi PTSP TT HSH

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$



- ✦ Hệ pole-zero

$$\frac{Y(z)}{X(z)} \equiv H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

- ✦ Hệ toàn zero
  - $a_k = 0$ $\quad 1 \le k \le N$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} = \frac{1}{z^M} \sum_{k=0}^{M} b_k z^{M-k}$$

  - FIR
- ✦ Hệ toàn pole
  - $b_k = 0$ $\quad 1 \le k \le M$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 z^N}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}} \qquad a_0 \equiv 1$$

  - IIR

Biến đổi Z ngược

- Tổng quát
  - ✦Tìm t/h trong miền thời gian từ BĐ Z của nó
  - ✦Ký hiệu $x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}$
  - ✦Biểu thức tổng quát

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

$$C : bao\,dong\,quanh\,goc\,O, thuoc\,ROC$$

- Phương pháp
  - ✦Tính tích phân trực tiếp
  - ✦Khai triển thành chuỗi theo biến z và z^{-1}
  - ✦Khai triển phân số cục bộ và tra bảng

Biến đổi Z ngược

- Phương pháp tích phân trực tiếp
  - ✦ Định lý thặng dư Cauchy
    - Nếu đạo hàm df(z)/dz tồn tại trên và trong bao đóng C và nếu f(z) không có pole tại z = z_0

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} f(z_0) & z_0 \text{ bên trong } C \\ 0 & z_0 \text{ bên ngoài } C \end{cases}$$

    - Tổng quát, nếu đạo hàm bậc k+1 của f(z) tồn tại và f(z) không có pole tại z = z_0

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^k}dz = \begin{cases} \left.\dfrac{1}{(k-1)!}\dfrac{d^{k-1}f(z)}{dz^{k-1}}\right|_{z=z_0} & z_0 \text{ bên trong } C \\ 0 & z_0 \text{ bên ngoài } C \end{cases}$$

    - Vế phải của 2 biểu thức trên gọi là thặng dư của cực tại z = z_0

Biến đổi Z ngược

- Giả sử f(z) không có pole trong bao đóng C và đa thức g(z) có các nghiệm đơn riêng biệt $z_1, z_2, \ldots, z_n$ trong C

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{g(z)}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \left[\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i(z)}{z-z_i}\right]dz$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{A_i(z)}{z-z_i}dz$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i(z_i)$$

$$A_i(z) = (z-z_i)\frac{f(z)}{g(z)}$$: Thặng dư

- Biến đổi Z ngược

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

$$= \sum_{cac\ pole\{z_i\}\ trong\ C}[thang\ du\ cua\ X(z)z^{n-1}\ tai\ z_i]$$

$$= \sum_i (z-z_i)X(z)z^{n-1}\Big|_{z=z_i}$$

Biến đổi Z ngược

- Ví dụ: tìm BĐ Z ngược của $X(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ $\quad |z| > |a|$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^{n-1}}{1 - az^{-1}}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z^n}{z - a}dz$$

  - ✦ C: vòng tròn bán kính r > |a|

1. $n \geq 0$: z^n không có pole trong C. Pole bên ngoài C là z = a
   $\Rightarrow x(n) = f(z_0) = a^n$
2. $n < 0$: z^n có pole bậc n tại z = 0 (bên trong C)

$$x(-1) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{z(z-a)}dz = \left.\frac{1}{z-a}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{z}\right|_{z=a} = 0$$

$$x(-2) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{1}{z^2(z-a)}dz = \left.\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-a}\right)\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{z^2}\right|_{z=a} = 0$$

  - ✦ Có thể CM được x(n) = 0 khi n < 0
    $\Rightarrow x(n) = a^n u(n)$

Biến đổi Z ngược

- PP khai triển thành chuỗi theo biến z và z^{-1}
  - ✦Dựa vào tính duy nhất của BĐ Z, nếu X(z) được khai triển thành

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n}$$

thì $x(n) = c_n \quad \forall n$

  - ✦Nếu X(z) hữu tỉ, phép khai triển được thực hiện bằng phép chia
    - PP này chỉ được dùng để xác định giá trị vài mẫu đầu của t/h

Biến đổi Z ngược

- Ví dụ: xác định x(n) từ $X(z) = \dfrac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$

  Với a) ROC |z| >1 và b) ROC |z| < 0.5

  - x(n) là t/h nhân quả

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = 1 + \tfrac{3}{2}z^{-1} + \tfrac{7}{4}z^{-2} + \tfrac{15}{8}z^{-3} + \Lambda$$

$\Rightarrow$ x(n) = {$\underset{\uparrow}{1}$, 3/2, 7/4, 15/8, ...}

  - x(n) là t/h phản nhân quả

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}} = 2z^{2} + 6z^{3} + 14z^{4} + \Lambda$$

$\Rightarrow$ x(n) = {..., 14, 6, 2, 0, $\underset{\uparrow}{0}$}

Biến đổi Z ngược

- PP khai triển phân số cục bộ và tra bảng
  - ✦ Nguyên tắc
    - Nếu X(z) được biểu diễn $X(z) = a_1X_1(z) + a_2X_2(z) + \ldots + a_kX_k(z)$ thì $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \ldots + a_kx_k(n)$
  - ✦ Từ dạng hữu tỉ $$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \Lambda + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \Lambda + a_N z^{-N}}$$
    - X(z) là *hợp lệ* nếu $a_N \neq 0$ và $M<N$
    - Nếu M >= N, chia đa thức để đưa về
$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = c_0 + c_1 z^{-1} + \Lambda + c_{M-N} z^{-(M-N)} + \frac{N_1(z)}{D(z)}$$
    - Giả sử X(z) hợp lệ
$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \Lambda + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \Lambda + a_N z^{-N}}$$
$$= \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \Lambda + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \Lambda + a_N}$$
  - ✦ Phương pháp $$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + \Lambda + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \Lambda + a_N}$$
    - Khai triển phân số cục bộ
    - Tra bảng để xác định BĐ Z ngược của từng phân số

Biến đổi Z ngược

- Khai triển phân số cục bộ
  - ✦ Tìm pole bằng cách giải PT $z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N = 0$

    (giả sử các pole: $p_1, p_2, \ldots, p_N$)
  - ✦ Pole đơn riêng biệt $$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \Lambda + \frac{A_N}{z-p_N}$$
    - Xác định A_k $$A_k = \left.\frac{(z-p_k)X(z)}{z}\right|_{z=p_k}$$
    - Các pole liên hợp phức sẽ tạo ra các hệ số liên hợp phức trong khai triển (i.e. nếu $p_2 = p_1^*$ thì $A_2 = A_1^*$)
  - ✦ Pole kép
    - Giả sử pole p_k kép bậc l $$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2} + \Lambda\ \frac{A_{1k}}{z-p_k} + \frac{A_{2k}}{(z-p_k)^2} + \Lambda + \frac{A_{lk}}{(z-p_k)^l} + \Lambda + \frac{A_N}{z-p_N}$$
    - Xác định A_{ik} $$A_{ik} = \frac{1}{(l-i)!(-p_k)^{l-i}} \frac{d^{l-i}}{dz}\left[\frac{(z-p_k)^l X(z)}{z}\right]_{z=p_k} \qquad i = 1,2,\ldots,l$$

Biến đổi Z ngược

- Tìm BĐ Z ngược của từng phân số cục bộ
  - Nếu các pole đơn riêng biệt $X(z) = A_1 \dfrac{1}{1-p_1 z^{-1}} + A_2 \dfrac{1}{z-p_2 z^{-1}} + \Lambda + A_N \dfrac{1}{z-p_N z^{-1}}$

do $Z^{-1}\left\{\dfrac{1}{1-p_k z^{-1}}\right\} = \begin{cases} (p_k)^n u(n) & ROC: |z| > |p_k| \quad (nhân\ qua) \\ -(p_k)^n u(-n-1) & ROC: |z| < |p_k| \quad (phan\ nhân\ qua) \end{cases}$

Nên $x(n) = (A_1 p_1^n + A_2 p_2^n + \Lambda + A_N p_N^n) u(n)$

  - Nếu có 2 pole liên hợp phức, có thể kết hợp 2 pole đó

$$x_k(n) = [A_k (p_k)^n + A_k^* (p_k^*)^n] u(n)$$

Nếu $\begin{cases} A_k = |A_k| e^{j\alpha_k} \\ p_k = r_k e^{j\beta_k} \end{cases}$ thì

$$Z^{-1}\left\{A_k \frac{1}{1-p_k z^{-1}} + A_k^* \frac{1}{1-p_k^* z^{-1}}\right\} = 2|A_k| r_k^n \cos(\beta_k n + \alpha_k) u(n) \qquad neu\ ROC: |z| > |p_k| = r_k$$

  - Nếu có pole kép $Z^{-1}\left\{\dfrac{pz^{-1}}{(1-pz^{-1})^2}\right\} = np^n u(n) \qquad ROC: |z| > |p|$

Biến đổi Z ngược

- Xác định biểu thức khai triển của

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

$$p_1=\tfrac{1}{2}+j\tfrac{1}{2}$$

$$p_2=\tfrac{1}{2}-j\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_1}{z-p_1}+\frac{A_2}{z-p_2}$$

$$A_1=\tfrac{1}{2}-j\tfrac{3}{2}$$

$$A_2=\tfrac{1}{2}+j\tfrac{3}{2}$$

$$X(z)=\frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_1}{z+1}+\frac{A_2}{z-1}+\frac{A_3}{(z-1)^2}$$

$$A_1=\tfrac{1}{4},\quad A_2=\tfrac{3}{4},\quad A_3=\tfrac{1}{2}$$

Biến đổi Z ngược

- Phân rã BĐ Z hữu tỉ
  - Dùng trong việc hiện thực các h/t RRTG (các chương sau)
  - Giả sử có BĐ Z được biểu diễn (để đơn giản $a_0 \equiv 1$)

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - p_k z^{-1})}$$

  - Nếu M ≥ N, X(z) có thể được biến đổi thành

$$X(z) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + X_{pr}(z)$$

  - Nếu $X_{pr}(z)$ có các pole đơn riêng biệt, $X_{pr}(z)$ được phân rã thành

$$X_{pr}(z) = A_1 \frac{1}{1 - p_1 z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1 - p_2 z^{-1}} + \Lambda + A_N \frac{1}{1 - p_N z^{-1}}$$

  - Nếu $X_{pr}(z)$ có nghiệm phức (liên hợp), các nghiệm liên hợp này được nhóm lại để tránh tạo ra hệ số phức

$$\frac{A}{1 - pz^{-1}} + \frac{A^*}{1 - p^* z^{-1}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad \text{với} \quad \begin{cases} b_0 = 2\,\mathrm{Re}(A) & a_1 = -2\,\mathrm{Re}(p) \\ b_1 = 2\,\mathrm{Re}(Ap^*) & a_2 = |p|^2 \end{cases}$$

Biến đổi Z ngược

- Tóm lại

$$X(z)=\sum_{k=0}^{M-N}c_k z^{-k}+\sum_{k=1}^{K_1}\frac{b_k}{1+a_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{K_2}\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}$$

với $K_1+K_2=N$

Biến đổi Z ngược

- Phân rã BĐ Z hữu tỉ
  - X(z) có thể được biểu diễn dưới dạng tích
  - Các pole phức (liên hợp) và các zero phức (liên hợp) được kết hợp để tránh hệ số phức cho phân rã của X(z)

$$\frac{(1-z_k z^{-1})(1-z_k^* z^{-1})}{(1-p_k z^{-1})(1-p_k^* z^{-1})} = \frac{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}$$

$$\textit{trong đó} \quad \begin{cases} b_{1k} = -2\,\mathrm{Re}(z_k) \\ b_{2k} = |z_k|^2 \end{cases} \quad \textit{và} \quad \begin{cases} a_{1k} = -2\,\mathrm{Re}(p_k) \\ a_{2k} = |p_k|^2 \end{cases}$$

  - Để đơn giản, cho M = N, X(z) được biểu diễn thành

$$X(z) = b_0 \prod_{k=1}^{K_1} \frac{1+b_k z^{-1}}{1+a_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{K_2} \frac{1+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}$$

$$\textit{trong đó} \quad K_1 + K_2 = N$$

Biến đổi Z một phía

- Giới thiệu
  - Trong kỹ thuật: tác động thường bắt đầu từ thời điểm n_0 nào đó. Đáp ứng cũng thường bắt đầu từ n_0 và các thời điểm sau n_0, với điều kiện đầu nào đó
  - Biến đổi Z một phía (Z^+) chỉ quan tâm đến phần tín hiệu x(n), n≥0
- Định nghĩa

$$X^+(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- Ký hiệu $Z^+\{x(n)\}$ và $x(n) \overset{z^+}{\longleftrightarrow} X^+(z)$
- Đặc tính
  - $Z^+\{x(n)\}$ không chứa thông tin của x(n) khi n < 0
  - BĐ Z^+ chỉ là duy nhất đối với t/h nhân quả
  - $Z^+\{x(n)\} = Z\{x(n)u(n)\}$
    - ROC bên ngoài vòng tròn
    - Không xét đến ROC khi tính BĐ Z^+

Biến đổi Z một phía

- Tính chất
  - Các tính chất của BĐ Z đều đúng cho BĐ Z^+, ngoại trừ tính chất dịch theo thời gian
  - Dịch theo thời gian $x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$
    - Trễ

$$\boxed{x(n-k) \xleftrightarrow{z^+} z^{-k}[X^+(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n)z^n] \qquad k > 0}$$

      - Nếu x(n) là t/h nhân quả, ta có

$$x(n-k) \xleftrightarrow{z^+} z^{-k}X^+(z) \qquad k > 0$$

    - Nhanh

$$\boxed{x(n+k) \xleftrightarrow{z^+} z^{k}[X^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n}] \qquad k < 0}$$

  - Định lý giá trị cuối cùng

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X^+(z)}$$

    - Giới hạn tồn tại nếu ROC của $(z-1)X^+(z)$ chứa vòng tròn đơn vị

Biến đổi Z một phía

- Giải PTSP
  - Dùng BĐ Z^+ để giải PTSP với điều kiện đầu khác 0
  - Phương pháp
    - Xác định PTSP của hệ
    - Tính BĐ Z^+ cả 2 vế PTSP để biến đổi nó thành PT đại số trong miền Z
    - Giải PT đại số để tìm BĐ Z của t/h mong muốn
    - Tìm BĐ Z ngược để xác định t/h trong miền thời gian
  - Ví dụ: xác định đáp ứng bước của hệ $y(n) = ay(n-1) + x(n)$ ($|a| < 1$) với đ/k đầu $y(-1) = 1$

$$Y^+(z) = a[z^{-1}Y^+(z) + y(-1)] + X^+(z)$$

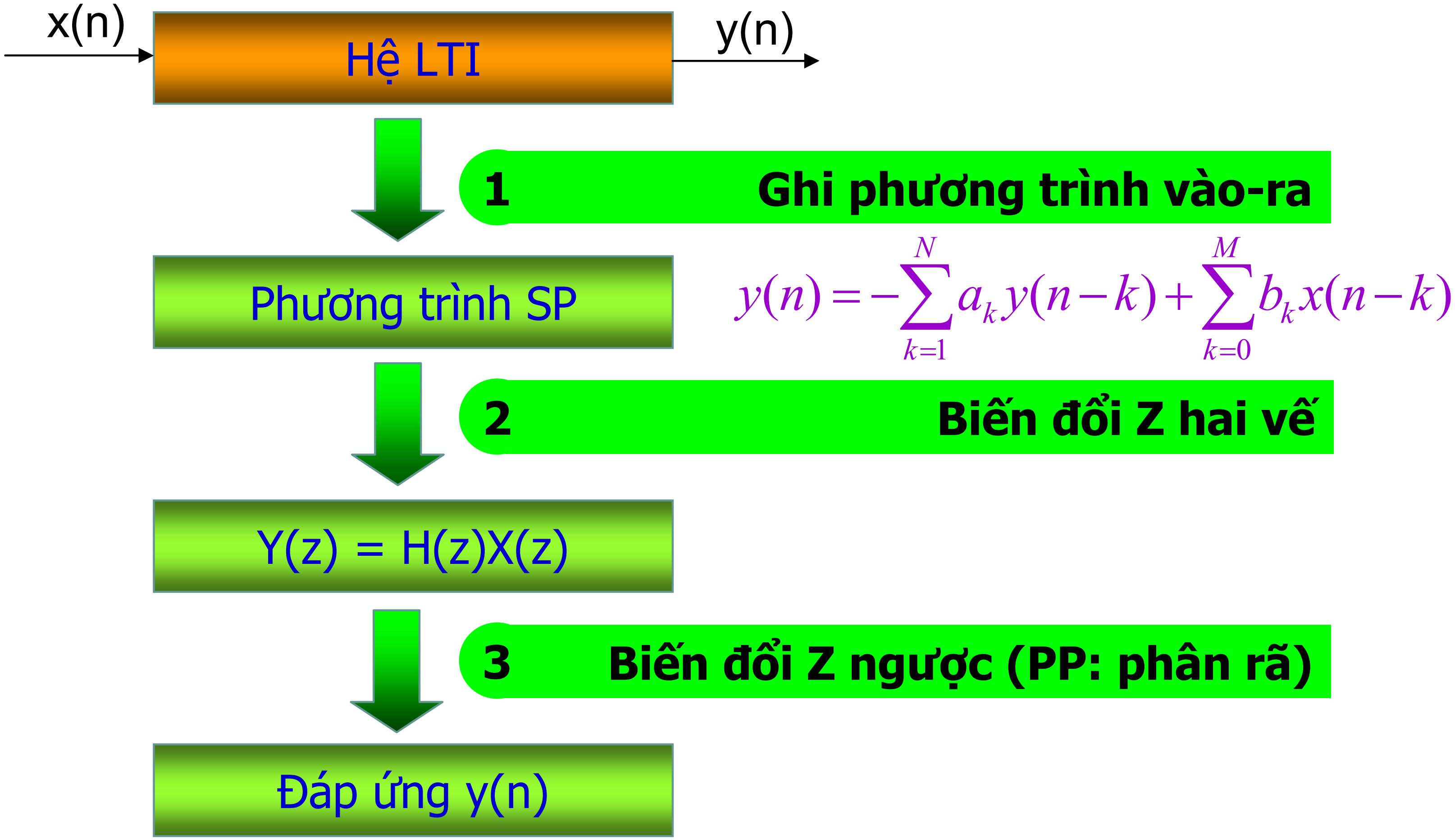
$$X^+(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\Rightarrow Y^+(z) = \frac{a}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-az^{-1}}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y(n) = a^{n+1}u(n) + \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n) = \frac{1}{1-a}(1-a^{n+2})u(n)$$

Phân tích hệ LTI

- Tìm đáp ứng của t/h x(n) đối với một h/t LTI
  - Biết đáp ứng xung đơn vị h(n)



$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Phân tích hệ LTI

- Đáp ứng của h/t pole-zero với hàm h/t hữu tỉ
  - Giả sử $H(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$ *và* $X(z) = \dfrac{N(z)}{Q(z)}$
  - Nếu h/t nghỉ (tức y(-1) = y(-2) = … = y(-N) = 0)

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{B(z)N(z)}{A(z)Q(z)}$$

  - Giả sử
    - H/t có các pole đơn $p_1, p_2, \ldots, p_N$ và X(z) có các pole đơn $q_1, q_2, \ldots, q_L$
    - $p_k \neq q_m$ (k = 1, …, N và m = 1, …, L)
    - Không thể ước lược giữa B(z)N(z) và A(z)Q(z)

$$\Rightarrow Y(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{L} \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}}$$

  - Biến đổi ngược

$$y(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n)}_{\text{Đáp ứng tự nhiên}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)}_{\text{Đáp ứng cưỡng bức}}$$

  - Có thể tổng quát hoá trong trường hợp X(z) và H(z) có pole chung hoặc pole bội

Phân tích hệ LTI

- Tìm đáp ứng của t/h x(n) đối với một h/t LTI có đ/k đầu
  - Biết đáp ứng xung đơn vị h(n)
  - Biết các đ/k đầu của h/t

x(n) → Hệ LTI → y(n)

1 **Ghi phương trình vào-ra**

Phương trình SP

2 **Biến đổi Z^+ hai vế**

$Y^+(z) = H^+(z)X^+(z)$

Có thể tách ra $Y^+_{zi}(z)$ và $Y^+_{zs}(z)$

3 **Biến đổi Z ngược, (PP: phân rã)**

Đáp ứng: y(n)

Có thể tách ra $y_{zi}(n)$ và $y_{zs}(n)$

Phân tích hệ LTI

- Đáp ứng của h/t pole-zero với đ/k đầu khác 0
  - Cho t/h x(n) nhân quả và các đ/k đầu y(-1), y(-2), …, y(-N)

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

  - BĐ Z^+ cả 2 vế và $X^+(z) = X(z)$

$$Y^+(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b^k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a^k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^{N} a^k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^n}{1+\sum_{k=1}^{N} a^k z^{-k}}$$

$$= H(z)X(z) + \frac{N_0(z)}{A(z)} \qquad N_0(z) \equiv -\sum_{k=1}^{N} a^k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n) z^n$$

  - Đáp ứng gồm 2 phần
    - Đáp ứng trạng thái không $Y_{zs}(z) = H(z)X(z)$ (công thức phần trước)
    - Đáp ứng không ngõ nhập (p_1, p_2, …, p_N là pole của A(z))

$$Y_{zi}(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} \quad \xleftrightarrow{Z^+} \quad y_{zi}(n) = \sum_{k=1}^{N} D_k (p_k)^n u(n)$$

    - Do $y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k^{'} (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n) \qquad (A_k^{'} = A_k + D_k)$$

    - Đ/k đầu chỉ làm thay đổi đáp ứng tự nhiên của h/t thông qua hệ số co giãn

Phân tích hệ LTI

- Đáp ứng tự nhiên $$y_{nr}(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n)$$
  - Khi $|p_k| < 1$ ($\forall$k), $y_{nr}(n)$ tiệm cận về 0 khi n $\to \infty$: *đáp ứng nhất thời*
- Đáp ứng cưỡng bức $$y_{fr}(n) = \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)$$
  - Khi t/h nhập là t/h sin, các pole q_k nằm trên vòng tròn đơn vị và các đáp ứng cưỡng bức cũng có dạng sin: *đáp ứng đều*
- Tính nhân quả và ổn định trên H(z)
  - Nhân quả

    LTI : nhân quả

    ⇔ h(n) : nhân quả

    ⇔ H(z) : có ROC là ngoài vòng tròn bán kính R nào đó
  - Ổn định

    LTI : ổn định

    ⇔ h(n) : khả tổng tuyệt đối

    ⇔ H(z) : có ROC chứa vòng tròn đơn vị
  - Nhân quả và ổn định

    LTI nhân quả : ổn định

    ⇔ H(z) : tất cả các pole nằm trong vòng tròn đơn vị

Phân tích hệ LTI

- Đáp ứng đều và tiệm cận
  - Xác định đáp ứng đều và tiệm cận của h/t mô tả bởi PTSP $y(n) = 3y(n-1) + x(n)$ khi t/h nhập là $x(n) = 2\sin(\pi n/4)u(n)$
    H/t có đ/k đầu bằng 0.

- Ổn định và nhân quả
  - Cho h/t LTI được đặc trưng bởi hàm h/t

$$H(z) = \frac{3 - 4z^{-1}}{1 - 3.5z^{-1} + 1.5z^{-2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2}{1 - 3z^{-1}}$$

  Đặc tả ROC của H(z) và xác định h(n) trong các trường hợp
    - H/t ổn định
    - H/t nhân quả
    - H/t phản nhân quả

- Ổn định của h/t bậc 2

Chương 4

Tín hiệu & Hệ thống trong miền tần số

T.S. Đinh Đức Anh Vũ

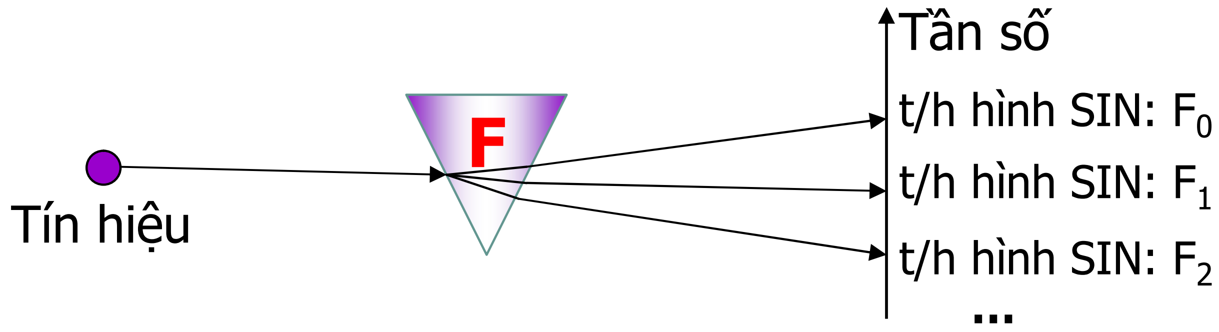
BK
TP.HCM

Faculty of Computer Science and Engineering
HCMC University of Technology
268, av. Ly Thuong Kiet,
District 10, HoChiMinh city
Telephone : (08) 864-7256 (ext. 5843)
Fax : (08) 864-5137
Email : anhvu@hcmut.edu.vn
http://www.cse.hcmut.edu.vn/~anhvu

Nội dung

- Phân tích tần số của t/h LTTG
- Phân tích tần số của t/h RRTG
- Các tính chất của BĐ Fourier cho các t/h RRTG
- Đặc trưng miền tần số của hệ LTI
- Bộ lựa chọn tần số
- Hệ thống đảo

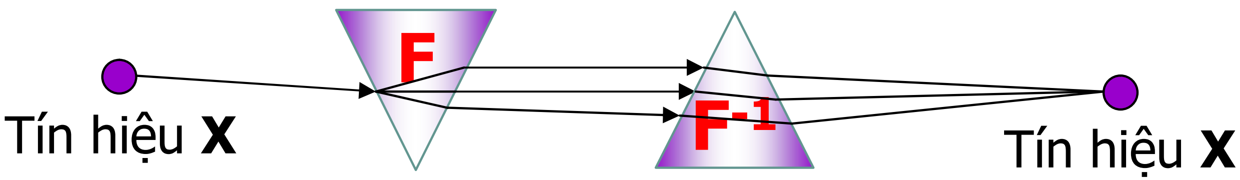
Tại sao miền tần số ?



F

Công cụ phân tích tần số

- Chuỗi Fourier – tín hiệu tuần hoàn
- Biến đổi Fourier – tín hiệu năng lượng, không tuần hoàn
  (J.B.J. Fourier: 1768 - 1830)



F^{-1}

Công cụ tổng hợp tần số

- Chuỗi Fourier ngược – tín hiệu tuần hoàn
- Biến đổi Fourier ngược – tín hiệu năng lượng, không tuần hoàn

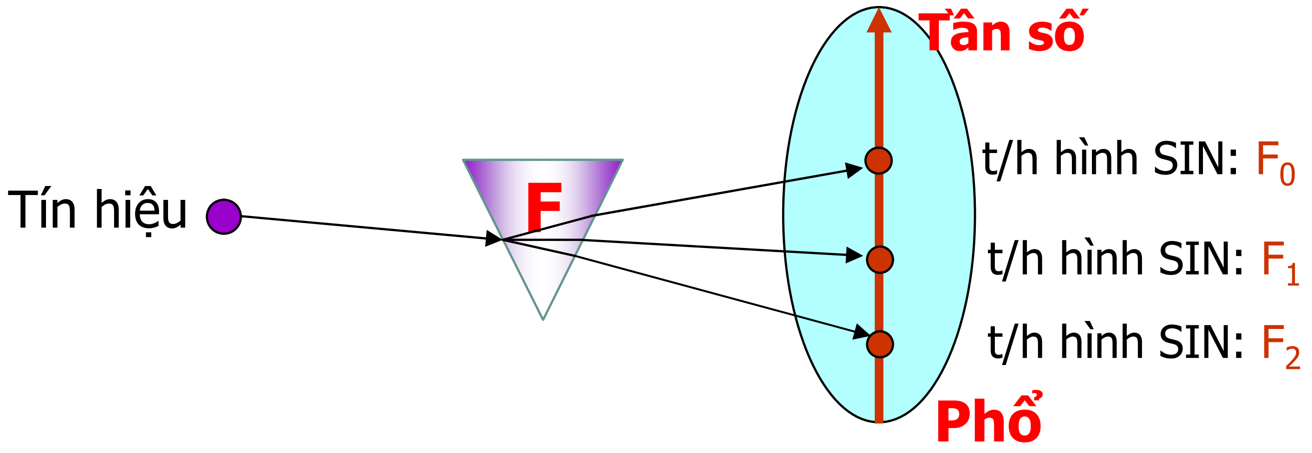
Tại sao miền tần số ?

T/h hình Sin $\rightarrow$ **LTI** $\rightarrow$ T/h hình Sin

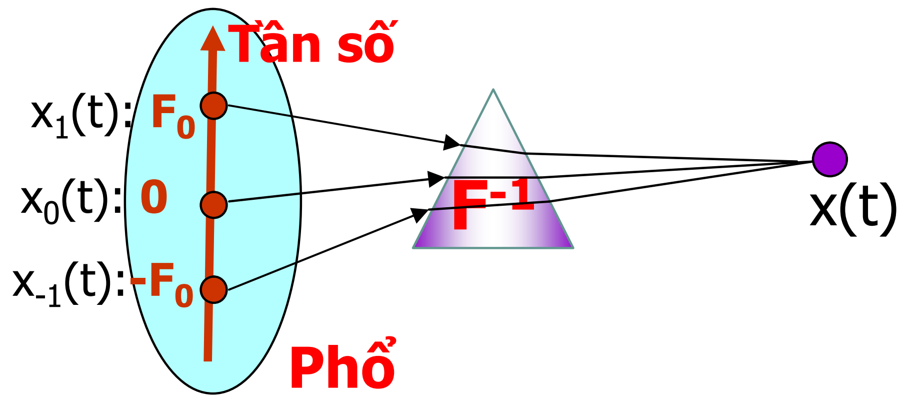
$$Ae^{j\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow A\alpha e^{j(\omega_0 n+\theta)}$$

Biên độ:	Co/giãn lượng α
Pha:	Lệch lượng θ
Tần số:	Không đổi ω_0

Tại sao miền tần số ?



Phổ (spectrum): Nội dung tần số của tín hiệu
Phân tích phổ: Xác định phổ của t/h dựa vào công cụ toán học
Ước lượng phổ: Xác định phổ của t/h dựa trên phép đo t/h



Tổng hợp tần số: Xác định t/h ban đầu từ các phổ tần số

T/h LTTG và tuần hoàn

- Chuỗi Fourier
  - x(t): LTTG, tuần hoàn với chu kỳ cơ bản $T_p = 1/F_0$ (F_0: tần số)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$$

Phương trình tổng hợp

  - Đặt $x_k(t) = c_k e^{j2\pi k F_0 t}$
    - $x_k(t)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_k=T_p/k$ (kF_0: tần số)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k(t)$$

    - Đóng góp cho x(t) một lượng c_k (Tần số kF_0 có đóng góp một lượng c_k)
  - Hệ số chuỗi Fourier

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt$$

Phương trình phân tích

Đóng góp về biên độ

$$c_k = |c_k| e^{j\theta_k}$$

Đóng góp về pha

T/h LTTG và tuần hoàn

- Đ/k Dirichlet: bảo đảm chuỗi Fourier hội tụ về x(t) ∀t
  - ✦ x(t) có số hữu hạn các điểm gián đoạn trong một chu kỳ
  - ✦ x(t) có số hữu hạn các điểm cực đại và cực tiểu trong một chu kỳ
  - ✦ x(t) khả tích phân tuyệt đối trong một chu kỳ, tức $\int_{T_p} |x(t)| dt < \infty$
- Đ/k Dirichlet chỉ là đ/k đủ
  - ✦ T/h biểu diễn bằng chuỗi Fourier chưa chắc thỏa đ/k Dirichlet
- Nếu x(t) là t/h thực
  - ✦ c_k và c_{-k} liên hợp phức ($c_k = |c_k| e^{j\theta_k}$)
  - ✦ Biểu diễn rút gọn của chuỗi F

$$x(t) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_0 t + \theta_k)$$

  - ✦ Do $\cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) = \cos 2\pi k F_0 t \cos\theta_k - \sin 2\pi k F_0 t \sin\theta_k$

Cách biểu diễn khác của chuỗi F

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k F_0 t - b_k \sin 2\pi k F_0 t)$$

Với $\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_k = |c_k| \cos\theta_k \\ b_k = |c_k| \sin\theta_k \end{cases}$

T/h LTTG và tuần hoàn

- Ví dụ: Phân tích tín hiệu sau ra các thành phần tần số

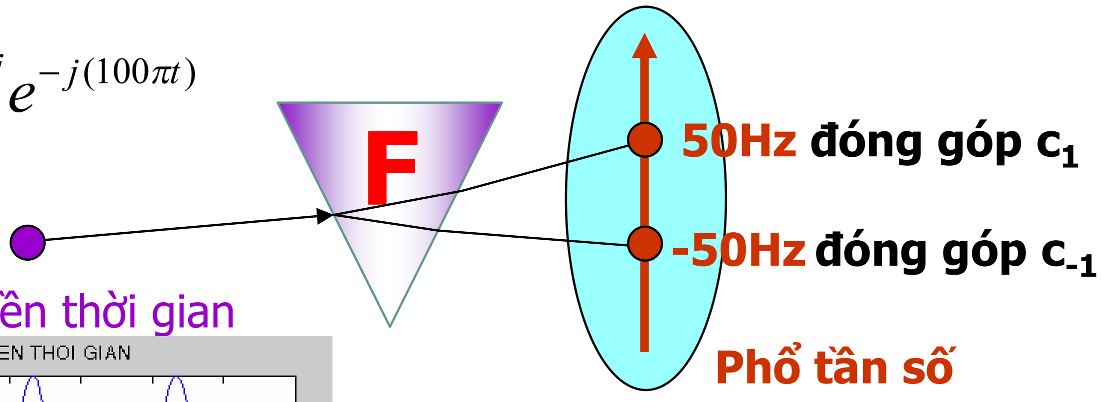
  x(t) = 3Cos(100πt – π/3)

$$x(t) = \frac{3}{2}e^{j(100\pi t-\frac{\pi}{3})} + \frac{3}{2}e^{-j(100\pi t-\frac{\pi}{3})}$$

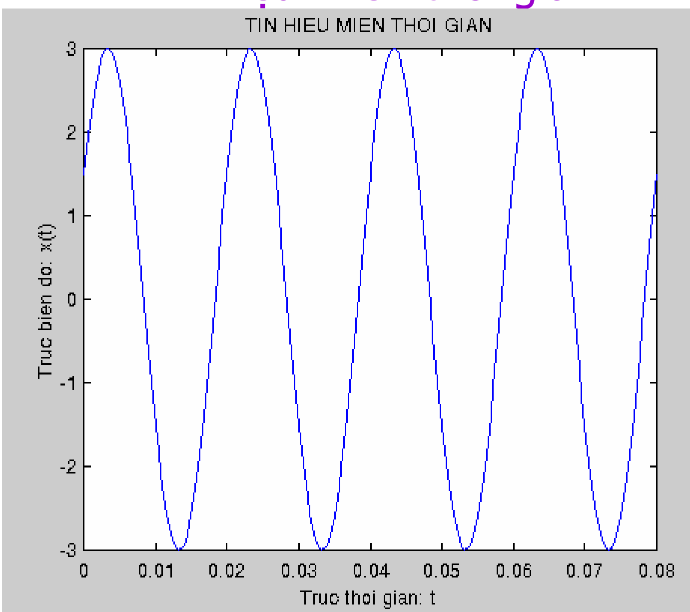
$$= \frac{3}{2}e^{-\frac{\pi}{3}j}e^{j(100\pi t)} + \frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{3}j}e^{-j(100\pi t)}$$

Đồng nhất với PT tổng hợp

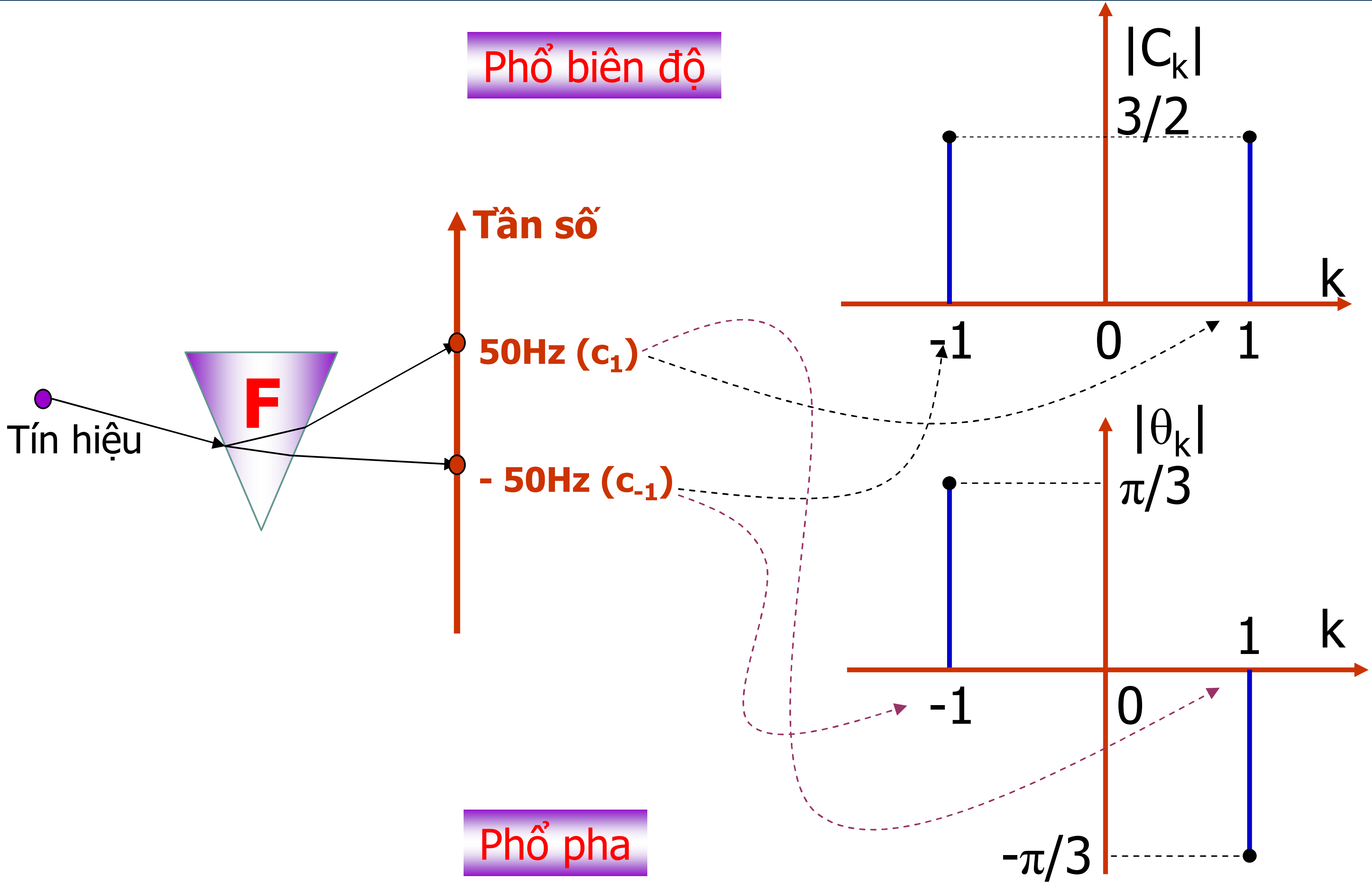
$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{2}e^{-\frac{\pi}{3}j} \\ c_{-1} = \frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{3}j} \end{cases}$$



Tín hiệu miền thời gian



T/h LTTG và tuần hoàn



T/h LTTG và tuần hoàn

- Công suất trung bình

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)x^*(t)dt$$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^* e^{-j2\pi k F_0 t}$$

$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p}\left[x(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^* e^{-j2\pi F_0 t}\right]dt$$

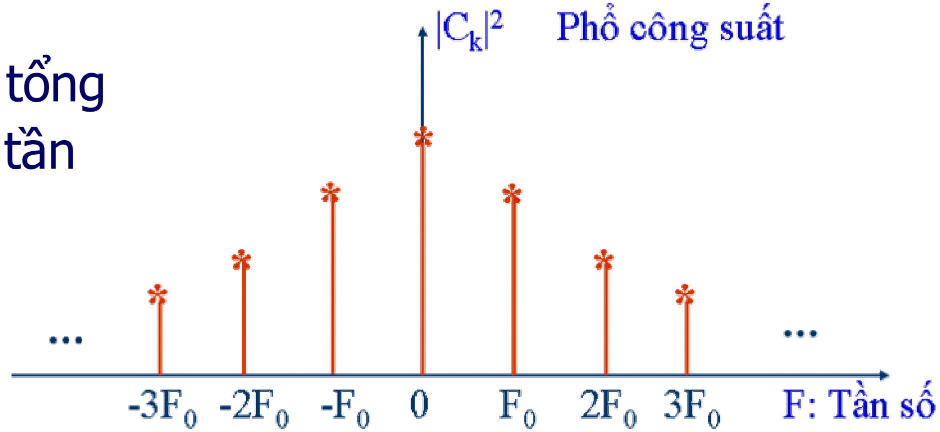
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^*\left[\frac{1}{T_p}\int_{T_p}\left[x(t)e^{-j2\pi F_0 t}\right]dt\right]$$

  - ✦ Do đó

$$\boxed{P_x = \frac{1}{T_p}\int_{T_p}|x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k|^2}$$

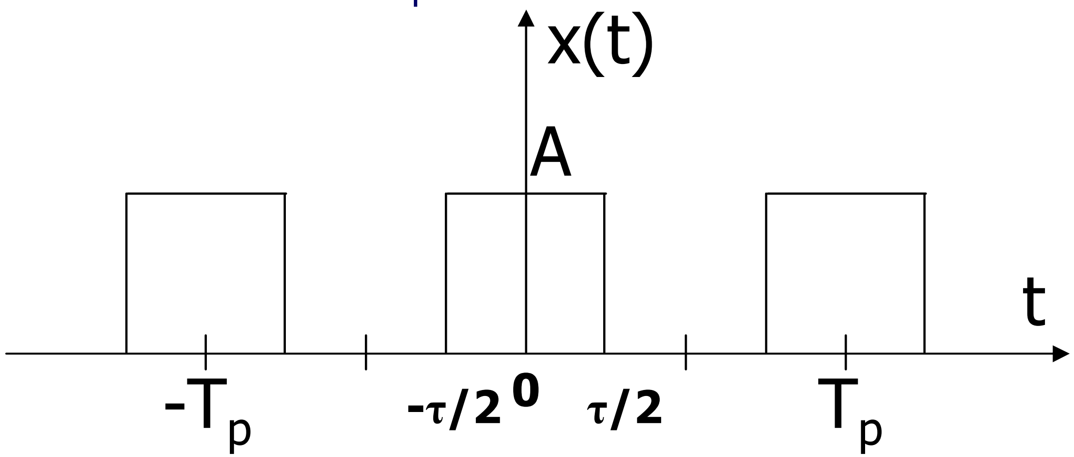
Công thức quan hệ Parseval

- Phổ mật độ công suất
  - ✦ Công suất trung bình tổng cộng bằng tổng các công suất trung bình của các t/h hài tần
  - ✦ Giản đồ công suất theo tần số
  - ✦ Phổ vạch: các vạch cách đều đoạn F_0
  - ✦ Hàm chẵn (do $c_{-k} = c^*_k$ đ/v t/h thực)



T/h LTTG và tuần hoàn

- Ví dụ 1: tính công suất trung bình của x(t) = 3Cos(100πt – π/3)
  - Theo VD trên, $c_1 = \frac{3}{2} e^{-\frac{\pi}{3} j}$ và $c_{-1} = \frac{3}{2} e^{\frac{\pi}{3} j}$
  - Theo Parseval, $P_x = |c_{-1}|^2 + |c_1|^2 = 4.5$
- Ví dụ 2: cho x(t): LTTG, tuần hoàn với chu kỳ T_p. Phân tích x(t) ra các thành phần tần số



Miền thời gian

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \le \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

Miền tần số

$$c_0 = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) dt = \frac{1}{T_p} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = \frac{A\tau}{T_p}$$

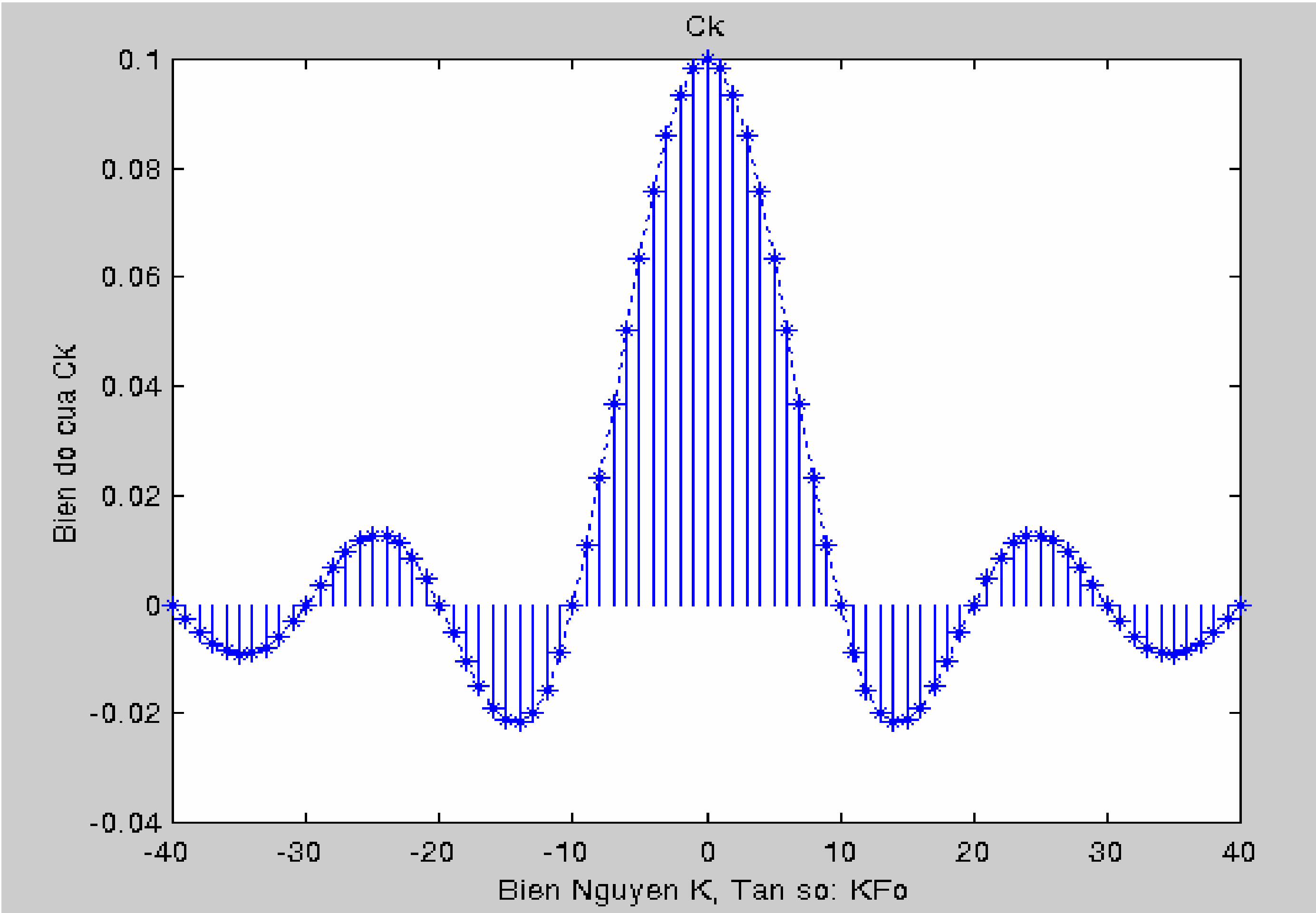
$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi k F_0 t} dt = \frac{A}{T_p} \left[\frac{e^{-j2\pi k F_0 t}}{-j2\pi k F_0} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2}$$

$$= \frac{A}{T_p \pi k F_0} \frac{e^{j\pi k F_0 \tau} - e^{-j\pi k F_0 \tau}}{2j} = \frac{A\tau}{T_p} \frac{\sin \pi k F_0 \tau}{\pi k F_0 \tau}$$

T/h LTTG và tuần hoàn

Minh họa c_k ở miền tần số

$$c_k = \frac{A\tau}{T_p}\frac{\sin \pi k F_0 \tau}{\pi k F_0 \tau}$$



T/h LTTG và tuần hoàn

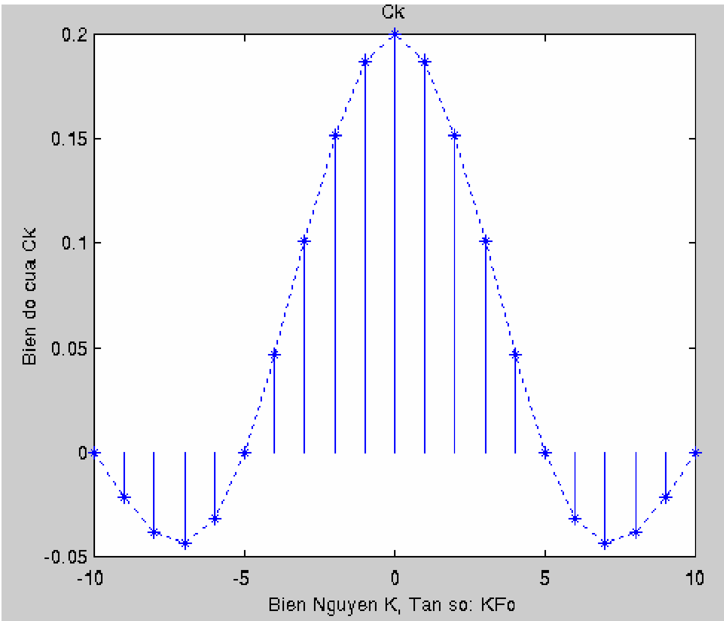
Tổng hợp x(t) từ các thành phần hình Sin

Thông số:

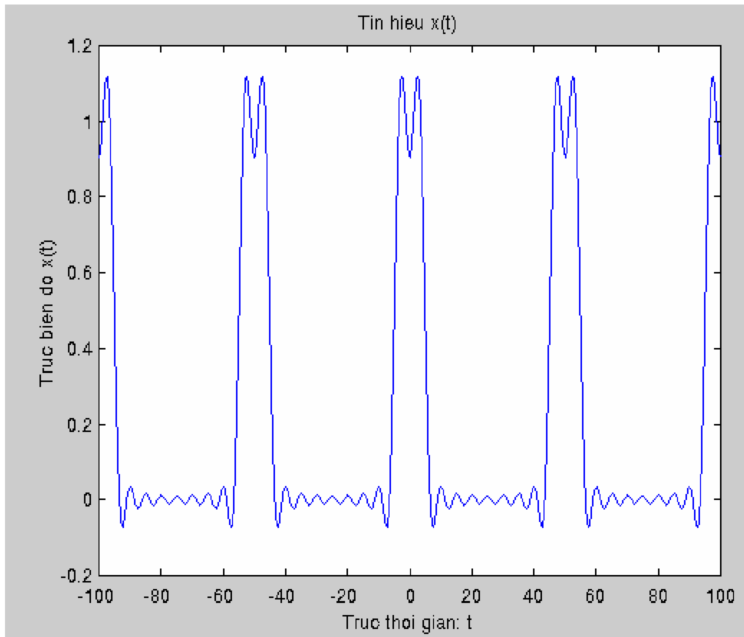
$T_p = 50s$

$\tau = 0.2T_p$

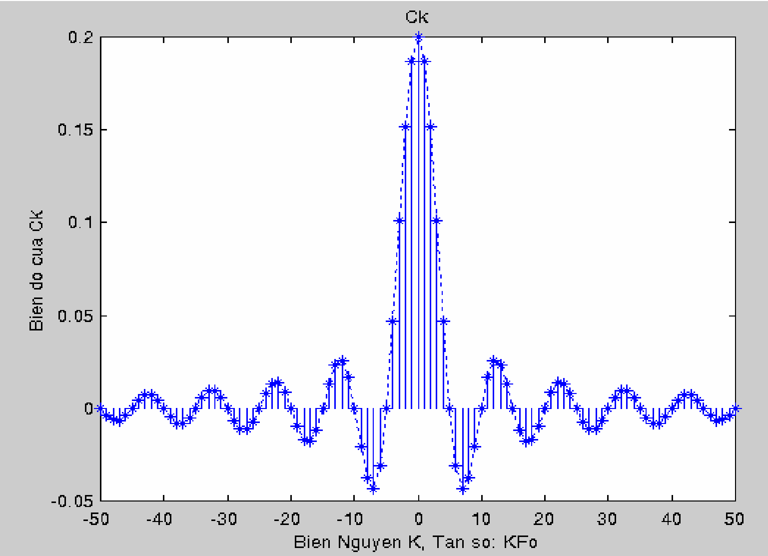
$A = 1$



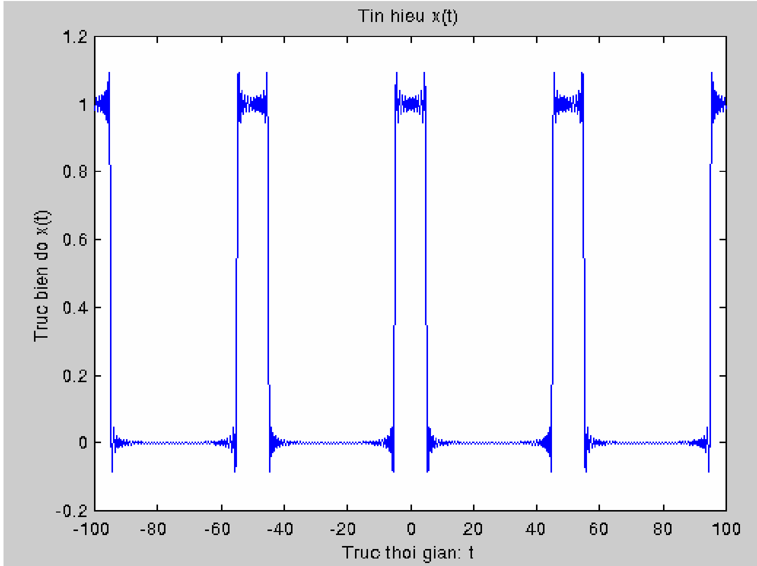
Tổng hợp từ 21 thành phần

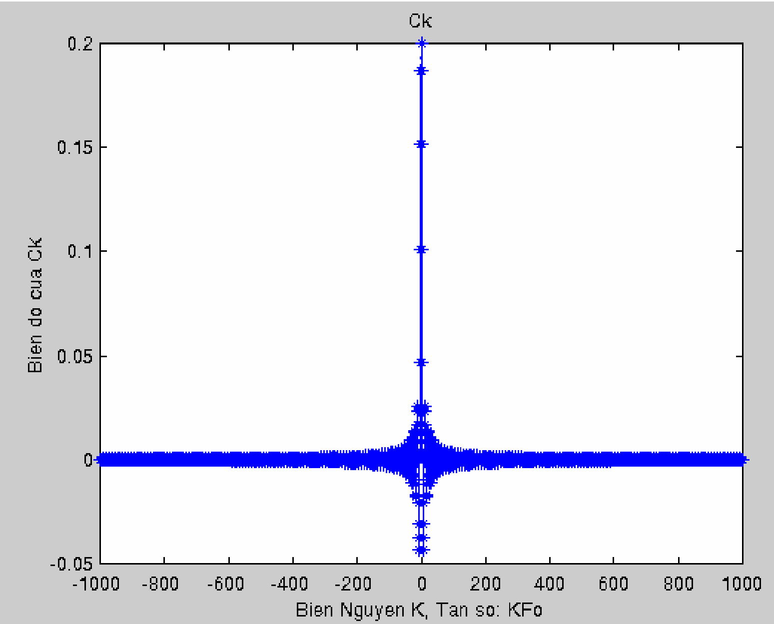


T/h LTTG và tuần hoàn

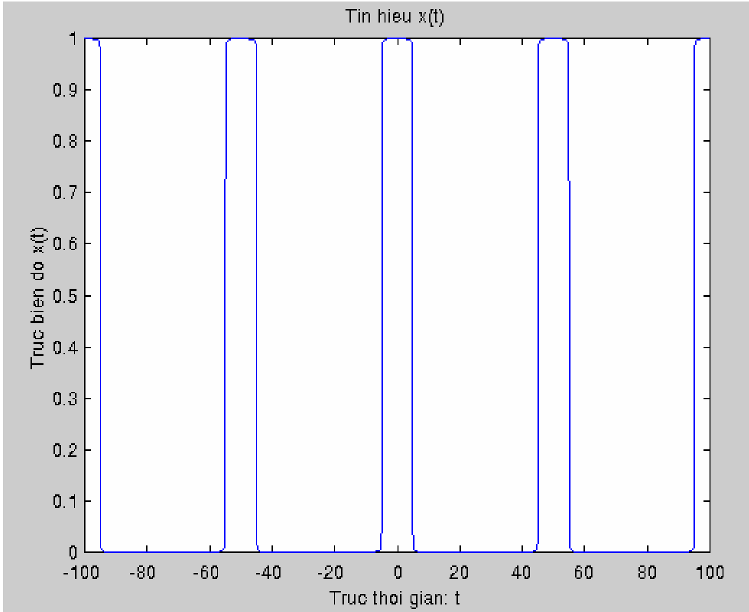


Tổng hợp từ 101 thành phần

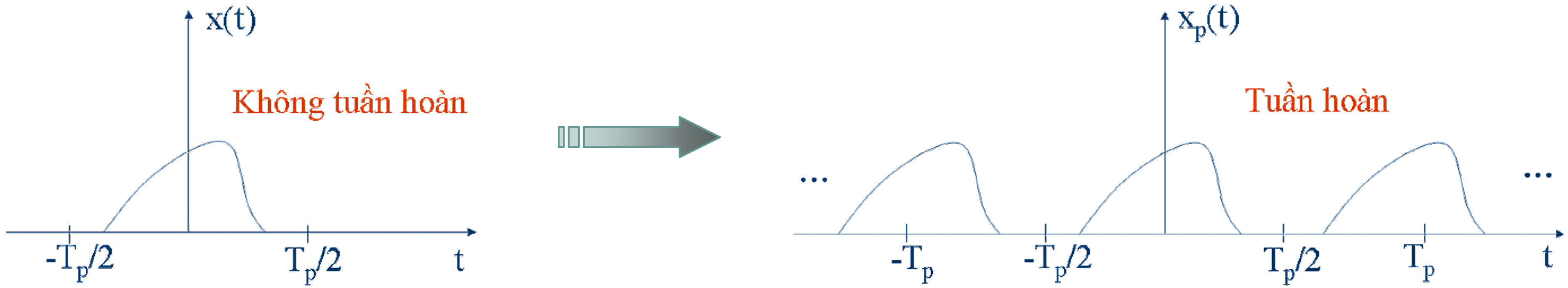




Tổng hợp từ 2001 thành phần



T/h LTTG và không tuần hoàn



- T/h tuần hoàn $x_p(t)$
  - Có được do lặp lại t/h x(t)
  - Tuần hoàn chu kỳ cơ bản T_p
  - Có phổ vạch: khoảng cách vạch $F_0=1/T_p$

- T/h không tuần hoàn x(t)
  - Có thể coi như $x_p(t)$ khi $T_p \rightarrow \infty$
  - Khoảng cách vạch $F_0 = 1/T_p \rightarrow 0$

  $\Rightarrow$ Phổ của tín hiệu không tuần hoàn là ***phổ liên tục***

T/h LTTG và không tuần hoàn

- Biến đổi Fourier
  - ✦ x(t): LTTG, không tuần hoàn

$$X(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt$$

Phương trình phân tích
(biến đổi Fourier thuận)

- Hệ số Fourier $c_k = \frac{1}{T_p}X(kF_0) = F_0X(kF_0)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(F)e^{j2\pi Ft}dF$$

Phương trình tổng hợp
(biến đổi Fourier ngược)

  - ✦ Đ/k Dirichlet
    - x(t) có hữu hạn các điểm gián đoạn hữu hạn
    - x(t) có hữu hạn các điểm cực đại và cực tiểu
    - x(t) khả tích phân tuyệt đối, nghĩa là $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty$

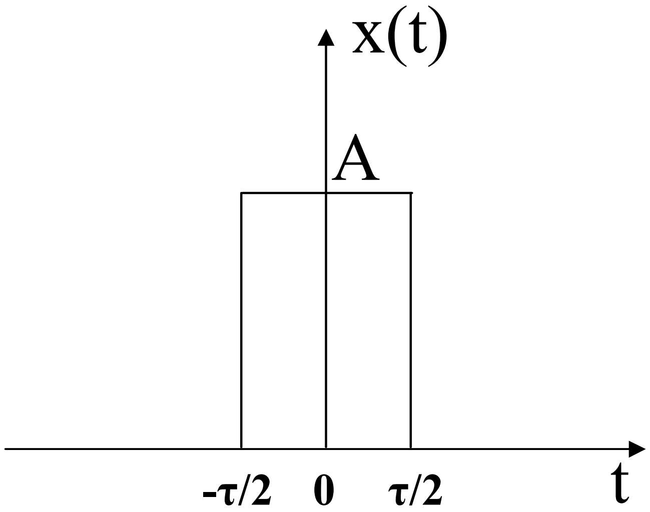
T/h LTTG và không tuần hoàn

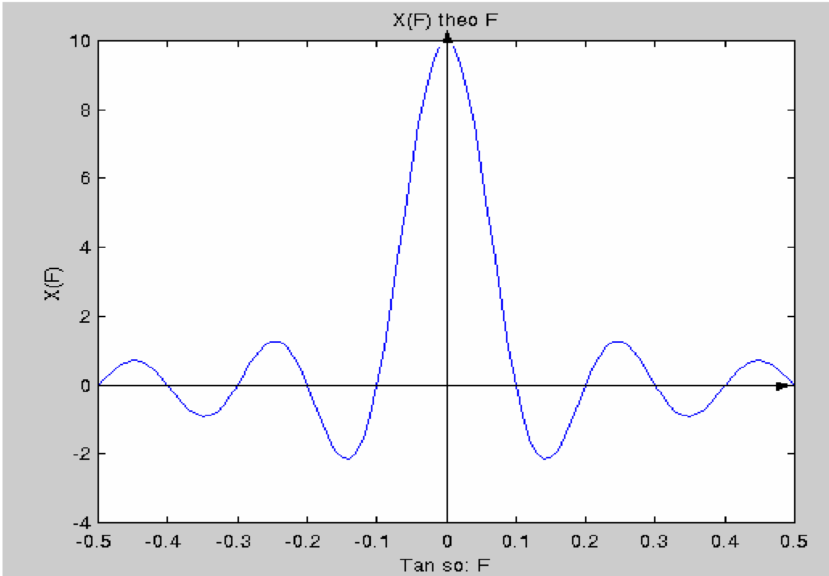
- Ví dụ: cho x(t) không tuần hoàn. Phân tích x(t) ra các thành phần tần số

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \le \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \quad \xrightarrow{F} \quad X(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-j2\pi F t} dt = A\tau \frac{\sin \pi F \tau}{\pi F \tau}$$

Miền thời gian

Miền tần số





T/h LTTG và không tuần hoàn

- Năng lượng

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt$$

$$x^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(F)e^{-j2\pi Ft}dF$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(F)e^{-j2\pi Ft}dF\right]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(F)dF\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt\right]$$

Do đó

$$\boxed{E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(F)|^2 dF}$$

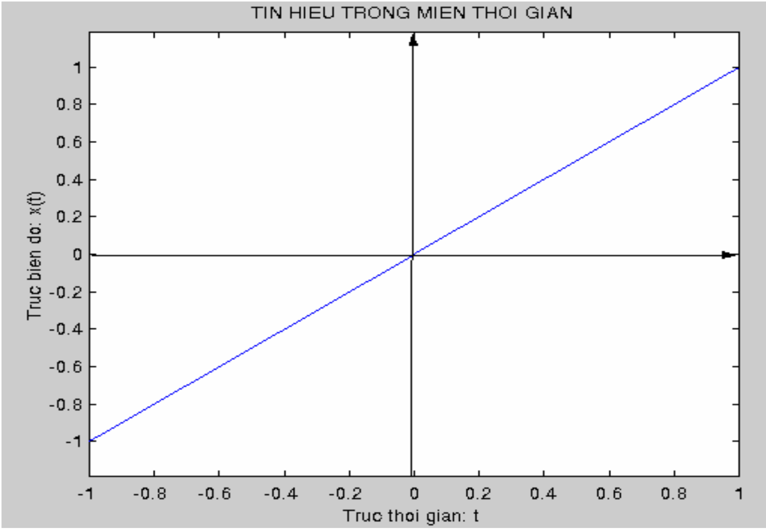
Công thức quan hệ Parseval

- Bảo toàn năng lượng trong miền thời gian và miền tần số
- Phổ mật độ năng lượng $S_{xx}(F) = |X(F)|^2$
  - Không chứa phổ pha → không được dùng để khôi phục lại x(t)
- Nếu x(t) là t/h thực

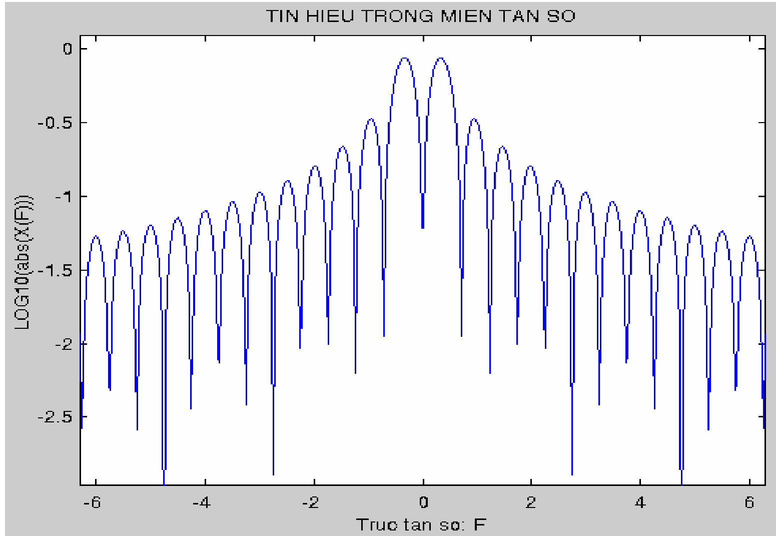
$$\left.\begin{aligned} |X(-F)| &= |X(F)| \\ \angle X(-F) &= -\angle X(F) \end{aligned}\right\} \quad S_{xx}(F) = S_{xx}(-F)$$

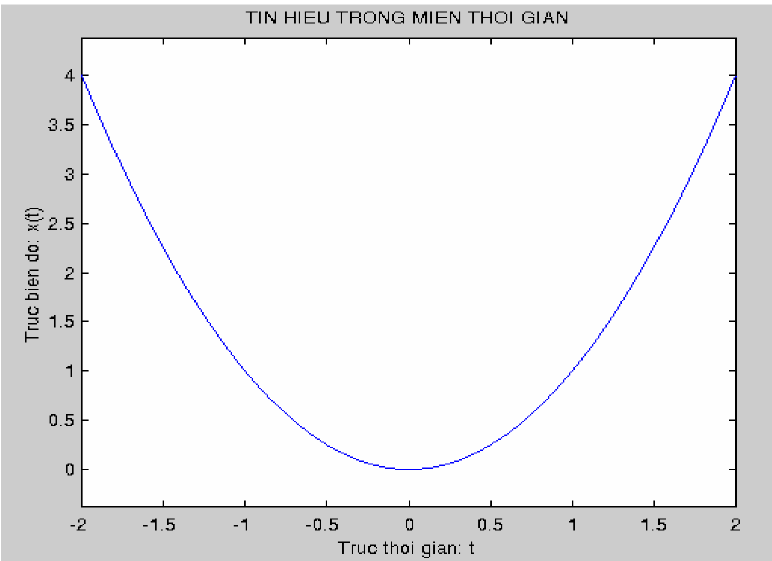
T/h LTTG và không tuần hoàn

- Ví dụ

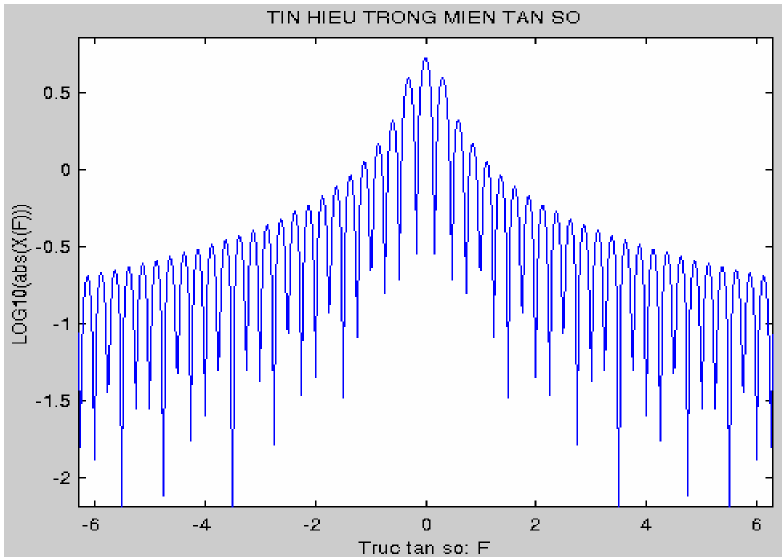


F/F^{-1}





F/F^{-1}



T/h RRTG và tuần hoàn

- x(n) là t/h tuần hoàn chu kỳ N $\qquad x(n+N) = x(n) \quad \forall n$
- Chuỗi Fourier cho t/h RRTG có tối đa N thành phần tần số (do tầm tần số [0, 2π] hoặc [-π, π])
- Chuỗi Fourier rời rạc (DTFS)

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Phương trình tổng hợp

- Hệ số Fourier
  - Mô tả x(n) trong miền tần số (c_k biểu diễn biên độ và pha của thành phần tần số $s_k(n) = e^{j2\pi kn/N}$)

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Phương trình phân tích

  - $c_{k+N} = c_k \Rightarrow$ Phổ của t/h tuần hoàn x(n) với chu kỳ N là một chuỗi tuần hoàn cùng với chu kỳ N

T/h RRTG và tuần hoàn

- Ví dụ: Xác định và vẽ phổ cho các t/h sau

$$a.\quad x(n) = 3\cos(\sqrt{2}\pi n)$$

$$b.\quad x(n) = 3\cos(\tfrac{\pi}{3} n)$$

$$c.\quad x(n): tuan\ hoan, 1\ chu\ ky: \{\underset{\uparrow}{1} \quad 0 \quad 2 \quad 1\}$$

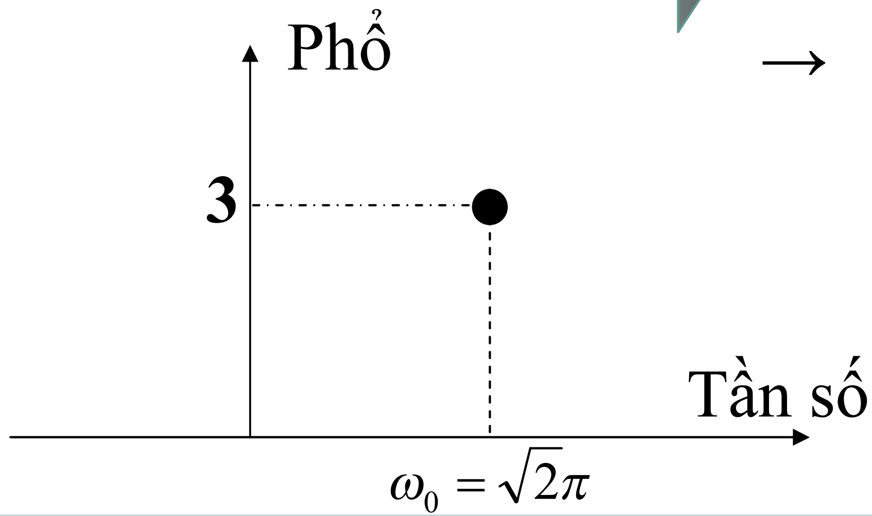
$$a.\quad x(n) = 3\cos(\sqrt{2}\pi n)$$

$$\omega_0 = \sqrt{2}\pi, tuc\ f_0 = 1/\sqrt{2}$$

f_0 : không hữu tỉ

$\rightarrow$ x(n) không tuần hoàn

$\rightarrow$ Phổ gồm chỉ một tần số đơn: f_0



T/h RRTG và tuần hoàn

$b. \quad x(n) = 3\cos(\frac{\pi}{3}n)$

x(n) = 3cos(2πn/6) $\Rightarrow f_0 = 1/6 \Rightarrow N = 6$

$\Rightarrow$ x(n) tuần hoàn chu kỳ N=6

Các hệ số đóng góp $\quad c_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x(n)e^{-j2\pi\frac{k}{6}n} \qquad k = 0..5$

Tuy nhiên $\quad x(n) = 3\cos(2\pi\frac{1}{6}n)$

$$= \frac{3}{2}e^{j2\pi\frac{1}{6}n} + \frac{3}{2}e^{-j2\pi\frac{1}{6}n}$$

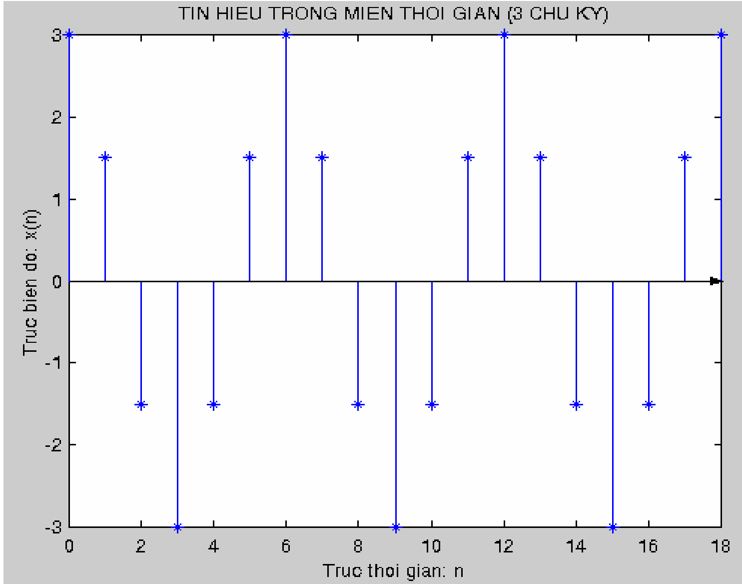
So trùng với phương trình tổng hợp

$$\boxed{\begin{array}{l} c_0 = c_2 = c_3 = c_4 = 0 \\ c_1 = c_5 = \frac{3}{2} \end{array}}$$

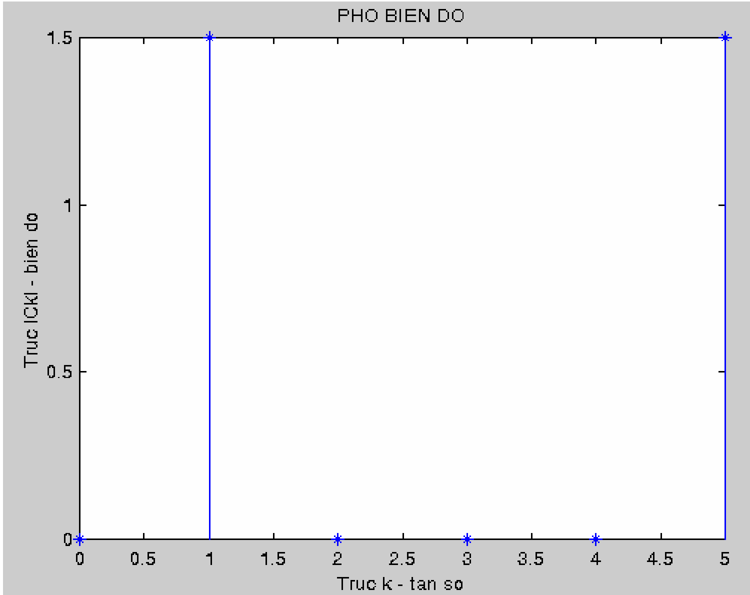
T/h RRTG và tuần hoàn

$$b.\quad x(n) = 3\cos(\tfrac{\pi}{3}n)$$

Tín hiệu trong miền thời gian: (3 chu kỳ)



Tín hiệu trong miền tần số

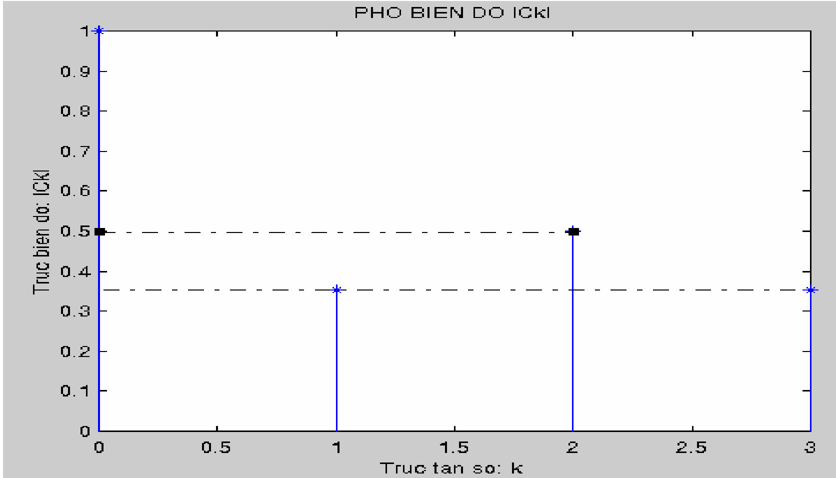


T/h RRTG và tuần hoàn

$$c. \quad x(n): tuan \ \ hoan \ ,1\, chu \ \ ky : \{\underset{\uparrow}{1} \quad 0 \quad 2 \quad 1\}$$

$$C_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n)e^{-j2\pi\frac{k}{4}n} \qquad k = 0..3$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2e^{-j\pi k} + e^{-j\frac{3}{2}\pi k})$$

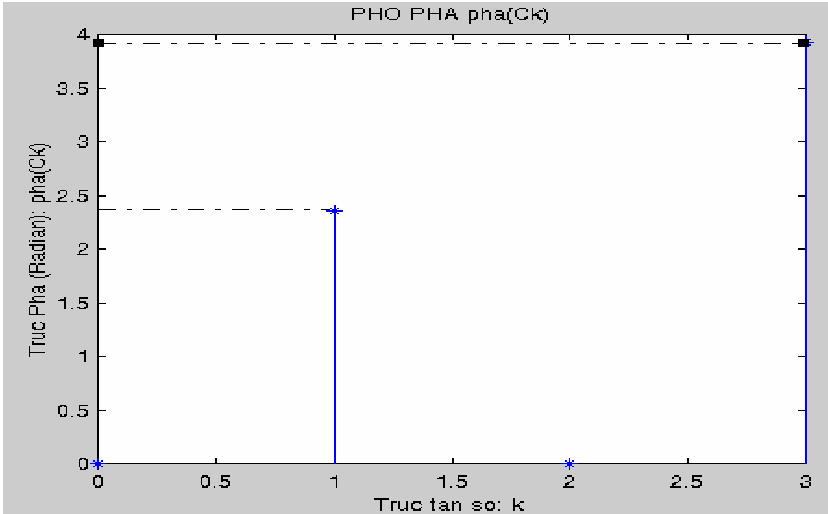


$$C_0 = \tfrac{1}{4}(1 + 2 + 1) = 1$$

$$C_1 = \tfrac{1}{4}(1 - 2 + j) = \frac{j-1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$C_2 = \tfrac{1}{4}(1 + 2 - 1) = \tfrac{1}{2}$$

$$C_3 = \tfrac{1}{4}(1 - 2 - j) = \frac{-1-j}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\frac{5\pi}{4}}$$



T/h RRTG và tuần hoàn

- Công suất trung bình

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x^*(n)$$

$$x^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1}c_k^* e^{-j2\pi kn/N}$$

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\left(\sum_{k=0}^{N-1}c_k^* e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1}c_k^*\left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}\right)$$

  - Do đó

$$\boxed{P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2}$$

Công thức quan hệ Parseval

  - Chuỗi $|c_k|^2$: phổ mật độ công suất của t/h tuần hoàn

- Năng lượng t/h trong một chu kỳ

$$\boxed{E_N = \sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = N\sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2}$$

T/h RRTG và tuần hoàn

- Nếu x(n) thực [$x^*(n) = x(n)$], $\Rightarrow c_k^* = c_{-k}$
  - Tức $\begin{cases} |c_{-k}| = |c_k| & \textit{Pho bien do doi xung chan} \\ -\angle c_{-k} = \angle c_k & \textit{Pho pha doi xung le} \end{cases}$
  - Ngoài ra, từ $c_{N+k} = c_k$, ta cũng có $\begin{cases} |c_k| = |c_{N-k}| \\ \angle c_k = -\angle c_{N-k} \end{cases}$
  - Đ/v t/h thực, phổ c_k (k=0,1,…,N/2 khi N chẵn hoặc k=0,1,…,(N-1)/2 khi N lẻ) hoàn toàn có thể đặc tả cho t/h trong miền tần số
  - Khi đó, chuỗi Fourier có thể được rút gọn

$$x(n) = c_0 + 2\sum_{k=1}^{L} |c_k| \cos\left(\frac{2\pi}{N}kn + \theta_k\right)$$

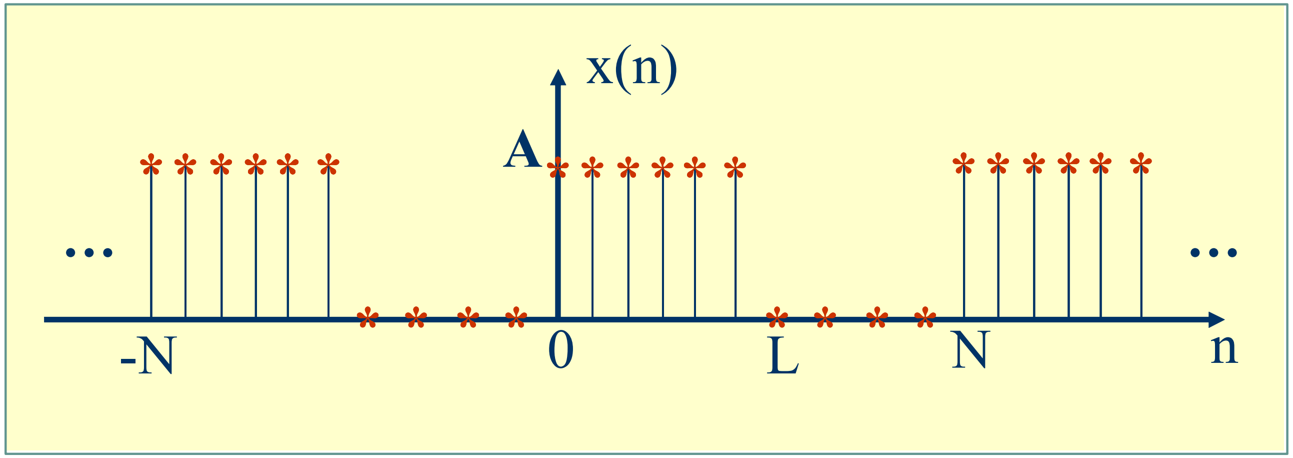
$$= a_0 + \sum_{k=1}^{L}\left(a_k \cos\frac{2\pi}{N}kn - b_k \sin\frac{2\pi}{N}kn\right)$$

Với

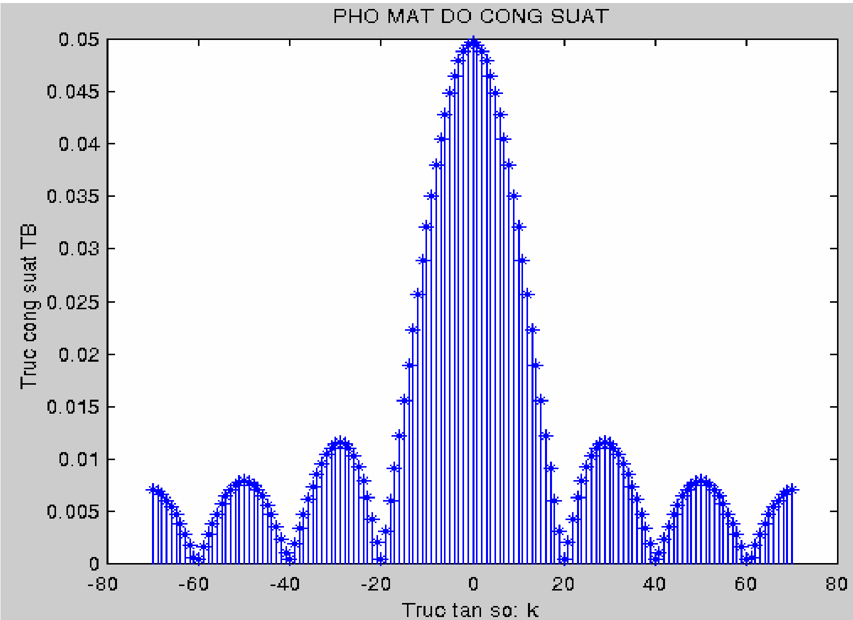
$$\begin{cases} a_0 = c_0 \\ a_k = 2|c_k|\cos\theta_k \\ b_k = 2|c_k|\sin\theta_k \\ L = \begin{cases} \frac{N}{2} & N: chan \\ \frac{N-1}{2} & N: le \end{cases} \end{cases}$$

T/h RRTG và tuần hoàn

Miền thời gian



Miền tần số



$$c_k = \begin{cases} \dfrac{AL}{N} & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\[2ex] \dfrac{A}{N} e^{-\frac{j\pi k(L-1)}{N}} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi k L}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi k}{N}\right)} & k\ khac \end{cases}$$

T/h RRTG và không tuần hoàn

- Chỉ xét t/h năng lượng x(n)
- Biến đổi Fourier

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Phương trình tổng hợp

  - $X(\omega)$: nội dung tần số của t/h

✦ Khác biệt cơ bản giữa BĐ Fourier của t/h năng lượng RRTG và t/h năng lượng LTTG

- Tầm tần số
  - T/h LTTG: $-\infty \rightarrow +\infty$
  - T/h RRTG: $0 \rightarrow 2\pi$ hoặc $-\pi \rightarrow \pi$ [$X(\omega)$ tuần hoàn chu kỳ 2π]
- Cách tính: dùng tích phân thay vì dùng tổng

- Hệ số Fourier

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

Phương trình phân tích

T/h RRTG và không tuần hoàn

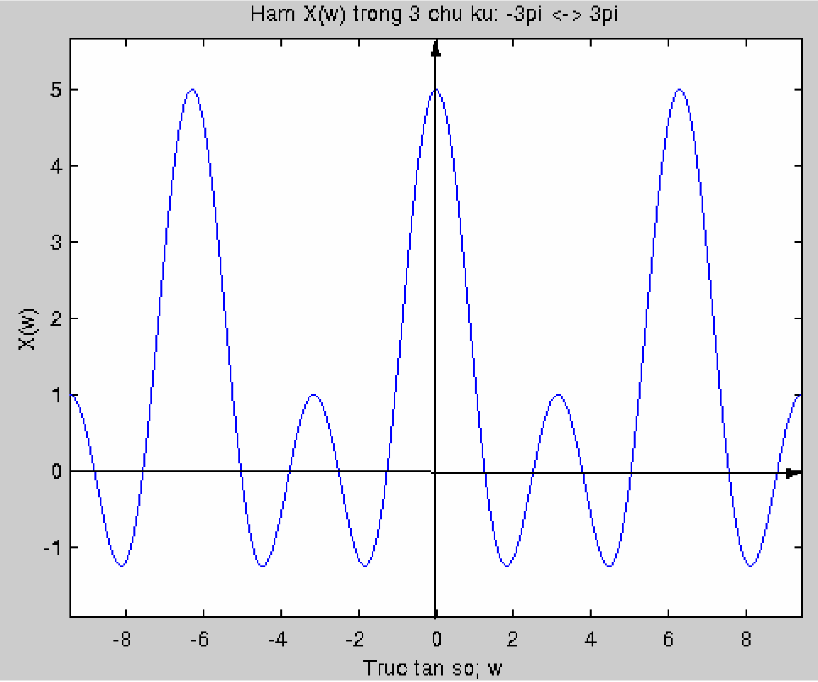
- Ví dụ: xác định nội dung tần số của tín hiệu sau

  x(n) = {... 0   1   1   1   1   1   0 ...}

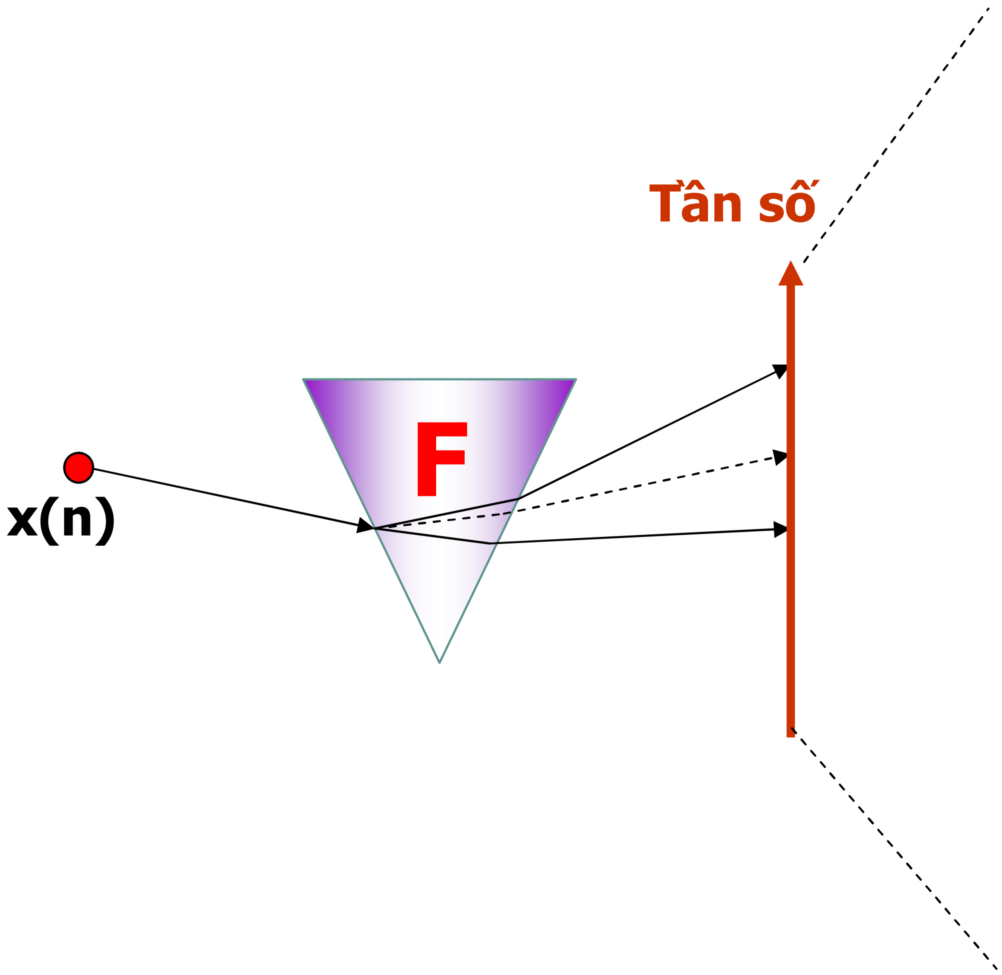
$$X(\omega) = e^{j2\omega} + e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}$$

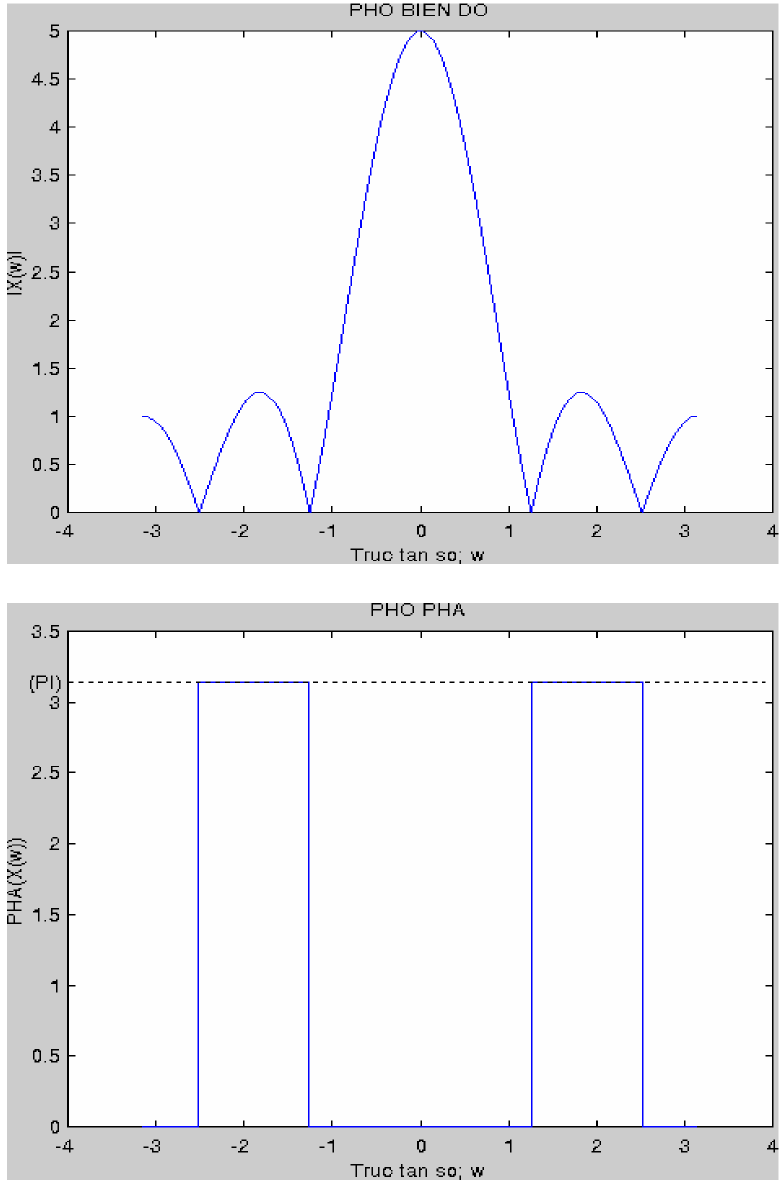
$$X(\omega) = 1 + 2\cos\omega + 2\cos(2\omega)$$

<u>Chú ý:</u> X(ω) tuần hoàn
Chu kỳ: 2π



T/h RRTG và không tuần hoàn





T/h RRTG và không tuần hoàn

- Sự hội tụ của BĐ Fourier $X_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} x(n)e^{-j\omega n}$
  - Trong BĐ Fourier ngược (PT phân tích), chuỗi $X_N(\omega)$ được giả thiết hội tụ về $X(\omega)$ khi $N\to\infty$
  - Ý nghĩa: giá trị sai số $X(\omega) - X_N(\omega)$ sẽ bằng 0 khi $N\to\infty$

$$\lim_{N\to\infty}\left|X(\omega) - X_N(\omega)\right| = 0$$

  - $X_N(\omega)$ hội tụ nếu x(n) khả tổng tuyệt đối

$$\left|X(\omega)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right| < \infty$$

    - Đ/k đủ để tồn tại BĐ Fourier RRTG
    - Tương đương đ/k Dirichlet thứ 3 cho BĐ Fourier của t/h LTTG (đ/k 1 và 2 không có do bản chất của t/h RRTG)
  - Nếu x(n) khả tổng bình phương tuyệt đối (i.e. x(n) có năng lượng hữu hạn)
    - Đ/k hội tụ được giảm nhẹ

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(\omega) - X_N(\omega)\right|^2 d\omega = 0$$

    - Năng lượng của sai số $X(\omega) - X_N(\omega)$ sẽ tiến về 0, nhưng không nhất thiết giá trị sai số tiến về 0
      - T/h năng lượng có BĐ Fourier

T/h RRTG và không tuần hoàn

- Năng lượng

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n)$$

$$x^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega)e^{-j\omega n}d\omega$$

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega)e^{-j\omega n}d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X^*(\omega)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right]d\omega$$

✦ Do đó

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega}$$

Công thức quan hệ Parseval

✦ X(ω) là số phức $X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\Theta(\omega)}$

- Phổ biên độ $|X(\omega)|$
- Phổ pha $\Theta(\omega)$
- Phổ mật độ năng lượng $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 = X(\omega)X^*(\omega)$

T/h RRTG và không tuần hoàn

- **Ví dụ**
  - Cho tín hiệu $x(n) = a^n u(n)$, $-1 < a < 1$
  - Yêu cầu:
    a) Lập công thức biểu diễn tín hiệu trong miền tần số ?
    b) Lập công thức biểu diễn phổ biên độ, pha và năng lượng?
    c) Vẽ 3 phổ nói trên, với $a = 0.9$, $a = -0.9$?
    d) Tần số ($\pi/2$) có mặt trong sự thành lập tín hiệu x(n) không? Nếu có thì đóng góp biên độ và pha là bao nhiêu?

a) $X(\omega) = ?$

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

T/h RRTG và không tuần hoàn

b) $|X(\omega)|, \Theta(\omega), S_{xx}(\omega) = ?$

$$X(\omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{(1-ae^{j\omega})}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})} = \frac{(1-a\cos\omega) - j(a\sin\omega)}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

$$X_R(\omega) = \frac{(1-a\cos\omega)}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

$$X_I(\omega) = \frac{-a\sin\omega}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

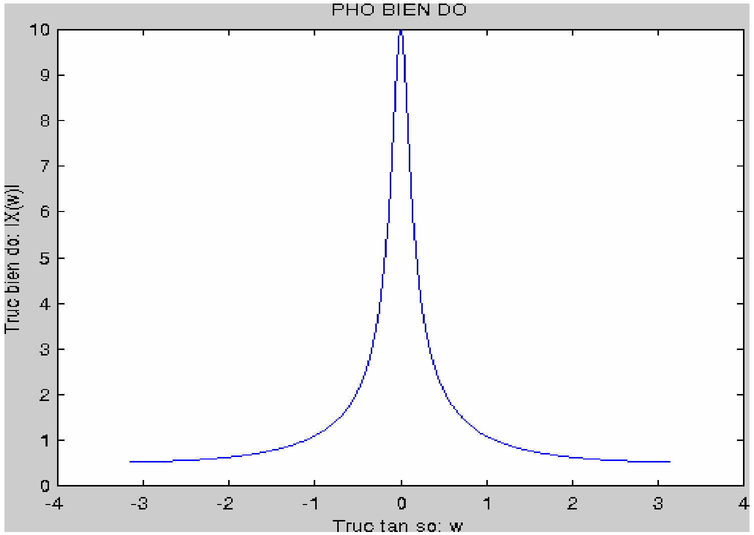
$$|X(\omega)| = \sqrt{X_R(\omega)^2 + X_I(\omega)^2}$$

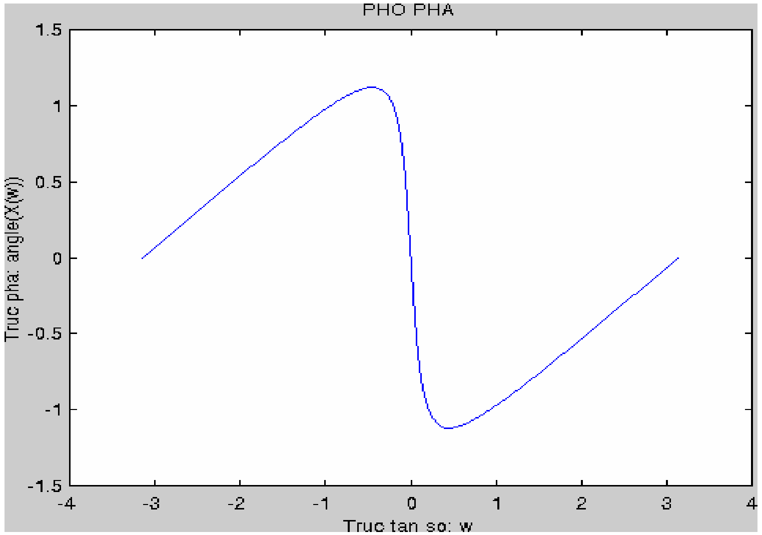
$$\Theta(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)}\right)$$

$$S_{xx}(\omega) = X(\omega)X^*(\omega) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})} = \frac{1}{1-2a\cos\omega + a^2}$$

T/h RRTG và không tuần hoàn

c) Vẽ phổ





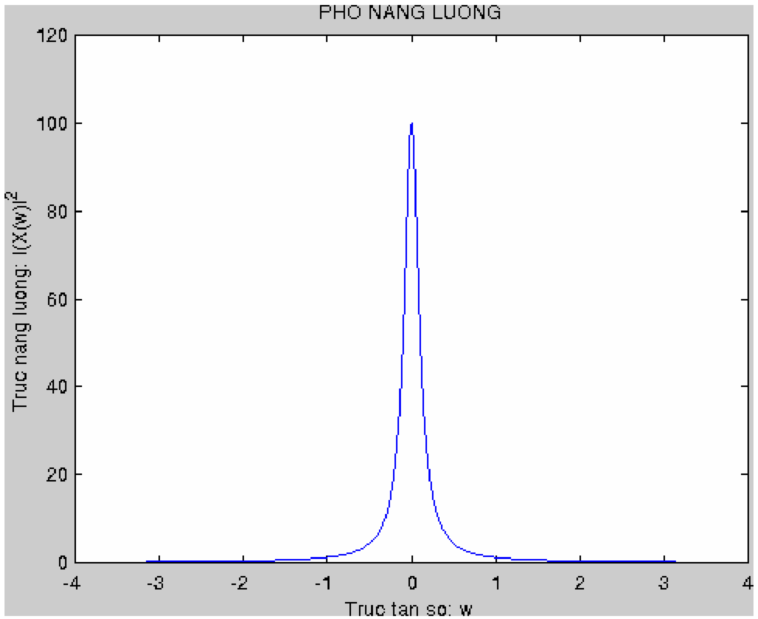
d) ω=π/2

$$X(\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{1-ae^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{1+ja}$$

$$|X(\tfrac{\pi}{2})| = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\Theta(\tfrac{\pi}{2}) = -\tan^{-1}(a)$$

$|X(\pi/2)| \neq 0$
Tần số $\pi/2$ có mặt trong tín hiệu



T/h RRTG và không tuần hoàn

- Nếu x(n) thực
  - ✦ $X^*(\omega) = X(-\omega)$

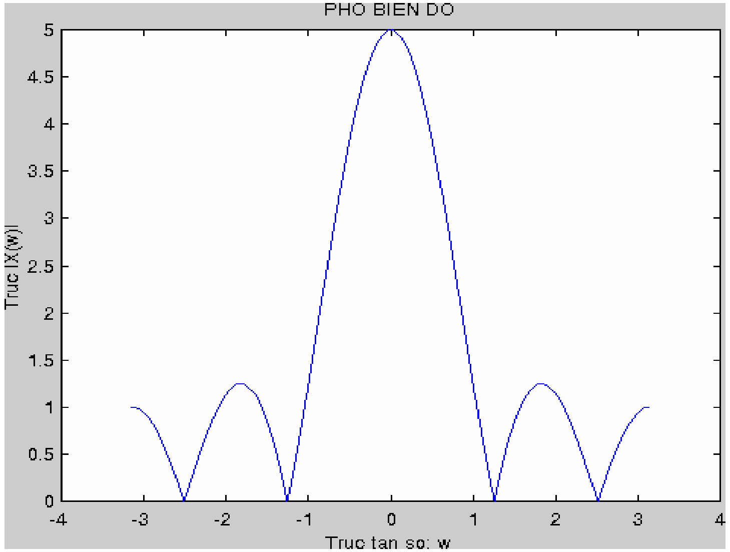
$$\begin{cases} |X(-\omega)| = |X(\omega)| \\ \angle X(-\omega) = \angle X(\omega) \end{cases}$$

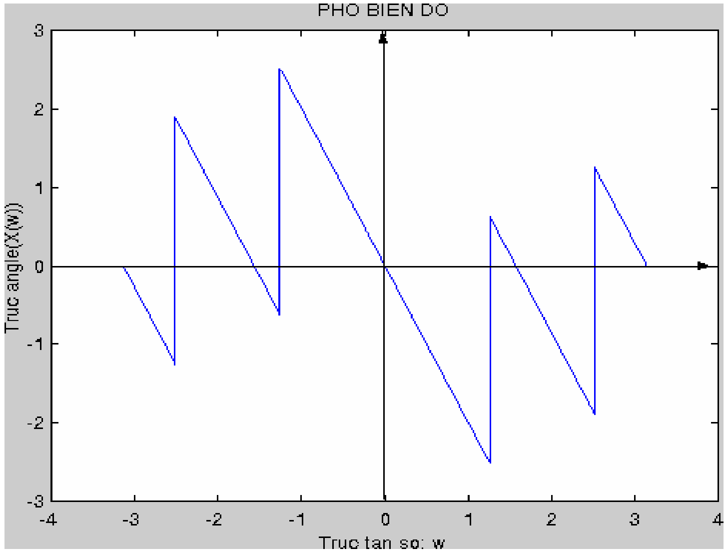
  - ✦ $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$
- Ví dụ

$$x(n) = \begin{cases} A, & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

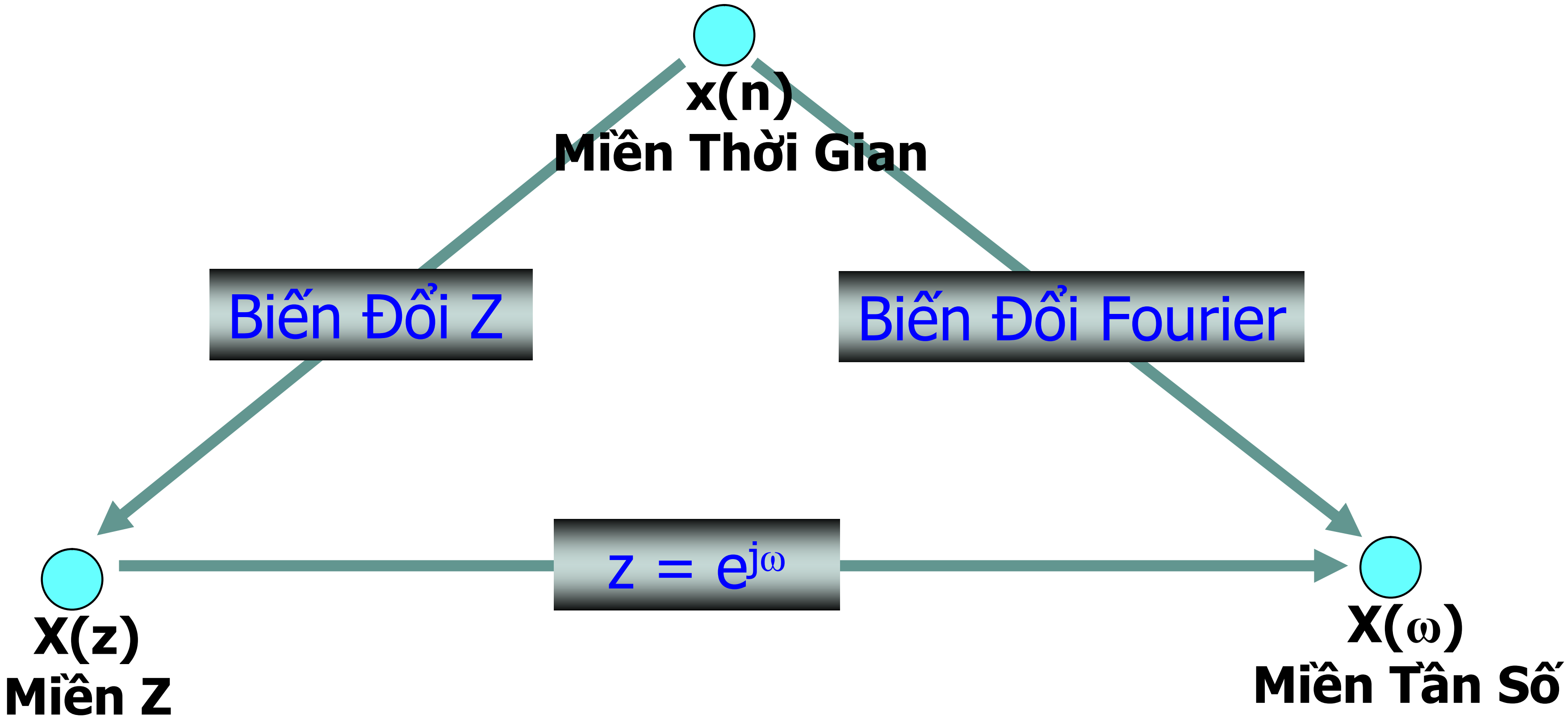
$$X(\omega) = Ae^{-j\frac{\omega}{2}(L-1)} \frac{\sin(\frac{\omega L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

L=5
A=1





Quan hệ giữa BĐ Fourier với BĐ Z



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

$z = e^{j\omega}$

(xét trên vòng tròn đơn vị)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Cepstrum

- Giả sử {x(n)} có BĐ Z X(z) và {x(n)} ổn định sao cho X(z) hội tụ trên vòng tròn đơn vị
- Định nghĩa: Cepstrum phức của {x(n)} là $\{c_x(n)\}$, BĐ Z ngược của $C_x(z)= \ln X(z)$
- Cepstrum phức tồn tại nếu $C_x(z)$ hội tụ trong vành khuyên $r_1<|z|<r_2$ chứa vòng tròn đơn vị ($0 < r_1 < 1$ và $r_2 > 1$)

$$C_x(z) = \ln X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x(n) z^{-n} \qquad c_x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \ln X(z) z^{n-1} dz$$

- $C_x(z)$ hội tụ trên vòng tròn đơn vị

$$C_x(\omega) = \ln X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x(n) e^{-j\omega n} \qquad c_x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

- Nếu biểu diễn X(ω) dưới dạng cực

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad \Rightarrow \quad \ln X(\omega) = \ln|X(\omega)| + j\theta(\omega)$$

- Cepstrum phức $c_x(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left[\ln|X(\omega)| + j\theta(\omega)\right] e^{j\omega n} d\omega$

BĐ Fourier t/h RRTG

- BĐ Fourier của t/h có pole nằm trên vòng tròn đơn vị
  - ✦ Có những chuỗi không khả tổng tuyệt đối lẫn khả tổng bình phương, do đó không có BĐ Fourier
    - Ví dụ

$$x(n) = u(n) \qquad và \qquad X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$x(n) = \cos(\omega_0 n)u(n) \qquad và \qquad X(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}}$$

    - Cả 2 t/h này đều có pole trên vòng tròn đơn vị
  - ✦ BĐ Fourier mở rộng của các chuỗi dạng này
    - Cho phép BĐ Fourier có các xung tại các tần số tương ứng với vị trí các pole nằm trên vòng tròn đơn vị
    - Xung là hàm của ω, có biên độ 1/a, độ rộng a, diện tích đơn vị (a→0)

Phân loại t/h ở miền tần số

- Phân loại t/h dựa vào phổ mật độ công suất/năng lượng
  - T/h tần số cao: phổ tập trung ở tần số cao
  - T/h tần số thấp: phổ tập trung ở tần số 0
  - T/h tần số trung bình (t/h bandpass): phổ tập trung trong dải tầm tần số
- Băng thông
  - Tầm tần số mà phổ mật độ công suất (năng lượng) của t/h tập trung $F_1 \leq F \leq F_2$
  - Trong trường hợp t/h bandpass, nếu băng thông của t/h quá nhỏ (hệ số 10) so với tần số giữa $(F_1+F_2)/2$: băng thông hẹp. Ngược lại là băng thông rộng
  - T/h băng thông giới hạn là t/h có phổ bằng không bên ngoài tầm tần số

	T/h không tuần hoàn	**T/h tuần hoàn**
LTTG	Time-limited: $x(t)=0$ với $\|t\|>\tau$ Bandlimited: $X(F)=0$ với $\|F\| > B$	Time-limited: $x_p(t)=0$ với $\tau<\|t\|<T_p/2$ Bandlimited: $c_k=0$ với $\|k\|>M$
RRTG	Time-limited: $x(n)=0$ với $\|n\|>N$ Bandlimited: $\|X(\omega)\|=0$ với $\omega_0<\|\omega\|<\pi$	Time-limited: $x(n)=0$ với $n_0<\|n\|<N$ Bandlimited: $c_k=0$ với $k_0<\|k\|<N$

Đối ngẫu

- 2 tính chất đặc trưng cho t/h trong miền thời gian (mặt toán học và mặt vật lý)
  - Biến thời gian: liên tục hay rời rạc
  - Tính chu kỳ: tuần hoàn hay không tuần hoàn
- Biến thời gian
  - T/h LTTG
    - Phổ không tuần hoàn, không phụ thuộc t/h miền thời gian tuần hoàn hay không (do hàm mũ $e^{j2\pi Ft}$ liên tục theo thời gian, không tuần hoàn theo F)
    - Dải tầm tần số F: $[0..\infty]$
  - T/h RRTG
    - Phổ tuần hoàn chu kỳ $\omega = 2\pi$
    - Dải tầm tần số F: $[-\pi..\pi]$
- Tính chu kỳ
  - T/h tuần hoàn
    - Phổ rời rạc (phổ vạch)
    - Khoảng cách phổ : $\Delta F=1/T_p$ (t/h LTTG) hoặc $\Delta f=1/N$ (t/h RRTG)
  - T/h năng lượng không tuần hoàn
    - Phổ liên tục (do hàm mũ $e^{j2\pi Ft}$ hoặc $e^{j\omega n}$ liên tục, không tuần hoàn theo F hoặc ω)

Tuần hoàn với chu kỳ α trong một miền thì sẽ rời rạc với khoảng cách 1/α trong miền khác, và ngược lại

T/h RRTG: Đặc tính của BĐ Fourier

- T/h RRTG, không tuần hoàn và có năng lượng hữu hạn
- Tương tự cho t/h LTTG, không tuần hoàn và có năng lượng hữu hạn
- Qui ước
  - ✦BĐ Fourier thuận $$X(\omega) \equiv F\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$
  - ✦BĐ Fourier nghịch $$x(n) \equiv F^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$
  - ✦Cặp BĐ Fourier $$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$
- Chú ý: X(ω) tuần hoàn với chu kỳ 2π

T/h RRTG: Đặc tính của BĐ Fourier

- Tính đối xứng
  - Nếu t/h có một số đặc tính đối xứng trong miền thời gian, việc xem xét các đ/k đối xứng trên BĐ Fourier của nó cho phép đơn giản hóa các phương trình BĐ Fourier thuận và nghịch
  - Giả sử
    - $x(n) = x_R(n) + jx_I(n)$
    - $X(\omega) = X_R(\omega) + jX_I(\omega)$

và $e^{-j\omega} = \cos\omega - j\sin\omega$ ($e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$), ta có

BĐ Fourier thuận

$$\begin{cases} X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_R(n)\cos\omega n + x_I(n)\sin\omega n\right] \\ X_I(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[x_R(n)\sin\omega n - x_I(n)\cos\omega n\right] \end{cases}$$

BĐ Fourier nghịch

$$\begin{cases} x_R(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[X_R(\omega)\cos\omega n - X_I(\omega)\sin\omega n\right]d\omega \\ x_I(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\left[X_R(\omega)\sin\omega n + X_I(\omega)\cos\omega n\right]d\omega \end{cases}$$

T/h RRTG: Đặc tính của BĐ Fourier

- Tính đối xứng (tt)
  - T/h thực
    - $x_R(n) = x(n)$ và $x_I(n) = 0$, do đó

$$\begin{cases} X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cos\omega n \\ X_I(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\sin\omega n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_R(-\omega) = X_R(\omega) \\ X_I(-\omega) = -X_I(\omega) \end{cases} \Rightarrow X^*(\omega) = X(-\omega)$$

Đối xứng Hermitian

- Do

$$\begin{cases} |X(\omega)| = \sqrt{X_R^2(\omega) + X_I^2(\omega)} \\ \angle X(\omega) = \tan^{-1}\dfrac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |X(-\omega)| = |X(\omega)| \\ \angle X(-\omega) = -\angle X(\omega) \end{cases}$$

- Do

$$\begin{cases} x(n) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{2\pi}[X_R(\omega)\cos\omega n - X_I(\omega)\sin\omega n]d\omega \\ [X_R(\omega)\cos\omega n] \text{ và } [X_I(\omega)\sin\omega n] \text{ là hàm chẵn} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[X_R(\omega)\cos\omega n - X_I(\omega)\sin\omega n]d\omega$$

T/h RRTG: Đặc tính của BĐ Fourier

- Tính đối xứng (tt)
  - T/h thực và chẵn
    - $x_R(n) = x(n)$ và $x(-n) = x(n)$, nên $[x(n)\cos\omega n]$ chẵn và $[x(n)\sin\omega n]$ lẻ
    - Do đó

$$\begin{cases} X_R(\omega) = x(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\cos\omega n & (\textit{hàm chẵn}) \\ X_I(\omega) = 0 \end{cases}$$

$$x(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_R(\omega)\cos\omega n\, d\omega$$

  - T/h thực và lẻ
    - $x_R(n) = x(n)$ và $x(-n) = -x(n)$, nên $[x(n)\cos\omega n]$ lẻ và $[x(n)\sin\omega n]$ chẵn
    - Do đó

$$\begin{cases} X_R(\omega) = 0 \\ X_I(\omega) = -2\sum_{n=1}^{\infty} x(n)\sin\omega n & (\textit{hàm le}) \end{cases}$$

$$x(n) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_I(\omega)\sin\omega n\, d\omega$$

T/h RRTG: Đặc tính của BĐ Fourier

- Tính đối xứng (tt)
  - T/h ảo
    - $x_R(n) = 0$ và $x(n) = jx_I(n)$ và $x(-n) = x(n)$, do đó

$$\begin{cases} X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I(n)\sin\omega n & (\text{hàm le}) \\ X_I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I(n)\cos\omega n & (\text{hàm chan}) \end{cases}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[X_R(\omega)\sin\omega n + X_I(\omega)\cos\omega n\right]d\omega$$

$x_I(n)$ lẻ

$$\begin{cases} X_R(\omega) = 2\sum_{n=1}^{\infty} x_I(n)\sin\omega n & (\text{hàm le}) \\ X_I(\omega) = 0 \end{cases}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_R(\omega)\sin\omega n\, d\omega$$

$x_I(n)$ chẵn

$$\begin{cases} X_R(\omega) = 0 \\ X_I(\omega) = x_I(0) + 2\sum_{n=1}^{\infty} x_I(n)\cos\omega n & (\text{hàm chan}) \end{cases}$$

$$x_I(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_I(\omega)\cos\omega n\, d\omega$$

T/h RRTG: Đặc tính của BĐ Fourier

- Tính đối xứng (tt)
  - T/h x(n) bất kỳ

$$x(n) = x_R(n) + jx_I(n) = x_R^e(n) + x_R^o(n) + j[x_I^e(n) + x_I^o(n)]$$
$$= x_e(n) + x_o(n)$$

$$\text{trong đó} \quad \begin{cases} x_e(n) = x_R^e(n) + jx_I^e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \\ x_o(n) = x_R^o(n) + jx_I^o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \end{cases}$$

$$x(n) \quad = \left[x_R^e(n) + jx_I^e(n)\right] + \left[x_R^o(n) + jx_I^o(n)\right]$$

$$X(\omega) \quad = \left[X_R^e(\omega) + jX_I^e(\omega)\right] + \left[X_R^o(\omega) + jX_I^o(\omega)\right]$$

T/h RRTG: Đặc tính của BĐ Fourier

- Tuyến tính

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) \end{cases} \Rightarrow \quad a_1x_1(n)+a_2x_2(n) \xleftrightarrow{F} a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$$

✦ Ví dụ: tìm BĐ Fourier của x(n) sau. Vẽ t/h và phổ của t/h.

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

$$x_1(n) = \begin{cases} a^n & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \begin{cases} a^{-n} & n < 0 \\ 0 & n \ge 0 \end{cases}$$

$$-1 < a < 1$$

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

$$Do \ \left|ae^{-j\omega}\right| = |a| < 1$$

$$\Rightarrow X_1(\omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$X_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{j\omega})^{-n} = \sum_{k=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^k$$

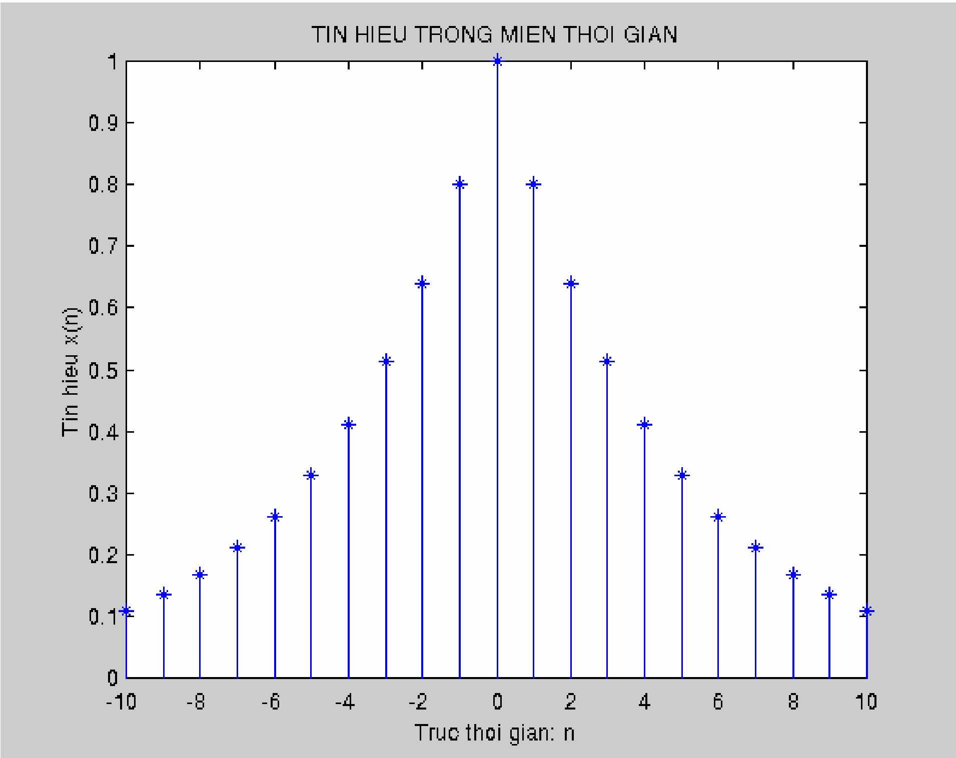
$$Do \left|ae^{j\omega}\right| = |a| < 1$$

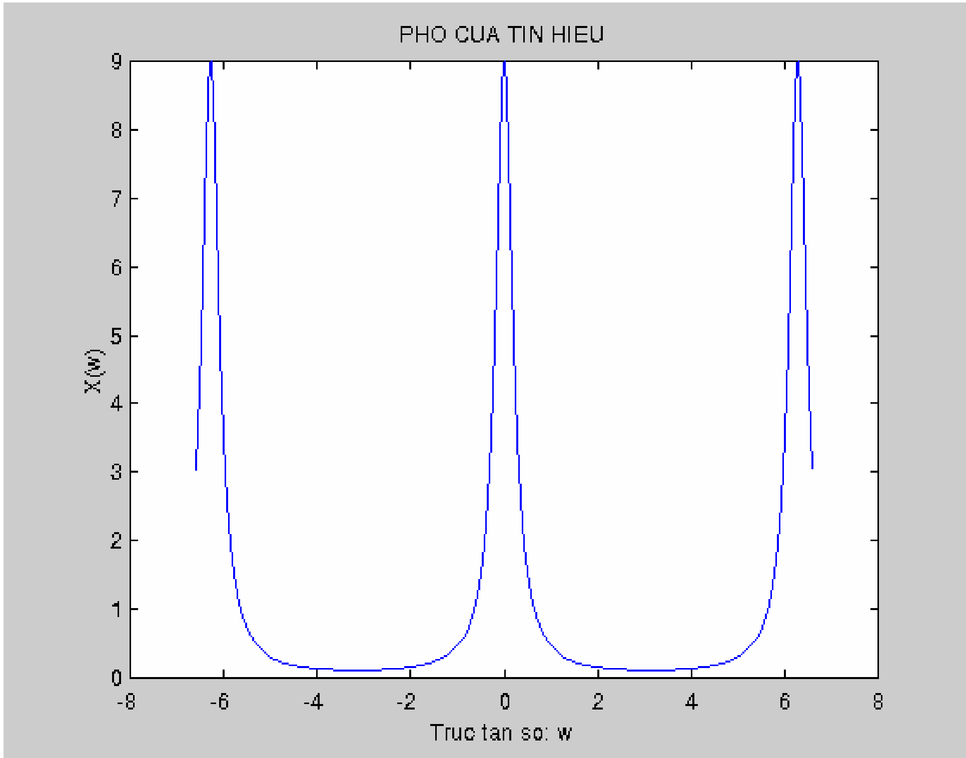
$$\Rightarrow X_2(\omega) = \frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}$$

T/h RRTG: Đặc tính của BĐ Fourier

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$$

$$X(\omega) = \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega + a^2}$$





T/h RRTG: Đặc tính của BĐ Fourier

- Dịch theo thời gian

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad x(n-k) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega k} X(\omega)$$

✦ Ví dụ: tìm BĐ Fourier của t/h $x(n) = 3(\tfrac{1}{2})^{n-3} u(n-2)$

$$x_1(n) = (\tfrac{1}{2})^n u(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow x(n) = 6 x_1(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = 6 X_1(\omega) = \frac{6}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

- Đảo theo thời gian

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-\omega)$$

T/h RRTG: Đặc tính của BĐ Fourier

- Tích chập

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) \end{cases} \Rightarrow x(n) = x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega)$$

  - Chú ý: Có thể dùng BĐ Fourier thuận và BĐ Fourier ngược để tính tích chập

- Tương quan

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) \end{cases} \Rightarrow r_{x_1x_2}(m) \xleftrightarrow{F} S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega)$$

- Định lý Wiener-Khintchine

$$x(n)\,thuc \qquad \Rightarrow r_{xx}(l) \xleftrightarrow{F} S_{xx}(\omega) = X(\omega)X(-\omega)$$

T/h RRTG: Đặc tính của BĐ Fourier

- Dịch theo tần số

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \quad \Rightarrow \quad e^{j\omega_0 k} x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)$$

- Định lý điều chế

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \quad \Rightarrow x(n)\cos\omega_0 n \xleftrightarrow{F} \tfrac{1}{2}\left[X(\omega + \omega_0) + X(\omega - \omega_0)\right]$$

- Định lý Parseval

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega) X_2^*(\omega) d\omega$$

T/h RRTG: Đặc tính của BĐ Fourier

- Nhân 2 chuỗi (định lý cửa sổ)

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3(n) = x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_3(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda$$

- Đạo hàm miền tần số

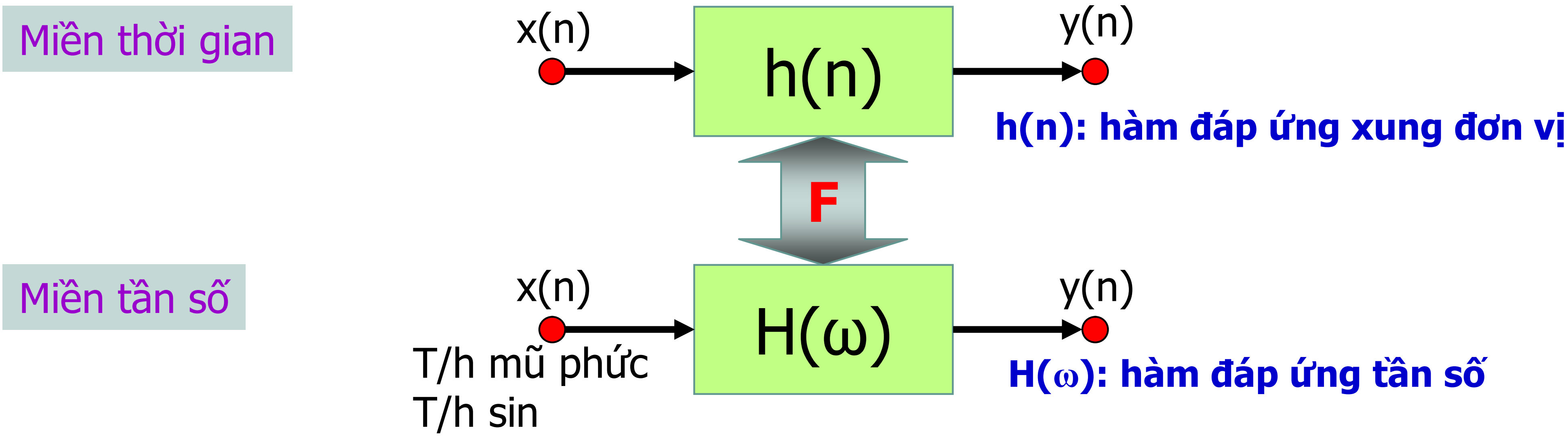
$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad nx(n) \xleftrightarrow{F} j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

- Liên hợp phức

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad x^*(n) \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega)$$

Hệ LTI trong miền tần số

- H/t nghỉ LTI
- Hàm đáp ứng tần số: đáp ứng tần số của t/h mũ phức và t/h sin



✦ Đáp ứng tần số của t/h mũ phức: cho $x(n) = Ae^{j\omega n}$ $\quad -\infty < n < \infty$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)Ae^{j\omega(n-k)} = Ae^{j\omega n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}$$

$$= AH(\omega)e^{j\omega n}$$

$x(n) = Ae^{j\omega n}$ là một eigenfunction của h/t
$H(\omega)$ là eigenvalue tương ứng

Hệ LTI trong miền tần số

- Biểu diễn H(ω) ở dạng cực $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\Theta(\omega)}$
- Ta có

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\cos\omega k - j\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\sin\omega k$$
$$= H_R(\omega) + jH_I(\omega)$$
$$= \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)}\, e^{j\tan^{-1}[H_I(\omega)/H_R(\omega)]}$$

Trong đó

$$H_R(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\cos\omega k \qquad hàm chan$$

$$H_I(\omega) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\sin\omega k \qquad hàm le$$

$$\Rightarrow \quad |H(\omega)| = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)} \qquad hàm chan$$

$$\Theta(\omega) = \tan^{-1}\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)} \qquad hàm le$$

- Do đó, nếu biết $|H(\omega)|$ và $\Theta(\omega)$ trong khoảng $0 \le \omega \le \pi$ thì cũng xác định được trong khoảng $-\pi \le \omega \le 0$

Hệ LTI trong miền tần số

- Đáp ứng tần số của t/h sin

$$x_1(n) = Ae^{j\omega n} \longrightarrow y_1(n) = A|H(\omega)|e^{j\Theta(\omega)}e^{j\omega n}$$

$$x_2(n) = Ae^{-j\omega n} \longrightarrow y_2(n) = A|H(-\omega)|e^{j\Theta(-\omega)}e^{-j\omega n}$$
$$= A|H(\omega)|e^{-j\Theta(\omega)}e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = A\cos\omega n = \tfrac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n)] \longrightarrow y(n) \quad = \tfrac{1}{2}[y_1(n) + y_2(n)]$$
$$= A|H(\omega)|\cos[\omega n + \Theta(\omega)]$$

$$x(n) = A\sin\omega n = \tfrac{1}{2j}[x_1(n) - x_2(n)] \longrightarrow y(n) \quad = \tfrac{1}{2j}[y_1(n) - y_2(n)]$$
$$= A|H(\omega)|\sin[\omega n + \Theta(\omega)]$$

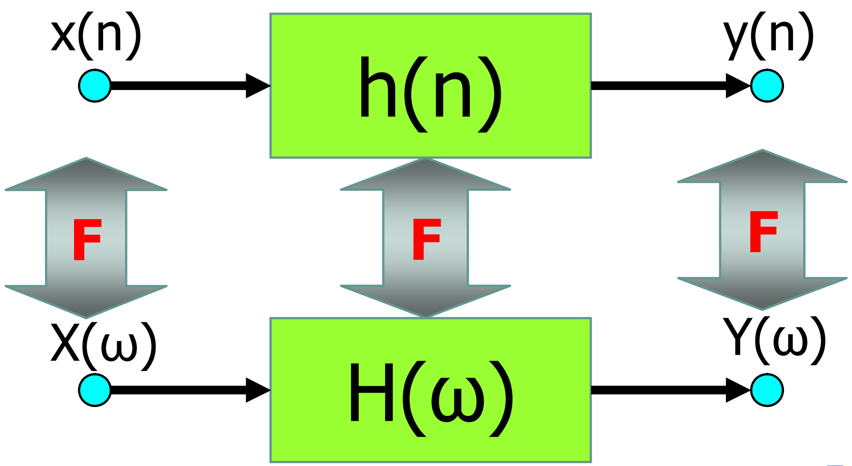
Hệ LTI trong miền tần số

- Đáp ứng cho t/h tuần hoàn

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y(n)=\sum_{k=0}^{N-1} c_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

  ✦ Đáp ứng của t/h tuần hoàn cũng là t/h tuần hoàn chu kỳ N

- Đáp ứng cho t/h không tuần hoàn



y(n) = x(n)*h(n)

Y(ω) = X(ω)H(ω)

$Y(\omega_0) = X(\omega_0)H(\omega_0) = |H(\omega_0)|\, e^{j\Theta(\omega_0)} X(\omega_0)$

➔ Thành phần tần số (ω_0) khi đi qua hệ thì:

- Biên độ: co/giãn $|H(\omega_0)|$
- Pha: lệch pha $\Theta(\omega_0)$

Hệ LTI trong miền tần số

- Quan hệ giữa hàm hệ thống và hàm đáp ứng tần số

$$H(\omega) = H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \xrightarrow{\text{Hệ ổn định}} H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

$$H(z) = b_0 z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)} \longrightarrow H(\omega) = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^{M}(e^{j\omega}-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-p_k)}$$

$$H^*(1/z^*) = H^*(\omega)$$

$$H^*(1/z^*) = H(z^{-1})$$

$$H^*(\omega) = H(-\omega)$$

$$\Rightarrow \left|H(\omega)\right|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = H(\omega)H(-\omega) = H(z)H(z^{-1})$$

Hệ LTI trong miền tần số

- Tính hàm đáp ứng tần số H(ω)
  - Biểu diễn dưới dạng cực

$$\begin{cases} e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega)e^{j\Theta_k(\omega)} \\ e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega)e^{j\Phi_k(\omega)} \end{cases}$$

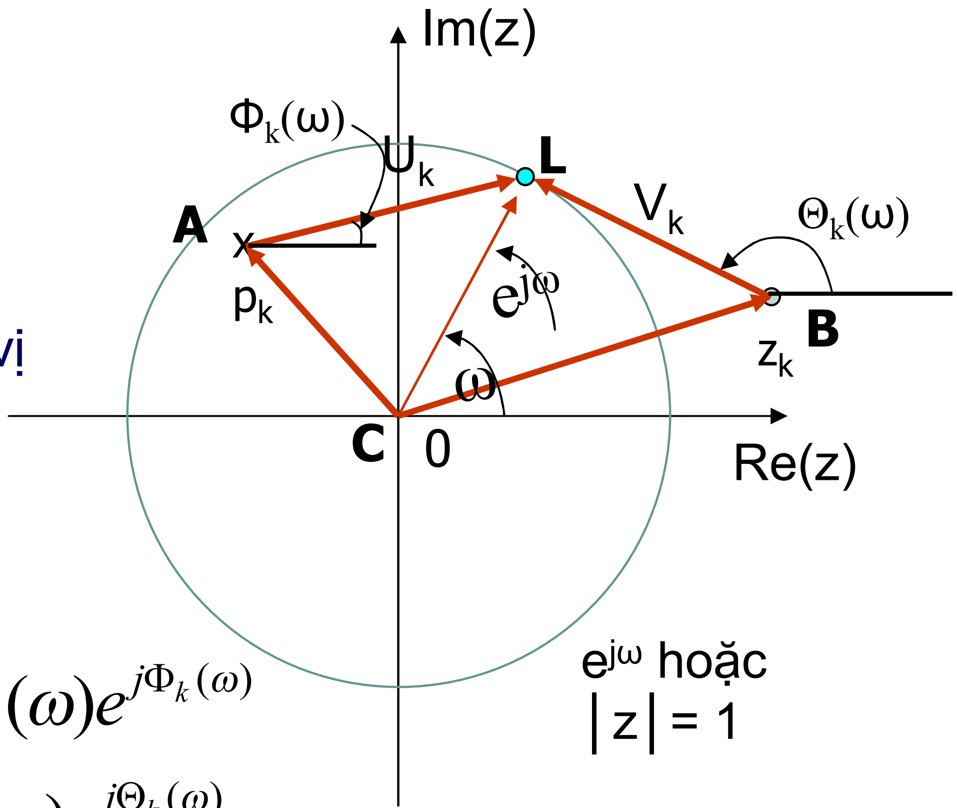
$$H(\omega) = b_0 e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^{M}(e^{j\omega} - z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega} - p_k)}$$

$$\begin{cases} |H(\omega)| = |b_0| \dfrac{V_1(\omega)V_2(\omega)\ldots V_M(\omega)}{U_1(\omega)U_2(\omega)\ldots U_N(\omega)} \\ \angle H(\omega) = \angle b_0 + \omega(N-M) + \sum_{k=1}^{M}\Theta_k(\omega) - \sum_{k=1}^{N}\Phi_k(\omega) \end{cases}$$

  - Do đó, có thể tính được H(ω) nếu biết được zero và pole của hàm hệ thống
  - Ý nghĩa ?

Hệ LTI trong miền tần số

- Tính hàm đáp ứng tần số H(ω)
  - Cho zero z_k và pole p_k
  - Xác định H(ω) tại ω (điểm L)
  - Việc tính H(ω) tương đương việc tính H(z) tại điểm L trên vòng tròn đơn vị



$$\left.\begin{aligned} CL &= CA + AL \\ CL &= CB + BL \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} AL &= CL - CA \\ BL &= CL - CB \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_k &= CA \\ z_k &= CB \\ e^{j\omega} &= CL \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} AL &= e^{j\omega} - p_k = U_k(\omega)e^{j\Phi_k(\omega)} \\ BL &= e^{j\omega} - z_k = V_k(\omega)e^{j\Theta_k(\omega)} \end{aligned}$$

  - Sự hiện diện của zero gần vòng tròn đơn vị khiến biên độ đáp ứng tần số tại những điểm trên vòng tròn gần điểm đó nhỏ
  - Ngược lại, sự hiện diện của pole gần vòng tròn đơn vị khiến biên độ đáp ứng tần số tại những điểm trên vòng tròn gần điểm đó lớn

Hệ LTI trong miền tần số

- Hàm tương quan vào-ra và phổ

$$r_{yy}(m) = r_{hh}(m) * r_{xx}(m)$$
$$r_{yx}(m) = h(m) * r_{xx}(m)$$

$$S_{yy}(z) = S_{hh}(z)S_{xx}(z) = H(z)H(z^{-1})S_{xx}(z)$$
$$S_{yx}(z) = H(z)S_{xx}(z)$$

z=e^{jω}

Phổ mật độ năng lượng $$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega)$$

Phổ mật độ năng lượng chéo $$S_{yx}(\omega) = H(\omega)S_{xx}(\omega) = H(\omega)|X(\omega)|^2$$

Năng lượng tổng $$E_y = r_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{yy}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega)d\omega$$

Nếu t/h nhập có phổ phẳng
$S_{xx}(\omega) = E_x = \text{const}$ khi $-\pi \le \omega \le \pi$

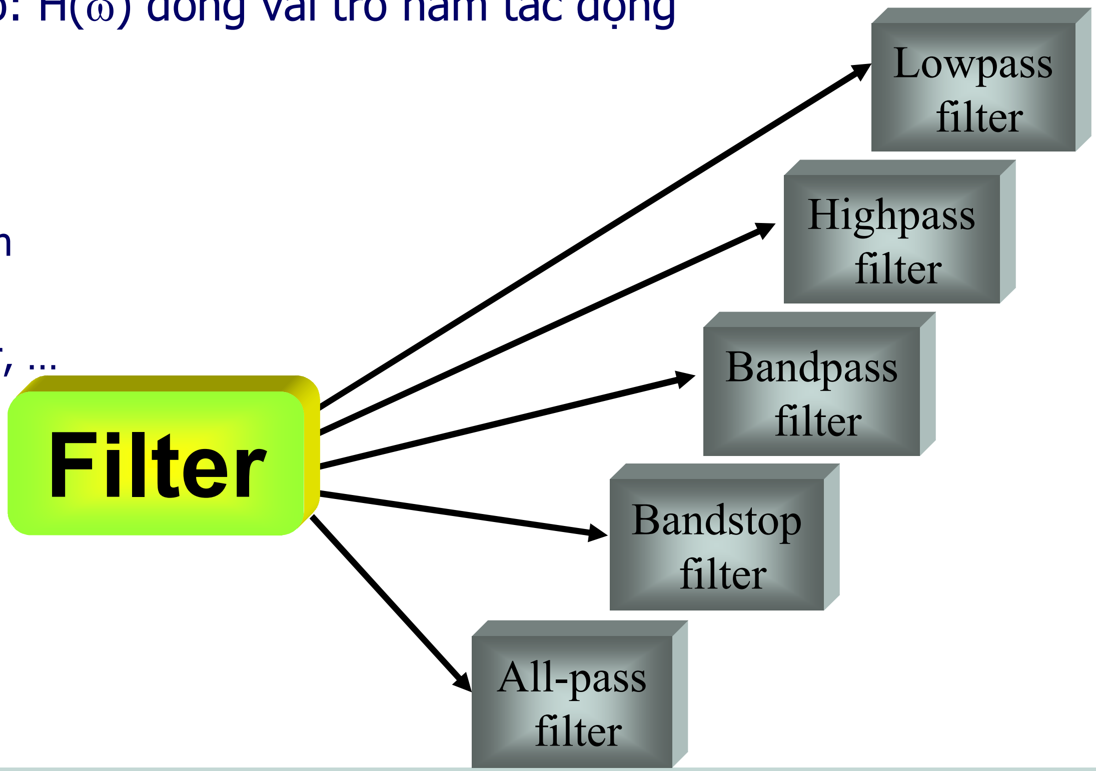
$$S_{yx}(\omega) = H(\omega)E_x \longrightarrow H(\omega) = \frac{1}{E_x}S_{yx}(\omega)$$

$$h(n) = \frac{1}{E_x}r_{yx}(m)$$

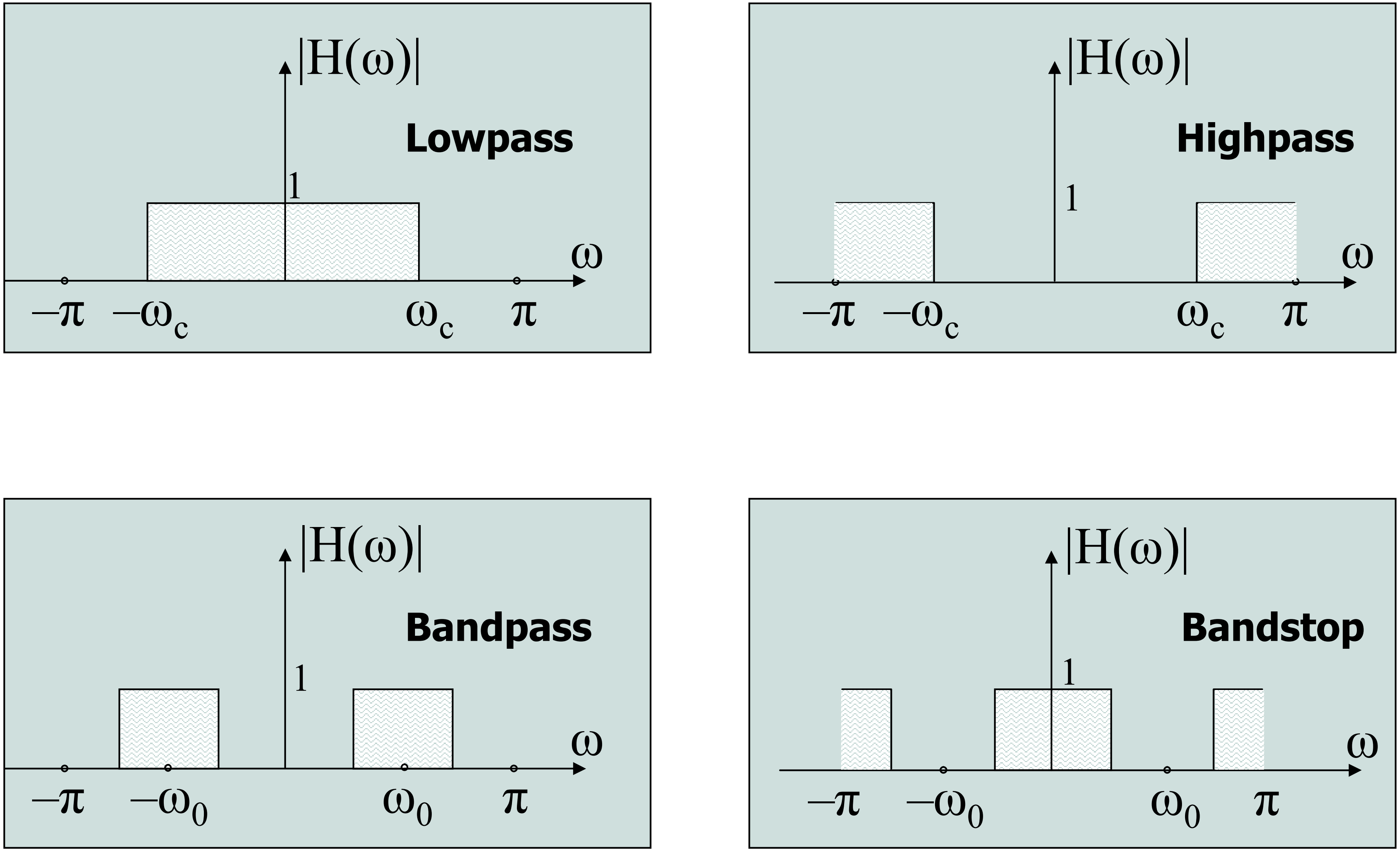
Dùng trong việc xác định h(n) của hệ lạ:
tác động vào h/t t/h có phổ phẳng

Hệ LTI và bộ lọc

- Bộ lọc
  - Thiết bị dùng để xử lý tùy theo đặc tính của t/h tác động vào h/t
  - Ví dụ: bộ lọc không khí, bộ lọc dầu, bộ lọc tia cực tím
- Hệ LTI
  - $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$
  - Thay đổi phổ t/h nhập tùy theo đặc trưng của đáp ứng tần số $H(\omega)$
  - Hệ LTI được xem là bộ lọc tần số: $H(\omega)$ đóng vai trò hàm tác động hoặc hàm chỉnh phổ
  - Có tác dụng
    - Loại bỏ nhiễu trên t/h
    - Tinh chỉnh hình dạng phổ của t/h
    - Phân tích phổ t/h
    - Phát hiện t/h trong Radar, Sonar, …
- Phân loại bộ lọc



Hệ LTI và bộ lọc



Hệ LTI và bộ lọc

- Bộ lọc lý tưởng
  - Đặc trưng của H(ω) lý tưởng
    - Biên độ = hằng số A, trong vùng tần số được qua
      = 0, trong vùng tần số không được qua
    - Pha tuyến tính (= -aω, a: hằng số)
  - Minh họa
    - T/h x(n) với các thành phần t/s trong khoảng $[\omega_1, \omega_2]$
    - Hàm đáp ứng tần số
      $$H(\omega) = \begin{cases} Ce^{-j\omega n_0} & \omega_1 < \omega < \omega_2 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$
    - Phổ t/h tại ngõ xuất $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = Ce^{-j\omega n_0}X(\omega) \qquad (\omega_1 < \omega < \omega_2)$
    - T/h ngõ xuất y(n) = Cx(n-n_0)
    - x(n) khi qua bộ lọc lý tưởng
      - bị delay: $\tau_g(\omega) = -d\Theta(\omega)/d\omega = n_0$ (tất cả các thành phần t/s đều bị trễ như nhau)
      - bị co giãn biên độ
  - Trong thực tế không hiện thực được tình trạng lý tưởng, mà chỉ là xấp xỉ của nó

Hệ LTI và bộ lọc

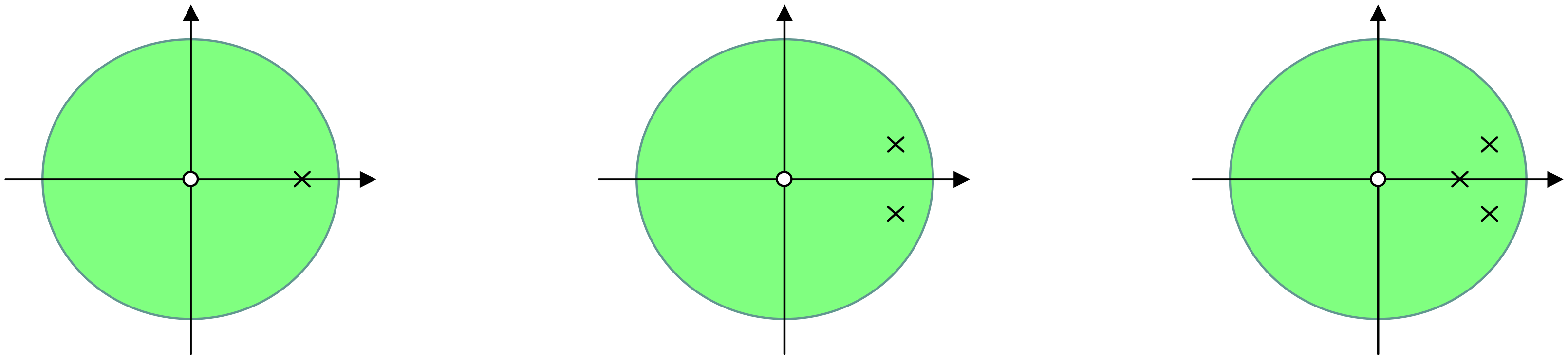
- Thiết kế bộ lọc bằng sơ đồ zero-pole
  - Bộ lọc số đơn giản nhưng quan trọng
  - Nguyên lý: đặt các pole gần các điểm trên vòng tròn đơn vị tương ứng với các tần số cần nhấn mạnh (có góc pha bằng tần số được cho qua bộ lọc) và đặt các zero gần các điểm tương ứng với các tần số không muốn
  - Ràng buộc
    - Pole bên trong vòng tròn đơn vị (để hệ ổn định). Zero có thể nằm bất kỳ ở đâu trên mpz
    - Các zero/pole phức phải theo từng cặp liên hợp (để hệ số của bộ lọc là số thực)
    - Chọn b_0 thích hợp để chuẩn hoá đáp ứng tại tần số được cho qua bộ lọc (để $|H(\omega_0)| = 1$, ω_0 là tần số trong bandpass của bộ lọc)

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - p_k z^{-1})}$$

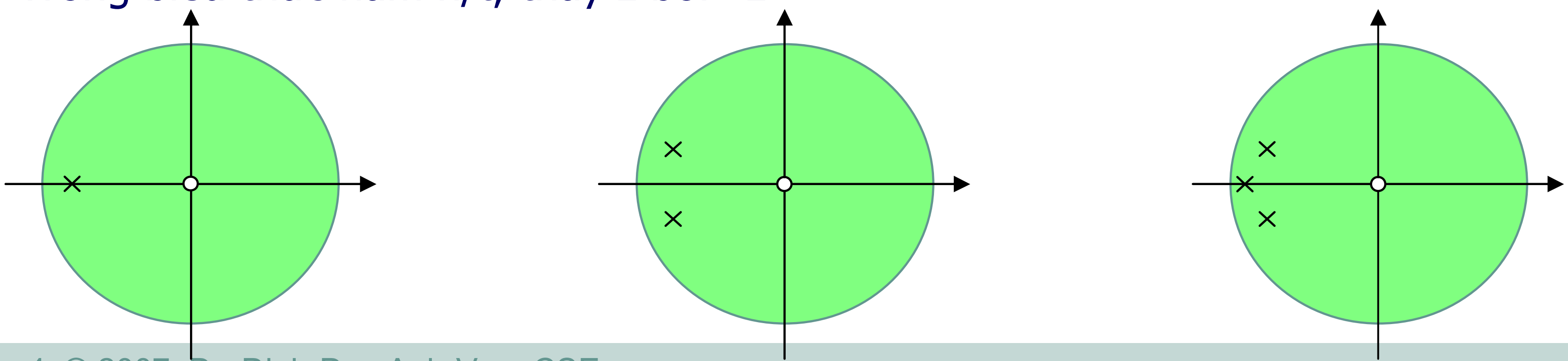
$G \equiv b_0$: độ lợi

Hệ LTI và bộ lọc

- Bộ lọc thông thấp (lowpass)
  - Đặt pole gần các điểm trên vòng tròn đơn vị có tần số thấp ($\omega = 0$)
  - Đặt zero gần hoặc tại các điểm trên vòng tròn đơn vị có tần số cao ($\omega = \pi$)



- Bộ lọc thông cao (highpass)
  - Tương tự như bộ lọc thông thấp, bằng cách lấy đối xứng các zero/pole qua trục ảo của mpz
  - Trong biểu thức hàm h/t, thay z bởi –z



Hệ LTI và bộ lọc

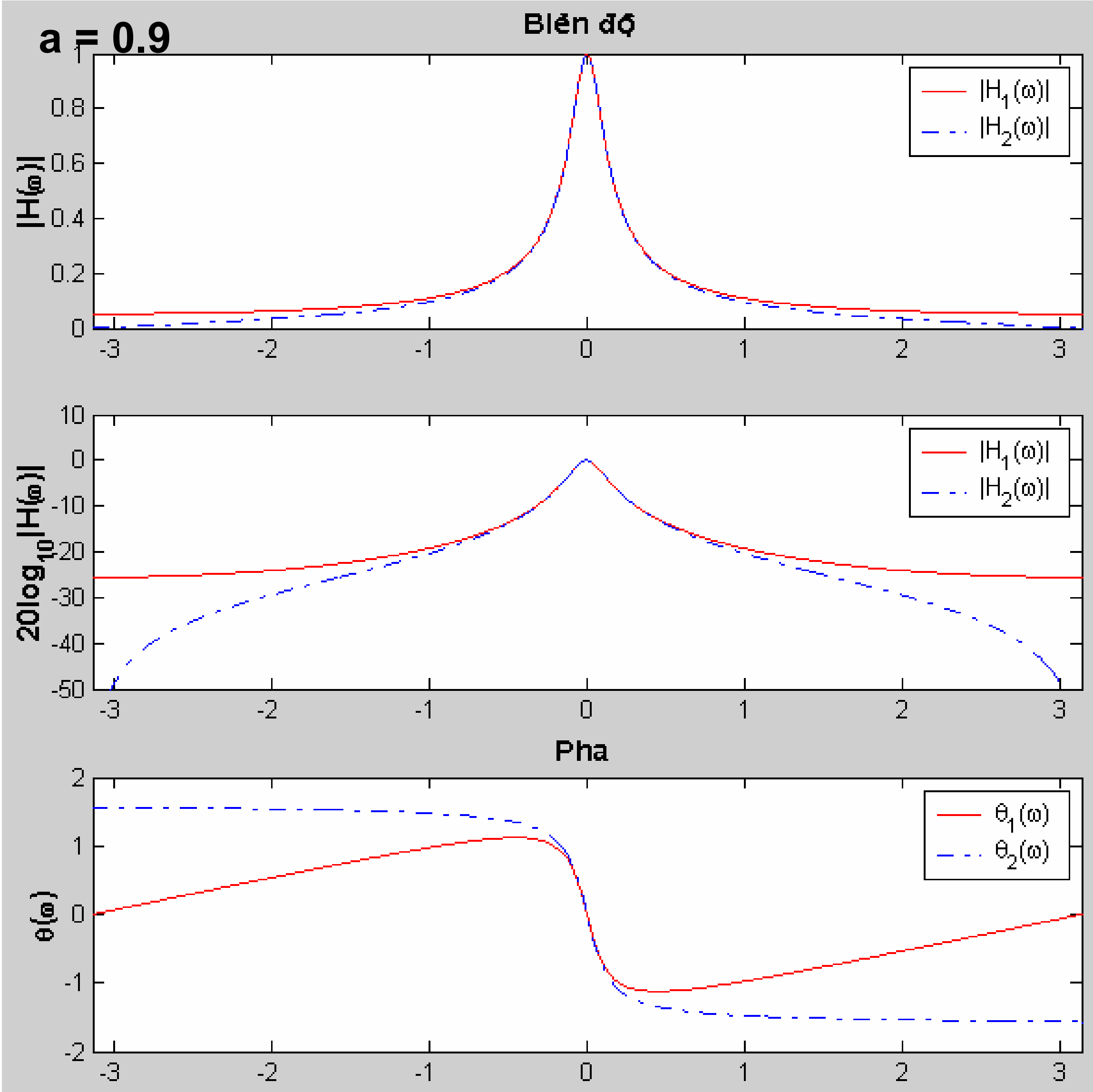
- Ví dụ: bộ lọc thông thấp (lowpass) một pole
  - Hàm hệ thống

$$H_1(z) = \frac{1-a}{1-az^{-1}}$$

  - Độ lợi G được chọn (1–a) để biên độ H(z) bằng đơn vị khi $\omega = 0$
  - Việc thêm zero = –1 sẽ làm suy giảm đáp ứng của bộ lọc ở tần số cao
  - Do đó

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

  - $|H_2(\omega)|$ giảm bằng 0 khi $\omega = \pi$



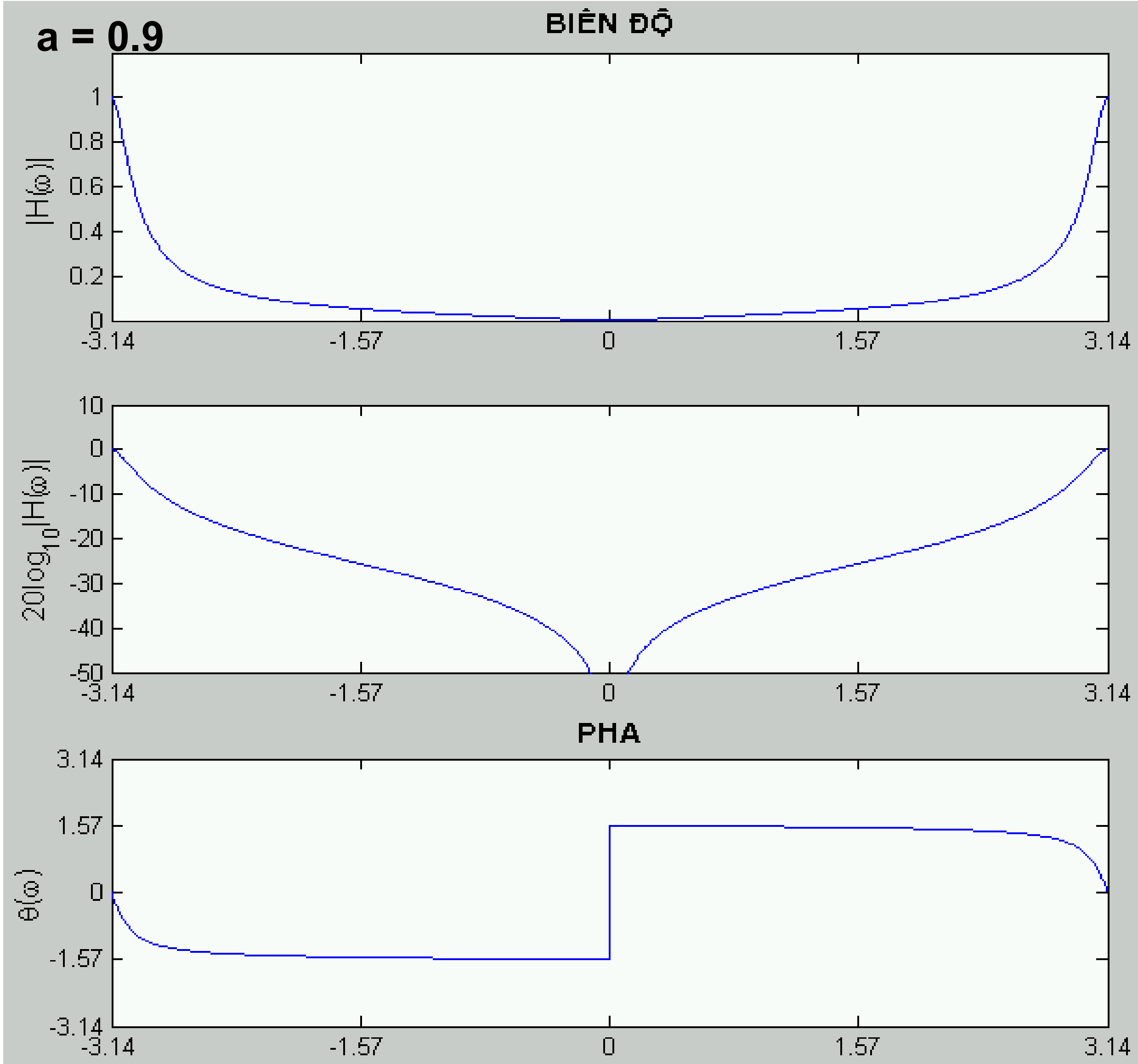
Hệ LTI và bộ lọc

- Bộ lọc thông cao (highpass)
  - Có thể đạt được từ bộ lọc lowpass bằng cách thay z bởi –z

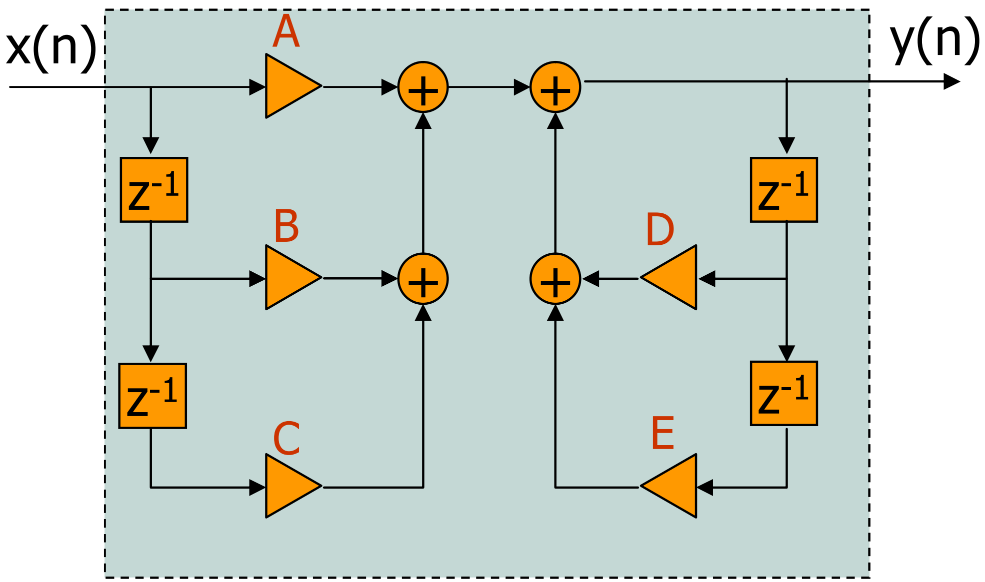
$$H_{lp}(z) = \frac{1-a}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

z = –z

$$H_{hp}(z) = \frac{1-a}{2}\,\frac{1-z^{-1}}{1+az^{-1}}$$



- Bộ lọc bandpass
  - Nguyên tắc: được thực hiện tương tự lowpass và highpass
  - Có một hoặc nhiều cặp pole liên hợp phức gần vòng tròn đơn vị, trong vùng lân cận dải tần số cho phép
  - Ví dụ: thiết kế bộ lọc bandpass thoả:
    - Tâm của passband = $\pi/2$. Đáp ứng tần số tại tâm đó = 1
    - Đáp ứng năng lượng = 0 tại các tần số: 0, π
    - Đáp ứng năng lượng = $1/\sqrt{2}$ tại các tần số: $4\pi/9$



$$Pole \quad p_{1,2} = re^{\pm j\frac{\pi}{2}}$$

$$Zero \quad z_{1,2} = \pm 1$$

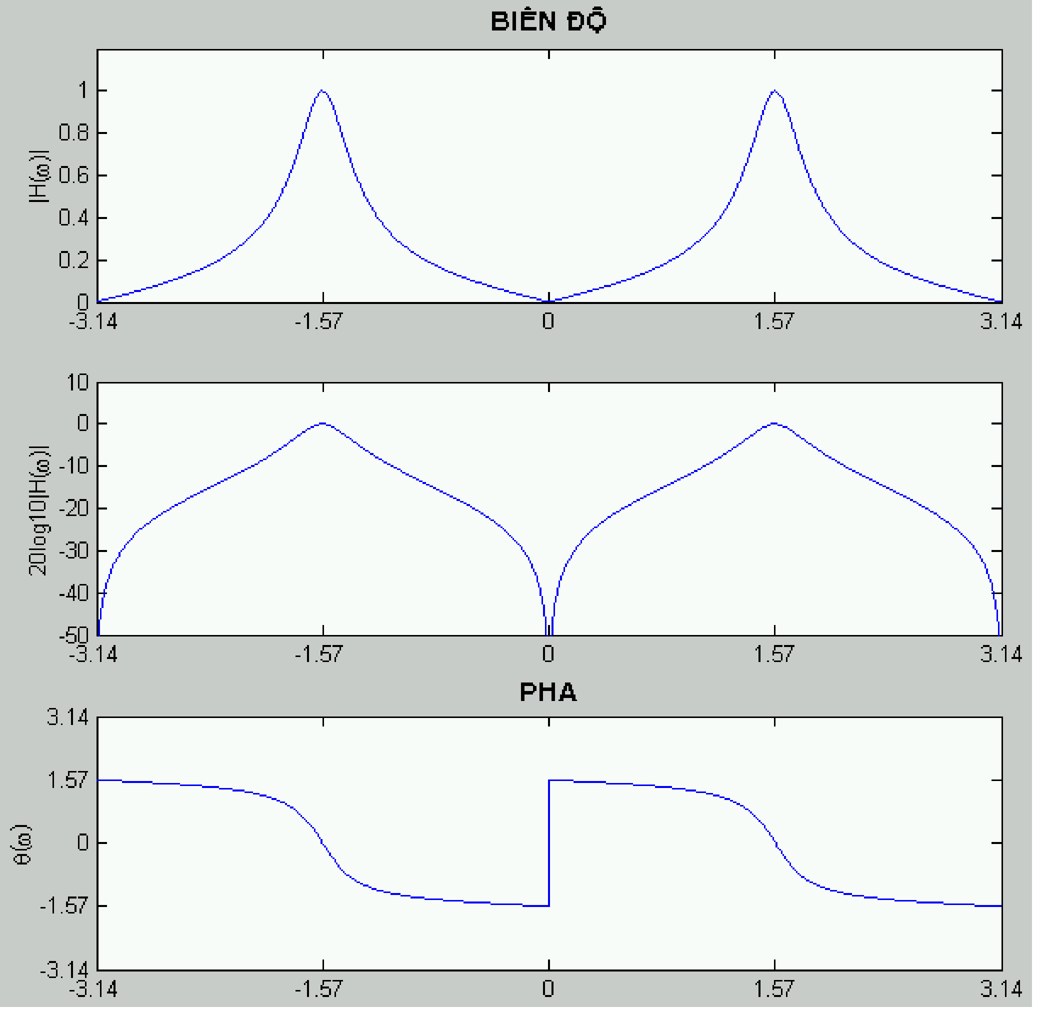
$$H(z) = G\frac{(z-1)(z+1)}{(z-jr)(z+jr)} = G\frac{z^2-1}{z^2+r^2}$$

$$\begin{cases} H(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ H(\frac{4\pi}{9}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G = 0.15 \\ r = \pm\sqrt{0.7} \end{cases}$$

$$H(z) = 0.15\frac{1-z^{-2}}{1+0.7z^{-2}}$$

Hệ LTI và bộ lọc

$$H(z) = 0.15\frac{1-z^{-2}}{1+0.7z^{-2}}$$



Hệ LTI và bộ lọc

- Biến đổi đơn giản từ bộ lọc lowpass sang bộ lọc highpass
  - Tạo bộ lọc highpass bằng cách dịch $H_{lp}(\omega)$ một đoạn π (nghĩa là thay thế ω bởi $\omega - \pi$
    $H_{hp}(\omega) = H_{lp}(\omega - \pi)$
  - Trong miền thời gian
    $h_{hp}(n) = (e^{j\pi})^n h_{lp}(n) = (-1)^n h_{lp}(n)$

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} (-1)^k b_k x(n-k)$$

$$H_{lp}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

$$H_{hp}(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} (-1)^k b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k e^{-j\omega k}}$$

Hệ LTI và bộ lọc

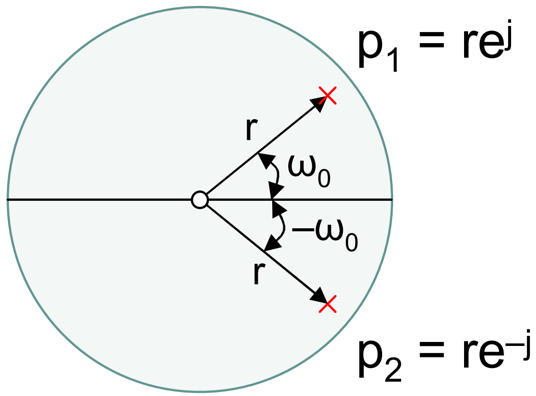
- Bộ cộng hưởng số
  - Bộ lọc bandpass 2 pole liên hợp phức gần vòng tròn đơn vị
  - Vị trí góc của pole xác định tần số cộng hưởng
  - Chọn pole liên hợp phức $p_{1,2} = re^{\pm j\omega 0}$ (0 < r < 1)
  - Có thể chọn thêm tối đa 2 zero
    - Hoặc zero tại gốc tọa độ
    - Hoặc zero tại ±1
    - Cho phép loại bỏ các đáp ứng của bộ lọc tại ω = 0 hoặc ω = π
  - Giả sử zero được chọn tại gốc $H(z) = \dfrac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0} z^{-1})(1 - re^{-j\omega_0} z^{-1})}$
    - Do |H(ω)| có đỉnh tại (hoặc gần) ω = ω_0, nên

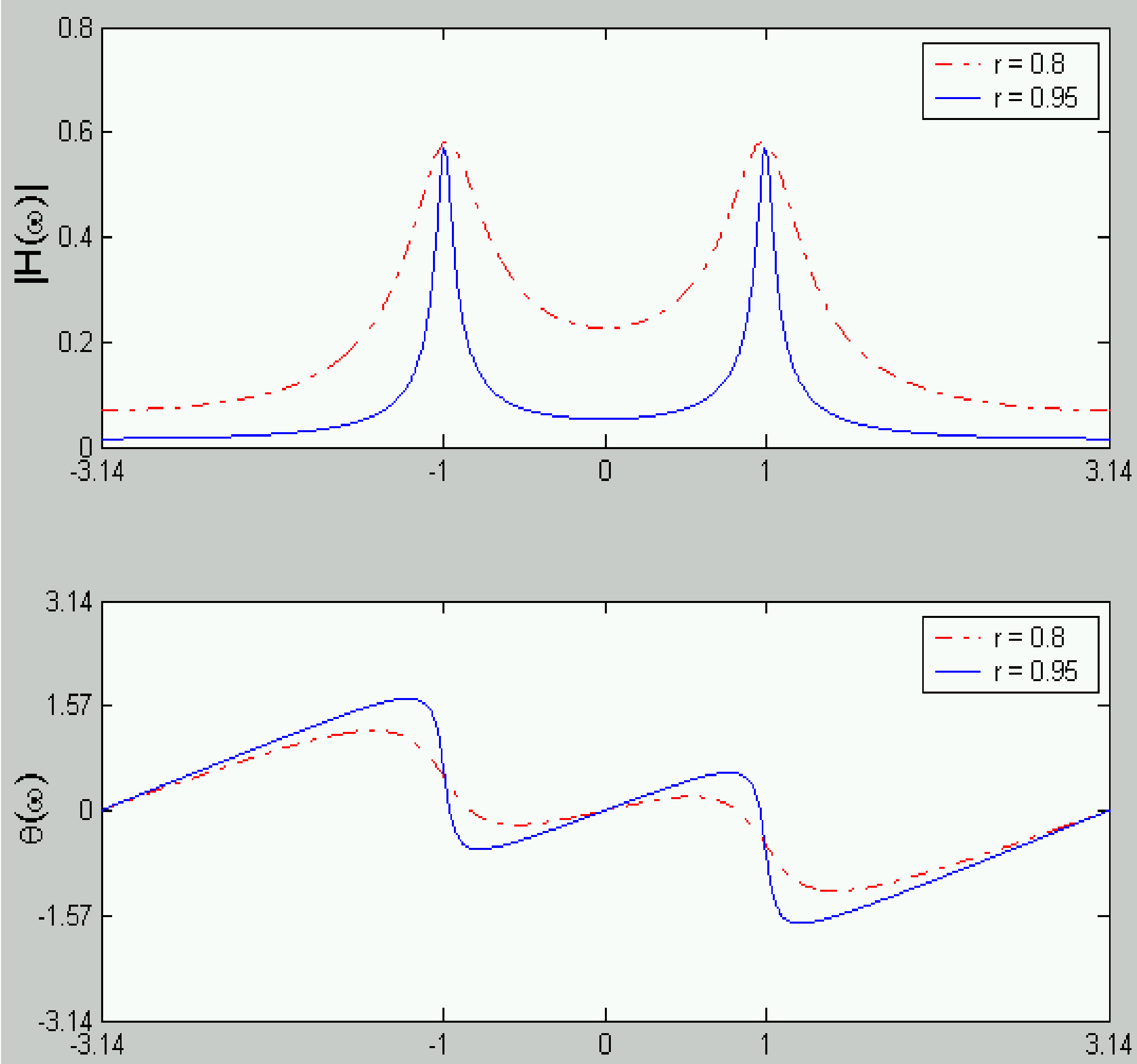
$$|H(\omega_0)| = \left| \frac{b_0}{(1 - re^{j\omega_0} e^{-j\omega_0})(1 - re^{-j\omega_0} e^{-j\omega_0})} \right| = 1$$

$$b_0 = (1 - r)\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos 2\omega_0}$$

Hệ LTI và bộ lọc

- Phổ biên độ và phổ pha trong trường hợp $\omega_0 = 1$



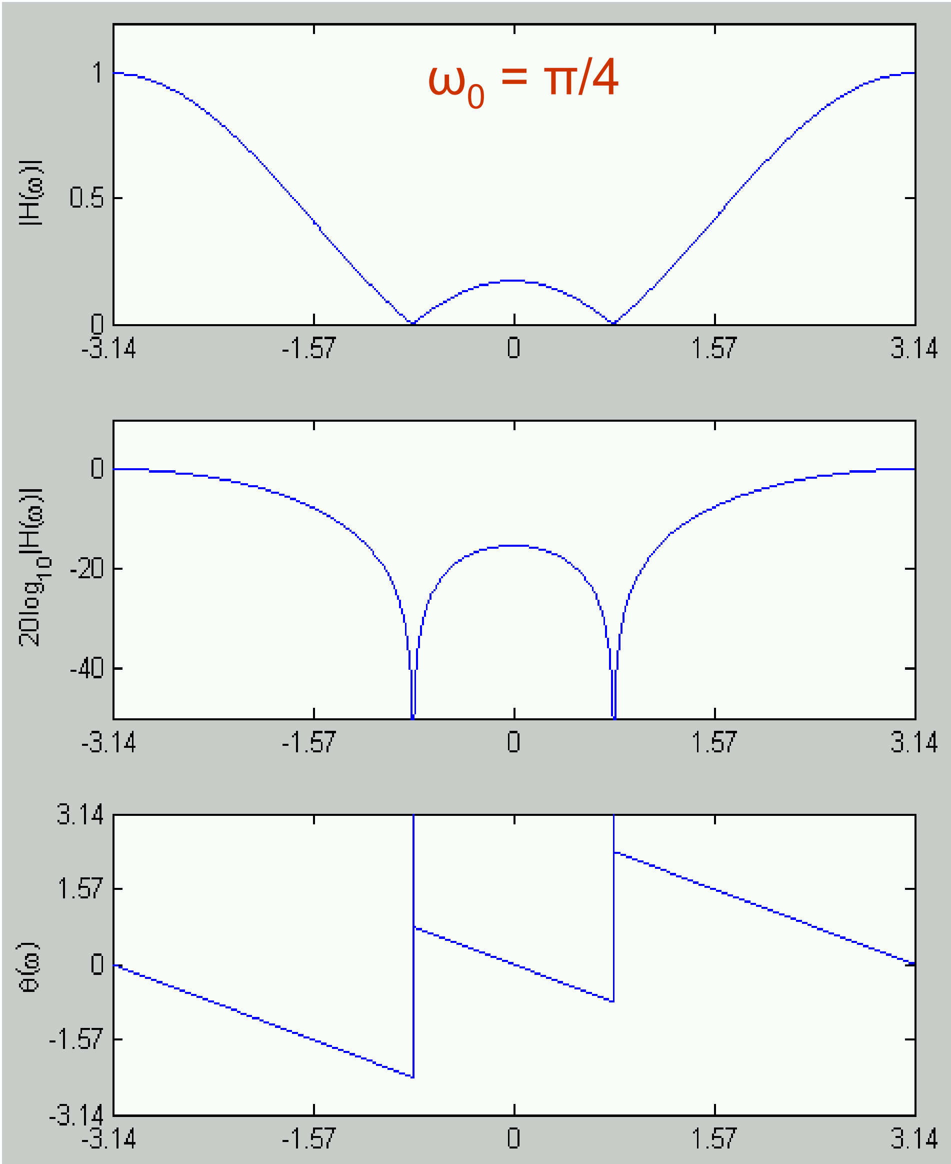


Hệ LTI và bộ lọc

- Bộ lọc khe V (notch)
  - Chứa một hoặc nhiều khe sâu, có đáp ứng tần số bằng 0
  - Đặt một cặp zero liên hợp phức trên vòng tròn đơn vị, tại góc ω_0, tức $z_{1,2} = e^{\pm j\omega_0}$
  - Hàm h/t

$$H(z) = b_0(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})$$
$$= b_0(1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2})$$

  - Nhược điểm
    - Khe có độ rộng khá lớn
    - Thành phần tần số xung quanh ω_0 bị suy hao
    - P/p khắc phục: ad-hoc (nhiều p/p khác được trình bày ở chương 8)

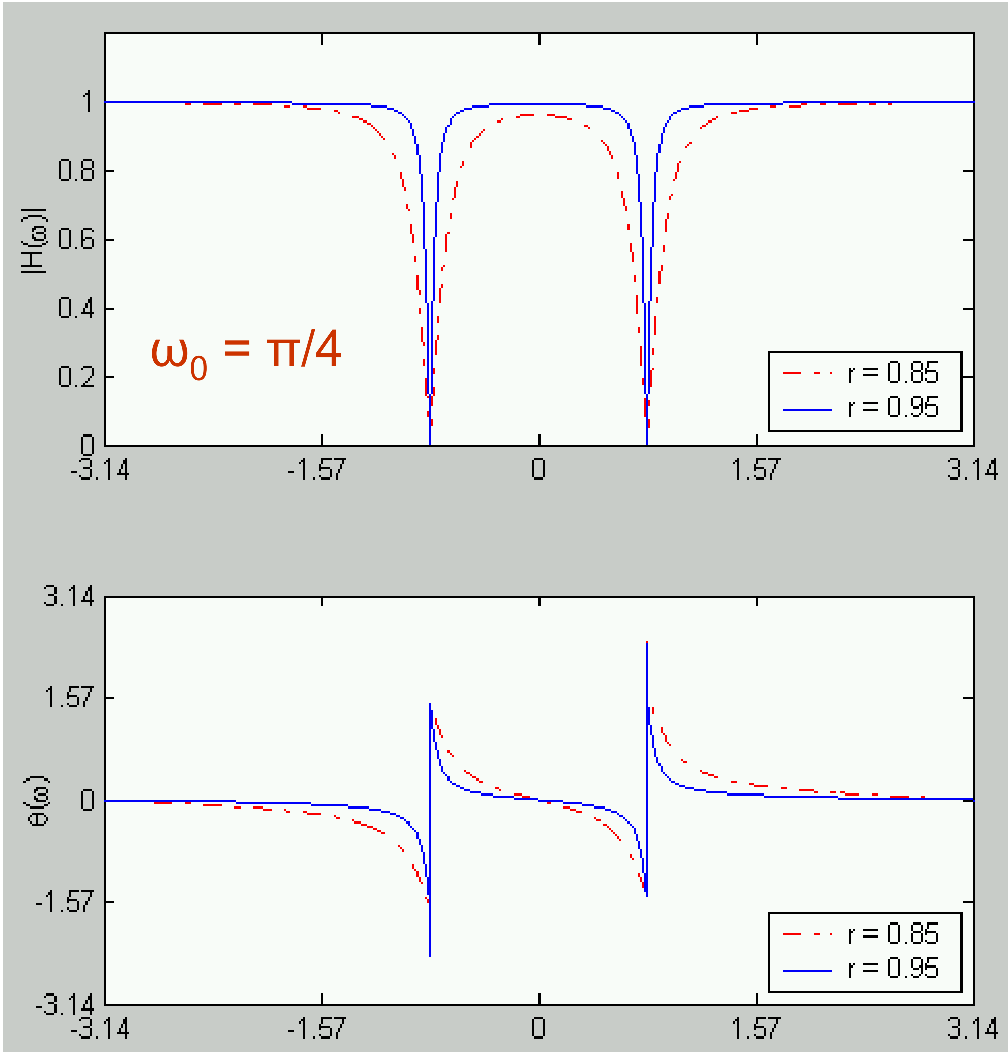


Hệ LTI và bộ lọc

- P/p khắc phục bộ lọc notch
  - Đặt cặp pole liên hợp phức tại ω_0 để cộng hưởng trong vùng lân cận ω_0
    $$p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$$
  - Hàm h/t

$$H(z) = b_0 \frac{1 - 2\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

  - Nhược điểm:
    - Ngoài việc giảm băng thông của khe, pole cũng tạo ra các lăn tăn (ripple) trong bandpass của bộ lọc (do việc cộng hưởng)
    - Khắc phục ripple bằng cách thêm zero và/hoặc pole → thử và sai



Hệ LTI và bộ lọc

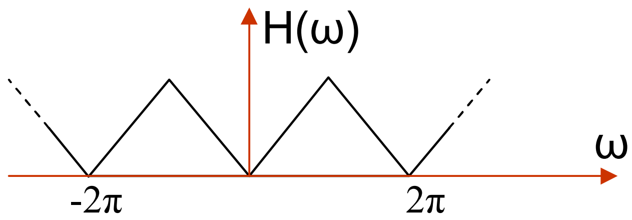
- Bộ lọc răng lược (comb)
  - ✦ Là bộ lọc notch với các khe xuất hiện tuần hoàn
  - ✦ Hàm h/t

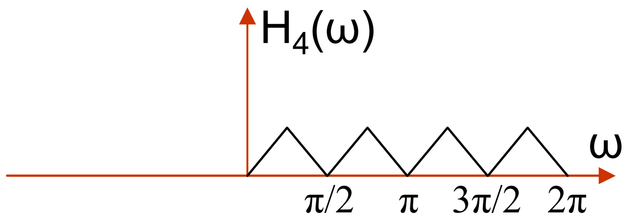
$$H(z)=\sum_{k=0}^{M}h(k)z^{-k} \quad \xleftrightarrow{z=e^{j\omega}} \quad H(\omega)=\sum_{k=0}^{M}h(k)e^{-jk\omega}$$

  - ✦ Thay z bằng z^L (L>0)

$$H_L(z)=\sum_{k=0}^{M}h(k)z^{-kL} \quad \xleftrightarrow{z=e^{j\omega}} \quad H_L(\omega)=\sum_{k=0}^{M}h(k)e^{-jkL\omega}=H(L\omega)$$

  - ✦ Đáp ứng tần số $H_L(\omega)$ chính là việc lặp bậc L của đáp ứng tần số $H(\omega)$ trong khoảng $[0, 2\pi]$
    - Nếu $H(\omega)$ có một phổ không tại tần số ω_0 nào đó, $H_L(\omega)$ sẽ có các phổ không răng lược tại $\omega_k = \omega_0+2\pi k/L$ (k=0, 1, 2, …, L-1)





Hệ LTI và bộ lọc

- Ví dụ: bộ lọc trung bình $y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k)$

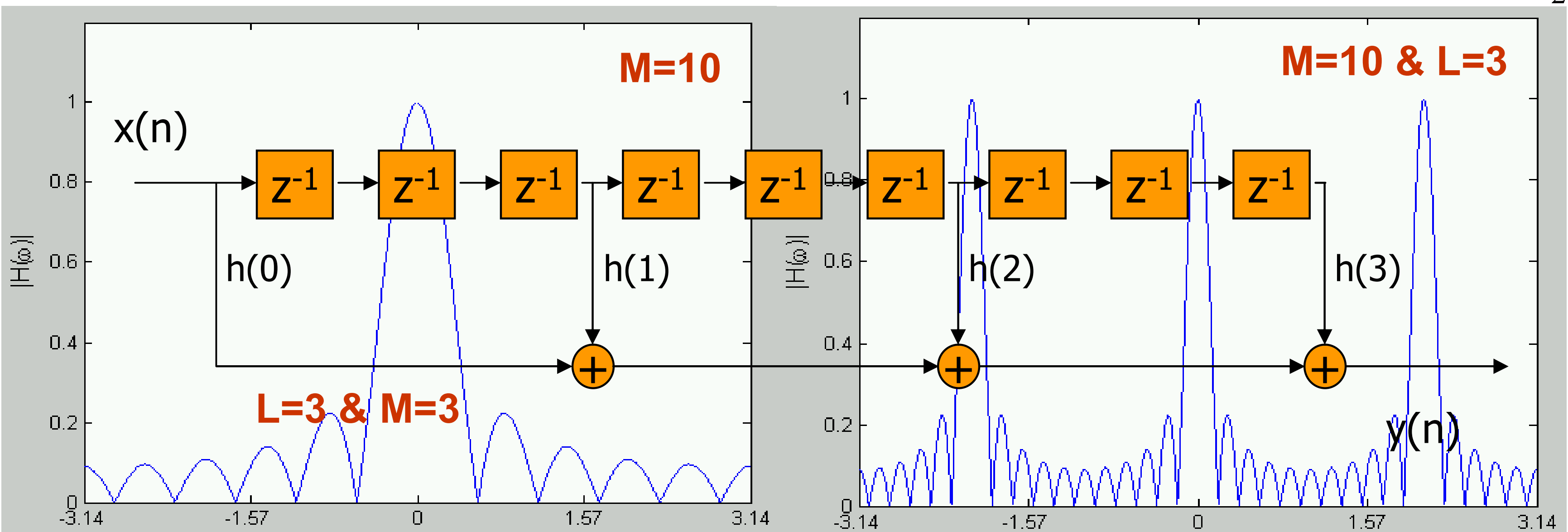
$$\begin{cases} H(z) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} z^{-k} = \frac{1}{M+1}\frac{1-z^{-(M+1)}}{1-z^{-1}} \\ z_k = e^{j2\pi k/(M+1)} \quad k = 1,2,3,\ldots,M \end{cases}$$

$z = e^{j\omega}$

$$\begin{cases} H(\omega) = \frac{e^{-j\omega M/2}}{M+1}\frac{\sin\omega(\frac{M+1}{2})}{\sin\frac{\omega}{2}} \\ \omega_k = 2\pi k/(M+1) \end{cases}$$

$$H_L(z) = \frac{1}{M+1}\frac{1-z^{-L(M+1)}}{1-z^{-L}}$$

$$H_L(\omega) = \frac{e^{-j\omega LM/2}}{M+1}\frac{\sin L\omega(\frac{M+1}{2})}{\sin\frac{L\omega}{2}}$$



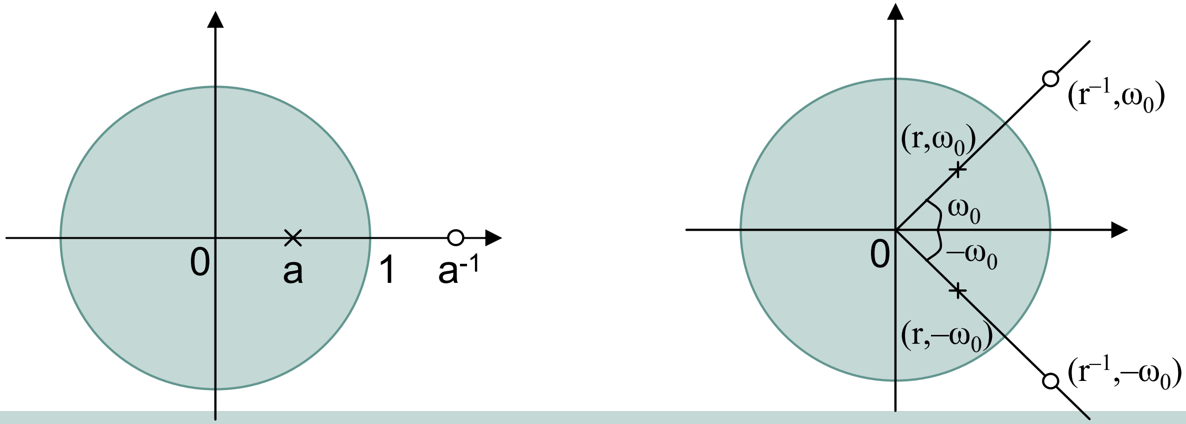
Hệ LTI và bộ lọc

- Bộ lọc Allpass
  - $|H(\omega)| = 1 \qquad (0 \le \omega \le \pi)$
  - Loại đơn giản nhất: $H(z) = z^{-k}$
  - Loại khác

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-N+k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \qquad a_0 \equiv 1, a_k \ real$$

$$A(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} \qquad a_0 \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad H(z) = z^{-N} \frac{A(z^{-1})}{A(z)}$$

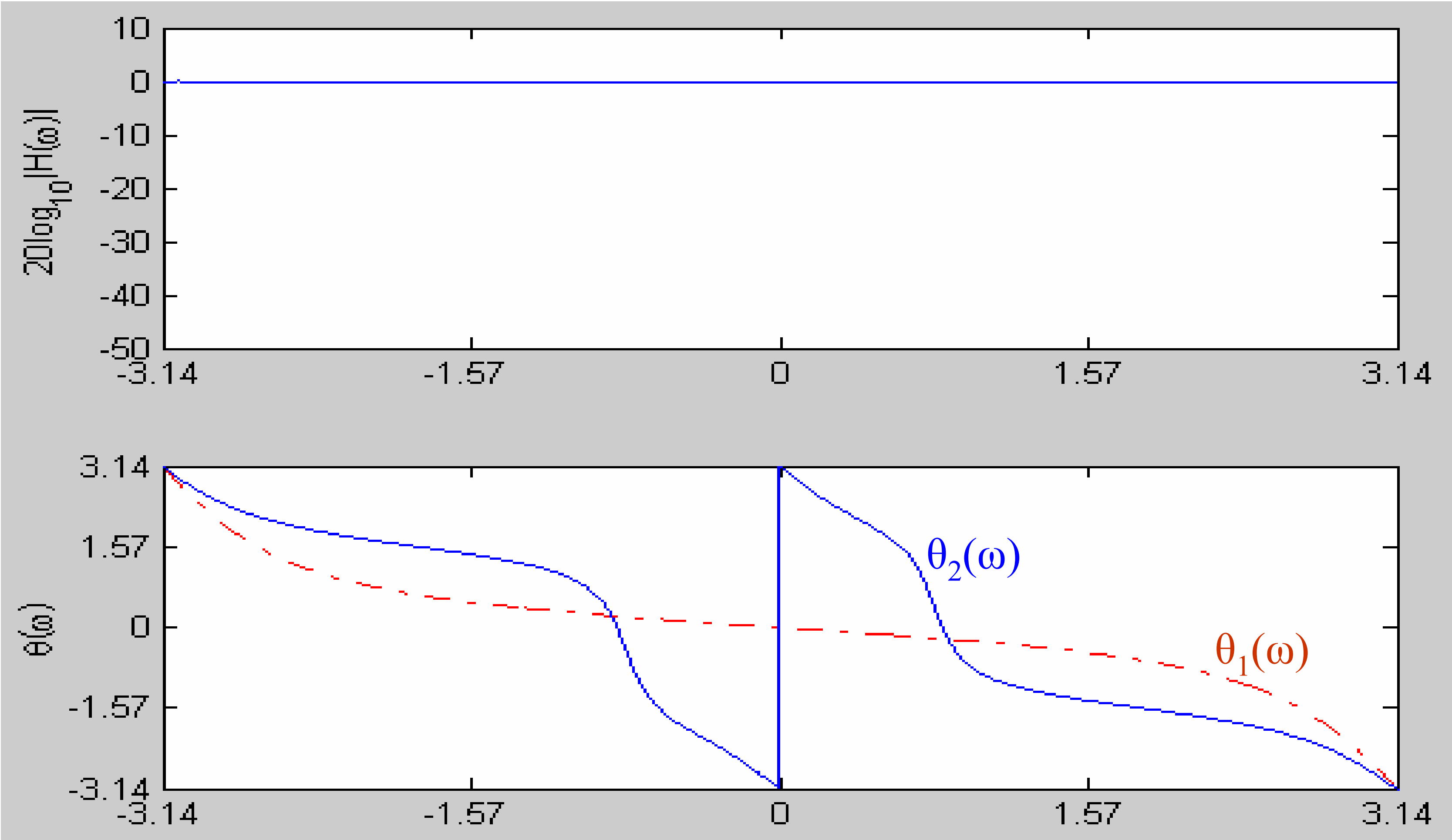
- Nếu z_0 là pole của H(z), thì $1/z_0$ là zero của H(z)



Hệ LTI và bộ lọc

$$H_1(z) = \frac{a + z^{-1}}{1 + az^{-1}} \qquad H_2(z) = \frac{r^2 + 2r\cos\omega_0 z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

a = 0.6
r = 0.9
$\omega_0 = \pi/4$



Hệ LTI và bộ lọc

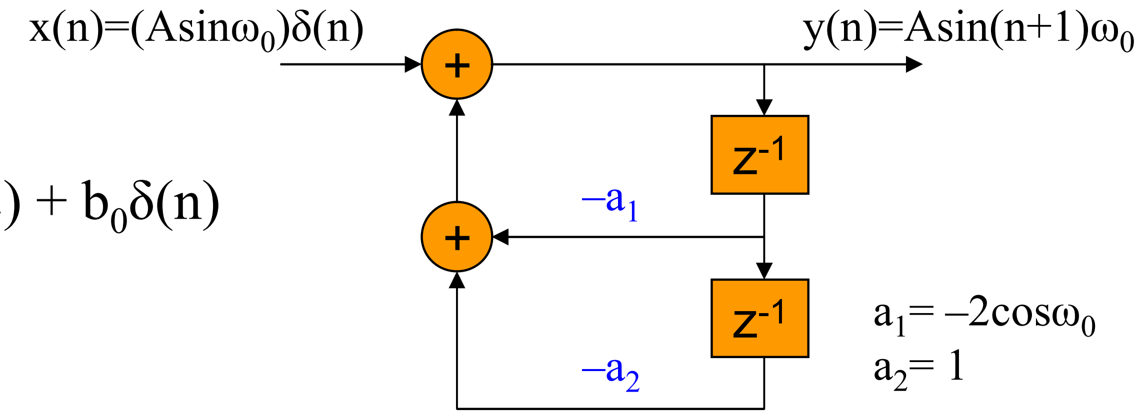
- Bộ dao động sin số
  - Bộ cộng hưởng 2 pole, trong đó các pole nằm trên vòng tròn đơn vị

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \qquad \begin{cases} a_1 = -2r\cos\omega_0 \\ a_2 = r^2 \end{cases}$$

  - Pole $p_{1,2} = re^{\pm j\omega_0}$ và đáp ứng xung đơn vị $h(n) = \frac{b_0 r^n}{\sin\omega_0}\sin(n+1)\omega_0 u(n)$
  - Nếu pole nằm trên vòng tròn đơn vị: r = 1 và $b_0 = A\sin\omega_0$

$$h(n) = A\sin(n+1)\omega_0 u(n)$$

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_0\delta(n)$$



Chương 5

BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC (DFT)

T.S. Đinh Đức Anh Vũ

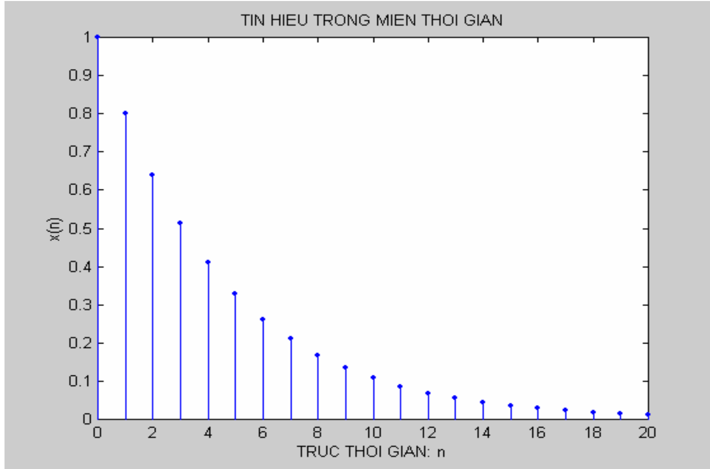
Faculty of Computer Science and Engineering
HCMC University of Technology
268, av. Ly Thuong Kiet,
District 10, HoChiMinh city
Telephone : (08) 864-7256 (ext. 5843)
Fax : (08) 864-5137
Email : anhvu@hcmut.edu.vn
http://www.cse.hcmut.edu.vn/~anhvu

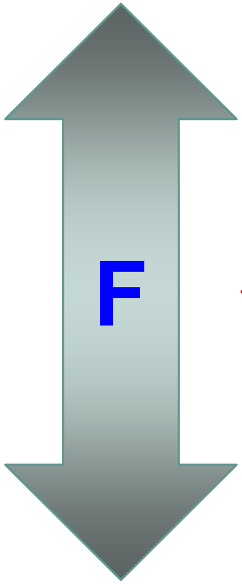
Giới thiệu về DFT

- Biến đổi Fourier liên tục

x(n)

$x(n) = 0.8^n u(n)$

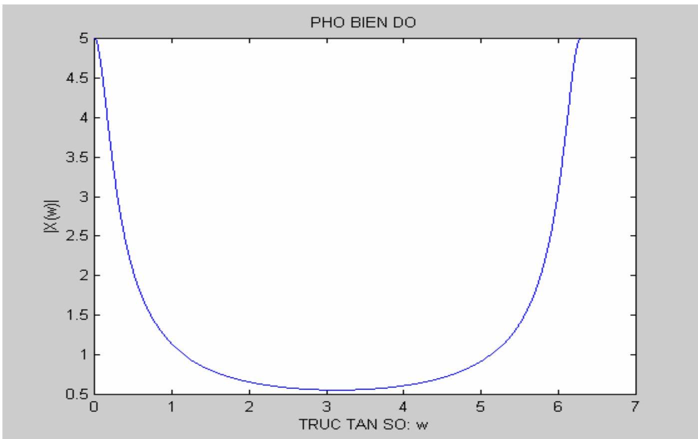


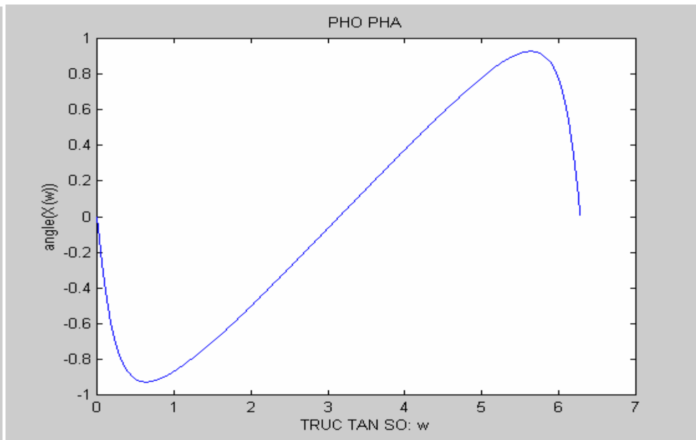


Miền thời gian

Miền tần số

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$





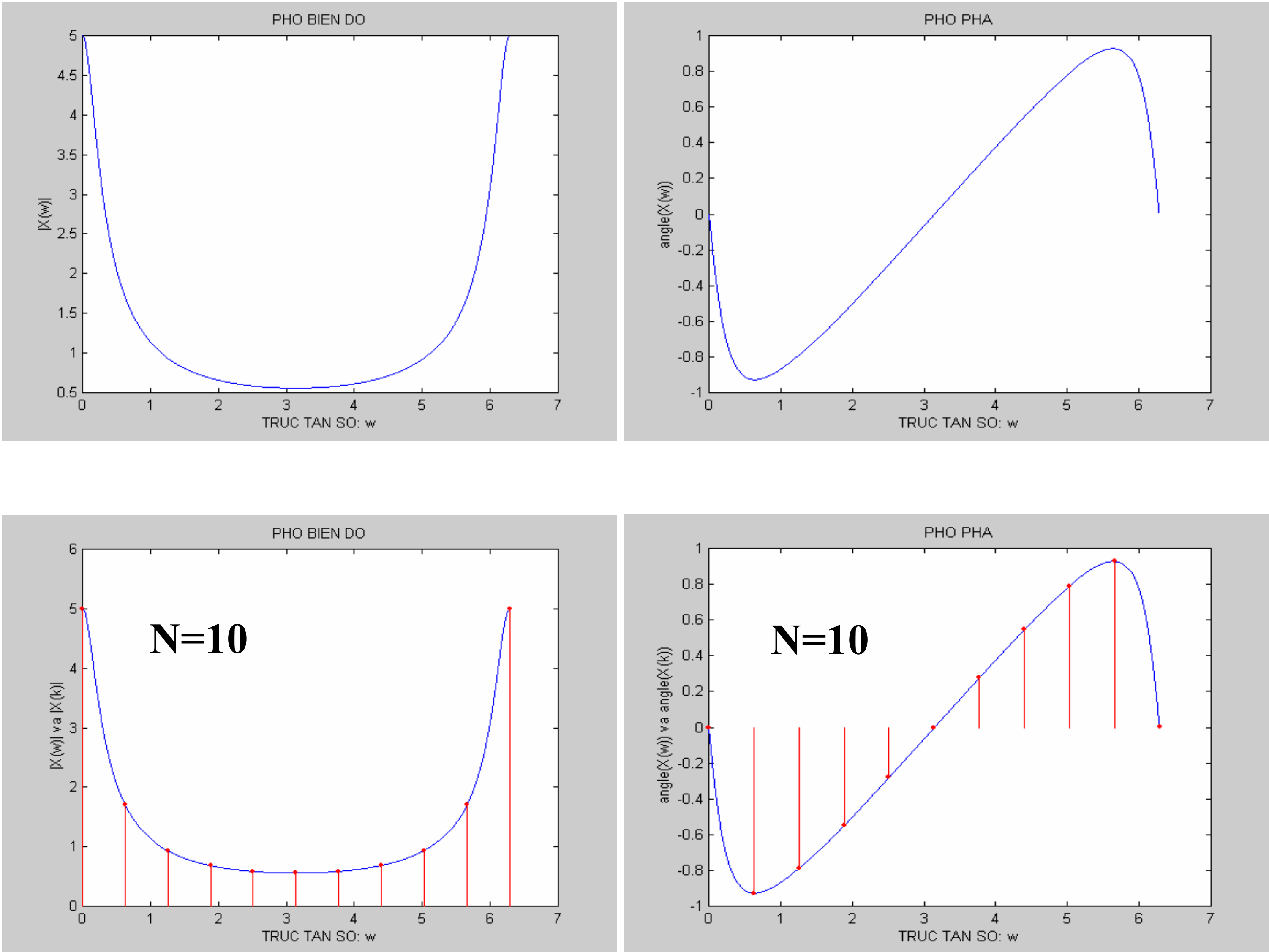
- Vấn đề: $X(\omega)$ liên tục theo tần số ω → không thích hợp cho việc tính toán trên máy tính

Lấy mẫu miền tần số

X(ω)

Lấy mẫu

$$X(k) \equiv X(\omega = \tfrac{2\pi}{N} k)$$



Lấy mẫu miền tần số

$$X(\omega)\Big|_{\omega=2\pi k/N} = X\left(\tfrac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$X(k) \quad = \Lambda + \sum_{n=-N}^{-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \Lambda$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \text{Thay n bằng (n-lN)}$$

$$\Rightarrow X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \text{với} \qquad x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$$

- T/h $x_p(n)$ – lặp chu kỳ của x(n) mỗi N mẫu – t/h tuần hoàn với chu kỳ cơ bản N

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

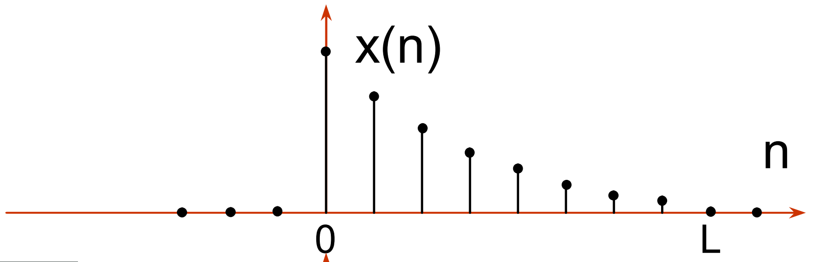
$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n)e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Lấy mẫu miền tần số

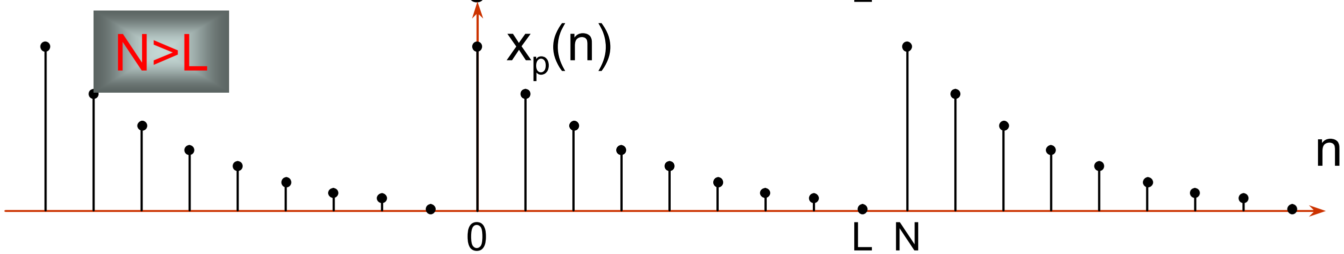
$$c_k = \frac{1}{N} X(k) \qquad\qquad k = 0,1,\ldots,N-1$$

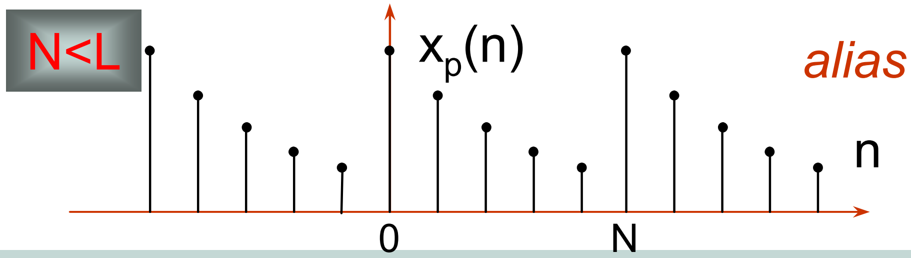
$$x_p(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad\qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

- Có thể phục hồi t/h $x_p(n)$ từ các mẫu của phổ $X(\omega)$



$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & others \end{cases}$$





Khi N≥L, x(n) có thể được khôi phục từ các mẫu phổ tần số tại $\omega_k = 2\pi k/N$

Lấy mẫu miền tần số

- Có thể phục hồi X(ω) từ các mẫu X(k) với k = 0, 1,…, N-1
  - Giả sử $N \geq L \rightarrow x(n) = x_p(n)$ khi $0 \leq n \leq N-1$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}\right]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\omega-2\pi k/N)n}\right]$$

$$P(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{\sin(\omega N/2)}{N\sin(\omega/2)}e^{-j\omega(N-1)/2}$$

$$\boxed{X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)P(\omega - \tfrac{2\pi}{N}k) \qquad N \geq L}$$

$$P(\tfrac{2\pi}{N}k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = 1,2,\ldots,N-1 \end{cases}$$

Lấy mẫu miền tần số

x(n)
có chiều dài L≤N

BĐ F

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Lấy mẫu

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) P(\omega - \omega_k)$$

$$P(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \qquad \omega_k = \frac{2\pi}{N} k$$

Phục hồi

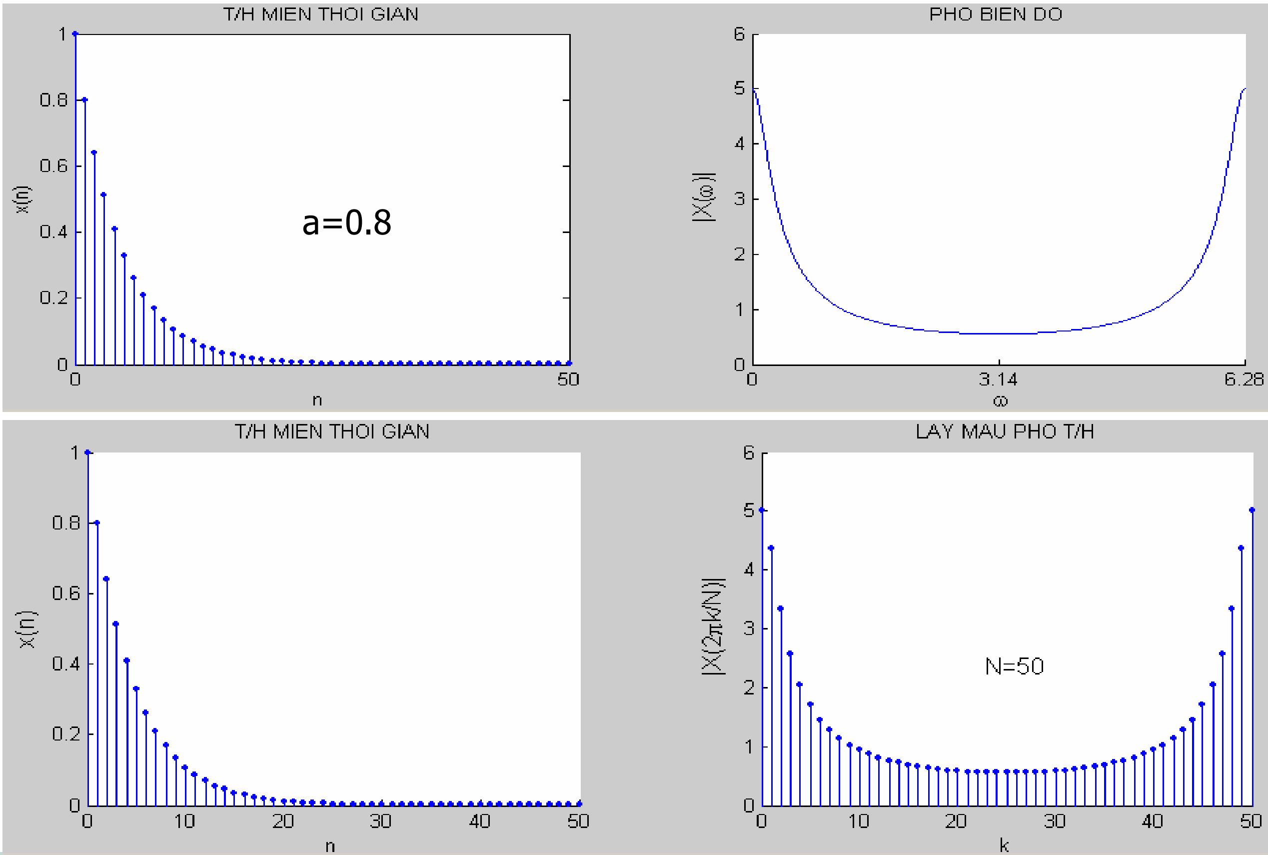
Phục hồi

Lấy mẫu miền tần số

- Ví dụ: $x(n) = a^n u(n)$, $0<a<1$
  - ✦ Phổ t/h được lấy mẫu tại các tần số $\omega_k = 2\pi k/N$, k=0, 1, …, N-1

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \qquad X(k) = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi k/N}}$$

$$\begin{aligned} x_p(n) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n - lN) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{0} a^{n-lN} = \frac{a^n}{1 - a^N} \end{aligned}$$



Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Chuỗi không tuần hoàn, năng lượng hữu hạn x(n)
- Các mẫu tần số X(2πk/N), k = 0, 1,…, N-1 không đặc trưng cho x(n) khi x(n) có chiều dài vô hạn
- Nó đặc trưng cho chuỗi tuần hoàn, chu kỳ N $x_p(n)$
- $x_p(n)$ là lặp tuần hoàn của x(n) nếu x(n) có chiều dài hữu hạn $L \leq N$
- Do đó, các mẫu tần số X(2πk/N), k = 0, 1,…, N-1 đặc trưng cho chuỗi chiều dài hữu hạn x(n); i.e. X(n) có thể được phục hồi từ các mẫu tần số {X(2πk/N)}
- $x(n) = x_p(n)$ trên một chu kỳ N (được đệm vào N-L zero). Mặc dù L mẫu của X(ω) có thể tái tạo lại được X(ω), nhưng việc đệm vào N-L zero giúp việc tính toán DFT N điểm của X(ω) đồng nhất hơn

DFT	IDFT
$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $k = 0,1,\ldots,N-1$	$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ $n = 0,1,\ldots,N-1$

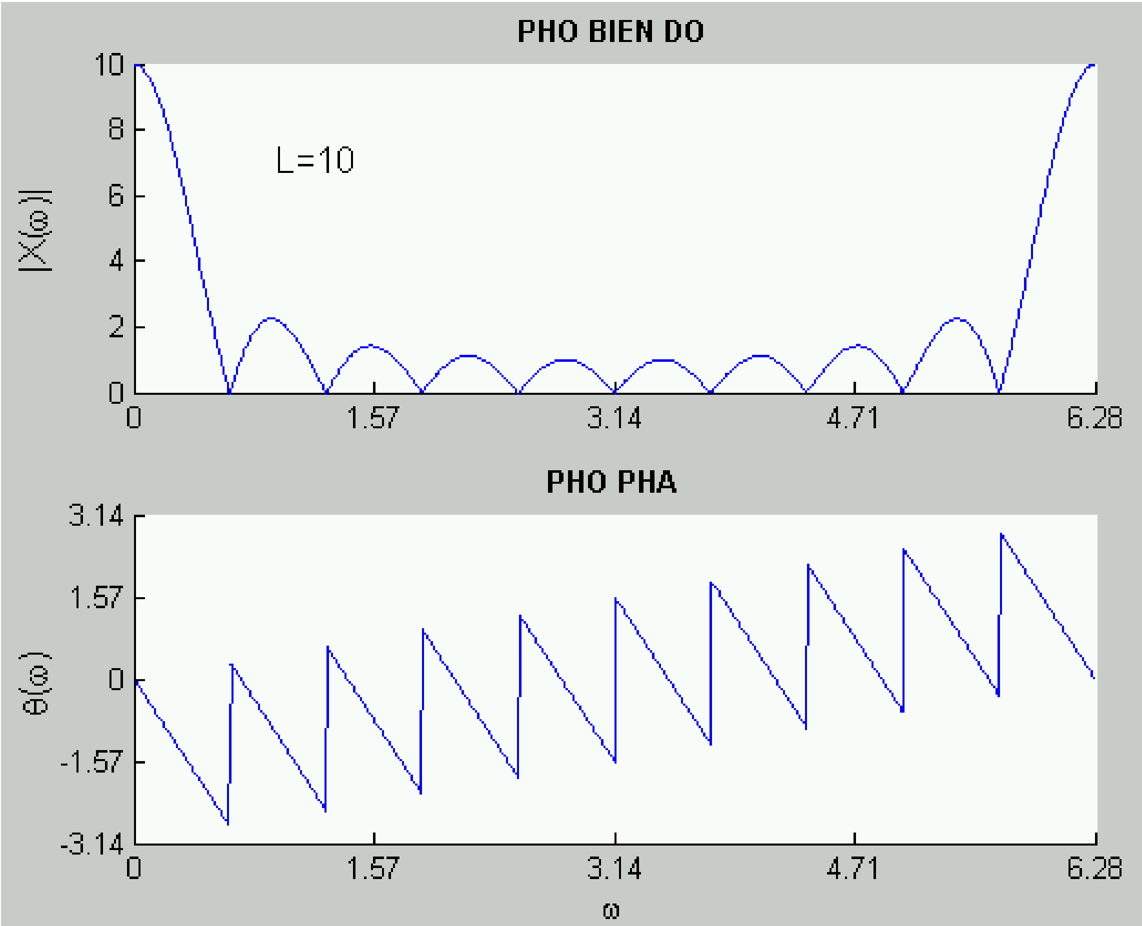
Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)

- Ví dụ: xác định DFT N điểm của chuỗi x(n) có độ dài L hữu hạn (N≥L)

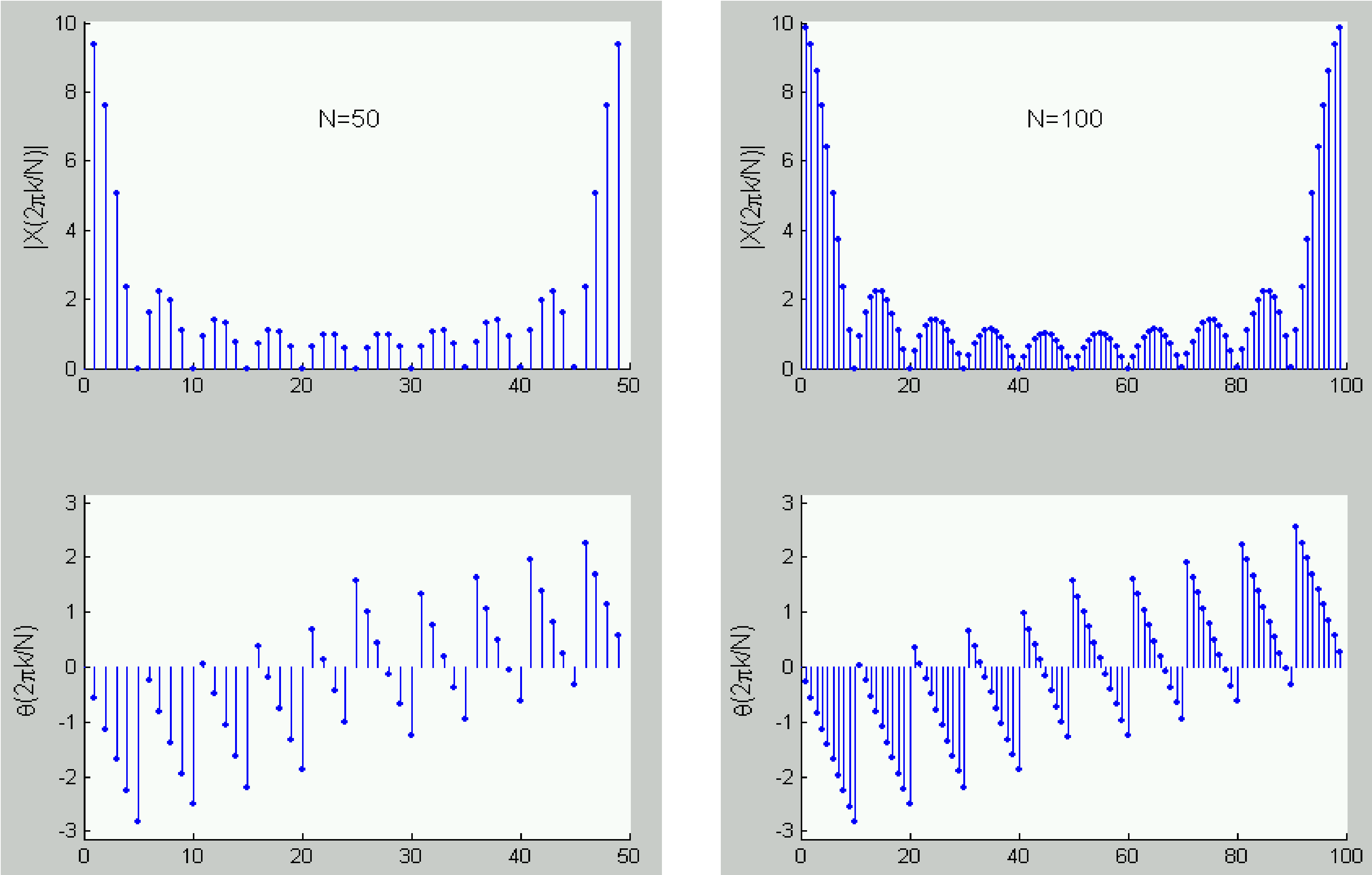
$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & others \end{cases}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1-e^{-j\omega L}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{\sin(\omega L/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega(L-1)/2}$$



Biến đổi Fourier rời rạc (DFT)



DFT – BĐ tuyến tính

DFT

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$k=0,1,\ldots,N-1$$

IDFT

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$n=0,1,\ldots,N-1$$

$$W_N=e^{-j2\pi/N}$$

Nghiệm thứ N của đơn vị

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

$$k=0,1,\ldots,N-1$$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$$

$$n=0,1,\ldots,N-1$$

Tính DFT một điểm
- Nhân phức: N
- Cộng phức: N-1

Tính DFT N điểm
- Nhân phức: N^2
- Cộng phức: N(N-1)

DFT – BĐ tuyến tính

$$x_N = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

Các mẫu miền thời gian

$$X_N = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

Các mẫu miền tần số

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Ma trận BĐ tuyến tính

- BĐ DFT N điểm

$$X_N = W_N x_N$$

$$x_N = W_N^{-1} X_N$$

$$x_N = \tfrac{1}{N} W_N^* X_N$$

$$W_N^{-1} = \tfrac{1}{N} W_N^*$$

$$W_N W_N^* = N I_N$$

W_N là ma trận đường chéo

DFT – Quan hệ với các phép BĐ khác

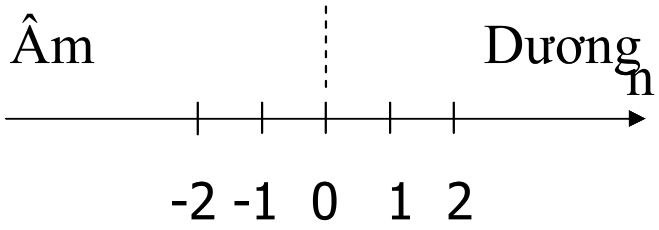
- Với hệ số Fourier của chuỗi chu kỳ

Chuỗi $x_p(n)$ tuần hoàn chu kỳ N		DFT N điểm của chuỗi x(n)
$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$ $$-\infty \le n \le \infty$$	X(k) = Nc_k	$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$ $$n = 0,1,\ldots,N-1$$
$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$ $$k = 0,1,\ldots,N-1$$	DFT N điểm cho chính xác phổ vạch của chuỗi tuần hoàn chu kỳ N	$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$ $$k = 0,1,\ldots,N-1$$

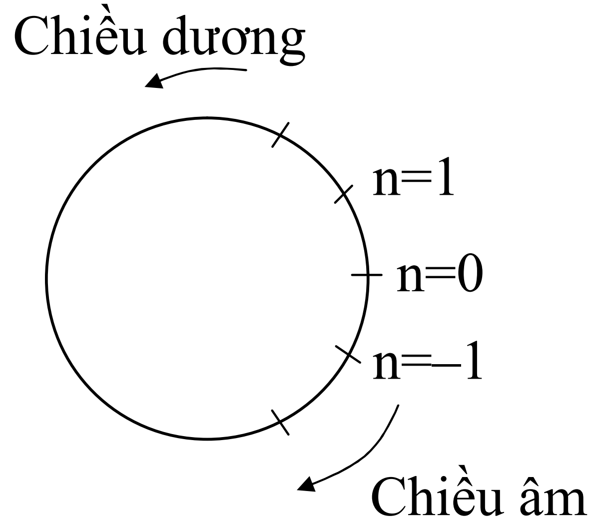
- Với BĐ Fourier của chuỗi không chu kỳ
  - DFT N điểm cho phổ vạch của chuỗi không chu kỳ x(n) nếu x(n) hữu hạn có độ dài L $\le$ N
- SV xem thêm mối quan hệ giữa DFT và BĐ Z; giữa DFT và hệ số Fourier của t/h LTTG

DFT – Biểu diễn tín hiệu

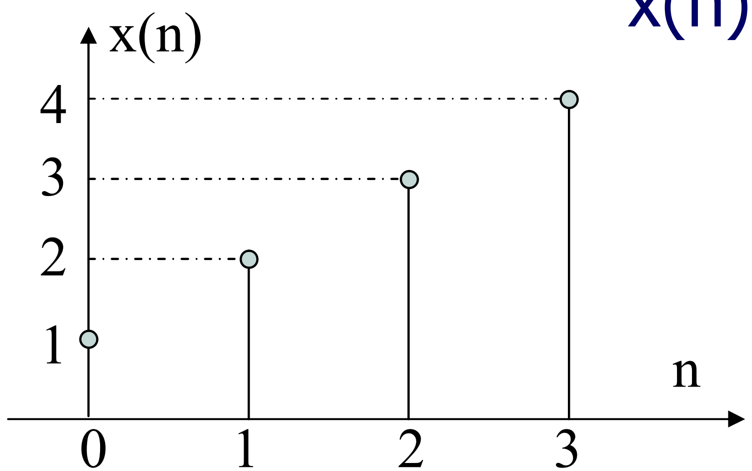
Dạng thẳng

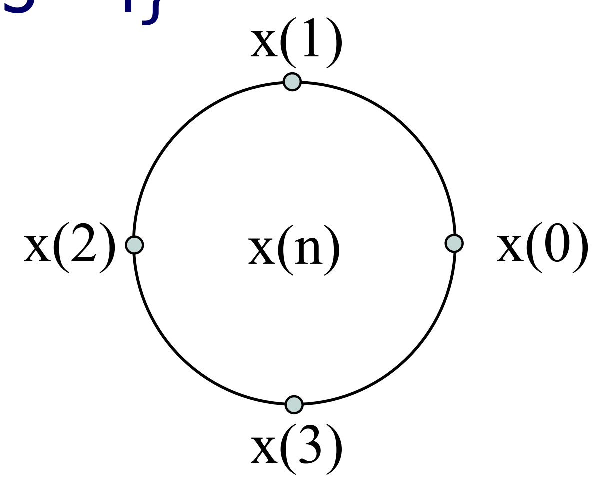


Dạng vòng



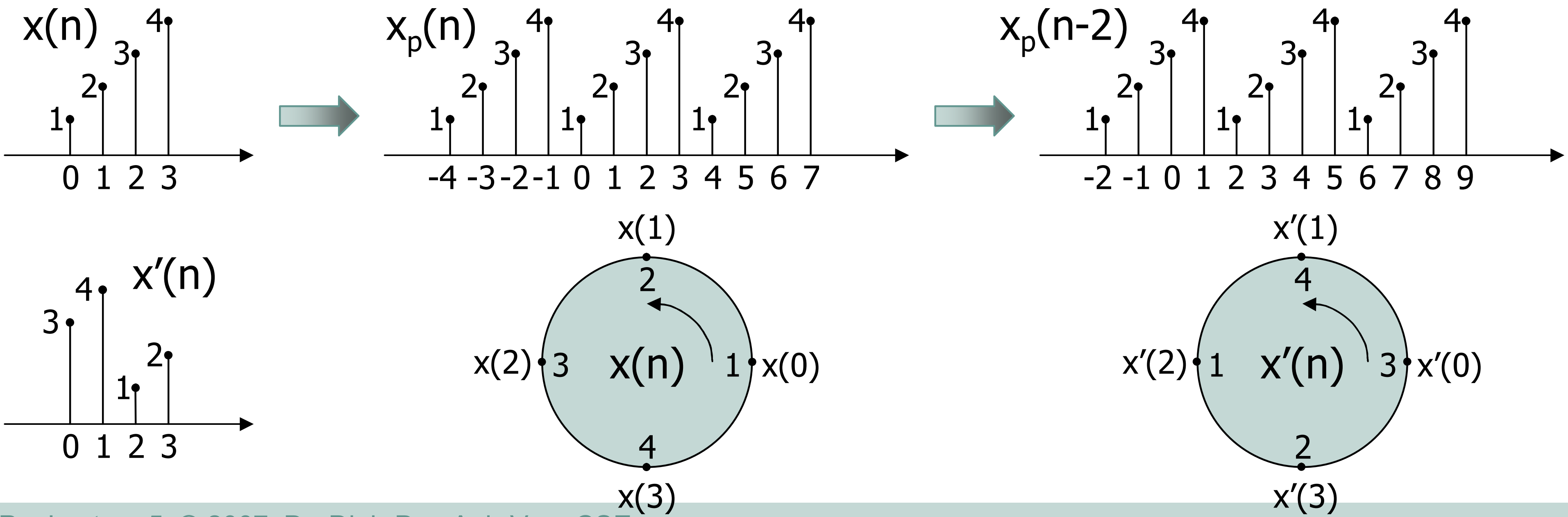
$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 3 \quad 4\}$





DFT – Biểu diễn tín hiệu theo vòng

- Chuỗi tuần hoàn chu kỳ N, mở rộng từ x(n) $x_p(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$
- Chuỗi dịch $x_p(n)$ đi k mẫu $x_p^{'}(n) = x_p(n-k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN-k)$
- Chuỗi có chiều dài hữu hạn từ $x'_p(n)$ $x'(n) = \begin{cases} x_p^{'}(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$
- Quan hệ giữa x(n) và x'(n): dịch vòng x'(n) = x(n-k, MOD N) ≡ $x((n-k))_N$



DFT – Tính đối xứng vòng

- Phép dịch vòng của một chuỗi N điểm tương đương với phép dịch tuyến tính của chuỗi mở rộng tuần hoàn của nó
- Chuỗi N điểm là *chẵn* theo vòng nếu nó đối xứng qua điểm 0 trên vòng tròn
  - i.e. $x(N - n) = x(n), 0 \le n \le N - 1$
- Chuỗi N điểm là *lẻ* theo vòng nếu nó phản đối xứng qua điểm 0 trên vòng tròn
  - i.e. $x(N - n) = - x(n), 0 \le n \le N - 1$
- Đảo theo thời gian của chuỗi N điểm: đảo các mẫu của chuỗi quanh điểm 0 trên vòng tròn
  - i.e. $x((- n))_N = x(N - n), 0 \le n \le N - 1$
  - Phép đảo được thực hiện bằng cách vẽ x(n) theo chiều kim đồng hồ

DFT – Tính đối xứng vòng

- Giả sử x(n) và BĐ DFT X(k) là t/h phức
  - $x(n) = x_R(n) + jx_I(n),\ 0 \le n \le N-1$
  - $X(k) = X_R(k) + jX_I(k),\ 0 \le k \le N-1$

$$\begin{cases} X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n)\cos\frac{2\pi kn}{N} + x_I(n)\sin\frac{2\pi kn}{N} \right] \\ X_I(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n)\sin\frac{2\pi kn}{N} - x_I(n)\cos\frac{2\pi kn}{N} \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_R(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k)\cos\frac{2\pi kn}{N} - X_I(k)\sin\frac{2\pi kn}{N} \right] \\ x_I(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \left[X_R(k)\sin\frac{2\pi kn}{N} + X_I(k)\cos\frac{2\pi kn}{N} \right] \end{cases}$$

- Nếu x(n) thực: X(N-k) = X*(k) = X(–k)

$$|X(N-k)| = |X(k)| \quad \text{và} \quad \angle X(N-k) = -\angle X(k)$$

- Nếu x(n) thực và chẵn: $x(n) = x(N-n) \rightarrow X_I(k) = 0$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\frac{2\pi kn}{N} \qquad x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\cos\frac{2\pi kn}{N}$$

- Nếu x(n) thực và lẻ: $x(n) = -x(N-n) \rightarrow X_R(k) = 0$

$$X(k) = -j\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\frac{2\pi kn}{N} \qquad x(n) = j\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\sin\frac{2\pi kn}{N}$$

- Nếu x(n) thuần ảo: $x(n) = jx_I(n)$

$$X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_I(n)\sin\frac{2\pi kn}{N} \qquad X_I(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_I(n)\cos\frac{2\pi kn}{N}$$

DFT – Tính chất

- Tuần hoàn

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(n) = x(n+N) & \forall n \\ X(k) = X(k+N) & \forall k \end{cases}$$

- Tuyến tính

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_1x_1(n) + a_2x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$$

- Tổng chập vòng

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1(n) \, N \, x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k)X_2(k)$$

N Tích chập vòng N điểm

$$x_1(n) \, N \, x_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2((n-k))_N \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

DFT – Tích chập vòng

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k) \end{cases}$$

$$x(m) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k) = X_1(k)X_2(k)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N & a = 1 \\ \dfrac{1-a^N}{1-a} & a \neq 1 \end{cases}$$

$$Trong\ đó \qquad a = e^{j\frac{2\pi}{N}(m-n-l)}$$

$$a = 1, khi: m-n-l = pN, p \in Z$$

$$a \neq 1 \Rightarrow a^N = e^{j2\pi(m-n-l)} = 1 \Rightarrow 1-a^N = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} a^k = \begin{cases} N & m-n-l = pN \Leftrightarrow l = ((m-n))_N \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(m) &= IDFT\{X(k)\} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1(k)X_2(k)e^{j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right]\left[\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l)e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}\right]e^{j\frac{2\pi}{N}km} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)\sum_{l=0}^{N-1} x_2(l)\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k(m-n-l)} \end{aligned}$$

$$x(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2((m-n))_N \qquad m = 0,1,\ldots,N-1$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2((n-k))_N \qquad n = 0,1,\ldots,N-1$$

DFT – Tính chất

- Đảo vòng theo thời gian

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$

$$\Rightarrow x((-n))_N = x(N-n) \xleftrightarrow{DFT_N} X((-k))_N = X(N-k)$$

- Dịch vòng theo thời gian

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$

$$\Rightarrow x((n-l))_N \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)e^{-j2\pi kl/N}$$

- Dịch vòng theo tần số

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$

$$\Rightarrow x(n)e^{j2\pi nl/N} \xleftrightarrow{DFT_N} X((k-l))_N$$

- Liên hợp phức

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^*(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X^*((-k))_N = X^*(N-k) \\ x^*((-n))N = x^*(N-n) \xleftrightarrow{DFT_N} X^*(k) \end{cases}$$

DFT – Tính chất

- Tương quan vòng

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$y(n) \xleftrightarrow{DFT_N} Y(k)$$
$$\Rightarrow \tilde{r}_{xy}(l) \xleftrightarrow{DFT_N} \tilde{R}_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$$

với $\tilde{r}_{xy}(l) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*((n-l))_N$

- Nhân 2 chuỗi

$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_1(k) \\ x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X_2(k) \end{cases}$$
$$\Rightarrow x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{DFT_N} \tfrac{1}{N} X_1(k) \, N \, X_2(k)$$

- Định lý Parseval

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X(k)$$
$$y(n) \xleftrightarrow{DFT_N} Y(k)$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

DFT – Lọc tuyến tính

- $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$
  - ✦ Hàm liên tục theo tần số ω
  - ✦ Khó thực hiện trên các máy tính số
  - → DFT: một cách tính hiệu qủa của tổng chập miền thời gian
- Lọc tuyến tính
  - ✦ Tín hiệu ngắn

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

x(n) chiều dài = L (n=0,1,…,L-1)
h(n) chiều dài = M (n=0,1,…,M-1)

y(n) chiều dài N = M+L-1

Số mẫu phổ (tần số) cần thiết để biểu diễn duy nhất chuỗi y(n) ≥ L+M-1

Y(k) = H(k)X(k), k=0,1,…,N-1

H(k), X(k): DFT N điểm của h(n), x(n)

(các số 0 được đệm vào để tăng kích thước chuỗi lên N)

$y(n) = \mathrm{IDFT}_N\{Y(k)\}$

- Tổng chập vòng N điểm của h(n) và x(n) tương đương với tổng chập tuyến tính của h(n) với x(n)
- DFT có thể được dùng để lọc tuyến tính (bằng cách đệm thêm các số 0 vào chuỗi tương ứng)

DFT – Lọc tuyến tính

- Tóm tắt

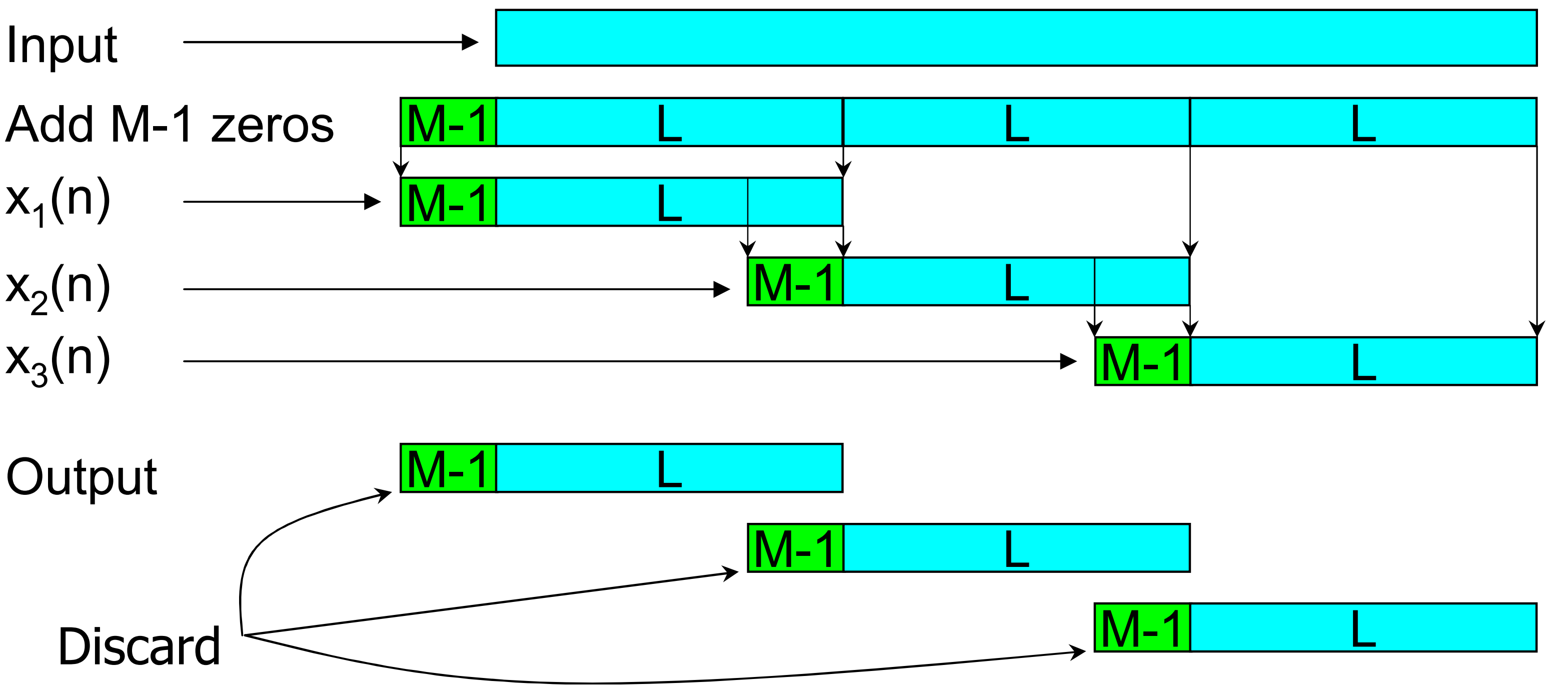
$$x(n) \xrightarrow{\mathrm{DFT}_N} X(k)$$
$$h(n) \xrightarrow{\mathrm{DFT}_N} H(k)$$
$$X(k),\ H(k) \rightarrow \boxed{\times} \rightarrow Y(k) = X(k)H(k) \xrightarrow{\mathrm{IDFT}_N} y(n)$$

- Tín hiệu nhập dài: chia nhỏ x(n) thành từng block có độ dài cố định
  - ✦Overlap-Save
  - ✦Overlap-Add

- Giả thiết
  - ✦Bộ lọc có h(n): chiều dài M
  - ✦T/h nhập x(n): được chia nhỏ thành từng block có chiều dài L >> M

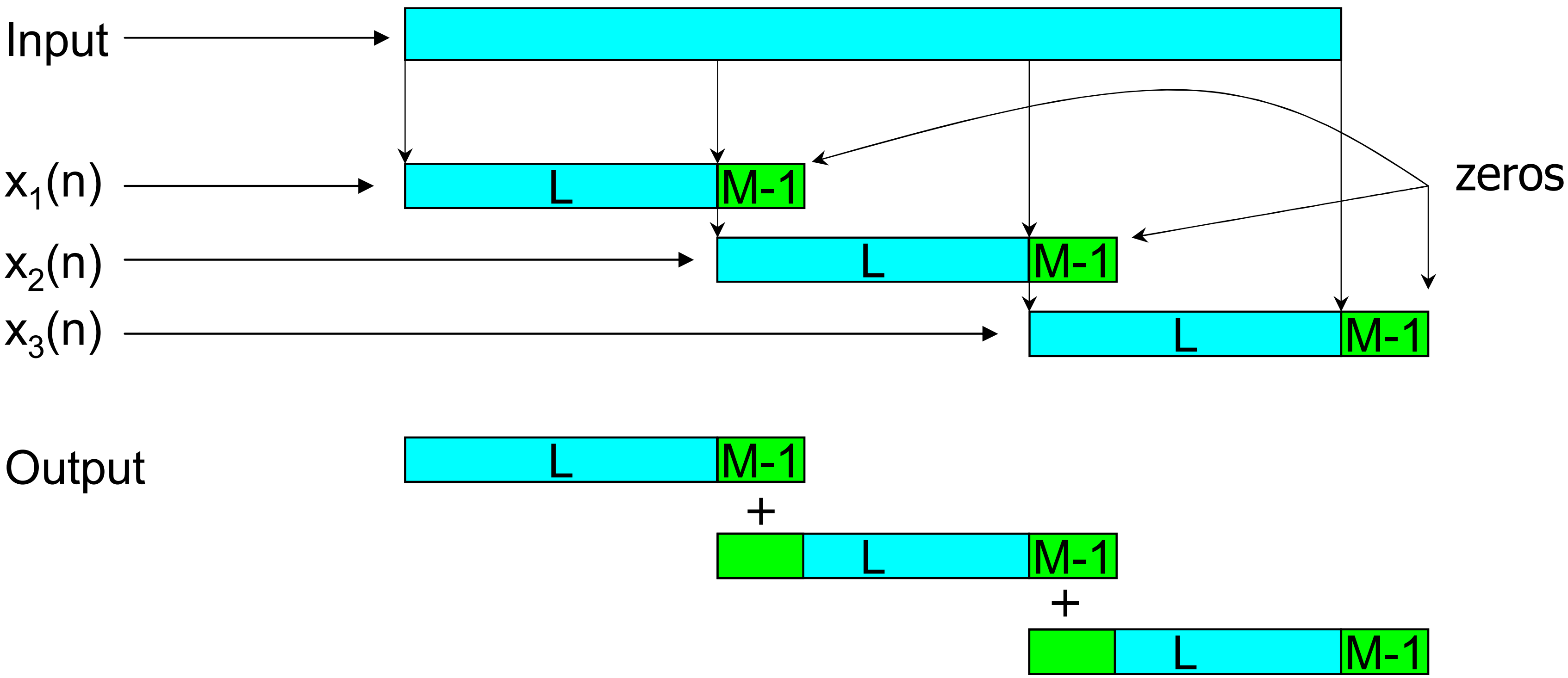
Lọc tuyến tính – Overlap-Save

- DFT$_N$ và IDFT$_N$ với N = L+M–1
- Mỗi block dữ liệu được xử lý bao gồm (M – 1) điểm của block trước và L điểm mới của t/h nhập
  - M-1 điểm của block đầu tiên được set bằng 0
- Đáp ứng xung của bộ lọc được đệm thêm (L – 1) số 0 để tăng chiều dài lên N
  - DFT của N điểm của h(n) được tính một lần duy nhất



Lọc tuyến tính – Overlap-Add

- Đệm thêm (M-1) số 0 vào mỗi block dữ liệu đầu vào



Phương pháp hiệu quả hơn dùng để xác định bộ lọc tuyến tính được trình bày trong chương 6

DFT – Phân tích tần số

- T/h ngắn
  - Tính DFT từ x(n)
- T/h dài
  - Cửa sổ hoá

x(n): t/h cần phân tích
Giới hạn chiều dài chuỗi một khoảng L mẫu
⇔ Nhân chuỗi với cửa sổ chiều dài L

$x_w(n) = x(n)w(n)$
w(n): hàm cửa sổ

Hàm cửa sổ có chiều dài L
chỉ phân biệt được
nếu các tần số cách nhau
ít nhất một đoạn

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{L}$$

Cửa sổ chữ nhật

$$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Cửa sổ Hanning

$$w(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{L-1} n\right) & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

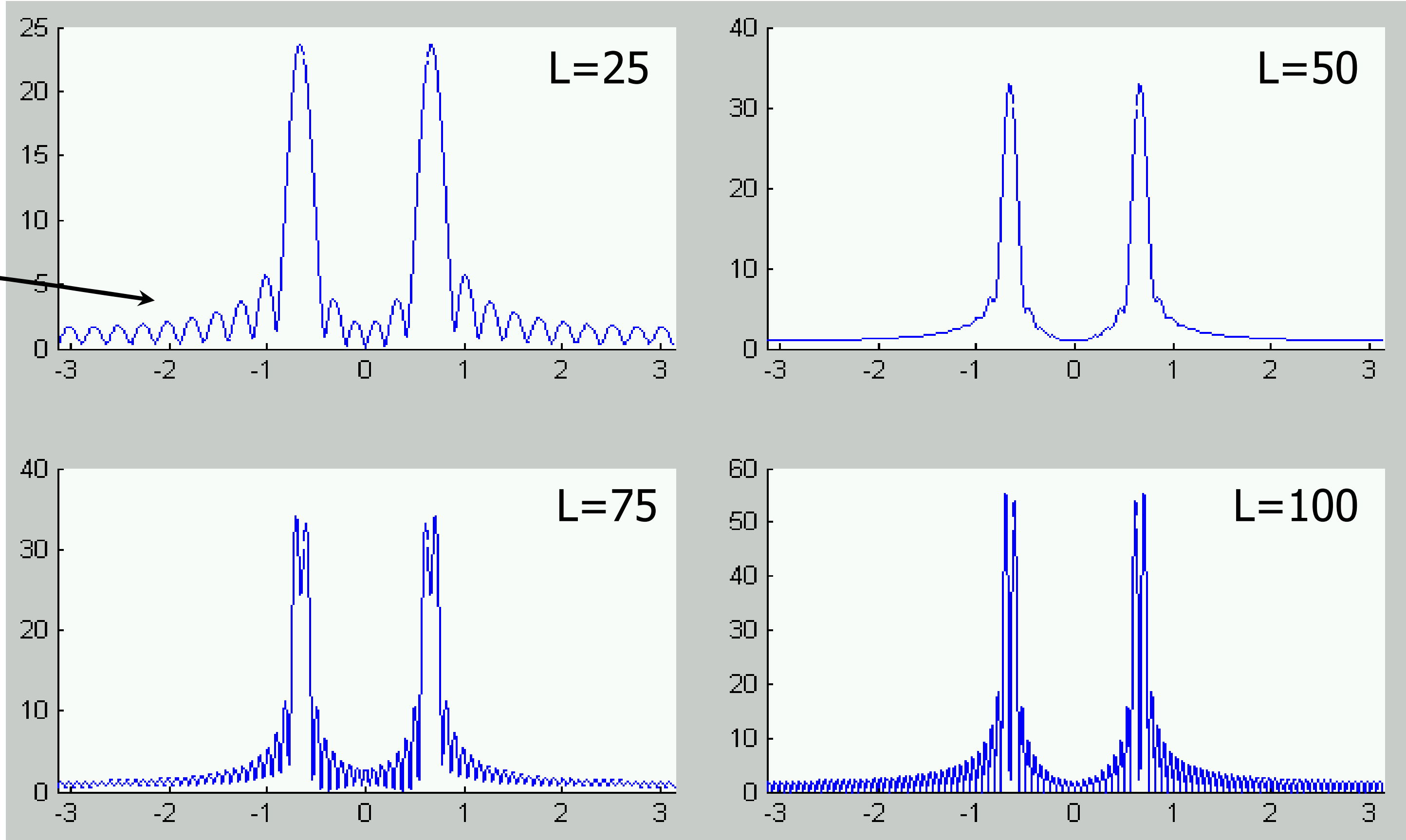
DFT – Phân tích tần số

- Ví dụ $x(n) = \cos\omega_1 n + \cos\omega_2 n \qquad w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$

$$\hat{X}(\omega) = \tfrac{1}{2}\left[W(\omega - \omega_1) + W(\omega - \omega_2) + W(\omega + \omega_1) + W(\omega + \omega_2)\right]$$

$\omega_1 = 0.2\pi$
$\omega_2 = 0.22\pi$

Rò rỉ công suất



BK
TP.HCM

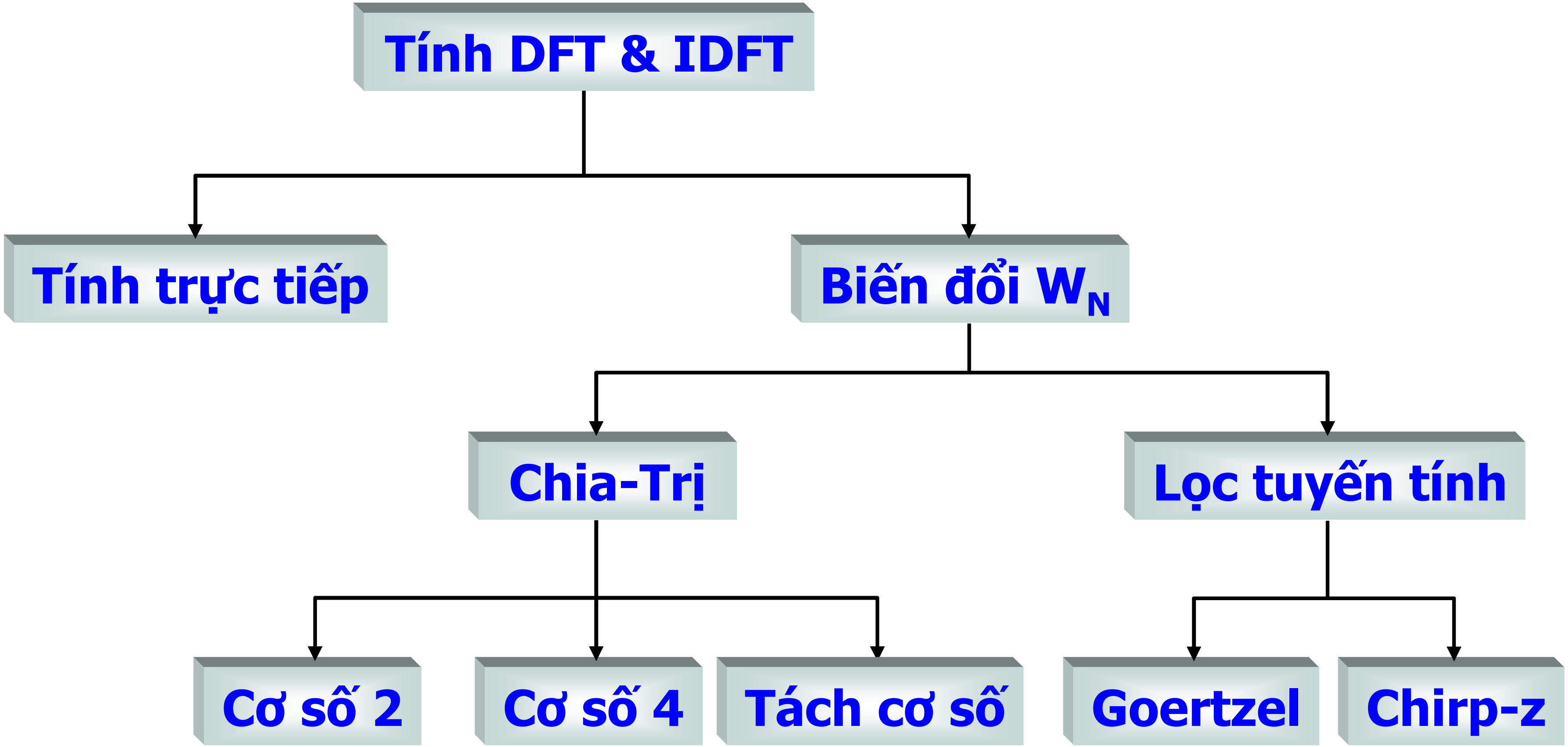
Chương 6

BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH (FFT)

T.S. Đinh Đức Anh Vũ

Faculty of Computer Science and Engineering
HCMC University of Technology
268, av. Ly Thuong Kiet,
District 10, HoChiMinh city
Telephone : (08) 864-7256 (ext. 5843)
Fax : (08) 864-5137
Email : anhvu@hcmut.edu.vn
http://www.cse.hcmut.edu.vn/~anhvu

Nội dung



Tính DFT & IDFT
Tính trực tiếp
Biến đổi W_N
Chia-Trị
Lọc tuyến tính
Cơ số 2
Cơ số 4
Tách cơ số
Goertzel
Chirp-z

DFT & IDFT

- Tính DFT: xác định chuỗi N giá trị phức {X(k)} khi biết trước chuỗi {x(n)} chiều dài N

DFT $$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad 0 \le k \le N-1$$

IDFT $$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \qquad 0 \le n \le N-1$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

  - Giải thuật tính DFT cũng được áp dụng cho việc tính IDFT
- Tính trực tiếp
  - N^2 phép nhân phức
  - N(N-1) phép cộng phức
  - → Độ phức tạp : $O(N^2)$
- Biến đổi W_N
  - $2N^2$ phép tính lượng giác
  - $4N^2$ phép nhân số thực
  - 4N(N-1) phép cộng số thực
  - Một số phép toán chỉ số và địa chỉ để nạp x(n)

$$\begin{cases} X_R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + x_I(n) \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right] \\ X_I(k) = -\sum_{n=0}^{N-1} \left[x_R(n) \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - x_I(n) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right] \end{cases}$$

Giải thuật tính DFT tối ưu mỗi phép toán theo những cách khác nhau

Đối xứng	$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$
Tuần hoàn	$W_N^{k+N} = W_N^k$

Phương pháp chia-trị

- Nguyên tắc: phân rã nhỏ việc tính DFT N điểm thành việc tính các DFT kích thước nhỏ hơn → các giải thuật FFT
- Phương pháp
  - Giả sử N=L.M
  - Lưu trữ x(n) vào mảng 2 chiều LxM (l: chỉ số hàng, m: chỉ số cột)

n →	0	1	2	…	N-1
	x(0)	x(1)	x(2)	…	x(N-1)

m \ l	0	1	…	M-1
0	x(0,0)	x(0,1)	…	x(0,M-1)
1	x(1,0)	x(1,1)	…	x(1,M-1)
2	x(2,0)	x(2,1)	…	x(2,M-1)
	…	…	…	…
L-1	x(L-1,0)	x(L-1,1)	…	x(L-1,M-1)

  - Cách lưu trữ
    - Theo dòng n = Ml + m
    - Theo cột n = l + mL
  - Tương tự, các giá trị DFT X(k) tính được cũng sẽ được lưu trữ trong ma trận LxM (p: chỉ số hàng, q: chỉ số cột)
    - Theo dòng k = Mp + q
    - Theo cột k = p + qL

Phương pháp chia-trị

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn} \qquad 0\le k\le N-1$$

<u>Với:</u>

x(n) : theo cột
X(k) : theo hàng

$$X(p,q)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{L-1}x(l,m)W_N^{(Mp+q)(mL+l)}$$

$$W_N^{(Mp+q)(mL+l)}=W_N^{MLmp}W_N^{mLq}W_N^{Mpl}W_N^{lq}$$

$$W_N^{Nmp}=1$$

$$W_N^{mqL}=W_{N/L}^{mq}=W_M^{mq}$$

$$W_N^{Mpl}=W_{N/M}^{pl}=W_L^{pl}$$

$$X(p,q)=\sum_{l=0}^{L-1}\left\{W_N^{lq}\left[\sum_{m=0}^{M-1}x(l,m)W_M^{mq}\right]\right\}W_L^{lp}$$

1 — **DFT M điểm F(l,q)**

2 — **G(l,q)**

3 — **DFT L điểm X(p,q)**

(1): Tính L DFT M điểm
- ✦ Nhân phức : LM^2
- ✦ Cộng phức : LM(M-1)

(2): Tính G(l,q)
- ✦ Nhân phức : LM

(3): Tính X(p,q)
- ✦ Nhân phức : ML^2
- ✦ Cộng phức : ML(L-1)

➔ Độ phức tạp
- ✦ Nhân phức : N(M+L+1)
- ✦ Cộng phức : N(M+L-2)

Phương pháp chia-trị

- Hiệu quả

PP tính trực tiếp
- Nhân phức : N^2
- Cộng phức : $N(N-1)$

PP chia-trị
- Nhân phức : $N(M+L+1)$
- Cộng phức : $N(M+L-2)$

$N=1000 \rightarrow L=2, M=500$

10^6 nhân phức $\rightarrow$ 503,000 (~ N/2)

- PP chia-trị rất hiệu quả khi $N= r_1 r_2 r_3 \ldots r_v$
  - Phân rã nhỏ hơn đến (v-1) lần
- Giải thuật

$n = l + mL$

$k = Mp + q$

Giải thuật 1

1. Lưu trữ t/h theo cột
2. Tính DFT M điểm của mỗi hàng
3. Nhân ma trận kết quả với hệ số pha W_N^{lq}
4. Tính DFT L điểm của mỗi cột
5. Đọc ma trận kết quả theo hàng

$n = Ml + m$

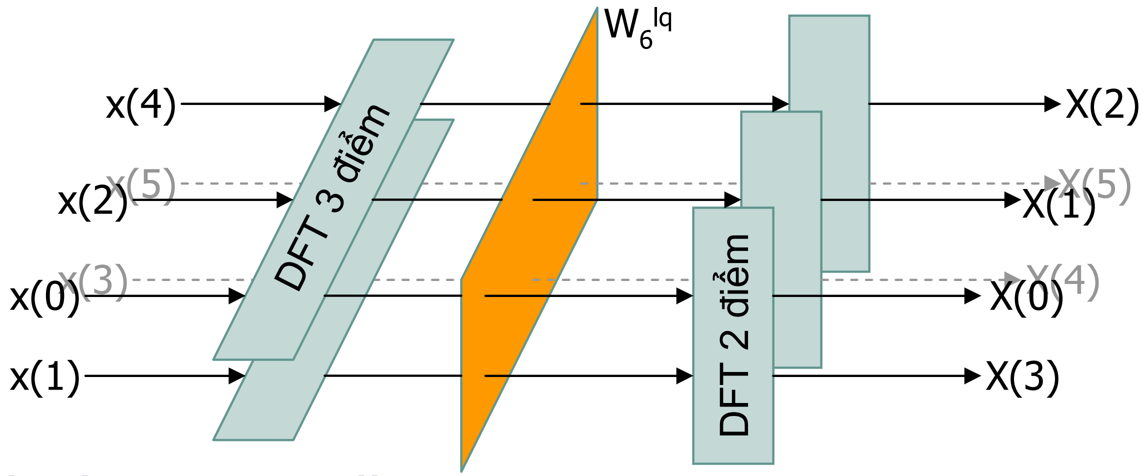
$k = qL + p$

Giải thuật 2

1. Lưu trữ t/h theo hàng
2. Tính DFT L điểm của mỗi cột
3. Nhân ma trận kết quả với hệ số pha W_N^{pm}
4. Tính DFT M điểm của mỗi hàng
5. Đọc ma trận kết quả theo cột

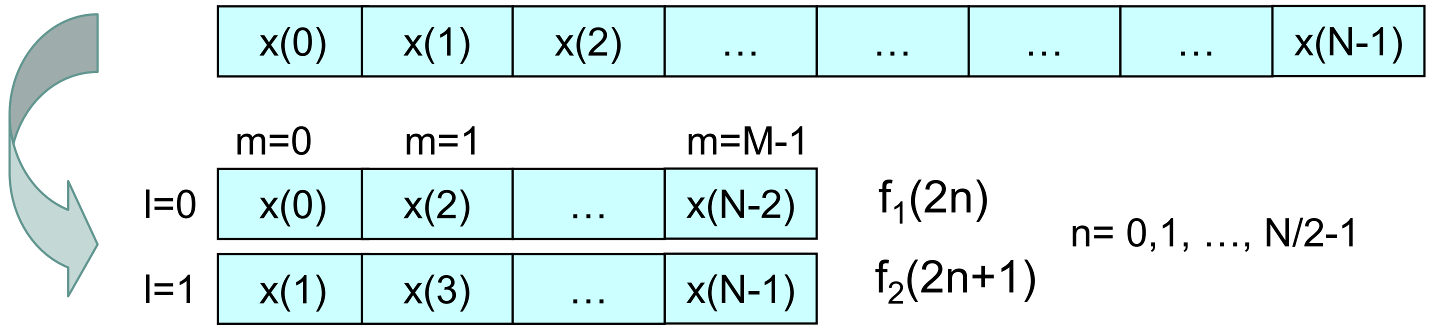
Phương pháp chia-trị

- Mô hình tính toán DFT 6 điểm thông qua việc tính DFT 3 điểm và DFT 2 điểm



- Giải thuật tính FFT cơ số 2
  - Nếu $N = r_1 r_2 r_3 \ldots r_v = r^v \rightarrow$ mô hình tính DFT có cấu trúc đều (chỉ dùng 1 DFT r điểm)
  - $r = 2 \rightarrow$ FFT cơ số 2
  - Chọn $M = N/2$ và $L = 2$

Giải thuật
chia theo thời gian



FFT cơ số 2

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad k = 0,1,\ldots, N-1$$

$$= \sum_{n\ even} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n\ old} x(n) W_N^{kn}$$

$$= \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m) W_N^{2mk} + \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x(2m+1) W_N^{k(2m+1)}$$

$$W_N^2 = W_{N/2}$$

$$X(k) = \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_1(m) W_{N/2}^{km} + W_N^k \sum_{m=0}^{(N/2)-1} f_2(m) W_{N/2}^{km}$$

$$= F_1(k) + W_N^k F_2(k) \qquad k = 0,1,\ldots, N-1$$

$$f_1(m) \xleftrightarrow[DFT_{N/2}]{} F_1(k) \qquad k = 0,1,\ldots, N/2$$

$$f_2(m) \xleftrightarrow[DFT_{N/2}]{} F_2(k) \qquad k = 0,1,\ldots, N/2$$

$F_1(k)$, $F_2(k)$ tuần hoàn chu kỳ N/2

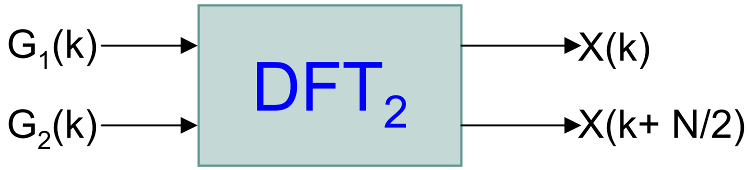
$F_1(k+ N/2) = F_1(k)$
$F_2(k+ N/2) = F_2(k)$

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

$$\begin{cases} X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k) & k = 0,1,..,\frac{N}{2}-1 \\ X(k+\frac{N}{2}) = F_1(k) - W_N^k F_2(k) & k = 0,1,..,\frac{N}{2}-1 \end{cases}$$

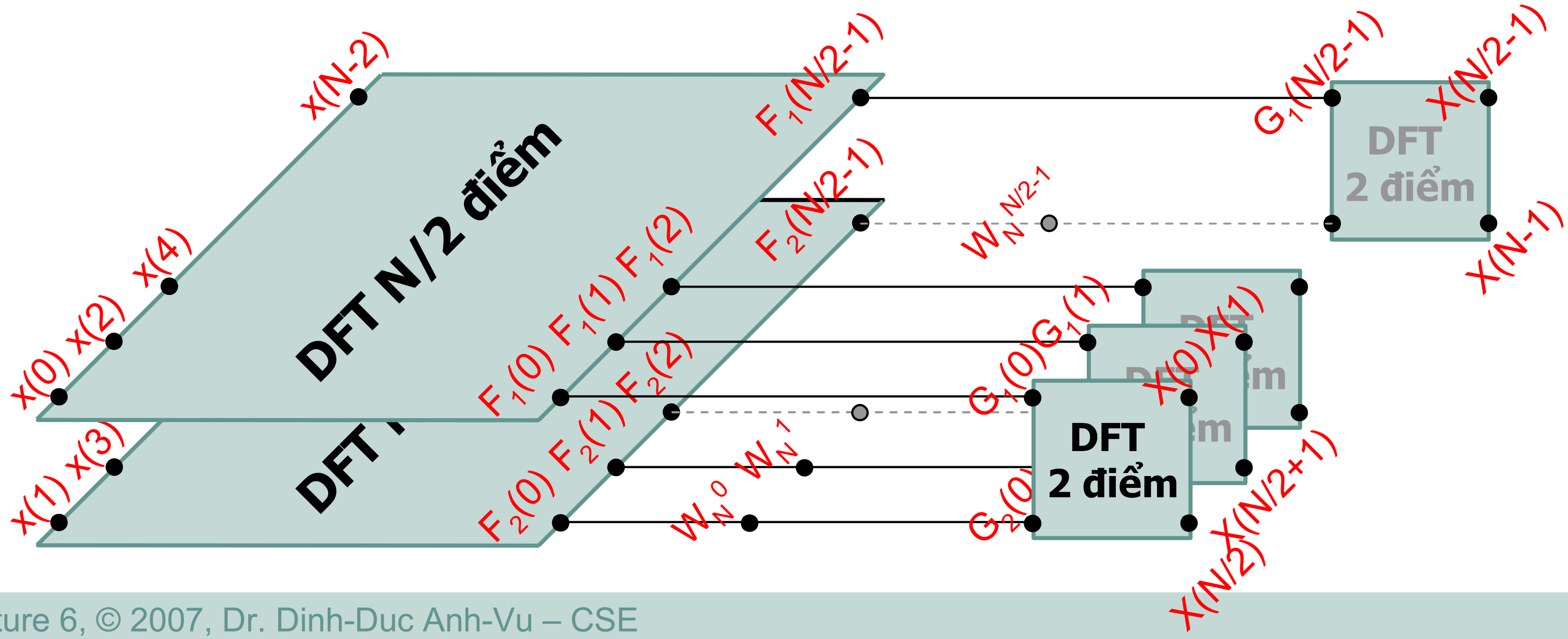
FFT cơ số 2

$$\begin{cases} G_1(k) = F_1(k) & k = 0,1,..,\frac{N}{2}-1 \\ G_2(k) = W_N^k F_2(k) & k = 0,1,..,\frac{N}{2}-1 \end{cases}$$



k=0,1,…,(N/2-1)

$$\begin{cases} X(k) = G_1(k) + G_2(k) & k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \\ X(k+\frac{N}{2}) = G_1(k) - G_2(k) & k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1 \end{cases}$$



FFT cơ số 2

- Tiếp tục phân $f_1(n)$ và $f_2(n)$ thành các chuỗi N/4 điểm

$$\begin{cases} v_{11}(n) = f_1(2n) & n = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1 \\ v_{12}(n) = f_1(2n+1) & n = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1 \\ v_{21}(n) = f_2(2n) & n = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1 \\ v_{22}(n) = f_2(2n+1) & n = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1 \end{cases}$$

$$v_{ij}(n) \longrightarrow \boxed{\text{DFT N/4 điểm}} \longrightarrow V_{ij}(k)$$

$$\begin{cases} F_1(k) = V_{11}(k) + W_{N/2}^{k} V_{12}(k) & k = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1 \\ F_1(k+\frac{N}{4}) = V_{11}(k) - W_{N/2}^{k} V_{12}(k) & k = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1 \\ F_2(k) = V_{21}(k) + W_{N/2}^{k} V_{22}(k) & k = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1 \\ F_2(k+\frac{N}{4}) = V_{21}(k) - W_{N/2}^{k} V_{22}(k) & k = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1 \end{cases}$$

- Hiệu quả

DFT trực tiếp $N=2^v$ điểm → **FFT cơ số 2** → Các DFT 2 điểm

Nhân phức: N^2
Cộng phức: $N^2 - N$

Nhân phức: $(N/2)\log_2 N$
Cộng phức: $N\log_2 N$

FFT cơ số 2

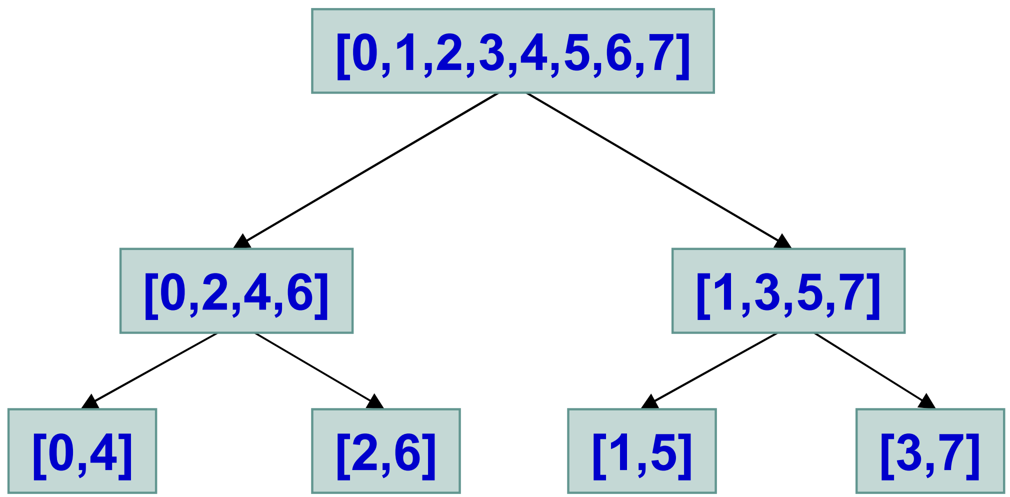
- Ví dụ: tính DFT 8 điểm

x(0)	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)	x(5)	x(6)	x(7)

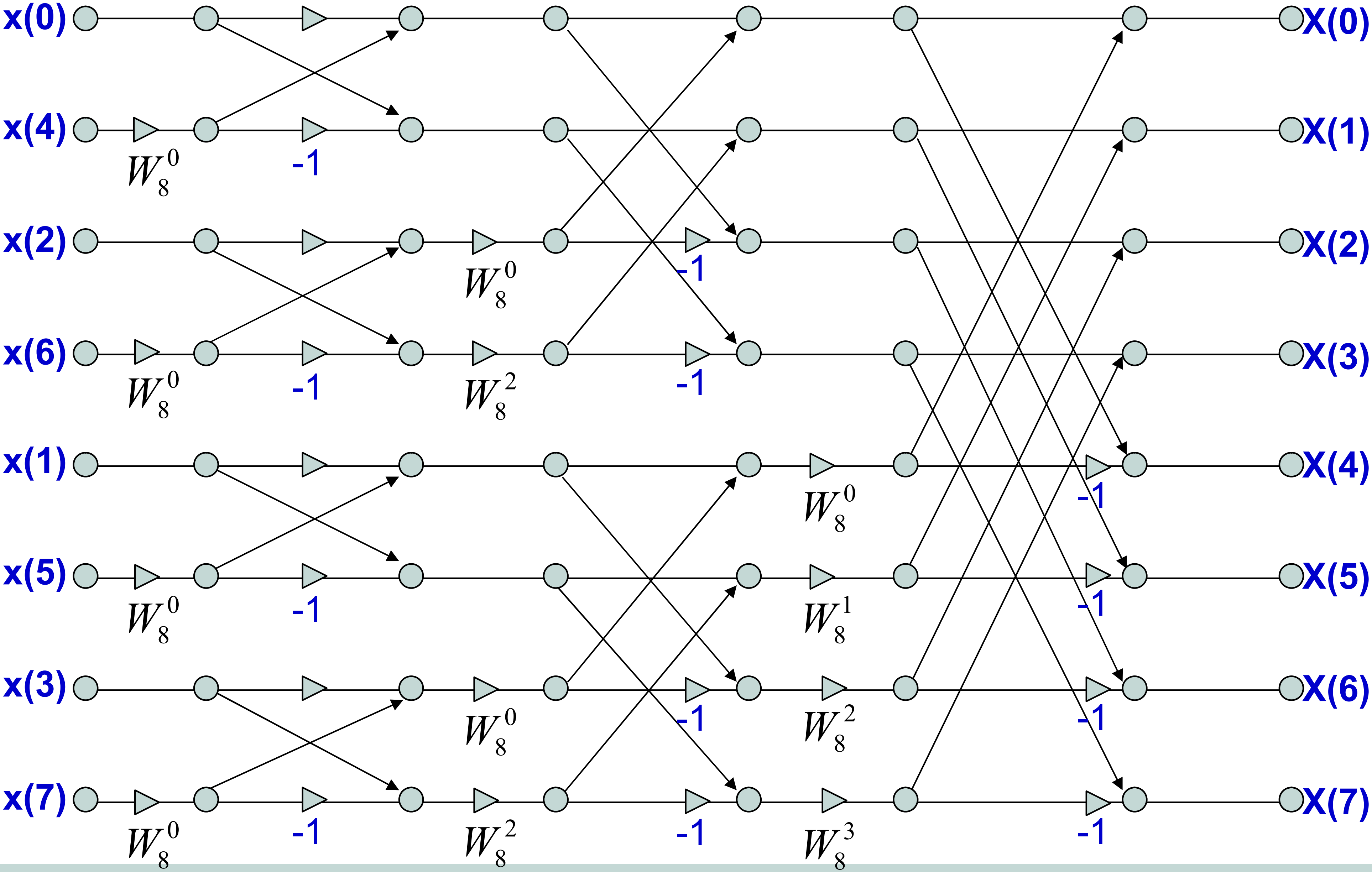
Phân theo thời gian

x(0)	x(2)	x(4)	x(6)
x(1)	x(3)	x(5)	x(7)

x(0)	x(4)
x(2)	x(6)
x(1)	x(5)
x(3)	x(7)

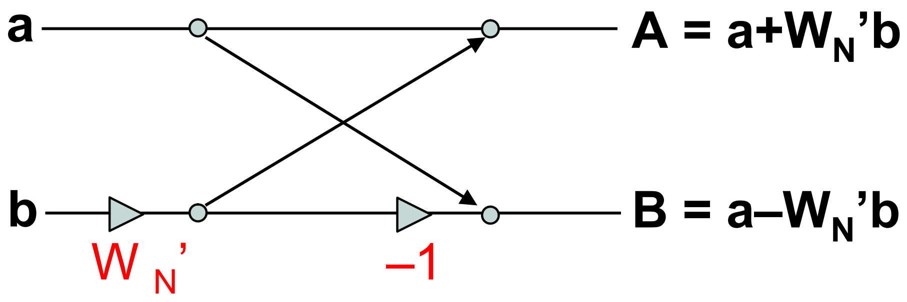


FFT cơ số 2


x(0)
x(4)
x(2)
x(6)
x(1)
x(5)
x(3)
x(7)
W_8^0
W_8^0
W_8^0
W_8^0
-1
-1
-1
-1
W_8^0
W_8^2
W_8^0
W_8^2
-1
-1
-1
-1
W_8^0
W_8^1
W_8^2
W_8^3
-1
-1
-1
-1
X(0)
X(1)
X(2)
X(3)
X(4)
X(5)
X(6)
X(7)

FFT cơ số 2

- Khối tính toán cơ bản cho DFT 2 điểm (hình con bướm)



Độ phức tạp
- 1 nhân phức
- 2 cộng phức

<u>$N = 2^v$:</u>

+ Log_2N : tầng tính toán
+ N/2 : khối tính toán cơ bản cho mỗi lớp

<u>Bộ nhớ:</u>

+ Vào : (a,b) – số phức
+ Ra : (A,B) – số phức
+ Có thể lưu (A,B) đè lên (a,b)
  - ➔ Chỉ cần N ô nhớ phức (2N ô nhớ thực)
  - ➔ Tính toán tại chỗ

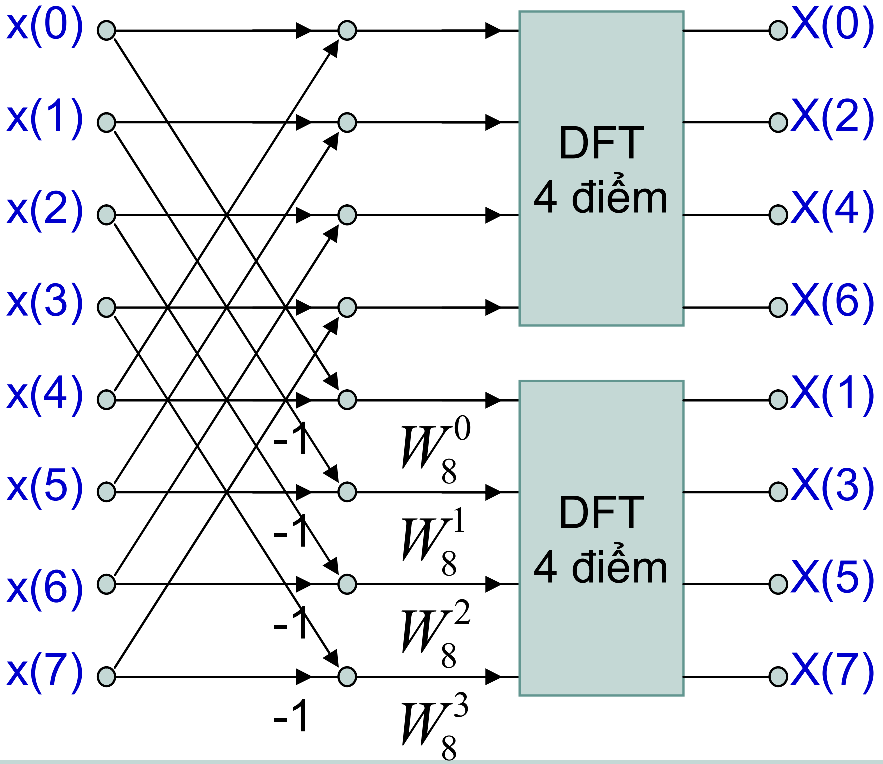
FFT cơ số 2

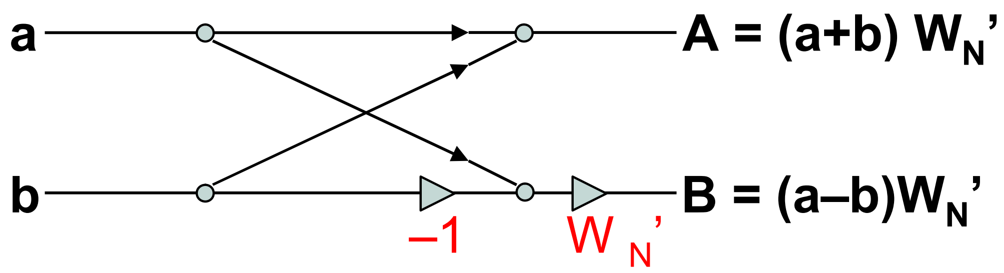
- Thứ tự chuỗi dữ liệu vào sau khi phân (v-1) lần
  - Biểu diễn các chỉ số ở dạng nhị phân
  - Chuỗi sau khi phân chia sẽ là lấy theo thứ tự đảo các bit

Bộ nhớ	**Địa chỉ**	Phân chia	**Bộ nhớ**	**Địa chỉ**	Phân chia	**Bộ nhớ**	**Địa chỉ**
x(0)	000		x(0)	000		x(0)	000
x(1)	001		x(2)	010		x(4)	100
x(2)	010		x(4)	100		x(2)	010
x(3)	011		x(6)	110		x(6)	110
x(4)	100		x(1)	001		x(1)	001
x(5)	101		x(3)	011		x(5)	101
x(6)	110		x(5)	101		x(3)	011
x(7)	111		x(7)	111		x(7)	111

FFT cơ số 2

- Phân chia theo tần số
  - Phương pháp chia và trị
  - M = 2, L = N/2
  - Chuỗi dữ liệu nhập được sắp xếp theo cột
  - Phân chia X(k) thành X(2k) và X(2k+1)
  - Sau đó có thể phân chia tiếp tục mỗi X(k chẵn) và X(k lẻ)





FFT cơ số 4

x(0)	x(2)	x(4)	…	…	…	x(N-1)

$N = 4^v$

L = 4, M = N/4

l,p = 0,1,2,3
m,q = 0,1,…,N/4 – 1

→

n = 4m + l
k = (N/4)p + q

	m=0	m=1			m=(N/4)-1	
l=0	x(0)	x(4)	…	…	x(N-4)	→ x(4n)
l=1	x(1)	x(5)	…	…	x(N-3)	→ x(4n+1)
l=2	x(2)	x(6)	…	…	x(N-2)	→ x(4n+2)
l=3	x(3)	x(7)	…	…	x(N-1)	→ x(4n+3)

n = 0,1,…,N/4-1

FFT cơ số 4

$$X(p,q)=\sum_{l=0}^{L-1}\left\{W_N^{lq}\left[\sum_{m=0}^{M-1}x(l,m)W_M^{mq}\right]\right\}W_L^{lp}$$

$$X(p,q)=\sum_{l=0}^{3}\left[W_N^{lq}F(l,q)\right]W_4^{lp}\qquad p=0,1,2,3$$

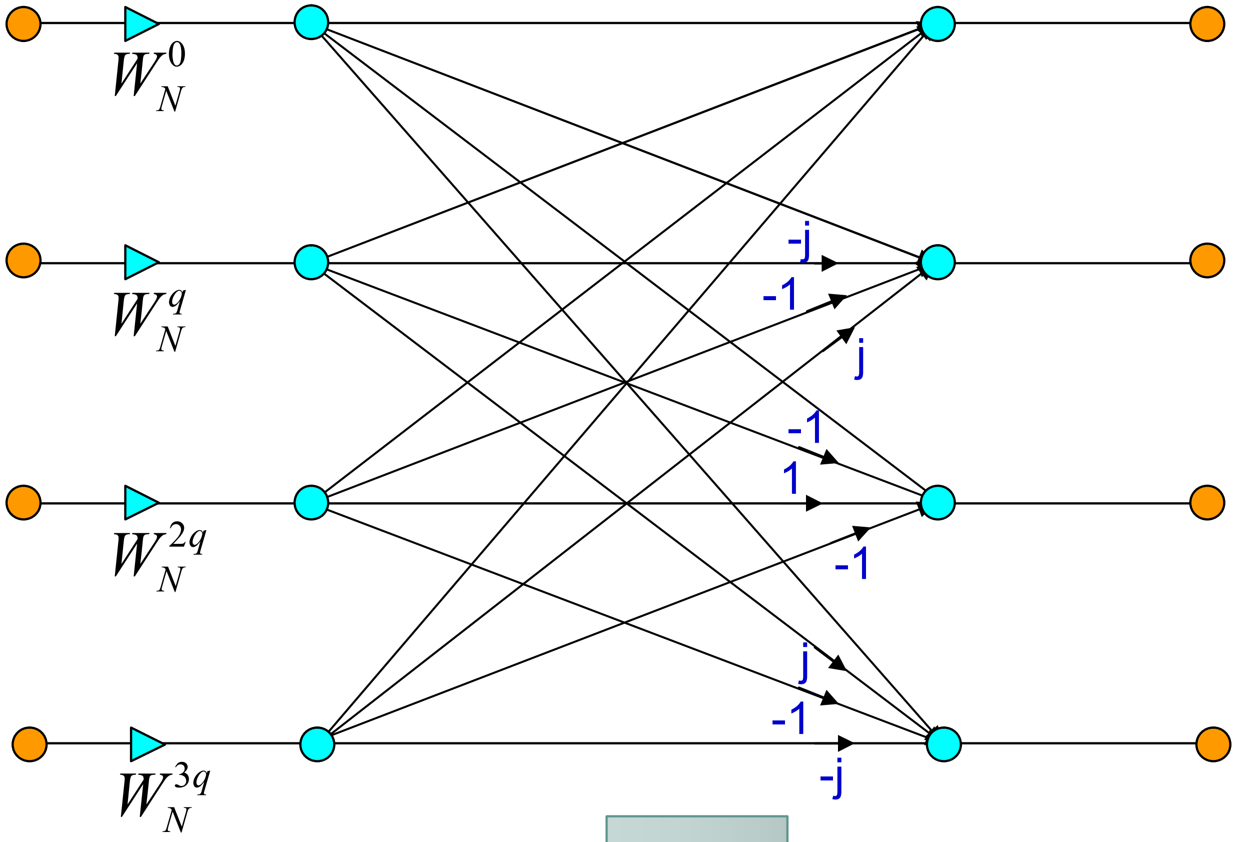
$$F(l,q)=\sum_{m=0}^{N/4}x(l,m)W_{N/4}^{mq}\qquad \begin{cases} l=0,1,2,3\\ q=0,1,..,(\frac{N}{4}-1)\end{cases}$$

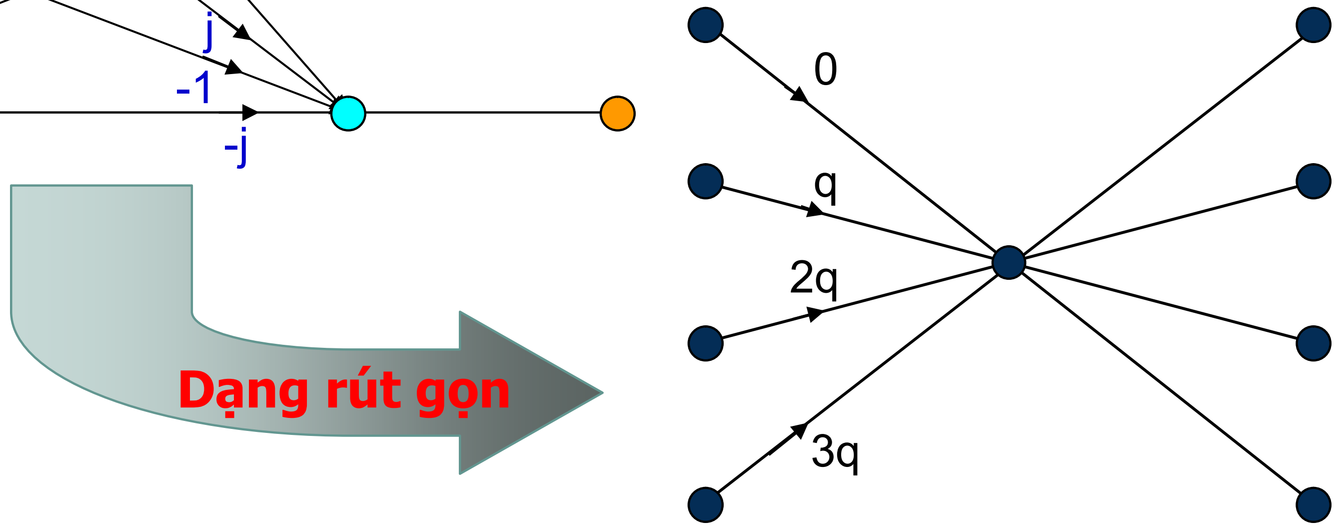
DFT N/4 điểm

$$\begin{cases} x(l,m)=x(4m+l)\\ X(p,q)=X(\frac{N}{4}p+q)\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} X(0,q)\\ X(1,q)\\ X(2,q)\\ X(3,q)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -j & -1 & j\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & j & -1 & -j\end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_N^0F(0,q)\\ W_N^qF(1,q)\\ W_N^{2q}F(2,q)\\ W_N^{3q}F(3,q)\end{bmatrix}$$

FFT cơ số 4





FFT cơ số 4

Độ phức tạp: 1 khối tính toán cần

+ 3 nhân phức
+ 12 cộng phức

$N=4^v$

+ Tầng tính toán : $v = \log_4 N$
+ Mỗi tầng có : N/4 khối tính toán

$3vN/4 = (3N/8)\log_2 N$: Nhân phức (giảm 25% vs FFT_2)
$12vN/4 = (3N/2)\log_2 N$: Cộng phức (tăng 50% vs FFT_2)

Biểu diễn lại nhân ma trận

$$\begin{bmatrix} X(0,q) \\ X(1,q) \\ X(2,q) \\ X(3,q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -j \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_N^0 F(0,q) \\ W_N^q F(0,q) \\ W_N^{2q} F(0,q) \\ W_N^{3q} F(0,q) \end{bmatrix}$$

$(3N/8)\log_2 N$: Nhân phức (giảm 25% vs FFT_2)
$N\log_2 N$: Cộng phức (bằng FFT_2)

Hiện thực các giải thuật FFT

- FFT cơ số 2
  - ✦ Tính toán hình bướm: $(N/2)\log_2 N$ lần
  - ✦ Hệ số quay W_N^k: được tính một lần và lưu trong bảng
  - ✦ Bộ nhớ: 2N nếu muốn việc tính toán được thực hiện tại chỗ
    - 4N nếu muốn đơn giản hóa các tác vụ chỉ số và điều khiển; đồng thời cho phép chuỗi nhập và xuất theo đúng thứ tự
- IDFT

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \qquad 0 \le n \le N-1$$

  - ✦ Khác nhau cơ bản giữa việc tính DFT và IDFT là hệ số 1/N và dấu của hệ số pha W_N
    - Đảo chiều sơ đồ tính DFT, đổi dấu hệ số pha, và chia kết quả cuối cùng cho N → IDFT
- DFT với số điểm khác 2^v hoặc 4^v → đệm thêm các số 0
- Độ phức tạp
  - ✦ Tác vụ số học (nhân phức, cộng phức)
  - ✦ Cấu trúc hiện thực của giải thuật (qui tắc vs bất qui tắc)
  - ✦ Kiến trúc của các bộ DSPs (xử lý song song các tác vụ)

Ứng dụng của các giải thuật FFT

- Tính DFT của 2 chuỗi thực
  - $x_1(n)$ và $x_2(n)$: chuỗi thực độ dài N cần tính DFT
  - Định nghĩa chuỗi $x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$ $\qquad 0 \le n \le N-1$
  - $X(k) = X_1(k) + jX_2(k)$ $\qquad$ (tính tuyến tính của DFT)

$$x_1(n) = \frac{x(n) + x^*(n)}{2} \qquad x_2(n) = \frac{x(n) - x^*(n)}{2j}$$

$$\Rightarrow \quad X_1(k) = \frac{1}{2}\left\{DFT\left[x(n)\right] + DFT\left[x^*(n)\right]\right\} \qquad X_2(k) = \frac{1}{2}\left\{DFT\left[x(n)\right] - DFT\left[x^*(n)\right]\right\}$$

$$x^*(n) \xleftrightarrow{DFT_N} X^*(N-k) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} X_1(k) &= \tfrac{1}{2}\left[X(k) + X^*(N-k)\right] \\ X_2(k) &= \tfrac{1}{2}\left[X(k) - X^*(N-k)\right] \end{aligned}}$$

Ứng dụng của các giải thuật FFT

- Tính DFT của chuỗi thực 2N điểm
  - g(n): chuỗi thực độ dài 2N cần tính DFT
  - Tách thành 2 chuỗi $x_1(n) = g(2n)$ và $x_2(n) = g(2n+1)$ $\quad 0 \le n \le N-1$
  - Định nghĩa chuỗi $x(n) = x_1(n) + jx_2(n)$ $\quad 0 \le n \le N-1$
  - $X(k) = X_1(k) + jX_2(k)$ (tính tuyến tính của DFT)

$$X_1(k) = \tfrac{1}{2}\left[X(k) + X^*(N-k)\right]$$
$$X_2(k) = \tfrac{1}{2}\left[X(k) - X^*(N-k)\right]$$

$$G(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(2n) W_{2N}^{2nk} + \sum_{n=0}^{N-1} g(2n+1) W_{2N}^{(2n+1)k}$$
$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) W_N^{nk} + W_{2N}^{k} \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) W_N^{nk}$$

$$G(k) = X_1(k) + W_{2N}^{k} X_2(k) \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$
$$G(k+N) = X_1(k) - W_{2N}^{k} X_2(k) \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Ứng dụng của các giải thuật FFT

- Lọc tuyến tính các chuỗi dữ liệu dài
  - Overlap-add
  - Overlap-save

  $\left.\begin{matrix}\text{Overlap-add}\\ \text{Overlap-save}\end{matrix}\right\}$ DFT + **FFT**
- Phương pháp
  - h(n) – Đáp ứng xung đơn vị của bộ lọc (chiều dài M)
    - Được đệm thêm L-1 số không sao cho $N = L + M - 1 = 2^v$
    - H(k): DFT N điểm của h(n), theo thứ tự đảo nếu h(n) được sắp theo thứ tự thuận (Giải thuật FFT suy giảm theo tần số)
  - $x_m(n)$ – khối dữ liệu chiều dài L (đã được phân cắt)
    - Được đệm thêm M–1 điểm (giá trị tùy theo PP lọc được dùng)
    - $X_m(k)$: DFT N điểm của $x_m(n)$, cũng theo thứ tự đảo (Giải thuật FFT suy giảm theo tần số)
  - $Y_m(k) = H(k)X_m(k)$
    - H(k) và $X_m(k)$ cùng có thứ tự đảo → $Y_m(k)$ theo thứ tự đảo
    - $y_m(n) = \mathrm{IDFT}_N\{Y_m(k)\}$ sẽ đúng theo thứ tự thuận nếu dùng giải thuật FFT suy giảm theo thời gian
  - Không cần thiết đảo vị trí các dữ liệu trong việc tính DFT và IDFT
- Tính tương quan (tương tự)

Phương pháp lọc tuyến tính

- FFT không hiệu quả khi tính DFT (IDFT) tại một số điểm ($< \log_2 N$) → tính trực tiếp
- Giải thuật Goertzel
  - Dựa vào tính chu kỳ của W_N^k và biểu diễn việc tính toán DFT như lọc tuyến tính

$$X(k) = W_N^{-kN} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{km} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-k(N-m)}$$

$$\text{Đặt } y_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{-k(n-m)} = x(n) * h_k(n)$$

$$\text{với} \quad h_k(n) = W_N^{-kn} u(n)$$

$$\Rightarrow \quad X(k) = y_k(n)\Big|_{n=N}$$

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

Một pole trên vòng tròn đơn vị tại tần số $\omega_k = 2\pi k/N$

Việc tính DFT tại một điểm k có thể được thực hiện bằng cách cho t/h đi vào bộ cộng hưởng một pole tại tần số $\omega_k = 2\pi k/N$

Thay vì tính tổng chập trực tiếp, ta có thể dùng PTSP

$$y_k(n) = W_N^{-k} y_k(n-1) + x(n) \qquad y_k(-1) = 0$$

Giải thuật Goertzel

- Kết hợp từng cặp các bộ cộng hưởng có pole liên hợp phức

$$H_k(z) = \frac{1 - W_N^{-k} z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k/N) z^{-1} + z^{-2}}$$

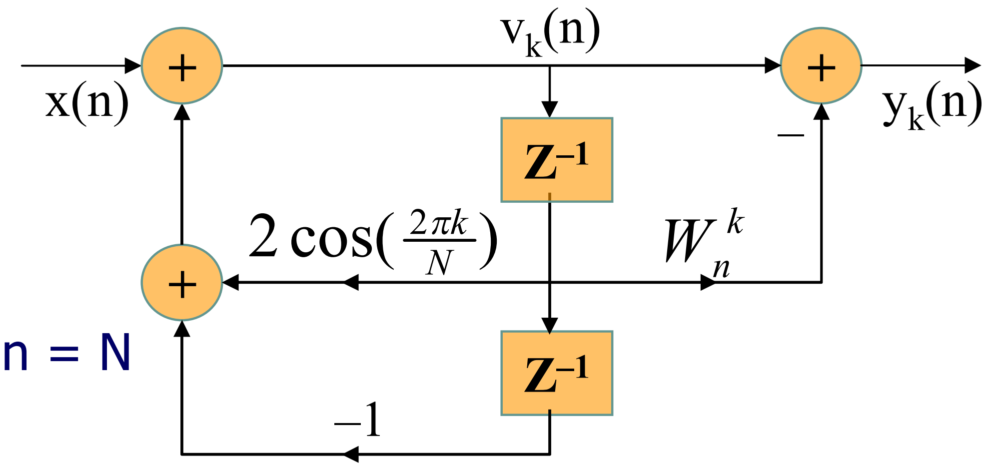
- Hiện thực bằng dạng chuẩn tắc (dạng II)

$$v_k(n) = 2\cos\tfrac{2\pi k}{N}\, v_k(n-1) - v_k(n-2) + x(n) \qquad n = 0,1,\ldots, N$$

$$y_k(n) = v_k(n) - W_N^k v_k(n-1) \qquad n = N$$

  - Với đ/k đầu

$$v_k(-1) = v_k(-2) = 0$$



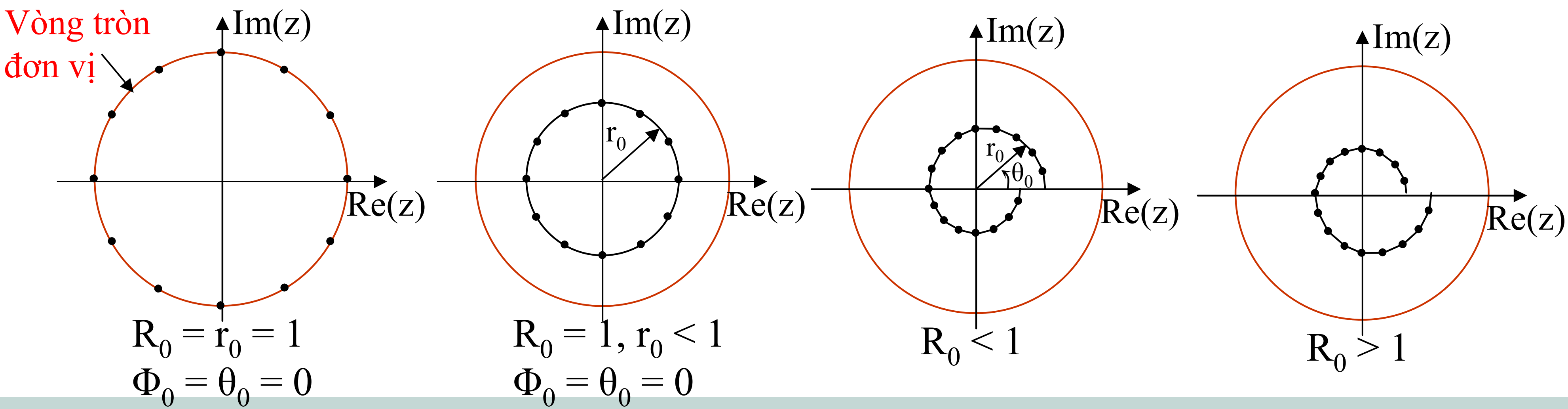
- $v_k(n)$ được lặp lại cho n = 0, 1, …, N
  - Mỗi vòng cần 1 phép nhân thực
- $y_k(n)$ được tính duy nhất một lần cho n = N
- Nếu x(n) là t/h thực, cần N+1 phép nhân thực để tính X(k) và X(N-k) {do tính đối xứng}
- Giải thuật Goertzel chỉ thích hợp khi số giá trị DFT cần tính khá nhỏ ($\leq \log_2 N$)

Giải thuật BĐ Chirp-z

- DFT N điểm ~ $X(z_k)$ với $z_k = e^{j2\pi kn/N}$, k=0,1,…,N-1 (các điểm cách đều trên vòng tròn đơn vị)
- BĐ Z của x(n) tại các điểm z_k $\quad X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z_k^{-n} \qquad k = 0,1,\ldots, L-1$
- Nếu $z_k = re^{j2\pi kn/N}$ (z_k là N điểm cách đều nhau trên vòng tròn bk r)

$$X(z_k) = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) r^{-n}] e^{-j2\pi kn/N} \qquad k = 0,1,\ldots, N-1$$

  - Việc tính DFT có thể được thực hiện bằng giải thuật FFT cho chuỗi $x(n)r^{-n}$
- Tổng quát, z_k nằm trên cung xoắn ốc bắt đầu từ điểm $z_0 = r_0 e^{j\theta_0}$ (đi vào hoặc đi ra gốc tạa độ) $\quad z_k = r_0 e^{j\theta_0} (R_0 e^{j\phi_0})^k \qquad k = 0,1,\ldots, L-1$



Giải thuật BĐ Chirp-z

$$X(z_k) = \frac{y(k)}{h(k)} \quad k = 0,1,\ldots,L-1$$

BĐ chirp-z

$$V = R_0 e^{j\phi_0}$$

$$h(n) = V^{n^2/2}$$

$$g(n) = x(n)(r_0 e^{j\theta_0})^{-n} V^{-n^2/2}$$

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)h(k-n) \qquad k = 0,1,\ldots,L-1$$

$$R_0 = 1 \quad \Rightarrow h(n) = e^{j\phi_0 n^2/2} = e^{j(n\phi_0/2)n} \equiv e^{j\omega n}$$

$$\omega = n\phi_0/2$$

Tần số của t/h mũ phức h(n), tăng tuyến tính theo thời gian
→ h(n): chirp signal

Giải thuật BĐ Chirp-z

- Xác định tổng chập vòng của chuỗi g(n) N điểm và chuỗi h(n) M điểm (M > N)
  - N-1 điểm đầu là các điểm lặp lại
  - M-(N-1) điểm còn lại chứa kết quả

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n)h(k-n) \qquad\qquad k = 0,1,\ldots,L-1$$

- Giả sử M = L + (N-1)
- M điểm của chuỗi h(n) được xác định $-(N-1) \le n \le (L-1)$
- Định nghĩa chuỗi M điểm $h_1(n) = h(n-N+1)$ $\qquad n = 0,1,\ldots,M-1$
- $H_1(k) = DFT_M\{h_1(n)\}$
- $G(k) = DFT_M\{g(n)\}$ (sau khi đã đệm thêm vào g(n) L-1 số 0)
- $Y_1(k) = G(k)H(k) \rightarrow y_1(n) = IDFT\{Y_1(k)\}$ $n = 0,1,\ldots,M-1$
- N-1 điểm đầu tiên của $y_1(n)$ là các điểm lặp $\rightarrow$ loại bỏ chúng
- Các điểm kết quả là giá trị của $y_1(n)$ khi $N-1 \le n \le M-1$
  - $y(n) = y_1(n+N-1)$ $\qquad n = 0,1,\ldots,L-1$
- $X(z_k) = y(k)/h(k)$ $\qquad k = 0,1,\ldots,L-1$

Chương 7

HIỆN THỰC CÁC HỆ RỜI RẠC THỜI GIAN

T.S. Đinh Đức Anh Vũ

Faculty of Computer Science and Engineering
HCMC University of Technology
268, av. Ly Thuong Kiet,
District 10, HoChiMinh city
Telephone : (08) 864-7256 (ext. 5843)
Fax : (08) 864-5137
Email : anhvu@hcmut.edu.vn
http://www.cse.hcmut.edu.vn/~anhvu

Nội dung

- Cấu trúc hiện thực cho hệ FIR
  - Cấu trúc trực tiếp
  - Cấu trúc cascade
  - Cấu trúc lấy mẫu tần số
  - Cấu trúc lattice
- Cấu trúc hiện thực cho hệ IIR
  - Cấu trúc trực tiếp
  - Cấu trúc hoán vị
  - Cấu trúc cascade
  - Cấu trúc song song
  - Cấu trúc lattice và lattice-lader
- Không gian trạng thái
  - Mô tả không gian trạng thái bằng PTSP
  - Giải PT không gian trạng thái
  - Mô tả vào-ra vs mô tả không gian trạng thái
  - Không gian trạng thái trong miền Z
- PP biểu diễn số (SV tự tham khảo)
- Lượng tử hóa các hệ số của bộ lọc
  - Phân tích độ nhạy của việc lượng tử hóa các hệ số
  - Lượng tử hóa các hệ số của bộ lọc FIR
- Hiệu ứng làm tròn trong các bộ lọc số

Cấu trúc hiện thực cho hệ FIR

- Các dạng mô tả h/t
  - PTSP
  - Sơ đồ khối (cấu trúc tính toán)
  - Sơ đồ các điểm cực/điểm không
- Hiện thực ⇔ sắp xếp lại PTSP
- Sự cần thiết của việc sắp xếp lại các PT
  - Độ phức tạp tính toán
  - Bộ nhớ
  - Sai số tính toán
  - Cấu trúc hiện thực: song song/pipeline
- Hệ FIR

$$y(n) = -\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$a_k = 0$

$$h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \le n \le M-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k}$$

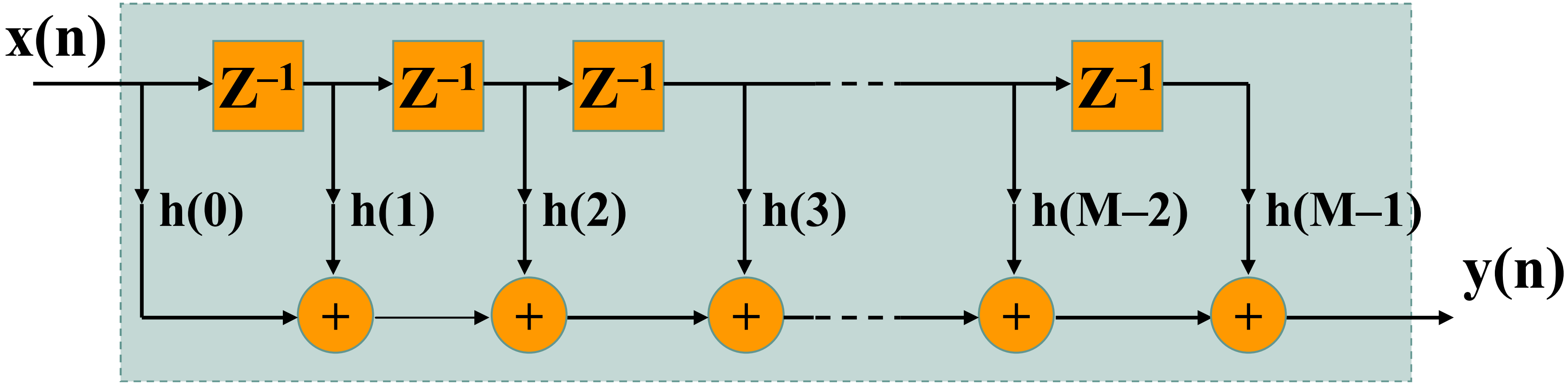
$a_k = 0$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

FIR – Cấu trúc trực tiếp

- Tham số đặc trưng cho bộ lọc: giá trị của đáp ứng xung

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

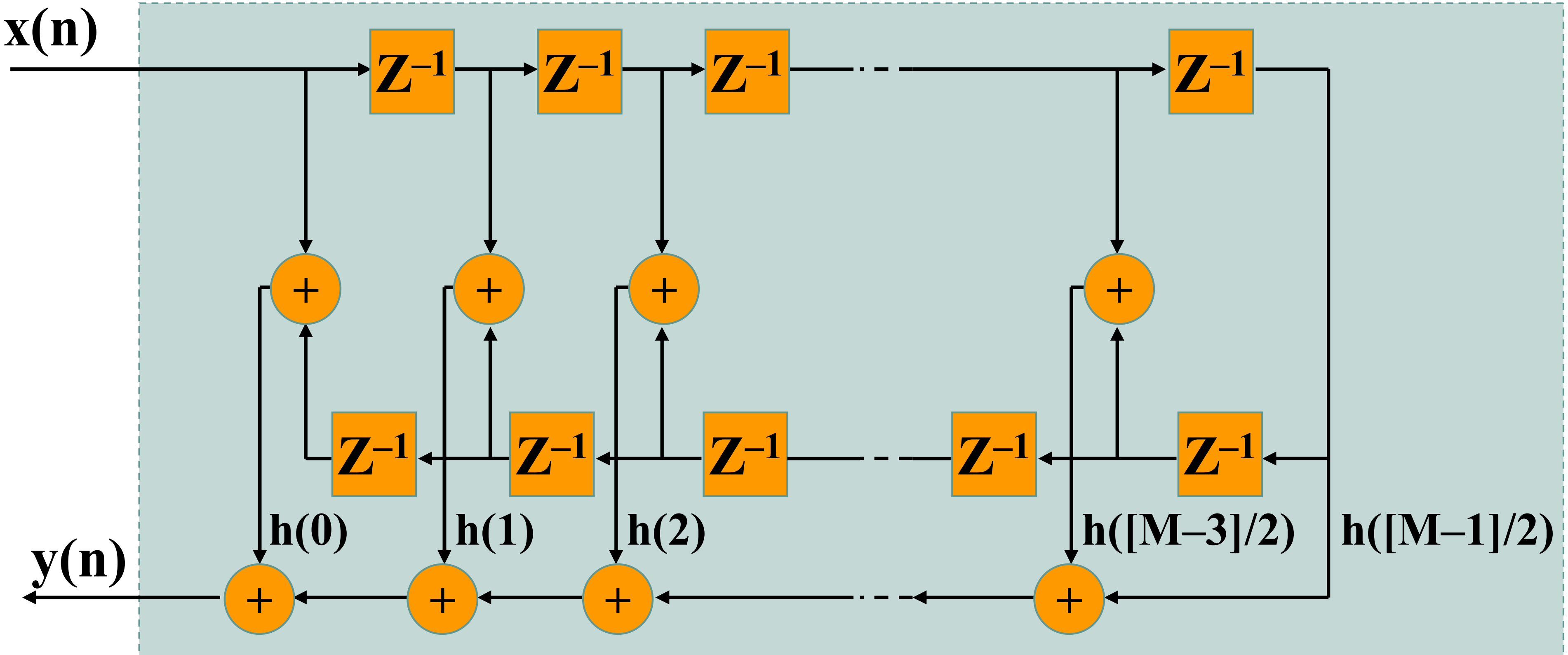


- Bộ nhớ: M – 1 (ô nhớ)
- Độ phức tạp (cho 1 mẫu của y(n))
  - Nhân: M
  - Cộng: M – 1
- Để 1 mẫu của x(n) đi qua khỏi hệ FIR
  - Phải đi qua (M – 1) ô nhớ
  - Cần thời gian: $(M-1)T_s$ (s), T_s: chu kỳ mẫu

Transversal filter
Tapped-delay-line filter

FIR – Cấu trúc trực tiếp

- Khi h(n) đối xứng: $h(n) = \pm h(M-1-n) \rightarrow$ FIR là tuyến tính pha
- Sắp xếp lại (với M lẻ)



- Số phép nhân
  - M chẵn: $M/2$
  - M lẻ: $(M-1)/2$

FIR – Cấu trúc Cascade

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k}$$

Phân tích thừa số

$$H(z) = \prod_{k=1}^{K} H_k(z)$$

trong đó $H_k(z) = b_{k0} + b_{k1} z^{-1} + b_{k2} z^{-2} \quad k = 1,2,\ldots,K$

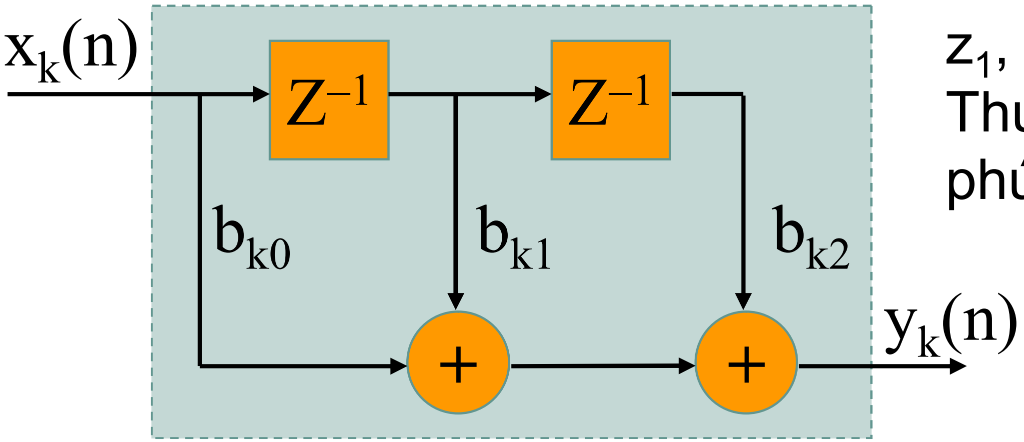
K = [(M+1)/2] = (M+1) DIV 2

$H_k(z)$: bộ lọc bậc 2

Mỗi hệ: $H_k(z)$

$k=1,2,\ldots,K$

$H_k(z) = b_{k0} z^{-2}(z-z_1)(z-z_2)$

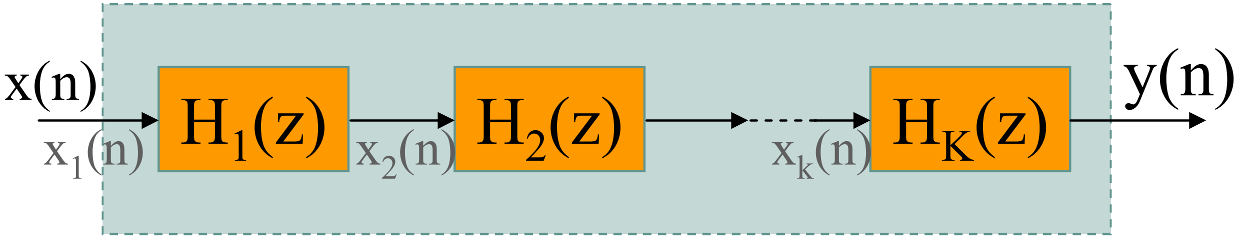


z_1, z_2: hai điểm zero

Thường chọn z_1 và z_2 là hai số liên hợp phức để các hệ số bộ lọc là số thực

FIR – Cấu trúc Cascade

- Tích các $H_k(z)$ tương đương cấu trúc cascade



- Khi h(n) thực và đối xứng: h(n) = ± h(M–1–n) → FIR là tuyến tính pha
  - Các điểm zero của H(z) cũng có dạng đối xứng

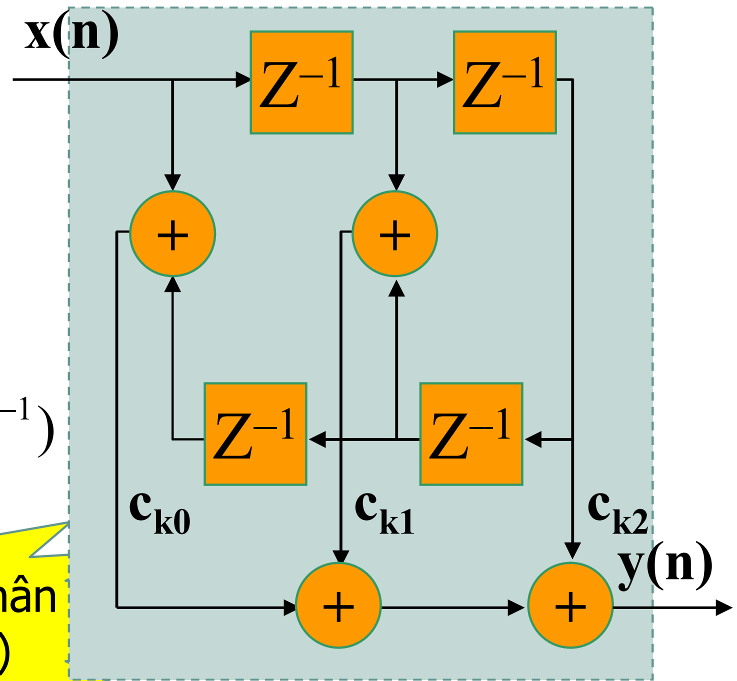
Nếu có hai zero z_k và z^*_k [đ/k để h(n) thực] thì cũng có $1/z_k$ và $1/z^*_k$

Với 4 điểm zero đó, gộp hai hệ bậc 2 nối tiếp thành hệ bậc 4

$$H_k(z) = c_{k0}(1 - z_k z^{-1})(1 - z_k^* z^{-1})(1 - z_k^{-1} z^{-1})(1 - (z_k^*)^{-1} z^{-1})$$
$$= c_{k0} + c_{k1} z^{-1} + c_{k2} z^{-2} + c_{k1} z^{-3} + c_{k0} z^{-4}$$

c_{k1} và c_{k2} là hàm của z_k

Giảm 50% số phép nhân (giảm từ 6 xuống 3)



FIR – Cấu trúc lấy mẫu tần số

- Tham số đặc trưng cho bộ lọc: giá trị của đáp ứng tần số

$$h(n) \xleftrightarrow{F} H(\omega) \qquad H(\omega)=\sum_{n=0}^{M-1}h(n)e^{-j\omega n} \quad k=0,1,\ldots,M-1$$

H(ω) → Lấy mẫu tại → H(k+α)

$$\begin{cases}\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha)\\ M\ l\acute{e}:k=0,1,\ldots,\frac{M-1}{2}\\ M\ ch\tilde{a}n\ :k=0,1,\ldots,\frac{M}{2}-1\\ \alpha = 0\,|\,\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}H(k+\alpha)=H(\frac{2\pi}{M}(k+\alpha))=\sum_{n=0}^{M-1}h(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)n}\\ k=0,1,\ldots,M-1\end{cases}$$

Mẫu tần số của H(ω)

α = 0

H(k) là DFT M điểm của h(n)

$$\begin{cases}h(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}H(k+\alpha)e^{j\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)n}\\ n=0,1,\ldots,M-1\end{cases}$$

α = 0

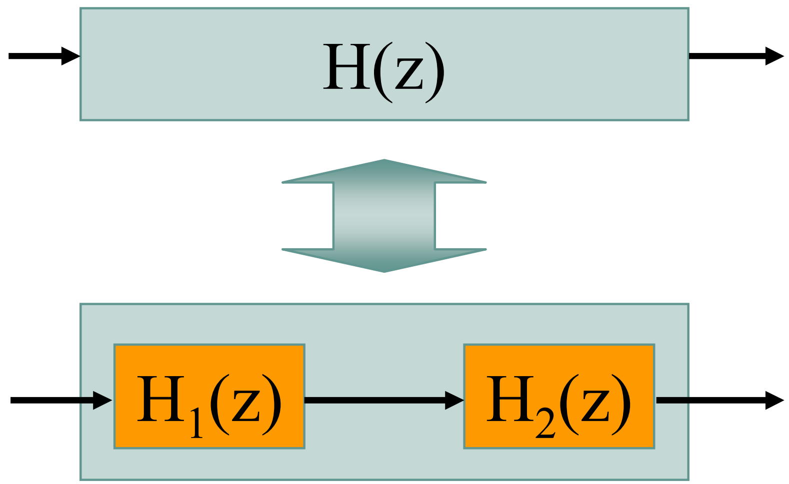
h(n) là IDFT M điểm của H(k)

FIR – Cấu trúc lấy mẫu tần số

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1}\left[\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha) e^{j\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)n}\right] z^{-n} = \sum_{k=0}^{M-1} H(k+\alpha)\left[\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\left(e^{j\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)} z^{-1}\right)^{n}\right]$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-M} e^{j2\pi\alpha}}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k+\alpha)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)} z^{-1}}$$



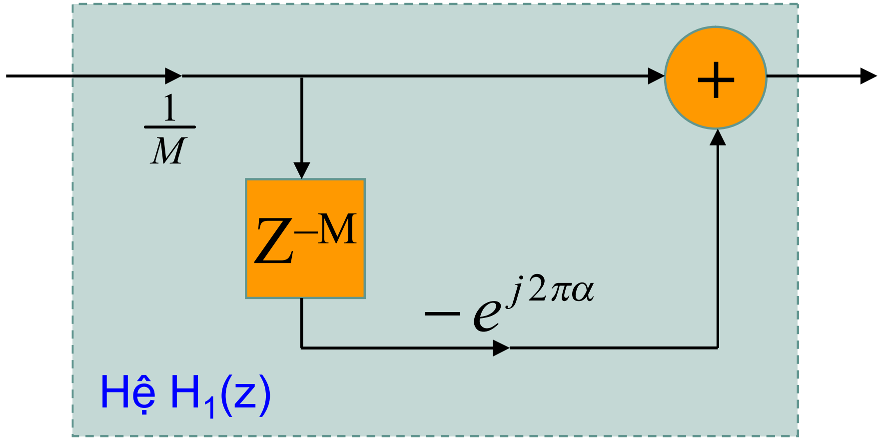
$$H_1(z) = \frac{1}{M}\left(1 - z^{-M} e^{j2\pi\alpha}\right)$$

$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k+\alpha)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)} z^{-1}}$$

FIR – Cấu trúc lấy mẫu tần số

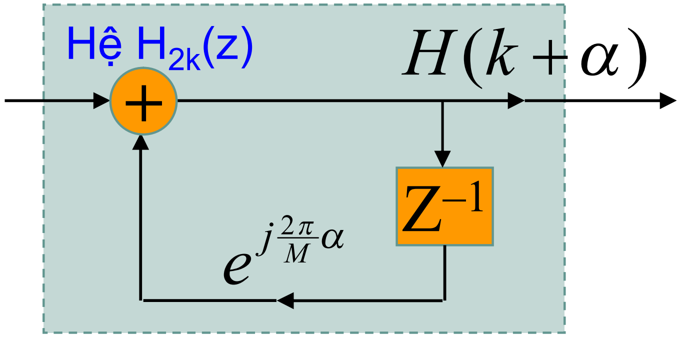
- Hệ $H_1(z)$ $\quad H_1(z) = \frac{1}{M}(1 - z^{-M}e^{j2\pi\alpha})$
  - Bậc M
  - Có M điểm zero

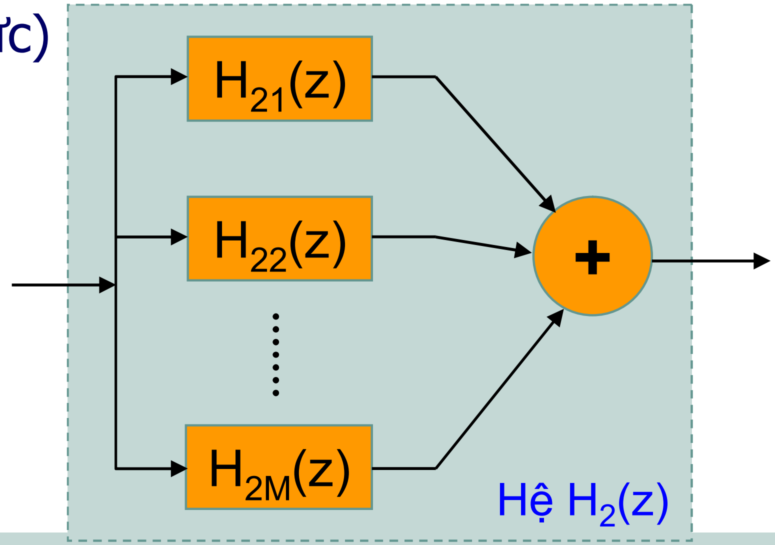
$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)} \qquad k = 0,1,\ldots,M-1$$



- Hệ $H_2(z)$ $\quad H_2(z) = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{H(k+\alpha)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)}z^{-1}}$
  - Tổng của M hệ $H_{2k}(z)$ (k =1,2,…,M)
  - Cấu trúc gồm M hệ mắc song song: $H_{21}(z)$, $H_{22}(z)$,…, $H_{2M}(z)$
  - Mỗi hệ $H_{2k}(z)$ có tần số cộng hưởng (điểm cực)

$$p_k = e^{j\frac{2\pi}{M}(k+\alpha)} \qquad k = 0,1,\ldots,M-1$$





FIR – Cấu trúc lấy mẫu tần số

- Khi LTI là bộ lọc thông hẹp (narrowband)
  - Hầu hết các $H(\omega) \sim 0$. Các $H(k+\alpha)$ tương ứng cũng $\sim 0 \rightarrow$ có thể bỏ qua một số hệ $H_{2k}(z) \Rightarrow$ Giảm được số phép tính
- $H(k+\alpha)$ là một hàm đối xứng
  - $H(k+\alpha) = H^*(M - k - \alpha)$
  - Có thể rút gọn hơn $H_2(z)$
    - Nhóm 2 hệ $H_{2k}(z)$ một pole thành một hệ có 2 pole với các tham số thực
    - Khi $\alpha = 0$ (tương tự khi $\alpha = ½$)

M lẻ

$$H_2(z) = \frac{H(0)}{1 - z^{-1}} + \sum_{k=1}^{\frac{M-1}{2}} \frac{A(k) - B(k)z^{-1}}{1 - 2\cos(\frac{2\pi}{M}k)z^{-1} + z^{-2}}$$

M chẵn

$$H_2(z) = \frac{H(0)}{1 - z^{-1}} + \frac{H(\frac{M}{2})}{1 + z^{-1}} + \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} \frac{A(k) - B(k)z^{-1}}{1 - 2\cos(\frac{2\pi}{M}k)z^{-1} + z^{-2}}$$

$$\begin{cases} A(k) = H(k) + H(M-k) \\ B(k) = H(k)e^{-j2\pi k/M} + H(M-k)e^{j2\pi k/M} \end{cases}$$

FIR – Cấu trúc Lattice

- Trong nhiều ứng dụng (xử lý tiếng nói), cần thiết có sự dự đoán mẫu tín hiệu
  - Dự đoán mẫu: x(n) từ M–1 mẫu quá khứ: x(n–1), x(n–2), …, x(n–M)

$$\hat{x}(n) = -\sum_{k=1}^{m} \alpha_m(k)\, x(n-k)$$

  - Dự đoán mẫu: x(n–M) từ M–1 mẫu tương lai: x(n), x(n–1), x(n–2), …, x(n–M+1)

$$\hat{x}(n-m) = -\sum_{k=0}^{m-1} \beta_m(k)\, x(n-k)$$

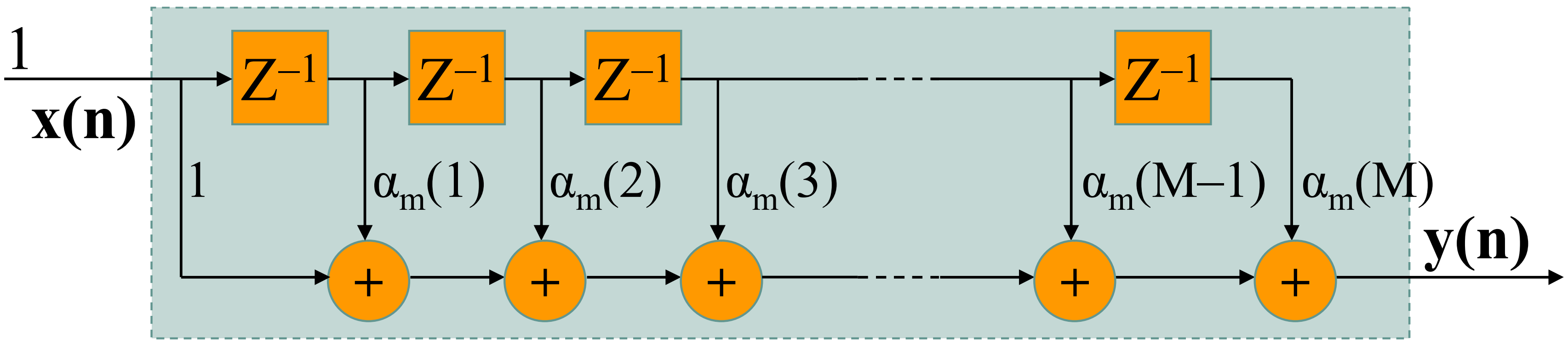
- Hệ LTI $H_m(z) = A_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_m(k) z^{-k}$ với $\alpha(0) = 1$

Đáp ứng xung đơn vị $h_m(0) = 1 \text{ và } h_m(k) = \alpha_m(k) \quad k = 1,2,\ldots,m$

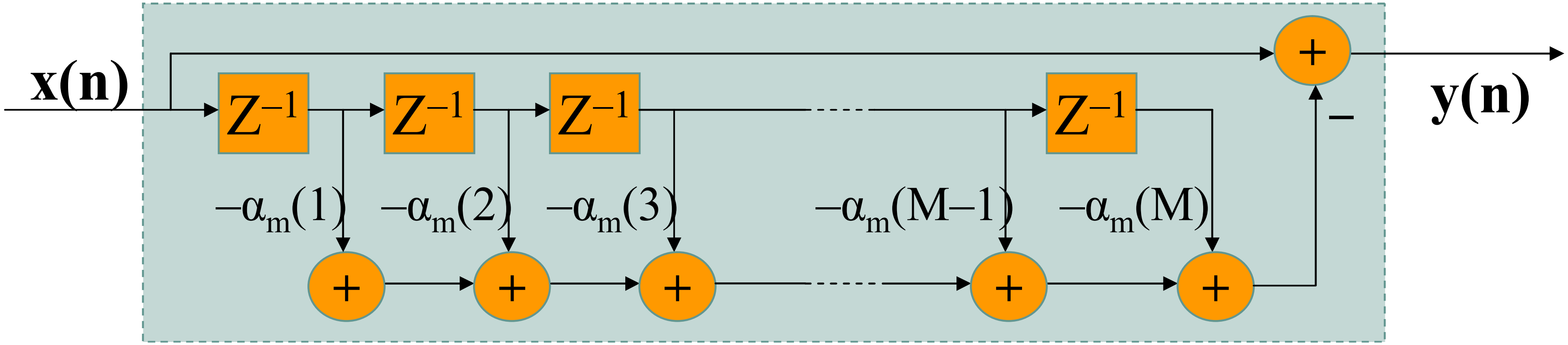
$$y(n) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_m(k)\, x(n-k) \quad \Rightarrow \quad y(n) = x(n) - \hat{x}(n)$$

LTI: bộ lọc sai số dự đoán

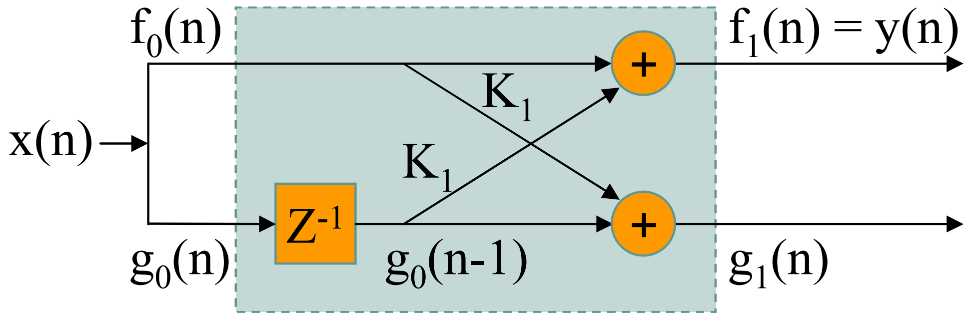
$\alpha(0) = 1$



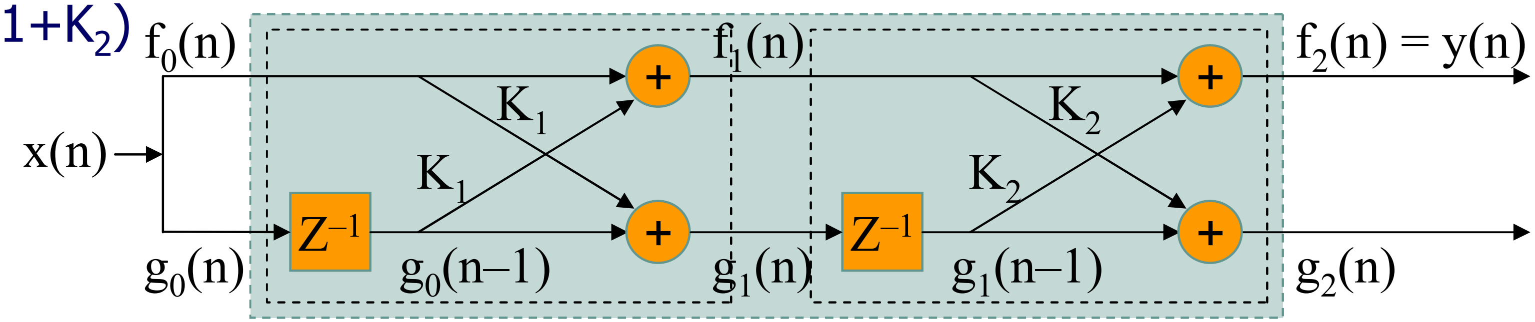
FIR – Cấu trúc Lattice



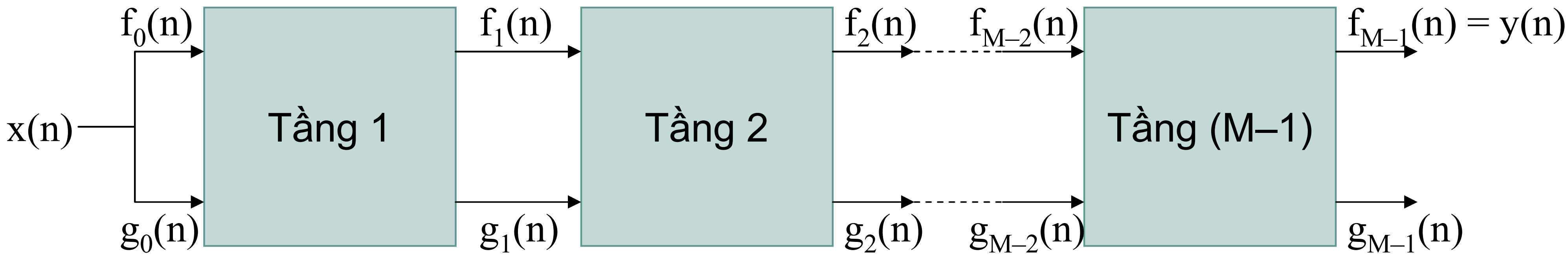
- Bộ lọc m = 1
  - $y(n) = f_1(n) = x(n) + \alpha_1(1)x(n-1)$
  - $\alpha_1(1) = K_1$



- Bộ lọc m = 2
  - $y(n) = f_2(n) = x(n) + \alpha_2(1)x(n-1) + \alpha_2(2)x(n-2)$
  - $\alpha_2(1) = K_1(1+K_2)$
  - $\alpha_2(2) = K_2$



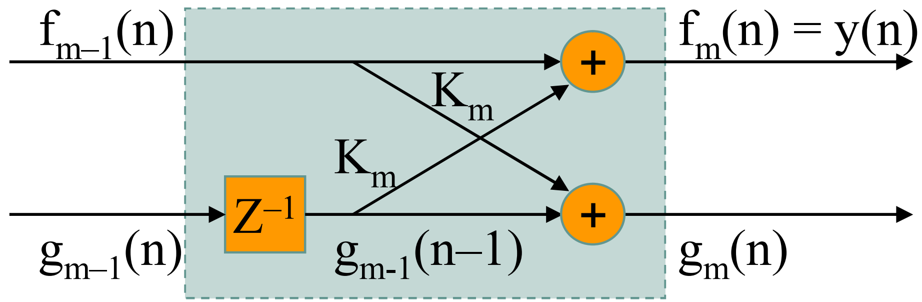
FIR – Cấu trúc Lattice



$$f_0(n) = g_0(n) = x(n)$$

$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + K_m g_{m-1}(n-1)$$

$$g_m(n) = K_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1)$$



$$F_m(z) = A_m(z)X(z) \Rightarrow A_m(z) = \frac{F_m(z)}{X(z)}$$

Hàm h/t của bộ lọc dự đoán thuận

$$G_m(z) = B_m(z)X(z) \Rightarrow B_m(z) = \frac{G_m(z)}{X(z)}$$

Hàm h/t của bộ lọc dự đoán nghịch

$$B_m(z) = \sum_{k=0}^{m} \beta_m(k) z^{-k} \quad \text{với} \quad \beta(m) = 1$$

$B_m(z)$: đa thức nghịch đảo của $A_m(z)$

$$\beta_m(k) = \alpha_m(m-k) \Rightarrow B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1})$$

FIR – Cấu trúc Lattice

- Quan hệ giữa hệ số bộ lọc dạng cấu trúc lattice và hệ số bộ lọc dạng cấu trúc trực tiếp

$$f_0(n) = g_0(n) = x(n)$$
$$f_m(n) = f_{m-1}(n) + K_m g_{m-1}(n-1)$$
$$g_m(n) = K_m f_{m-1}(n) + g_{m-1}(n-1)$$

BĐ Z

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z)$$
$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + K_m z^{-1} G_{m-1}(z)$$
$$G_m(z) = K_m F_{m-1}(z) + z^{-1} G_{m-1}(z-1)$$

/ X(z)

$$A_0(z) = B_0(z) = 1$$
$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z)$$
$$B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z)$$

Tổng hợp

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} B_{m-1}(z) \end{bmatrix}$$

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} [z^{-(m-1)} A_{m-1}(z^{-1})]$$

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_m(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{m-1}(k) z^{-k} + K_m \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{m-1}(m-1-k) z^{-(k+1)}$$

$$\begin{cases} \alpha_m(0) = 1 \\ \alpha_m(m) = K_m \\ \alpha_m(k) = \alpha_{m-1}(k) + K_m \alpha_{m-1}(m-k) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 \le k \le m-1 \\ m = 1,2,\ldots, M-1 \end{cases}$$

Cấu trúc hiện thực cho hệ IIR - Cấu trúc trực tiếp

- Hệ IIR

$$y(n) = -\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

  - H(z) gồm $H_1(z)$ cascade với $H_2(z)$

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

hệ toàn zero (FIR)

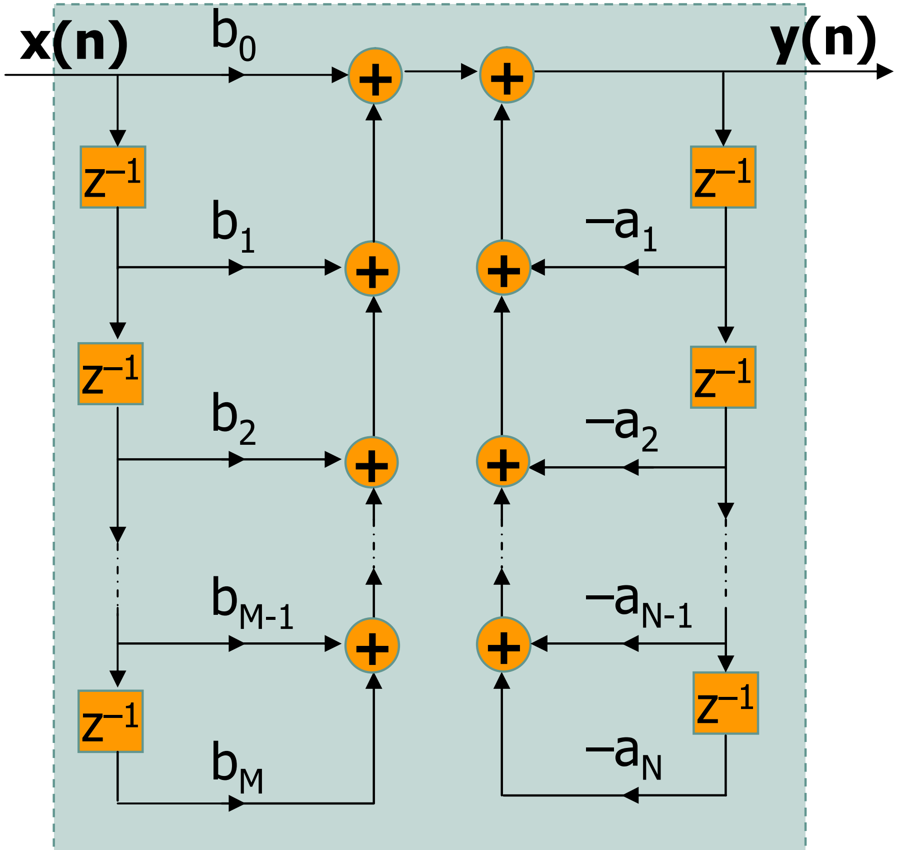
$$H_2(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

hệ toàn pole

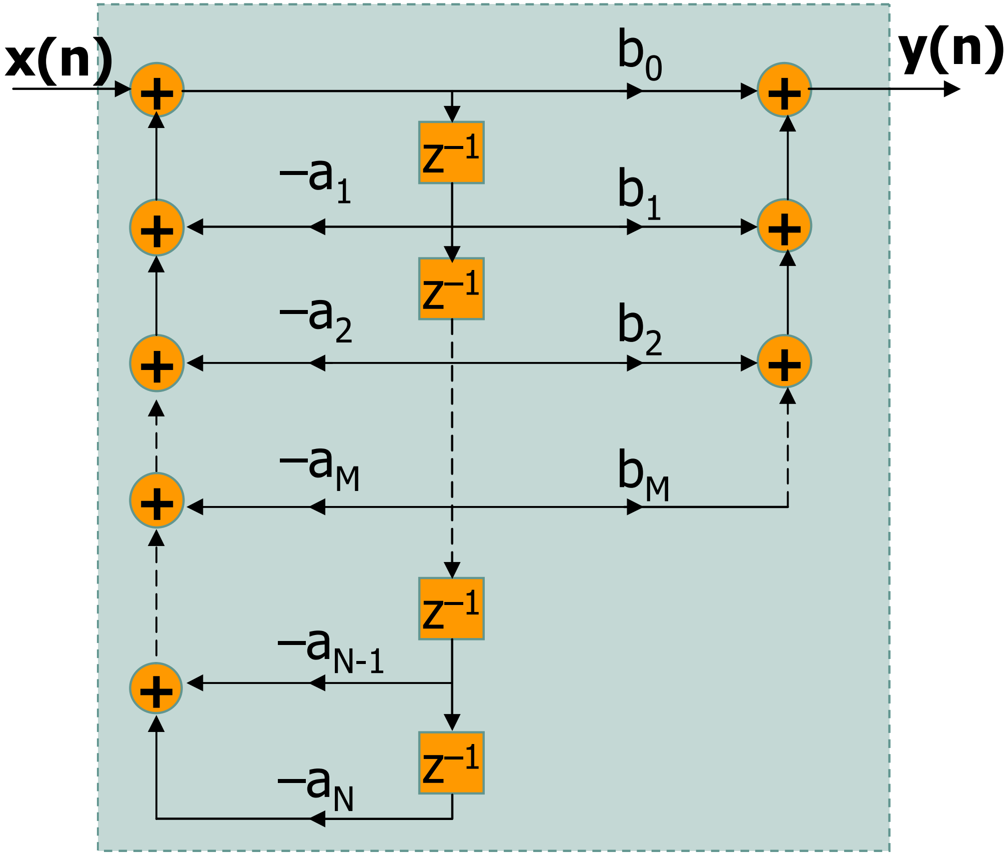
  - $H_1(z)$ đặt trước $H_2(z)$: cấu trúc trực tiếp dạng I
  - $H_2(z)$ đặt trước $H_1(z)$: cấu trúc trực tiếp dạng II

IIR – Cấu trúc trực tiếp

Dạng I



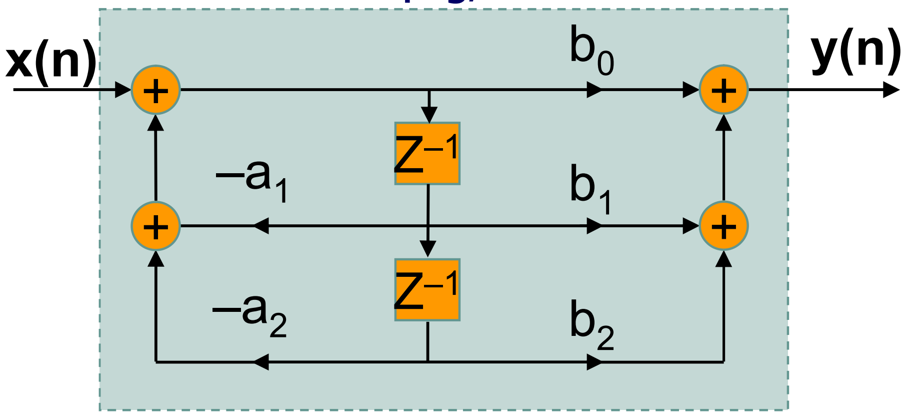
Dạng II

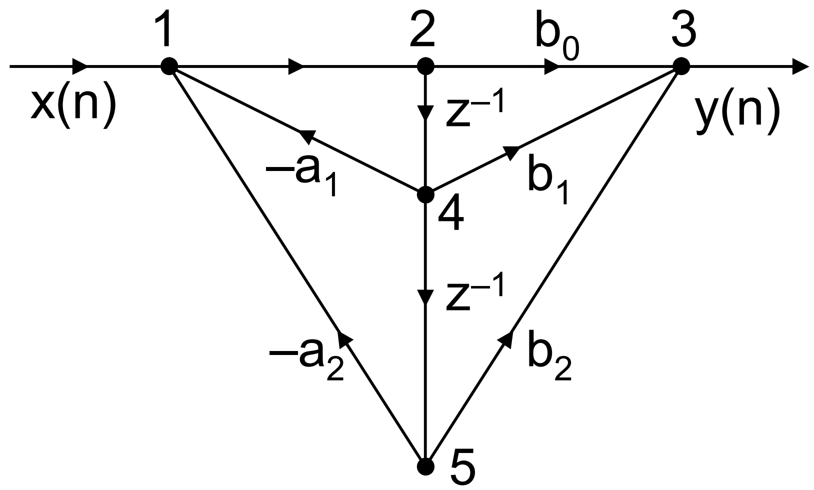


- Nhược điểm (cả 2 cấu trúc): khi lượng tử hóa các tham số của bộ lọc với N lớn, sai số nhỏ cũng dẫn đến sự thay đổi lớn vị trí điểm zero và điểm pole của h/t

IIR – Cấu trúc đảo

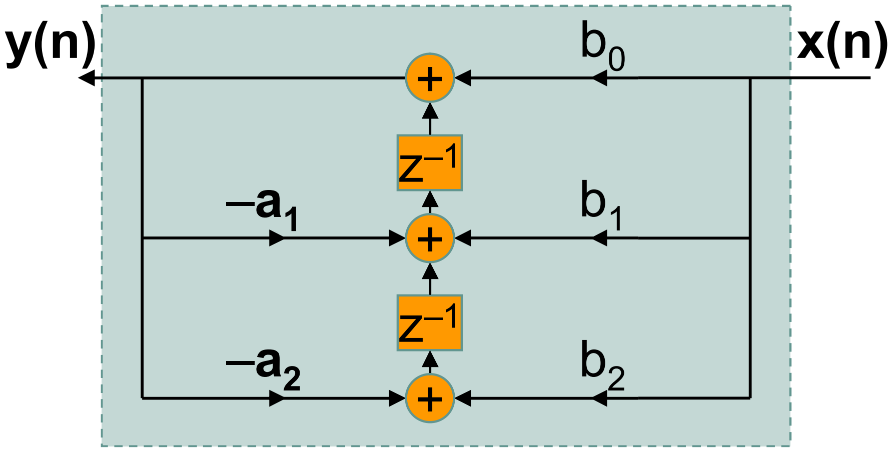
- Biểu diễn sơ đồ khối của h/t: biểu đồ dòng t/h
  - ✦ Nhánh: có hướng
  - ✦ Node: node cộng/node rẽ nhánh

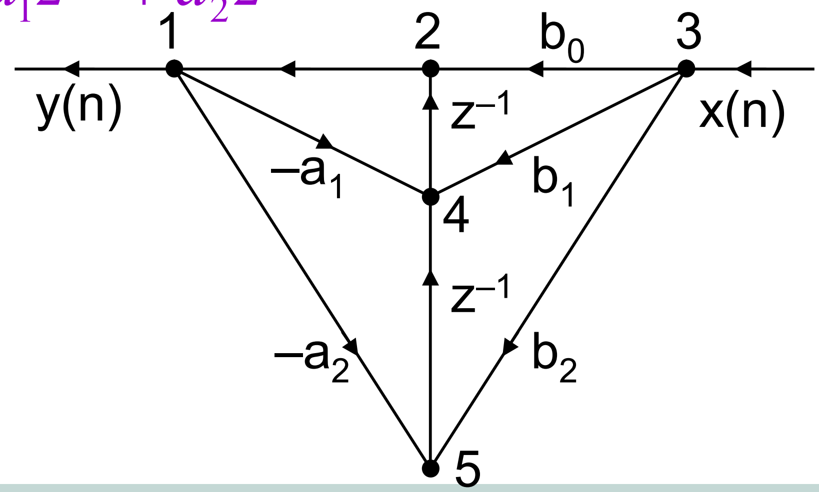




- Định lý đảo
  - ✦ Cấu trúc đảo có cùng hàm h/t

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$





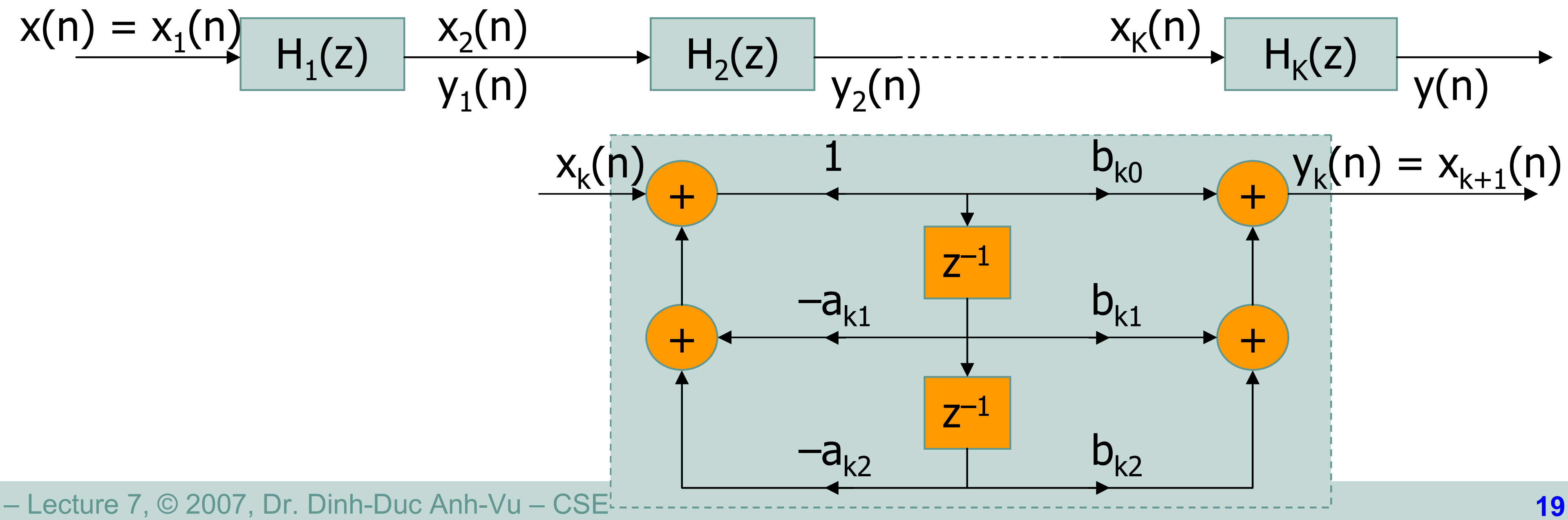
IIR – Cấu trúc cascade

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$H(z) = \prod_{k=1}^{K} H_k(z) \qquad K = [\tfrac{N+1}{2}]$$

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1} z^{-1} + b_{k2} z^{-2}}{1 + a_{k1} z^{-1} + a_{k2} z^{-2}}$$

- Các hệ số $\{a_{ki}\}$ và $\{b_{ki}\}$ thực → gộp các zero và các pole theo cặp liên hợp phức trong việc tách $H_k(z)$
- $H_k(z)$ có thể hiện thực dùng cấu trúc trực tiếp hoặc cấu trúc đảo



IIR – Cấu trúc song song

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

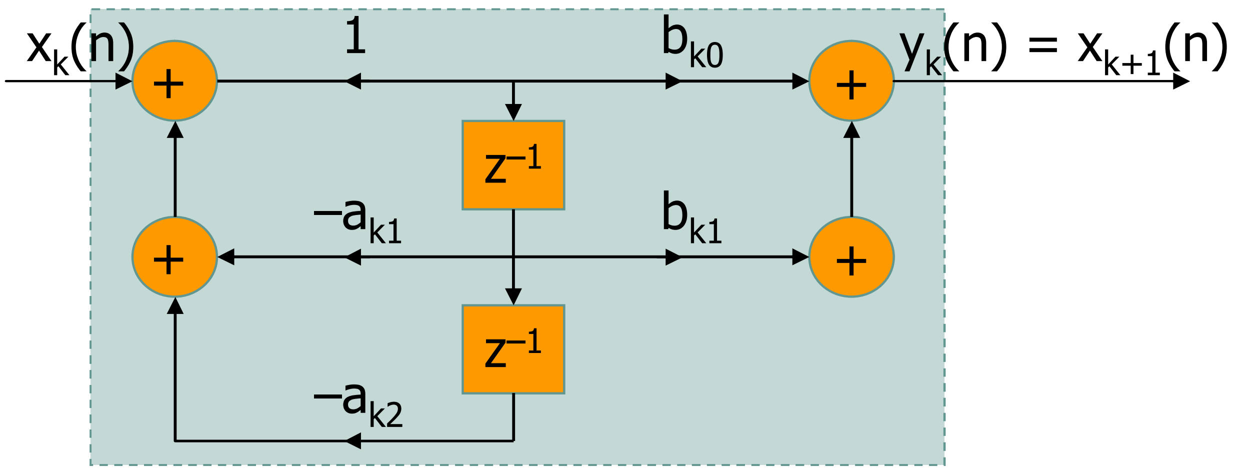
$$H(z) = C + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - p_k z^{-1}}$$

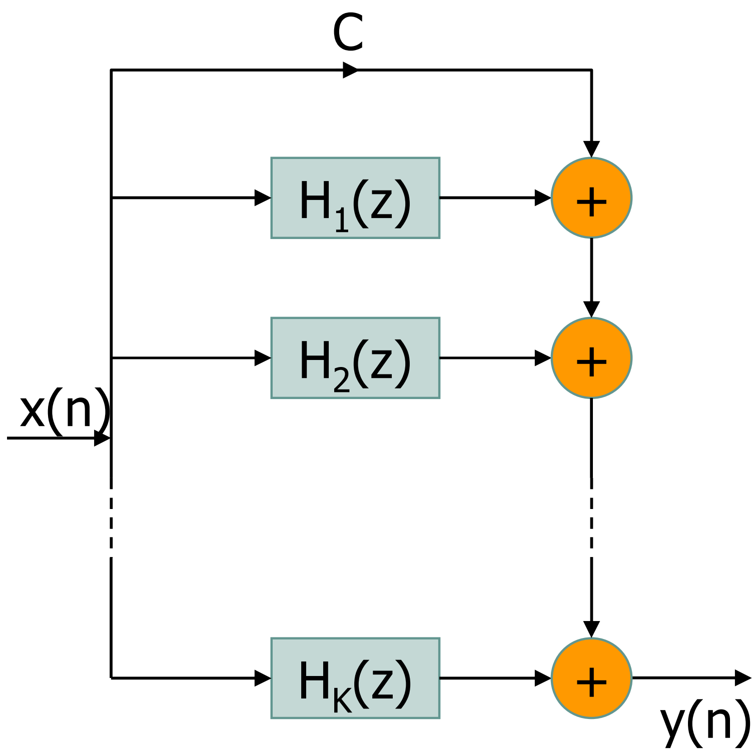
$$C \equiv \frac{b_N}{a_N}$$

- Nếu p_k phức, A_k cũng phức → gộp các pole liên hợp phức để tạo các hệ số thực

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^{K} H_k(z) \quad K = [\tfrac{N+1}{2}]$$

$$H_k(z) = \frac{b_{k0} + b_{k1} z^{-1}}{1 + a_{k1} z^{-1} + a_{k2} z^{-2}}$$





IIR – Cấu trúc Lattice-Ladder

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_N(k)\,y(n-k) + x(n)$$

$$H(z) = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N} a_N(k) z^{-k}} = \frac{1}{A_N(k)}$$

x(n) ↔ y(n)

$$x(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_N(k)\,x(n-k) + y(n)$$

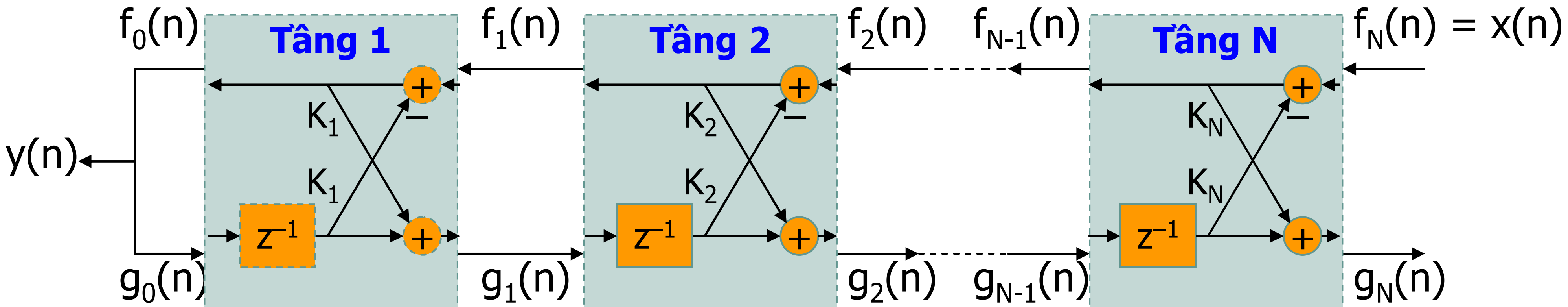
$$H(z) = 1+\sum_{k=1}^{N} a_N(k) z^{-k} = A_N(k)$$

Hệ IIR toàn pole

Hệ FIR toàn zero

Hệ này có thể được hiện thực bằng cách đảo vai trò ngõ nhập/xuất

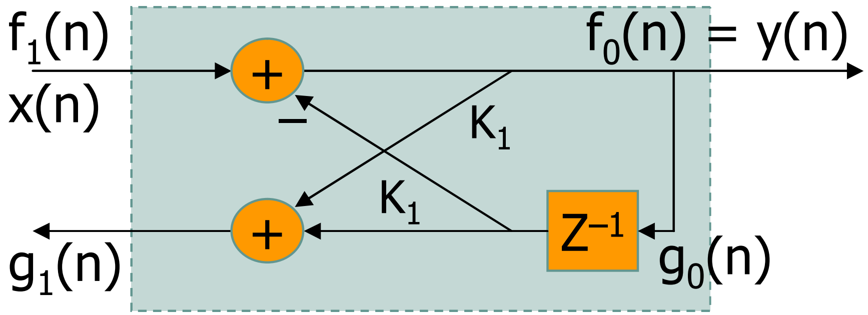
Cấu trúc lattice của hệ FIR toàn zero → $x(n) = f_N(n)$, $y(n) = f_0(n)$



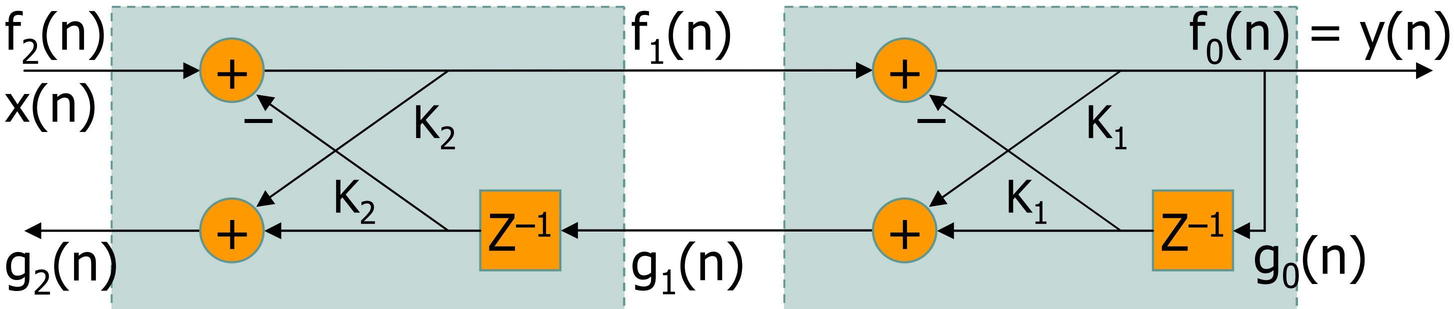
IIR – Cấu trúc Lattice-Ladder

- Hệ lattice 1 pole (hệ IIR toàn pole bậc 1)

$$x(n) = f_1(n)$$
$$f_0(n) = f_1(n) - K_1 g_0(n-1)$$
$$g_1(n) = K_1 f_0(n) + g_0(n-1)$$
$$y(n) = f_0(n) = -K_1 y(n-1) + x(n)$$



- Hệ lattice 2 pole (hệ IIR toàn pole bậc 2)



$$x(n) = f_2(n)$$
$$f_1(n) = f_2(n) - K_2 g_1(n-1)$$
$$g_2(n) = K_2 f_1(n) + g_1(n-1)$$
$$f_0(n) = f_1(n) - K_1 g_0(n-1)$$
$$g_1(n) = K_1 f_0(n) + g_0(n-1)$$
$$y(n) = f_0(n) = g_0(n)$$

$$y(n) = -K_1(1+K_2)y(n-1) - K_2 y(n-2) + x(n)$$

Hệ IIR 2 pole

$$g_2(n) = K_2 y(n) + K_1(1+K_2)y(n-1) + y(n-2)$$

Hệ FIR 2 zero

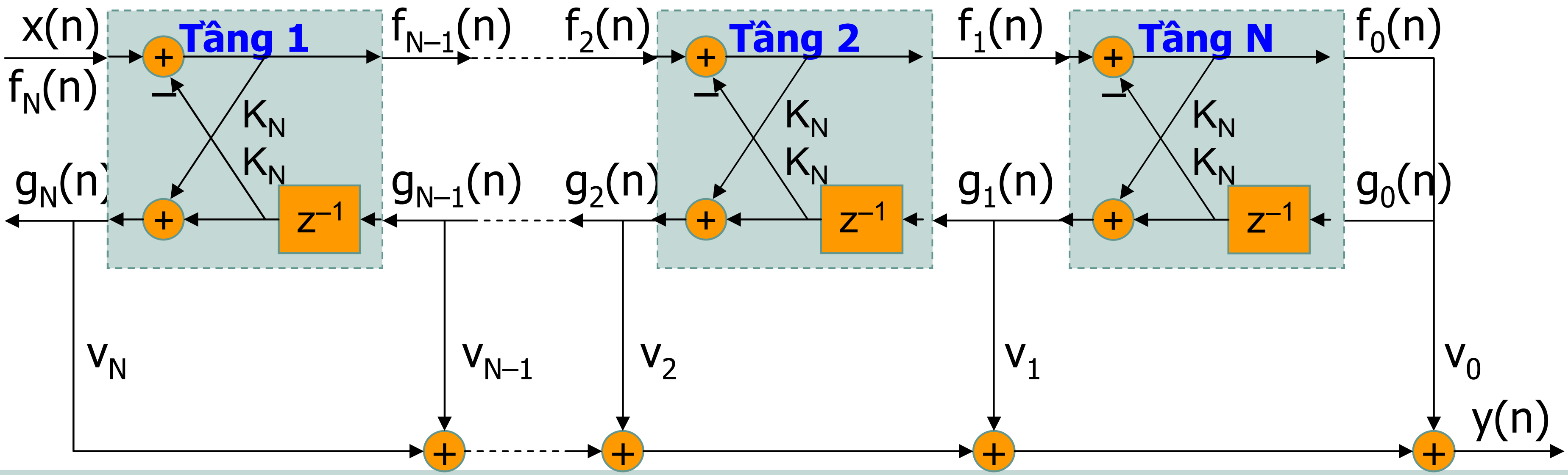
IIR – Cấu trúc Lattice-Ladder

- Hệ IIR chứa cả pole và zero

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} c_M(k)z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_N(k)z^{-k}}=\frac{C_M(z)}{A_N(z)} \Rightarrow \begin{cases} w(n)=-\sum_{k=1}^{N} a_N(k)w(n-k)+x(n) \\ y(n)=\sum_{k=0}^{M} c_M(k)w(n-k) \end{cases}$$

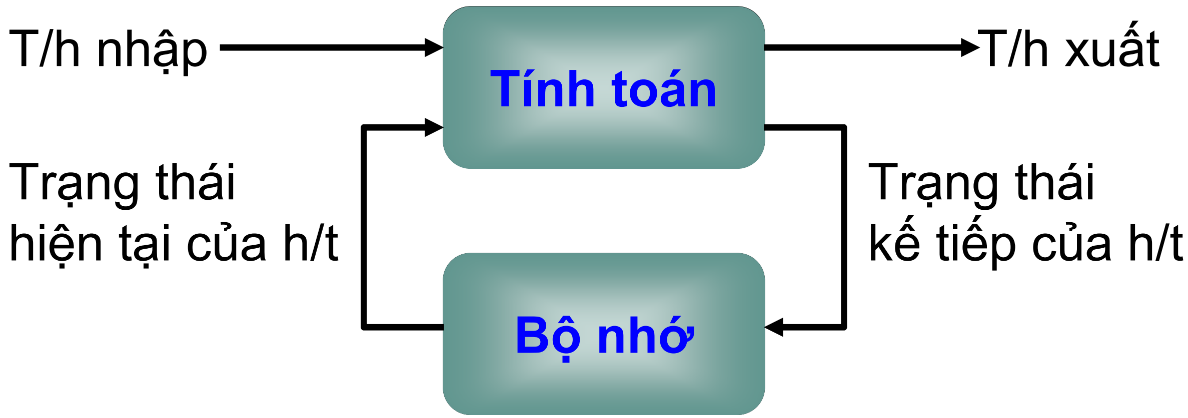
w(n): hệ IIR toàn pole – được thực hiện bằng cấu trúc lattice
y(n): hệ FIR toàn zero – được thực hiện bằng cấu trúc ladder tuyến tính

$$y(n)=\sum_{m=0}^{M} v_m g_m(n)$$



Không gian trạng thái

- Mô tả h/t
  - Bằng quan hệ vào-ra (mô tả bên ngoài)
  - Bằng không gian trạng thái (mô tả bên trong)
    - Quan hệ giữa ngõ xuất, ngõ nhập và các trạng thái bên trong của hệ
- Mô tả không gian trạng thái của hệ đặc trưng bởi PTSP
  - Trạng thái của h/t tại n_0: thông tin về h/t tại điểm n_0, kết hợp với ngõ nhập giúp xác định duy nhất ngõ xuất tại các điểm sau đó ($n \geq n_0$)
  - H/t có thể xem như bao gồm 2 phần
    - Phần có bộ nhớ: chứa thông tin về trạng thái của h/t
    - Phần không có bộ nhớ: tính toán giá trị ngõ xuất dựa trên giá trị ngõ nhập và trạng thái của h/t



Không gian trạng thái – Mô tả

$$y(n) = -\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

PT trạng thái

$$v(n+1) = Fv(n) + qx(n)$$

PT ngõ xuất

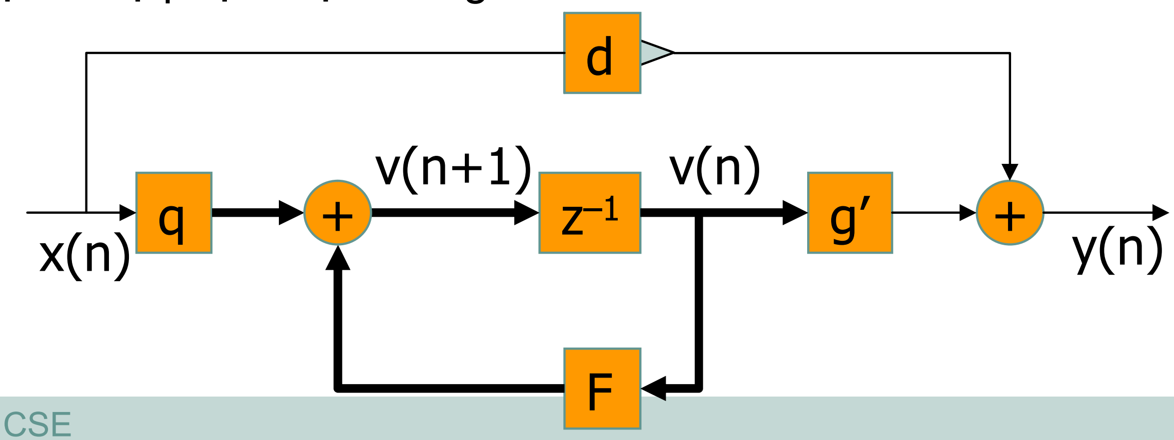
$$y(n) = g' v(n) + dx(n)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & M & M & M \\ M & M & M & M & \Lambda & 0 & 1 \\ -a_N & -a_{N-1} & \Lambda & \Lambda & \Lambda & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} b_N - b_0 a_N \\ b_{N-1} - b_0 a_{N-1} \\ M \\ b_2 - b_0 a_2 \\ b_1 - b_0 a_1 \end{bmatrix}$$

F, q, g, d: hằng số không phụ thuộc thời gian → hệ LTI

Ngược lại → hệ phụ thuộc thời gian



Không gian trạng thái – Giải PT

$$v(n+1) = Fv(n) + qx(n)$$
$$y(n) = g'v(n) + dx(n)$$

Đ/k đầu v(n_0)

$$v(n) = F^{n-n_0}v(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} F^{n-1-k}qx(k) \qquad n \geq n_0$$

F^0 Ma trận đường chéo chính (NxN)

$\Phi(i-j) \equiv F^{i-j} (i \geq j)$ Ma trận chuyển trạng thái

$$y(n) = g'\Phi(n-n_0)v(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} g'\Phi(n-1-k)qx(k) + dx(n) \qquad n \geq n_0$$

Đáp ứng không ngõ nhập

$$y_{zi}(n) = g'\Phi(n-n_0)v(n_0)$$

Đáp ứng trạng thái không

$$y_{zs}(n) = \sum_{k=n_0}^{n-1} g'\Phi(n-1-k)qx(k) + dx(n)$$

Đáp ứng xung đơn vị (n_0 = 0; v(0) = 0; x(n) = δ(n)

$$h(n) = g'\Phi(n-1)qu(n-1) + d\delta(n)$$

Không gian trạng thái - Phân tích trong miền Z

$$v(n+1) = Fv(n) + qx(n)$$

BĐ Z

$$V(z) = (zI - F)^{-1} qX(z)$$

$$y(n) = g' v(n) + dx(n)$$

BĐ Z

$$Y(z) = [g'(zI - F)^{-1} q + d] X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = g'(zI - F)^{-1} q + d$$

$$\Phi(n) = F^n$$

BĐ Z

$$Z\{\Phi(n)\} = \sum_{n=0}^{\infty} F^n z^{-n} = (I - Fz^{-1})^{-1} = z(zI - F)^{-1}$$

$$(zI - F)^{-1} = \frac{adj(zI - F)}{\det(zI - F)}$$

$$H(z) = g' \frac{adj(zI - F)}{\det(zI - F)} q + d$$

Pole của h/t [nghiệm PT det(zI – F) = 0] là eigenvalues của ma trận F

Lượng tử hóa các hệ số của bộ lọc

- Biểu diễn số (SV tự tham khảo)
- Hiện thực bộ lọc FIR và IIR bằng máy tính → phải lượng tử hóa các hệ số
  - Các hệ số biểu diễn không chính xác → vị trí điểm zero và điểm cực không như mong muốn → đáp ứng tần số của bộ lọc bị sai lệch
- Ảnh hưởng của việc lượng tử hóa các hệ số bộ lọc

H/t với các hệ số chưa lượng tử hóa

H/t với các hệ số được lượng tử hóa

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \qquad \overline{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} \overline{b}_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} \overline{a}_k z^{-k}}$$

$$\overline{a}_k = a_k + \Delta a_k \quad k = 1,2,\dots,N$$

$$\overline{b}_k = b_k + \Delta b_k \quad k = 0,1,\dots,M$$

Δa_k, Δb_k
Sai số lượng tử

$$D(z) = 1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} = \prod_{k=1}^{N} (1 - p_k z^{-1}) \qquad \overline{D}(z) = \prod_{k=1}^{N} (1 - \overline{p}_k z^{-1})$$

$$\overline{p}_k = p_k + \Delta p_k \quad k = 1,2,\dots,N \qquad \Delta p_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \Delta a_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{N} (p_i - p_l)} \Delta a_k$$

BK
TP.HCM

Chương 8

THIẾT KẾ BỘ LỌC SỐ

T.S. Đinh Đức Anh Vũ

Faculty of Computer Science and Engineering
HCMC University of Technology
268, av. Ly Thuong Kiet,
District 10, HoChiMinh city
Telephone : (08) 864-7256 (ext. 5843)
Fax : (08) 864-5137
Email : anhvu@hcmut.edu.vn
http://www.cse.hcmut.edu.vn/~anhvu

Nội dung

- Bộ lọc lý tưởng
- Bộ lọc thực tế
  - Bộ lọc với đáp ứng xung hữu hạn (FIR)
    - Bộ lọc tuyến tính pha
      - Phương pháp cửa sổ
      - Phương pháp mẫu tần số
    - Bộ lọc tuyến tính pha tối ưu
    - Bộ biến đổi Hilbert
    - So sánh các phương pháp thiết kế
  - Bộ lọc với đáp ứng xung vô hạn (IIR)
    - Phương pháp xấp xỉ đạo hàm
    - Phương pháp bất biến xung

Giới thiệu

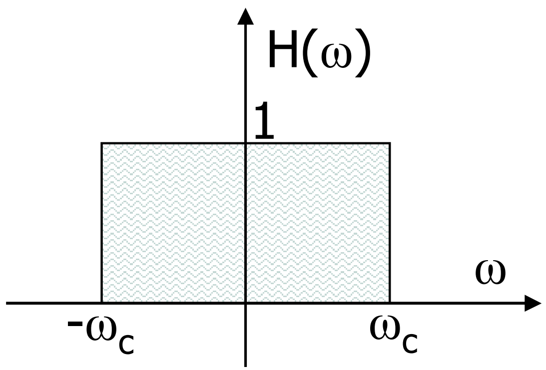
- Phương pháp thiết kế bộ lọc tần số
  - ✦Đặc tính bộ lọc được mô tả bởi đáp ứng biên độ và pha
  - ✦Tùy theo đáp ứng mong muốn, bộ lọc nhân quả FIR hoặc IIR sẽ được chọn
    - FIR
      - Được dùng khi có yêu cầu đáp ứng pha tuyến tính trong passband
      - Nhiều thông số hơn IIR → Độ phức tạp tính toán cao
    - IIR
      - Có các thuỳ biên ở dải stopband thấp hơn bộ lọc FIR có cùng số tham số → được dùng nhiều hơn so với FIR (khi độ méo pha trong passband có thể chấp nhận được)
      - Độ phức tạp tính toán không cao và tiêu tốn ít bộ nhớ
  - ✦Xác định các hệ số bộ lọc

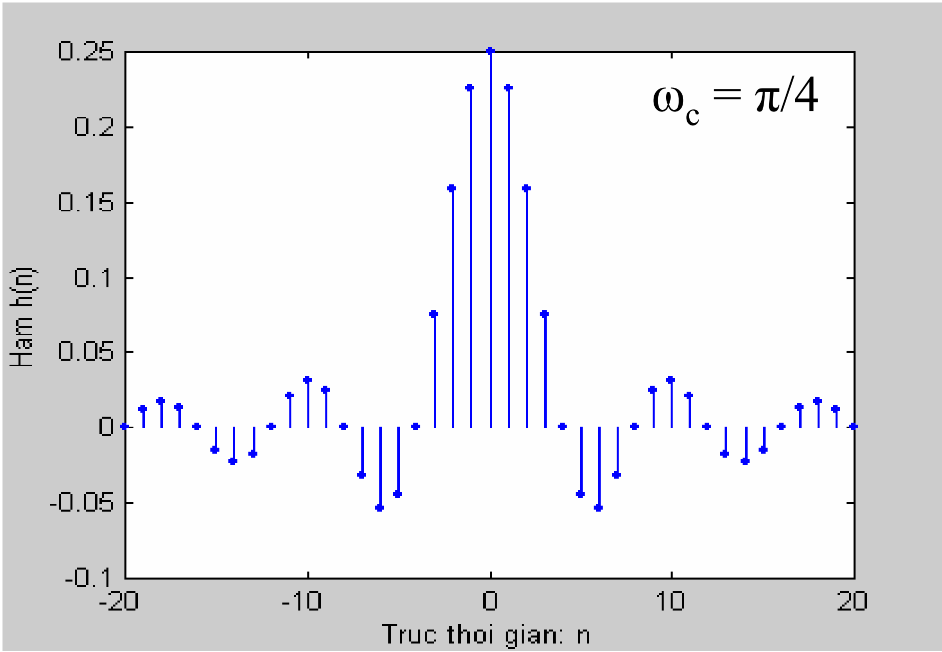
Tính nhân quả

- Xét bộ lọc lý tưởng

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \le \pi \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} & n = 0 \\ \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c n)}{\omega_c n} & n \neq 0 \end{cases}$$





Bộ lọc không nhân quả
→ không hiện thực được

Đ/k để bộ lọc nhân quả

- Định lý Paley-Wiener

h(n) có năng lượng hữu hạn
h(n) = 0 ∀n<0

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \left|\ln|H(\omega)|\right| d\omega < \infty$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\ln|H(\omega)|\right| d\omega < \infty$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 d\omega < \infty$$

$$\Leftarrow \quad \text{Với}\, \Theta(\omega), H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\Theta(\omega)}$$

$$h(n) : \text{nhân quả}$$

- $H(\omega)$ chỉ được phép = 0 tại một tập hữu hạn các tần số
- $|H(\omega)|$ không được là hằng số cho một khoảng tần
  - Việc chuyển từ passband sang stopband không được thẳng góc
- $H_R(\omega)$ và $H_I(\omega)$ phụ thuộc nhau → Phổ biên độ và phổ pha không thể chọn độc lập được

Đ/k để bộ lọc nhân quả

$$h(n) = h_e(n) + h_o(n)$$

$$h_e(n) = \tfrac{1}{2}\left[h(n) + h(-n)\right]$$
$$h_o(n) = \tfrac{1}{2}\left[h(n) - h(-n)\right]$$

h(n) nhân quả

$$h_o(n) = h_e(n) \quad n \geq 1$$

$$h(n) = 2h_e(n)u(n) - h_e(0)\delta(n) \qquad n \geq 0$$
$$h(n) = 2h_o(n)u(n) + h(0)\delta(n) \qquad n \geq 1$$

h(n) thực

$$\begin{array}{c} h(n) = h_e(n) + h_o(n) \\ \updownarrow F \quad \updownarrow F \\ H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega) \end{array}$$

h(n) được mô tả bởi $h_e(n)$

$H(\omega)$ được mô tả bởi $H_R(\omega)$

$H(\omega)$ được mô tả bởi $H_I(\omega)$ và h(0)

BĐ Hilbert rời rạc

$$H_I(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_R(\lambda)\cot\left(\frac{\omega-\lambda}{2}\right)d\lambda$$

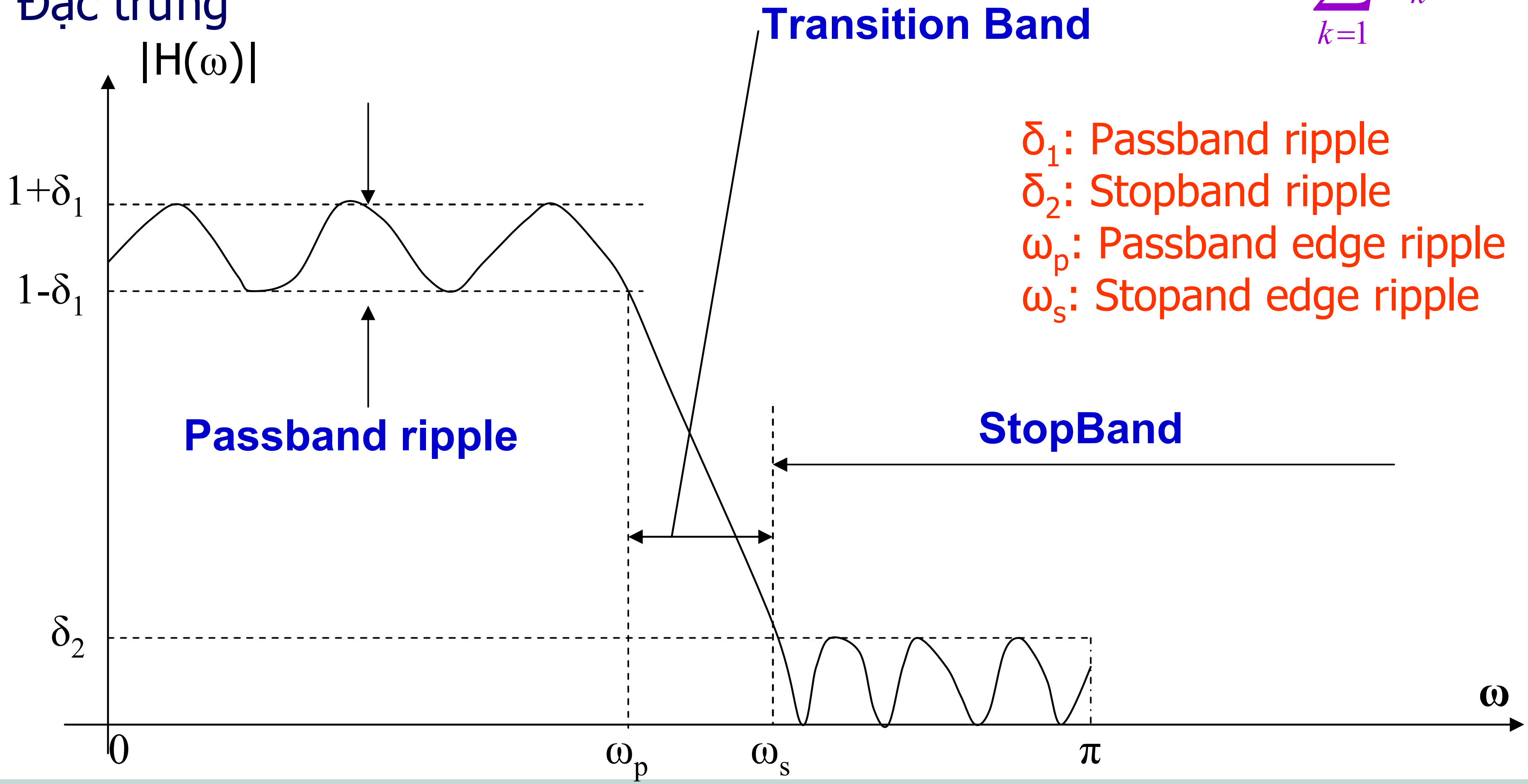
Bộ lọc tần số trong thực tế

- LTI

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

- Đặc trưng



δ_1: Passband ripple
δ_2: Stopband ripple
ω_p: Passband edge ripple
ω_s: Stopand edge ripple

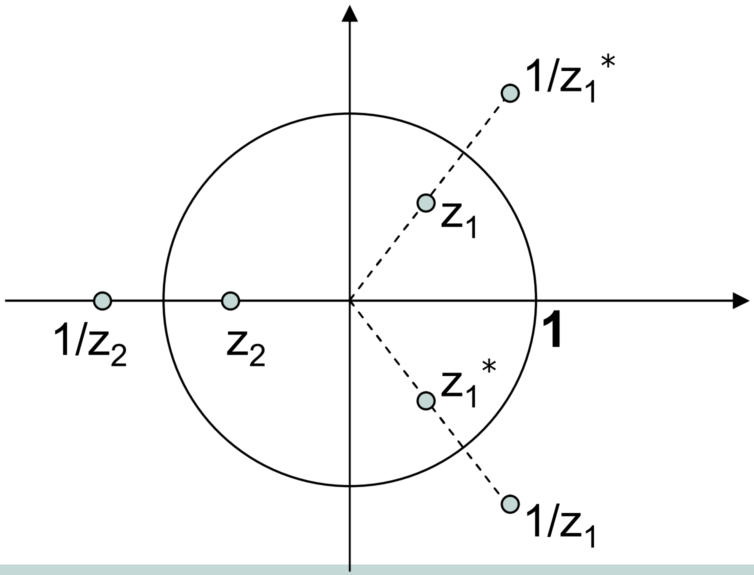
Thiết kế bộ lọc FIR – Tính đối xứng & phản đối xứng

- Bộ lọc FIR

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)$$

$h(k) = b_k$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$



- Bộ lọc FIR tuyến tính pha
  - ✦ H(ω) có pha Θ(ω) là hàm tuyến tính
  - ✦ Đ/k: $h(n) = \pm h(M-1-n)$
    $n = 0, 1, \ldots, M-1$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k}$$

- Thay z bởi z-1
- Nhân 2 vế với z-(M-1)
- $h(n) = \pm h(M-1-n)$

$$z^{-(M-1)} H(z^{-1}) = \pm H(z)$$

- **Nếu z_1 là nghiệm (hoặc zero) của H(z) thì $1/z_1$ cũng là nghiệm**
- **Để h(n) thực thì z_1^* cũng là nghiệm và $1/z_1^*$ cũng là nghiệm**

Thiết kế bộ lọc FIR – Tính đối xứng & phản đối xứng

- Hàm h/t $H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + \ldots + h(M-1)z^{-(M-1)}$

$$= \begin{cases} z^{-\frac{(M-1)}{2}}\left\{h(\frac{M-1}{2}) + \sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n)\left[z^{\frac{(M-1-2n)}{2}} \pm z^{-\frac{(M-1-2n)}{2}}\right]\right\} & M \text{ lẻ} \\ z^{-\frac{(M-1)}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n)\left[z^{\frac{(M-1-2n)}{2}} \pm z^{-\frac{(M-1-2n)}{2}}\right] & M \text{ chẵn} \end{cases}$$

- Đáp ứng xung đơn vị đối xứng $h(n) = h(M-1-n)$

$$H(\omega) = H_r(\omega)e^{-j\omega\frac{(M-1)}{2}}$$

Biên độ thực $$H_r(\omega) = \begin{cases} h(\frac{M-1}{2}) + 2\sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n)\cos\omega(\frac{M-1-2n}{2}) & M \text{ lẻ} \\ 2\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n)\cos\omega(\frac{M-1-2n}{2}) & M \text{ chẵn} \end{cases}$$

Đặc tính pha $$\Theta(\omega) = \begin{cases} -\omega(\frac{M-1}{2}) & H_r(\omega) > 0 \\ -\omega(\frac{M-1}{2}) + \pi & H_r(\omega) < 0 \end{cases}$$

Tuyến tính

Thiết kế bộ lọc FIR – Tính đối xứng & phản đối xứng

- Đáp ứng xung đơn vị phản đối xứng h(n) = –h(M–1–n)
  - Khi M lẻ h[(M–1)/2] = 0

$$H(\omega) = H_r(\omega)e^{-j[\omega\frac{(M-1)}{2}-\frac{\pi}{2}]}$$

Biên độ thực
$$H_r(\omega) = \begin{cases} 2\sum_{n=0}^{\frac{M-3}{2}} h(n)\sin\omega\left(\frac{M-1-2n}{2}\right) & M\ lẻ \\ 2\sum_{n=0}^{\frac{M}{2}-1} h(n)\sin\omega\left(\frac{M-1-2n}{2}\right) & M\ chẵn \end{cases}$$

Đặc tính pha
$$\Theta(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}-\omega\left(\frac{M-1}{2}\right) & H_r(\omega) > 0 \\ \frac{3\pi}{2}-\omega\left(\frac{M-1}{2}\right) & H_r(\omega) < 0 \end{cases}$$

Tuyến tính

- Đối xứng hay phản đối xứng ?
  - Tùy

h(n) = –h(M–1–n)
M lẻ → $H_r(0) = 0$, $H_r(\pi) = 0$ → **Không thích hợp cho các bộ lọc thông thấp và thông cao**

Thiết kế bộ lọc FIR tuyến tính pha – Phương pháp cửa sổ

- Giả sử
  - $H_d(\omega)$: hàm đáp ứng tần số mong muốn $$H_d(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n}$$
  - $h_d(n)$: hàm đáp ứng xung đơn vị mong muốn $$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$
    - $h_d(n)$ có chiều dài vô hạn
    - Để chiều dài $h_d(n)$ hữu hạn, cắt $h_d(n)$ tại điểm n = M-1
      - Nhân $h_d(n)$ với hàm cửa sổ w(n)
      - Cửa sổ hình chữ nhật

$$w(n) = \begin{cases} 1 & n = 0,1,\ldots, M-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- Đáp ứng xung mẫu của bộ lọc

$$h(n) = h_d(n) w(n)$$

$$= \begin{cases} h_d(n) & n = 0,1,.., M-1 \\ 0 & otherwise \end{cases} \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_d(v) W(\omega - v) dv$$

  - Với $H_d(\omega)$ cho trước, thì $W(\omega)$ có tác dụng làm trơn $H_d(\omega)$
  - Một $W(\omega)$ tốt khi
    - Có thuỳ chính phải rộng, cao hơn nhiều so với thuỳ phụ
    - w(n) không nên giảm xuống 0 tại hai bên cạnh

Thiết kế bộ lọc FIR tuyến tính pha – Phương pháp cửa sổ

$$W(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j\omega M}}{1-e^{-j\omega}}$$

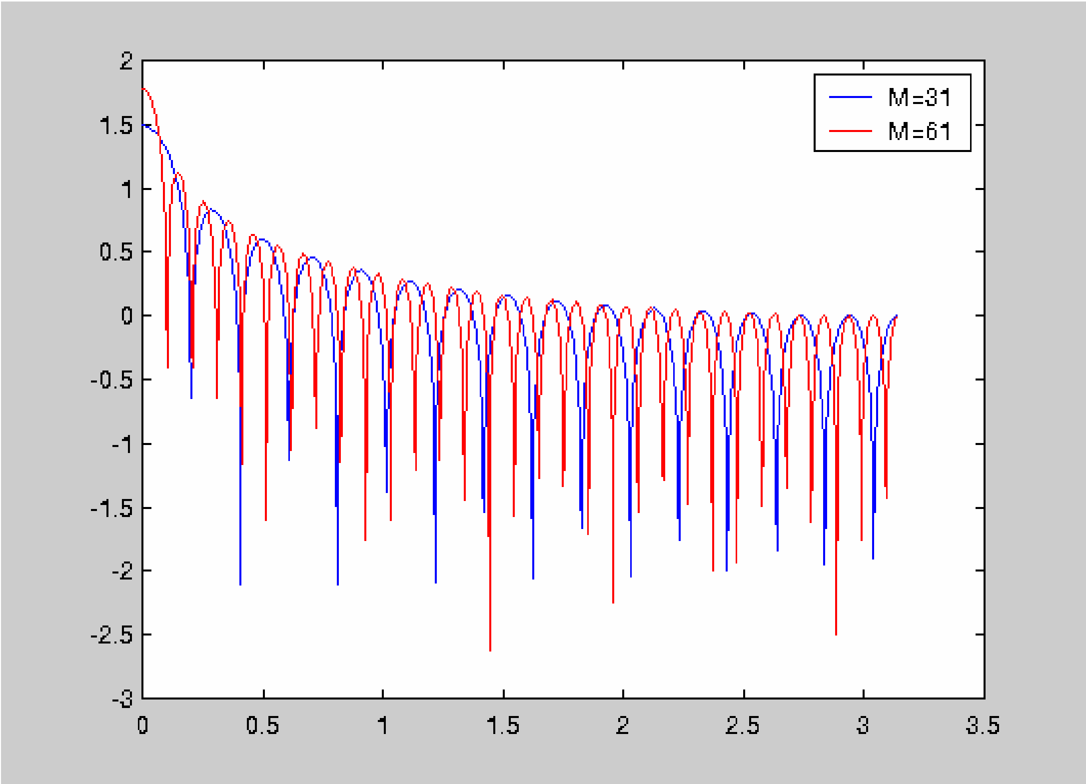
$$= e^{-j\omega(M-1)/2}\frac{\sin(\omega M/2)}{\sin(\omega/2)}$$

$$|W(\omega)| = \frac{\left|\sin(\frac{\omega M}{2})\right|}{\left|\sin(\frac{\omega}{2})\right|} \qquad -\pi \le \omega \le \pi$$

$$\Theta(\omega) = \begin{cases} -\omega(\frac{M-1}{2}) & \sin(\frac{\omega M}{2}) \ge 0 \\ \pi - \omega(\frac{M-1}{2}) & \sin(\frac{\omega M}{2}) < 0 \end{cases}$$

Độ rộng của thùy chính: 4π /M
[được đo bởi điểm zero đầu tiên của W(ω)]

Nhận xét:
- Thuỳ chính hẹp hơn khi M tăng
- Các thuỳ phụ tương đối lớn so với thuỳ chính và không thay đổi khi M tăng
- Chiều cao thuỳ phụ tăng khi M tăng



Thiết kế bộ lọc FIR tuyến tính pha – PP lấy mẫu tần số

- $H_d(\omega)$ được định nghĩa tại M điểm tần số cách đều

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k+\alpha) \qquad k = 0,1,\ldots,\frac{M-1}{2} \quad M \text{ lẻ}$$

$$k = 0,1,\ldots,\frac{M}{2}-1 \quad M \text{ chẵn}$$

$$\alpha = 0 \mid \tfrac{1}{2}$$

$$H_d(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h_d(n) e^{-j\omega n}$$

$$H_d(k+\alpha) \equiv H_d\left[\tfrac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right]$$

$$H_d(k+\alpha) = \sum_{n=0}^{M-1} h_d(n) e^{-j2\pi(k+\alpha)n/M} \qquad k = 0,1,\ldots,M-1$$

$$h_d(n) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} H_d(k+\alpha) e^{j2\pi(k+\alpha)n/M} \qquad n = 0,1,\ldots,M-1$$

α=0, 2 công thức này chính là công thức DFT và IDFT

Chuỗi h(n) thực

$$H_d(k+\alpha) = H_d^*(M-k-\alpha)$$

Chỉ cần định nghĩa $H_d(\omega)$ tại (M+1)/2 điểm khi M lẻ hoặc tại M/2 điểm khi M chẵn

Thiết kế bộ lọc FIR tuyến tính pha – PP lấy mẫu tần số

- Mẫu tần số

$$H_d(k+\alpha) = H_r\left(\tfrac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right)e^{j[\beta\pi/2 - 2\pi(k+\alpha)(M-1)/2M]}$$

Với $\begin{cases} \beta = 0 & \{h(n)\}\, \text{đối xứng} \\ \beta = 1 & \{h(n)\}\, \text{phản đối xứng} \end{cases}$

- Định nghĩa các mẫu tần số thực G(k+m)

$$G(k+\alpha) = (-1)^k H_r\left(\tfrac{2\pi}{M}(k+\alpha)\right)$$

$$H_d(k+\alpha) = G(k+\alpha)e^{jk\pi}e^{j[\beta\pi/2 - 2\pi(k+\alpha)(M-1)/2M]}$$

- Tùy theo giá trị α (0|½) và β (0|1), H(k) và h(n) sẽ có công thức đơn giản
  - Ví dụ khi $\alpha = 0$ và $\beta = 0$

$$H(k) = G(k)e^{j\pi k/M} \qquad k = 0,1,\ldots,M-1$$

$$G(k) = (-1)^k H_r\left(\tfrac{2\pi k}{M}\right)$$

$$G(k) = -G(M-k)$$

$$h(n) = \frac{1}{M}\left\{G(0) + 2\sum_{k=1}^{U} G(k)\cos\tfrac{2\pi k}{M}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\right\}$$

$$\text{với} \qquad U = \begin{cases} \frac{M-1}{2} & \text{khi } M \text{ lẻ} \\ \frac{M}{2} - 1 & \text{khi } M \text{ chẵn} \end{cases}$$

Thiết kế bộ lọc FIR tuyến tính pha – Phương pháp tối ưu

- Bài toán xấp xỉ Chebyshev
  - Tối ưu: sai số xấp xỉ giữa đáp ứng t/s mong muốn và thực tế phân bố đều trên passband và stopband $\Rightarrow$ tối thiểu hóa các sai số cực đại
  - Bộ lọc có gợn sóng trong cả passband và stopband

Thiết kế bộ lọc FIR tuyến tính pha – Phương pháp tối ưu

- Trường hợp 1: đáp ứng xung đơn vị đối xứng và M lẻ

$$H_r(\omega) = h\left(\tfrac{M-1}{2}\right) + 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\cos\omega\left(\tfrac{M-1}{2} - n\right)$$

k = (M-1)/2 – n

$$\boxed{H_r(\omega) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} a(k)\cos\omega k}$$

$$\alpha(k) = \begin{cases} h\left(\tfrac{M-1}{2}\right) & k = 0 \\ 2h\left(\tfrac{M-1}{2} - k\right) & k = 1,2,\ldots,\tfrac{M-1}{2} \end{cases}$$

Thiết kế bộ lọc FIR tuyến tính pha – Phương pháp tối ưu

- Trường hợp 2: đáp ứng xung đơn vị đối xứng và M chẵn

$$H_r(\omega) = 2\sum_{n=0}^{M/2-1} h(n)\cos\omega\left(\tfrac{M-1}{2} - n\right)$$

k = M/2 – n

$$H_r(\omega) = \sum_{k=1}^{M/2} b(k)\cos\omega\left(k - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$b(k) = 2h\left(\tfrac{M}{2} - k\right) \qquad k = 1, 2, \ldots, \tfrac{M}{2}$$

$$\boxed{H_r(\omega) = \cos\tfrac{\omega}{2}\sum_{k=0}^{M/2-1} b'(k)\cos\omega k}$$

$$b'(0) = \tfrac{1}{2}b(1)$$

$$b'(k) + b'(k-1) = 2b(k) \qquad k = 1, 2, \ldots, \tfrac{M}{2} - 2$$

$$b'\left(\tfrac{M}{2} - 1\right) = 2b\left(\tfrac{M}{2}\right)$$

Thiết kế bộ lọc FIR tuyến tính pha – Phương pháp tối ưu

- Trường hợp 3: đáp ứng xung đơn vị phản đối xứng và M lẻ

$$H_r(\omega) = 2\sum_{n=0}^{(M-3)/2} h(n)\sin\omega\left(\tfrac{M-1}{2} - n\right)$$

k = (M-1)/2 – n

$$H_r(\omega) = \sum_{k=1}^{(M-1)/2} c(k)\sin\omega k$$

$$c(k) = 2h\left(\tfrac{M-1}{2} - k\right) \qquad k = 1,2,\ldots,\tfrac{M-1}{2}$$

$$\boxed{H_r(\omega) = \sin\omega \sum_{k=0}^{(M-3)/2} c'(k)\cos\omega k}$$

$$c'\left(\tfrac{M-3}{2}\right) = c\left(\tfrac{M-1}{2}\right)$$

$$c'\left(\tfrac{M-5}{2}\right) = 2c\left(\tfrac{M-3}{2}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$c'(k-1) - c'(k+1) = 2c(k) \qquad 2 \le k \le \tfrac{M-5}{2}$$

$$c'(0) + \tfrac{1}{2}c'(2) = c(1)$$

Thiết kế bộ lọc FIR tuyến tính pha – Phương pháp tối ưu

- Trường hợp 4: đáp ứng xung đơn vị phản đối xứng và M chẵn

$$H_r(\omega) = 2\sum_{n=0}^{M/2-1} h(n)\sin\omega\left(\tfrac{M-1}{2} - n\right)$$

k = M/2 – n

$$H_r(\omega) = \sum_{k=1}^{M/2} d(k)\sin\omega\left(k - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$d(k) = 2h\left(\tfrac{M}{2} - k\right) \qquad k = 1,2,\ldots,\tfrac{M}{2}$$

$$\boxed{H_r(\omega) = \sin\tfrac{\omega}{2}\sum_{k=0}^{M/2-1} d'(k)\cos\omega k}$$

$$d'\left(\tfrac{M}{2} - 1\right) = 2d\left(\tfrac{M}{2}\right)$$

$$d'(k-1) - d'(k) = 2d(k) \qquad 2 \le k \le \tfrac{M}{2} - 1$$

$$d'(0) - \tfrac{1}{2}d'(1) = d(1)$$

Thiết kế bộ lọc FIR tuyến tính pha – Phương pháp tối ưu

- Tổng quát $H_r(\omega) = Q(\omega)P(\omega)$

$$Q(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{trường hợp } 1 \\ \cos\frac{\omega}{2} & \text{trường hợp } 2 \\ \sin\omega & \text{trường hợp } 3 \\ \sin\frac{\omega}{2} & \text{trường hợp } 4 \end{cases}$$

$$P(\omega) = \sum_{k=0}^{L} \alpha(k)\cos\omega k \qquad L = \begin{cases} (M-1)/2 & \text{trường hợp } 1 \\ M/2-1 & \text{trường hợp } 2 \\ (M-3)/2 & \text{trường hợp } 3 \\ M/2-1 & \text{trường hợp } 4 \end{cases}$$

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

SÁCH HƯỚNG DẪN HỌC TẬP

XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

(Dùng cho sinh viên hệ đào tạo đại học từ xa)

Lưu hành nội bộ

HÀ NỘI - [illegible]

Mở đầu

Sự phát triển của máy vi tính đã làm gia tăng một cách mạnh mẽ các ứng dụng của ***XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ*** (***Digital Signal Proccessing***). Xu hướng này đã được tăng cường bởi sự phát triển đồng thời của thuật toán số (Numerical Algorithms) cho xử lý tín hiệu số. Hiện nay, xử lý tín hiệu số đã trở nên một ứng dụng cơ bản cho kỹ thuật mạch tích hợp hiện đại với các chip có thể lập trình ở tốc độ cao. Vì vậy, xử lý tín hiệu số được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như:

- Xử lý tín hiệu âm thanh: nhận dạng tiếng nói / người nói; tổng hợp tiếng nói/ biến văn bản thành tiếng nói; kỹ thuật âm thanh số ;…
- Xử lý ảnh: thu nhận và khôi phục ảnh; làm nổi đường biên; lọc nhiễu; nhận dạng; mắt người máy; hoạt hình; các kỹ xảo về hình ảnh; bản đồ;…
- Viễn thông: xử lý tín hiệu thoại và tín hiệu hình; truyền dữ liệu; khử xuyên kênh; facsimile; truyền hình số; …
- Thiết bị đo lường và điều khiển: phân tích phổ; đo lường địa chấn; điều khiển vị trí và tốc độ; điều khiển tự động;…
- Quân sự: truyền thông bảo mật; xử lý tín hiệu rada, sonar; dẫn đường tên lửa;…
- Y học: não đồ; điện tim; chụp X quang; chụp CT(Computed Tomography Scans); nội soi;…

Có thể nói, xử lý tín hiệu số là nền tảng cho mọi lĩnh vực và chưa có sự biểu hiện bão hòa trong sự phát triển của nó.

Ta cũng cần lưu ý rằng, mặc dù tên của giáo trình là XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ, nhưng chúng ta sẽ nghiên cứu với một phạm vi tổng quát hơn, đó là XỬ LÝ TÍN HIỆU RỜI RẠC (Discrete signal processing). Bởi vì, tín hiệu số là một trường hợp đặc biệt của tín hiệu rời rạc, nên những phương pháp được áp dụng cho tín hiệu rời rạc cũng được áp dụng cho tín hiệu số, những kết luận đúng cho tín hiệu rời rạc cũng đúng cho tín hiệu số.

Muốn xử lý tín hiệu rời rạc, trước tiên ta phải biết cách biểu diễn và phân tích tín hiệu rời rạc. Việc xử lý tín hiệu rời rạc được thực hiện bởi các hệ thống rời rạc. Vì vậy ta phải nghiên cứu các vấn đề biểu diễn, phân tích, nhận dạng, thiết kế và thực hiện hệ thống rời rạc.

Bây giờ, chúng ta sẽ nhập môn với chủ đề biểu diễn và phân tích tín hiệu rời rạc, hệ thống rời rạc trong miền thời gian.

1. ĐỊNH NGHĨA TÍN HIỆU:

Tín hiệu là một đại lượng vật lý chứa thông tin (information). Về mặt toán học, tín hiệu được biểu diễn bằng một hàm của một hay nhiều biến độc lập.

Ví dụ: - Tín hiệu âm thanh là dao động cơ học lan truyền trong không khí, mang thông tin truyền đến tai. Khi biến thành tín hiệu điện (điện áp hay dòng điện) thì giá trị của nó là một hàm theo thời gian.

- Tín hiệu hình ảnh tĩnh hai chiều được đặc trưng bởi một hàm cường độ sáng của hai biến không gian. Khi biến thành tín hiệu điện, nó là hàm một biến thời gian.

Để thuận tiện, ta qui ước (không vì thế mà làm mất tính tổng quát) tín hiệu là một hàm của một biến độc lập và biến này là thời gian (mặc dù có khi không phải như vậy, chẳng hạn như sự biến đổi của áp suất theo độ cao).

Giá trị của hàm tương ứng với một giá trị của biến được gọi là biên độ (amplitude) của tín hiệu. Ta thấy rằng, thuật ngữ biên độ ở đây không phải là giá trị cực đại mà tín hiệu có thể đạt được.

2. PHÂN LOẠI TÍN HIỆU:

Tín hiệu được phân loại dựa vào nhiều cơ sở khác nhau và tương ứng có các cách phân loại khác nhau. Ở đây, ta dựa vào sự liên tục hay rời rạc của thời gian và biên độ để phân loại. *Có 4 loại tín hiệu như sau:*

- ***Tín hiệu tương tự (Analog signal): thời gian liên tục và biên độ cũng liên tục.***

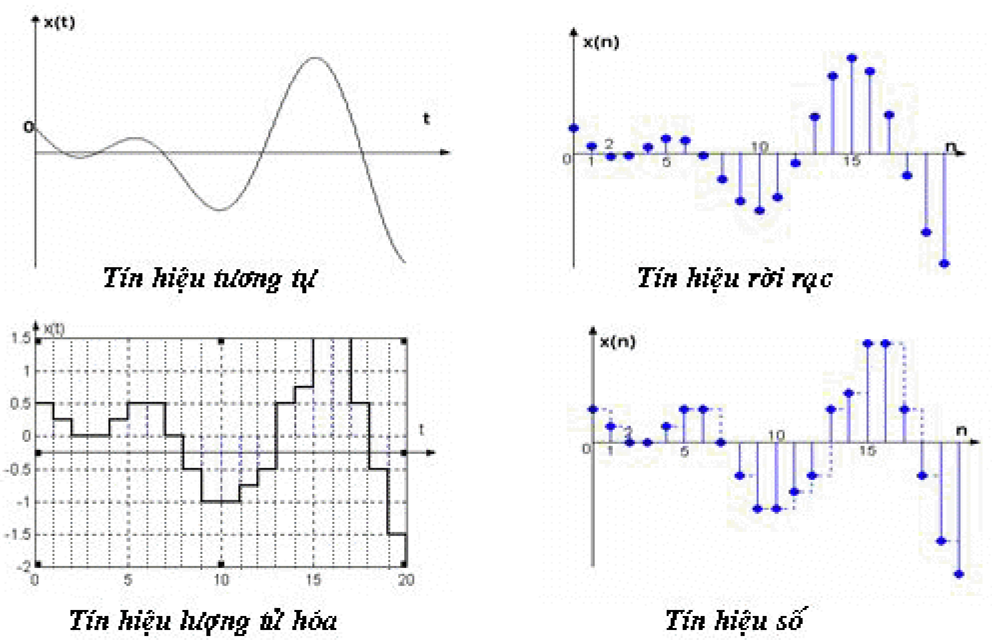
- ***Tín hiệu lượng tử hóa (Quantified signal): thời gian liên tục và biên độ rời rạc.*** Đây là tín hiệu tương tự có biên độ đã được rời rạc hóa.

- ***Tín hiệu rời rạc (Discrete signal): Là tín hiệu được biểu diễn bởi hàm của các biến rời rạc.***

+ Tín hiệu lấy mẫu: Hàm của tín hiệu rời rạc là liên tục (không được lượng tử hoá)

+ Tín hiệu số: Hàm của tín hiệu rời rạc là rời rạc. Tín hiệu số là tín hiệu được rời rạc cả biên độ và biến số

Các loại tín hiệu trên được minh họa trong hình 1.1.

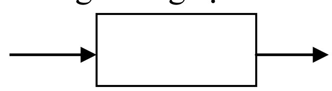


Hình 1.1 : Minh họa các loại tín hiệu

Nhận xét: Do tín hiệu số là một trường hợp đặc biệt của tín hiệu rời rạc nên các phương pháp xử lí tín hiệu rời rạc đều hoàn toàn được áp dụng cho xử lí tín hiệu số. Trong chương trình chúng ta sẽ tìm hiểu các phương pháp xử lí tín hiệu rời rạc.

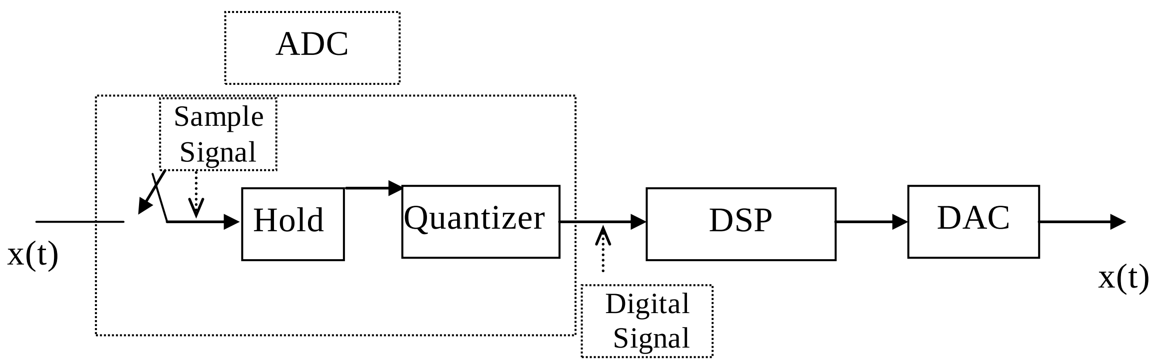
3. HỆ THỐNG XỬ LÝ TÍN HIỆU

a) Hệ thống tương tự



b) Hệ thống số

c) Hệ thống xử lý tín hiệu tổng quát



Tín hiệu x(t) ở đầu vào được chuyển thành tín hiệu số nhờ ADC, qua DSP đưa vào DAC ta có y(t).

Chương I

TÍN HIỆU RỜI RẠC VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC

I. TÍN HIỆU RỜI RẠC

1. Định nghĩa

Một tín hiệu rời rạc có thể được biểu diễn bằng một dãy các giá trị (thực hoặc phức). Phần tử thứ n của dãy (n là một số nguyên) được ký hiệu là x(n) và một dãy được ký hiệu như sau:

$$x = \{x(n)\} \quad \text{với} \quad -\infty < n < \infty \qquad (1.1.a)$$

x(n) được gọi là mẫu thứ n của tín hiệu x.

Ta cũng có thể biểu diễn theo kiểu liệt kê. Ví dụ:

$$x = \{\ ..., 0, 2, -1, 3, 25, -18, 1, 5, -7, 0,...\} \qquad (1.1.b)$$

Trong đó, phần tử được chỉ bởi mũi tên là phần tử rương ứng với n = 0, các phần tử tương ứng với n > 0 được xếp lần lượt về phía phải và ngược lại.

Nếu x = x(t) là một tín hiệu liên tục theo thời gian t và tín hiệu này được lấy mẫu cách đều nhau một khoảng thời gian là Ts, biên độ của mẫu thứ n là x(nTs). Ta thấy, x(n) là cách viết đơn giản hóa của x(nTs), ngầm hiểu rằng ta đã chuẩn hoá trục thời gian theo Ts.

Ts gọi là chu kỳ lấy mẫu (Sampling period).

Fs = 1/Ts được gọi là tần số lấy mẫu (Sampling frequency).

Ghi chú:

- Từ đây về sau, trục thời gian sẽ được chuẩn hóa theo Ts, khi cần trở về thời gian thực, ta thay biến n bằng nTs.
- Tín hiệu rời rạc chỉ có giá trị xác định ở các thời điểm nguyên n. Ngoài các thời điểm đó ra tín hiệu không có giá trị xác định, không được hiểu chúng có giá trị bằng 0.
- Để đơn giản, sau này, thay vì ký hiệu đầy đủ, ta chỉ cần viết x(n) và hiểu đây là dãy x = {x(n)}.

2. Các tín hiệu rời rạc cơ bản

a/. Tín hiệu xung đơn vị (Unit inpulse sequence):

Đây là một dãy cơ bản nhất, ký hiệu là δ(n) , được định nghĩa như sau:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases} \qquad (1.2)$$

hay:

$$\delta(n) = \{\ldots,0,\ldots,0,\underset{\uparrow}{1},0,\ldots,0,\ldots\} \qquad (1.3)$$

Dãy $\delta(n)$ được biểu diễn bằng đồ thị như hình 1.3 (a)

b/. Dãy chữ nhật: Dãy chữ nhật được kí hiệu là $rect_N(n)$ và được định nghĩa như sau:

$rect_N(n)$ [redacted] 0 [redacted]

n $conlai$

c/. Tín hiêu nhẩy bậc đơn vị (Unit step sequence)

Dãy này thường được ký hiệu là u(n) và được định nghĩa như sau:

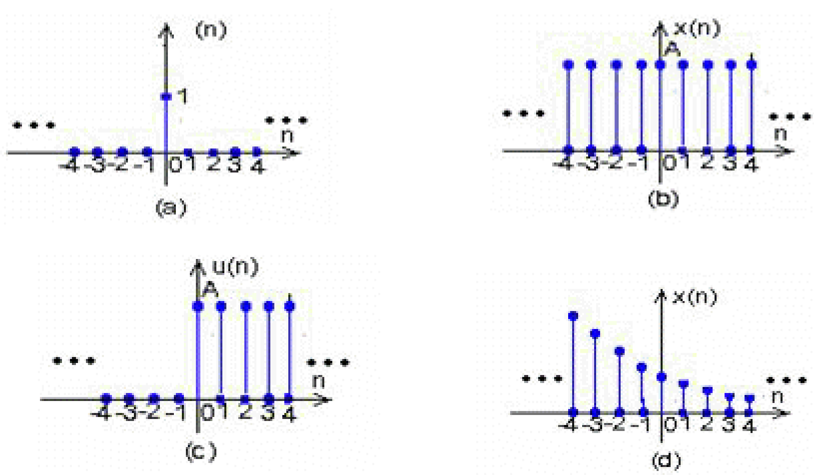
$$u(n) = \begin{cases} 1, & n\geq 0 \\ 0, & n<0 \end{cases} \qquad (1.5)$$

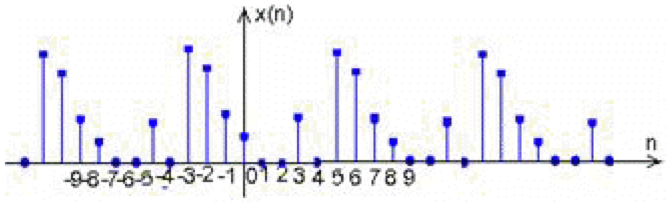
Dãy u(n) được biểu diễn bằng đồ thị hình 1.3 (c).

Mối quan hệ giữa tín hiệu nhãy bậc đơn vị với tín hiệu xung đơn vị:

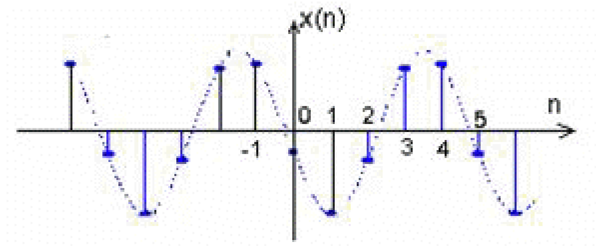
$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) \quad \Leftrightarrow \quad \delta(n) = u(n) - u(n-1) \qquad (1.6)$$

với u(n-1) là tín hiệu u(n) được dịch phải một mẫu.





(e)



(f)

Hình 1.3 Các dãy cơ bản

a) Dãy xung đơn vị

b) Dãy chữ nhật

c) Dãy nhảy bậc đơn vị

d) Dãy hàm mũ

e) Dãy tuần hoàn có chu kỳ N=8

f) Dãy hình sin có chu kỳ N=5

d/. Tín hiệu hàm mũ (Exponential sequence)

x(n) = A [redacted] (1.7)

Nếu A và α là số thực thì đây là dãy thực. Với một dãy thực, nếu $0 < \alpha < 1$ và A>0 thì dãy có các giá trị dương và giảm khi n tăng, hình 1.3(d). Nếu $-1 < \alpha < 0$ thì các giá trị của dãy sẽ lần lược đổi dấu và có độ lớn giảm khi n tăng. Nếu $|\alpha| > 1$ thì độ lớn của dãy sẽ tăng khi n tăng.

e/. Tín hiệu tuần hoàn (Periodic sequence)

Một tín hiệu x(n) được gọi là tuần hoàn với chu kỳ N khi: x(n+N) = x(n), với mọi n. Một tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ N=8 được biểu diễn bằng đồ thị hình 1.3(e). Dĩ nhiên, một tín hiệu hình sin cũng là một hiệu tuần hoàn.

Ví dụ: $x(n) = \sin[\frac{2\pi}{5}(n+3)]$ là một tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ là N=5, xem hình1.3(f)

f/. Dãy có chiều dài hữu hạn

Dãy được xác định với số mẫu N hữu hạn (N điểm trên trục hoành) gọi là dãy có chiều dài hữu hạn. N được gọi là chiều dài của dãy, kí hiệu là:

L[x(n)] = N

Ví dụ: L[$rect_N$(n)]=N

g/. Năng lượng và công xuất của dãy.

[redacted] Năng lượng của một dãy được định nghĩa như sau:

E_x [redacted] $n)|^2$

Trong đó $|x(n)|$ là modul của x(n).

Ví dụ: $E_{rect_N(n)}$ [redacted] $n)|^2$ [redacted] [redacted]N

[redacted] Công xuất trung bình của dãy:

P_x [redacted]im $\frac{1}{2N}$ [redacted] [redacted] $n)|^2$

[redacted] Năng lượng của dãy x(n) trong khoảng [redacted]N [redacted]n [redacted]N :

E_{xN} [redacted] $n)|^2$

Vậy E_x [redacted]im E_{xN} N[redacted]

P_x [redacted] $\frac{1}{2N}$ [redacted] E_{xN}

[redacted] Dãy năng lượng: nếu năng lượng của dãy x(n) là hữu hạn thì x(n) được gọi là dãy năng lượng.

[redacted] Dãy công xuất: nếu công xuất trung bình của x(n) là hữu hạn thì x(n) được gọi là dãy công xuất.

3. Các phép toán cơ bản của dãy

Cho 2 dãy $x_1 = \{x_1(n)\}$ và $x_2 = \{x_2(n)\}$ các phép toán cơ bản trên hai dãy được định nghĩa như sau:

1/. Phép nhân 2 dãy: $y = x_1 . x_2 = \{x_1(n).x_2(n)\}$ (1.8)

2/. Phép nhân 1 dãy với 1 hệ số: $y = a.x_1 = \{a.x_1(n)\}$ (1.9)

3/. Phép cộng 2 dãy: $y = x_1 + x_2 = \{x_1(n) + x_2(n)\}$ (1.10)

4/. Phép dịch một dãy (Shifting sequence):

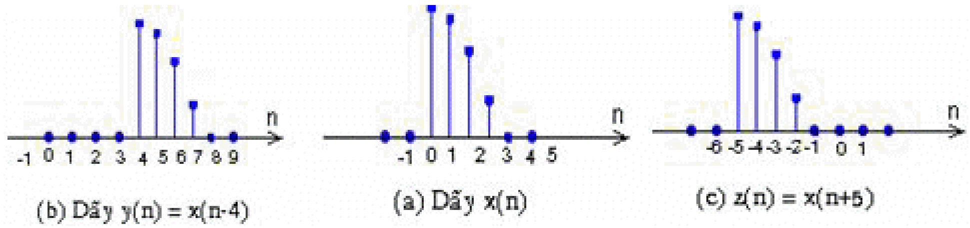
- Dịch phải: Gọi y là dãy kết quả trong phép dịch phải n_0 mẫu một dãy x ta có:

$y(n) = x(n-n_0)$, với $n_0 > 0$ (1.11)

- Dịch trái: Gọi z là dãy kết quả trong phép dịch trái n0 mẫu dãy x ta có:

$$z(n) = x(n+n_0), \text{ với } n_0 > 0 \qquad (1.12)$$

Phép dịch phải còn gọi là phép làm trễ (delay). Phép làm trễ một mẫu thường được ký hiệu bằng chữ D hoặc Z^{-1} . Các phép dịch trái và dịch phải được minh họa trong các hình 1.4.



Hình 1.4: (a) Dãy x(n)
(b) Phép dịch phaỉ 4 mẫu tr ên tín hiệu x(n)
(c) Phép dịch traí 5 mẫu trên tín hiệu x(n)

Nhận xét: *Ta thấy, một tín hiệu x(n) bất kỳ có thể biểu diễn bởi tín hiệu xung đơn vị như sau:*

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k) \qquad (1.13)$$

Cách biểu diễn này sẽ dẫn đến một kết quả quan trọng trong phần sau.

Ghi chú:

Các phép tính thực hiện trên các tín hiệu rời rạc chỉ có ý nghĩa khi tần số lấy mẫu của các tín hiệu này bằng nhau.

II. HỆ THỐNG RỜI RẠC

1. KHÁI NIỆM

a. Hệ thống thời gian rời rạc (gọi tắt là hệ thống rời rạc):

Hệ thống thời gian rời rạc là một thiết bị (device) hay là một thuật toán (algorithm) mà nó tác động lên một tín hiệu vào (dãy vào) để cung cấp một tín hiệu ra (dãy ra) theo một qui luật hay một thủ tục (procedure) tính toán nào đó. Định nghĩa theo toán học, đó là một phép biến đổi hay một toán tử (operator) mà nó biến một dãy vào x(n) thành dãy ra y(n).

Ký hiệu: $y(n) = T\{x(n)\}$ (1.14)

Tín hiệu vào được gọi là tác động hay kích thích (excitation), tín hiệu ra được gọi là đáp ứng (response). Biểu thức biểu diễn mối quan hệ giữa kích thích và đáp ứng được gọi là quan hệ vào ra của hệ thống.

Quan hệ vào ra của một hệ thống rời rạc còn được biểu diễn như hình 1.5.

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n)$$

Hình1.5 Ký hiệu một hệ thống rời rạc

Ví dụ 1.1: Hệ thống làm trễ lý tưởng được định nghĩa bởi phương trình:

$y(n) = x(n - n_d)$, với -[redacted] n < [redacted] (1.15)

n_d là một số nguyên dương không đổi gọi là độ trễ của hệ thống.

Ví dụ 1.2: Hệ thống trung bình động (Moving average system) được định nghĩa bởi phương trình:

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n-k)$$

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \begin{Bmatrix} x(n+M_1) + x(n+M_1-1) + \ldots + x(n) \\ + x(n-1) + \ldots + x(n-M_2) \end{Bmatrix} \qquad (1.16)$$

với M1 và M2 là các số nguyên dương.

Hệ thống này tính mẫu thứ n của dãy ra là trung bình của (M1 + M2 + 1) mẫu của dãy vào xung quanh mẫu thứ n, từ mẫu thứ n-M2 đến mẫu thứ n+M1 .

b. Đáp ứng xung (impulse response) của một hệ thống rời rạc

Đáp ứng xung h(n) của một hệ thống rời rạc là đáp ứng của hệ thống khi kích thích là tín hiệu xung đơn vị [redacted]n), ta có:

$$h(n) = T\{\delta(n)\} \text{ hay } \delta(n) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow h(n) \qquad (1.17)$$

Trong các phần sau, ta sẽ thấy, trong các điều kiện xác định đáp ứng xung của một hệ thống có thể mô tả một cách đầy đủ hệ thống đó.

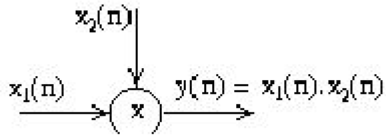
Ví dụ 1.3: Đáp ứng xung của hệ thống trung bình động là:

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta(n-k) = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1 + M_2 + 1} & , -M_1 \le n \le M_2 \\ 0 & , \text{nơi khác} \end{cases} \qquad (1.18)$$

c. Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

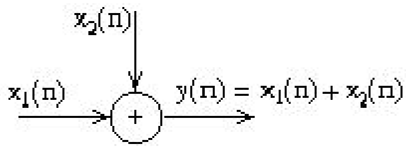
Để có thể biểu diễn một hệ thống bằng sơ đồ khối, ta cần định nghĩa các phần tử cơ bản. Một hệ thống phức tạp sẽ là sự liên kết của các phần tử cơ bản này.

c1/. Phần tử nhân dãy với dãy (signal multiplier), tương ứng với phép nhân hai dãy, có sơ đồ khối như sau:

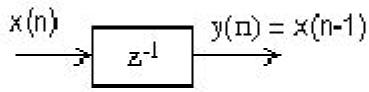


c2/. Phần tử nhân một dãy với một hằng số (Constant multiplier), tương ứng với phép nhân một hệ số với một dãy, có sơ đồ khối như sau:

c3/. Phần tử cộng (Adder), tương ứng với phép cộng hai dãy, có sơ đồ khối như sau:



c4/. Phần tử làm trễ một mẫu (Unit Delay Element), tương ứng với phép làm trễ một mẫu, có sơ đồ khối như sau:



Trong các phần sau, ta sẽ thành lập một hệ thống phức tạp bằng sự liên kết các phần tử cơ bản này.

2. PHÂN LOẠI HỆ THỐNG RỜI RẠC

Các hệ thống rời rạc được phân loại dựa vào các thuộc tính của nó, cụ thể là các thuộc tính của toán tử biểu diễn hệ thống (T).

1/. Hệ thống không nhớ (Memoryless systems):

Hệ thống không nhớ còn được gọi là hệ thống tĩnh (Static systems) là một hệ thống mà đáp ứng y(n) ở mỗi thời điểm n chỉ phụ thuộc vào giá trị của tác động x(n) ở cùng thời điểm n đó.

Một hệ thống không thỏa mãn định nghĩa trên được gọi là hệ thống có nhớ hay hệ *thống động (Dynamic systems).*

Ví dụ 1.4:

- Hệ thống được mô tả bởi quan hệ vào ra như sau: y(n) = [x(n)]2 , với mọi giá trị của n, là một hệ thống không nhớ.
- Hệ thống làm trễ trong ví dụ 1.1, nói chung là một hệ thống có nhớ khi $n_d>0$.
- Hệ thống trung bình động trong ví dụ 1.2 là hệ thống có nhớ, trừ khi $M_1=M_2=0$.

2/. Hệ thống tuyến tính (Linear systems)

Một hệ thống được gọi là tuyến tính nếu nó thỏa mãn nguyên lý chồng chất (Principle of superposition). Gọi $y_1(n)$ và $y_2(n)$ lần lượt là đáp ứng của hệ thống *tương ứng với các tác động $x_1(n)$ và $x_2(n)$, hệ thống là tuyến tính nếu và chỉ nếu:*

$$T\{a.x_1(n) + b.x_2(n)\} = a.T\{x_1(n)\} + b.T\{x_{21}(n)\} = a.y_1(n) + b.y_2(n) \qquad (1.19)$$

với a, b là 2 hằng số bất kỳ và với mọi n.

Ta thấy, đối với một hệ thống tuyến tính, thì đáp ứng của một tổng các tác động bằng tổng đáp ứng của hệ ứng với từng tác động riêng lẻ.

Một hệ thống không thỏa mãn định nghĩa trên được gọi là hệ thống phi tuyến (Nonliear systems).

Ví dụ : Ta có thể chứng minh được hệ thống tích lũy (accumulator) được định nghĩa bởi quan hệ:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \qquad (1.20)$$

là một hệ thống tuyến tính. Hệ thống này được gọi là hệ thống tích lũy vì mẫu thứ n của đáp ứng bằng tổng tích lũy tất cã các giá trị của tín hiệu vào trước đó đến thời điểm thứ n.

Chứng minh: Đặt $y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1(k)$ *và* $y_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2(k)$ *thì*

$$y(n) = T\{a.x_1(n) + b.x_2(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{n} \{a.x_1(k) + b.x_2(k)\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{n} a.x_1(k) + \sum_{k=-\infty}^{n} b.x_2(k) = a\sum_{k=-\infty}^{n} x_1(k) + b\sum_{k=-\infty}^{n} x_2(k)$$

$= a.y_1(n) + b.y_2(n)$ với a và b là các hằng số bất kỳ.

Vậy hệ thống này là một hệ thống tuyến tính.

3/. Hệ thống bất biến theo thời gian (Time-Invariant systems)

Một hệ thống là bất biến theo thời gian nếu và chỉ nếu tín hiệu vào bị dịch n_d *mẫu thì đáp ứng cũng dịch* n_d *mẫu, ta có:*

Nếu $y(n) = T\{x(n)\}$ và $x_1(n) = x(n-n_d)$

thì $y_1(n) = T\{x_1(n)\} = \{x(n-n_d)\} = y(n - n_d)$ (1.21)

Ta có thể kiểm chứng rằng các hệ thống trong các ví dụ trước đều là hệ thống bất biến theo thời gian.

Ví dụ : Hệ thống nén (compressor) được định nghĩa bởi quan hệ:

$$y(n) = x(M.n) \qquad (1.22)$$

với $-\infty < n < \infty$ và M là một số nguyên dương.

Hệ thống này được gọi là hệ thống nén bởi vì nó loại bỏ (M-1) mẫu trong M mẫu (nó sinh ra một dãy mới bằng cách lấy một mẫu trong M mẫu). Ta sẽ chứng minh rằng hệ thống này không phải là một hệ thống bất biến.

Chứng minh: Gọi $y_1(n)$ là đáp ứng của tác động $x_1(n)$, với $x_1(n) = x(n - n_d)$, thì:

$$y_1(n) = x_1(Mn) = x(Mn - n_d)$$

Nhưng: $y(n-n_d) = x[M(n-n_d)]$ ($y_1(n)$

Ta thấy $x_1(n)$ bằng $x(n)$ được dịch n_d mẫu, nhưng $y_1(n)$ không bằng với $y(n)$ trong cùng phép dịch đó. Vậy hệ thống này không là hệ thống bất biến, trừ khi M = 1.

4/. Hệ thống nhân quả (Causal systems)

Một hệ thống là nhân quả nếu với mỗi giá trị n_0 của n, đáp ứng tại thời điểm $n=n_0$ chỉ phụ thuộc vào các giá trị của kích thích ở các thời điểm $n \leq n_0$. Ta thấy, đáp ứng của hệ chỉ phụ thuộc vào tác động ở quá khứ và hiện tại mà không phụ thuộc vào tác động ở tương lai. Ta có;

$$y(n) = T\{x(n)\} = F\{x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots\} \quad (1.23)$$

với F là một hàm nào đó.

Hệ thống trong ví dụ 1.1 là nhân quả khi n_d [redacted]) và không nhân quả khi $n_d < 0$.

Ví dụ : Hệ thống sai phân tới (Forward difference systems) được định nghĩa bởi quan hệ:

$$y(n) = x(n+1) - x(n) \quad (1.23)$$

Rõ ràng y(n) phụ thuộc vào x(n+1), vì vậy hệ thống này không có tính nhân quả.

Ngược lại, hệ thống sai phân lùi (Backward difference systems) được định nghĩa bởi quan hệ: $y(n) = x(n) - x(n-1)$ (1.24)

là một hệ thống nhân quả.

5/. Hệ thống ổn định (Stable systems)

Một hệ thống ổn định còn được gọi là hệ thống BIBO (Bounded-Input *Bounded*-Output) nếu và chỉ nếu với mỗi tín hiệu vào bị giới hạn sẽ cung cấp dãy *ra giới hạn.*

Một dãy vào x(n) bị giới hạn nếu tồn tại một số dương hữu hạn Bx sao cho:

$$|x(n)| \leq Bx < +\infty \text{ , với mọi n} \quad (1.25)$$

Một hệ thống ổn định đòi hỏi rằng, ứng với mỗi dãy vào hữu hạn, tồn tại một số dương By hữu hạn sao cho:

$$|y(n)| \leq By < +\infty \text{ , với mọi n} \quad (1.26)$$

Các hệ thống trong các ví dụ 1.1; 1.2; 1.3 và 1.6 là các hệ thống ổn định. Hệ thống tích lũy trong ví dụ 1.5 là hệ thống không ổn định.

Ghi chú: Các thuộc tính để phân loại hệ thống ở trên là các thuộc tính của hệ thống chứ không phải là các thuộc tính của tín hiệu vào. Các thuộc tính này phải thỏa mãn vời mọi tín hiệu vào.

3. HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BIẾN THEO THỜI GIAN (LTI: Linear Time-Invariant System)

1. KHÁI NIỆM

Hệ thống tuyến tính bất biến theo thời gian là hệ thống thỏa mãn đồng thời hai tính chất tuyến tính và bất biến.

Gọi T là một hệ thống LTI, sử dụng cách biểu diễn ở pt(1.13) và pt(1.14), ta có thể viết:

$$y(n) = T\{x(n)\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right\} \qquad (1.27)$$

với k là số nguyên.

Áp dụng tính chất tuyến tính, pt(1.27) có thể được viết lại:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T\{\delta(n-k)\} \qquad (1.28)$$

Đáp ứng xung của hệ thống là: h(n) = T{δ(n)}, vì hệ thống có tính bất biến, nên:

h(n - k) = T{[redacted]n - k)} (1.29)

Thay pt(1.29) vào pt(1.28) ta có:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) \qquad (1.30)$$

Từ pt(1.30), ta thấy một hệ thống LTI hoàn toàn có thể được đặc tả bởi đáp ứng xung của nó và ta có thể dùng pt(1.30) để tính đáp ứng của hệ thống ứng với một kích thích bất kỳ. Hệ thống LTI rất thuận lợi trong cách biểu diễn cũng như tính toán, đây là một hệ thống có nhiều ứng dụng quan trọng trong xử lý tín hiệu.

2. TÍCH CHẬP

2.1. Định nghĩa: Tích chập của hai dãy $x_1(n)$ và $x_2(n)$ bất kỳ, ký hiệu: * , được định nghĩa bởi biểu thức sau:

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k) \qquad (1.31)$$

Pt(1.30) được viết lại: $y(n) = x(n)*h(n)$ (1.32)

vậy, đáp ứng của một hệ thống bằng tích chập tín hiệu vào với đáp ứng xung của nó.

Như vậy, với mỗi một giá trị của n ta phải tính 1 tổng theo k của tích x(k).h(n-k) như sau:

Ví dụ:

…..

n [redacted]([redacted]) [redacted]$_{k}$ $k)h($[redacted]$)$

n [redacted](0) [redacted]$_{k}$ $k)h($[redacted]$)$

n [redacted](1) [redacted]$_{k}$ $k)h(1$ [redacted]$)$

n [redacted](2) [redacted]$_{k}$ $k)h(2$ [redacted]$)$

n [redacted](3) [redacted]$_{k}$ $k)h(3$ [redacted]$)$

…..

Tập hợp các giá trị của y(n) ta sẽ có y.

2.2. Phương pháp tính tích chập bằng đồ thị

Tích chập của hai dãy bất kỳ có thể được tính một cách nhanh chóng với sự trợ giúp của các chương trình trên máy vi tính. Ở đây, phương pháp tính tích chập bằng đồ thị được trình bày với mục đích minh họa. Trước tiên, để dễ dàng tìm dãy x_2(n-k), ta có thể viết lại:

$$x_2\ (n-k) = x_2\ [-(k - n)] \qquad (1.33)$$

Từ pt(1.33), ta thấy, nếu n>0, để có x_2(n-k) ta dịch x_2(-k) sang phải n mẫu, ngược lại, nếu n<0 ta dịch x_2(-k) sang trái |n| mẫu. Từ nhận xét này, Ta có thể đề ra một qui trình tính tích chập của hai dãy , với từng giá trị của n, bằng đồ thị như sau:

Bước 1: Chọn giá trị của n.

Bước 2: Lấy đối xứng x_2(k) qua gốc tọa độ ta được x_2(-k).

Bước 3: Dịch x_2(-k) sang trái |n| mẫu nếu n<0 và sang phải n mẫu nếu n>0, ta được dãy x_2(n-k).

Bước 4:Thực hiện các phép nhân x1(k).x_2(n-k), với -[redacted] k < [redacted]

Bước 5: Tính y(n) bằng cách cộng tất cả các kết quả được tính ở bước 4.

Chọn giá trị mới của n và lặp lại từ bước 3.

Ví dụ 1.8: Cho một hệ thống LTI có đáp ứng xung là :

$$h(n) = u(n) - u(n-N) = \begin{cases} 1, \text{ với } & 0 \le n < N-1 \\ 0, & \text{nơi khác} \end{cases} \quad (1.34)$$

tín hiệu vào là: $x(n) = a^n u(n)$. Tính đáp ứng y(n) của hệ thống, với N> 0 và |a| <1.

Giải:

Từ pt(1.32) ta có : $y(n) = x(n)*h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$, ta sẽ tính y(n) bằng phương pháp đồ thị.

@ Với n < 0: Hình 1.5(a). trình bày hai dãy x(k) và h(n-k) torng trường hợp n < 0 (với N = 4 và n = -3). Ta thấy trong trường hợp này, các thành phần khác 0 của x(k) và h(n-k) không trùng nhau, vì vậy:

$$y(n) = 0, \text{ với mọi } n < 0. \quad (1.35)$$

@ Với 0 ≤ n < N-1: Hình 1.5(b). trình bày hai dãy x(k) và h(n-k), trong trường này, ta thấy:

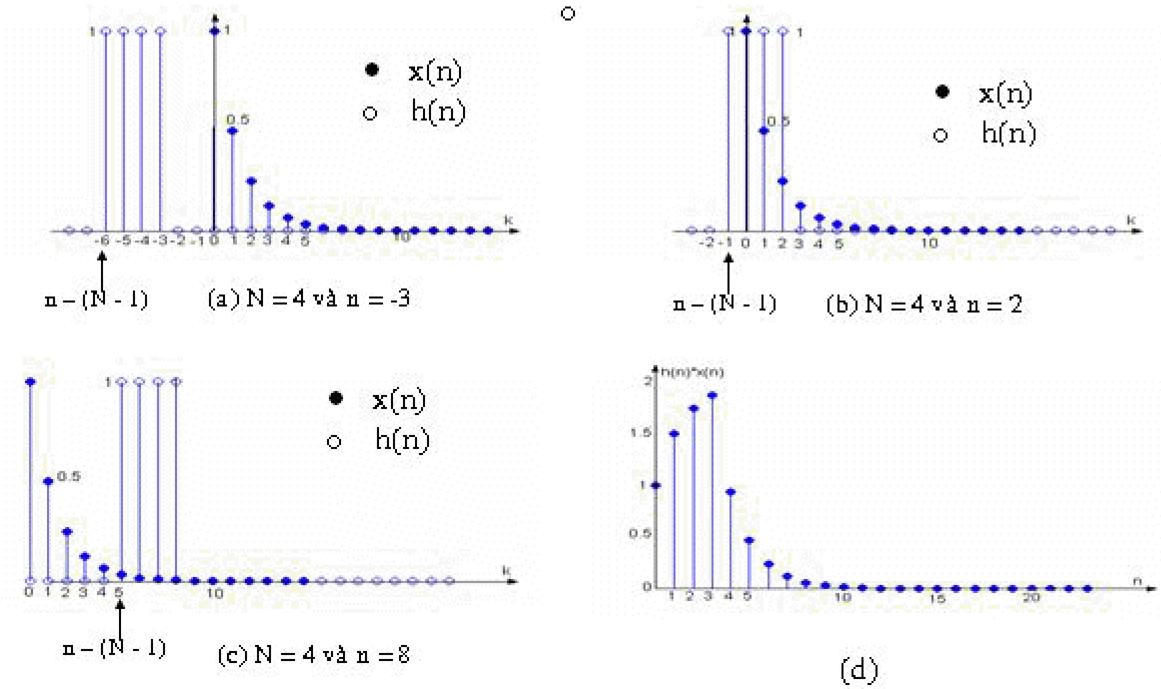
$x(k).h(n-k) = a^k$ nên:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k \quad (1.36)$$

Ta thấy, y(n) chính là tổng (n+1) số hạng của một chuỗi hình học có công bội là a, áp dụng công thức tính tổng hữu hạn của chuỗi hình học, đó là:

$$\sum_{k=N}^{M} q^k = \frac{q^N - q^{M+1}}{1-q}, \text{ với } M > N \quad (1.37)$$

Ta được: $$y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad (1.38)$$



Hình 1.5 : Các dãy xuất hiện trong quá trình tổng chập. (a);(b);(c)Các dãy x(k) và h(n-k) như là một hàm của k với các giá trị khác nhau cảu n (chỉ các mẫu khác 0 mới được trình bày); (d) Tổng chập y(n) = x(n) * h(n).

@ Với (N-1) < n: Hình 1.5(b). trình bày hai dãy x(k) và h(n-k), tương tự như trên **ta có:** x(k).h(n-k) = ak

và: $$y(n) = \sum_{k=n-N+1}^{n} a^k \quad , \text{với } n > N-1$$

hay: $$y(n) = \frac{a^{n-N+1} - a^{n+1}}{1-a} = a^{n-N+1}\left(\frac{1-a^N}{1-a}\right) \qquad (1.39)$$

Tổng hợp các kết quả từ pt(1.35),(1.38) và (1.39) ta được:

$$y(n) = \begin{cases} 0, & \text{vôùi} \quad n < 0 \\ \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & \text{vôùi } 0 \le n \le N\text{-}1 \\ a^{n-N+1}\left(\dfrac{1-a^N}{1-a}\right), & \text{vôùi } N\text{-}1 < n \end{cases} \qquad (1.40)$$

Ví dụ này tính tích chập trong trường hợp đơn giản. Các trường hợp phức tạp hơn, tích chập cũng có thể tính bằng phương pháp đồ thị, nhưng với điều kiện là 2 dãy phải có một số hữu hạn các mẫu khác 0.

Chú ý: Việc thực hiện phép chập 2 chuỗi có chiều dài hữu hạn: $L[x_1(n)]=L_1$, $L[x_2(n)]=L_2$ thì:

+ $L = L[y(n)] = L_1+L_2-1$
+ Nếu các mẫu của x nằm trong khoảng $[M_x, N_x]$, nếu các mẫu của h nằm trong khoảng $[M_h, N_h]$ thì các mẫu của y nằm trong khoảng $[M_x+M_h, N_x+N_h]$

3. Các tính chất của hệ thống tuyến tính bất biến

Vì tất cả các hệ thống LTI đều có thể biểu diễn bằng tích chập, nên các tính chất của tổng chập cũng chính là các tính chất của hệ thống LTI.

3.1 Các tính chất của tích chập

a**) Tính giao hoán** (Commutative): cho 2 dãy x(n) và h(n) bất kỳ, ta có:

$$y(n) = x(n)*h(n) = h(n)*x(n) \qquad (1.41)$$

Chứng minh: Thay biến m=n-k vào pt (1.33), ta được:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) \qquad (1.42)$$

hay: $$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n)*x(n) \qquad (1.43)$$

b) Tính phối hợp (Associative): Cho 3 dãy x(n), h1 (n) và h2(n), ta có:

$$y(n) = [x(n)*h_1(n)]*h_2(n) = x(n)*[h_1(n)*h_2(n)] \qquad (1.44)$$

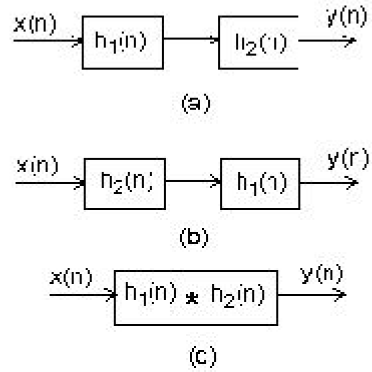
Tính chất này có thể chứng minh một cách dễ dàng bằng cách dựa vào biểu thức định nghĩa của tổng chập.

Hệ quả 1: Xét hai hệ thống LTI có đáp ứng xung lần lược là h1(n) và h2(n) mắc *liên tiếp (cascade), nghĩa là đáp ứng của hệ thống thứ 1 trở thành kích* thích của hệ thống thứ 2 (hình 1.6(a)). Áp dụng tính chất phối hợp ta được:

$$y(n) = x(n)*h(n) = [x(n)*h_1(n)]*h_2(n) = x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

hay $h(n) = h_1(n)*h_2(n) = h_2(n)*h_1(n)$ (tính giao hoán) (1.45)

Từ pt(1.45) ta có được các hệ thống tương đương như các hình 1.6(b) và 1.6(c).



Hình 1.6: (a) Hai hệ thống $h_1(n)$ và $h_2(n)$ mắc nối tiếp.
(b) và (c) các hệ thống tương đương.

c) Tính chất phân bố với phép cộng (Distributes over addition): tính chất này được biểu diễn bởi biểu thức sau:

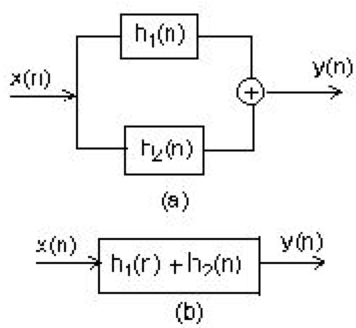
$y(n) = x(n)*[h_1(n) + h_2(n)] = x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n)$ (1.46)

và cũng này có thể chứng minh một cách dễ dàng bằng cách dựa vào biểu thức định nghĩa của tổng chập.

Hệ quả 2: Xét hai hệ thống LTI có đáp ứng xung lần lượt là $h_1(n)$ và $h_2(n)$ mắc *song song (parallel), (hình 1.7(a)). áp dụng tính chất phân bố ta được đáp ứng* xung của hệ thống tương đương là:

$$h(n) = h_1(n) + h_2(n) \qquad (1.47)$$

sơ đồ khối của mạch tương đương được trình bày trong hình 1.7(b).



Hình 1.7: (a) Hai hệ thống $h_1(n)$ và $h_2(n)$ mắc song song.
(b) Hệ thống tương đương

3.2 Các tính chất khác

a./ Hệ thống LTI ổn định:

Định lý: Một hệ thống LTI có tính ổn định nếu và chỉ nếu:

$$s = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty \qquad \textbf{(1.48)}$$

với h(n) là đáp ứng xung của hệ thống.

Chứng minh:

Điều kiện đủ: *xét một tín hiệu vào hữu hạn, nghĩa là:*

$$|x(n)| \le b_x < \infty, \text{ với } b_x \text{ là một số dương.}$$

thì : $$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right| \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

hay: $$|y(n)| \le B_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Vậy |y(n)| hữu hạn khi điều kiện ở pt(1.48) thỏa mãn, hay pt(1.48) là điều kiện đủ để hệ thống ổn định.

Điều kiện cần*: Để chứng minh điều kiện cần ta dùng phương pháp phản chứng***.** Trước tiên ta giả sử rằng hệ thống có tính ổn định, nếu ta tìm được một tín hiệu vào nào đó thỏa mãn điều kiện hữu hạn và nếu tổng S phân kỳ (S [redacted]thì hệ thống sẽ không ổn định, mâu thuẫn với giả thiết.

Thật vậy, ta xét một dãy vào được nghĩa như sau:

$$x(n) = \begin{cases} h^*(-n)/h(-n), & \text{vôùi } h(-n) \neq \\ 0, & \text{vôùi } h(-n) = 0 \end{cases}$$

ở đây, h*(n) là liên hợp phức của h(n), rõ ràng |x(n)| bị giới hạn bởi 1, tuy nhiên, nếu s [redacted]a xét đáp ứng tại n = 0:

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = S \to \infty$$

Ta thấy, kết quả này mâu thuẫn với giả thuyết ban đầu (hệ thống ổn định). Vậy, s phải hữu hạn.

b./ Hệ thống LTI nhân quả

Định lý: Một hệ thống LTI có tính nhân quả nếu và chỉ nếu đáp ứng xung h(n) của nó thỏa mãn điều kiện:

$$h(n) = 0, \quad \text{với mọi } n < 0 \qquad (1.49)$$

Chứng minh:

Điều kiện đủ: từ $y(n)$ [redacted] $k)h(n$ [redacted] $)$, kết hợp với (1.49) ta có

$y(n)$ [redacted] $k)h(n$ [redacted] $)$ (1.50)

Từ pt(1.50), ta thấy giới hạn trên của tổng là n, nghĩa là y(n) chỉ phụ thuộc vào x(k) với k <= n, nên hệ thống có tính nhân quả.

Điều kiện cần: Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử rằng,

h(m) ≠ 0 với m < 0. Từ pt(1.42): $y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m)$, ta thấy y(n) phụ thuộc vào x(n-m) với m < 0 hay n-m > n, suy ra hệ thống không có tính nhân quả.

Vì vậy, điều kiện cần và đủ để hệ thống có tính nhân quả phải là: h(n)=0 khi n < 0.

Ví dụ : Hệ thống tích luỹ được định nghĩa bởi

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \text{ có đáp ứng xung là: } h(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k) = u(n) \qquad (1.51)$$

Từ pt(1.51) ta thấy h(n) của hệ hệ thống này không thỏa điều kiện pt(1.48) nên không ổn định và h(n) thỏa điều kiện pt(1.49) nên nó là một hệ thống nhân quả.

- **Dãy nhân quả**: Dãy x được gọi là nhân quả nếu x(n) = 0 với n<0
- Như vậy với hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả có kích thích là dãy nhân quả thì đáp ứng ra của nó được viết lại như sau:

$y(n)$ [redacted] $k)h(n$ [redacted] $)$

Ví dụ: Xét một hệ thống có đáp ứng xung là h(n) = a^n u(n), ta có:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n \qquad (1.52)$$

Nếu |a| < 1, thì S hội tụ và S = 1/(1-|a|) vì vậy hệ thống có tính ổn định.

Nếu |a| ≥ 1, thì S [redacted]à hệ thống không ổn định.

4. PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG

(LCCDE: Linear Constant-Coefficient Difference Equations)

4.1. Khái niệm: Một hệ thống LTI mà quan hệ giữa tác động x(n) và đáp ứng y(n) của nó thỏa mãn phương trình sai phân truyến tính hệ số hằng bậc N dưới dạng:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \qquad (1.55)$$

được gọi là hệ thống có phương trình sai phân truyến tính hệ số hằng (LCCDE). Trong đó, các hệ số ak và br là các thông số đặc trưng cho hệ thống.

Hệ thống LTI có LCCDE là một lớp con quan trọng của hệ thống LTI trong xử lý tín hiệu số. Ta có thể so sánh nó với mạch R_L_C trong lý thuyết mạch tương tự (được đặc trưng bằng phân trình vi tích phân tuyến tính hệ số hằng).

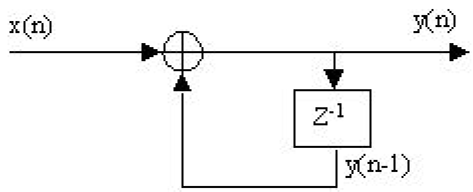
Ví dụ 1.12: Xét hệ thống tích lũy, như ta biết, đây là một hệ thống LTI, vì vậy có thể biểu diễn bởi một LCCDE. Thậy vậy, ta xem lại hình 1.8, trong đó y(n) là đáp ứng của hệ thống tích lũy ứng với tín hiệu vào x(n), và y(n) đóng vai trò tín hiệu vào của hệ thống vi phân lùi. Vì hệ thống vi phân lùi là hệ thống đảo của hệ thống tích lũy nên:

$$y(n) - y(n-1) = x(n) \qquad (1.56)$$

Pt(1.56) chính là LCCDE của một hệ thống tích lũy, với N=1, a_0 =1, a_1=-1, M=0 và b_0 =1.

Ta viết lại: $$y(n) = y(n-1) + x(n) \qquad (1.57)$$

Từ pt(1.57), ta thấy, với mỗi giá trị của n, phải cộng thêm vào x(n) một tổng được tích lũy trước đó y(n-1). Hệ thống tích lũy được biểu diễn bằng sơ đồ khối hình 1.9 và pt(1.57) là một cách biểu diễn đệ qui của hệ thống.



Hình 1.9 : Sơ đồ khối của hệ thống tích luỹ

4.2. NGHIỆM CỦA PTSP-TT-HSH

Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng là một dạng quan hệ vào ra mô tả hệ thống LTI. Trong phần này, ta sẽ tìm biểu thức tường minh của đáp ứng y(n) bằng phương pháp trực tiếp. Còn một phương pháp khác để tìm nghiệm của phương trình này là dựa trên biến đổi z sẽ được trình bày trong chương sau, ta gọi là phương pháp gián tiếp.

Tương tự như phương trình vi tích phân tuyến tính hệ số hằng của hệ thống liên tục theo thời gian. Trước tiên, ta tìm nghiệm của phương trình sai phân thuần nhất (homogeneous diference equation), đó là pt (1.55) với vế phải bằng 0**.** Đây chính là đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào x(n) = 0. Sau đó, ta tìm một nghiệm riêng (particular solution) của pt(1.55) với x(n)(0. Cuối cùng, nghiệm tổng quát (total solution) của LCCDE (1.55) là tổng nghiệm của phương trình sai phân thuần nhất với nghiệm riêng của nó. Thủ tục tìm nghiệm như sau:

a./ Bước 1 Tìm nghiệm của phương trình sai phân thuần nhất (Đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào bằng 0)

Phương trình sai phân thuần nhất có dạng: $$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0 \qquad (1.58)$$

(Bằng cách chia 2 vế cho a_0 để có dạng (1.58) với a_0 = 1)

Ta đã biết rằng, nghiệm của phương trình vi phân thường có dạng hàm mũ, vì vậy, ta giả sử nghiệm của phương trình sai phân thuần nhất có dạng:

$y_0(n) =$ [redacted] (1.59)

Chỉ số $y_0(n)$ được dùng để chỉ rằng đó là nghiệm của phương trình thuần nhất.

Thay vào pt(1.58) ta thu được một phương trình đa thức:

hay: [redacted]$^{-N}$ ([redacted] + a_1[redacted]^{1} + a_2[redacted]^{2} + … + a_{N-1}[redacted] + a_N) = 0 (1.60)

Đa thức trong dấu ngoặc đơn được gọi là đa thức đặc trưng (characteristic polynomial) của hệ thống.

Nói chung, đa thức này có N nghiệm, ký hiệu là [redacted], [redacted],…, [redacted], có giá trị thực hoặc phức. Nếu các hệ số $a_1, a_2, \ldots, a_N$ có giá trị thực, thường gặp trong thực tế, các nghiệm phức nếu có sẽ là các cặp liên hợp phức. Trong N nghiệm cũng có thể có một số nghiệm kép (mutiple-order roots).

a.1/ Trường hợp, tất cả các nghiệm là phân biệt, không có nghiệm kép, thì nghiệm tổng quát của phương trình sai phân thuần nhất là :

$y_0(n) = A_1$[redacted]$_1 + A_2$[redacted]$_2 + \ldots + A_N$[redacted]$_N =$ [redacted] (1.61)

Ở đây, A_1 , A_2 ,…, A_N là các hằng số tuỳ định. Các hằng số này được xác định dựa vào các điều kiện đầu của hệ thống.

a.2/ Trường hợp có nghiệm bội, giả sử đa thức đặc trưng có nghiệm bội bậc m tại [redacted] ***thì ta có:***

$y_0(n) = A_1$[redacted]$_1 + (A_{20} + A_{21}n + A_{22}n^2 + \ldots + A_{2(m-1)}n^{m-1})$[redacted]$_2 + \ldots + A_N$[redacted]$_N$

Ví dụ : Xác định đáp ứng với tín hiệu vào x(n) = 0 của một hệ thống được mô tả bởi pt bậc 2 như sau:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = 0 \qquad (1.62)$$

Giải:

Ta biết nghiệm của pt(1.62) có dạng: y_0n) = [redacted] thay vào pt(1.62), ta thu được:

[redacted] - 3[redacted]^{1} - 4[redacted]^{2} = 0 hay [redacted]$^{-2}$ ([redacted] - 3[redacted] - 4) = 0

và phương trình đặc tính là: ([redacted] - 3[redacted] - 4) = 0

Ta có 2 nghiệm [redacted] = -1 và [redacted] = 4, nghiệm của phương trình thuần nhất có dạng tổng quát là:

$y_0(n) = A_1$[redacted] $+ A_2$[redacted] $= A_1(-1)^n + A_2(4)^n$ (1.63)

Đáp của hệ thống với tín hiệu vào bằng 0 có thể thu được bằng cách tính giá trị các hằng số C_1 và C_2 dựa vào các điều kiện đầu. Các điều kiện đầu được cho thường là giá trị của đáp ứng ở các thời điểm n=-1; n = -2;...; n = -N. Ở đây, ta có N=2, và các điều kiện đầu được cho là y(- 1) và y(-2). Từ pt(1.62) ta thu được:

$y(0) = 3y(-1) + 4y(-2)$

$y(1) = 3y(0) - 4y(-1) = 13y(-1) + 12y(-2)$

Mặt khác, từ pt(1.63) ta có:

$y(0) = A_1 + A_2$

$y(1) = - A_1 + 4 A_2$

Suy ra: $A_1 + A_2 = 3y(-1) + 4y(-2)$

$- A_1 + 4 A_2 = 13y(-1) + 12y(-2)$

Giải hệ 2 phương trình trên ta được:

$A_1 = (-1/5)y(-1) + (4/5)y(-2)$

$A_2 = (16/5)y(-1) + (16/5)y(-2)$

Vậy đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào bằng 0 là:

$$y_0(n) = [(-1/5)y(-1) + (4/5)y(-2)](-1)^n + [(16/5)y(-1) + (16/5)y(-2)](4)^n \quad (1.64)$$

Giả sử, $y(-2)=0$ và $y(-1)=5$, thì $A_1=-1$ và $A_2 =16$. Ta được:

$y_0(n) = (-1)^{n+1} + (4)^{n+2}$, với n [redacted]0

b./ Bước 2: Nghiệm riêng của phương trình sai phân

Tương tự như cách tìm nghiệm của phương trình thuần nhất, để tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân khi tín hiệu vào x(n)[redacted], ta đoán rằng nghiệm của phương trình có một dạng nào đó, và thế vào PT-SP-TT-HSH đã cho để tìm một nghiệm riêng, ký hiệu $y_p(n)$. Ta thấy cách làm này có vẽ mò mẫm!. Nếu tín hiệu vào x(n) được cho bắt đầu từ thời điểm n [redacted]) (nghĩa là x(n)=0 khi n<0), thì dạng của nghiệm riêng thường được chọn là: $y_p(n)$ có dạng của x(n) từ điều kiện đầu

Ví dụ :

Tìm đáp ứng y(n), với $n \geq 0$, của hệ thống được mô tả bởi pt bậc hai như sau:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1) \quad (1.67)$$

tín hiệu vào là: $x(n) = 4^n u(n)$. Hãy xác định nghiệm riêng của pt(1.67).

Giải:

Trong ví dụ 1.13, ta đã xác định nghiệm của phương trình sai phân thuần nhất cho hệ thống này, đó là pt(1.63), ta viết lại:

$$y_0(n) = A_1(-1)^n + A_2(4)^n \quad (1.68)$$

Nghiệm riêng của pt(1.63) được giả thiết có dạng hàm mũ: $y_p(n) = K(4)^n u(n)$. Tuy nhiên chúng ta thấy dạng nghiệm này đã được chứa trong nghiệm thuần nhất (1.68). Vì vậy, nghiệm riêng này là thừa (thế vào pt(1.67) ta không xác định được K). Ta chọn một dạng nghiệm riêng khác độc lập tuyến tính với các số hạng chứa trong nghiệm thuần nhất. Trong trường hợp này, ta xử lý giống như trường hợp có nghiệm kép trong phương trình đặc tính. Nghĩa là ta phải giả thiết nghiệm riêng có dạng: $y_p(n) = Kn(4)^n u(n)$. Thế vào pt(1.67):

$Kn(4)^n u(n) - 3K(n-1)(4)^{n-1}u(n-1) - 4K(n-2)(4)^{n-2}u(n-2) = (4)^n u(n) + 2(4)^{n-1}u(n-1)$Để xác định K, ta ước lượng phương trình này với mọi $n \geq 2$, nghĩa là với những giá trị của n sao cho hàm nhãy bậc đơn vị trong phương trình trên không bị triệt tiêu. Để đơn giản về mặt toán học, ta chọn n = 2 và tính được K = 6/5. Vậy:

$$y_p(n) = (6/5)n(4)^n u(n) \qquad (1.69)$$

c./ Bước 3: Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân:

Tính chất tuyến tính của LCCDE cho phép ta cộng nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng để thu được nghiệm tổng quát. Ta có nghiệm tổng quát là:

$$y(n) = y_0(n) + y_p(n) \qquad (1.70)$$

Vì nghiệm thuần nhất $y_0(n)$ chứa một tập các hằng số bất định {Ai}, nên nghiệm tổng quát cũng chứa các hằng số bất định này, để xác định các hằng số này, ta phải có một tập các điều kiện đầu tương ứng của hệ thống. Chú ý rằng $y_0(n)$ và $y_p(n)$ phải là độc lập tuyến tính với nhau.

Ví dụ : Tìm đáp ứng y(n), với n [redacted], của hệ thống được mô tả bởi LCCDE bậc hai trong ví dụ 1.14 với điều kiện đầu là y(-1) = y(-2) = 0.

Giải:

Trong ví dụ 1.13 ta đã tìm được nghiệm thuần nhất, trong ví dụ 1.14 ta đã tìm được nghiệm riêng. Vậy nghiệm tổng quát của pt(1.67) là:

$$y(n) = y_0(n) + y_P(n) = A_1(-1)n + A_2(4)n + (6/5)n(4)^n, \text{ với } \quad n \geq 0 \qquad (1.71)$$

với các điều kiện đầu là các giá trị y(-1) = y(-2) = 0, tương tự như trong ví dụ 1.13, ta tính y(0) và y(1) từ các pt(1.67) và (1.71) và thành lập được hệ phân trình:

$$A_1 + A_2 = 1$$

$$-A_1 + 4A_2 + 24/5 = 9$$

suy ra: $A_1 = -1/25$ và $A_2 = 26/25$.

Cuối cùng ta thu được đáp ứng y(n) của hệ thống với các điều kiện đầu bằng 0, với tín hiệu vào là x(n) = (4)nu(n) có dạng:

$$y(n) = -\frac{1}{25}(-1)^n + \frac{26}{25}(4)^n + \frac{6}{5}n(4)^n, \quad \text{với } n \geq 0 \qquad (1.72)$$

Ví dụ 2: Một hệ thống được mô tả bởi phương trình sau:

$y(n) = 3/4y(n-1) - 1/8y(n-2) + x(n) - x(n-1)$

a) Tìm đáp ứng ra của hệ thống với kích thích là : $x(n) = (1/2)^n$, $y(-1) = y(-2) = 0$.

b) Tìm đáp ứng xung h(n) của hệ thống.

Giải:

a) Ta biết nghiệm của pt thuần nhất có dạng: $y_0(n) =$ [redacted] thay vào ta thu được:

[redacted] - 3/4 [redacted] ^{1} + 1/8 [redacted] $^2 = 0$ hay [redacted] ^{2} ([redacted] - 3/4 [redacted] + 1/8) = 0

và phương trình đặc trưng là: ([redacted] - 3/4 [redacted] + 1/8) = 0

Ta có 2 nghiệm [redacted] = 1/2 và [redacted] = 1/4, nghiệm của phương trình thuần nhất có dạng tổng quát là:

$y_0(n) = A_1$ [redacted] $+ A_2$ [redacted] $= A_1(1/2)^n + A_2(1/4)^n$

Do $x(n) = (1/2)^n$ có dạng giống như một nghiệm của pt thuần nhất, vì vậy ta phải chọn $y_p(n)$ có dạng sao cho độc lập tuyến tính với x(n).

Chọn $y_p(n)$ có dạng: $y_p(n) = B.n(1/2)^n$. Thay vào pt ta có:

$B.n(1/2)^n = ¾.B.(n-2).(1/2)^{n-1} - 1/8B(n-2)(1/2)^{n-2} + (1/2)^n - (1/2)^{n-1}$

Chia 2 vế cho $(1/2)^n$: $B.n = 3/2.B.(n-1) - 1/2B.(n-2) - 1$

Giải ra ta có: B = - 2, Vậy nghiệm của phương trình là:

$y(n) = y_0(n) + y_p(n) = A_1(1/2)^n + A_2(1/4)^n \quad - 2.n.(1/2)^n$

Dựa vào điều kiện đầu ta có thể xác định A_1, A_2:

b) Với x(n) = [redacted] n) thì y(n) = h(n)

Khi n = 0 thì $y_p(n) = 0$ do đó $h(n) = y_0(n) = A_1(1/2)^n + A_2(1/4)^n$

$y(-1) = A_1(1/2)^{-1} + A_2(1/4)^{-1} - 2.(-1).(1/2)^{-1} = 0$

$y(-2) = A_1(1/2)^{-2} + A_2(1/4)^{-2} - 2.(-2).(1/2)^{-2} = 0$

y(0) = 3/4y(-1) – 1/8y(-2) + x(0) - x(-1) = 1 (Do x(0)= [redacted] 0) =1, y(-1)=y(-2)=0)

$y(1) = 3/4y(0) - 1/8y(-1) + x(1) - x(0) = ¾ - 1 = -1/4$

Mặt khác, từ pt(1.63) ta có:

$y(0) = A_1 + A_2 = 1$

$y(1) = 1/2A_1 + 1/4A_2 = -1/4$

Suy ra: $A_1 = -2$, $A_2 = 3$

$h(n) = y_0(n) = -2.(1/2)^n + 3(1/2)^{2n}$, với n [redacted] 0

5. HỆ THỐNG RỜI RẠC ĐỆ QUI (RECURSIVE) VÀ KHÔNG ĐỆ QUI (NONRECURSIVE)

5.1. Hệ thống rời rạc không đệ qui (Hệ có đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn FIR)

Một hệ thống mà đáp ứng y(n) chỉ phụ thuộc vào kích thích ở thời điểm hiện hành và ở các thời quá khứ là một hệ thống không đệ qui.

Ta thấy một hệ thống không đệ qui được biểu diễn bởi một PT-SP-TT-HSH có bậc N = 0, đó là:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-k) \qquad (1.81)$$

(Hệ số a_0 đã được đưa vào các hệ số b_r , bằng cách chia 2 vế cho a_0).

Đáp ứng xung của hệ thống là:

$$h(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r \delta(n-k) = \begin{cases} bn & \text{với } 0 \le n \le M \\ 0 & \text{các nơi khác} \end{cases} \qquad (1.82)$$

Ta thấy đây là một hệ thống LTI có đáp ứng xung dài hữu hạn (Finite duration Impulse Response system -FIR) và nhân quả.

Hệ thống FIR (Hệ thống với đáp ứng xung có chiều dài hữu hạn) là một hệ thống mà đáp ứng xung của nó tồn tại một số hữu hạn các mẫu khác 0.

Ta thấy, hệ thống FIR luôn luôn ổn định nếu tất cả các mẫu trong đáp ứng xung của nó có độ lớn hữu hạn.

Ví dụ: Tìm đáp kứng xung của hệ được mô tả bởi pt sau:

y(n) = x(n) + 4x(n-1) + 5x(n-2) – x(n-3)

từ pt ta thấy: b_0= 1, b_1=4, b_2=5, b_3=-1

Suy ra h(n)=δ(n) + 4δ(n-1) + 5δ(n-2) –δ(n-3) và hệ thống này luôn ổn định.

5.2. Hệ thống rời rạc đệ qui (Hệ có đáp ứng xung có chiều dài vô hạn IIR)

Định nghĩa: Hệ thống được biểu diễn bởi phương trình SP-TT-HSH bậc N>0 được gọi là hệ đệ qui. Đáp ứng của hệ thống phụ thuộc vào kích thích ở thời điểm hiện tại và quá khứ và cả đáp ứng ở thời điểm quá khứ.

y(*n*) [redacted] *x*(*n* [redacted]) [redacted] *y*(*n* [redacted]) *voi* a_0 [redacted]

hay *y*(*n*) [redacted] *x*(*n* [redacted]) [redacted] *y*(*n* [redacted]) *voi* a_0 [redacted]

Nhận xét:

- Do a_k, b_r là các hệ số do đó hệ thống đệ qui phụ thuộc vào cả a_k, lẫn b_r.

- Với $x(n)= \delta(n)$ thì $y(n) = h(n)$ Là đáp ứng xung của hệ đệ qui. Ta thấy rằng $h(n)$ của hệ đệ qui có chiều dài vô hạn. Vậy hệ thống đệ qui là hệ thống có đáp ứng xung có chiều dài vô hạn (Infinite duration Impulse Response system IIR)

Ví dụ: Tìm đáp ứng xung và xét sự ổn định của hệ thống sau:

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) \qquad ; y(n)=0 \text{ với } n<0.$$

với tín hiệu vào là $x(n) =\delta (n)$, với a là hằng số

Ta tính $h(n)$ với $n \geq 0$, bắt đầu với $n = 0$:

$h(0) = a.h(-1) + \delta (0) = 1$

$h(1) = a.h(0) + \delta (1) = a$

$h(2) = a.h(1) + \delta (2) = a^2$

$h(3) = a.h(2) + \delta (3) = a^3$

: :

: :

Từ các kết quả trên ta có thể tổng quát hóa thành công thức tính $h(n)$

$h(n) = a^n u(n)$

Xét sự ổn định của hệ:

S [redacted]

- Nếu [a]<1 thì S hội tụ: S= 1/(1-[a]) hệ ổn định.

- Nếu [a]>1 S phân kì hệ này không ổn định

Chú ý: - Với hệ FIR thì ta có thể tìm ngay đáp ứng xung dựa vào các hệ số b_r, còn đối với hệ IIR ta không làm được như vậy.

- Với hệ IIR nhân quả ta có thể tìm đáp ứng xung bằng cách đệ qui như ví dụ trên hoặc tìm nghiệm tổng quát của PT-SP-TT-HSH của nó.

Ta biết $y(n) = y_0(n) + y_p(n)$ với $y_p(n)$ được xác định từ điều kiện đầu vào đã cho

Khi $x(n)= \delta (n)$ nghĩa là kích thích chỉ là một xung tại n=0 còn với n>0 thì x(n)=0 do vậy $y_p(n) = 0$ với n>0 vậy:

Khi $x(n)= \delta (n)$ th ì $y(n)=y_0(n) = h(n)$:

Vì vậy ta có: $h(n)=y_0(n) =$ [redacted] trong đó α_k là các nghiệm đơn của phương trình

[redacted]

Còn các hệ số A_k được xác định từ các điều kiện đầu.

Sự ổn định của hệ IIR nhân qủa:

S [redacted] $(n)|$ [redacted] $n)|$

S [redacted] $|$ [redacted]

Suy ra S [redacted] do [redacted] $|$ là hằng số nên nếu [redacted] thì

[redacted] và S<∞ . Vậy với [redacted] với mọi k thì hệ IIR sẽ ổn định.

Từ đây ta có thể phát biểu điều kiện ổn định của hệ IIR như sau: Điều kiện cần và đủ cho hệ thống IIR nhân quả được bểu diễn bởi pt sai phân TT-HSH ổn định là giá trị tuyệt đối của tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng α_k phải nhỏ h ơn một.

Ví dụ: Tìm h(n) và xét sự ổn định của hệ thống được cho bowir pt sau:

y(n) – 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)

với điều kiện đầu: y(n) = 0 với n<0.

Giải:

Ta có phương trình đặc trưng:

[redacted]

Vậy ta có $y_0(n)= A_1.1^n + A_2.2^n = h(n)$

Sử dụng điều kiện đầu y(n)=0, n<0 và x(n)= δ(n) ta có:

n = 0 thì : y(0) = 1

n = 1 th ì y(1) = 5

Mặt khác ta có $y(0) = A_1 + A_2 =1$

$y(1) = A_1 + 2A_2 = 5$

Giải ra ta được: $A_1=-3$; $A_2 = 4$

Vậy ta có $h(n) = -3 + 4.2^n = 2^{n+2} – 3$ với $n \geq 0$ hay ta có thể viết:

$h(n) = (2^{n+2} – 3)u(n)$

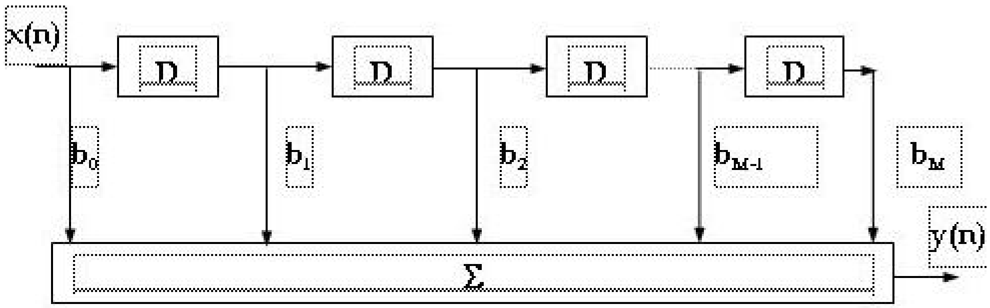
5.3. Thực hiện hệ FIR và IIR

Hệ FIR:

Đối với hệ thống FIR không đệ qui, với phương trình sai phân biểu diễn hệ thống là:

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \qquad (2.93)$$

Ta có sơ đồ như sau:



Hình 2.14: Hệ thống FIR, không đệ qui

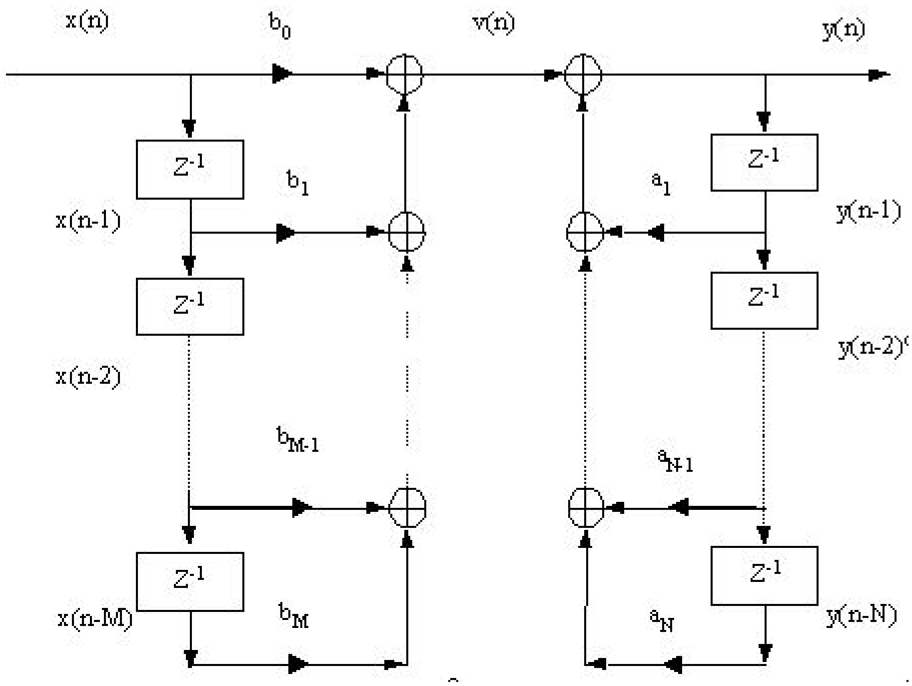
Trong thực tế, đối với các mạch đệ qui, ít khi người ta thực hiện cả một sơ đồ có bậc N > 2, vì khi đó mạch dễ mất tính ổn định do sai số. Mặt khác, thiết kế các khâu bậc 2 có phần thuận lợi hơn. Vì vậy, người ta chia hệ thống ra thành nhiều mạch con có bậc lớn nhất là 2 mắc liên tiếp hoặc song song với nhau.

Hệ IIR

Pt của hệ IIR được viết lại dưới dạng công thức truy hồi:

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) \qquad (2.91)$$

Sơ đồ khối hình 2.11 biểu diễn bằng hình ảnh của pt(2.91)


x(n)
b_0
v(n)
y(n)
Z^{-1}
b_1
x(n-1)
Z^{-1}
a_1
y(n-1)
Z^{-1}
x(n-2)
Z^{-1}
y(n-2)
b_{M-1}
a_{N-1}
Z^{-1}
Z^{-1}
x(n-M)
b_M
a_N
y(n-N)

Chương II

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU
VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

Mờ đầu

Chương 1 đã trình bày cách tính đáp ứng của một hệ thống trực tiếp từ đáp ứng xung của nó, bằng cách tính tổng chập của kích thích với đáp ứng xung. Cách tính tổng chập trực tiếp dựa vào công thức định nghĩa như đã làm tốn rất nhiều thời gian và công sức. Hơn nữa , trong thực tế số mẫu khác không của kích thích và đáp ứng xung là rất nhiều nên ta không thể 'tính bằng tay'. Tuy nhiên, phương pháp tính tổng chập bằng đồ thị như đã trình bày cho ta một thuật toán của chương trình tính tổng chập bằng máy tính. Việc giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng bằng phương pháp đệ qui cũng chỉ có ý nghĩa khi sử dụng máy tính.

Kỹ thuật biến đổi là một công cụ hữu hiệu để phân tích hệ thống LTI. Biến đổi Z đối với tín hiệu rời rạc có vai trò tương tự như biến đổi Laplace đối với tín hiệu liên tục, và chúng có quan hệ giống nhau với biến đổi Fourier. Tổng chập của hai dãy trong miền thời gian sẽ biến thành tích của hai biến đổi Z tương ứng trong miền biến phức z. Tính chất này sẽ làm đơn giản hóa việc tính đáp ứng của hệ thống với các tín hiệu vào khác nhau. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng cũng được giải một cách dễ dàng hơn khi dùng công cụ biến đổi Z.

Như ta sẽ thấy trong các chương sau, biến đổi Fourier giữa vai trò chìa khóa trong trong việc biểu diễn và phân tích các hệ thống rời rạc. Tuy nhiên, trong một số trường hợp cần phải sử dụng dạng tổng quát hóa của biến đổi Fourier, đó là biến đổi Z.

1. Biến đổi z

1.1 Biến đổi Z trực tiếp

Định nghĩa: Biến đổi Z của tín hiệu rời rạc x(n) được định nghĩa như sau:

$X(z)$ [redacted] $n).z$ [redacted] (2.1)

Trong đó z là biến phức và được biểu diễn như sau :

X(z) = ZT[x(n)]

Do chuỗi biến đổi là vô hạn nên chỉ tồn tại một số giá trị của Z để X(z) hội tụ. Tập hợp các giá trị của z để X(z) hội tụ gọi là miền hội tụ của X(z) kí hiệu là ROC[X(z)]

VD1: Xác định biến đổi z của tín hiệu rời rạc sau:

a/ x(n) = {1,2,5,7,0,1 }

b/ x(n) = δ(n)

c/ x(n) = δ(n - k), k>0

d/ x(n) = δ(n + k), k>0

Như vậy với tín hiệu hữu hạn thì ROC là toàn bộ mặt phẳng z và có thể trừ các giá trị z = 0 và z = ∞

VD2: Xác định biến đổi z của các tín hiệu rời rạc sau:

$x(n)$ [redacted] $u(n)$

Suy ra $x(n)$ [redacted] $\frac{1}{2},$ [redacted] ....[redacted]

Áp dụng công thức 3.1 ta có:

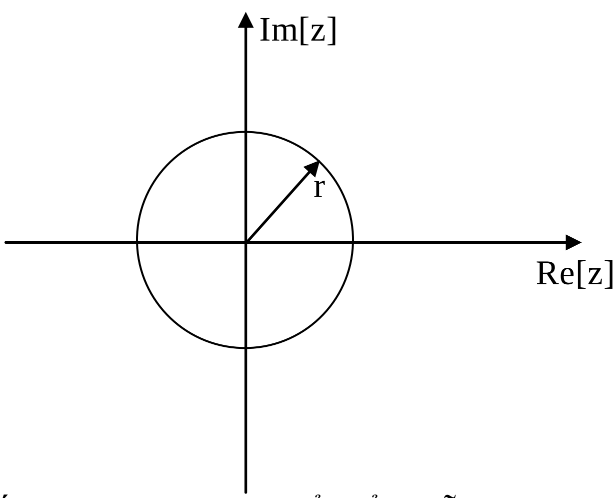
$X(z)$ [redacted] $n).z$ [redacted] $.u(n).z$ [redacted] z [redacted] z [redacted]

X(z) hội tụ khi [redacted] z [redacted] khi đó ta có: $X(z)$ [redacted] $\frac{1}{1 \text{[redacted]} z \text{[redacted]}}$

Vậy ROC [X(z)] : $|z|$ [redacted]

[redacted] Mặt phẳng z

Do z là biến phức nên: z = Re[z] + j Im[z], mặt phẳng z được tạo bởi trục tung Im[z] và trục hoành Re[z]



Chú ý: z là biến phức nên ta có thể biểu diễn như sau:

z = $re^{j\theta}$

$X(re^{j}$[redacted]$)$ [redacted] $n).r$[redacted]e[redacted]*, Nếu r =1 thì* $X(e^{j}$[redacted]$)$ [redacted] $n).e$[redacted] *có nghĩa là phép biến đổi z lấy trên vòng tròn đơn vị sẽ trở thành biến đổi Fourier trên miền tần số.*

[redacted] Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy để xác định miền hội tụ của biến đổi z.

- Tiêu chuẩn Cauchy: Một chuỗi có dạng $[redacted]n)$ [redacted] (0) [redacted] (1) [redacted].. hội tụ nếu điều kiện sau thoả mãn: $\lim_{n [redacted]} |x(n)|^{\frac{1}{n}}$ [redacted]

- Áp dụng với biến đổi z ta có: $X(z)$ [redacted] $n).z$ [redacted] $n)z$ [redacted] $n)z$ [redacted]

Đặt $X(z) = X_1(z) + X_2(z)$

Trong đó: $X_1(z) =$ [redacted] $n)z$ [redacted]

$X_2(z) =$ [redacted] $n)z$ [redacted]

Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy cho $X_1(z)$ ta có:

$\lim_{n [redacted]} |x(n)z$ [redacted] $|^{\frac{1}{n}}$ [redacted] $m|x(n)|^{\frac{1}{n}} |z$ [redacted] $|$ [redacted] $im|x(n)|^{\frac{1}{n}}$ đặt $R_x^- = \lim_{n [redacted]} |x(n)|^{\frac{1}{n}}$ vậy:

Với $|z|$ [redacted] R_x [redacted] thì $X_1(z)$ hội tụ. Tức là miền hội tụ của $X_1(z)$ nằm ngoà vòng tròn bán kính R^-_x tâm gốc toạ độ trên mặt phẳng z. Đậy cũng là miền hội tụ của dãy nhân quả có chiều dài vô hạn.

Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy với $X_2(z)$. tương tự như với $X_1(z)$ ta cũng có miền hội tụ của $X_2(z)$ là: $|z|$ [redacted] R_x [redacted] trong đó : $R_x^+ = \lim_{n [redacted]} |x($[redacted]$)|^{\frac{1}{n}}$, nghĩa là miền hội tụ của $X_2(z)$ là miền nằm trong đường tròn bán kính R^+_x tâm gốc toạ đootrên mặt phẳng z, đây cũng là miền hội tụ của dãy phản nhân quả có chiều dài vô hạn.

Kết luận vậy miền hội tụ của X(z) là: $X_1(z) \cap X_2(z)$.

VD 3: Xác định biến đổi z của tín hiệu $x(n) = a^n u(n)$

$X(z)$ [redacted] $n).z$ [redacted] $.u(n).z$ [redacted] z [redacted] z [redacted] $\frac{1}{1 [redacted] z [redacted]}$

nếu $|az$ [redacted] $|$ [redacted] hay $|z|$ [redacted] $|$

Vậy $X(z)$ [redacted] $\frac{1}{1 [redacted] z [redacted]}$, ROC [X(z)] : $|z|$ [redacted] $a|$ (3)

VD4: Xác định biến đổi z của tín hiệu $x(n) = - a^n u(-n-1)$

$X(z)$ [redacted] $n).z$ [redacted] $.z$ [redacted] z [redacted] z [redacted]

$X(z)$ [redacted] z [redacted] $\frac{1}{1 [redacted] z}$ [redacted] z [redacted] $\frac{1}{1 [redacted] z}$ [redacted] $\frac{1}{1 [redacted] z [redacted]}$

Với $|a$ [redacted] $z|$ [redacted] hay $|z|$ [redacted]

Vậy $X(z)$ [redacted] $\frac{1}{1 [redacted] z [redacted]}$, ROC [X(z)] : $|z|$ [redacted] (4)

Từ (3) và (4) ta thấy: Hai tín hiệu khác nhau có cùng biến đổi z nhưng ROC khác nhau. Do đó, tín hiệu rời rạc x(n) xác định duy nhất bằng biến đổi z và ROC của nó.

1.2 Các tính chât của biến đổi z.

a. Tính chất tuyến tính

Nếu :

$X_1(z) = ZT[x_1(n)]$, $ROC[X_1(z)]$

$X_2(z) = ZT[x_2(n)]$, $ROC[X_2(z)]$

$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ trong đó a, b là các hằng số thì:

$ZT[x_3(n)] = X_3(z) = a.X_1(z) + b.X_2(z)$,

$ROC[X_3(z)] = ROC[X_1(z)] \cap ROC[X_2(z)]$

Ví dụ : $x_1(n) = 2^n u(n)$, $x_2(n) = 3^n u(n)$

b. Tính chất dịch thời gian

Nếu :

$X(z) = ZT[x(n)]$, $ROC[X(z)]$

thì $ZT[x(n-k)] = z^{-k}X(z)$

Miền hội tụ:

+ Nếu k >0 thì ROC: là ROC[X(z)]/0

+ Nếu k<0 thì ROC là ROC[X(z)]/∞

c. Định lí giá trị đầu

Biến đỏi z của dãy nhân quả x(n) được định nghĩa như sau :

$X(z)$ [redacted] $n).z$ [redacted] (0) [redacted] $(1)z$ [redacted] . [redacted] $(n).z$ [redacted] ..

Khi z→∞ thì lim X(z) → x(0)

Ví dụ: Hãy các định giá trị đầu của dãy sau:

$X(z)$ [redacted] $\frac{z}{z}$ [redacted] , ROC : $|z|$ [redacted]

x(0) = $\lim \frac{z}{z}$ [redacted]

d. Tích chập trên miền z.

Nếu :

$X_1(z) = ZT[x_1(n)]$, $ROC[X_1(z)]$

$X_2(z) = ZT[x_2(n)]$, $ROC[X_2(z)]$

$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$ thì:

$ZT[x_3(n)] = X_3(z) = X_1(z).X_2(z)$,

$ROC[X_3(z)] = ROC[X_1(z)] \cap ROC[X_2(z)]$, Miền hội tụ của $X_3(z)$ có thể rộng hơn miền hội tụ của $X_1(z)$ và $X_2(z)$.

Ví dụ : $x_1(n) = 2^n u(n)$, $x_2(n) = 3^n u(n)$

e. Nhân với hàm mũ

Giả sử có dãy x(n) có ZT[x(n)] =X(z), ROC : R_1 [redacted] $z|$ [redacted] R_2 thì dãy :

y(n) = a^nx(n) có ZT[y(n)] = Y(z) = [redacted] $x(n)z$ [redacted] $n)(\frac{z}{a})$ [redacted] X [redacted]

ROC : $|a|R_1$ [redacted] $z|$ [redacted] $a|R_2$

Ví dụ: cho dãy x(n) = 2^nu(n) xác định X(z), ROC.

Trước tiên ta tìm biến đổi z của dãy u(n):

$U(z)$ [redacted] $n)z$ [redacted] $)^n$ [redacted] $\frac{1}{1}$ [redacted] với ROC: $|Z$ [redacted] $|$ [redacted] hay $|Z|$ [redacted]

Vậy $X(z)$ [redacted] $\frac{1}{1}$ [redacted] $\frac{1}{1}$ [redacted] $2z$ [redacted] với ROC: $|Z|$ [redacted] $.2$ [redacted] 2

1.3 Biến đổi z hữu tỷ.

Giả sử X(z) là hàm hữu tỷ: $X(z)$ [redacted] $\frac{N(z)}{D(z)}$ [redacted] z [redacted] z [redacted]

a. Các khái niệm cực và không.

+ Điểm cực của X(z) là các giá trị z tại đó X(z) = ∞, kí hiệu là z_{ck}, khi đó $D(z_{ck}) = 0$

+ Điểm không của X(z) là các điểm tại đó X(z) = 0, kí hiệu là z_{or}, khi đó $N(z_{or}) = 0$

b. Biểu diễn X(z) dưới dạng cực và không

Giả sử N(z) là đa thức bậc M của z khi đó:

$N(z) = b_M(z- z_{o1})(z- z_{o2})(z- z_{o3})....(z- z_{oM}) = b_M$ [redacted] $_{or})$

Giả sử D(z) là đa thức bậc N của z khi đó:

$D(z) = a_N(z- z_{c1})(z- z_{c2})(z- z_{c3})....(z- z_{cN}) = a_N$ [redacted] $_{ck})$

Khi đó X(z) được viết lại như sau:

$X(z)$ [redacted] $\frac{b_M}{a_N}$ [redacted] hay ta có thể viết dưới dảng hàm của z^{-1} như sau:

$X(z)$ [redacted] $\frac{z^M}{z^N}$ [redacted] $z^{(M}$ [redacted] $^{N)}$ [redacted]

Với c = b_M/a_N X(z) có M điểm không và N điểm cực. Để biểu diễn trên đồ thị các điểm cực được đánh dấu bằng (x) và các điểm không được đánh dấu bằng (o)

Ví dụ: Xác định biến đổi z của tín hiệu được cho bởi giản đồ cực và không như sau:

Vẽ hình

2. Biến đổi z ngược

2.1 Định lí Cauchy

Định lí Cauchy là một định lí quan trọng trong lí thuyết biến số phức, nó là cơ sở để chúng ta xây dựng công thức của biến đổi z ngược.

Định lí Cauchy được phát biểu như sau:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{n-k-1}dz = \begin{cases} 1 & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

Trong đó C là một đường cong kín bất kì.

2.2 Biến đổi z ngược

Từ biểu thức $X(z) = \sum_n x(n).z^{-n}$ ta có:

$X(z)z^{k-1} = \sum_n x(n).z^{k-n-1}$ lấy tích phân trên miền hội tụ ROC của nó ta có :

$$\oint_{ROC} X(z)z^{k-1}dz = \oint_{ROC}\sum_n x(n).z^{k-n-1}dz = \sum_n x(n)\oint_{ROC} z^{k-n-1}dz$$

Áp dụng định lí Cauchy ta có:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{ROC} X(z)z^{k-1}dz = \sum_n x(n) \quad \text{với k = n}$$

Hay $\frac{1}{2\pi j}\oint_{ROC} X(z)z^{k-1}dz = \sum_n x(k) = x(k)$

vậy: $x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{ROC} X(z)z^{k-1}dz$ hoặc ta có thể viết:

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{ROC} X(z)z^{k-1}dz \quad (2.2)$$

Biểu thức (2.2) được gọi là biểu thức của biến đổi Z ngược (IZT – Invert Z Transform).

Từ biểu thức (2.2) trong thực tế có nhiều phương pháp tìm biến đổi z ngược thuận tiện hơn thực hiện biểu thức (2.2).

2.3 Các phương pháp tìm biến đổi z ngược

a./ Phương pháp thặng dư (Giáo trình)

Nội dung của phương pháp là dùng lí thuyết thặng dư để thực hiện biểu thức (2.2).

b./ Phương pháp khai triển thành chuỗi luỹ thừa.

Do X(z) là hàm của một chuỗi luỹ thừa vì vậy trên miền hội tụ của nó ta có thể khai triển X(z) dưới dạng:

$X(z)$ [redacted] z [redacted] mà theo định nghĩa của biến đổi z ta có: $X(z)$ [redacted] $n)z$ [redacted]

Do vậy $x(n) = a_n$ với $-\infty < n < \infty$

Có nghĩa là các hệ số của z^{-n} chính là các giá trị của x(n).

VD1: Hãy xác định x(n) biết: $X(z) = z + 2 + 2.z^{-1} + 3.z^{-2} - 4.z^{-4}$

Từ định nghĩa của biến đổi z ta có: x(n) ={1,*2*,2,3,0,-4} hay ta có thể viết:

x(n) = δ(n+1) + 2δ(n) + 2δ(n-1) +3δ(n-2) - 4δ(n-4)

VD2: Cho $X(z)$ [redacted] $\frac{z}{z}$ [redacted] hãy xác định x(n) với:

a. ROC[X(z)] là: $|z|$ [redacted]

b. ROC[X(z)] là: $|z|$ [redacted]

a. Đây là tín hiệu nhân quả có chiều dai vô hạn vậy ta có:

$X(z)$ [redacted] $\frac{z}{z}$ [redacted] $\frac{1}{1}$ [redacted] z [redacted] ta thực hiện phép chia tử số cho mẫu số ta sẽ có:

X(z) = [redacted] $)^n z$ [redacted] suy ra: $x(n) = (-2)^n u(n)$

b. Đây là tín hiệu phản nhân quả có chiều dài vô hạn. Ta có: $X(z) = \frac{z}{z+2} = \frac{1}{2z^{-1}+1}$ tương tự như trên ta

cuối cùng ta có:

$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (-2)^n z^{-n}$ vậy x(n) = -(-2)^{n}u(-n-1)

Nhận xét: Từ ví dụ trên ta có nếu X(z) có dạng: $X(z) = \frac{z}{z - z_{ck}}$ thì ta có biến đổi z ngược IZT[X(z)]= x(n) = $\begin{cases} (z_{ck})^n u(n) & |z| > |z_{ck}| \\ -(z_{ck})^n u(-n-1) & |z| < |z_{ck}| \end{cases}$

c./ Biến đổi z ngược với X(z) là hàm hữu tỷ.

Giả sử X(z) là hàm hữu tỷ với $a_0 = 1$

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Nếu M ≥ N thì ta có thể biểu diễn X(z) như sau:

$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + \frac{N_1(z)}{D(z)}$ đa thức $\sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k}$ dễ dàng xác định được biến đổi z ngược của nó nhờ tính chất dịch trễ thời gian.

Còn đa thức $N_1(z)/D(z)$ là đa thúc có bậc của D(z) lớn hơn bậc của $N_1(z)$.

Bây giờ ta xét trường hợp M<N.

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$, M<N và $a_N \neq 0$ ta sẽ khai triển đa thức này thành các phân thức tối giản.

- Nếu X(z) chỉ có các cực đơn thì ta có:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{(z - z_{ck})}$$ trong đó z_{ck} là các cực của X(z), A_k được xác định như sau: $A_k = (z - z_{ck})\frac{N(z)}{D(z)}\Big|_{z = z_{ck}}$

- Nếu X(z) có 1 cực bội, giả sử cực bội bậc s là z_{ci} các cực còn lại lkà các cực đơn thì ta có:

$$X(z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} \frac{A_k}{(z - z_{ck})} + \sum_{j=1}^{s} \frac{c_j}{(z - z_{cj})^j}$$ trong đó :

$$A_k = (z - z_{ck})\frac{N(z)}{D(z)}\Big|_{z = z_{ck}} \quad ; \quad c_j = \frac{1}{(s-j)!}\frac{d^{s-j}}{dz^{s-j}}\left[(z - z_{ci})^s \frac{N(z)}{D(z)}\right]_{z = z_{ci}}$$

- Nếu X(z) có nhiều hơn một cực bội thì ta làm tương như trên.

Sau khi khai triển xong X(z) ta sẽ tìm IZT[X(z)] của các phân thức tối giản bởi các công thức sau:

$$IZT\left[\frac{z}{z - z_{ck}}\right] = (z_{ck})^n u(n)$$ (dãy nhân quả)

$$IZT\left[\frac{1}{z - z_{ck}}\right] = (z_{ck})^{n-1} u(n-1)$$

Tổng quát ta có: $IZT\left[\frac{z}{(z - z_{ck})^{m+1}}\right] = \frac{n(n-1).....(n-m+1)}{m!} z_{ck}^{n-m} u(n)$ với dãy nhân quả.

$IZT\left[\frac{z}{(z - z_{ck})^{m+1}}\right] = -\frac{n(n-1).....(n-m+1)}{m!} z_{ck}^{n-m} u(-n-1)$ với dãy phản nhân quả.

Ví dụ 1: Cho $X(z) = \frac{z+2}{2z^2 - 7z + 3}$

Hãy xác định x(n)

Ví dụ 2: Cho $X(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 1)}$

Hãy xác định x(n)

3 Phân tích hệ thống rời rạc trên miền z

Chúng ta đã biết trên miền n một HT-TT-BB được đặc trưng bởi đáp ứng xung hoặc phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng. Nhưng việc phân tích hệ thống nhiều khi gặp phải sự khó khăn của việc tính tích chập, gải PT-SP.... Trong phần trước chúng ta đã biểu diễn tín hiệu sang miền biến số z, bây giờ ta sẽ phân tích hệ TT-BB trên miền z, trước tiên ta tìm hiểu khái niệm hàm truyền đạt của hệ thống.

3.3 Hàm truyền đạt của hệ thống TT-BB

Miền n

y(n) = x(n)*h(n)

= [redacted] $n).h(n$ [redacted] $)$ k

h(n) = IZT[H(z)]

Miền z

X(z) = ZT[x(n)], Y(z) = ZT[y(n)]

H(z) = ZT[h(n)]

$H(z)$ [redacted] $\frac{Y(z)}{X(z)}$

Như vậy hàm truyền đạt của hệ thống TT-BB chính là biến đổi z cuả đáp ứng xung của nó. Hàm truyền đạt được kí hiệu là H(z) vaànó cũng đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trên miền z.

3.4 Hàm truyền đạt của hệ được mô tả bởi PT – SP – TT –HSH

Quan hệ giữa đầu vào và đầu ra của một HT – TT – BB được mô tả bởi PT sau:

[redacted] $y(n$ [redacted] $)$ [redacted] $x(n$ [redacted] $)$; lấy biến đổi Z 2 vế ta có:

[redacted] $y(n$ [redacted] $)$ [redacted] $x(n$ [redacted] $)$ [redacted]

Áp dụng tính chất trễ và tuyến tính ta có:

[redacted] $(n$ [redacted] $)z$ [redacted] $)$ z [redacted] n [redacted] $)z$ [redacted] $)$ z [redacted]

Suy ra : [redacted] z [redacted] $(n$ [redacted] $)z$ [redacted] $)$ [redacted] z [redacted] n [redacted] $)z$ [redacted] $)$

[redacted] z [redacted] $.Y(z)$ [redacted] z [redacted] $.X(z)$

[redacted] (z) [redacted] $\frac{Y(z)}{X(z)}$ [redacted] z [redacted] / [redacted] z [redacted]

Nếu $a_0 = 1$ thì ta có:

[redacted] (z) [redacted] z [redacted] / 1 [redacted] z [redacted]

Chú ý: Ta cũng có thể biểu diễn H(z) dưới dạng hàm của z^{-1}, hoặc các cực và không của nó.

3.5 Giải phương trình sai phân TT – HSH sử dụng biến đổi z

Để giải PT – SP – TT – HSH ta tìm hiểu khái niệm biến đổi z đơn hướng.

a. Biến đổi z đơn hướng

Biến đổi z đơn hướng được định nghĩa như sau:

X [redacted] (z) [redacted] $n)z$ [redacted]

Các tính chất của biến đổi z đơn hướng cũng giống như tính chất của biến đổi z trừ tích chất dịch thời gian như sau:

Nếu ZT^{+} [x(n)] = $X^{+}(z)$ thì

ZT^{+} [x(n-k)] = z^{-k} [redacted] (z) [redacted] $)z^{n}$ [redacted] với k > 0

ZT^{+} [x(n+k)] = z^{k} [redacted] (z) [redacted] $n)z$ [redacted] với k < 0

b. Giải phương trình sai phân:

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

1) y(n) – 3y(n-1) +2y(n-2) = x(n) với x(n) = 3^{n+2}, y(-2) = -4/9, y(-1) =-1/3

2) y(n) = ay(n-1) + x(n) với x(n) = u(n), y(-1) = 1

3.6 Phân tích hệ thống TT – BB trên miền z.

Các phần tử thực hiện hệ thống trên miền z cũng giống như trên miền n, chỉ khác kí hiệu của phần tử trễ ta thay $D = Z^{-1}$

a. Nguyên tắc phân tích hệ thống

- Phân tích hệ tổng quát thành các hệ nhỏ hơn (các khối nhỏ hơn)
- Tìm mối quan hệ giữa các khối nhỏ hơn này.
- Xác định hàm truyền đạt $H_i(z)$ cua các khối nhỏ.
- Tổng hợp hàm truyền đạt từ cách phân tích ở trên.

b. Một số quy tắc biến đổi sơ đồ khối

- Hệ gồm các khối mắc nối tiếp

Vẽ hình

$H(z) = H_1(z).H_2(z)...H_n(z)$

Vậy hệ gồm các khối mắc nối tiếp sẽ tương đương với hệ thống có hàm truyền đạt là tích của các hàm truyền đạt thành phần.

- Hệ gồm các khối mắc song song.

Vẽ hình

$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + ...+ H_n(z)$

Vậy hệ thống gồm các khối mắc song song với nhau sẽ tương đương với hệ thống có hàm truyền đạt là tổng của các hàm truyền đạt thành phần.

- Hệ có hồi tiếp

c. Sự ổn định của hệ thống TT – BB

Đối với một hệ thống tuyến tính bất biến, nếu tín hiệu ở đầu vào không có nhưng ở đầu ra của hệ thống vẫn xuất hiện tín hiệu thì hệ thống đó là hệ thống không ổn định.

Trong chương trước chúng ta đã xét độ ổn định của hệ thống TT-BB nó được đặc trưng bởi các tính chất của đáp ứng xung h(n) của nó, cụ thể: Một hệ thống TT –BB là ổn định nếu điều kiện sau đây thoả mãn:

S [redacted] $n)|$ [redacted]

Trong miền z thì ta có:

$H(z)$ [redacted] $n)z$ [redacted] với miền hội tụ của nó: R_h [redacted] $z|$ [redacted] R_h [redacted]

So sánh với điều kiện hội tụ trên miền n thì ta thấy để điều kiện ổn định trên miền n thoả mãn thì H(z) phải hội tụ với $|z|$ [redacted] nghĩa là nó hội tụ trên vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z, vì thế miền hội tụ của H(z) phải chứa vòng tròn đơn vị.

Vậy ta có thể phát biểu điều kiện ổn định của một HT – TT –BB trên miền z như sau: Một hệ thống TT –BB là ổn định khi và chiỉkhi vòng tròn đơn vị của mặt phẳng z nằm trong miền hội tụ của hàm truyền đạt của hệ thống.

c2. Sự ổn định của hệ thống nhân quả

Trong thực tế chúng ta chỉ gặp các hệ thống nhân quả ổn định, vì vậy ta sẽ xét sự ổn định của các hệ thống này.

Do hàm truyền đạt của hệ thống nhân quả được viết như sau:

$H(z)$ [redacted] $n)z$ [redacted] ROC : $|z|$ [redacted] R_h [redacted] trong đó R_h [redacted] $\mathrm{im}|h(n)|$ [redacted] (T/c Cauchy)

Từ đây ta có một số nhận xét sau :

- Một hệ thống là nhân quả nếu miền hội tụ của hàm truyền đạt nằm ngoài vòng tròn đường kính R^-_h
- Đối với HT –TT –BB điều kiện nhân quả và ổn định là đọc lập với nhau. Nghĩa là hệ thống ổn định chưa chắc đã nhân quả và ngược lại.
- Trong thực tế chúng ta chỉ xét các hệ thống thực hiện được về mặt vật lý đó là các hệ thống ổn định và nhân quả.
- Vậy điều kiện để HT –TT –BB nhân quả và ổn định là : Miền hội tụ của hàm truyền đạt H(z) của nó phải thoả mãn :

$|z|$ [redacted] R_h [redacted]

R_h [redacted]

Rõ ràng miền hội tụ của H(z) không chứa bất cứ điểm cực z_{ck} nào do đó ta có thể nói : Một hệ thống TT –BB nhân quả và ổn định khi và chỉ khi tất cả các điểm cực của hàm truyền đạt nằm trong vòng tròn đơn vị.

Ví dụ 1:

HT – TT – BB được cho như sau :

y(n) = a.y(n-1) + x(n)

- Tìm H(z), h(n)
- Xét sự ổn định của hệ nhân quả

Giải:

- Lấy biến đổi z 2 vế của pt ta có:

$Y(z) = a.z^{-1}Y(z) + X(z)$

Suy ra $H(z)$ [redacted] $\frac{Y(z)}{X(z)}$ [redacted] $\frac{1}{1}$ [redacted] z [redacted]

H(z) có 1 điểm cực là z_c =a

Nếu H(z) là hàm truyền đạt của hệ nhân quả thì ta có ROC : $|z|$ [redacted] thì ta có:

h(n) = IZT[H(z)] = $a^n u(n)$

Nếu H(z) là hàm truyền đạt của hệ phản nhân quả thì ta có ROC : $|z|$ [redacted] thì ta có:

h(n) = IZT[H(z)] = $-a^n u(-n-1)$

- Sự ổn định của hệ nhân quả: Theo điều kiện của hệ nhân quả ổn định thì ta phái có a< 1 thì hệ nhân quả trên sẽ ổn định

Ví dụ 2:

Xét sự ổn định của HT nhân quả có hàm truyền đạt sau:

$$H(z) \text{[redacted]} \frac{z^2 \text{[redacted]} 2z \text{[redacted]}}{z^2 \text{[redacted]} z \text{[redacted]} \frac{1}{2}}$$

Tìm các z_{ck}, hệ có z_{c1}=1/2 + j1/2, z_{c1}=1/2- j1/2

Đây là 2 điểm cực nằm trong vòng tròn đơn vị vậy HT nhân quả đã cho là ổn định.

c3. Tiêu chuẩn July (Giáo trình)

Chương 3

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRÊN MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC

Mở đầu

Trong các chương trước chúng ta đã tìm hiểu tín hiệu và hệ thống rời rạc trên miền n, Z, trên miền tần số chúng ta đã sử dụng DTFT để biểu diễn tín hiệu trên miền tần số liên tục. Trong chương này chúng ta sẽ tìm hiểu phép biến đổi Fourier rời rạc để biểu diễn tín hiệu trên miền tần số rời rạc k, với các chuỗi có chiều dài hữu hạn, cách biểu diễn này rất có ích cho các máy tính số cũng như cho việc thực hiện phần cứng số.

§1. Chuỗi Fourier rời rạc của tín hiệu tuần hoàn (DFS)

1. Định nghĩa

Gọi $x_p(n)$ là dãy tuần hoàn có chu kì là N: $x_p(n) = x_p(n + N)$ chuỗi $x_p(n)$ có thể được biểu diễn bằng một chuỗi Fourier rời rạc sau:

$x_p(n)$ [redacted] $\frac{1}{N}$ [redacted] $_p(k)e^{j\frac{2[redacted]}{N}n.k}$ (3.1)

Trong đó $X_p(k)$ là dãy tuần hoàn chu kì N, bây giờ ta đi tìm $X_p(k)$:

Nhân cả 2 vế với $e^{[redacted]\frac{2[redacted]}{N}n.m}$ ta có:

$x_p(n).e^{[redacted]\frac{2[redacted]}{N}n.m}$ [redacted] $\frac{1}{N}$ [redacted] $_p(k)e^{j\frac{2[redacted]}{N}n.(k[redacted]m)}$

Lấy tổng theo n từ: 0 đến N-1 ta có: [redacted] $_p(n).e^{[redacted]\frac{2[redacted]}{N}n.m}$ [redacted] $\frac{1}{N}$ [redacted] $_p(k)e^{j\frac{2[redacted]}{N}n.(k[redacted]m)}$

[redacted] $_p(n).e^{[redacted]\frac{2[redacted]}{N}n.m}$ [redacted] $_p(k)$ [redacted] $\frac{1}{N}$ [redacted] $^{\frac{2[redacted]}{N}n.(k[redacted]m)}$ [redacted]

Nhận xét : [redacted] $^{\frac{2[redacted]}{N}n.(k[redacted]m)}$ [redacted] N k [redacted] m; [redacted] 0 k [redacted] m

Vậy với k=m thì ta có:

[redacted] $_p(n).e^{[redacted]\frac{2[redacted]}{N}n.m}$ [redacted] $_p(m)\frac{1}{N}.N$ [redacted] $_p$ [redacted] m [redacted] $X_p(m)$

Vậy ta có: $X_p(m)$ [redacted] $_p(n).e^{[redacted]\frac{2[redacted]}{N}n.m}$

hoặc ta có: $X_p(k)$ [redacted] $_p(n).e^{[redacted]\frac{2[redacted]}{N}n.k}$ (3.2)

Từ (3.1) và (3.2) ta có:

$$x_p(n) \xleftrightarrow{\text{DFS}} X_p(k)$$

2. Các tính chất của chuỗi Fourier rời rạc

a. Tính chất tuyến tính:

DFS[$x_{1p}(n)$] = $X_{1p}(k)$

DFS[$x_{2p}(n)$] = $X_{2p}(k)$

$x_{3p}(n) = a.x_1(n) + b.x_2(n)$

DFS[$x_{3p}(n)$] = $X_{3p}(k) = a.X_{1p}(k) + b.X_{2p}(k)$

b. Tính chất trễ

DFS[$x_{1p}(n)$] = $X_{1p}(k)$

$x_{2p}(n) = x_1(n - n_0)$

DFS[$x_{2p}(n)$] = $X_{2p}(k)$ = $e^{j\frac{2\pi}{N}k.n_0} X_{1p}(k)$

c. Tổng chập tuần hoàn

DFS[$x_{1p}(n)$] = $X_{1p}(k)$

DFS[$x_{2p}(n)$] = $X_{2p}(k)$

$x_{3p}(n) = x_1(n)(*)x_2(n)$

DFS[$x_{3p}(n)$] = $X_{3p}(k) = X_{1p}(k).X_{2p}(k)$

§2. Biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn.

1. Mối quan hệ giữa dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn và dãy tuần hoàn.

Giả sử có một dãy rời rạc không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn là M: $x(n)_M$ và một đãy rời rạc tuần hoàn chu kì N: $x_p(n)$.

- Nếu M =N thì dãy $x(n)_M$ chính là một chu kì của dãy $x_p(n)$ (Vẽ 2 tín hiệu)

- Nếu M < N thì ta thấy dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)_M$ có thể là một chu kì của dãy $x_p(n)$ bằng cách khi chúng ta coi dãy x(n) là dãy có chiều dài là N bằng cách thên vào (N-M) mẫu có giá trị bằng 0. Ví dụ (vẽ hình)

Như vậy từ một dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn $x(n)_M$ ta có thể lập 1 dãy tuần hoàn $x_p(n)$ có chu kì N>= M với mỗi chu kì của dãy tuần hoàn $x_p(n)$ sẽ chính là dãy $x(n)_M$.

- Trường hợp M > N ta không thể làm được như vậy.

Chú ý:Để nhận được dãy x(n) có chiều dài hữu hạn chúng ta có thể sử dụng một dãy chữ nhật: $rect_N(n)$:

$$x(n)_M = x_p(n).rect_N(n) = \begin{cases} x_p(n) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \quad conlai \end{cases}$$

Trên miền k thì ta sẽ có: $X(k) = X_p(k).rect_N(k) = \begin{cases} X_p(k) & 0 \le k \le N-1 \\ 0 & k \quad conlai \end{cases}$

Nhận xét: Chuỗi Fourier rời rạc của dãy tuần hoàn được tính trong một chu kì rồi lấy tuần hoàn từ -∞ đến +∞ vơis chuu kì là N. Vì vậy ta có thể lấy định nghĩa của chuỗi Fourier rời rạc của dãy tuần hoàn làm định nghĩa cho chuỗi có chiều dài hữu hạn nhưng không được lấy tuần hoàn, nó chỉ xác định trong miền giá trị cuả nó, ngoài miền giá trị bằng 0.

2. Định nghĩa

Cặp biến đổi Furier rời rạc (Discrete Fourier Transform)của dãy có chiều dài hữu hạn là N được định nghĩa như sau:

$X(k)$ [redacted] $n).e$ [redacted] $\frac{2}{n}k.n$ $\quad 0$ [redacted] k [redacted] N [redacted]

$0 \quad k \quad conlai$

$x(n)$ [redacted] $\frac{1}{N}$ [redacted] $(k).e^{j\frac{2}{n}n.k}$ $\quad 0$ [redacted] n [redacted] N [redacted]

$0 \quad n \quad conlai$

Đặt e [redacted] $\frac{2}{N}$ [redacted] W_N ta có:

$X(k)$ [redacted] $n).W_N{}^{k.n}$ $\quad 0$ [redacted] k [redacted] N [redacted]

$0 \quad k \quad conlai$

$x(n)$ [redacted] $\frac{1}{N}$ [redacted] $(k).W_N$ [redacted] $.n$ $\quad 0$ [redacted] n [redacted] N [redacted]

$0 \quad n \quad conlai$

Kí hiệu : DFT[x(n)] = X(k)

IDFT[X(k)] = x(n)

$X(k)$ [redacted] $X(k)|e^{j}$ [redacted]

$|X(k)|$ gọi là phổ biên độ

[redacted] $)$ gọi là phổ pha

Ví dụ: Tìm X(k) biết:

a. x(n) = ∂(n)
b. x(n) = $rect_4$(n)

a. Chọn chiều dài của dãy là M, vậy ta có:

$X(k)$ [redacted] $n).W_M{}^{k.n}$ $\quad 0$ [redacted] k [redacted] M [redacted]

$0 \quad k \quad conlai$

$X(k)$ [redacted] $\quad 0$ [redacted] k [redacted] M [redacted]

$0 \quad k \quad conlai$

c. Chọn chiều dài của dãy là N = 4

$X(k)$ [redacted] $n).W_M^{k.n}$ 0 [redacted] k [redacted]

[redacted] 0 k *conlai*

$X(k)$ [redacted] $^{k.n}$ 0 [redacted] k [redacted]

[redacted] 0 k *conlai*

W_4 [redacted] nên ta có:

$X(0) = 1 + (-j) + (-j)^2 + (-j)^3 = 0$

Tương tự với X(1), X(2), X(3)

3. Các tính chất của DFT

a. Tính chất tuyến tính:

DFT[$x_1(n)$] = $X_1(k)$

DFT[$x_2(n)$] = $X_2(k)$

$x_3(n) = a.x_1(n) + b.x_2(n)$

DFS[$x_3(n)$] = $X_{3p}(k) = a.X_1(k) + b.X_2(k)$

b. Tính chất dịch vòng

Dịch vòng của một dãy x(n) được định nghĩa như sau:

$x(n-n_0)_N.rect_N(n) = x_p(n-n_0).rect_N(n)$

Phép dịch vòng của một dãy là phép dịch trong đó các mẫu đi ra khỏi đoạn [0, N-1] sẽ quay trở lại đầu kia.

DFT[x(n)] = X(k)

DFT[$x(n-n_0)$] = Y(k) =$W^{k.n}X(k)$

Còn nữa

§ 3. Biến đổi Fourier nhanh – FFT

I Mở đầu

Trong lĩnh vực xử lí số tín hiệu, biến đổi Fourier có vai trò rất quan trọng, vì vậy nó tồn tại các thuật toán tính toán DFT hiệu quả hơn. Từ khi Cooley phát hiện ra thuật toán tìm nhanh biến đổi DFT, các thuật toán ngày càng được phát triển và ứng dụng nhiều trong xử lí số tín hiệu.

1. Độ phức tạp tính toán của DFT

Trong phần trước chúng ta đã tìm hiểu biến đổi Fourier rời rạc như sau:

$X(k)$ [redacted] $n).W_M^{k.n}$ 0 [redacted] k [redacted] N [redacted] (3.3)

0 k *conlai*

$x(n)$ [redacted] $(k).W_N$ [redacted] $.n$ 0 [redacted] n [redacted] N [redacted] (3.4)

0 n *conlai*

<u>Nhận xét:</u>

- Từ (3.3) và (3.4) ta thấy: X(k) và x(n) chỉ khác nhau hệ số tỉ lệ (1/N) và dấu của W_N. Như vậy DFT và IDFT gần như là giống nhau, do đó các thuật toán FFT được sử dụng cho cả DFT và IDFT, nghĩa là các thuật toán tính nhanh FFT cũng áp dụng cho IFFT.
- Từ (3.3) ta thấy do x(n) có thể có giá trị thực hoặc phức vì thế để tìm X(k) yêu cầu thực hiện N phép nhân phức và N phép cộng phức với 1 giá trị của k. Với N giá trị k việc tính DFT- N điểm yêu cầu N^2 phép toán nhân phức và N^2 phép toán cộng phức. Do đó khi N lớn số lượng phép toán sẽ rất lớn vì vậy cần thuật toán tìm X(k) (x(n)) hiệu quả hơn.
- Giải thuật cơ bản của thuật toán tính nhanh FFT là việc phân giã DFT-N điểm thành các DFT-N_i nhỏ hơn (N_i<N) khi đó số lượng phép toán sẽ giảm đi rất nhiều (cỡ $i.N_i^2$).
- Các thuật toán tính nhanh biến đổi Fourier đều dựa vào tính chất của W_N.

2. Các tính chất của W_N.

a. Tính tuần hoàn

$W_N^{k.n} = W_N^{(k'.n' + iN)} = W_N^{k'.n'}$

Do n [redacted], N-1]

k [redacted], N-1]

nên k.n [redacted] 0, (N-1).(N-1)] và k.n = k'.n' + iN

Ví dụ: Cho DFT – N=8 hãy dùng tính chất tuần hoàn để tính X(7)

Từ (3.3) Ta có:

$X(7) = x(0).\ W_8^{7.0} + x(1).\ W_8^{7.1} + x(2).\ W_8^{7.2} + x(3).\ W_8^{7.3} + x(4).\ W_8^{7.4} + x(5).W_8^{7.5} + x(6).\ W_8^{7.6} + x(7).\ W_8^{7.7}$

$X(7) = x(0).\ W_8^{0} + x(1).\ W_8^{7} + x(2).\ W_8^{14} + x(3).\ W_8^{21} + x(4).\ W_8^{28} + x(5).W_8^{35} + x(6).\ W_8^{42} + x(7).\ W_8^{49}$

Do tính chất tuần hoàn của W_N nên ta có:

$W^{0}{}_{8} = W_8^{0}$

$W^{7}{}_{8} = W_8^{7}$

$W^{14}{}_{8} = W_8^{(6+1.8)} = W^{6}{}_{8}$ $\qquad$ $W^{42}{}_{8} = W_8^{(2+5.8)} = W^{2}{}_{8}$

$W^{21}{}_{8} = W_8^{(5+2.8)} = W^{5}{}_{8}$ $\qquad$ $W^{49}{}_{8} = W_8^{(1+6.8)} = W^{1}{}_{8}$

$W^{28}{}_{8} = W_8^{(4+3.8)} = W^{4}{}_{8}$

$W^{35}{}_{8} = W_8^{(3+4.8)} = W^{3}{}_{8}$

Vậy: $X(7) = X(7) = x(0).\ W_8^{0} + x(1).\ W_8^{7} + x(2).\ W_8^{6} + x(3).\ W_8^{5} + x(4).W_8^{4} + x(5).W_8^{3} + x(6).\ W_8^{2} + x(7).\ W_8^{1}$

b. Tính chất đối xứng.

$W^{k'n'}{}_{N} = W_N^{(N-k''n'')} \qquad = W_N^{N}.\ W_N^{-k''.n''} = W_N^{-k''.n''}$ do $W^{N}{}_{N} = 1$

Ví dụ: $W^{7}{}_{8} = W_8^{(8-1)} = W^{-1}{}_{8}$ ......

Dựa vào các tính chất này người ta có các giải thuật phân chia theo thời gian và phân chia theo tần số, trong chương trình chúng ta chỉ tìm hiểu giải thuật phân chia theo thời gian với $N = 2^{m}$ còn các trường hợp khác sv tự ngiên cứu!

3. Thuật toán FFT cơ số 2 phân chia theo thời gian (FFT – R_2)

a. Trường hợp $N=2^{m}$

Nội dung của giải thuật này là phân chia dãy x(n) thành các dãy có chiều dài nhỏ hơn và tìm X(k) từ các DFT của chuỗi đã được chia nhỏ.

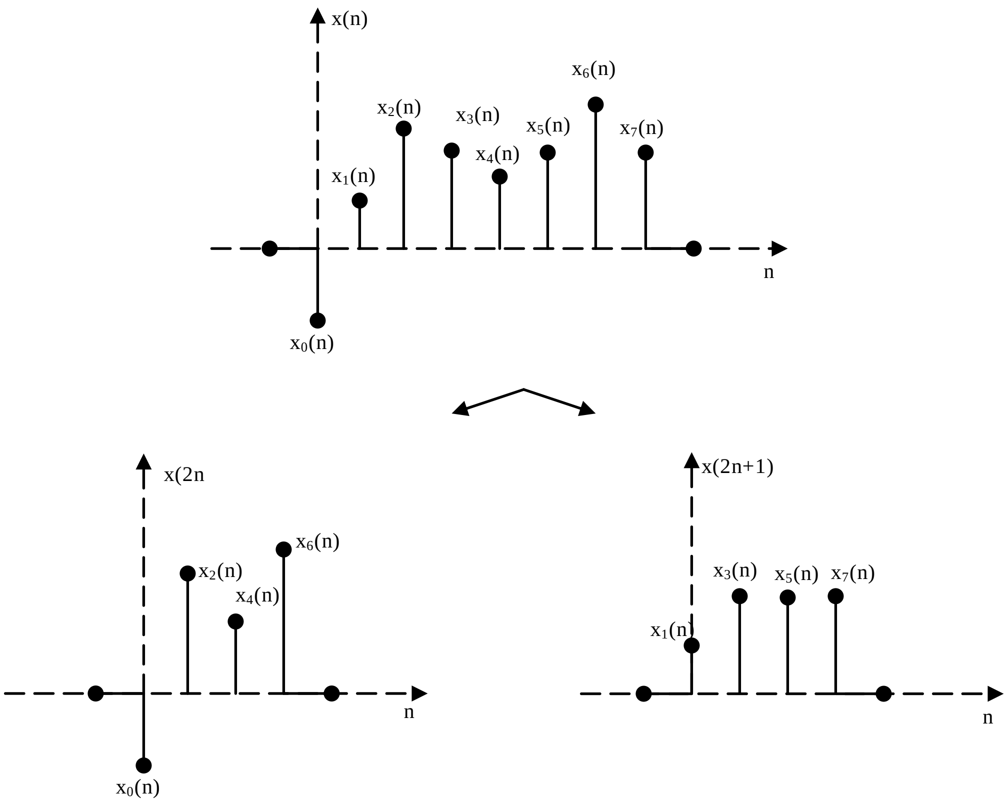
Thuật toán:

- Gọi x(n) là dãy có chiều dài là $N = 2^{m}$, giả sử x(n) được chia thành 2 dãy con x(2n) và x(2n+1), mỗi dãy có chiều dài là N/2

+ Dãy x(2n) là dãy chứa các mẫu chẵn của x(n).

+ Dãy x(2n+1) là dãy chứa các mẫu chẵn của x(n).

Ví dụ:



Do:

$X(k)$ [redacted] $n).W_N^{k.n}$ 0 [redacted] k [redacted] N [redacted] nên với 0 [redacted] k [redacted] N [redacted] ta có:

0 k $conlai$

$X(k)$ [redacted] $2n)W_N^{2n.k}$ [redacted] $2n$ [redacted] $)W_N^{(2n}$ [redacted] $^{).k}$ do W_N^2 [redacted] $\frac{2}{N}.2$ [redacted] $\frac{2}{\frac{N}{2}}$ [redacted] $W_{\frac{N}{2}}$ nên

$X(k)$ [redacted] $2n)W_{\frac{N}{2}}^{n.k}$ [redacted] $2n$ [redacted] $)W_{\frac{N}{2}}^{n.k}.W_N^k$ do W^k_N không phụ thuộc vào n nên:

$X(k)$ [redacted] $2n)W_{\frac{N}{2}}^{n.k}$ [redacted] W_N^k [redacted] $2n$ [redacted] $)W_{\frac{N}{2}}^{n.k}$

Đặt $X_0(k)$ [redacted] $2n)W_{\frac{N}{2}}^{n.k}$ là DFT – N/2 điểm chẵn của x(n)

$X_1(k)$ [redacted] $2n$ [redacted] $)W_{\frac{N}{2}}^{n.k}$ là DFT – N/2 điểm lẻ của x(n)

ta có: $X(k) = X_0(k) + W_N^k.X_1(k)$ (3.5)

Nhận xét: Các phép toán tìm $X_0(k)$ và $X_1(k)$ chỉ thực hiện trong khoảng từ: 0 đến(N/2 –1). Do vậy thực chất ta đã phân chia DFT – N điểm thành 2 DFT – N/2 điểm. $X_0(k)$ và $X_1(k)$ tuần hoàn chu kì N/2.

Ví dụ:

Thực hiện DFT – N=8

Từ (3.5) ta có: $X(k) = X_0(k) + W_N^k.X_1(k)$

Suy ra: $X(0) = X_0(0) + W_8^0.X_1(0)$ $\quad X(4) = X_0(4) + W_8^4.X_1(4)$

$X(1) = X_0(1) + W_8^1.X_1(1)$ $\quad X(5) = X_0(5) + W_8^5.X_1(5)$

$X(2) = X_0(2) + W_8^2.X_1(2)$ $\quad X(6) = X_0(6) + W_8^6.X_1(6)$

$X(3) = X_0(3) + W_8^3.X_1(3)$ $\quad X(7) = X_0(7) + W_8^7.X_1(7)$

Do $X_0(k)$ và $X_1(k)$ tuần hoàn chu kì N/2 = 8/2 =4 do đó:

$X(0) = X_0(0) + W_8^0.X_1(0)$ $\quad X(4) = X_0(0) + W_8^4.X_1(0)$

$X(1) = X_0(1) + W_8^1.X_1(1)$ $\quad X(5) = X_0(1) + W_8^5.X_1(1)$

$X(2) = X_0(2) + W_8^2.X_1(2)$ $\quad X(6) = X_0(2) + W_8^6.X_1(2)$

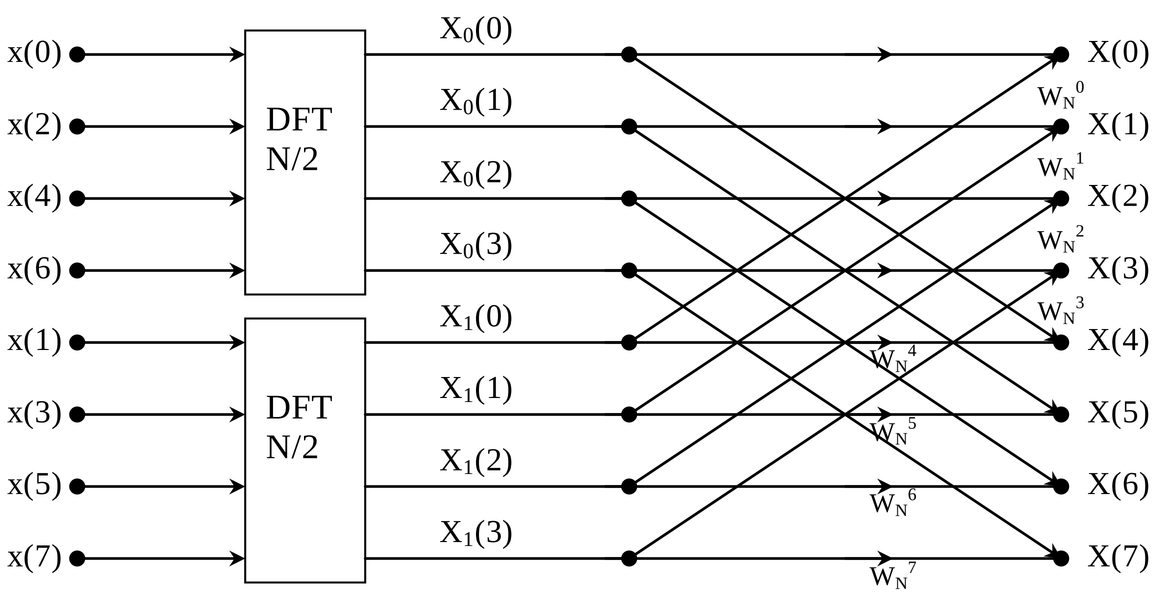
$X(3) = X_0(3) + W_8^3.X_1(3)$ $\quad X(7) = X_0(3) + W_8^7.X_1(3)$

Từ đây ta có thể xây dựng lưu đồ sau:

Quy tắc xây dựng lưu đồ:

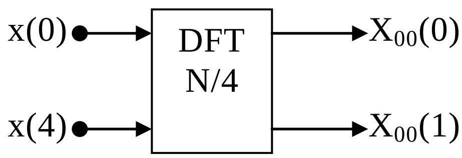
- Giá trị của một nút bằng tổng các nhánh đi vào nút đó.
- Giá trị của một nhánh bằng giá trị nút xuất phát nhân với hệ số truyền của nhánh.
- Hệ số truyền của nhánh ghi ở mũi tên, nếu không ghi thì hệ số truyền bằng 1.

Lưu đồ DFT –N=8 sau 1 lần phân chia. Vẽ hình sau

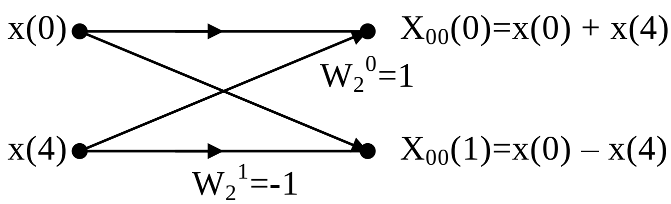


- Tiếp tục ta lại chia 2 dãy x(2n) và x(2n+1) mỗi dãy thành 2 dãy con giống như trên. Giải thuật tiếp tục sau (m-1) lần chia thì chỉ còn là DFT – 2 khi đó các hệ số truyền W^k_N chỉ mang 2 giá trị là: $W^0_2 = 1$ và $W^1_2 = -1$. Ta sẽ dừng phép chia tại đây.

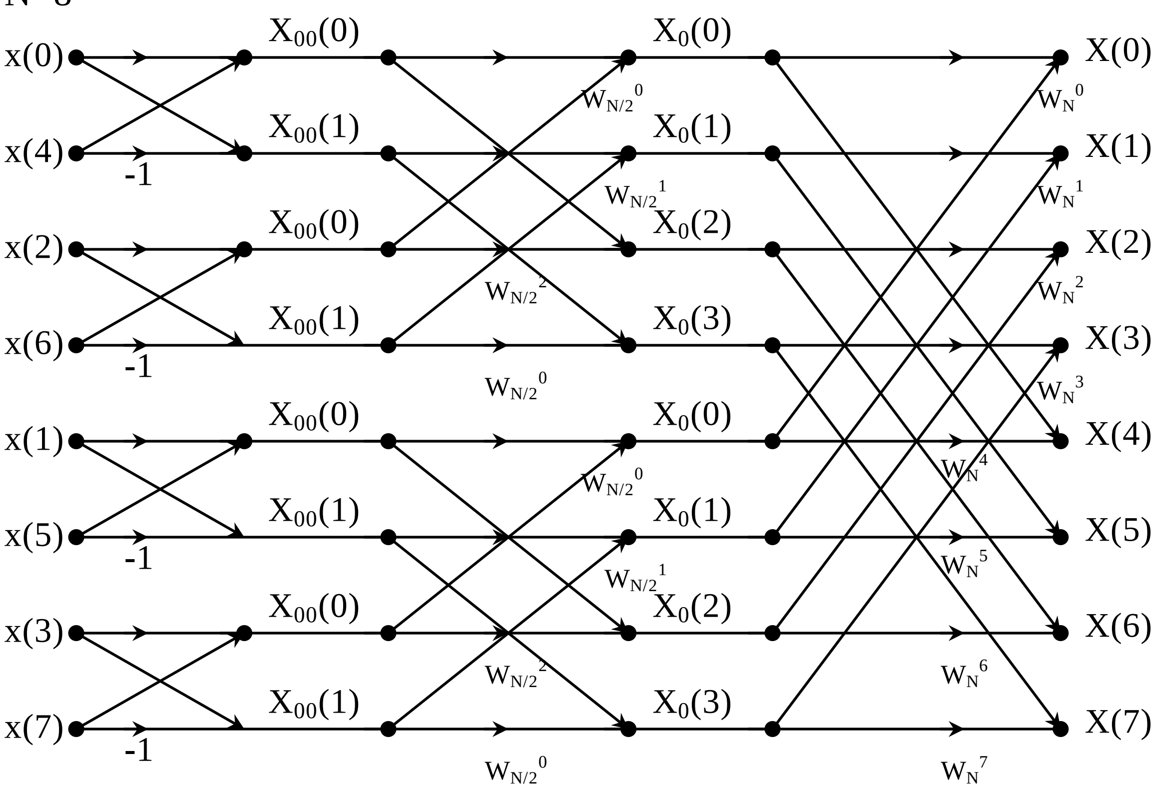
Ví dụ: N=8 sau 2 lần phân chia ta có:



Và ta có:



Đây được gọi là dạng cánh bướm của FFT $–R_2$. Kết hợp lại ta có lưu đồ sau: N=8



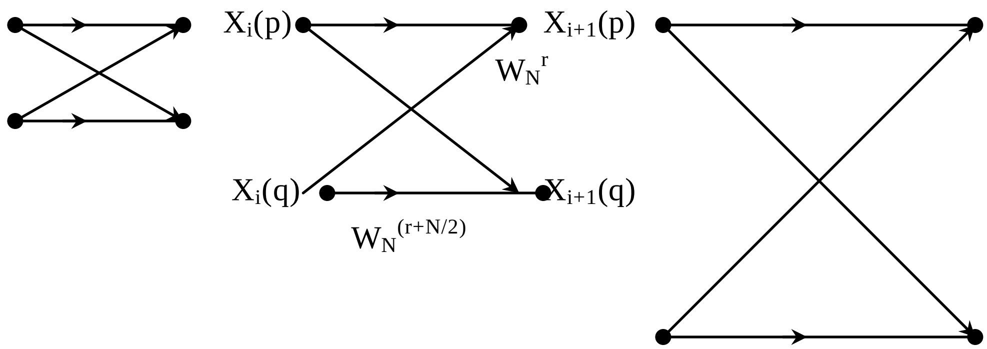
- Hiệu quả thuật toán: Do $N=2^m$ nên suy ra có m ltầng tính toán, mỗi tầng gồm N/2 phép nhân số phức với W^k_N và N phép cộng số phức. Vậy ta cần có (1/2).N.m phép nhân phức và (1/2)N.m phép cộng. Số lượng phép toán giảm đi đáng kể.

■ Ví dụ: N=8 sử dụng công thức của DFT thì cỡ: N^2=64

Sử dụng FFT-R_2 số lượng phép toán cỡ: N.m = 8.3=24.

■ Cải thiện thuật toán:

Xét giữa 2 tầng của thuật toán liền kề : i và i+1



Theo hình vẽ ta thấy giữa 2 tầng i và (i+1) ta có:

$X_{i+1}(p) = X_i(p) + W_N^r.X_i(q)$

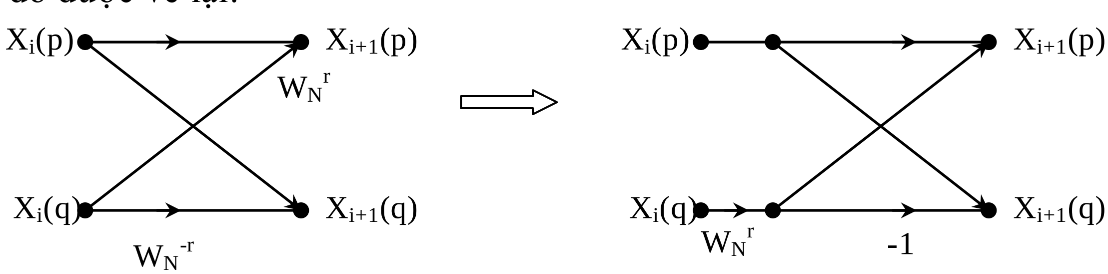
$X_{i+1}(q) = X_i(p) + W_N^{(r+N/2)}.X_i(q)$

Ta lại thấy: $W_N^{(r\blacksquare\frac{N}{2})} \blacksquare W_N^r.W_N^{\frac{N}{2}} \blacksquare W_N^r$ vậy ta có:

$X_{i+1}(p) = X_i(p) + W_N^r.X_i(q)$

$X_{i+1}(q) = X_i(p) - W_N^r.X_i(q)$\

Sơ đồ được vẽ lại:

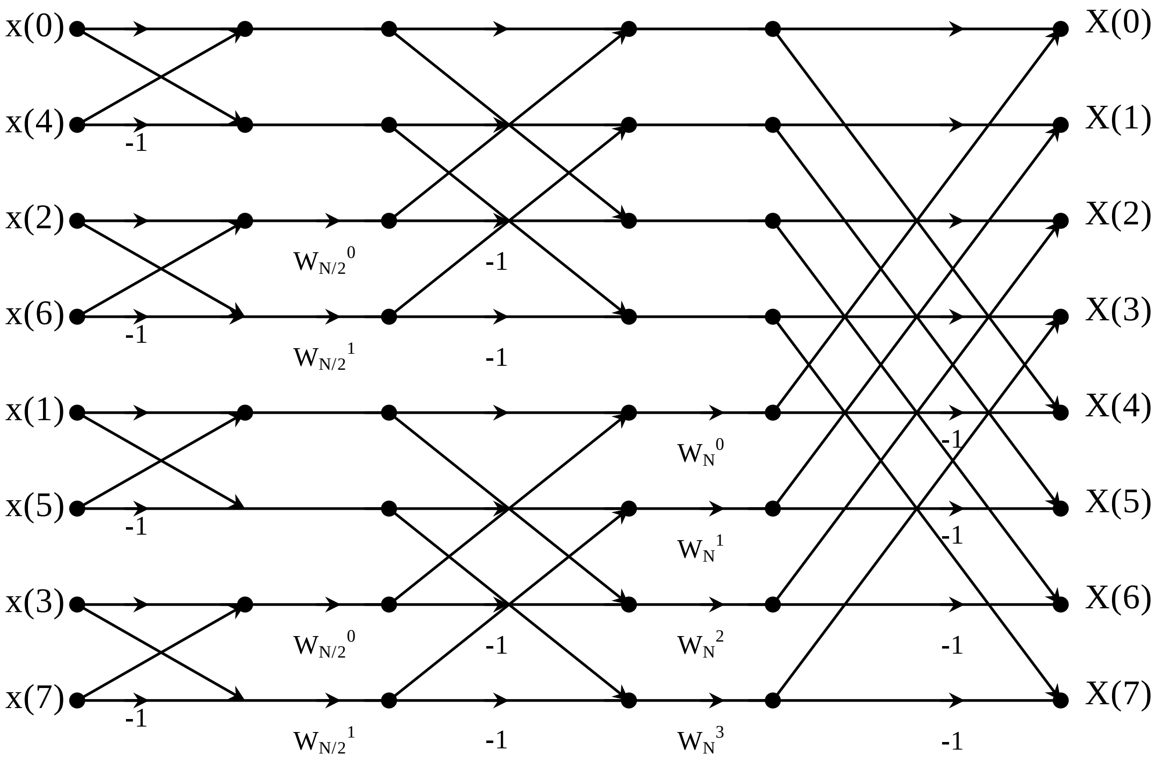


Vậy với một phép nhân $W_N^r.X_i(q)$ ta có thể tính 2 giá trị $X_{i+1}(p)$ và $X_{i+1}(q)$. Do đó số lượng phép nhân sẽ giảm đi 2 lần còn số lượng phép cộng vẫn giữ nguyên. Vậy để tính được $X(k)_N$ thì cần:

N.$\log_2$N phép cộng phức

(½)N.$\log_2$N phép nhân phức.

Vậy ta có thể xây dựng lưu đồ thuật toán FFT – R_2 (ví dụ N=8) như sau:



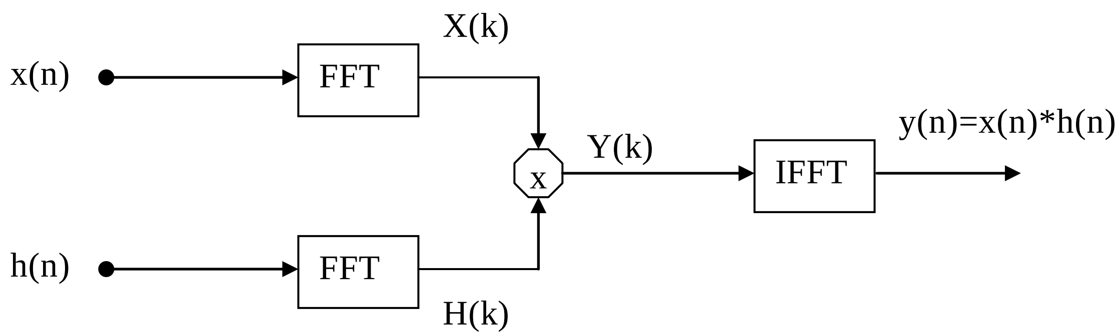
Chú ý: Khi thực hiện trên máy tính hoặc thiết kế dãy vào x(n) thường được xắp xếp theo mã nhị phân đảo còn X(k) được xắp xếp theo mã nhị phân thường.

x(n)	**Mã nhị phân đảo**	**Mã nhị phân thường**	**X(k)**
x(0)	000	000	X(0)
x(4)	100	001	X(1)
x(2)	010	010	X(2)
x(6)	110	011	X(3)
x(1)	001	100	X(4)
x(5)	101	101	X(5)
x(3)	011	110	X(6)
x(7)	111	111	X(7)
	Trục đảo	Trục đảo	

b. Trường hợp: N=B[redacted], $N=B_1.B_2$ (SV đọc giáo trình)

4. Thuật toán phân chia theo tần số (Giống phân chia theo thời gian) Tự nghiên cứu.
5. Tính tổng chập nhanh sử dụng FFT

$$y(n) = x(n)*h(n)$$


X(k)
x(n)
FFT
y(n)=x(n)*h(n)
Y(k)
x
IFFT
h(n)
FFT
H(k)

Chương 4: Bộ lọc số

Trong các phần trước chúng ta đã tìm hiểu một số cách biểu diễn tín hiệu và hệ thống rời rạc, đó là những công cụ không thể thiếu trong việc mô tả hệ thống xử lí tín hiệu. Bộ lọc số là một hệ thống tuyến tính bất biến, vì vậy trong phần này chúng ta sẽ sử dụng các tính chất đã nghiên cứu ở các phần trước để tìm hiểu về bộ lọc số một trong những hệ thống được ứng dụng rất nhiều trong xử lí số tín hiệu. Các bộ lọc số dần đã thay thế các bộ lọc tương tự.

§1. Các bộ lọc số lí tưởng

1. Khái niêm chung

Bộ lọc số là một HT-TT-BB trong miền thời gian rời rạc sơ đồ khối có dạng:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = x(n)*h(n)$$

Trong miền tần số được đặc trưng bởi đáp ứng tần số: H(e[redacted])

H(e[redacted] =DTFT [h(n)] = Y(e[redacted]/ X(e[redacted] = [redacted].e[redacted] / [redacted].e[redacted]

Việc thiết kế các bộ lọc số thực tế đều đi từ lí thuyết các bọ lọc số lí tưởng. Chúng ta sẽ tìm hiểu 4 loại bộ lọc số tiêu biểu là:

- Bộ lọc số thông thấp.
- Bộ lọc số thông cao
- Bộ lọc số thông dải.
- Bộ lọc số chắn dải.

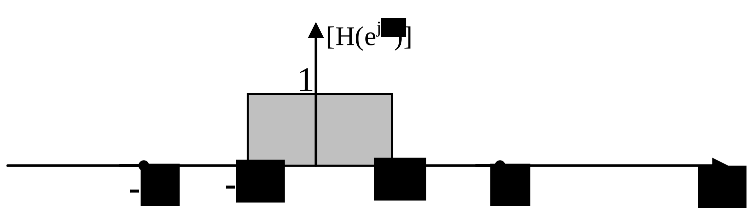
Lọc ở đây chúng ta hiểu là lọc tần số vì vậy tất cả các đặc trưng của bộ lọc số đều được cho theo đáp ứng biên độ

2. Các đặc trưng của bộ lọc số lí tưởng.

a. Bộ lọc thông thấp lí tưởng

Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp lí tưởng được định nghĩa như sau:

$|H(e^{j}$[redacted]$)|$ [redacted] [redacted] *con lai*



[redacted] tần số cắt.

[-[redacted]] dải thông.

Nhận xét: Do $|H(e^{j}$ [redacted] $)|$ là đối xứng do đó ta chỉ cần xét trong một nửa chu kì ([redacted]) là đủ và coi h(n) là thực.

h(n) là biến đổi Fourier ngược của H(e^j [redacted])

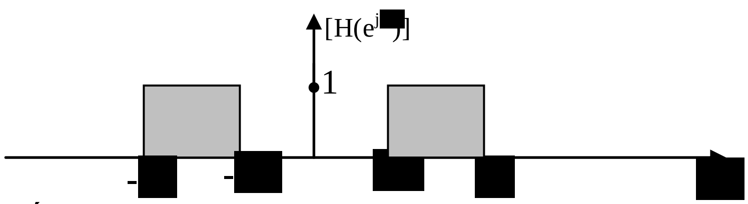
$h(n)$ [redacted] $\frac{1}{2}$ [redacted] $H(e^{j}$ [redacted] $).e^{j}$ [redacted] d [redacted] $\frac{1}{2}$ [redacted] e^{j} [redacted] d [redacted] $\frac{1}{j.2}$ [redacted] $\frac{1}{}$ [redacted] $\sin$ [redacted]

hay : $h(n)$ [redacted] $\frac{\sin}{}$ [redacted] (4.1)

b. Bộ lọc thông cao lí tưởng

Bộ lọc thông cao lí tưởng là bộ lọc mà đáp ứng biên độ của nó được định nghĩa như sau:

$|H(e^{j}$ [redacted] $)|$ [redacted] *con lai*



[redacted] tần số cắt.

[-[redacted]] dải thông

Nhận xét: Do $|H(e^{j}$ [redacted] $)|$ là đối xứng do đó ta chỉ cần xét trong một nửa chu kì ([redacted]) là đủ và coi h(n) là thực.

h(n) là biến đổi Fourier ngược của H(e^j [redacted])

$h(n)$ [redacted] $\frac{1}{2}$ [redacted] $H(e^{j}$ [redacted] $).e^{j}$ [redacted] d [redacted] $\frac{1}{2}$ [redacted] $H(e^{j}$ [redacted] $)e^{j}$ [redacted] d [redacted] $n)$ [redacted] $\frac{1}{}$ [redacted] $\sin$ [redacted]

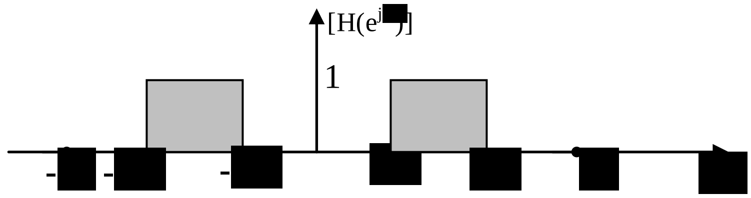
hay : $h(n)$ [redacted] $n)$ [redacted] $\frac{\sin}{}$ [redacted] (4.2)

[redacted] n) được gọi là đáp ứng xung của bộ lọc thông tất. (All Pass Fillter).

c. Bộ lọc thông dải lí tưởng.

Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông dải lí tưởng được định nghĩa như sau:

$|H(e^{j}$[redacted]$)|$ [redacted] , [redacted] *con lai*



[redacted] tần số cắt dưới.

[redacted] tần số cắt trên.

[-[redacted], -[redacted]]; [[redacted], [redacted]] dải thông

Nhận xét: Do $|H(e^{j}$[redacted]$)|$ là đối xứng do đó ta chỉ cần xét trong một nửa chu kì ([redacted]) là đủ và coi h(n) là thực.

Nếu có 2 bộ lọc thông thấp với tần số cắt là [redacted], và [redacted] thì:

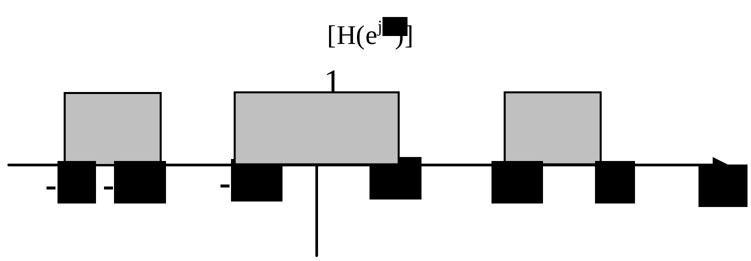
H(e^j[redacted]) = H_2(e^j[redacted]- H_1(e^j[redacted]) suy ra h(n) = h_2(n) – h_1(n)

$h(n)$ [redacted] sin [redacted] n [redacted] sin [redacted] n (4.3)

d. Bộ lọc chắn dải lí tưởng.

Đáp ứng biên độ của bộ lọc thông thấp lí tưởng được định nghĩa như sau:

$|H(e^{j}$[redacted]$)|$ [redacted] , [redacted] , [redacted] *con lai*



[redacted] tần số cắt dưới.

[redacted] tần số cắt trên.

[-[redacted]-[redacted]]; [-[redacted], [redacted]] ;[[redacted], [redacted] dải thông

Nhận xét: Nếu các bộ lọc thông tất và bộ lọc thông dải và bộ lọc chắn dải lí tưởng có cùng đáp ứng pha thì ta có các quan hệ sau:

$H(e^{j}$[redacted] = $H_A(e^{j}$[redacted] $H_T(e^{j}$[redacted] suy ra $h(n) = h_A(n) - h_T(n)$

Trong đó: $H_A(e^{j}$[redacted] là đáp ứng tần số của bộ lọc thông tất

$H_T(e^{j}$[redacted] là đáp ứng tần số của bộ lọc thông dải

$H(e^{j}$[redacted] là đáp ứng tần số của bộ lọc chắn dải

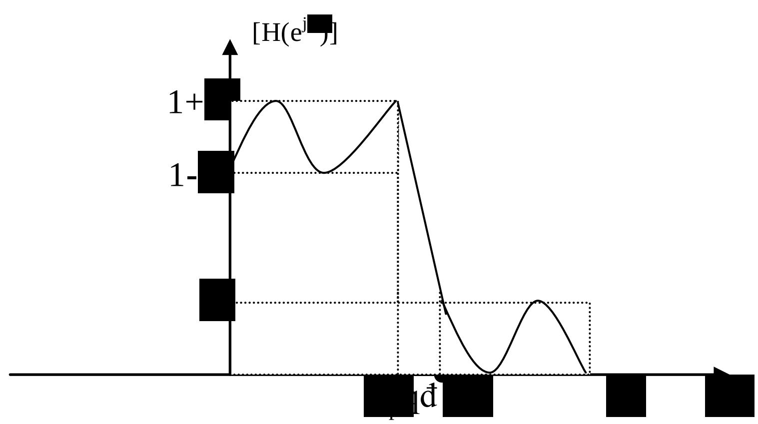
và

$h(n)$ [redacted] $n)$ [redacted] sin [redacted] n [redacted] n [redacted] sin [redacted] n [redacted] (4.4)

§2. Bộ lọc số FIR

Trong thực tế các bộ lọc số có đáp ứng tần số ở dạng:

$|H(e^{j}$[redacted] *o dai thong* [redacted] *o dai chan*



+ [redacted] độ gợn ở dải thông

+ [redacted] độ gợn ở dải chắn

+ [redacted] tần số giới hạn dải thông

+ [redacted] tần số giới hạn dải chắn

[redacted] dải quá độ.

1. Bộ lọc FIR thực tế

-Trong thực tế ta chỉ xác định được N hệ số của đáp ứng xung h(n). Vì vậy khi các bộ lọc FIR được xây dựng dựa trên các bộ lọc số lí tưởng thì chúng ta phải :

+ Hạn chế chiều dài của đáp ứng xung bằng cách dùng các hàm cửa sổ có chiều dài N ($rect_N(n)$).

+ Chuyển h(n) từ dạng không nhân quả sang dạng nhân quả bằng cách tịnh tiến đi một số mẫu.

2. Các đặc trưng của bộ lọc FIR pha tuyến tính.

Coi bộ lọc FIR có đáp ứng tần số là H(e^j [redacted] có pha tuyến tính, do đó nếu biết đáp ứng pha của nó ta sẽ biết tín hiệu qua bộ lọc với độ trễ nhất định đã biết.

Hệ thống FIR là hệ thống luôn luôn ổn định:

$H(e^j$ [redacted] $)$ [redacted] $DTFT$ [redacted] (n) [redacted] $n).e$ [redacted] $A(e^j$ [redacted] $).e^j$ [redacted]

Bộ lọc FIR có pha tuyến tính nếu: [redacted] (4.5)

a. Trường hợp [redacted] =0

Từ (4.5) ta có: [redacted]

Suy ra:

$H(e^j$ [redacted] $)$ [redacted] $A(e^j$ [redacted] $).e$ [redacted] $A(e^j$ [redacted] $).$ [redacted] os [redacted] $\sin$ [redacted] $n)e$ [redacted] $n).$ [redacted] os [redacted] $.\sin$ [redacted]

Suy ra: $A(e^j).\cos$ [redacted] $n).\cos$ [redacted] (*)

$A(e^j).\sin$ [redacted] $n).\sin$ [redacted] (**)

Từ (*) và (**) ta có:

$\sin$ [redacted] $n).\sin$ [redacted] / $\cos$ [redacted] $n).\cos$ [redacted]

+ Nếu [redacted] = 0 thì: $\sin$ [redacted] $n).\sin$ [redacted] / $\cos$ [redacted] $n).\cos$ [redacted] = [redacted] $n).\sin$ [redacted] / $h(0)$ [redacted] $n).\cos$ [redacted] 0

suy ra h(n) = 0 với mọi n [redacted] và giá trị h(0) tuỳ ý với n=0. Đây là trường hợp h(n) tầm thường, không cho chúng ta kết quả gì.

+ Nếu [redacted] thì $\dfrac{\sin[redacted]}{\cos[redacted]}$ $\dfrac{[redacted] n).\sin[redacted]}{[redacted] n).\cos[redacted]}$ ta viết lại như sau:

$\sin$[redacted]$n).\cos$[redacted]$\cos$[redacted]$n).\sin$[redacted] Đưa $\sin$[redacted] $\cos$[redacted]vào trong tổng ta có:

[redacted]$n).$[redacted]os[redacted]$.\sin$[redacted]in[redacted]$.\cos$[redacted] Vậy ta có:

[redacted]$n).\sin$[redacted]$)$[redacted]

Phương trình này có dạng của một chuỗi Fourier. Nghiệm của nó có dạng như sau: [redacted] $\frac{N [redacted]}{2}$ (n) [redacted]$(N$ [redacted]$)$

<u>Nhận xét:</u>

- Với một giá trị của N, chỉ có duy nhất một giá trị [redacted]ể đảm bảo [redacted]-[redacted]à tuyến tính.
- Với giá trị [redacted]ày đáp ứng xung h(n) = h(N-1-n) là đối xứng.
- Nếu N lẻ thì [redacted]à một số nguyên và tâm đối xứng của h(n) là mẫu thứ (N-1)/2. Ta có bộ lọc FIR loại 1.
- Nếu N chẵn thì [redacted]à một số không nguyên và tâm đối xứng của h(n) nằm giữa mẫu thứ (N-1)/2 và N/2. Ta có bộ lọc FIR loại 2.

Đặc điểm quan trọng của bộ lọc số FIR loại 1 và 2 là tính đối xứng của đáp ứng xung h(n) có rất nhiều ứng dụng quan trọng ta sẽ xét sau.

Ví dụ: N=6, 7

b. Trường hợp [redacted].

Chứng minh tương tự như trường hợp a ta có:

[redacted]$n).\sin$[redacted]n [redacted] và nghiệm duy nhất của nó như sau:

[redacted] N [redacted]

2

[redacted]

2

(n) [redacted] $(N$ [redacted] $)$

<u>Nhận xét:</u>

- Với một giá trị của N, chỉ có duy nhất một giá trị [redacted]ể đảm bảo [redacted] [redacted]à tuyến tính.
- Với giá trị [redacted]ày đáp ứng xung h(n) = -h(N-1-n) là phản đối xứng.
- Nếu N lẻ thì [redacted]à một số nguyên và tâm phản đối xứng của h(n) là mẫu thứ (N-1)/2. Ta có bộ lọc FIR loại 3.
- Nếu N chẵn thì [redacted]à một số không nguyên và tâm phản đối xứng của h(n) nằm giữa mẫu thứ (N-1)/2 và N/2. Ta có bộ lọc FIR loại 4.

Đặc điểm quan trọng của bộ lọc số FIR loại 3 và 4 là tính phản đối xứng của đáp ứng xung h(n) có rất nhiều ứng dụng quan trọng ta sẽ xét sau.

Ví dụ: N=6, 7.

3. Tổng hợp bộ lọc FIR có pha tuyến tính sử dụng phương pháp cửa sổ.

Việc nghiên cứu các phương pháp tổng hợp bộ lọc FIR ở phần này chúng ta chỉ dừng lại ở việc tính toán các hệ số của h(n). Các hệ số của h(n) được tính toán sao cho toả mãn các chỉ tiêu kĩ thuật đã cho. Bộ lọc FIR có ưu điểm hơn bộ lọc IIR là nó luôn ổn định, chúng ta sẽ xét các bộ lọc FIR có pha tuyến tính (Đáp ứng xung h(n) đối xứng hoặc phản đối xứng). Các hệ thống thực hiện được về mặt vật lý là các hệ thống nhân quả, ổn định.

Có 3 phương pháp chính để tổng hợp bộ lọc số FIR là:

- Phương pháp cửa sổ.
- Phương pháp lấy mẫu tần số.
- Phương pháp lặp.

Trong chương trình chúng ta chỉ tìm hiểu phương pháp thứ nhất.

a. Nhận xét.

Ta đã biết đáp ứng tần số của bộ lọc FIR nhân quả bậc N là:

$H(e^{j}$[redacted]$)$ [redacted] $n).e$[redacted]; $h(n)$ [redacted] $\frac{1}{2}$[redacted] $H(e^{j}$[redacted]$).e^{j}$[redacted]$.d$[redacted]

+ Gọi h(n) là đáp ứng xung của bộ lọc số lí tưởng, vì vậy h(n) có chiều dài vô hạn nên không thể thực hiện được. L[h(n)] = [-[redacted]+[redacted]

+ h(n) không nhân quả, vì thế không thể thực hiện được.

+ Để cho đáp ứng xung của bộ lọc số lí tưởng trở thành đáp ứng xung của bộ lọc FIR thì ta phải làm cho h(n) nhân quả và hạn chế chiều dài của nó.

+ Để hạn chế chiều dài của h(n) ta sẽ sử dụng hàm cửa sổ, hay được gọi là cửa sổ $w(n)_N$ là cửa sổ nhân quả có chiều dài là N.

$w(n)_N$ [redacted] 0 [redacted] N [redacted]
[redacted] n *con lai*

b. Các bước chính. Phương pháp cửa sổ đựoc thực hiện cho bộ lọc số loại 1.

- Bước 1: Chọn 4 chỉ tiêu kĩ thuật của bộ lọc số thực tế: [redacted], [redacted], [redacted], [redacted]. Để tìm [redacted] trong chương trình cho [redacted]
- Bước 2: Chọn dạng cửa sổ $w(n)_N$ và chiều dài cửa sổ N, trong miền N cửa sổ có tâm đối xứng tại n [redacted] $\frac{N [redacted]}{2}$, có pha tuyến tính là [redacted] $\frac{N [redacted]}{2}$ [redacted].
- Bước 3: Chọn loại bộ lọc số lí tưởng có đáp ứng xung là h(n), h(n) có tâm đối xứng tại n [redacted] $\frac{N [redacted]}{2}$,có pha tuyến tính là [redacted] $\frac{N [redacted]}{2}$ [redacted]. (Thay n [redacted] $\frac{N [redacted]}{2}$).
- Bước 4: Nhân cửa sổ $w(n)_N$ với h(n) thu được đáp ứng xung thực tế của bộ lọc FIR loại 1.

$h_d(n) = w(n)_N . h(n)$

L[$w(n)_N$] = N

L[h(n)] = [redacted]

L[h_d(n)]= N

- Bước 5: Sau khi có h_d(n) thử lại trong miền tần số xem đã đạt chỉ tiêu kĩ thuật chưa, nếu chưa đạt làm lại với N lớn hơn. (Bước này ta bỏ qua)

c. Một số cửa sổ điển hình.

c_1. Cửa sổ chữ nhật.

Trong miền n cửa sổ chữ nhật được định nghĩa như sau:

$w_R(n)$ [redacted] 0 [redacted] N [redacted]
0 n *con lai* [redacted] $rect_N(n)$

Như vậy ta thấy cửa sổ chữ nhật chính là dãy chữ nhật $rect_N$(n).

Như vậy: $h_d(n)$ [redacted] (n) 0 [redacted] n [redacted] N [redacted]
0 n con lai

c₂. Cửa sổ Hanning và Hamming.

Trong miền n cửa sổ Hanning và Hamming được định nghĩa như sau:

$w_H(n)$ [redacted] 1 [redacted] cos $\frac{2 \text{[redacted]}}{N \text{[redacted]}} n$ 0 [redacted] n [redacted] N [redacted]
0 n con lai

Nếu [redacted] 0.5 thì ta có cửa sổ Hanning:

$w_{Han}(n)$ [redacted] .5 [redacted] .5cos $\frac{2 \text{[redacted]}}{N \text{[redacted]}} n$ 0 [redacted] n [redacted] N [redacted]
0 n con lai

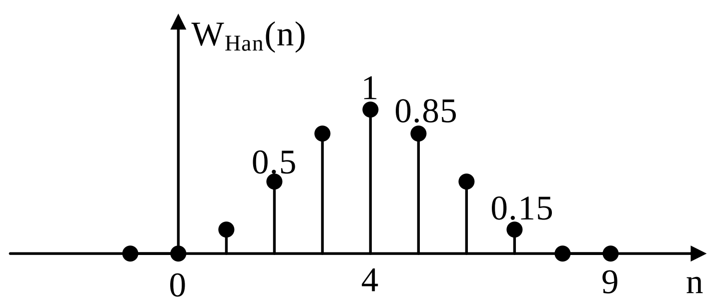
Nếu [redacted] 0.54 thì ta có cửa sổ Hanning:

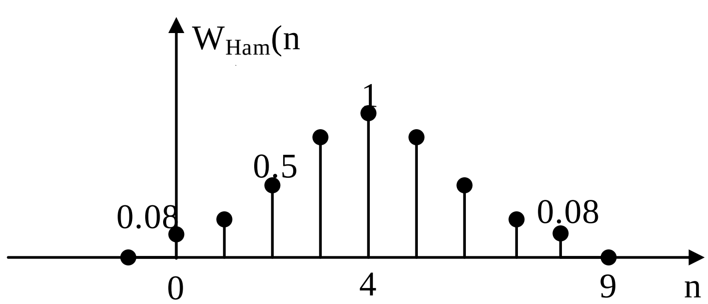
$w_{Ham}(n)$ [redacted] .54 [redacted] .46cos $\frac{2 \text{[redacted]}}{N \text{[redacted]}} n$ 0 [redacted] n [redacted] N [redacted]
0 n con lai

Đồ thị của các cửa sổ này như sau:

Ví dụ với N = 9

$W_{Han}(n)_9$ và $w_{Ham}(n)_9$ đối xứng tại n = 4





c_3. Cửa sổ tam giác, Blackman (Giáo trình).

Ví dụ: Thiết kế bộ lọc thông thấp với các chỉ tiêu kĩ thuật, [redacted]= [redacted], N = 9 dùng cửa sổ Hanning. Vẽ sơ đồ bộ lọc số:

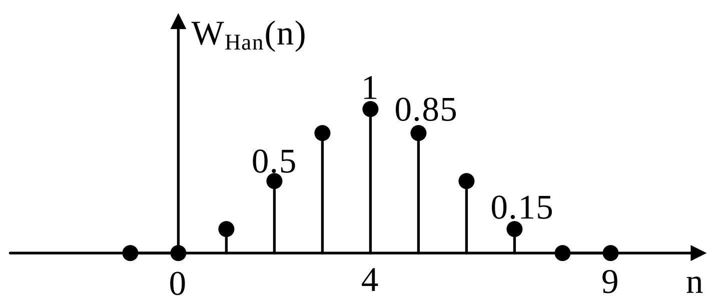
- Cửa sổ Hanning $w_{Han}(n)$ có N = 9 là cửa sổ nhân quả có tâm đối xứng tại $\frac{N \text{[redacted]}}{2} \text{[redacted]}$.
- Chọn bộ lọc số lí tưởng thông thấp cũng có tâm đối xứng tại $\frac{N \text{[redacted]}}{2} \text{[redacted]}$ và tần số cắt [redacted]=[redacted].
- Vậy ta có:

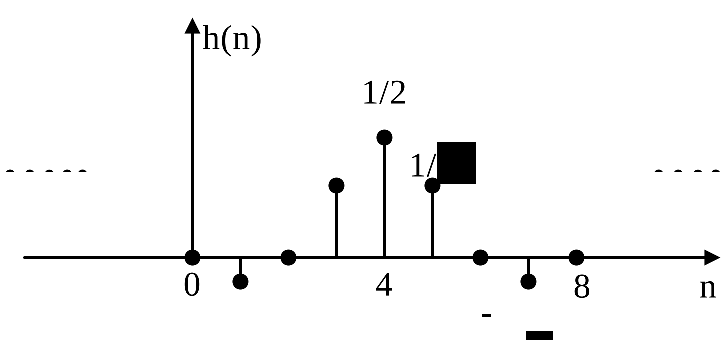
$$h(n) \text{[redacted]} \frac{\text{[redacted]} \sin \text{[redacted]}(n \text{[redacted]} \frac{N \text{[redacted]}}{2})}{\text{[redacted]}(n \text{[redacted]} \frac{N \text{[redacted]}}{2})} \text{[redacted]} \frac{1}{2} \frac{\sin(n \text{[redacted]})}{\frac{\text{[redacted]}}{2}(n \text{[redacted]})}$$

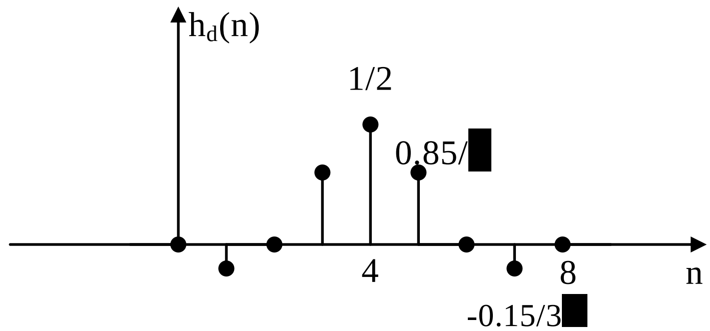
- Do đó đáp ứng xung của bộ lọc số thực tế là:

$$h_d(n) \text{[redacted]}(n).w_{Han}(n)_9$$

Minh hoạ bằng đồ thị ta có:



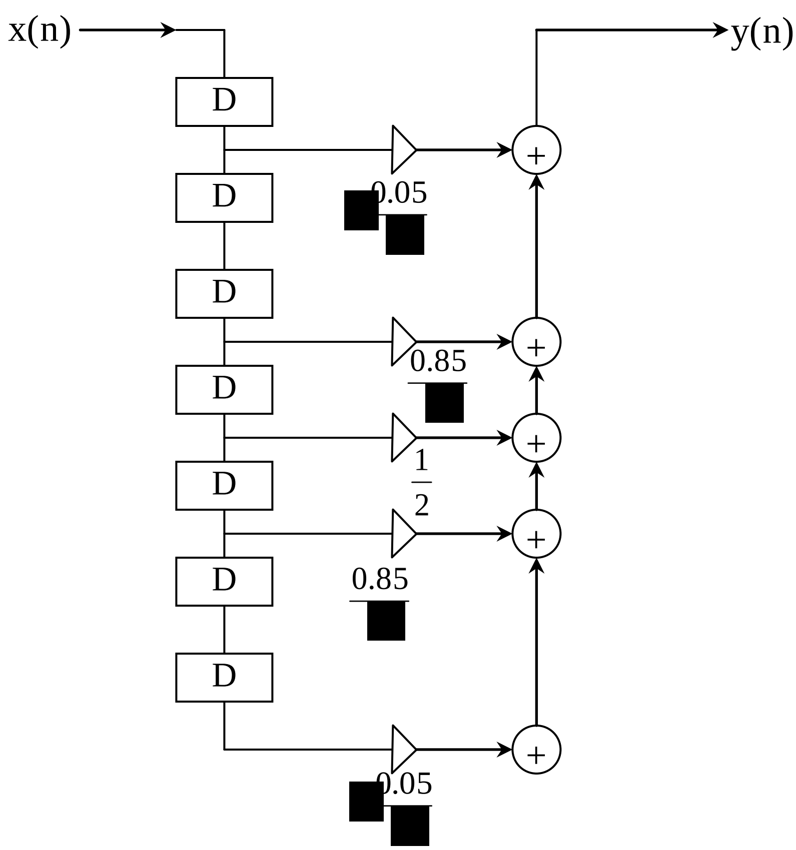




Vậy ta có:

$h(n)$ [redacted] $\frac{0.05}{\text{[redacted]}}$ [redacted] n [redacted]) [redacted] $\frac{0.85}{\text{[redacted]}}$ [redacted] n [redacted]) [redacted] $\frac{1}{2}$ [redacted] n [redacted] 4) [redacted] $\frac{0.85}{\text{[redacted]}}$ [redacted] n [redacted]) [redacted] $\frac{0.05}{\text{[redacted]}}$ [redacted] n [redacted])

Từ đây ta có sơ đồ mạch như sau:



§3 Bộ lọc số IIR

Mở đầu