BÀI GIẢNG
XỬ LÝ SỐ TÍN HIỆU

Giảng viên: Ths. Đào Thị Thu Thủy

- **Tên học phần : XỬ LÍ SỐ TÍN HIỆU**
- **Mã học phần : 2202021057**
- **Số tín chỉ :** 3 (3, 0, 6)
- **Trình độ :** Dành cho sinh viên năm thứ 3
- **Phân bố thời gian**: 45 tiết

TÀI LiỆU THAM KHẢO

1. **Digital Signal Processing, John G. Proakis, DimitrisG.Manolakis**, Prentice – Hall Publisher 2007, fourth editon, ISBN 0-13-228731-5.

2. **Bài giảng "Xử lý số tín hiệu", Đào Thị Thu Thủy, ĐHCN, Tp. HCM**

3. **"Xử lý số tín hiệu", Lê Tiến Thường**

4. **"Xử lý tín hiệu & Lọc số", Nguyễn QuốcTrung**

5. **"Xử lý tín hiệu số", Nguyễn Hữu Phương**

6. **"Xử lý tín hiệu số", Quách Tuấn Ngọc**

ĐỀ CƯƠNG MÔN HỌC – XỬ LÝ TÍN HIỆU SỐ

Chương 1: Khái niệm tín hiệu và hệ thống
Chương 2: Tín hiệu và hệ thống rời rạc trong miền thời gian
Chương 3: Tín hiệu và hệ thống trong miền Z
Chương 4: Tín hiệu trong miền tần số liên tục
Chương 5: Hệ thống trong miền tần số liên tục
Chương 6: Lấy mẫu và khôi phục tín hiệu
Chương 7: Biến đổi Fourier rời rạc DFT
Chương 8: Biến đổi Fourier nhanh FFT
Chương 9: Thực hiện các hệ thống rời rạc thời gian
Chương 10: Bộ lọc số

Chương 1:
KHÁI NIỆM TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

1.1 Tín hiệu, hệ thống và xử lý tín hiệu

1.2 Phân loại tín hiệu

1.3 Khái niệm tần số trong tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc thời gian

1.4 Biến đổi AD và DA

1.1 Tín hiệu, hệ thống và xử lý tín hiệu

a. Khái niệm tín hiệu (signal)

- **Tín hiệu** là biểu hiện vật lý của thông tin
- ✓ Tín hiệu được biểu diễn một hàm theo một hay nhiều biến số độc lập.
- Ví dụ về tín hiệu:
- ✓ **Tín hiệu âm thanh, tiếng nói** là sự thay đổi áp suất không khí theo thời gian
- ✓ **Tín hiệu hình ảnh** là hàm độ sáng theo 2 biến không gian và thời gian
- ✓ **Tín hiệu điện** là sự thay đổi điện áp, dòng điện theo thời gian

b. Khái niệm hệ thống (system)

- **Hệ thống** đặc trưng toán tử **T** làm nhiệm vụ biến đổi tín hiệu vào **x** thành tín hiệu ra **y**

Hệ thống

- **Các hệ thống xử lý tín hiệu:**
  - ***Hệ thống tương tự:*** Tín hiệu vào và ra là tương tự
  - ***Hệ thống số:*** Tín hiệu vào và ra là tín hiệu số
  - ***Hệ thống xử lý số tín hiệu*** *: bao gồm cả xử lý tín hiệu số và tương tự*

c. Khái niệm xử lý tín hiệu (signal processing)

- là một chuỗi các công việc hay các phép toán được thực hiện trên tín hiệu nhằm đạt một mục đích nào đó

Ví dụ:

- ✓ Tách lấy tin tức chứa bên trong tín hiệu.
- ✓ Truyền tín hiệu mang tin từ nơi này đến nơi khác.

- **Một hệ thống xử lý tín hiệu** có thể là một thiết bị vật lý- *phần cứng*, hoặc là một chương trình- *phần mềm*, hoặc *kết hợp cả phần cứng và phần mềm* mỗi phần thực hiện các công việc riêng nào đó.

❖ Xử lý số tín hiệu (Digital Signal Processing)

Xử lý số tín hiệu = Xử lý tín hiệu bằng các phương pháp số. (processing of signals by digital means)

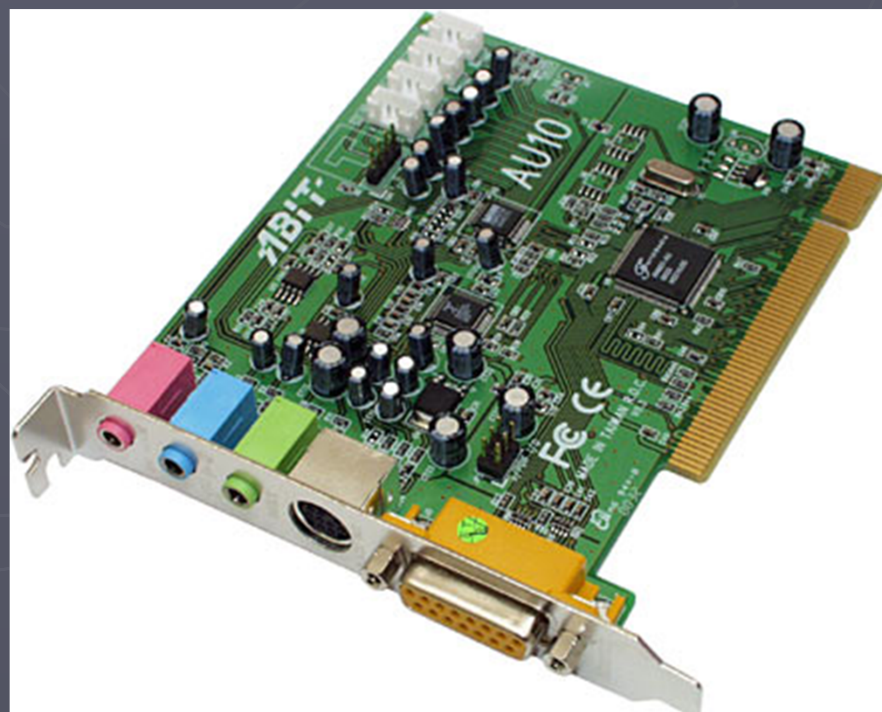
Phương pháp số: sử dụng các chương trình lập trình trên máy tính hoặc chip DSP (Digital signal processor)

Ví dụ:

- Cải thiện chất lượng ảnh số
- Nhận dạng và tổng hợp tiếng nói
- Nén dữ liệu (để lưu trữ hoặc truyền đi)

Các hệ thống DSP thực tế:

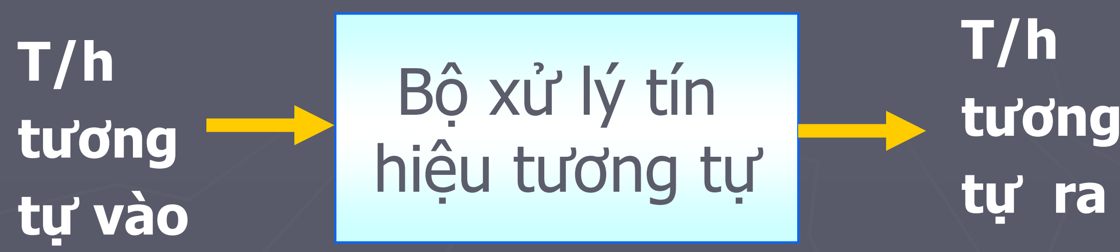
- PC & Sound card:



- Chip DSP chuyên dụng:

Kit DSP TMS320C6713

➢ Các thành phần cơ bản trong một hệ thống xử lý tín hiệu



Hệ thống tương tự

Hệ thống xử lý số tín hiệu

➢Ưu điểm của xử lý số so với xử lý tương tự

- ✓ Hệ thống số có thể lập trình được
- ✓ Độ chính xác của hệ thống số cao và điều khiển lại rất dễ dàng
- ✓ Tín hiệu số dễ dàng lưu trữ trên các thiết bị băng đĩa từ
- ✓ Tín hiệu số có thể truyền đi xa và có thể được xử lý từ xa
- ✓ Xử lý số cũng cho phép thực hiện các thuật toán xử lý tín hiệu tinh vi phức tạp hơn
- ✓ Trong một vài trường hợp, xử lý số rẻ hơn xử lý tương tự

1.2 Phân loại tín hiệu

a. Theo các tính chất đặc trưng:

- Tín hiệu xác định & tín hiệu ngẫu nhiên
  - *Tín hiệu xác định*: biểu diễn theo một hàm số
  - *Tín hiệu ngẫu nhiên*: không thể dự kiến trước hành vi
- Tín hiệu tuần hoàn & tín hiệu không tuần hoàn
  - *Tín hiệu tuần hoàn*: $x(t)=x(t+T)=x(t+nT)$
  - *Tín hiệu không tuần hoàn*: không thoả tính chất trên
- Tín hiệu nhân quả & không nhân quả
  - *Tín hiệu nhân quả*: $x(t)=0 : t<0$
  - *Tín hiệu không nhân quả*: không thoả tính chất trên

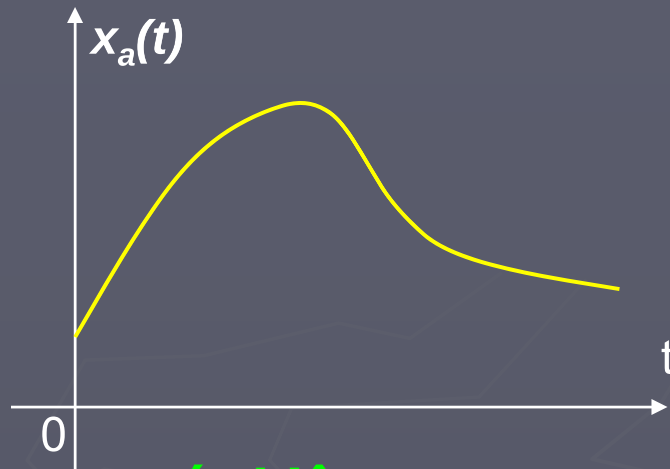
- Tín hiệu thực & tín hiệu phức
  - *Tín hiệu thực*: hàm theo biến số thực
  - *Tín hiệu phức*: hàm theo biến số phức
- Tín hiệu năng lượng & tín hiệu công suất
  - *Tín hiệu năng lượng*: $\mathbf{0 < E < \infty}$
  - *Tín hiệu công suất*: $\mathbf{0 < P < \infty}$
- Tín hiệu đối xứng (chẵn) & tín hiệu phản đối xứng (lẻ)
  - *Tín hiệu đối xứng*: $x(-n) = x(n)$
  - *Tín hiệu phản đối xứng*: $x(-n) = -x(n)$

b. Theo biến thời gian:

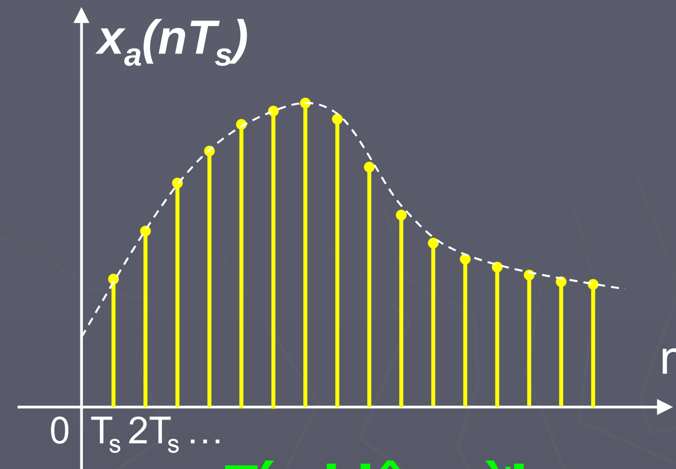
- *Tín hiệu liên tục*: có biến thời gian liên tục
- *Tín hiệu rời rạc*: có biến thời gian rời rạc

c. Theo biến thời gian và biên độ:

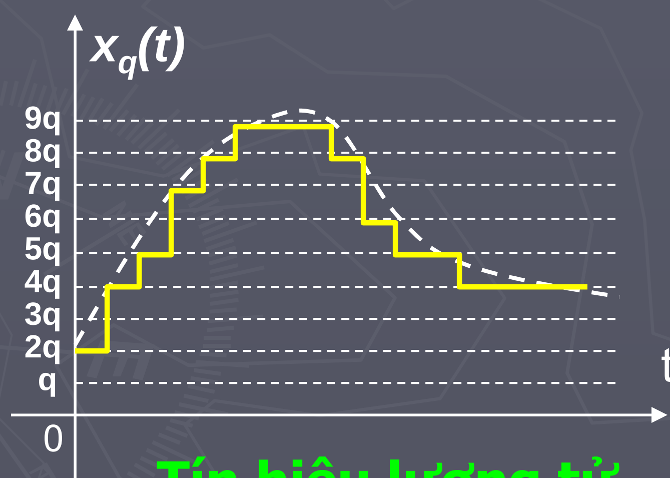
	Tín hiệu tương tự (analog)	Tín hiệu rời rạc (lấy mẫu)	Tín hiệu lượng tử	Tín hiệu số
Biên độ	Liên tục	Liên tục	Rời rạc	Rời rạc
Thời gian	Liên tục	Rời rạc	Liên tục	Rời rạc



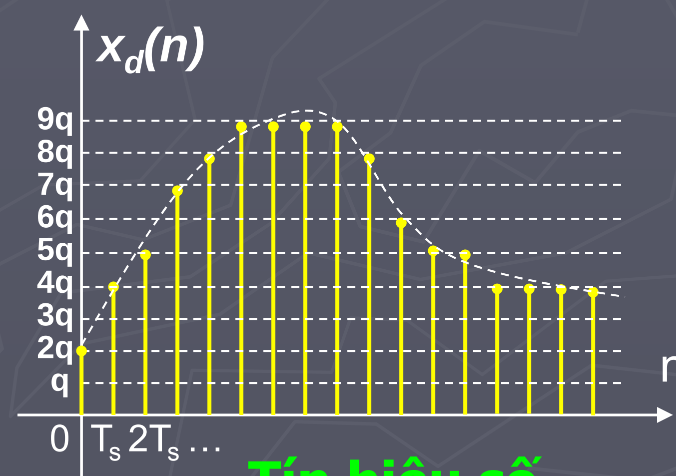
Tín hiệu tương tự



Tín hiệu rời rạc



Tín hiệu lượng tử



Tín hiệu số

d. Nhiễu

- Nhiễu nhiệt
- Nhiễu nội hay nhiễu hệ thống
- Nhiễu ngoại hay can nhiễu
- Nhiễu trắng
- Nhiễu hồng
- Nhiễu xung

- **Nhiễu nhiệt:** do sự di chuyển không đồng đều về tốc độ và chiều hướng (do sự va chạm với nhau, với các nguyên tử, mạng tinh thể,...) trong linh kiện và mạch điện tử tạo nên...
- **Nhiễu nội hay nhiễu hệ thống:** là nhiễu do chính hệ thống truyền và xử lý tín hiệu phát sinh ra.
- **Nhiễu ngoại hay can nhiễu** là nhiễu phát sinh bên ngoài hệ thống thâm nhập vào hệ thống, ví dụ nhiễu do sấm sét

- Nhiễu trắng là nhiễu có độ lớn như nhau ở mọi tần số.
- Nhiễu hồng có độ lớn lớn ở tần số thấp và giảm dần ở tần số càng cao.
- Nhiễu xung có biên độ lớn và xảy ra từng hồi một cách ngẫu nhiên.

1.3 Khái niệm tần số trong tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc thời gian

1.3.1 Tín hiệu sin liên tục

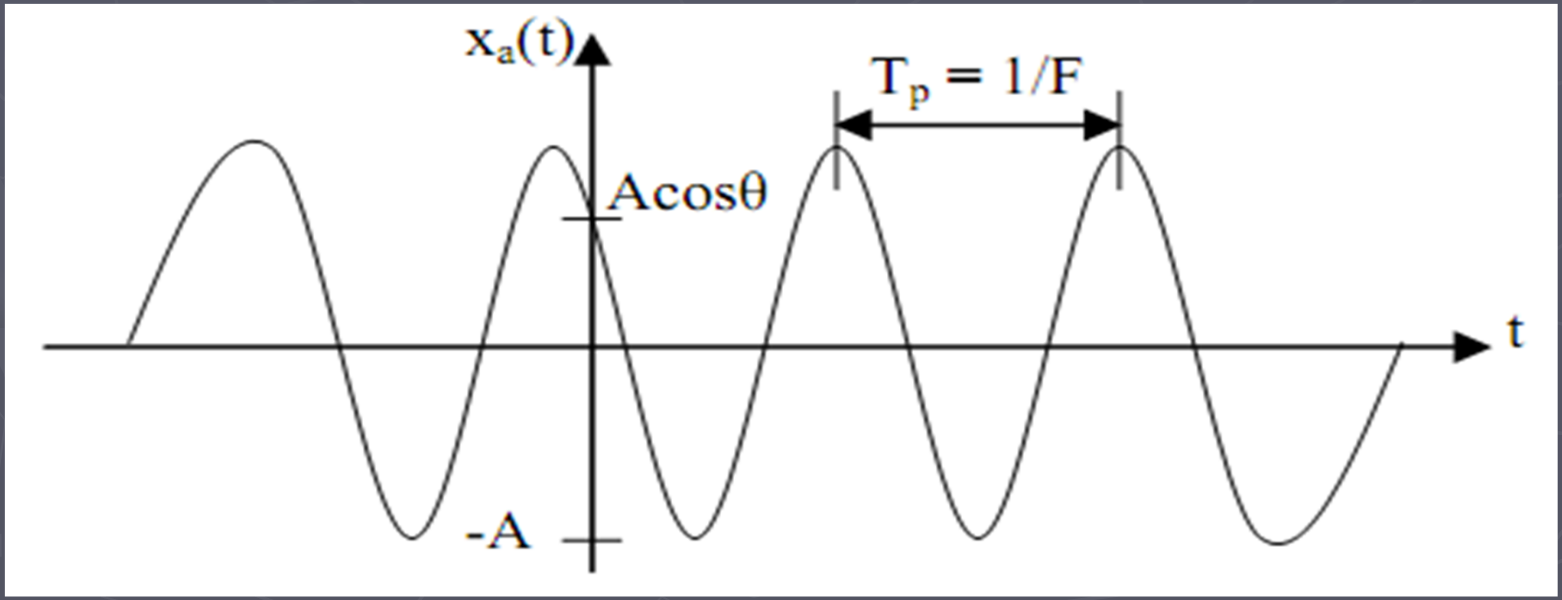
$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \theta),\ -\infty < t < \infty$$

- ✓ A là biên độ
- ✓ Ω là tần số góc tính bằng radian trên giây (rad/s)
- ✓ θ là góc pha tính bằng radian (rad)

✓ $\Omega = 2\pi F$ với F là tần số tính bằng số chu kỳ trên giây (Hz)

$\Rightarrow$ Viết lại phương trình tín hiệu sin liên tục:

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F t + \theta),\ -\infty < t < \infty$$



❖Đặc điểm của tín hiệu sin liên tục

1. Với F cố định, tín hiệu sin liên tục $x_a(t)$ tuần hoàn với chu kỳ cơ bản là $T_p = 1/F$, nghĩa là ta luôn luôn có:

$$x_a(t + T_p) = x_a(t), \ -\infty < t < \infty$$

2. Các tín hiệu sin liên tục có tần số khác nhau thì khác nhau.

3. Tăng tần số $\Rightarrow$ tăng tốc độ của dao động của tín hiệu, tức là tăng số chu kỳ dao động trong một khoảng thời gian cho trước.

Vì thời gian t liên tục nên ta có thể tăng F đến vô cùng.

❖Biểu diễn tín hiệu sin liên tục ở dạng phasor

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t+\theta) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega t+\theta)}$$

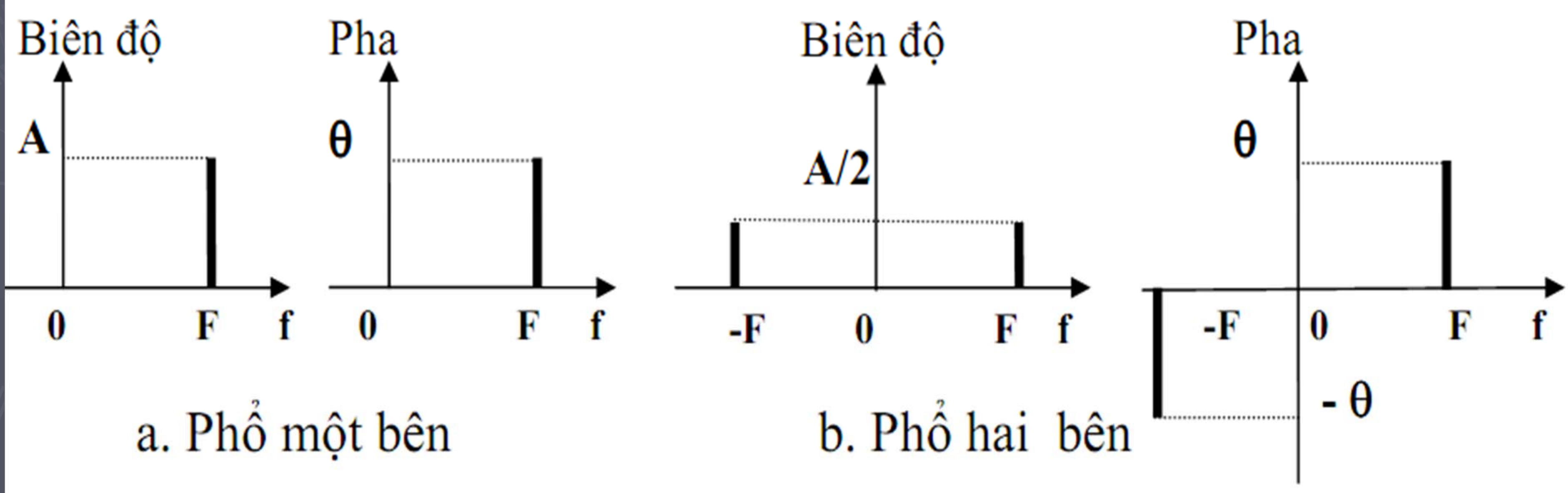
Tín hiệu sin liên tục là tổng của 2 tín hiệu điều hòa hàm mũ phức có biên độ bằng nhau và liên hợp phức với nhau, tần số góc là $\pm\Omega$: tần số dương và âm

Dải tần số của tín hiệu liên tục là $-\infty < F < \infty$.

❖ **t bên hai bên a n u sin c**

hai ch u n c n u sin c trên n
n ch nh y n

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t+\theta) = \frac{A}{2}e^{j(\Omega t+\theta)} + \frac{A}{2}e^{-j(\Omega t+\theta)}$$



a. Phổ một bên

b. Phổ hai bên

1.3.2 Tín hiệu sin rời rạc

$$x(n) = A\cos(\omega n + \theta), \ -\infty < n < \infty$$

- n là biến nguyên gọi là số mẫu
- A là biên độ
- ω là tần số góc tính bằng radian trên mẫu (rad/mẫu)
- θ là góc pha tính bằng radian (rad)
- f là tần số với quan hệ: $\omega = 2\pi f$

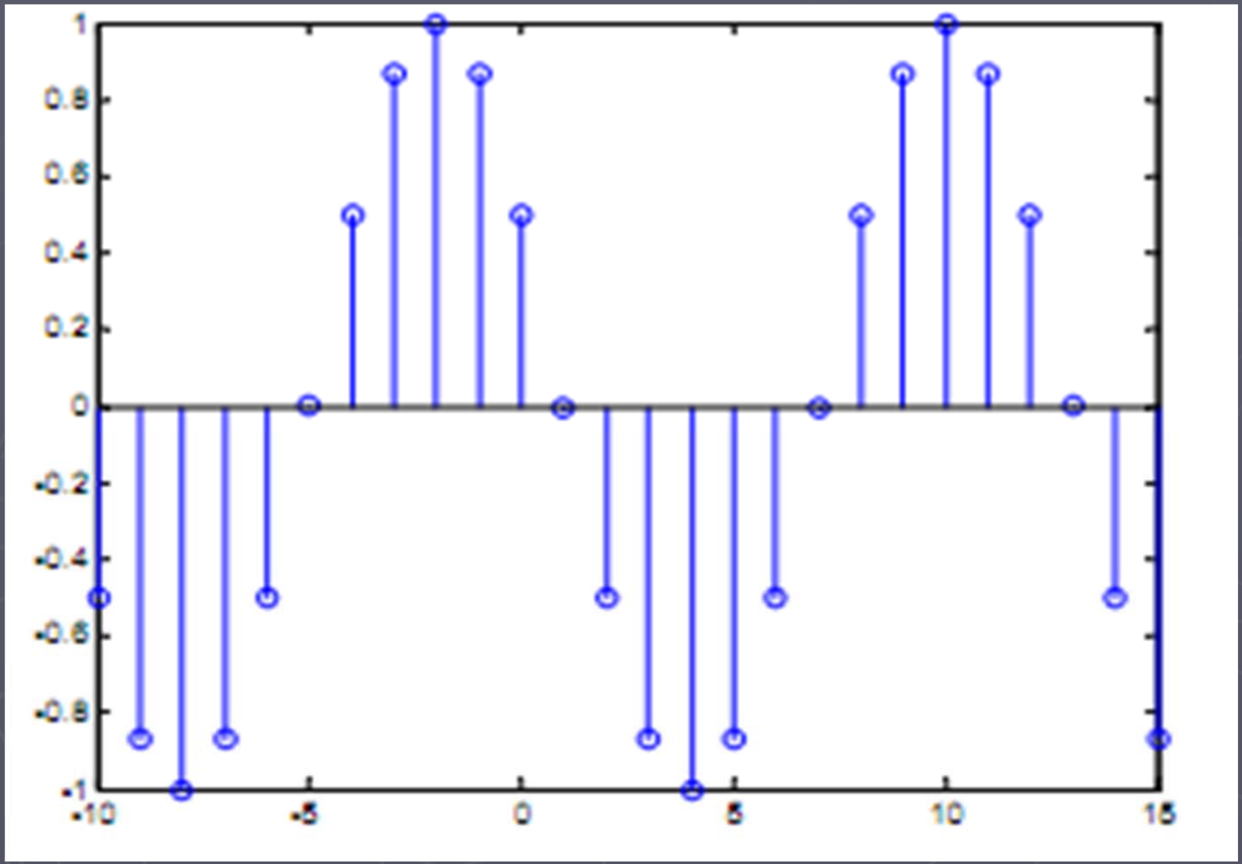
  Tần số f có thứ nguyên là chu kỳ trên mẫu (chu kỳ/mẫu)

$\Rightarrow$ Viết lại phương trình tín hiệu sin rời rạc:

$$x(n) = A\cos(2\pi f n + \theta), \ -\infty < n < \infty$$

❖Ví dụ: Biểu diễn tín hiệu sin rời rạc

với $\omega = \pi/6$ (rad/mẫu) và pha $\theta = \pi/3$ (rad).



$x(n)=\cos(n\,\pi/6 + \pi/3)$

❖Đặc điểm của tín hiệu sin rời rạc

1. Tín hiệu sin rời rạc tuần hoàn khi và chỉ khi tần số f_o là một số hữu tỷ.

2. Các tín hiệu sin rời rạc có tần số khác nhau một bội số nguyên lần 2π thì trùng nhau.

3. Tốc độ cao nhất của tín hiệu sin rời rạc đạt được khi $\omega=\pi$ hay $\omega=-\pi$, tương đương với $f = 1/2$ hay $f = -1/2$

1. Tín hiệu sin rời rạc tuần hoàn khi và chỉ khi tần số f_o là một số hữu tỷ.

Tín hiệu rời rạc x(n) tuần hoàn với chu kỳ N (N>0)

$\Leftrightarrow$ $$x(n+N) = x(n) \quad \forall n$$

N nhỏ nhất là chu kỳ cơ bản.

Giả sử tín hiệu sin rời rạc tần số f_0 tuần hoàn

$\Leftrightarrow$ $$\cos[2\pi f_0(n+N)+\theta]=\cos(2\pi f_0 n+\theta)$$

Quan hệ này chỉ đúng khi tồn tại một số nguyên k sao cho:

$$2\pi f_0 N = 2k\pi \Leftrightarrow f_0 = \frac{k}{N}$$

Cách xác định chu kỳ cơ bản $\Rightarrow$ biểu diễn f_0 dưới dạng tỷ số của hai số nguyên k/N, sau đó đưa k/N về dạng phân số tối giản $\Rightarrow$ mẫu số của phân số tối giản chính là chu kỳ cơ bản.

Ví dụ $f_1 = 23/50 \quad \Rightarrow N_1 = 50$

$f_2 = 25/50 = 1/2 \quad \Rightarrow N_2 = 2.$

2. Các tín hiệu sin rời rạc có tần số khác nhau một bội số nguyên lần 2π thì trùng nhau.

$$x(n) = \cos(\omega_0 n + \theta)$$

$$x(n) = \cos[(\omega_0 + 2\pi)n + \theta] = \cos(\omega_0 n + 2\pi n + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta)$$

Vậy tất cả các tín hiệu sin rời rạc đều trùng nhau nếu có dạng:

$$x_k(n) = \cos(\omega_k n + \theta),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$ với $$\omega_k = \omega_0 + 2k\pi,\ -\pi \le \omega_0 \le \pi$$

Nhận xét:

- Các tín hiệu sin rời rạc có $-\pi \le \omega \le \pi$ hay $-1/2 \le f \le 1/2$ thì mới khác biệt nhau.
- Những tín hiệu sin rời rạc có tần số nằm ngoài dải $[-\pi, \pi]$ là phiên bản (alias) của những tín hiệu rời rạc có tần số nằm trong dải $[-\pi, \pi]$ tương ứng.
- Dải cơ bản là dải tần số có bề rộng là 2π.
- Thường chọn dải cơ bản là $-\pi \le \omega \le \pi$ hay $0 \le \omega \le 2\pi$.

3. Tốc độ cao nhất của tín hiệu sin rời rạc đạt được khi $\omega=\pi$ hay $\omega=-\pi$, tương đương với f = 1/2 hay f =− 1/2

Ví dụ minh họa với tín hiệu x(n) = cos nω

Lần lượt cho

$$\omega_0 = 0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$$

Tần số tương ứng là: f = 0, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2
ta có chu kỳ tương ứng là

$$N = \infty, 16, 8, 4, 2$$

Ta thấy chu kỳ giảm khi tần số tăng, tức là tốc độ dao động của tín hiệu tăng.

BÀI TẬP

1.1. Vẽ các tín hiệu sau, xem tín hiệu nào tuần hoàn và xác định chu kỳ của nó.

$$a.\quad x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

$$b.\quad x(n) = 5\cos\left(\frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$$

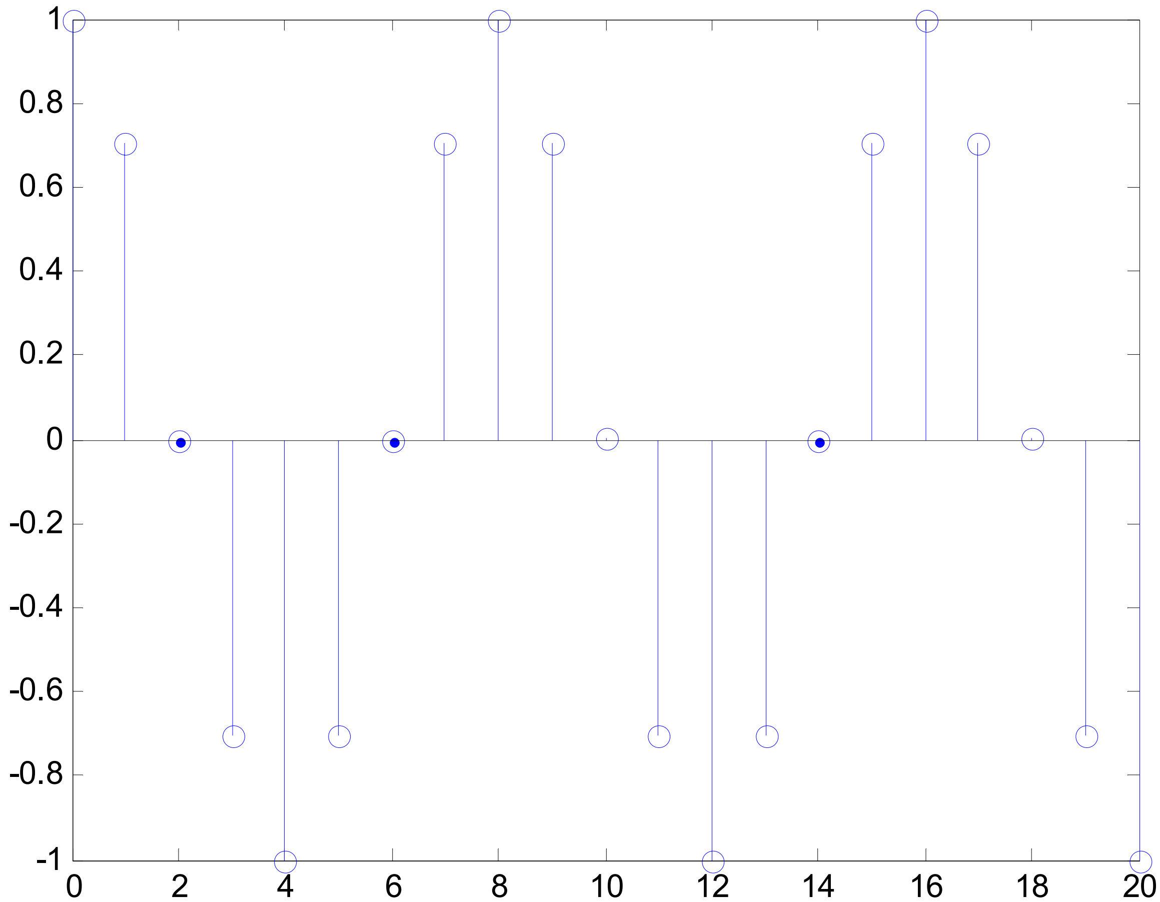
$$c.\quad x(n) = 2\cos 0.01\pi n$$

$$d.\quad x(n) = \cos 3\pi n$$

$$e.\quad x(n) = \sin \pi \frac{62}{10} n$$

$$a. \quad x(n) = \cos(\frac{\pi n}{4})$$

n=[0:20]; x=cos(n*pi/4);stem(n,x)



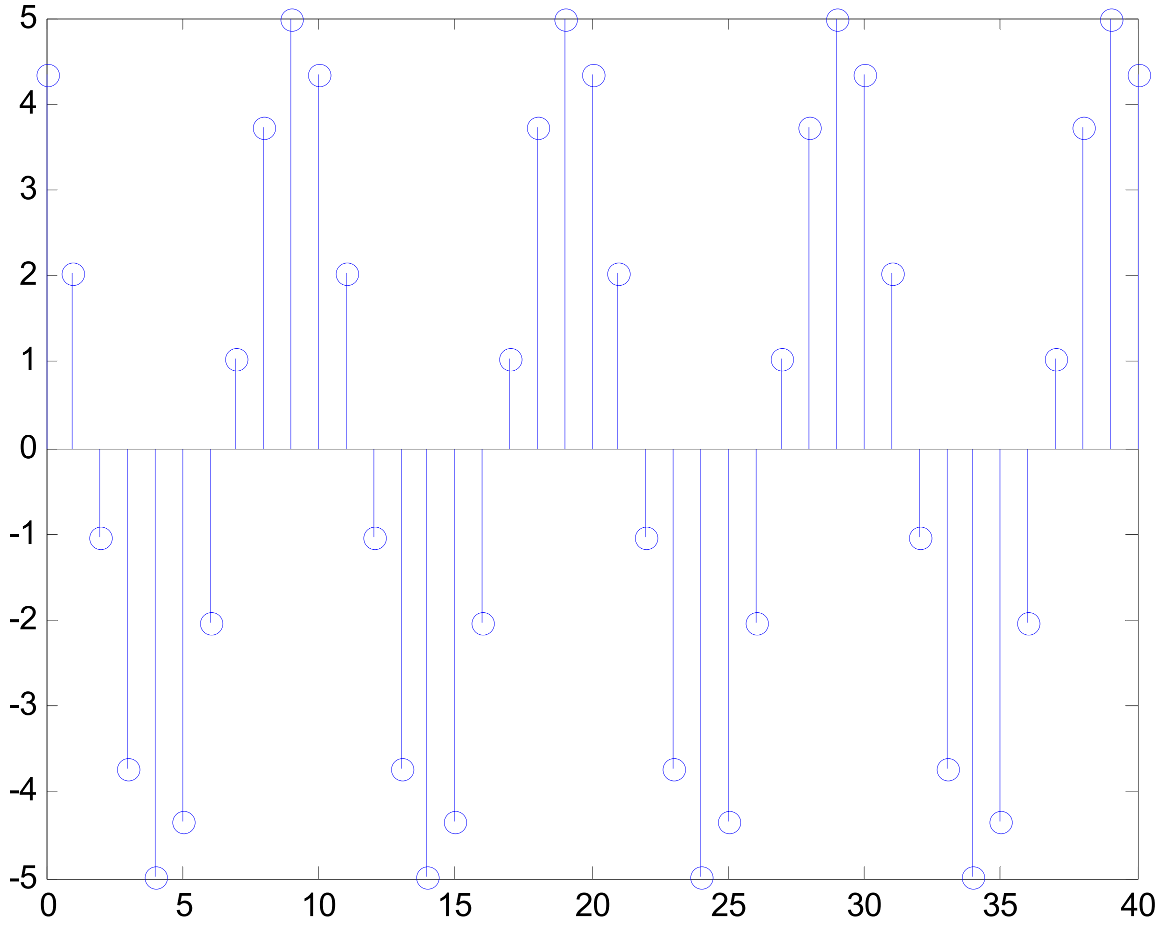
Cách xác định chu kỳ cơ bản $\Rightarrow$ biểu diễn f_0 dưới dạng tỷ số của hai số nguyên k/N, sau đó đưa k/N về dạng phân số tối giản

$\Rightarrow$ mẫu số của phân số tối giản chính là chu kỳ cơ bản.

a. N=8
b. 10
c. 200
d. 2
e. 10

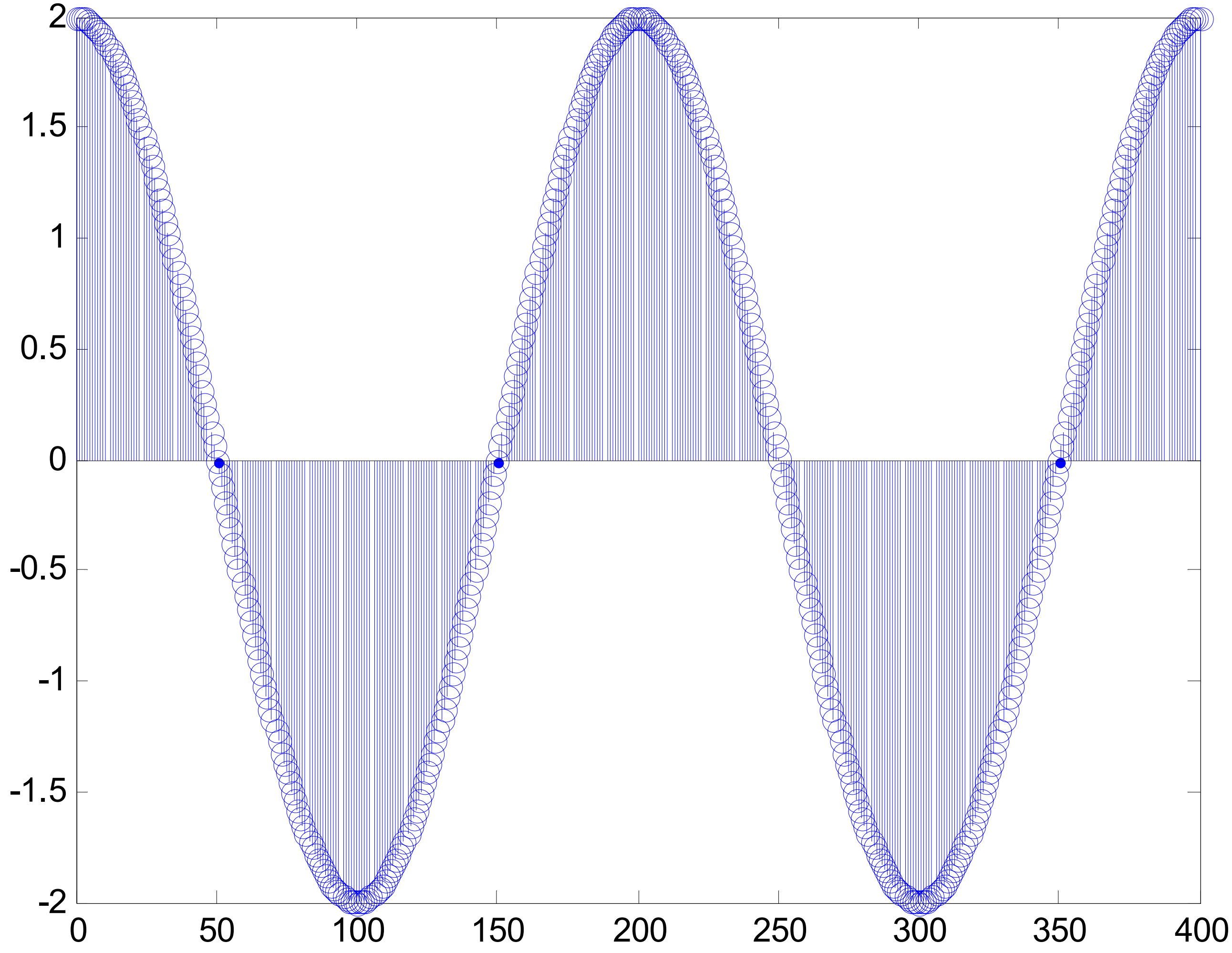
$$b. \quad x(n) = 5\cos\left(\frac{\pi n}{5} + \frac{\pi}{6}\right)$$

n=[0:40];x=5*cos(n*pi/5 + pi/6); stem(n,x);



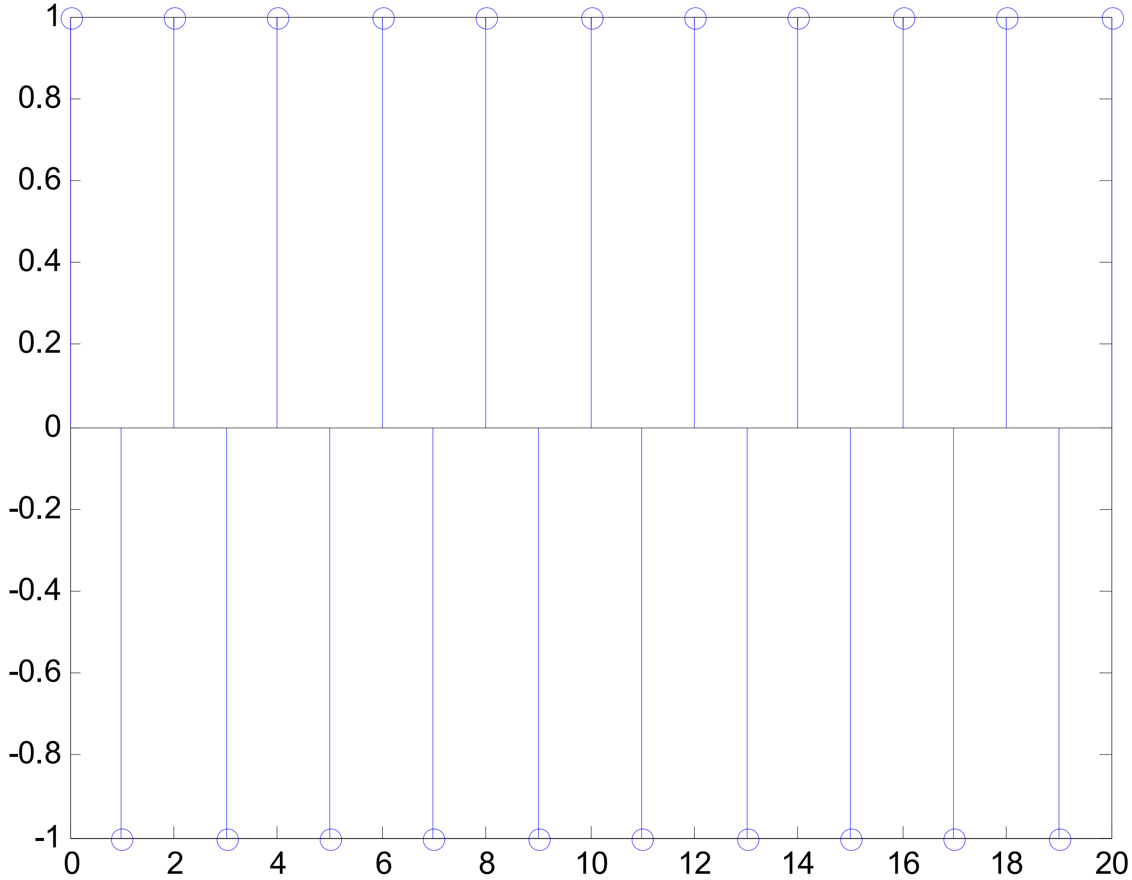
$$c. \quad x(n) = 2\cos 0.01\pi n$$

n=[0:400]; x=2*cos(n*pi*0.01); stem(n,x)



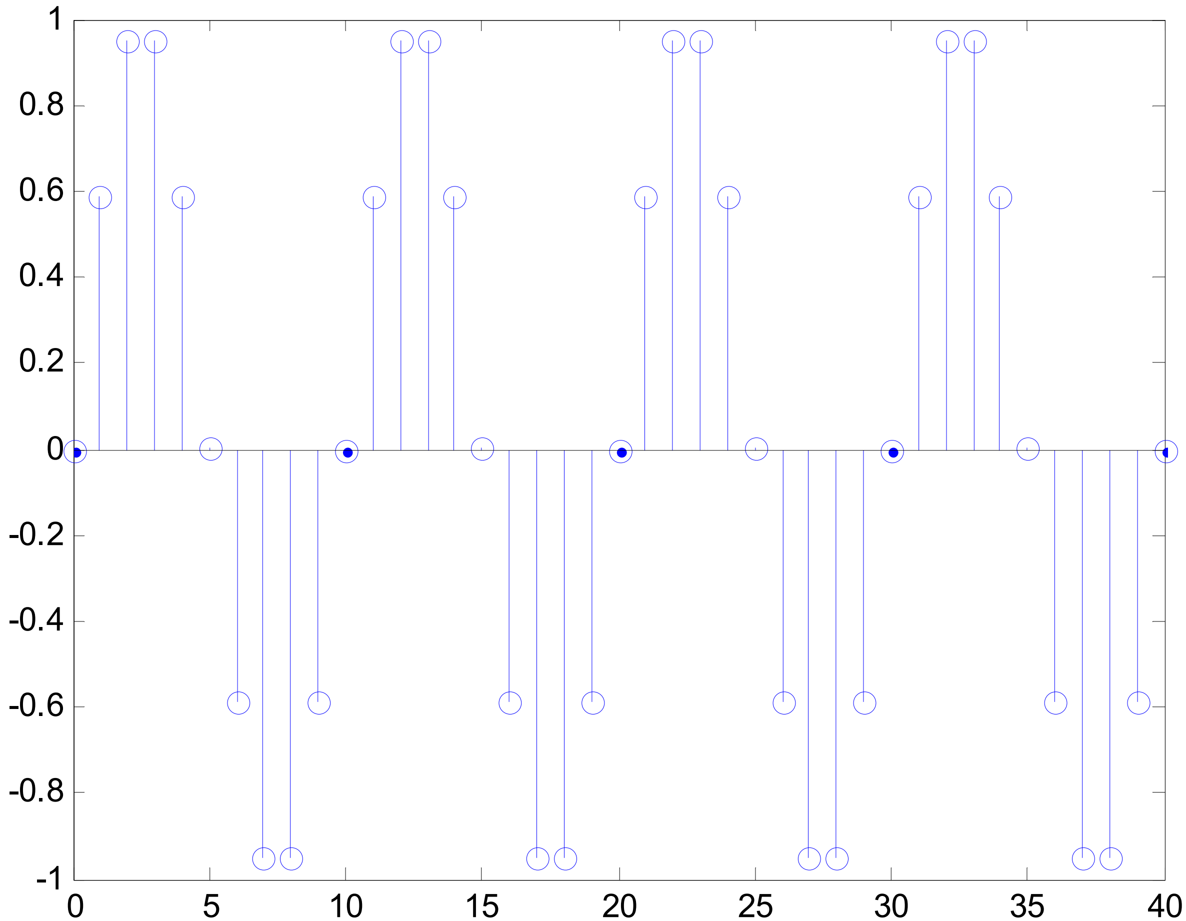
$$d. \quad x(n) = \cos 3\pi n$$

n=[0:20]; x=cos(n*pi*3); stem(n,x)

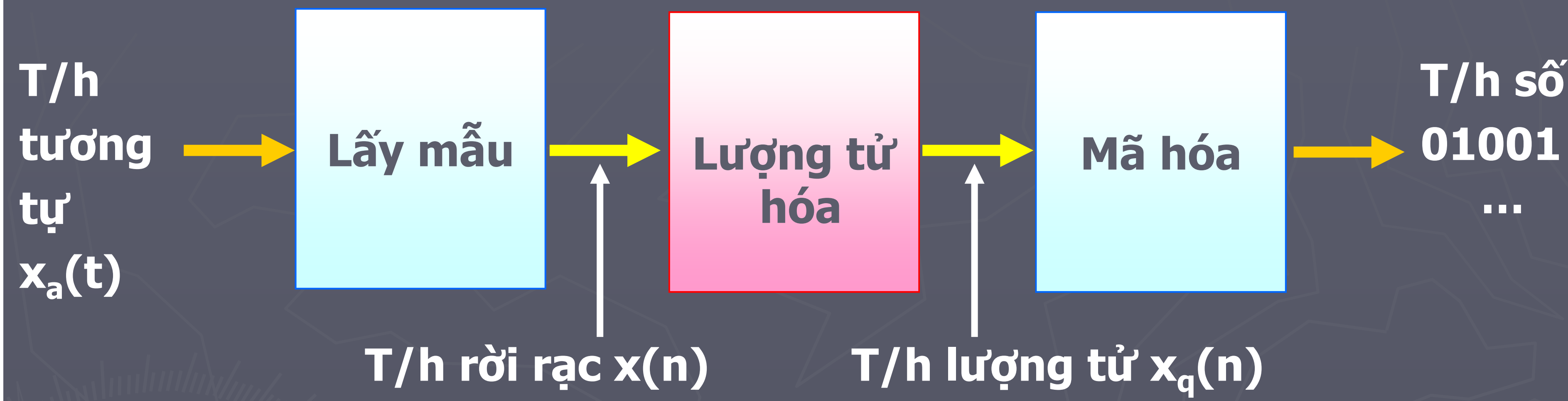


$$e.\quad x(n)=\sin\pi\frac{62}{10}n$$

n=[0:20]; x=sin(n*pi*62/10); stem(n,x)



1.4 Biến đổi tương tự - số ADC



1. Lấy mẫu (sampling) là quá trình chuyển đổi tín hiệu từ liên tục thành rời rạc bằng cách lấy từng mẫu (sample) của tín hiệu liên tục tại các thời điểm rời rạc. (lấy mẫu và giữ mẫu (sample and hold))

$x_a(t) \Rightarrow x_a(nT) \equiv x(n)$ với T là chu kỳ lấy mẫu

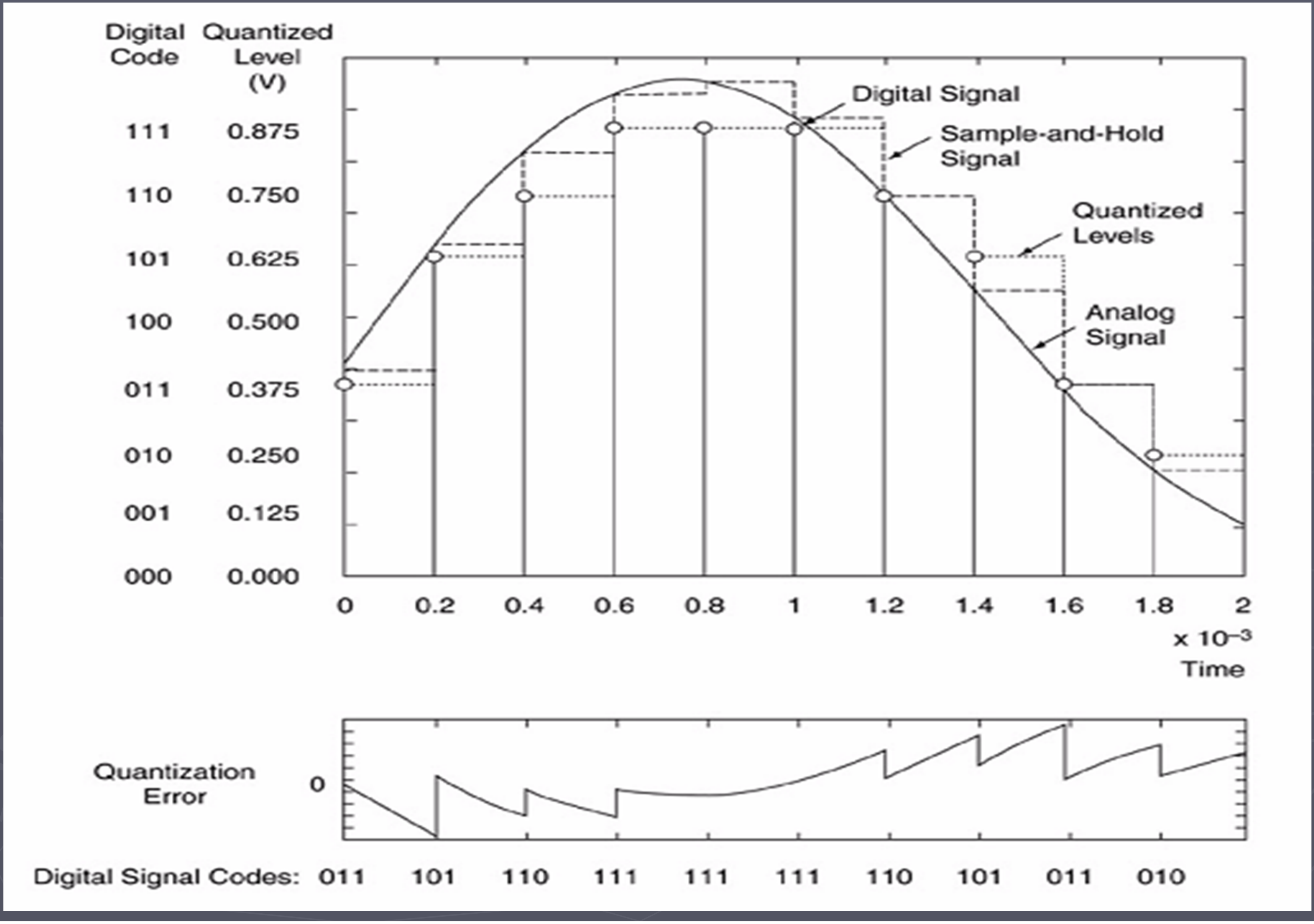
2. Lượng tử hóa (quantization) là quá trình chuyển đổi tín hiệu rời rạc có biên độ liên tục thành tín hiệu rời rạc có biên độ rời rạc (còn gọi là tín hiệu số).

$x(n) \Rightarrow x_q(n)$

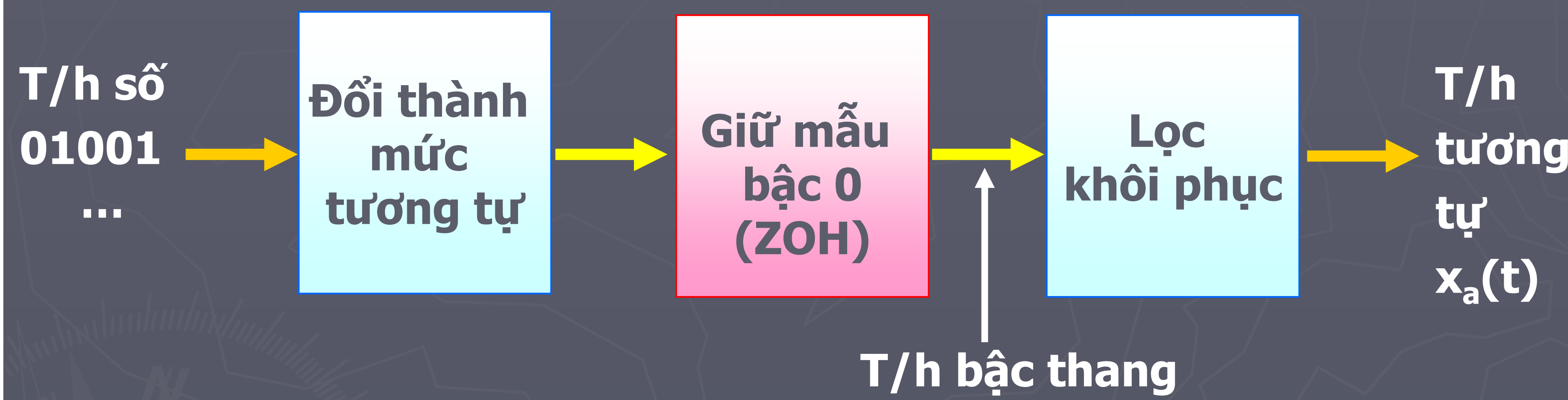
Sự khác nhau giữa giá trị của mẫu chưa lượng tử hóa x(n) và giá trị của mẫu đã lượng tử hóa $x_q(n)$ gọi là sai số lượng tử hóa (quantization error)

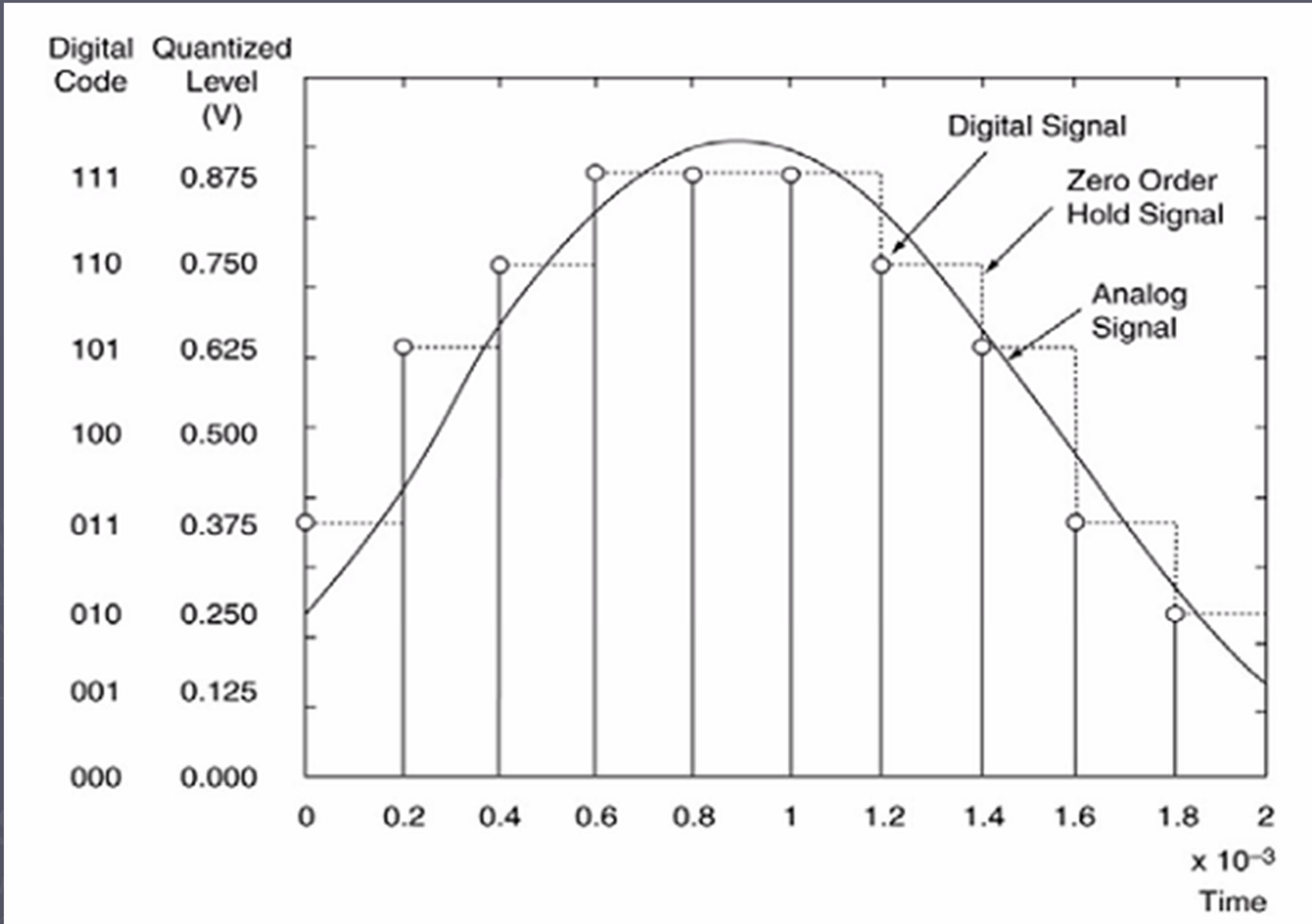
3. Số hóa (digitization) là quá trình biểu diễn mỗi giá trị rời rạc $x_q(n)$ bằng một dãy số nhị phân b bit.

Ví dụ biến đổi A/D 3 bit



1.5 Biến đổi số - tương tự DAC




Digital Code
Quantized Level (V)
111 0.875
110 0.750
101 0.625
100 0.500
011 0.375
010 0.250
001 0.125
000 0.000
Digital Signal
Zero Order Hold Signal
Analog Signal
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2
x 10⁻³
Time

Chương 2:

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC TRONG MIỀN THỜI GIAN

Giảng viên: Ths. Đào Thị Thu Thủy

Chương 2: TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.1 Tín hiệu rời rạc

2.2 Hệ thống rời rạc

2.3 Hệ thống tuyến tính bất biến LTI

2.4 Phương trình sai phân mô tả hệ thống rời rạc

2.5 Cấu trúc hệ thống rời rạc

2.6 Tương quan giữa các tín hiệu

2.1 TÍN HIỆU RỜI RẠC

2.1.1 Biểu diễn tín hiệu rời rạc

- **Tín hiệu rời rạc** được biểu diễn bằng một dãy các giá trị với phần tử thứ n được ký hiệu **x(n)**.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Tín hiệu liên tục}\\ x_a(t)\end{array}} \xrightarrow[t\,=\,nT_s]{\text{Lấy mẫu}} \boxed{\begin{array}{c}\text{Tín hiệu rời rạc}\\ x_s(nT_s) \equiv x(n)\end{array}} \quad T_s=1$$

Với T_s: chu kỳ lấy mẫu

n : số nguyên

- **Tín hiệu rời rạc** có thể biểu diễn bằng một trong các dạng: hàm số, dạng bảng, dãy số & đồ thị.

❖ **Hàm số:**

$$x(n) = \begin{cases} (0.5)^n : & 0 \le n \le 3 \\ 0 : & \text{n còn lại} \end{cases}$$

❖ **Dãy số:**

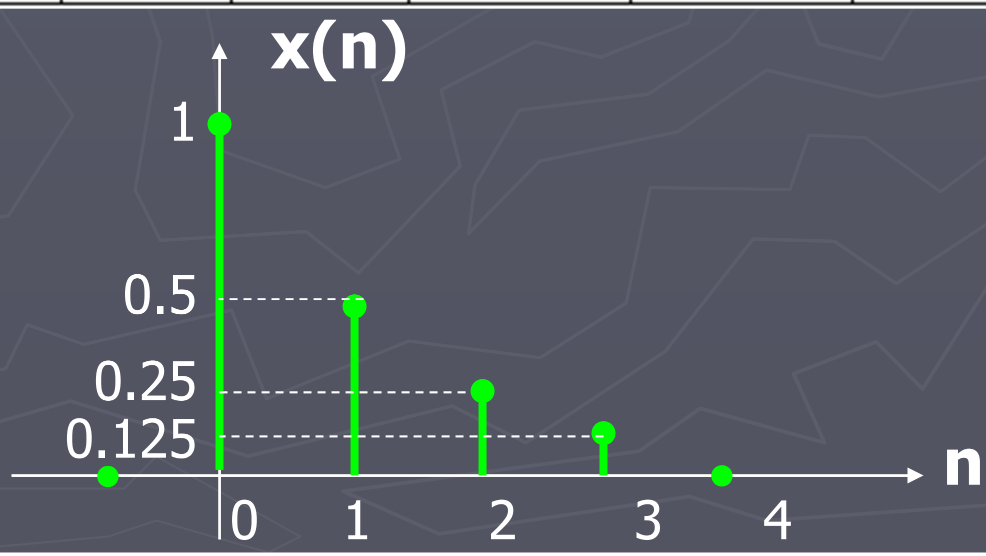
$$x(n) = \left\{ 0, \underset{\uparrow}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0 \right\}$$

↑ - Gốc thời gian n=0

❖ **Dạng bảng:**

n	-1	0	1	2	3	4
x(n)	0	1	0.25	0.125	0	0

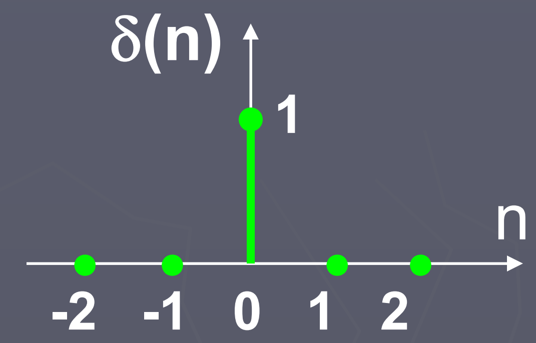
❖ **Đồ thị:**



2.1.2 MỘT SỐ TÍN HIỆU RỜI RẠC CƠ BẢN

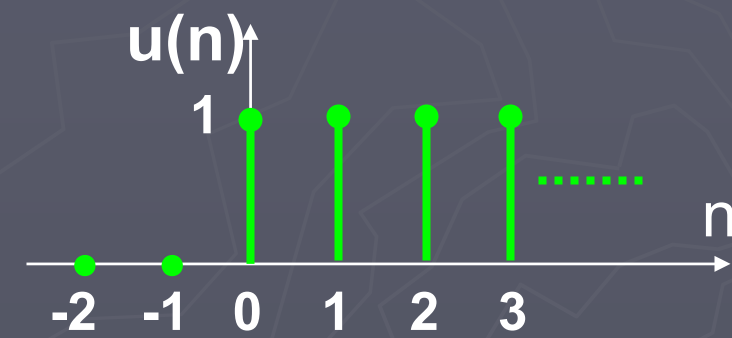
- **Dãy xung đơn vị:**

$$\delta(n)=\begin{cases}1: & n=0\\ 0: & \text{n còn lại}\end{cases}$$



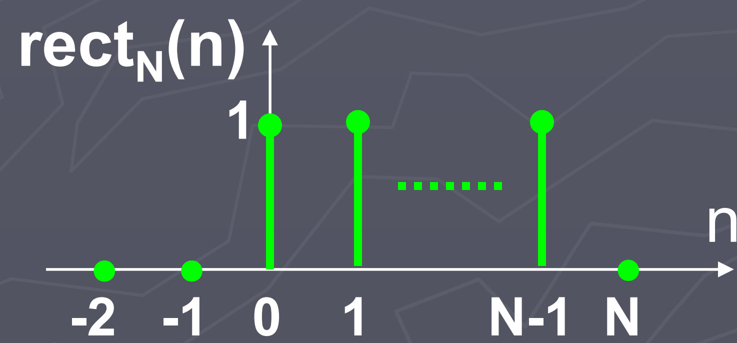
- **Dãy nhảy bậc đơn vị:**

$$u(n)=\begin{cases}1: & n\geq 0\\ 0: & n<0\end{cases}$$



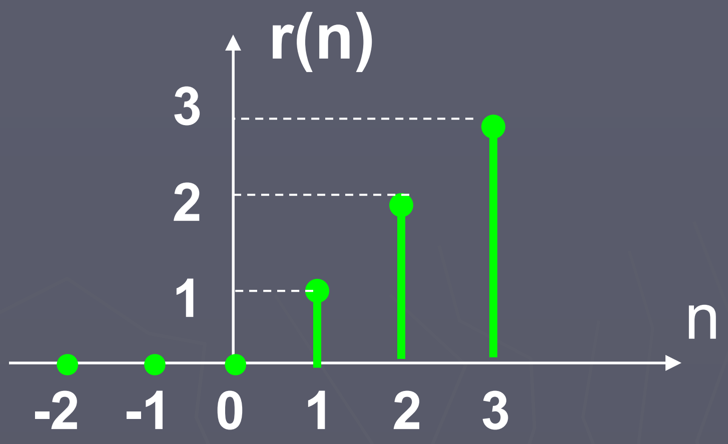
- **Dãy chữ nhật:**

$$rect_N(n)=\begin{cases}1: & N-1\geq n\geq 0\\ 0: & n \ \text{ còn lại}\end{cases}$$



❖ Dãy dốc đơn vị:

$$r(n) = \begin{cases} n: & n \ge 0 \\ 0: & n < 0 \end{cases}$$

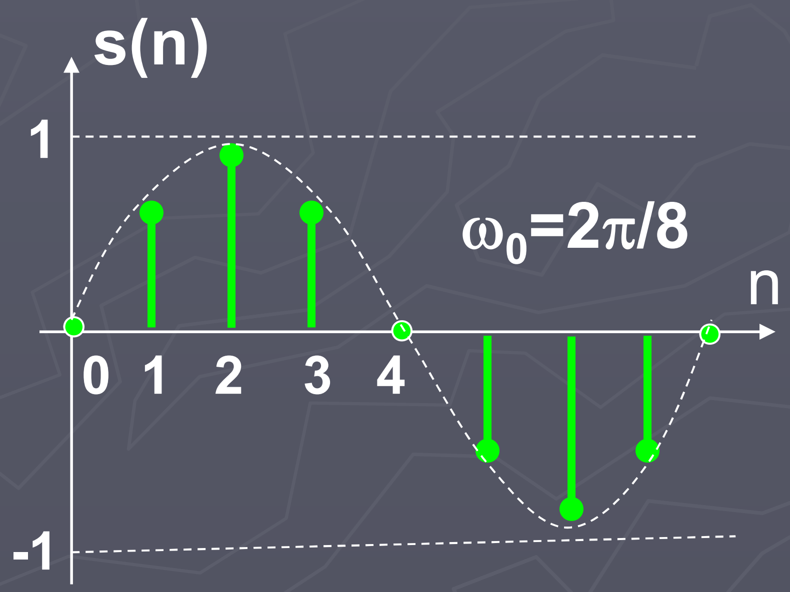


❖ Dãy hàm mũ thực:

$$e(n) = \begin{cases} a^n: & n \ge 0 \\ 0: & n < 0 \end{cases}$$

❖ Dãy sin:

$$s(n) = \sin(\omega_0 n)$$



2.1.3 CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HiỆU

Cho 2 dãy: $x_1(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\}; x_2(n) = \{2, \underset{\uparrow}{3}, 4\}$

a. Cộng 2 dãy:

Cộng các mẫu 2 dãy với nhau tương ứng với chỉ số n

$$x_1(n) + x_2(n) = \{3, \underset{\uparrow}{5}, 7\}$$

b. Nhân 2 dãy:

Nhân các mẫu 2 dãy với nhau tương ứng với chỉ số n

$$x_1(n) x_2(n) = \{2, \underset{\uparrow}{6}, 12\}$$

2.1.3 CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HiỆU

Cho dãy: $x(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\}$

c. <u>Dịch</u>: x(n) $\Rightarrow$ x(n-n$_o$)

$n_0>0$: dịch sang phải

$n_0<0$: dịch sang trái

$$x(n-1) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3\};\ x(n+1) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{3}\}$$

d. <u>Gấp tín hiệu</u>: x(n) $\Rightarrow$ x(-n)

Lấy đối xứng qua trục tung

$$x(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\} \Rightarrow x(-n) = \{3, \underset{\uparrow}{2}, 1\}$$

2.1.3 CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HiỆU

Cho dãy: $x(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\}$

e. Nhân hằng số: x(n) ⇒ ax(n)

Nhân các mẫu của dãy với hệ số nhân

$$2x(n) = \{2, \underset{\uparrow}{4}, 6\}$$

f. <u>Co thời gian</u>: x(n) ⇒ y(n)=x(2n)

y(0)=x(2.0)=x(0)

y(1)=x(2.1)=x(2)

y(-1)=x(2.-1)=x(-2)

$$x(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\} \Rightarrow x(2n) = \{0, \underset{\uparrow}{2}, 0\}$$

2.1.4 PHÂN LOẠI TÍN HIỆU RỜI RẠC

a. Tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất

+ **Năng lượng dãy x(n):**

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

Nếu $\infty > E_x > 0$ thì x(n) gọi là tín hiệu năng lượng

+ **Công suất trung bình dãy x(n):**

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

Nếu $\infty > P_x > 0$ thì x(n) gọi là tín hiệu công suất

Ví dụ: Cho $x(n) = rect_{10}(n); y(n) = u(n)$

Các tín hiệu trên tín hiệu nào là công suất, năng lượng?

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{9} |rect_{10}(n)|^2 = 10$$

x(n)- năng lượng

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{n=0}^{9} |rect_{10}(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{10}{(2N+1)} = 0$$

$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)|^2 = \infty$$

y(n)- công suất

$$P_y = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{n=0}^{N} |u(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{(2N+1)} = \frac{1}{2}$$

b. Tín hiệu tuần hoàn và tín hiệu không tuần hoàn

- Tín hiệu tuần hoàn là tín hiệu thỏa mãn điều kiện sau:

  $$x[n+N] = x[n] \text{ với mọi } n$$

  Giá trị N nhỏ nhất gọi là chu kỳ cơ bản của tín hiệu.

- Tín hiệu tuần hoàn có công suất bằng công suất trong 1 chu kỳ cơ bản N và có giá trị hữu hạn

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2$$

- Tín hiệu tuần hoàn là tín hiệu công suất

c. Tín hiệu chẵn & tín hiệu lẻ

- *Tín hiệu chẵn*: $x(-n)=x(n)$
- *Tín hiệu lẻ*: $x(-n)=-x(n)$

Ta có:

$x_e(n) = [x(n) + x(-n)]/2$ là tín hiệu chẵn và:

$x_o(n) = [x(n) - x(-n)]/2$ là tín hiệu lẻ

Cộng 2 vế ta được:

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

Như vậy, bất kỳ tín hiệu nào cũng có thể biểu diễn ở dạng tổng của 2 tín hiệu khác: một tín hiệu chẵn và một tín hiệu lẻ.

d. Tín hiệu hữu hạn và tín hiệu vô hạn

- **Dãy x(n) hữu hạn** là dãy có số mẫu $N < \infty$. Dãy x(n) hữu hạn có N mẫu được ký hiệu là x(n).
- **Dãy x(n) vô hạn** là dãy có vô hạn mẫu. Khoảng xác định của dãy vô hạn có thể là $n \in (-\infty, \infty)$; $n \in (0, \infty)$; hoặc $n \in (-\infty, 0)$.

Ví dụ:

tín hiệu vô hạn

$$x(n) = \left\{\ldots, 2, \underset{\uparrow}{4}, 6, \ldots\right\}$$

tín hiệu hữu hạn

$$x(n) = \left\{0, 2, \underset{\uparrow}{4}, 6, 0\right\}$$

e. Tín hiệu nhân quả, phi nhân quả, phản nhân quả

Tín hiệu nhân quả: x(n)=0 : n<0

$$x(n) = \left\{0, \underset{\uparrow}{4}, 6, 0\right\}$$

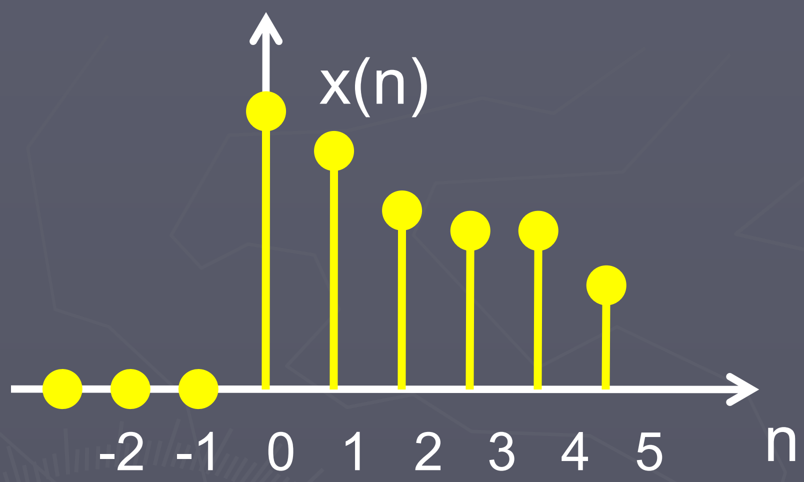
Tín hiệu phi nhân quả: không thoả tính chất trên

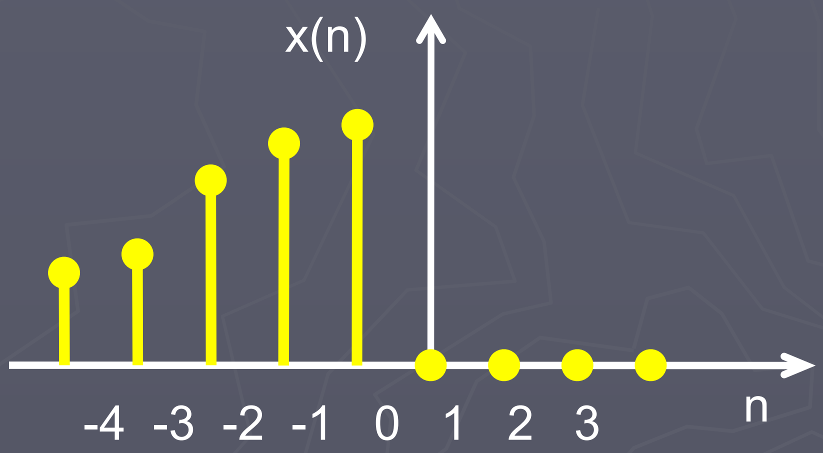
$$x(n) = \left\{0, 2, \underset{\uparrow}{4}, 6, 0\right\}$$

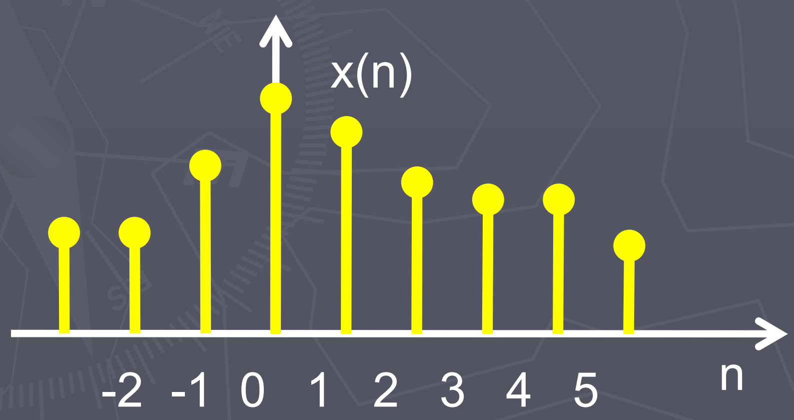
Tín hiệu phản nhân quả: x(n)=0 : n≥0

$$x(n) = \left\{0, 4, 2, \underset{\uparrow}{0}, 0\right\}$$

Ví dụ: Phân loại các tín hiệu sau







BÀI TẬP

2.1 Biểu diễn các tín hiệu sau ở dạng dãy số và đồ thị

a. $\delta(n+2)$, $\delta(n-2)$, $u(n+3)$, $u(n-3)$,

b. $r(n+1)$, $r(n-1)$, $rect_5(n)$, $rect_5(n-3)$,

2.2 Biểu diễn tín hiệu sau ở các dạng còn lại

$$a.\quad x_1(n) = \begin{cases} 3-|n|: & -3 \le n \le 3 \\ 0: & \text{n còn lại} \end{cases}$$

$$b.\quad x_2(n) = \left\{ 0, \underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 0 \right\}$$

2.3 Với $x_1(n)$ và $x_2(n)$ ở câu 2.2. Tìm

a. $x_1(n) + x_2(n)$ b. $x_1(n) \cdot x_2(n)$ c. $2x_1(n) - x_2(-n)$

Chương 2: TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.1 Tín hiệu rời rạc

2.2 Hệ thống rời rạc

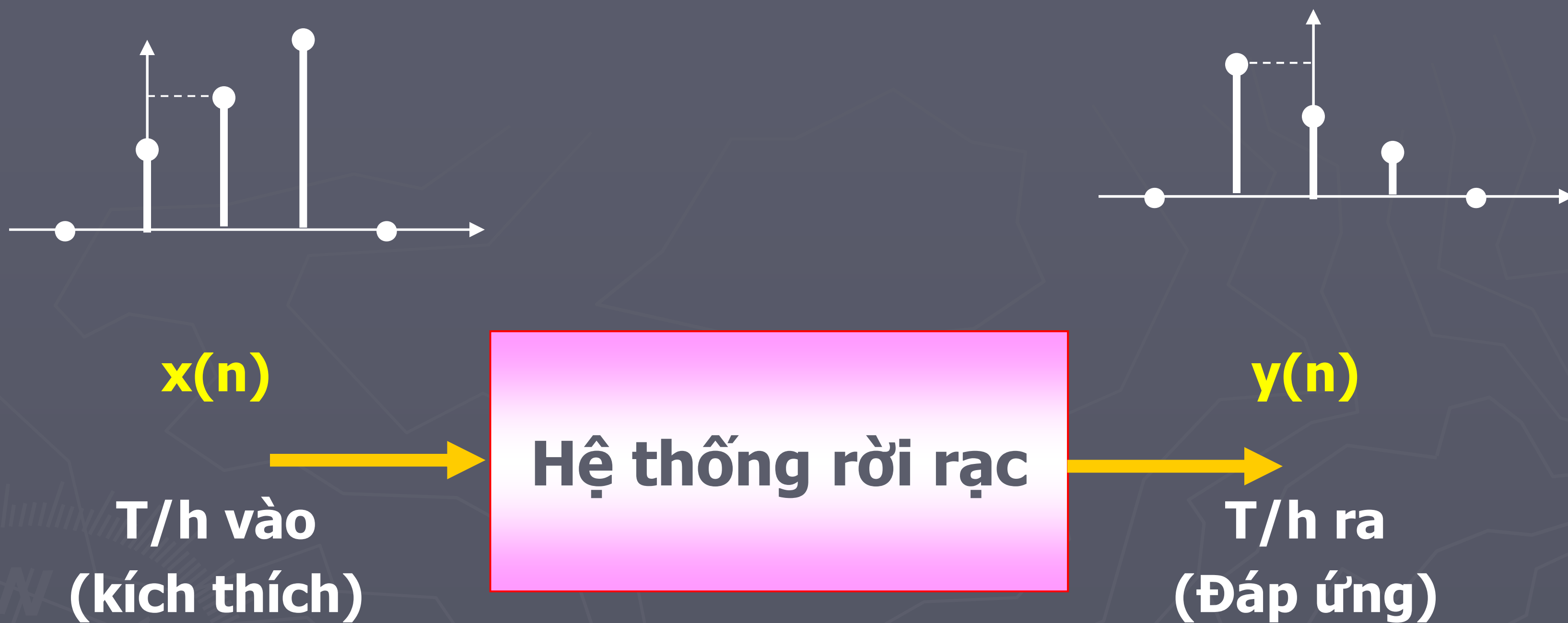
2.3 Hệ thống tuyến tính bất biến LTI

2.4 Phương trình sai phân mô tả hệ thống rời rạc

2.5 Cấu trúc hệ thống rời rạc

2.6 Tương quan giữa các tín hiệu

2.2 HỆ THỐNG RỜI RẠC



Dạng khối của hệ thống rời rạc

2.2.1 PHƯƠNG TRÌNH VÀO RA MÔ TẢ HỆ THỐNG

$$x(n) \xrightarrow{\ T\ } y(n)$$

$$y(n)=T[x(n)]$$

- ✓ Trong cách biểu diễn này, ta không quan tâm đến cấu trúc bên trong của hệ thống.
- ✓ Quan hệ vào-ra giữa x(n) và y(n) được mô tả bằng một phương trình toán.
- ✓ Đặt vào đầu vào một tín hiệu x(n) cụ thể, căn cứ vào phương trình ta sẽ tìm được đầu ra y(n) tương ứng.

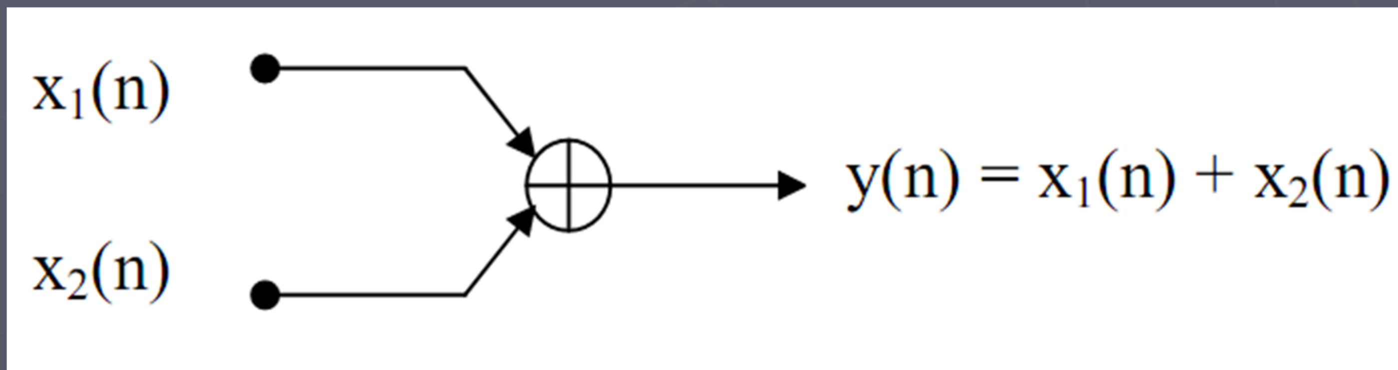
Ví dụ: Xác định đáp ứng của các hệ thống sau biết tín hiệu vào :

$$x(n) = \begin{cases} |n|: & -3 \le n \le 3 \\ 0 & \text{n còn lại} \end{cases}$$

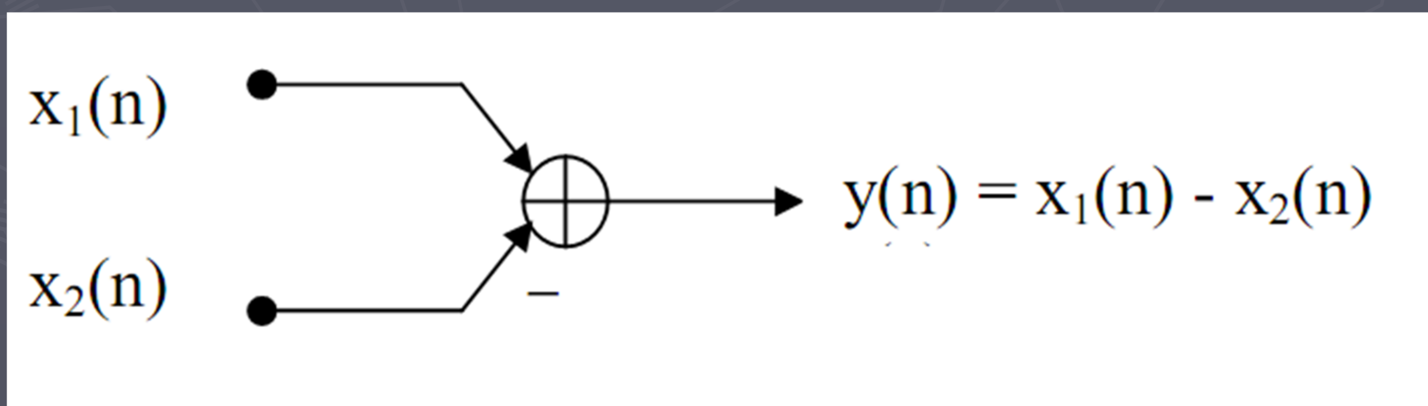
a. y(n)=x(n)
b. y(n) = x(n – 1) trễ đơn vị
c. y(n) = x(n + 1) sớm đơn vị
d. y(n) = [x(n – 1) + x(n) + x(n + 1)]/3 lọc trung bình
e. y(n) = median[x(n – 1), x(n),x(n + 1)] lọc trung vị
f. y(n) = max[x(n – 1), x(n), x(n + 1)] lấy giá trị lớn nhất
g. y(n) = 2x(n) khuếch đại biên độ
h. y(n) = x(2n) co thời gian (giảm mẫu)

2.2.2 SƠ ĐỒ KHỐI MÔ TẢ HỆ THỐNG RỜI RẠC

a. Mạch cộng tín hiệu:

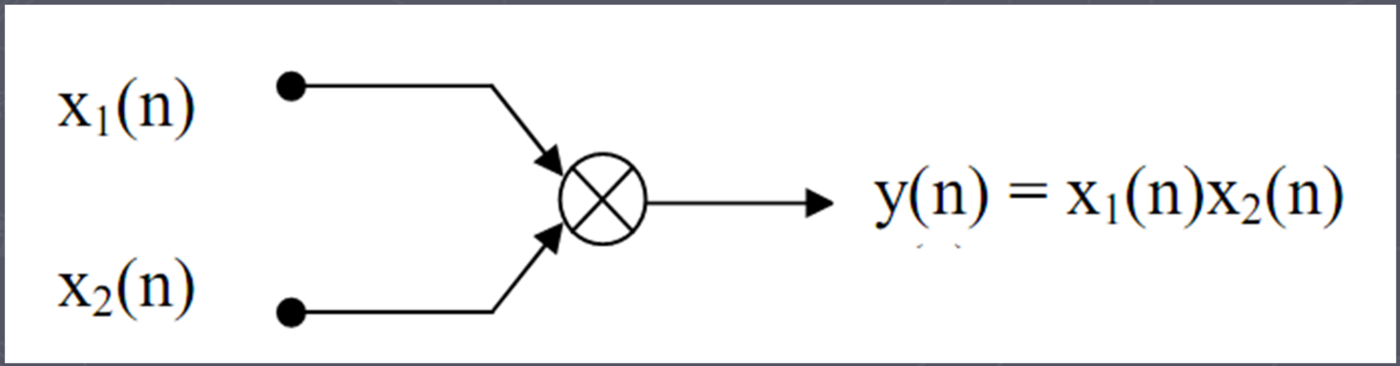


b. Mạch trừ tín hiệu:

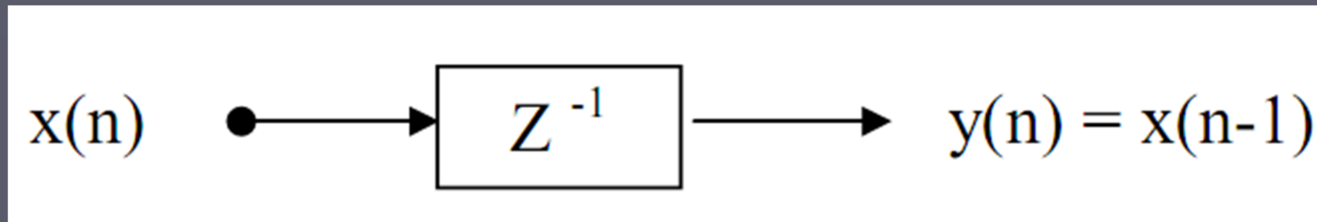


c. Mạch nhân tín hiệu với hằng số:

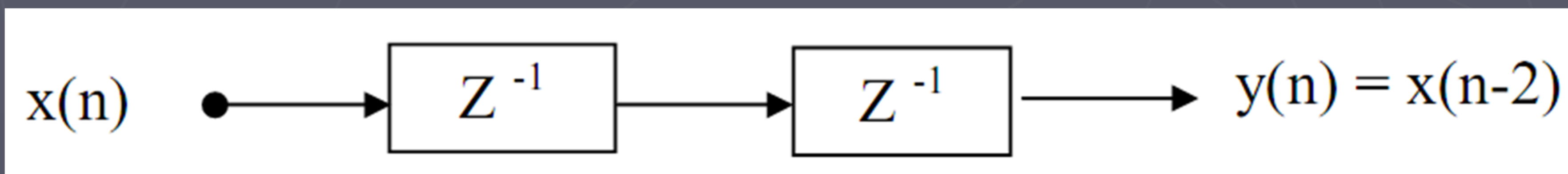
d. Mạch nhân tín hiệu:



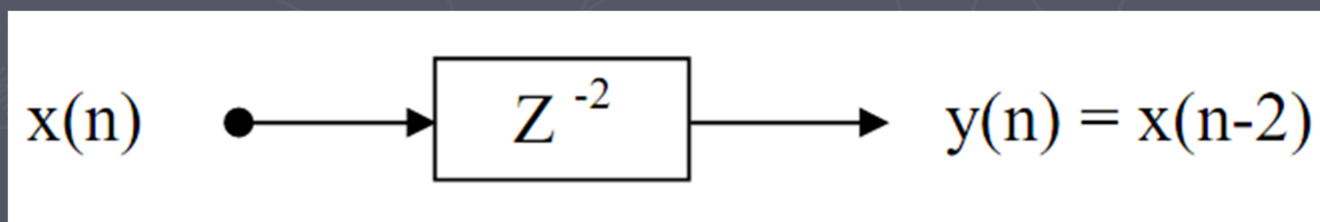
e. Mạch trễ đơn vị thời gian:



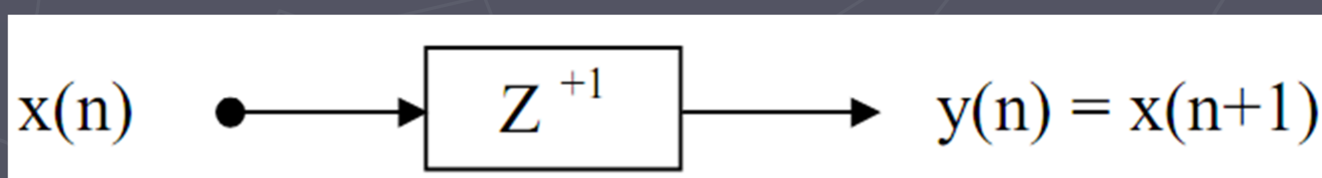
ghép nối tiếp nhiều bộ trễ đơn vị



⇔



f. Mạch sớm đơn vị thời gian:



2.2.3. PHÂN LOẠI CÁC HỆ THỐNG XỬ LÝ TÍN HIỆU RỜI RẠC

❖ **Hệ thống tĩnh & động**

➢ *Hệ thống tĩnh:* tín hiệu vào sẽ ra trực tiếp, không trì hoãn, không tới sớm, không cần bộ nhớ

Ví dụ: $y(n) = 2x(n)$

➢ *Hệ thống đông*: không thoả tính chất trên

Ví dụ: $y(n) = 2x(n-1) + x(n) - x(n+2)$

❖ Hệ thống bất biến & biến thiên theo thời gian

- ➢ *Hệ bất biến theo thời guan:* nếu tín hiệu vào dịch đi **k** đơn vị **x(n-k)** thì tín hiệu ra cũng dịch đi **k** đơn vị **y(n-k)**

$$y(n-k)=y_k(n)$$

$$x(n) \rightarrow \boxed{T} \xrightarrow{y(n)} \boxed{Z^{-k}} \rightarrow y(n-k)$$

$$x(n) \rightarrow \boxed{Z^{-k}} \xrightarrow[x(n-k)]{x_k(n)} \boxed{T} \rightarrow y_k(n)$$

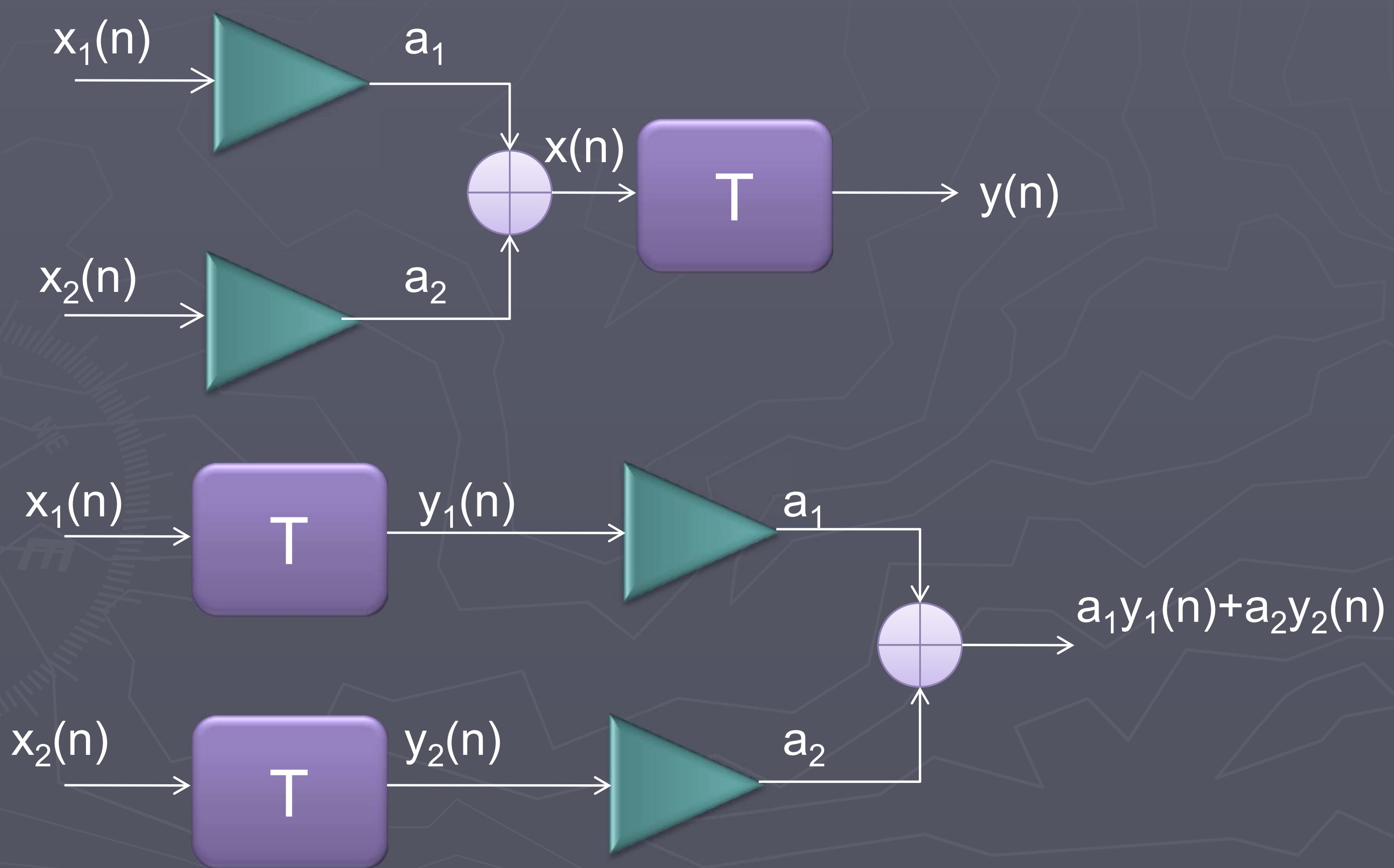
- ➢ *Hệ biến thiên theo thời gian*: không thoả tính chất trên

Ví dụ: Xét tính bất biến của các hệ thống

a. $y(n) = x(n) - x(n-1)$
b. $y(n) = n\,x(n)$

❖ Hệ thống tuyến tính & phi tuyến

- *Hệ tuyến tính:* $T[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=a_1T[x_1(n)]+a_2T[x_2(n)]$
- *Hệ phi tuyến*: không thoả tính chất trên



Ví dụ: Kiểm tra tính tuyến tính của hệ thống xác định bởi

a. $y(n) = ax(n) + b$

b. $y(n) = nx(n)$

c. $y(n) = x^2(n)$

Hệ thống nhân quả & không nhân quả

- *<u>Hệ nhân quả</u>:* Tín hiệu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu vào ở thời điểm quá khứ và hiện tại

  $y(n) = 2x(n) + 3x(n-2)$

- *<u>Hệ không nhân quả</u>*: không thoả tính chất trên

  $y(n) = 2x(n+1) - 3x(n-2)$

Hệ thống ổn định & không ổn định

- *<u>Hệ thống ổn định BIBO</u>:* nếu tín hiệu vào bị chặn

  $|x(n)| < \infty$ thì tín hiệu ra cũng bị chặn $|y(n)| < \infty$

- *<u>Hệ thống không ổn định</u>*: không thoả tính chất trên

Chương 2: TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.1 Tín hiệu rời rạc

2.2 Hệ thống rời rạc

2.3 Hệ thống tuyến tính bất biến LTI

2.4 Phương trình sai phân mô tả hệ thống rời rạc

2.5 Cấu trúc hệ thống rời rạc

2.6 Tương quan giữa các tín hiệu

2.3 HỆ THỐNG TUYẾN TÍNH BẤT BiẾN

2.3.1 ĐÁP ỨNG XUNG CỦA HỆ THỐNG

a. Biểu diễn tín hiệu theo các xung đơn vị

Ví dụ: Biểu diễn dãy $x(n) = \{1,2,\underset{\uparrow}{3},4,5\}$ theo các xung đơn vị

$$x(n) = 1\delta(n+2) + 2\delta(n+1) + 3\delta(n) + 4\delta(n-1) + 5\delta(n-2)$$

$$x(n) = x(-2)\delta(n+2) + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2)$$

Tổng quát:

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)}$$

b. Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow y(n)=T[x(n)]$$

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow h(n)=T[\delta(n)]$$

- ***Đáp ứng xung*** của hệ thống là đáp ứng khi tín hiệu vào là dãy xung đơn vị, ký hiệu **h(n)**

Với $x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$, suy ra:

$$y(n)=T[x(n)]=T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

$$\boxed{y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)}$$

Phép tổng chập 2 dãy x(n) và h(n)

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n)$$

➢ *h(n) đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trong miền n*

c. Cách tìm tổng chập

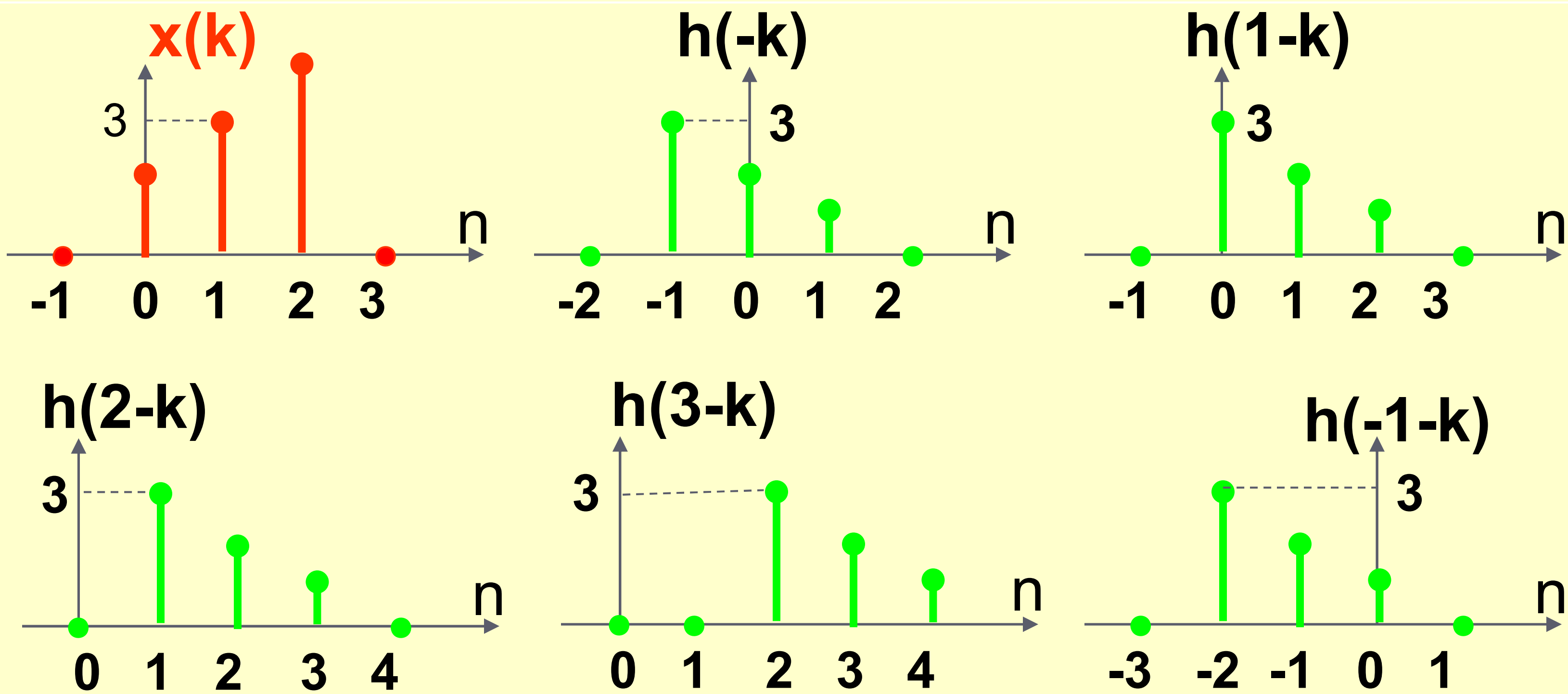
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- Đổi biến số n ->k: **x(k) & h(k)**
- Gấp h(k) qua trục tung, được **h(-k)**
- Dịch h(-k) đi n đơn vị: sang phải nếu **n>0**, sang trái nếu **n<0** được **h(n-k)**
- Nhân các mẫu 2 dãy x(k) và h(n-k) và cộng lại

<u>Ví dụ</u> Cho 2 dãy $x(n) = \{\underset{\uparrow}{2}, 3, 4\}$ *và* $h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\}$

Hãy tìm y(n) = x(n)*h(n)

- Đổi biến số n->k: $x(k) = \{\underset{\uparrow}{2}, 3, 4\}$ *và* $h(k) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\}$
- Gập h(k) qua trục tung: $h(-k) = \{3, \underset{\uparrow}{2}, 1\}$
- Xác định h(n-k):



$$\left.\begin{aligned} h(1-k) &= \{\underset{\uparrow}{3},2,1\} \\ h(2-k) &= \{\underset{\uparrow}{0},3,2,1\} \\ h(3-k) &= \{\underset{\uparrow}{0},0,3,2,1\} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

n>0 dịch sang phải

$$\left.\begin{aligned} h(-1-k) &= \{3,2,\underset{\uparrow}{1}\} \\ h(-2-k) &= \{3,2,1,\underset{\uparrow}{0}\} \\ &\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

n<0 dịch sang trái

- Nhân các mẫu 2 dãy **x(k)** & **h(n-k)** và cộng lại được **y(n)**

$$y(0) = \sum_k x(k)h(0-k) = 7$$

$$y(1) = \sum_k x(k)h(1-k) = 16$$

$$y(2) = \sum_k x(k)h(2-k) = 17$$

$$y(3) = \sum_k x(k)h(3-k) = 12$$

$$\cdots\cdots$$

$$y(-1) = \sum_k x(k)h(-1-k) = 2$$

$$y(-2) = \sum_k x(k)h(-1-k) = 0$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boxed{y(n) = \{2,\underset{\uparrow}{7},16,17,12\}}$$

c. Cách tìm tổng chập (dạng bảng)

$$y(n)=\sum_{\substack{i,j\\ i+j=n}} h(i)x(j)$$

	x(0)	x(1)	x(2)	x(3)	x(4)
h(0)	h(0) x(0)	h(0) x(1)	h(0) x(2)	h(0) x(3)	h(0) x(4)
h(1)	h(1)x(0)	h(1) x(1)	h(1) x(2)	h(1) x(3)	h(1) x(4)
h(2)	h(2)x(0)	h(2)x(1)	h(2) x(2)	h(2) x(3)	h(2) x(4)
h(3)	h(3)x(0)	h(3)x(1)	h(3) x(2)	h(3) x(3)	h(3) x(4)

Ví dụ Cho 2 dãy $x(n) = \{\underset{\uparrow}{2}, 3, 4\}$ và $h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 3\}$

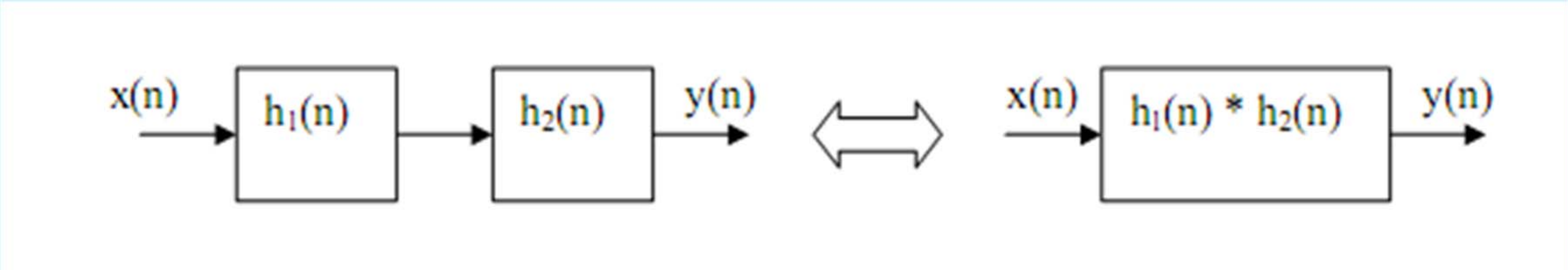
Hãy tìm y(n) = x(n)*h(n)

d. Cách tìm tổng chập nhanh

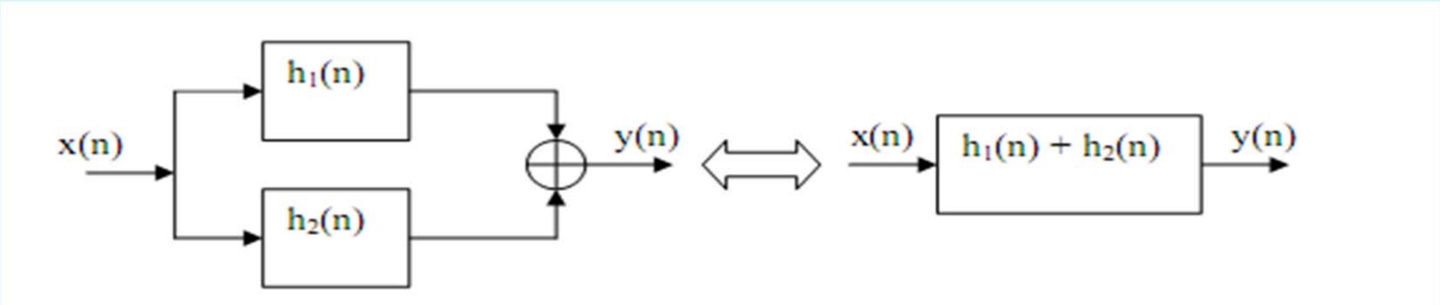
e. Dùng hàm trong Matlab conv(x,h)

d. Các tính chất của tổng chập

- **Giao hoán:** $y(n) = x(n)*h(n) = h(n)*x(n)$
- **Kết hợp:** $y(n) = x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$
  $= [x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$



- **Phân phối:** $y(n) = x(n)*[h_1(n) + h_2(n)]$
  $= x(n)*h_1(n) + x(n)*h_2(n)$



Hệ thống FIR và IIR

- **Hệ thống FIR** (Finite duration Impulse Response) là hệ thống có đáp ứng xung hữu hạn ⇒ bộ nhớ hữu hạn để lưu trữ tín hiệu và thời gian xử lý cũng hữu hạn.

$$h(n) = \left\{ 0, 2, \underset{\uparrow}{4}, 6, 0 \right\}$$

- **Hệ thống IIR** (Infinite duration Impulse Response) là hệ thống có đáp ứng xung vô hạn, nó hiện hữu ở mọi thời gian từ n = - ∞ đến n=+∞. Hệ thống này cần bộ nhớ lớn vô hạn để lưu trữ tín hiệu và thời gian xử lý cũng rất lớn

$$h(n) = \left\{ \ldots, 2, \underset{\uparrow}{4}, 6, \ldots \right\}$$

2.3.2 TÍNH NHÂN QUẢ & ỔN ĐỊNH CỦA HỆ TTBB

Định lý 1: Hệ thống TTBB là nhân quả $\Leftrightarrow$ **$h(n)=0$: $n<0$**

Ví dụ: Xét tính nhân quả các hệ thống cho bởi:

a) $y(n)=x(n-1)+2x(n-2)$ b) $y(n)=x(n+1)+2x(n)+3x(n-1)$

Thay **$x(n)=\delta(n)$**, ta được biểu thức **$h(n)$** các hệ:

a) **$h(n)= \delta(n-1)+2\delta(n-2)$**

Do $h(n)=0$: $n<0$ -> *hệ nhân quả*

b) **$h(n)=\delta(n+1)+ \delta(n)+3\delta(n-1)$**:

Do $h(-1)=1$ -> *hệ không nhân quả*

2.3.2 TÍNH NHÂN QUẢ & ỔN ĐỊNH CỦA HỆ TTBB

Định lý 2: Hệ thống TTBB là ổn định $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

Ví dụ 1.3.4: Xét tính ổn định của hệ thống: **h(n)=a^{n}u(n)**

$$S = \sum_{n-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a^n u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$$

- **|a|< 1 -> S=1/(1-|a|) :** hệ ổn định
- **|a|≥ 1 -> S=∞:** hệ không ổn định

Bài tập

Hệ thống cho bởi phương trình:

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 3x(n-3)$$

1.**Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống**

2. Kiểm tra tính chất tuyến tính, bất biến, nhân quả của hệ thống

3. Từ phương trình tín hiệu vào ra tìm y(n) biết $x(n)= 2\delta(n)+ \delta(n-1) +4\delta(n-2)$

4. Tìm đáp ứng xung h(n) của hệ thống

5. Tìm y(n)=x(n)*h(n) theo dạng bảng

Bài tập

Hệ thống LTI nhân quả cho bởi phương trình:

$$y(n) = 0.5y(n-1) + 2x(n)$$

1.**Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống**

2. Tìm đáp ứng xung h(n) của hệ thống

Chương 2: TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.1 Tín hiệu rời rạc

2.2 Hệ thống rời rạc

2.3 Hệ thống tuyến tính bất biến LTI

2.4 Phương trình sai phân mô tả hệ thống rời rạc

2.5 Cấu trúc hệ thống rời rạc

2.6 Tương quan giữa các tín hiệu

2.4 PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN MÔ TẢ HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.4.1 PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(n)y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r(n)x(n-r)$$

Với: **N** – gọi là bậc của phương trình sai phân: N,M>0

$a_k(n)$, $b_r(n)$ – các hệ số của phương trình sai phân

2.4.2 PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HSH

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

Với: **a_k , b_r** – không phụ thuộc vào biến số n

2.4.3 GiẢI PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HSH

- Tìm nghiệm của PTSP thuần nhất: **$y_h(n)$**
- Tìm nghiệm riêng của PTSP: **$y_p(n)$**
- Nghiệm tổng quát của PTSP: **$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$**

a. Nghiệm của PTSP thuần nhất: $y_h(n)$

Giả thiết α^n là nghiệm của PTSP thuần nhất:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = 0$$

Phương trình đặc trưng có dạng:

$$a_0\alpha^N + a_1\alpha^{N-1} + \cdots + a_{N-1}\alpha^1 + a_N = 0$$

a. Nghiệm của PTSP thuần nhất (tt)

- Phương trình đặc trưng có nghiệm đơn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_N$

$$y_h(n) = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \cdots + A_N\alpha_N^n$$

- Phương trình đặc trưng có nghiệm α_1 bội **r**

$$y_h(n) = (A_{10} + A_{11}n + \cdots + A_{1(r-1)}n^{r-1})\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \cdots + A_N\alpha_N^n$$

b. Nghiệm riêng của PTSP: $y_p(n)$

- Thường chọn $y_p(n)$ có dạng giống với **x(n)**

<u>Ví dụ:</u> Giải PTSP: **$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n)$ (*)** với **$n \geq 0$,** biết $y(n)=0$: $n<0$ và **$x(n)=3^n$**

- <u>Tìm nghiệm của PTSP thuần nhất</u> **$y_h(n)$**

  $y_h(n)$ là nghiệm của phương trình:

  $y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 0$

  Phương trình đặc tính: $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha_1=1; \alpha_2=2$

$\Rightarrow$ **$y_h(n) = (A_1 1^n + A_2 2^n)$**

- <u>Tìm nghiệm riêng của PTSP</u> **$y_p(n)$**

  Chọn **$y_p(n)$** có dạng **$y_p(n)=B3^n$** , thay vào PTSP **(*)** :

  $B3^n - 3B3^{n-1} + 2B3^{n-2} = 3^n \Rightarrow B = 9/2$

- Nghiệm tổng quát của PTSP:

  $y(n) = y_h(n) + y_p(n) = (A_1 1^n + A_2 2^n) + 4.5\ 3^n$

- Nghiệm tổng quát của PTSP:

  $\mathbf{y(n) = (A_1 1^n + A_2 2^n) + 4,5\ 3^n}$

  Dựa vào điều kiện đầu: y(n)=0: n<0:

  Từ: $\mathbf{y(n) = 3y(n-1) - 2y(n-2) + x(n)}$ với $\mathbf{x(n) = 3^n}$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow y(0)=3y(-1)-2y(-2)+3^0=1=A_1+A_2+4.5 \\ &\Rightarrow y(1)=3y(0)-2y(-1)+3^1=6=A_1+2A_2+4,5.3^1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &A_1=0.5 \\ &A_2=-4 \end{aligned}$$

  Vậy: $\boxed{\mathbf{y(n) = 0.5\ 1^n - 4\ 2^n + 4,5\ 3^n}}$ $\mathbf{: n \geq 0}$

Chương 2: TÍN HIỆU & HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.1 Tín hiệu rời rạc

2.2 Hệ thống rời rạc

2.3 Hệ thống tuyến tính bất biến LTI

2.4 Phương trình sai phân mô tả hệ thống rời rạc

2.5 Cấu trúc hệ thống rời rạc

2.6 Tương quan giữa các tín hiệu

2.5 CẤU TRÚC HỆ THỐNG RỜI RẠC

2.5.1 HỆ THỐNG ĐỆ QUI & KHÔNG ĐỆ QUI

a. Hệ thống không đệ qui

- ***Hệ thống không đệ qui*** là hệ thống đặc trưng bởi PTSP TTHSH bậc **N=0**

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) : \quad a_0 = 1$$

$$h(r) = b_r \Rightarrow y(n) = \sum_{r=0}^{M} h(r) x(n-r)$$

$$L\left[h(r)\right] = M + 1$$

- Hệ thống không đệ qui còn gọi là hệ thống có **đáp ứng xung độ dài hữu hạn** – **FIR** (Finite Impulse Response)

- Hệ thống không đệ qui luôn luôn ổn định do:

$$S=\sum_{r=0}^{\infty}|h(r)|=\sum_{r=0}^{M}|b_r|<\infty$$

b. Hệ thống đệ qui

- ***Hệ thống đệ qui*** là hệ thống đặc trưng bởi PTSP TTHSH bậc **N>0**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

- Hệ thống đệ qui còn gọi là hệ thống có **đáp ứng xung độ dài vô hạn** – **IIR** (Infinite Impulse Response)
- Hệ thống đệ qui có thể **ổn định** hoặc **không ổn định**

<u>Ví dụ</u>: Xét tính ổn định của hệ thống cho bởi:

y(n) - ay(n-1) = x(n) biết y(n)=0:n<0

$$h(n) = y(n)\Big|_{x(n)=\delta(n)} \Rightarrow h(n) = y(n) = \delta(n) + ah(n-1)$$

- **n=0 -> h(0) =δ(0) + ah(-1) = 1**
- **n=1 -> h(1)= δ(1) + ah(0) = a**
- **n=2 -> h(2)= δ(2) + ah(1) = a^2**
- **n=3 -> h(3)= δ(3) + ah(2) = a^3**

....

$$\boxed{h(n) = a^n : n \geq 0}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n :$$

- **/a/< 1 -> S=1/(1-/a/):** hệ ổn định
- **/a/$\geq$ 1 ->S=∞:** hệ không ổn định

2.5.2 SƠ ĐỒ THỰC HIỆN HỆ THỐNG

a. Các phần tử thực hiện hệ thống

- **Bộ trễ:** $x(n) \longrightarrow \boxed{Z^{-1}} \longrightarrow y(n)=x(n-1)$

- **Bộ cộng:**

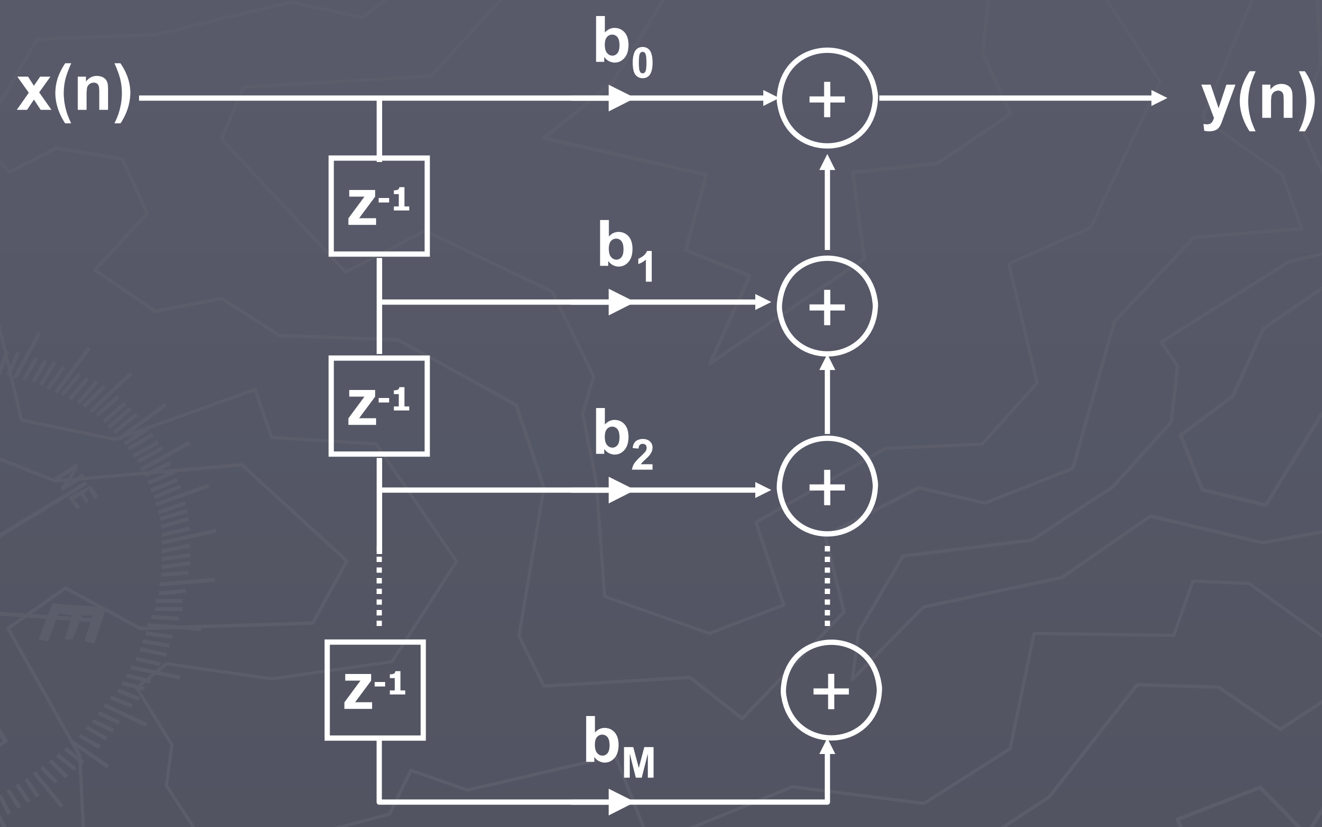
$x_1(n)$, $x_2(n)$, ……, $x_M(n)$ $\longrightarrow \bigoplus \longrightarrow$

$$y(n)=\sum_{i=1}^{M} x_i(n)$$

- **Bộ nhân:** $x(n) \xrightarrow{\alpha} y(n) = \alpha x(n)$

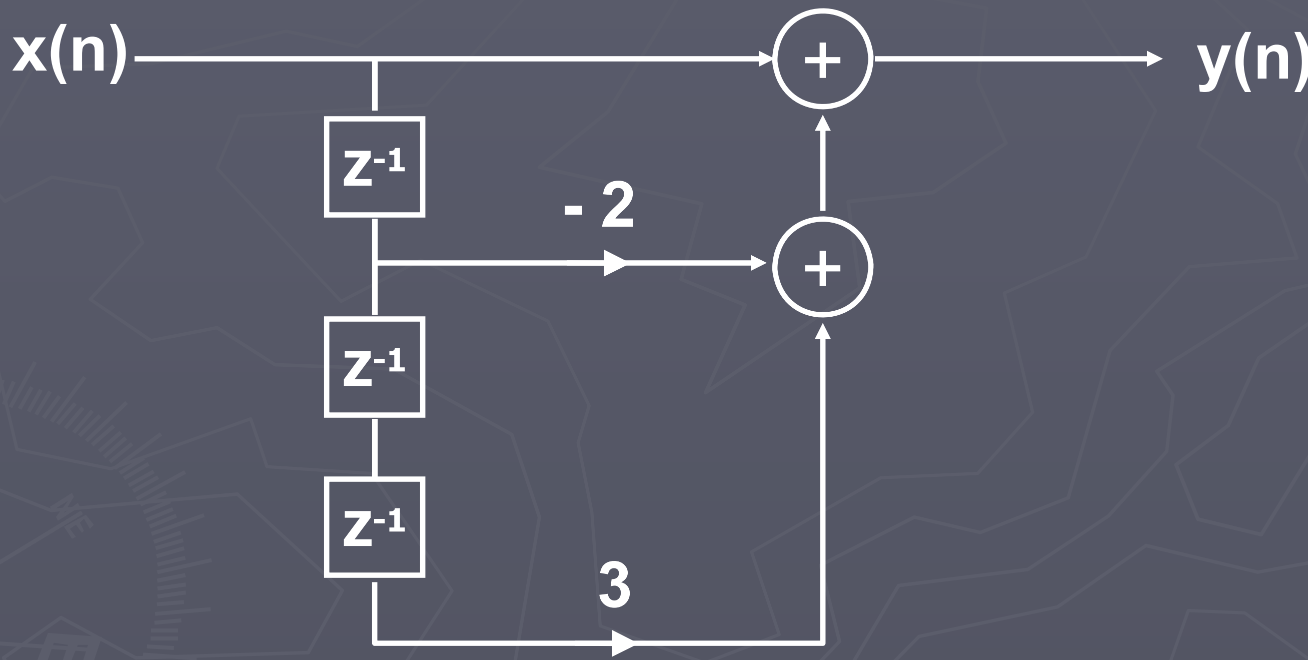
b. Sơ đồ thực hiện hệ thống không đệ qui

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_M x(n-M)$$



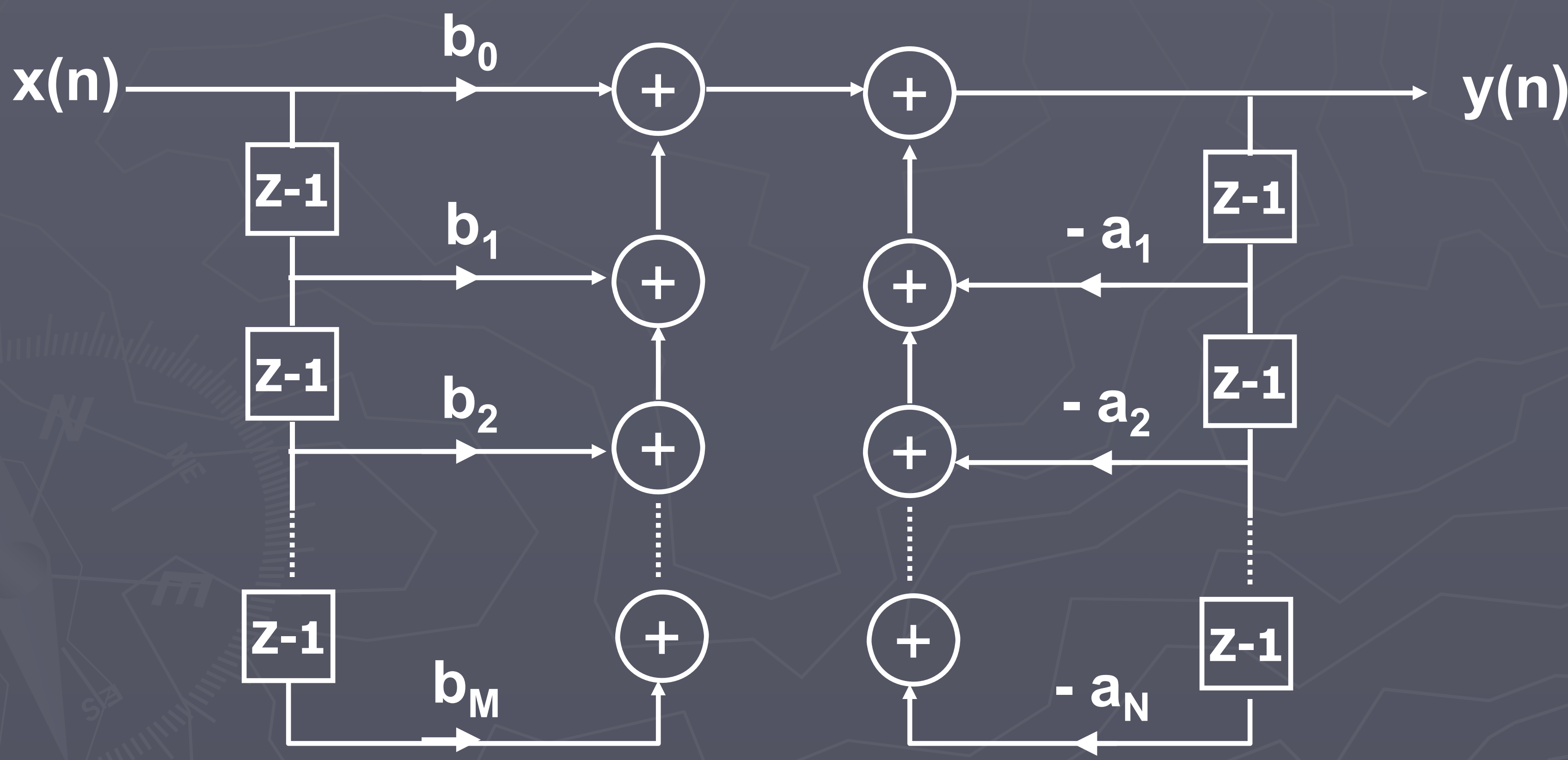
<u>Ví dụ:</u> Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống cho bởi:

$$y(n) = x(n) - 2x(n-1) + 3x(n-3)$$



c. <u>Sơ đồ thực hiện hệ thống đệ qui</u>

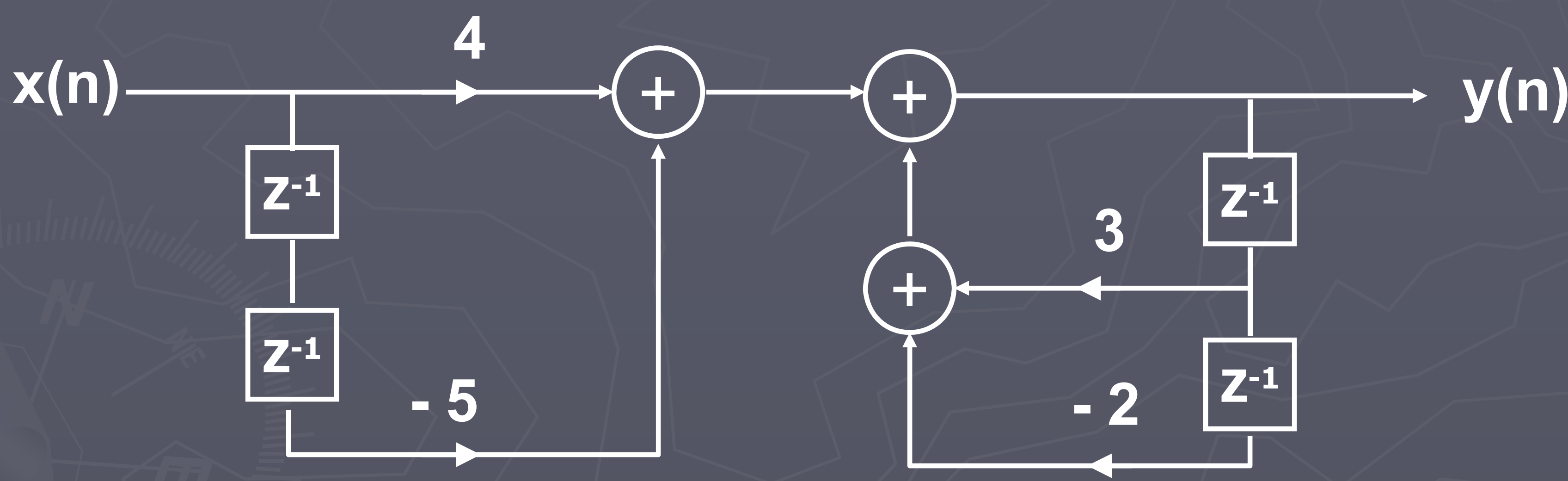
$$y(n)=\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)-\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k):\quad a_0=1$$



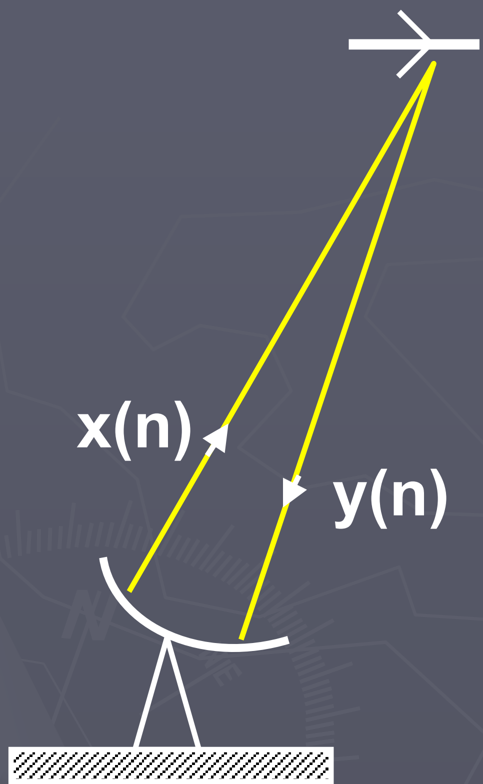
<u>Ví dụ:</u> Hãy vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống cho bởi:

$$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = 4x(n) - 5x(n-2)$$

$$y(n) = 4x(n) - 5x(n-2) + 3y(n-1) - 2y(n-2)$$



2.6 TƯƠNG QUAN CÁC TÍN HIỆU



✓ Nếu có mục tiêu:

$$y(n) = A\,x(n-n_0) + \gamma(n)$$

✓ Nếu không có mục tiêu:

$$y(n) = \gamma(n)$$

Với: A - hệ số suy hao

$\gamma(n)$ - nhiễu cộng

❖ Tương quan các tín hiệu dùng để so sánh các tín hiệu với nhau

2.6.1 TƯƠNG QUAN CHÉO 2 TÍN HIỆU

- Tương quan chéo 2 dãy năng lượng x(n) & y(n) định nghĩa:

$$R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-m)$$

hay

$$R_{xy}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m+n)y(n)$$

$$R_{xy}(m) = R_{yx}(-m)$$

Ví dụ: Tìm tương quan Rxy(m) biết:

x(n) = {0, $\underline{\mathbf{0}}$, 1, 2, 3,0} ;y(n) = {0, $\underline{\mathbf{2}}$, 4, 6, 0}

2.6.2 TỰ TƯƠNG QUAN TÍN HIỆU

- Tự tương quan của dãy x(n) được định nghĩa:

$$\boxed{R_{xx}(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-m)}$$

✓ Tự tương quan của dãy x(n) nhận giá trị lớn nhất tại n=0

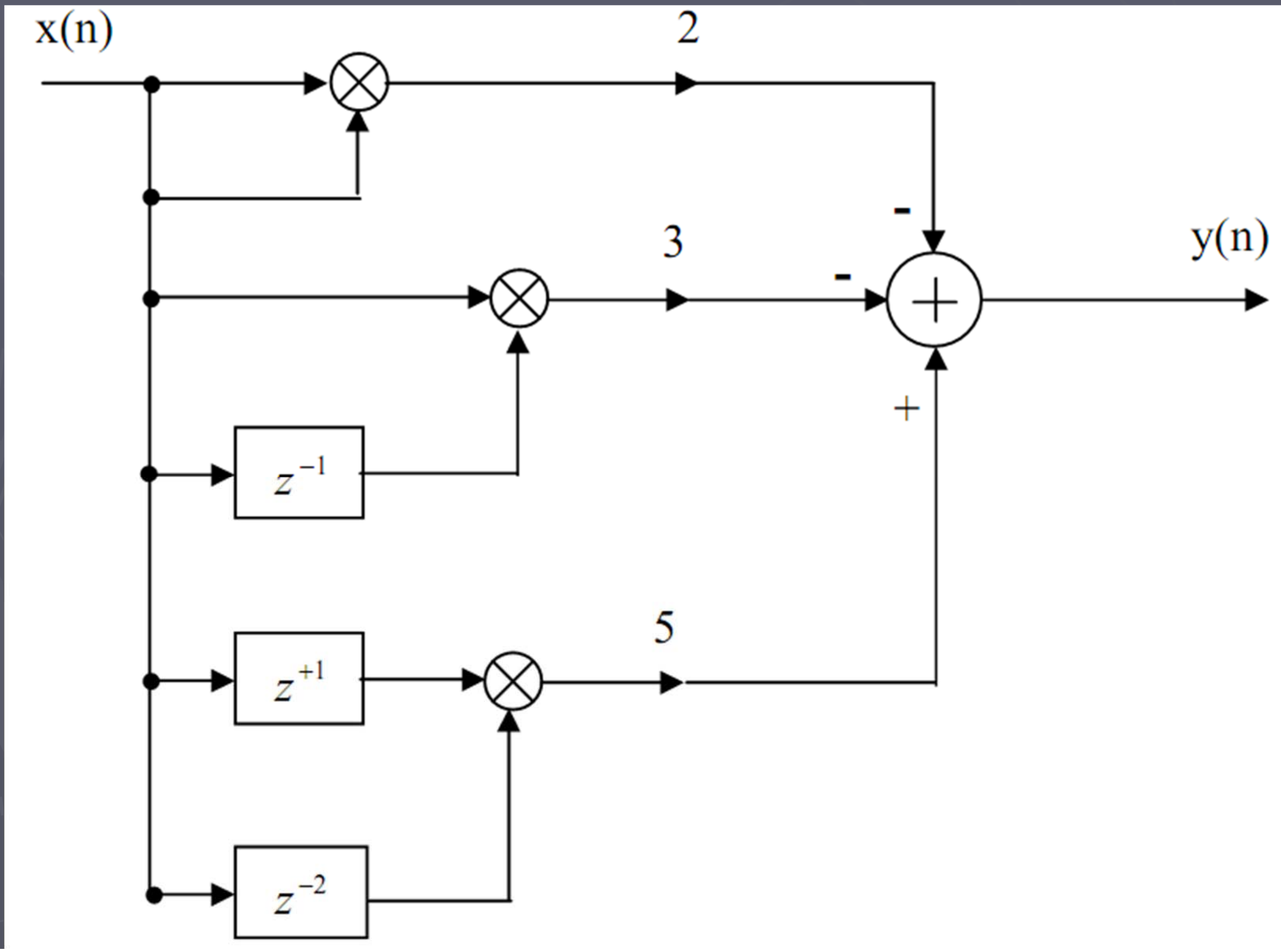
Bài tập: Vẽ sơ đồ khối của hệ thống mô tả bởi phương trình tín hiệu vào ra:

a. $y(n) = -2x^2(n) - 3x(n)x(n-1) + 5x(n+1)x(n-2)$

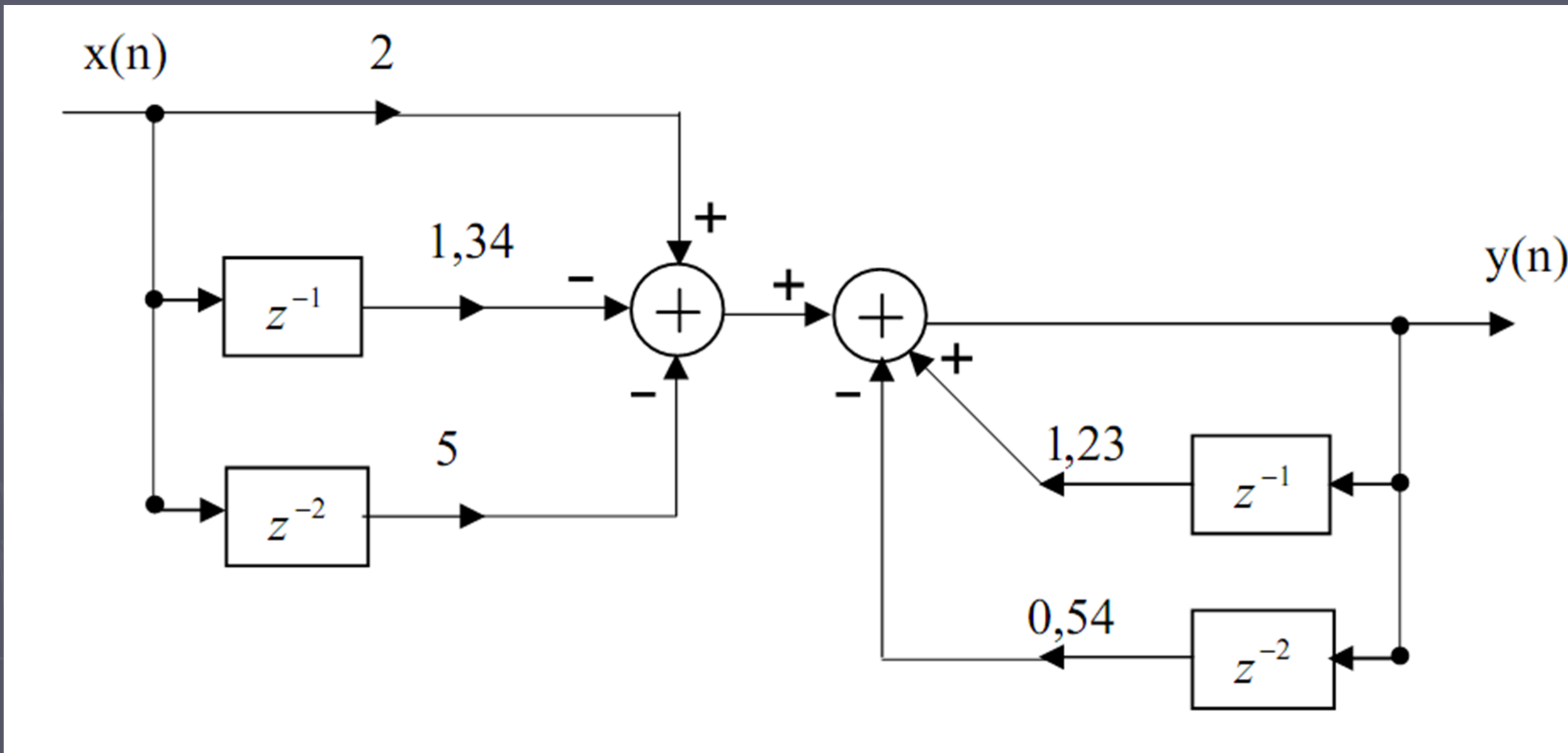
b. $y(n) = 1{,}23y(n-1) - 0{,}54y(n-2) + 2x(n) - 1{,}34x(n-1) - 5x(n-2)$

Giải:

a. $y(n) = -2x^2(n) - 3x(n)x(n-1) + 5x(n+1)x(n-2)$



b. $y(n) = 1{,}23y(n-1) - 0{,}54y(n-2) + 2x(n) - 1{,}34x(n-1) - 5x(n-2)$



Chương 3:

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN Z

Giảng viên: Ths. Đào Thị Thu Thủy

Chương 3:TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN Z

3.1 BIẾN ĐỔI Z

3.2 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

3.3 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI TRONG MIỀN Z

3.1 BIẾN ĐỔI Z

3.1.1 ĐỊNH NGHĨA BIẾN ĐỔI Z:

- **Biến đổi Z của dãy x(n):** $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (*)$$

  Trong đó Z biến số phức

  Biểu thức (*) còn gọi là biến đổi Z hai bên

Biến đổi Z một bên dãy x(n): $$X^1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (**)$$

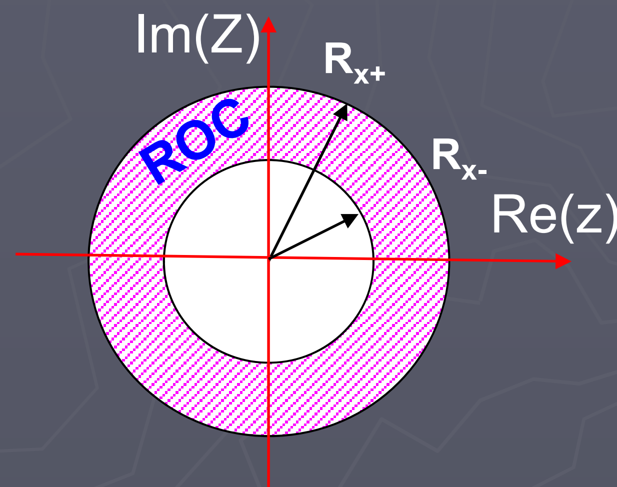
- Nếu x(n) nhân quả thì : (*) $\equiv$ (**)
- **Ký hiệu:**

x(n) $\xleftrightarrow{Z}$ **X(z) hay X(z) = Z{x(n)}**

X(z) $\xleftrightarrow{Z^{-1}}$ **x(n) hay x(n) = Z^-1{X(z)}**

3.1.2 MIỀN HỘI TỤ CỦA BIẾN ĐỔI Z (ROC)

- **Miền hội tụ của biến đổi Z** - ROC (Region Of Convergence) *là tập hợp tất cả các giá trị Z nằm trong mặt phẳng phức sao cho X(z) hội tụ.*



- Để tìm ROC của X(z) ta áp dụng tiêu chuẩn Cauchy

- **Tiêu chuẩn Cauchy:**

Một chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) = x(0) + x(1) + x(2) + \cdots$$

hội tụ nếu:

$$\lim_{n\to\infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} < 1$$

Ví dụ 3.1: Tìm biến đổi Z & ROC của các tín hiệu hữu hạn sau:

(a) $x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 5, 7, 0, 1\}$

(b) $x_2(n) = \{1, 2, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\}$

(c) $x_3(n) = \{\underset{\uparrow}{0}, 0, 1, 2, 5, 7, 0, 1\}$

(d) $x_4(n) = \{2, 4, \underset{\uparrow}{5}, 7, 0, 1\}$

(e) $x_5(n) = \delta(n)$

(f) $x_6(n) = \delta(n - k), k > 0$

(g) $x_7(n) = \delta(n + k), k > 0$

Ví dụ 3.2: Tìm biến đổi Z & ROC của: $x(n) = a^n u(n)$

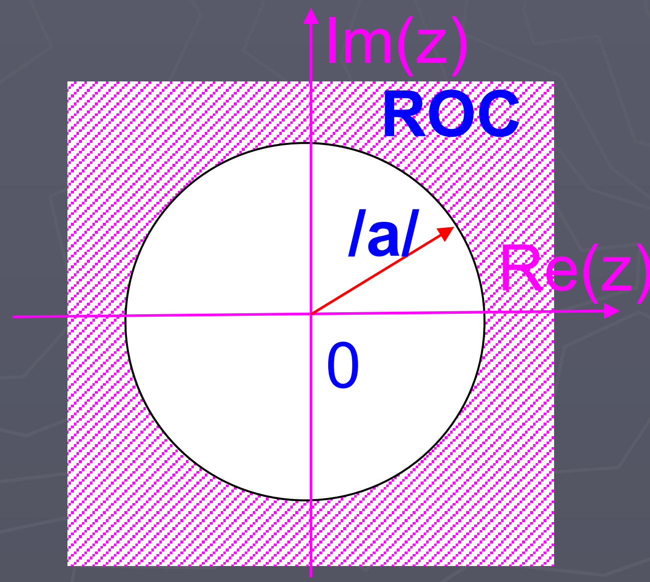
Giải:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a^n u(n)\right] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n . z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(az^{-1}\right)^n$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy,

X(z) sẽ hội tụ:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$



Nếu: $$\lim_{n\to\infty}\left(\left|az^{-1}\right|^n\right)^{1/n} < 1 \Leftrightarrow |z| > |a|$$

Vậy: $$\boxed{X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \mathrm{ROC} : |Z| > |a|}$$

Ví dụ 3.3: Tìm biến đổi Z & ROC của: $x(n) = -a^n u(-n-1)$

Giải:

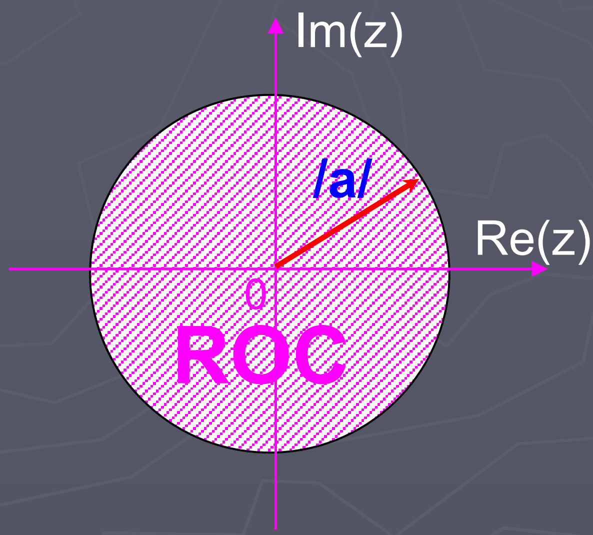
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-a^n u(-n-1)\right] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n . z^{-n}$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^m = -\sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^m + 1$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy,

X(z) sẽ hội tụ:

$$X(z) = -\sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1} z\right)^n + 1 = \boxed{\frac{1}{1 - az^{-1}}}$$



Nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left|a^{-1} z\right|^n \right)^{1/n} < 1 \Leftrightarrow \boxed{|z| < |a|}$$

3.1.3 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

a) Tuyến tính

- Nếu: $\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \ \ : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \ \ : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_2 \end{cases}$
- Thì: $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{Z} a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$

ROC chứa $\mathbf{R_1 \cap R_2}$

Ví dụ 3.4: Tìm biến đổi Z & ROC của:

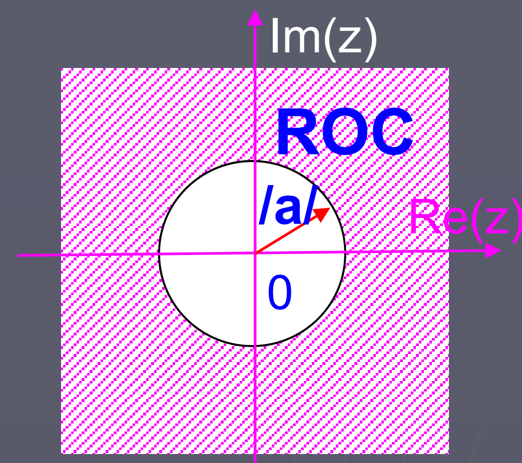
$$x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$$ với $|a| < |b|$

Giải:

Theo ví dụ 3.2 và 3.3, ta có:

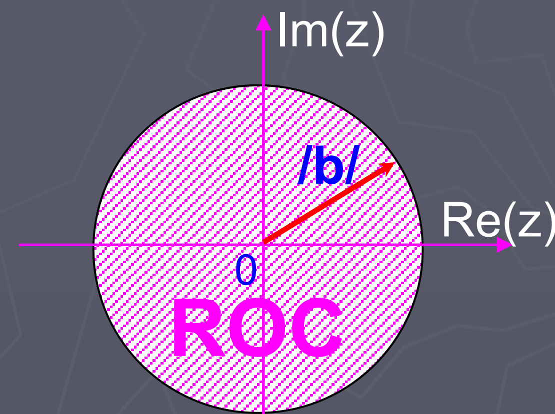
$$a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$R_1 : |z| > |a|$$



$$-b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1-bz^{-1}}$$

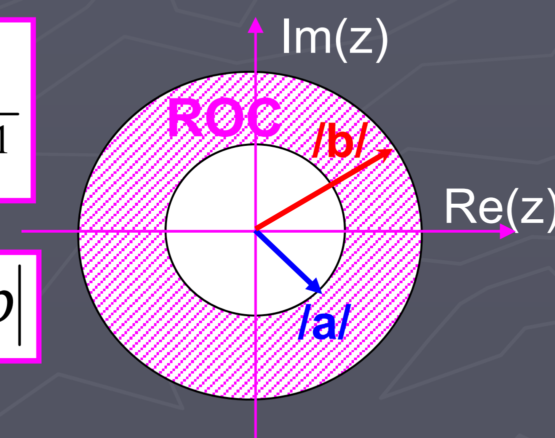
$$R_2 : |z| < |b|$$



Áp dụng tính chất tuyến tính, ta được:

$$a^n u(n) - b^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} \boxed{\frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}}$$

$$\boxed{R = R_1 \cap R_2 : |a| < |z| < |b|}$$



Bài tập

- 1. Tìm biến đổi Z & ROC của:

$$x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(n)$$

b) Dịch theo thời gian

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x(n-n_0) \xleftrightarrow{Z} Z^{-n_0} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}'$

Với: $\mathrm{R}' = \begin{cases} \mathrm{R} \text{ trừ giá trị } z=0, \text{ khi } n_0>0 \\ \mathrm{R} \text{ trừ giá trị } z=\infty, \text{ khi } n_0<0 \end{cases}$

Ví dụ 3.5: Tìm biến đổi Z & ROC của: $x(n) = a^n u(n-1)$

Giải:

Theo ví dụ 3.2: $a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} \dfrac{1}{1-az^{-1}}; \mathrm{ROC}: |z| > |a|$

Vậy: $x(n) = a^n u(n-1) = a.a^{n-1} u(n-1)$ $\xleftrightarrow{Z} \dfrac{az^{-1}}{1-az^{-1}} : |z| > |a|$

c) Nhân với hàm mũ a^n

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $a^n x(n) \xleftrightarrow{Z} X(a^{-1}z) \quad : \mathrm{ROC} = |a|\mathrm{R}$

Ví dụ 3.6: Xét biến đổi Z & ROC của:

$x_1(n) = a^n u(n)$ và $x_2(n) = u(n)$

Giải:

$$\boldsymbol{x(n) = u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n) z^{-n}} = \frac{1}{1 - z^{-1}}; R: |z| > 1$$

$$\Rightarrow a^n x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(a^{-1}z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; R': |z| > |a|$$

d) Đạo hàm X(z) theo z

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $nx(n) \xleftrightarrow{Z} -z\dfrac{dX(z)}{dz} \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Ví dụ 3.7: Tìm biến đổi Z & ROC của: $g(n) = na^n u(n)$

Giải:

Theo ví dụ

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}; \mathrm{ROC}: |z| > |a|$$

$$\Rightarrow \mathbf{g(n) = nx(n) \xleftrightarrow{Z} G(z) = -z\frac{dX(z)}{dz}} \boxed{= \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} : |z| > |a|}$$

e) Đảo biến số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x(-n) \xleftrightarrow{Z} X(z^{-1}) \quad : \mathrm{ROC} = 1/R$

- **Ví dụ 3.8**: Tìm biến đổi Z & ROC của: $y(n) = (1/a)^n u(-n)$

- **Giải:** Theo ví dụ 3.2:

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} ; \mathrm{ROC} : |z| > |a|$$

$$\Rightarrow y(n) = (1/a)^n u(-n) = a^{-n} u(-n) = x(-n)$$

Áp dụng tính chất đảo biến số:

$$\mathrm{Y(z) = X(z^{-1})} = \frac{1}{1 - \mathrm{a}\left(\mathrm{z}^{-1}\right)^{-1}} = \boxed{\frac{1}{1 - \mathrm{az}} ; \mathrm{ROC} : |\mathrm{z}| < 1/|\mathrm{a}|}$$

f) Liên hiệp phức

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}$

Thì: $x^*(n) \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*) \quad : \mathrm{ROC} = R$

g) Tích 2 dãy

Nếu: $\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_2 \end{cases}$

Thì: $x_1(n)x_2(n) \xleftrightarrow{Z} \frac{1}{2\pi} \oint_c X_1(v) X_1\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1}\, \mathrm{d}v : \mathrm{ROC} = \mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2$

h) Định lý giá trị đầu

Nếu x(n) nhân quả thì: $x(0) = \lim_{Z \to \infty} \mathrm{X}(z)$

► **Ví dụ 3.9**: Tìm **x(0)**, biết $\mathbf{X(z)=e^{1/z}}$ và x(n) nhân quả

► **Giải:**

Theo định lý giá trị đầu:

$$x(0) = \lim_{Z\to\infty} X(z) = \lim_{Z\to\infty} e^{1/z} = 1$$

i) Tổng chập 2 dãy

Nếu:
$$\begin{cases} x_1(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad : ROC = R_1 \\ x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad : ROC = R_2 \end{cases}$$

Thì: $x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{Z} X_1(z)X_2(z)$;ROC có chứa $R_1 \cap R_2$

► **Ví dụ 3.10** : Tìm **y(n) = x(n)*h(n)**, biết:

$$x(n) = (0.5)^n u(n) \qquad h(n) = -2^n u(-n-1)$$

► **Giải**

$$x(n) = (0.5)^n u(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}; ROC: |z| > 0.5$$

$$h(n) = -2^n u(-n-1) \xleftrightarrow{Z} H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}; ROC: |z| < 2$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})} \cdot \frac{1}{(1-2z^{-1})}; ROC: 0{,}5 < |z| < 2$$

Z^{-1} $\updownarrow$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-0.5z^{-1})} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(1-2z^{-1})}; ROC: 0{,}5 < |z| < 2$$

$$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) = -\frac{1}{3}(0.5)^n u(n) - \frac{4}{3} 2^n u(-n-1)}$$

TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI Z

$x(n)$	$X(z)$	R
$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	Chứa $\mathbf{R_1} \cap \mathbf{R_2}$
$x(n-n_0)$	$Z^{-n0}\,X(z)$	R'
$a^n\,x(n)$	$X(a^{-1}z)$	R
$nx(n)$	$-z\,dX(z)/dz$	R
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	1/R
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	$R_1 \cap R_2$
$x(n)$ nhân quả	$x(0)=\lim X(z \to \infty)$	
$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)X_2(z)$	Chứa $\mathbf{R_1} \cap \mathbf{R_2}$

BIẾN ĐỔI Z MỘT SỐ DÃY THÔNG DỤNG

x(n)	X(z)	ROC
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| >1$
$-u(-n-1)$		$\|z\| <1$
$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u(-n-1)$		$\|z\| < \|a\|$
$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^n u(-n-1)$		$\|z\| < \|a\|$
$\cos(\omega_o n)u(n)$	$(1-z^{-1}\cos\omega_o)/(1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2})$	$\|z\| >1$
$\sin(\omega_o n)u(n)$	$(z^{-1}\sin\omega_o)/(1-2z^{-1}\cos\omega_o+z^{-2})$	$\|z\| >1$

3.1.4 GIẢN ĐỒ CỰC - KHÔNG

- Điểm cực của X(z) là các giá trị z tại đó X(z) = ∞,
- Điểm không của X(z) là các giá trị z tại đó X(z) = 0.

$$X(z) = \frac{D(z)}{B(z)} = \frac{G(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)...(z-z_L)}{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)...(z-p_M)} = G\frac{\prod_{k=1}^{L}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{M}(z-p_k)}$$

•G là độ lợi
•z1, z2, z3,… được gọi là các điểm không (zero)
•p1, p2, p3,… là các điểm cực (pole)

•L là bậc của đa thức tử số;
•M là bậc của đa thức mẫu.
• X(z) là hàm hữu tỉ đúng khi L≤ M

3.1.4 GIẢN ĐỒ CỰC - KHÔNG

- Khi các tín hiệu x(n) hay đáp ứng xung h(n) là thực (có trị số thực), các không và các cực là thực hoặc là các đôi liên hiệp phức.
- Để biểu diễn trên đồ thị, điểm cực được đánh dấu bằng x và điểm không được đánh dấu bằng o.

Ví dụ 3.11: Xác định điểm cực và điểm không của tín hiệu

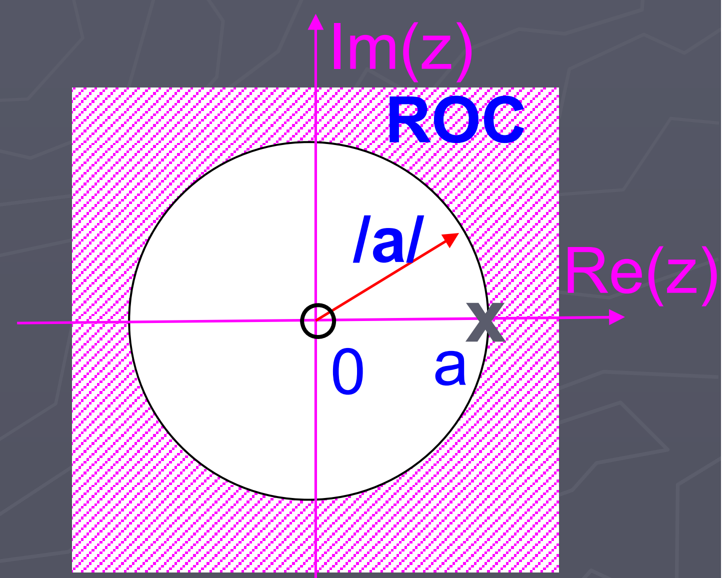
$x(n) = a^n u(n),\ a > 0$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

ROC : |z| > a

$\Rightarrow$ X(z) có một điểm cực $p_1 = a$

$\Rightarrow$ và một điểm không $z_1 = 0$



Chương 3: BIẾN ĐỔI Z VÀ ỨNG DỤNG VÀO HỆ THỐNG LTI RỜI RẠC

3.1 BIẾN ĐỔI Z

3.2 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

3.3 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI TRONG MIỀN Z

3.2 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

3.2.1 CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \quad (*)$$

Với **C** - đường cong khép kín bao quanh gốc tọa độ trong mặt phẳng phức, nằm trong miền hội tụ của X(z), theo chiều (+) ngược chiều kim đồng hồ

- ✓ Trên thực tế, biểu thức (*) ít được sử dụng do tính chất phức tạp của phép lấy tích phân vòng
- *Các phương pháp biến đổi Z ngược:*
  - ***Thặng dư***
  - ***Khai triển thành chuỗi luỹ thừa***
  - ***Phân tích thành tổng các phân thức tối giản***

2.2.2 PHƯƠNG PHÁP THẶNG DƯ

a) Khái niệm thặng dư của 1 hàm tại điểm cực:

- Thặng dư tại điểm cực p_i bội **r** của **F(z)** được định nghĩa:

$$\operatorname{Res}\left[F(z)\right]_{Z=p_i} = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{(r-1)}}{dz^{(r-1)}}\left[F(z)(z-p_i)^r\right]_{Z=p_i}$$

- Thặng dư tại điểm cực đơn p_i của **F(z)** được định nghĩa:

$$\operatorname{Res}\left[F(z)\right]_{Z=p_i} = \left[F(z)(z-p_i)\right]_{Z=p_i}$$

b) Phương pháp:

- Theo lý thuyết thặng dư, biểu thức biến đổi Z ngược theo tích phân vòng (*) được xác định bằng tổng các thặng dư tại tất cả các điểm cực của hàm $X(z)z^{n-1}$:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum_i \mathrm{Res}\left[X(z)z^{n-1}\right]_{Z=p_i}$$

Trong đó:

- **p_i** – các điểm cực của $X(z)z^{n-1}$ nằm trong đường cong C
- **$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=pi}$** - thặng dư của $X(z)z^{n-1}$ tại điểm cực z_{ci}
- ***Tổng cộng các thặng dư tại tất cả các điểm cực, ta được* x(n)**

<u>Ví dụ 3.12</u> Tìm biến đổi Z ngược của:

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)}$$

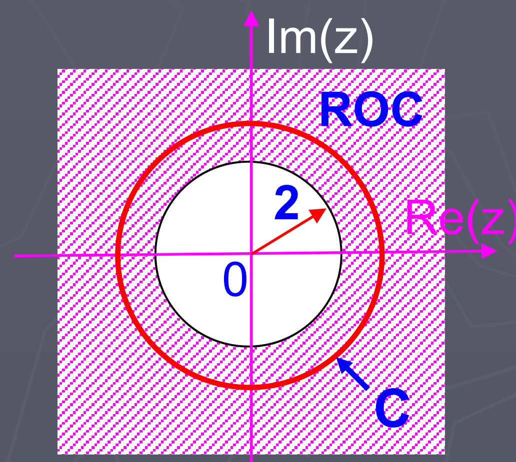
<u>Giải:</u>

Thay X(z) vào (*), ta được

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{z}{(z-2)}z^{n-1}dz = \sum \mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right]$$

- **Chọn C là đường cong khép kín nằm bên ngoài vòng tròn có bán kính là 2**

- **n≥0** $X(z)z^{n-1} = \dfrac{z^n}{(z-2)}$ có 1 điểm cực đơn p_1=2



Thặng dư tại p_1=2:

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right]_{Z=2} = \left[\frac{z^n}{(z-2)}(z-2)\right]_{Z=2} = 2^n$$

- **n<0:** $X(z)z^{n-1} = \dfrac{1}{(z-2)z^{-n}} = \dfrac{1}{(z-2)z^m}$ p_1=2 đơn, p_2=0 bội m

Với: p_1=2 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{1}{(z-2)z^m}\right]_{Z=2} = \left[\dfrac{1}{(z-2)z^m}(z-2)\right]_{Z=2} = \dfrac{1}{2^m}$

Với: p_2=0 bội m:

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-2)z^m}\right]_{Z=0} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[\frac{1}{(z-2)z^m}z^m\right]_{Z=0}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{(m-1)!(-1)^{m-1}}{(-2)^m}\right] = -\frac{1}{2^m}$$

Vậy, với **n<0:** $$\sum \operatorname{Res}\left[\frac{z^n}{(z-2)}\right] = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^m} = 0$$

suy ra $\boxed{x(n) = 2^n : n \geq 0}$ hay $\boxed{x(n) = 2^n u(n)}$

3.2.3 PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN THÀNH CHUỖI LUỸ THỪA

Giả thiết **X(z)** có thể khai triển: $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} \quad (*)$$

Theo định nghĩa biến đổi Z $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \quad (**)$$

Đồng nhất (*) & (**), rút ra: $$\boxed{x(n) = a_n}$$

Ví dụ3.13: : Tìm x(n) biết: $$X(z) = (z^2 + 1)(1 - 2z^{-1} + 3z^{-2})$$

$$ROC: 0 < |z| < \infty$$

Giải:

Khai triển X(z) ta được:

$$X(z) = z^2 - 2z + 4 - 2z^{-1} + 3z^{-2} = \sum_{n=-2}^{2} x(n) z^{-n}$$

Suy ra: $$\boxed{x(n) = \{1,-2,\underset{\uparrow}{4},-2,3\}}$$

Ví dụ 3.14: Tìm x(n) biết:

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} : |z| > 2$$

Giải:

Do ROC của X(z) là **/z/>2**, nên **x(n)** sẽ là dãy nhân quả và sẽ được khai triển thành chuỗi có dạng:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots \qquad (*)$$

Để có dạng (*), thực hiện phép chia đa thức dưới đây:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-2z^{-1} \\ \hline
\underline{1-2z^{-1}} & 1+2z^{-1}+2^2z^{-2}+\cdots \\
\quad 2z^{-1} & \\
\quad \underline{2z^{-1}-2^2z^{-2}} & \\
\qquad 2^2z^{-2} & \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

$$\boxed{\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n}}$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n) = 2^n : n \geq 0 \equiv 2^n u(n)}$$

Ví dụ 3.15: Tìm x(n) biết:

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} : |z| < 2$$

Giải:

Do ROC của X(z) là **/z/<2**, nên **x(n)** sẽ là dãy phản nhân quả và sẽ được khai triển thành chuỗi có dạng:

$$X(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^{-n} = a_{-1}z^1 + a_{-2}z^2 + a_{-3}z^3 + \cdots \quad (**)$$

Để có dạng (**), thực hiện phép chia đa thức dưới đây:

$$\begin{array}{l|l}
1 & -2^1 z^{-1} + 1 \\ \hline
-\;1 - 2^{-1}z^1 & -2^{-1}z^1 - 2^{-2}z^2 - 2^{-3}z^3 + \cdots \\ \cline{1-1}
\qquad 2^{-1}z^1 & \\
\quad -\; 2^{-1}z^1 - 2^{-2}z^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 2^{-2}z^2 & \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} -2^n z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n) = -2^n : n < 0 \equiv -2^n u(-n-1)$$

3.2.4 PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN PHÂN SỐ TỪNG PHẦN

Xét **X(z)** là phân thức hữu tỉ có dạng:

$$X(z)=\frac{D(z)}{B(z)}=\frac{d_K z^K+d_{K-1}z^{K-1}+\ldots+d_1 z+d_0}{b_N z^N+b_{N-1}z^{N-1}+\ldots+b_1 z+b_0}$$ với: $K, N>0$

- Nếu **K>N**, thực hiện phép chia đa thức, ta được:

$$X(z)=\frac{D(z)}{B(z)}=C(z)+\frac{A(z)}{B(z)}=C(z)+\frac{a_M z^M+a_{M-1}z^{M-1}\ldots+a_1 z+a_0}{b_N z^N+b_{N-1}z^{N-1}+\ldots+b_1 z+b_0}$$

Ta được C(z) là đa thức và phân thức A(z)/B(z) có bậc **M≤N**

- Nếu **K≤N**, thì X(z) có dạng giống phân thức A(z)/B(z)

Việc lấy biến đổi Z ngược đa thức C(z) là đơn giản, vấn đề phức tạp là tìm biến đổi Z ngược A(z)/B(z) có bậc M≤N

Xét **X(z)/z** là phân thức hữu tỉ có bậc **M≤N** :

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{a_M z^M+a_{M-1}z^{M-1}\ldots+a_1 z+a_0}{b_N z^N+b_{N-1}z^{N-1}+\ldots+b_1 z+b_0}$$

Xét đén các điểm cực của **X(z)/z**, hay nghiệm của B(z) là ***đơn, bội và phức liên hiệp***

a) Xét X(z)/z có các điểm cực đơn: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_N$,

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z)}{b_N(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

Theo lý thuyết hàm hữu tỉ, **X(z)/z** phân tích

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{K_1}{(z-p_1)}+\frac{K_2}{(z-p_2)}+\cdots+\frac{K_N}{(z-p_N)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{K_i}{(z-p_i)}$$

Với hệ số K_i xác định bởi:

$$K_i=\frac{X(z)}{z}(z-p_i)\Big|_{Z=p_i}$$

hay

$$K_i=\frac{A(z)}{B'(z)}\Big|_{Z=p_i}$$

Suy ra **X(z)** có biểu thức:

$$X(z) = \frac{K_1}{(1 - p_1 z^{-1})} + \frac{K_2}{(1 - p_2 z^{-1})} + \cdots + \frac{K_N}{(1 - p_N z^{-1})} = \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{(1 - p_i z^{-1})}$$

Xét: $X_i(z) = \dfrac{K_i}{(1 - p_i z^{-1})}$

- Nếu ROC: **/z/ > /p$_i$/** $\Rightarrow x_i(n) = K_i (p_i)^n u(n)$
- Nếu ROC: **/z/ < /p$_i$/** $\Rightarrow x_i(n) = -K_i (p_i)^n u(-n-1)$
- **Vậy:** $x(n) = \sum_{i=1}^{N} x_i(n)$

<u>Ví dụ 3.16</u>: Tìm x(n) biết: $X(z) = \dfrac{2z^2 - 5z}{z^2 - 5z + 6}$

với các miền hội tụ: **a) /z/>3, b) /z/<2, c) 2</z/<3**

<u>Giải</u>:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z-5}{z^2-5z+6} = \frac{2z-5}{(z-2)(z-3)} = \frac{K_1}{(z-2)} + \frac{K_2}{(z-3)}$$

Với các hệ số được tính bởi:

$$K_1 = \frac{X(z)}{z}(z-2)\bigg|_{Z=2} = \frac{2z-5}{(z-3)}\bigg|_{Z=2} = 1$$

$$K_2 = \frac{X(z)}{z}(z-3)\bigg|_{Z=3} = \frac{2z-5}{(z-2)}\bigg|_{Z=3} = 1$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-3)} \Rightarrow X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

Với các miền hội tụ:

a) /z/ > 3 :

$$x(n) = 2^n u(n) + 3^n u(n)$$

b) /z/ < 2 :

$$x(n) = -2^n u(-n-1) - 3^n u(-n-1)$$

c) 2</z/<3 :

$$\mathrm{x(n) = 2^n u(n) - 3^n u(-n-1)}$$

b) Xét X(z)/z có điểm cực p_1 bội r và các điểm cực đơn: $p_{(r+1)},\dots,p_N$,

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{A(z)}{b_N(z-p_1)^r(z-p_{(r+1)})\cdots(z-p_N)}$$

Theo lý thuyết hàm hữu tỉ, **X(z)/z** phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-p_1)}+\frac{K_2}{(z-p_1)^2}+\cdots+\frac{K_r}{(z-p_1)^r}+$$

$$+\frac{K_{r+1}}{(z-p_{(r+1)})}+\cdots+\frac{K_N}{(z-p_N)}=\sum_{i=1}^{r}\frac{K_i}{(z-p_1)^i}+\sum_{l=r+1}^{N}\frac{K_l}{(z-p_l)}$$

Với hệ số K_i xác định bởi:

$$K_i=\frac{1}{(r-i)!}\frac{d^{(r-i)}}{dz^{(r-i)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-p_1)^r\right]\Bigg|_{Z=p_1}$$

$$K_l=\frac{X(z)}{z}(z-p_l)\Bigg|_{Z=p_l}$$

Với giả thiết ROC của X(z): **$|z| > \max\{ |p_i| \}$: $i=1 \div N$,** biến đổi Z ngược của thành phần **$K_i/(z-p_i)^r$** sẽ là:

$$\frac{z}{(z-a)^i} \xleftrightarrow{z^{-1}} \frac{n(n-1)\ldots(n-i+2)a^{n-i+1}}{(i-1)!}u(n)$$

Vậy ta có biểu thức biến đổi Z ngược là:

$$\boldsymbol{x(n) = \sum_{i=1}^{r} K_i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+2)a^{n-i+1}}{(i-1)!}u(n) + \sum_{l=r+1}^{N} K_l (p_l)^n u(n)}$$

Ví dụ 3.17: Tìm x(n) biết: $X(z) = \dfrac{2z^3 - 5z^2 + 4z}{(z-2)^2(z-1)}$ $ROC: |z| > 2$

Giải:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 - 5z + 4}{(z-2)^2(z-1)} = \frac{K_1}{(z-2)} + \frac{K_2}{(z-2)^2} + \frac{K_3}{(z-1)}$$

Với các hệ số được tính bởi:

$$K_1 = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{(2-1)}}{dz^{(2-1)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-2)^2\right]\Bigg|_{Z=2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{2z^2-5z+4}{(z-1)}\right]\Bigg|_{Z=2} = 1$$

$$K_2 = \frac{1}{(2-2)!}\frac{d^{(2-2)}}{dz^{(2-2)}}\left[\frac{X(z)}{z}(z-2)^2\right]\Bigg|_{Z=2} = \frac{2z^2-5z+4}{(z-1)}\Bigg|_{Z=2} = 2$$

$$K_3 = \frac{X(z)}{z}(z-1)\Bigg|_{Z=1} = \frac{2z^2-5z+4}{(z-2)^2}\Bigg|_{Z=1} = 1$$

Vậy **X(z)/z** có biểu thức

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)} + \frac{2}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-1)}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{(1-2z^{-1})} + \frac{2z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} + \frac{1}{(1-z^{-1})}$$

$$ROC: |z| > 2$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n) = 2^n u(n) + n2^n u(n) + u(n)}$$

c) Xét X(z)/z có cặp điểm cực p_1 và p^*_1 phức liên hiệp, các điểm cực còn lại đơn: $p_3,\ldots,p_N$,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{A(z)}{b_N(z-p_1)(z-p_1^*)(z-p_3)\cdots(z-p_N)}$$

X(z)/z được phân tích thành:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{K_1}{(z-p_1)} + \frac{K_2}{(z-p_1^*)} + \frac{K_3}{(z-p_3)} + \cdots + \frac{K_N}{(z-p_N)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{K_1}{(z-p_1)} + \frac{K_2}{(z-p_1^*)} + \sum_{i=3}^{N}\frac{K_i}{(z-p_i)}$$

Với các hệ số **K_1, K_i** được tính giống điểm cực đơn:

$$K_i = \frac{X(z)}{z}(z-p_i)\Big|_{Z=p_i} \quad : i = 1 \div N$$

Do các hệ số **A(z), B(z)** là thực, nên **$K_2=K_1^*$**

Xét : $$\frac{X_1(z)}{z}=\frac{K_1}{(z-p_1)}+\frac{K_1{}^*}{(z-p_1^*)}$$

$$\Rightarrow X_1(z)=\frac{K_1}{(1-p_1z^{-1})}+\frac{K_1{}^*}{(1-p_1^*z^{-1})}$$

Nếu gọi: $$\begin{cases} K_1=|K_1|e^{j\beta} \\ p_1=|p_1|e^{j\alpha} \end{cases}$$

Và giả thiết ROC: **$|z|>\max\{|p_i|\}$**:

$$\Rightarrow x_1(n)=\left[K_1(p_1)^n+K_1^*\left(p_1^*\right)^n\right]u(n)$$

$$=2|K_1||p_1|^n\cos(n\alpha+\beta)u(n)$$

Vậy:

$$x(n)=\left\{2|K_1||p_1|^n\cos(n\alpha+\beta)+\sum_{i=3}^{N}K_i\left(p_i\right)^n\right\}u(n)$$

Ví dụ 3.18: Tìm x(n) biết: $X(z) = \dfrac{-z}{(z^2-2z+2)(z-1)} : |z| > \sqrt{2}$

Giải:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-1}{(z^2-2z+2)(z-1)} = \frac{-1}{[z-(1+j)][z-(1-j)](z-1)}$$

$$= \frac{K_1}{[z-(1+j)]} + \frac{K_1^*}{[z-(1-j)]} + \frac{K_3}{(z-1)}$$

$$K_1 = \left.\frac{-1}{[z-(1-j)](z-1)}\right|_{Z=1+j} = \frac{1}{2} \qquad K_3 = \left.\frac{-1}{(z^2-2z+2)}\right|_{Z=1} = -1$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1/2}{[1-(1+j)z^{-1}]} + \frac{1/2}{[1-(1-j)z^{-1}]} + \frac{-1}{(1-z^{-1})} \qquad |z| > \sqrt{2}$$

$$\boxed{\Rightarrow x(n) = (\sqrt{2})^n \cos(n\frac{\pi}{4})u(n) - u(n)}$$

Chương 3: BIẾN ĐỔI Z VÀ ỨNG DỤNG VÀO HỆ THỐNG LTI RỜI RẠC

3.1 BIẾN ĐỔI Z

3.2 BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

3.3 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI TRONG MIỀN Z

3.3 PHÂN TÍCH HỆ THỐNG LTI TRONG MIỀN Z

3.3.1 Hàm truyền đạt

Miền n: $x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n)=x(n)*h(n)$

$\updownarrow Z$

Miền Z: $X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z)=X(z)H(z)$

$h(n) \overset{Z}{\longleftrightarrow} H(z)$: gọi là hàm truyền đạt $\qquad H(z)=Y(z)/X(z)$

2.3.2 Hàm truyền đạt được biểu diễn theo các hệ số PTSP

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_k x(n-r) \overset{Z}{\longleftrightarrow} Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_k z^{-r}$$

$$\boxed{\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{r=0}^{M} \mathbf{b_r z^{-r}} \Big/ \sum_{k=0}^{N} \mathbf{a_k z^{-k}}}$$

Từ hàm truyền H(z) có thể suy ra:

- Đáp ứng xung h(n).
- Phương trình hiệu số của đáp ứng xung.
- Phương trình hiệu số tín hiệu vào ra.
- Sơ đồ khối của hệ thống.
- Giản đồ cực không.
- Đáp ứng tần số.

Và ngược lại ta có thể tính H(z) và các dạng còn lại khi biết 1 dạng bất kỳ ở trên.

Ví dụ 3.19: Tìm H(z) và h(n) của hệ thống nhân quả cho bởi:

Giải: **y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 2x(n) - 5x(n-1)**

Lấy biến đổi Z hai vế PTSP và áp dụng tính chất dịch theo t/g:

$$Y(z)\left[1-5z^{-1}+6z^{-2}\right]=X(z)\left[2-5z^{-1}\right]$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2-5z^{-1}}{1-5z^{-1}+6z^{-2}}=\frac{2z^2-5z}{z^2-5z+6}$$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{2z-5}{(z-2)(z-3)}=\frac{K_1}{(z-2)}+\frac{K_2}{(z-3)}$$

$$K_1=\left.\frac{2z-5}{(z-3)}\right|_{z=2}=1 \qquad K_2=\left.\frac{2z-5}{(z-2)}\right|_{z=3}=1$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1}{(1-2z^{-1})}+\frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

Do hệ thống nhân quả nên: $\boxed{h(n) = (2^n + 3^n)\, u(n)}$

3.3.3 Hàm truyền đạt của các hệ thống ghép nối

a. Ghép nối tiếp

- Miền n:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \longrightarrow \boxed{h_2(n)} \longrightarrow y(n)$$

$$\equiv$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)=h_1(n)*h_2(n)} \longrightarrow y(n)$$

Theo tính chất tổng chập: $h_1(n)*h_2(n) \xleftrightarrow{Z} H_1(z)H_2(z)$

- Miền Z:

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H_1(z)} \longrightarrow \boxed{H_2(z)} \longrightarrow Y(z)$$

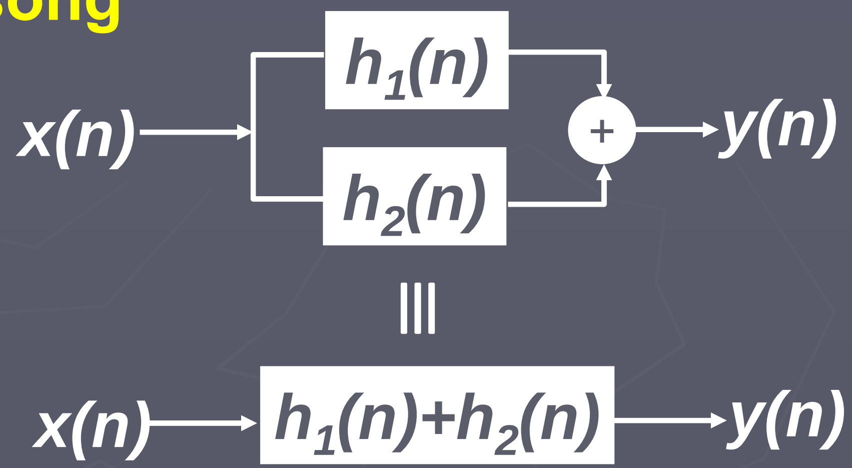
$$\equiv$$

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)=H_1(z)H_2(z)} \longrightarrow Y(z)$$

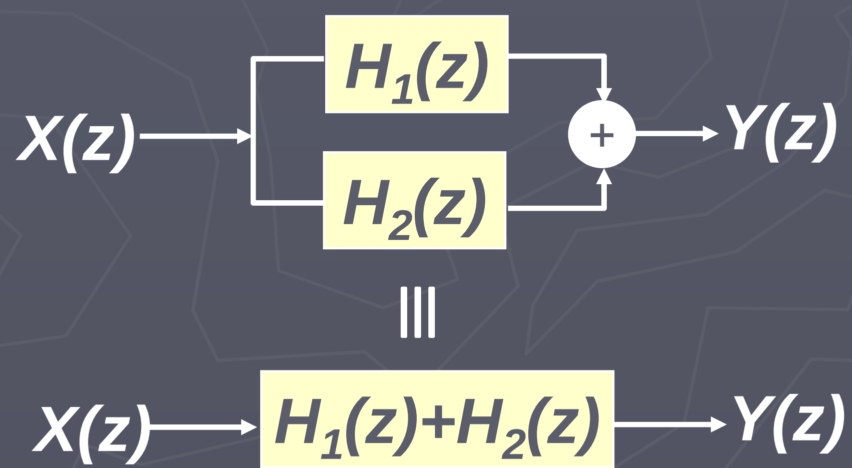
3.4.3 Hàm truyền đạt của các hệ thống ghép nối (tt)

b. Ghép song song

- Miền n:



- Miền Z:



3.3.4 Tính nhân quả và ổn định của hệ LTI rời rạc

a. Tính nhân quả

- Miền n: **Hệ thống LTI là nhân quả ⇔ h(n) = 0 : n<0**
- Miền Z:

$$H(z) = \frac{A(z)}{b_N(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_N)}$$

Do **h(n)** là tín hiệu nhân quả, nên miền hội tụ **H(z)** sẽ là:

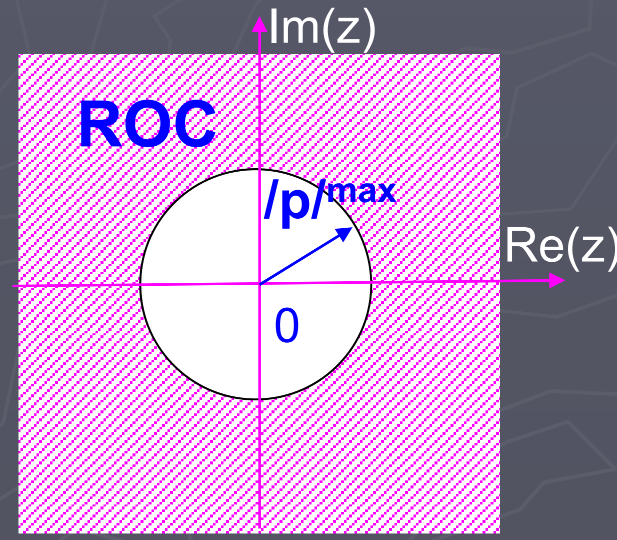
$$|z| > |p|^{\max} = \max\{|p_1|, |p_2|, \cdots, |p_N|\}$$

Hệ thống LTI là nhân quả

⇕

ROC của H(z) là:

$$|z| > |p|^{\max} = \max\{|p_1|, |p_2|, \cdots, |p_N|\}$$



2.4.4 Tính nhân quả và ổn định của hệ TTBB rời rạc (tt)

b. Tính ổn định

- Miền n: **Hệ thống TTBB là ổn định** $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (*)$
- Miền Z:

$$|H(z)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) z^{-n}| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\right| |z^{-n}|$$

$$\Rightarrow |H(z)| \le \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)\right| \quad \text{: khi } |z| = 1$$

Theo đ/k ổn định (*), nhận thấy **H(z)** cũng sẽ hội tụ với **|z|=1**

Hệ thống TTBB là ổn định $\Leftrightarrow$ **ROC của H(z) có chứa |z|=1**

c. Tính nhân quả và ổn định

Hệ thống TTBB là nhân quả $\Leftrightarrow$ ROC của H(z) là:

$$|z| > |p|^{\max} = \max\{|p_1|, |p_2|, \cdots, |p_N|\}$$

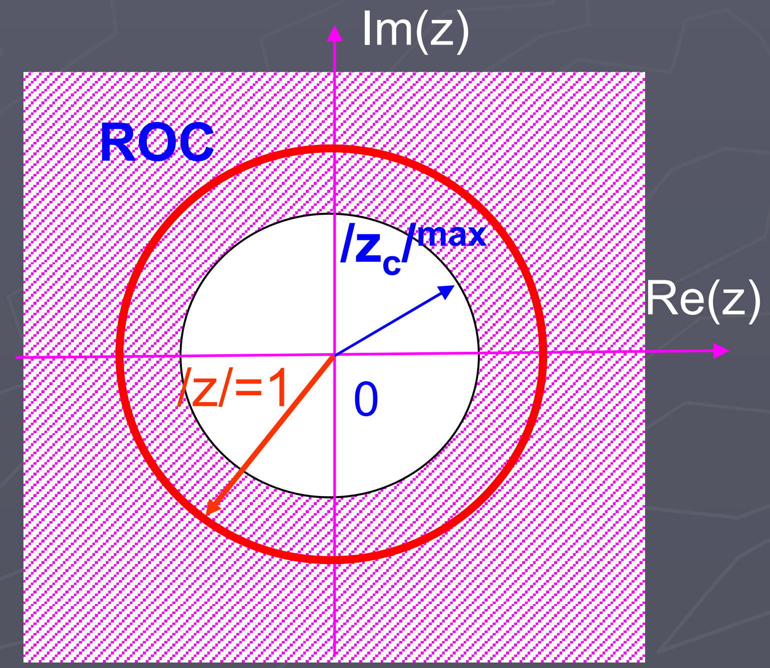
Hệ thống TTBB là ổn định $\Leftrightarrow$ ROC của H(z) có chứa /z/=1

Hệ thống TTBB là nhân quả và ổn định

$\Updownarrow$

ROC của H(z) là:

$$|z| > |p|^{\max} \quad \text{và} \quad |p|^{\max} < 1$$



Ví dụ 3.20: Tìm h(n) của hệ thống, biết:

$$H(z) = \frac{4z^2 - 5z}{2z^2 - 5z + 2}$$

a. Để hệ thống là nhân quả

b. Để hệ thống là ổn định

c. Để hệ thống là nhân quả và ổn định

Giải:

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{4z-5}{2(z-1/2)(z-2)} = \frac{K_1}{(z-1/2)} + \frac{K_2}{(z-2)} = \frac{1}{(z-1/2)} + \frac{1}{(z-2)}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{\left[1-(1/2)z^{-1}\right]} + \frac{1}{(1-2z^{-1})}$$

a. Hệ thống nhân quả (/z/>2): $h(n)=[(1/2)^n + 2^n]\, u(n)$

b. Hệ thống ổn định (1/2</z/<2): $h(n)=(1/2)^n u(n) - 2^n u(-n-1)$

c. Hệ thống nhân quả và ổn định:

ROC: /z/>2 không thể chứa /z/=1 $\Rightarrow$ không tồn tại h(n)

2.5 GIẢI PTSP DÙNG BIẾN ĐỔI Z 1 PHÍA

$$y(n-1) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{Z} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-1)z^{-n} = y(-1) + y(0)z^{-1} + y(1)z^{-2} + \cdots$$

$$= y(-1) + z^{-1}\left[y(0) + y(1)z^{-1} + \cdots\right]$$

$$= y(-1) + z^{-1}Y(z)$$

$$y(n-2) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{Z} \sum_{n=0}^{\infty} y(n-2)z^{-n} = y(-2) + y(-1)z^{-1} + y(0)z^{-2} + \cdots$$

$$= y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}\left[y(0) + y(1)z^{-1} + \cdots\right]$$

$$= y(-2) + y(-1)z^{-1} + z^{-2}Y(z)$$

Tổng quát, biến đổi Z 1 phía của y(n-k):

$$y(n-k) \xleftrightarrow[\text{1 phía}]{Z} z^{-k}Y(z) + \sum_{r=1}^{k} y(-r)z^{r-k}$$

Ví dụ 5.5.1: Hãy giải PTSP dùng biến đổi Z 1 phía

$y(n) - 3y(n-1) + 2y(n-2) = x(n) : n \geq 0$

biết: $x(n)=3^{n-2}u(n)$ và $y(-1)=-1/3$; $y(-2)= -4/9$

Giải:

Lấy biến đổi Z 1 phía hai vế PTSP:

$Y(z) - 3[y(-1)+z^{-1}Y(z)] + 2[y(-2)+y(-1)z^{-1}+z^{-2}Y(z)] = X(z)$

Thay $y(-1)=-1/3$; $y(-2)= -4/9$ và $X(z)=3^{-2}/(1-3z^{-1})$ vào (*), rút

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2}.\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(z-3)}$$

$$\Rightarrow Y(z) = -\frac{1}{2}.\frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(1-3z^{-1})}$$

$$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{2}\left[3^n - 1\right]u(n)$$

Chương 4:

TÍN HIỆU TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

Giảng viên: Ths. Đào Thị Thu Thủy

Chương 4:
TÍN HIỆU TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN

4.2 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC THỜI GIAN

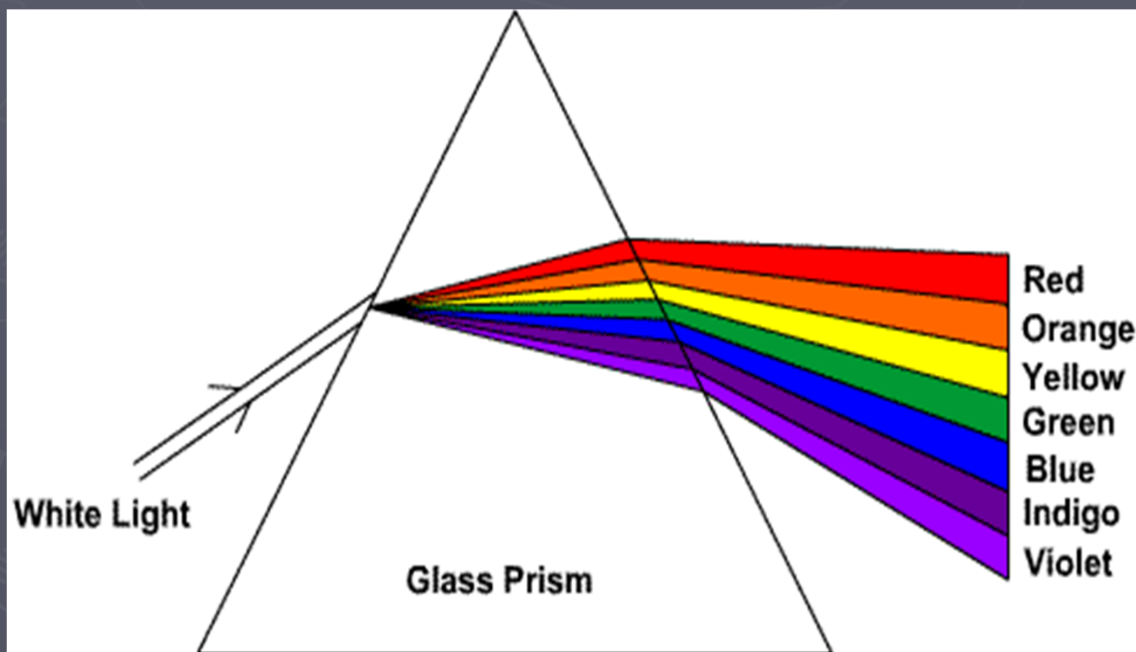
4.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

4.4 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & BIẾN ĐỔI Z

4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN

❖ Phân tích Fourier a một tín hiệu cho ta thấy cấu trúc tần số (phổ) của tín hiệu.

Ví dụ: Phổ của ánh sáng trắng :



4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN

4.1.1 Khai triển Fourier (chuỗi Fourier)

áp dụng cho tín hiệu tuần hoàn

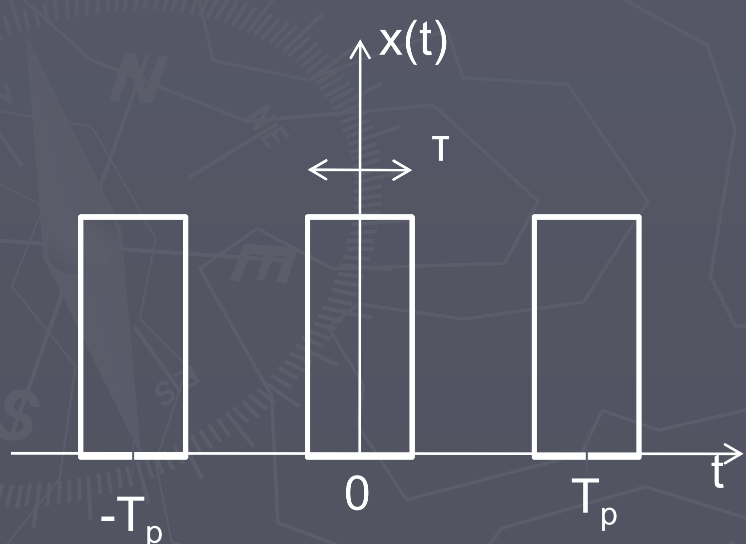
4.1.2 Biến đổi Fourier (tích phân Fourier)

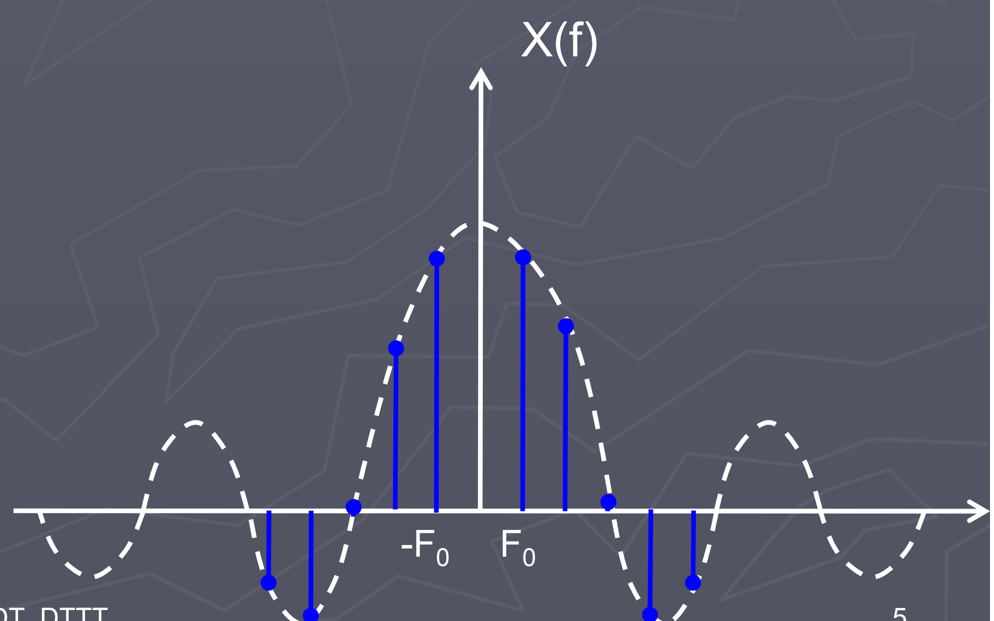
áp dụng cho các tín hiệu không tuần hoàn.

4.1.1 Khai triển Fourier

(tín hiệu tuần hoàn)

❖ Một dạng sóng tuần hoàn có thể phân thành vô hạn các thành phần sin có tần số là bội số nguyên của tần số tuần hoàn của dạng sóng.





4.1.1 Khai triển Fourier

- **x(t) tuần hoàn có chu kỳ T_o, tần số góc $\omega_o=2\pi/T_o$ và $f_o = 1/T_o$ có 3 dạng khai triển Fourier:**

  - Khai triển lượng giác
  - Dạng biên độ và pha
  - Dạng mũ phức (sin phức)

a. Khai triển lượng giác

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-To/2}^{To/2} x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-To/2}^{To/2} x(t)\cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-To/2}^{To/2} x(t)\sin n\omega_0 t dt$$

a_o: thành phần trung bình (một chiều).

$a_1\cos\omega_o t + b_1\sin\omega_o t$: thành phần căn bản hay gọi là hài thứ nhất.

$a_2\cos 2\omega_o t + b_2\sin 2\omega_o t$: hài thứ hai

$a_3\cos 3\omega_o t + b_3\sin 3\omega_o t$: hài thứ ba v.v..

b. Dạng biên độ và pha (phổ 1 bên)

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$c_o = a_o$$

$$c_n = \sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2} \quad n = 1, 2, 3\ldots$$

$$\varphi_n = \mathrm{arctg}\frac{-b_n}{a_n}$$

c_o: thành phần trung bình

$c_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$
: thành phần căn bản

$c_2\cos(2\omega_0 t + \varphi_2)$
: hài thứ 2

- **Phổ biên độ** là biến thiên của các hệ số gốc c_o, c_n theo tần số
- **Phổ pha** là biến thiên của pha ban đầu φ_n theo tần số

Phổ chỉ hiện hữu ở những tần số rời rạc $n\omega_o$ nên là **phổ rời rạc** hay **phổ vạch**

c. Dạng mũ phức (sin phức) (phổ 2 bên)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{jn\omega_o t}$$

$$X_0 = a_0 = c_0$$

$$X_n = \frac{a_n - jb_n}{2} = \frac{c_n}{2} e^{j\varphi_n}$$

✓ **Các hệ số của khai triển mũ phức là:**

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{-To/2}^{To/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

✓Công suất của tín hiệu tuần hoàn

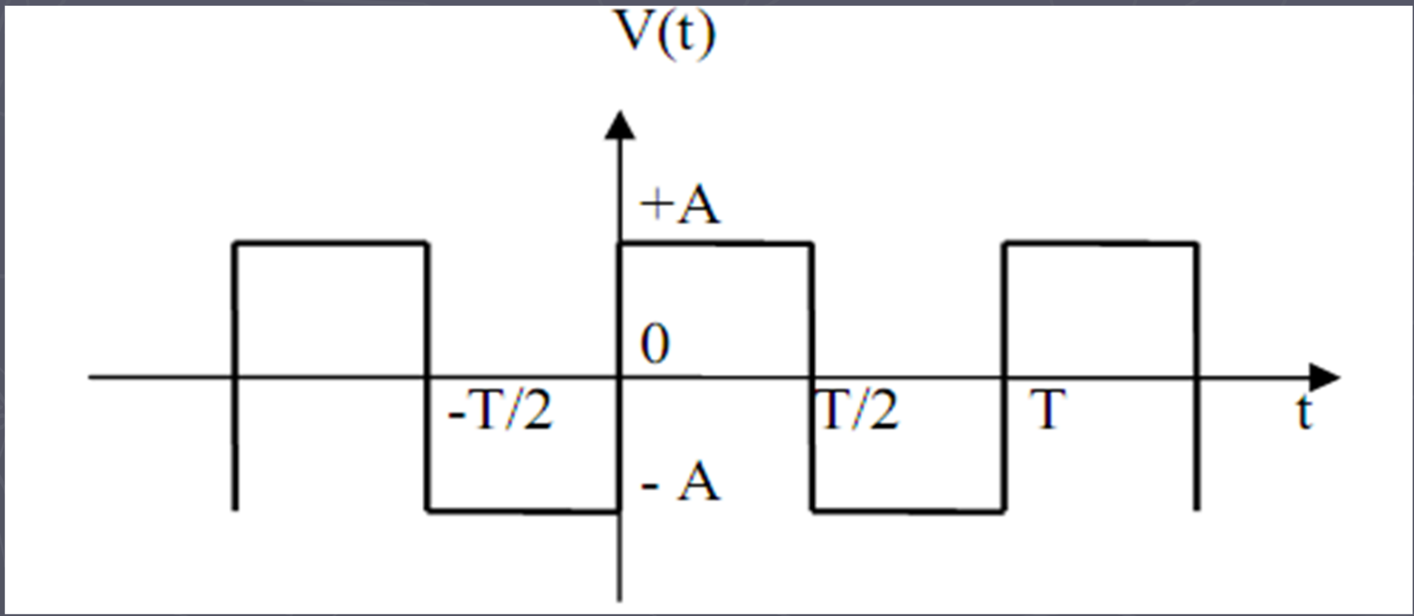
$$\boxed{P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| X_n \right|^2}$$

1. Tìm khai triển Fourier của dạng sóng vuông đối xứng. Vẽ phổ biên độ và phổ pha

a. Khai triển lượng giác

b. Khai triển Fourier dạng biên độ và pha

c. Dạng mũ phức



a. Các hài chẵn bằng không, các hài lẻ có biên độ giảm tương đối nhanh nhưng chỉ bằng không ở tần số lớn vô hạn

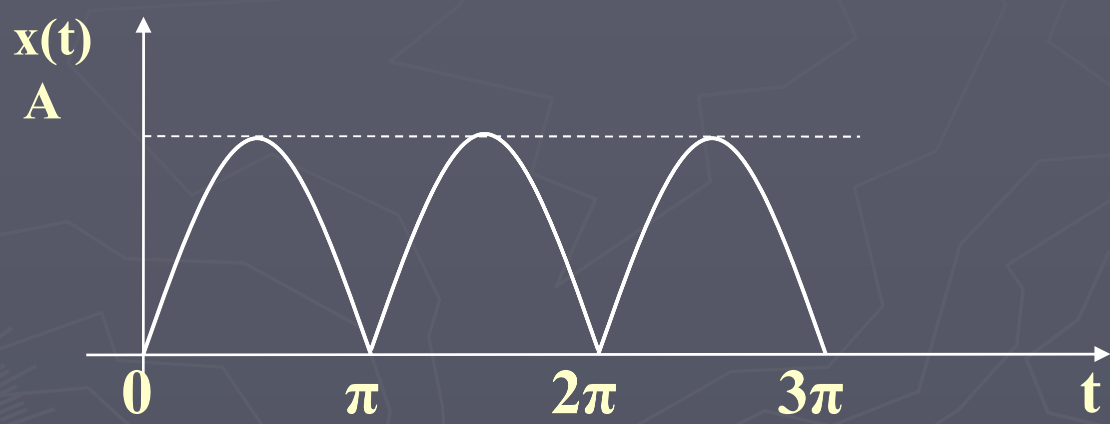
$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega_o t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_o t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_o t + ... \right)$$

b. Phổ biên độ và pha:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi}\frac{1}{(2n-1)}\cos\left[(2n-1)\omega_o t - 90^o \right]$$

2. Tìm khai triển Fourier của dạng sóng sin chỉnh lưu toàn kỳ biên độ đỉnh A. Vẽ phổ biên độ và phổ pha.

$$x(t)=A|\sin t|$$



$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-To/2}^{To/2} x(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin t dt = \frac{A}{\pi}\left[-\cos t\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{2A}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-To/2}^{To/2} x(t)\cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} A\sin t \cos n\omega_0 t dt$$

$$a_n = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t\right]dt$$

$$a_n = \frac{A}{\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\Bigg|_0^{\pi}\right]$$

$$a_n = \frac{A}{\pi}\left[\frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n-1}\right] = -\frac{4A}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$$

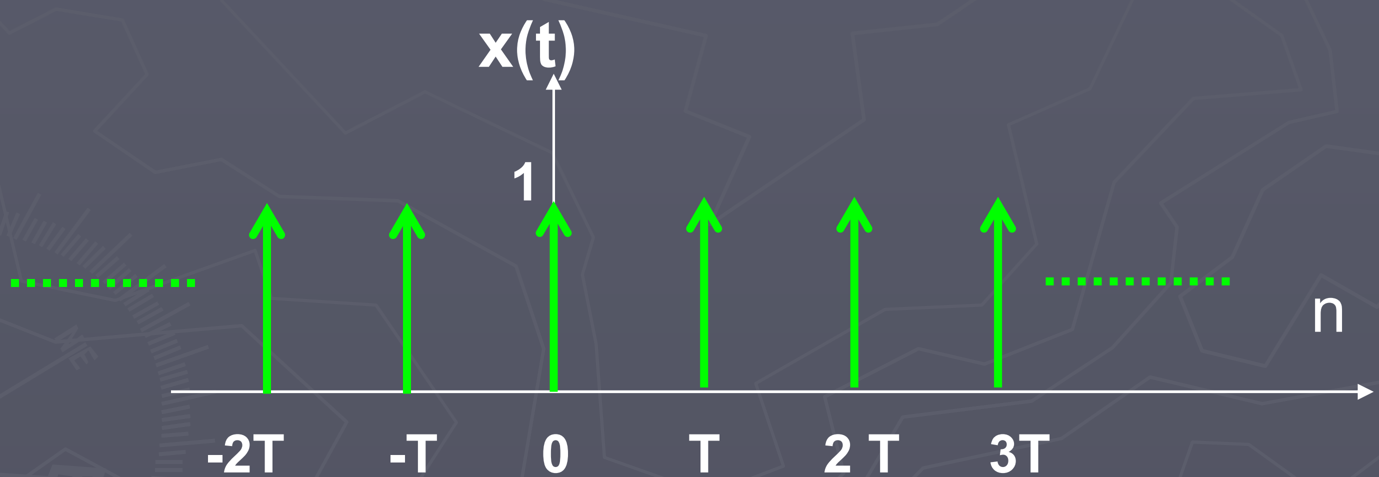
$$x(t)=\frac{2A}{\pi}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4A}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nt$$

$$x(t)=\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2t+\frac{1}{15}\cos 4t+\frac{1}{35}\cos 6t+\ldots\ldots\right)$$

3. **Cho khai triển ở dạng lượng giác như sau. Tìm khai triển ở hai dạng kia.**

$$x(t) = 10 + 8\cos\omega_o t + 6\sin\omega_o t$$

4. **Tìm khai triển Fourier của chuỗi xung Dirac đều**



Giải bài 4

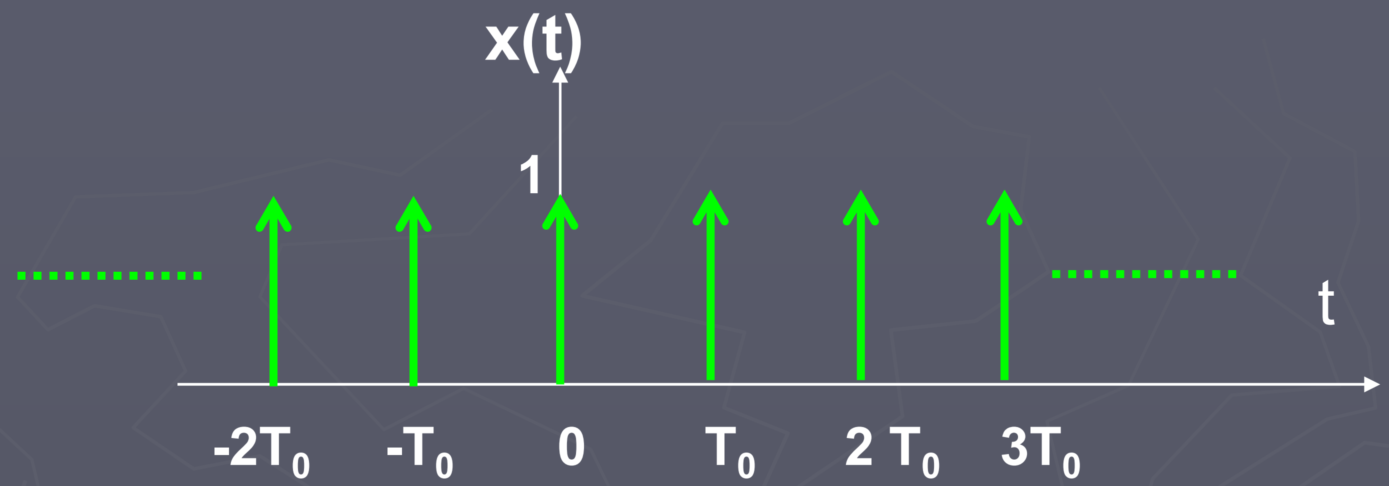
- x(t) là chuỗi xung Dirac đều chu kỳ T_0 hay tần số f_0=1/T_0
- Vì x(t) tuần hoàn nên ta có khai triển Fourier của x(t):

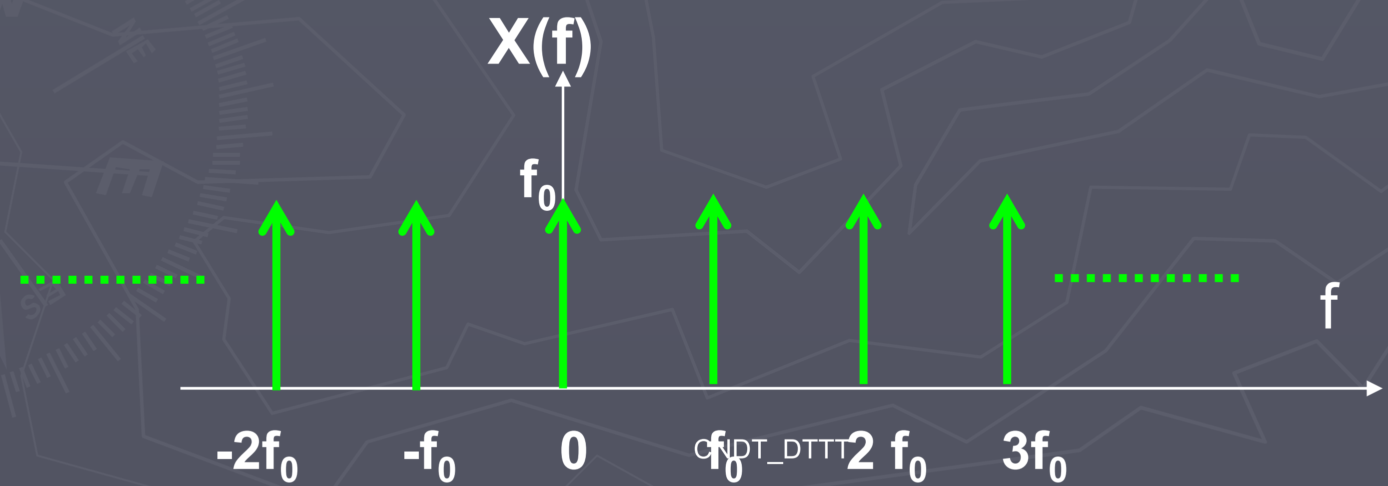
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_n e^{jn\omega_o t}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

$$X_n=\frac{1}{T_0}\int_{-To/2}^{To/2}\delta(t)e^{-j2\pi n f_0 t}dt=\frac{1}{T_0}=f_0$$

$$x(t)=\frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{j2\pi n f_0 t}\Rightarrow X(f)=\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_0)$$

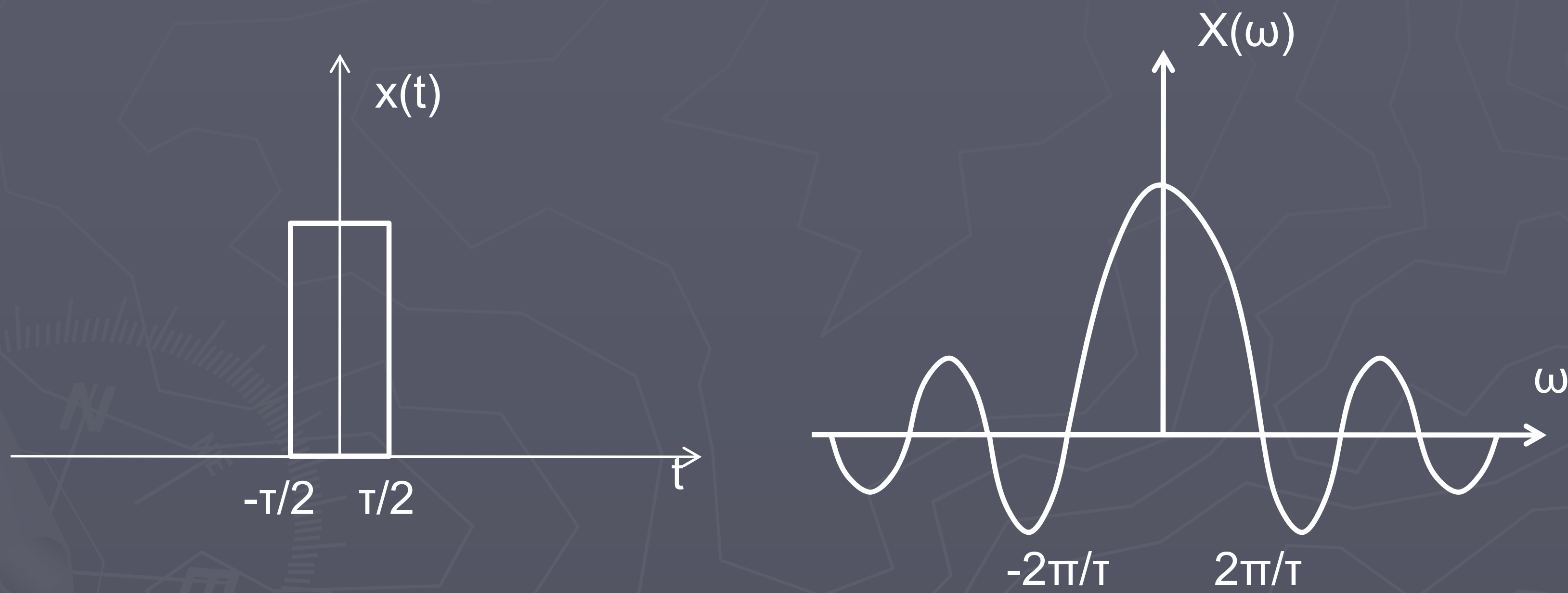
Vậy một chuỗi xung dirac trong miền thời gian cho một chuỗi xung dirac trong miền tần số





4.1.2 Biến đổi Fourier

(tín hiệu không tuần hoàn)



a. Cặp biến đổi Fourier x(t) $\leftrightarrow$ X(f):

$$X(f) = F\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$x(t) = F^{-1}\left[X(f)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

b. Phổ biên độ và phổ pha

$$X(f) = \left|X(f)\right|e^{j\varphi(f)}$$

- Biến thiên của |X(f)| theo f là phổ biên độ (độ lớn)
- Biến thiên của φ(f) theo f là phổ pha (còn được viết argX(f) hay $\angle$X(f))

❖Khi x(t) thực

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\cos 2\pi ft - j\sin 2\pi ft\right]dt$$

❖Thành phần thực ảo là:

$$X_R(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos 2\pi ftdt$$

$$X_I(f)=-\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin 2\pi ftdt$$

❖Biên độ và pha của X(f) là:

$$\left|X(f)\right|=\sqrt{X_R^2(f)+X_I^2(f)}$$

$$\varphi(f)=arctg\frac{X_I(f)}{X_R(f)}$$

Năng lượng của tín hiệu không tuần hoàn

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| X(f) \right|^2 df$$

CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

1. **Tuyến tính:** là tính tỉ lệ và chồng chất

nếu: $x_1(t) \leftrightarrow X_1(f)$ và $x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$

thì: $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(f) + a_2\,X_2(f)$

a_1, a_2 là các hằng số

CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

2. Đối xứng:

nếu: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

thì: $x(-t) \leftrightarrow X(-f)$

3. Dịch chuyển thời gian

nếu: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

thì: $x(t-t_o) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f t_o}$

CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

4. Thay đổi thang thời gian

nếu: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

thì: $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X(\frac{f}{a})$

5. Dịch chuyển tần số (định lý điều biến)

nếu: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

thì: $x(t)e^{j2\pi f_o t} \leftrightarrow X(f - f_o)$

CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

6. Vi phân thời gian

nếu: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

thì: $\dfrac{d^n}{dt^n}\left[x(t)\right] \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f)$

7. Tích phân thời gian

nếu: $x(t) \leftrightarrow X(f)$

thì: $\int_{-\infty}^{t} x(t')dt' \leftrightarrow \dfrac{1}{2}X(0)\delta(f) + \dfrac{1}{j2\pi f}X(f)$

CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

8. Định lý nhân chập

nếu: $x_1(t) \leftrightarrow X_1(f)$ và $x_2(t) \leftrightarrow X_2(f)$

thì: $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(f)\, X_2(f)$

MỘT SỐ BIẾN ĐỔI FOURIER CƠ BẢN

1. Xung thời gian vô cùng hẹp: là xung dt tại gốc t=0, có biên độ 1 và độ rộng tiến về 0

$$dt \leftrightarrow dt$$

2. Xung dirac $\delta(t)$ (xung lực)

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$A\delta(t) \leftrightarrow A$$

3. Hằng số

$$A \leftrightarrow A\delta(-f) = A\delta(f)$$

4. Hàm mũ một bên

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a + j2\pi f}$$

5. Hàm dấu

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$$

với $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{khi } t \geq 0 \\ -1 & \text{khi } t < 0 \end{cases}$

MỘT SỐ BIẾN ĐỔI FOURIER CƠ BẢN

7. Hàm cosin và sin

Ta có: $$A\cos 2\pi f_o t = \frac{A}{2}e^{j2\pi f_o t} + \frac{A}{2}e^{-j2\pi f_o t}$$

$$A\sin 2\pi f_o t = \frac{A}{2j}e^{j2\pi f_o t} - \frac{A}{2j}e^{-j2\pi f_o t}$$

$$A\cos 2\pi f_o t \leftrightarrow \frac{A}{2}\delta(f - f_o) + \frac{A}{2}\delta(f + f_o)$$

$$A\cos\omega_o t \leftrightarrow A\pi\delta(\omega - \omega_o) + A\pi\delta(\omega + \omega_o)$$

$$A\sin 2\pi f_o t \leftrightarrow \frac{A}{2j}\delta(f - f_o) - \frac{A}{2j}\delta(f + f_o)$$

$$A\sin\omega_o t \leftrightarrow \frac{A\pi}{j}\delta(\omega - \omega_o) - \frac{A\pi}{j}\delta(\omega + \omega_o)$$

MỘT SỐ BIẾN ĐỔI FOURIER CƠ BẢN

8. Chuỗi xung dirac δ(t)

Chuỗi xung dirac δ(t) ở chu kỳ T_o (hay tần số $f_o=1/T_o$) là:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_o)$$

Biến đổi Fourier của chuỗi xung dirac:

$$X(f) = \frac{1}{T_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_o)$$

Vậy 1 chuỗi xung dirac đều trong miền thời gian cho một chuỗi xung dirac đều trong miền tần số

Chương 4:
TÍN HIỆU TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN

4.2 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC THỜI GIAN

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

4.4 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & BIẾN ĐỔI Z

4.2 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC THỜI GIAN

4.2.1 KHAI TRIỂN FOURIER RỜI RẠC THỜI GIAN

(tín hiệu rời rạc tuần hoàn)

4.2.2 BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC THỜI GIAN

(tín hiệu rời rạc ko tuần hoàn)

4.2.3 ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI BIẾN ĐỔI FOURIER

4.2.1 KHAI TRIỂN FOURIER RỜI RẠC THỜI GIAN DFS (tín hiệu rời rạc tuần hoàn)

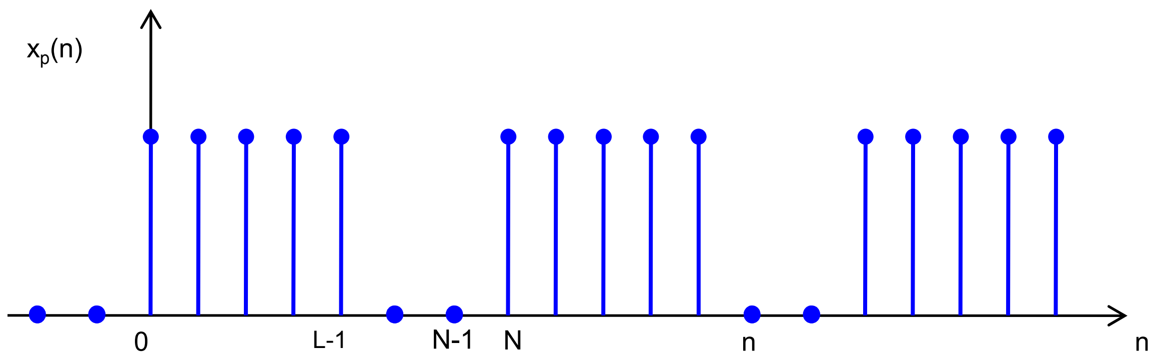
- Tín hiệu x(n) rời rạc, tuần hoàn với chu kỳ N mẫu.

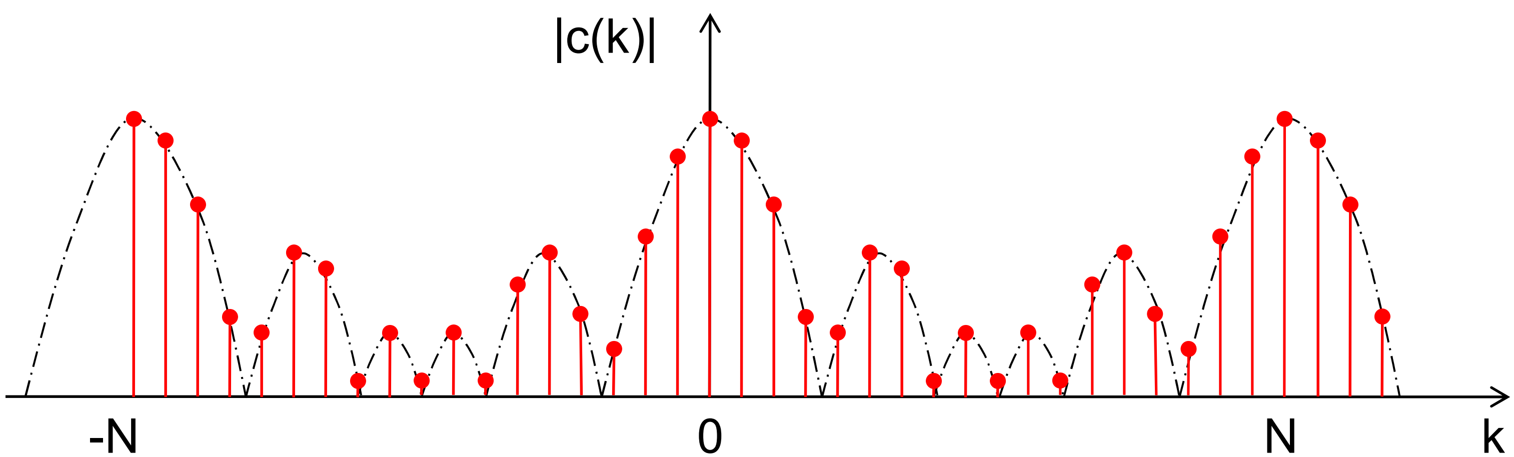
$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N}$$

- Tín hiệu x(n) rời rạc tuần hoàn với chu kỳ N mẫu thì phổ c_k của nó cũng tuần hoàn với chu kỳ N

- x(n) tuần hoàn chu kỳ N ➔ Tính DFS của x(n) → c(k)





Ví dụ: Tìm khai triển Fourier của tín hiệu $x(n)=\cos n\Omega_0$ khi

a. $\Omega_0 = \sqrt{2}\pi$ b. $\Omega_0 = \pi/3$

Giải a. Khi $\Omega_0 = \sqrt{2}\pi$ thì $\dfrac{\Omega_0}{2\pi} = \dfrac{\sqrt{2}\pi}{2\pi} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vì $\Omega_0 /2\pi$ không phải số hữu tỉ nên x(n) không tuần hoàn

$\Rightarrow$ không có khai triển Fourier

b. Khi $\Omega_0=\pi/3$ thì chu kỳ tuần hoàn của tín hiệu $\cos n\pi/3$ là:

$$N = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$$

$\Rightarrow$ Các thành phần phổ là:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{5} x(n)e^{-j2\pi kn/6}$$

Hoặc ta phát biểu x(n) theo mũ phức

$$x(n) = \cos\frac{2\pi n}{6} = \frac{1}{2}e^{j2\pi n/6} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi n/6} = \frac{1}{2}e^{j2\pi n/6} + \frac{1}{2}e^{j2\pi 5n/6}$$

$\Rightarrow$ Các thành phần phổ là: $c_0=0$, $c_1=1/2$, $c_2=c_3=c_4=0$, $c_5=1/2$

Chu kỳ phổ này được lặp lại liên tục

4.2.2 BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC THỜI GIAN

(tín hiệu rời rạc ko tuần hoàn)

Biến đổi Fourirer rời rạc thời gian của x(n):

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Trong đó: ω - tần số của tín hiệu rời rạc, $\omega = \Omega T_s$

Ω - tần số của tín hiệu liên tục

T_s - chu kỳ lấy mẫu

- **Ký hiệu:**

x(n) $\xleftrightarrow{F}$ **X(ω)** **hay** **X(ω) = F{x(n)}**

X(ω) $\xleftrightarrow{F^{-1}}$ **x(n)** **hay** **x(n) = F^{-1} {X(ω)}**

b. X(ω) biểu diễn dưới dạng modun & argument:

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

Trong đó:

- $|X(\omega)|$ - phổ biên độ của x(n)
- $\varphi(\omega) = \arg[X(\omega)]$ - phổ pha của x(n)

► Nhận thấy X(ω) tuần hoàn với chu kỳ 2π, thật vậy:

$$X(\omega + 2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} = X(\omega)$$

Áp dụng kết quả:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{jk} dk = \begin{cases} 2\pi : k = 0 \\ 0 : \quad k \neq 0 \end{cases}$$

Biểu thức biến đổi F ngược:

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega}$$

Ví dụ 4.1 : Tìm biến đổi F của các dãy:

$x_1(n) = a^n u(n) : |a| < 1$

$x_2(n) = -a^n u(-n-1) : |a| > 1$

Giải:

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n \boxed{= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}}$$

$$X_2(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(-n-1) e^{-j\omega n} = -\sum_{n=-1}^{-\infty} \left(a^{-1}e^{j\omega}\right)^{-n}$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \left(a^{-1}e^{j\omega}\right)^m = -\sum_{m=0}^{\infty} \left(a^{-1}e^{j\omega}\right)^m + 1$$

$$= 1 - \frac{1}{1-a^{-1}e^{j\omega}} \boxed{= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}}$$

4.2.2 ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI BIẾN ĐỔI FOURIER

$$\left|X(\omega)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|\left|e^{-j\omega n}\right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|$$

Vậy, để **X(ω)** hội tụ thì điều kiện cần là:

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right| < \infty}$$

- Các tín hiệu thỏa điều kiện hội tụ là **tín hiệu năng lượng,** thậy vậy**:**

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2 \le \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|\right]^2$$

Nếu: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right| < \infty \Rightarrow E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x(n)\right|^2 < \infty$

Ví dụ 4.2 : Xét sự tồn tại biến đổi F của các dãy:

$x_1(n) = (0.5)^n u(n)$ $x_2(n) = 2^n u(n)$

$x_3(n) = u(n)$ $x_4(n) = rect_N(n)$

Giải:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|(0.5)^n u(n)\right| = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5)^n = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_2(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|2^n u(n)\right| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n = \infty$$

⇨ $X_2(\omega)$ không tồn tại

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_3(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |u(n)| = \infty$$

⇨ $X_3(\omega)$ không tồn tại

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_4(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |rect_N(n)| = \sum_{n=0}^{N-1} |rect_N(n)| = N$$

Chương 4:
TÍN HIỆU TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN

4.2 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC THỜI GIAN

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

4.4 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & BIẾN ĐỔI Z

4.3 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC THỜI GIAN

a. Tuyến tính

b. Dịch theo thời gian

c. Liên hiệp phức

d. Đảo biến số

e. Vi phân trong miền tần số

f. Dịch theo tần số

g. Tích 2 dãy

h. Tổng chập 2 dãy

k. Quan hệ Parseval

4.3 CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI FOURIER

a) Tuyến tính

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $\quad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

Thì: $a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n) \xleftrightarrow{F} a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$

b) Dịch theo thời gian

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $x(n - n_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(\omega)$

Ví dụ 4.3: Tìm biến đổi F của dãy: $\delta(n); \delta(n-2)$

Giải:

$$x(n) = \delta(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n) e^{-j\omega n} = 1$$

Áp dụng tính chất dịch theo thời gian:

$$\delta(n-2) = x(n-2) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\omega} X(\omega) = 1e^{-j2\omega}$$

c) Liên hiệp phức

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $x^*(n) \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega)$

d) Đảo biến số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $x(-n) \xleftrightarrow{F} X(-\omega)$

Ví dụ 4.4: Tìm biến đổi F của dãy: $y(n) = 2^n u(-n)$

Giải:

Theo ví dụ trước, có kết quả:

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{1-(1/2)e^{-j\omega}}$$

suy ra:

$$y(n) = x(-n) = (2)^n u(-n) \xleftrightarrow{F} X(-\omega) = \boxed{\frac{1}{1-(1/2)e^{j\omega}}}$$

e) Vi phân trong miền tần số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $nx(n) \xleftrightarrow{F} j\dfrac{dX(\omega)}{d\omega}$

Ví dụ 4.5: Tìm biến đổi F của: $g(n) = na^n u(n); |a| < 1$

Giải:

Theo ví dụ trước:

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}; |a| < 1$$

Suy ra:

$$g(n) = nx(n) \xleftrightarrow{F} G(\omega) = j\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \boxed{\frac{ae^{-j\omega}}{\left(1 - ae^{-j\omega}\right)^2}}; |a| < 1$$

f) Dịch theo tần số

Nếu: $x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

Thì: $e^{j\omega_0 n} x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)$

Ví dụ 4.6: Tìm biến đổi F của: $y(n) = a^n \cos(\omega_0 n) u(n); |a| < 1$

Giải:

Theo ví dụ trước:

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}; |a| < 1$$

$$y(n) = a^n u(n) \cos(\omega_0 n) = a^n u(n) \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$= \frac{1}{2} x(n)\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$\xleftrightarrow{F} \quad Y(\omega) = \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0) + X(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\boxed{Y(\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1-ae^{-j(\omega-\omega_0)})} + \frac{1}{(1-ae^{-j(\omega+\omega_0)})}\right]}$$

g) Tích 2 dãy

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $\quad x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

Thì: $x_1(n).x_2(n) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega')X_2(\omega-\omega')d\omega'$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_2(\omega')X_1(\omega-\omega')d\omega'$$

h) Tổng chập 2 dãy

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

Thì: $x_1(n) * x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)X_2(\omega)$

Ví dụ 4.7: Tìm y(n)=x(n)*h(n), biết: **x(n)=h(n)=δ(n+2)+δ(n-2)**

Giải:

Theo ví dụ trước, có kết quả:

$$X(\omega) = H(\omega) = e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})^2 = e^{j4\omega} + 2 + e^{-j4\omega}$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = F^{-1}[Y(\omega)]$$

$$\boxed{y(n) = \delta(n+4) + 2\delta(n) + \delta(n-4)}$$

k) Quan hệ Parseval

Nếu: $x_1(n) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega)$ $x_2(n) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega)$

Thì: $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega \quad (*)$$

Biểu thức (*) còn gọi là **quan hệ Parseval**

Nhận xét:

Nếu: $x_1(n) = x_2(n) = x(n)$

Theo quan hệ Parseval, ta có:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Với: $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2$ **- gọi là phổ mật độ năng lượng**

TỔNG KẾT CÁC TÍNH CHẤT BIẾN ĐỔI F

$x(n)$	$X(\omega)$
$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$
$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X(\omega)$
$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(\omega-\omega_0)$
$nx(n)$	$jdX(\omega)/d\omega$
$x(-n)$	$X(-\omega)$
$x^*(n)$	$X^*(-\omega)$
$x_1(n)x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(\omega')X_2(\omega-\omega')d\omega'$
	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$
$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$

Chương 4:
TÍN HIỆU TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

4.1 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU LIÊN TỤC THỜI GIAN

4.2 PHÂN TÍCH TẦN SỐ CỦA CÁC TÍN HIỆU RỜI RẠC THỜI GIAN

4.3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI FOURIER

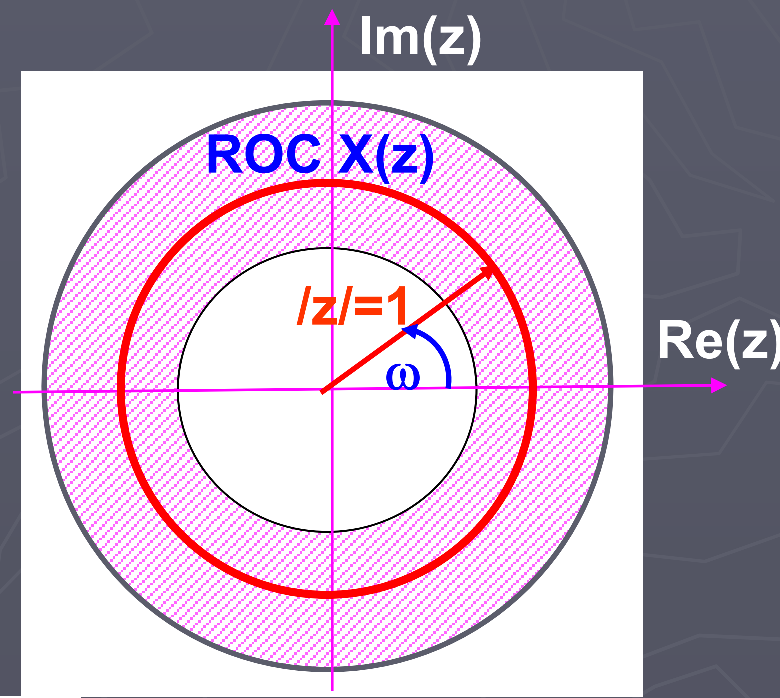
4.4 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & BIẾN ĐỔI Z

4.4 QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER & Z

$$x(n) \xleftrightarrow{Z} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$x(n) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$\boxed{X(\omega) = X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}}$$



Hay biến đổi Fourier chính là biến đổi Z được lấy trên vòng tròn đơn vị theo biến số ω

- **Nếu ROC[X(z)] có chứa |z|=1 $\Rightarrow X(\omega)=X(z)$ với $z=e^{j\omega}$**

- **Nếu ROC[X(z)] không chứa |z|=1 $\Rightarrow X(\omega)$ không hội tụ**

Ví dụ 4.8: Tìm biến đổi Z & F của các dãy:

$$x_1(n) = (0.5)^n u(n) \qquad x_2(n) = 2^n u(n)$$

Giải:

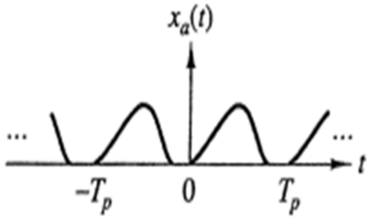
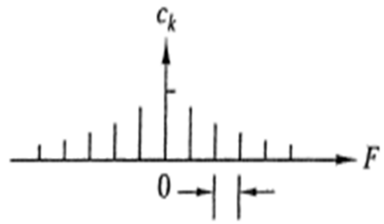
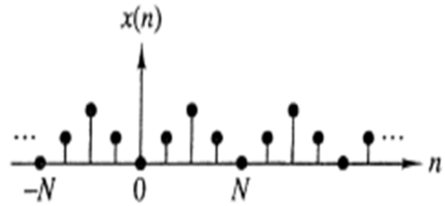
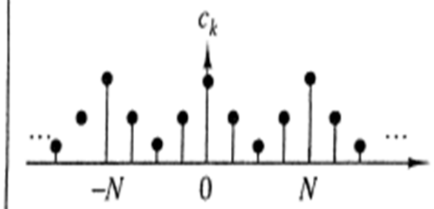
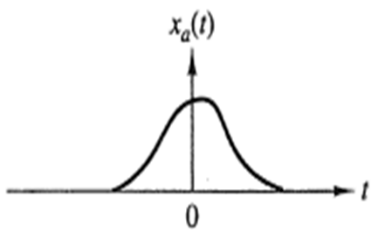
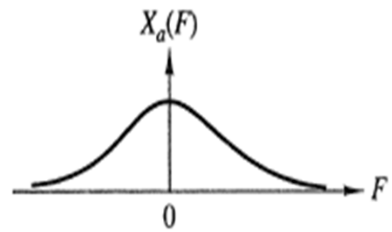
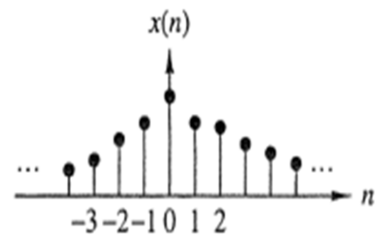
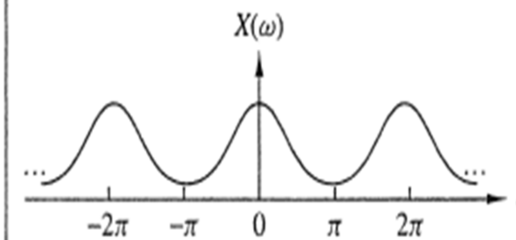
- $$X_1(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}; |z| > 0.5$$

Do ROC[$X_1(z)$] có chứa |z|=1, nên:

$$X_1(\omega) = X_1(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - 0.5e^{-j\omega}}$$

- $$X_2(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1}}; |z| > 2$$

Do ROC[$X_2(z)$] không chứa |z|=1, nên $X_2(\omega)$ không tồn tại

	Continuous-time signals: Time-domain	Continuous-time signals: Frequency-domain	Discrete-time signals: Time-domain	Discrete-time signals: Frequency-domain
Periodic signals — Fourier series	 $c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x_a(t)e^{-j2\pi kF_0 t}\,dt$ ⟹	 $F_0 = \frac{1}{T_p}$ ⟸ $x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t}$	 $c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)kn}$ ⟹	 ⟸ $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(2\pi/N)kn}$
	Continuous and periodic	Discrete and aperiodic	Discrete and periodic	Discrete and periodic
Aperiodic signals — Fourier transforms	 $X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j2\pi Ft}\,dt$ ⟹	 ⟸ $x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi Ft}\,dF$	 $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ ⟹	 ⟸ $x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega$
	Continuous and aperiodic	Continuous and aperiodic	Discrete and aperiodic	Continuous and periodic

Chương 5:

HỆ THỐNG LTI TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

Giảng viên: Ths. Đào Thị Thu Thủy

Chương 5:
HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC

5.1 Đáp ứng tần số của hệ thống LTI

5.2 Đáp ứng tần số của hệ thông ghép nối

5.3 Đáp ứng ra của hệ thống đối với tín hiệu hàm mũ

5.4 Đáp ứng ra của hệ thống đối với tín hiệu hàm sin, cos

5.5 Đáp ứng tần số phát biểu theo các hệ số lọc

5.1 Đáp ứng tần số của hệ thống LTI

Tín hiệu vào → **Hệ thống LTI** → Tín hiệu ra

Miền thời gian:	$x(n)$	$\rightarrow$	$h(n)$	$\rightarrow$	$y(n)$	$= x(n) * h(n)$
	$\updownarrow F$		$\updownarrow F$		$\updownarrow F$	$\updownarrow$ (Định lý nhân chập)
Miền tần số:	$X(\omega)$	$\rightarrow$	$H(\omega)$	$\rightarrow$	$Y(\omega)$	$= X(\omega)H(\omega)$

$h(n) \xleftrightarrow{F}$ H(ω): gọi là đáp ứng tần số của hệ thống LTI

$$\boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}}$$

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n).e^{-j\omega.n}$$

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n).e^{-j\omega.n}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n).e^{-j\omega.n}$$

• $H(\omega)$ thường là số phức nên ta viết:

$$H(\omega) = H_R(\omega) + jH_I(\omega)$$

• Nếu **$H(\omega)$** biểu diễn dạng môđun và pha:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

$|H(\omega)|$ - Đáp ứng biên độ

$\phi(\omega)$ - Đáp ứng pha

$$|H(\omega)| = \sqrt{H_R^2(\omega) + H_I^2(\omega)}$$

$$\phi_H(\omega) = \mathrm{arc}tg\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}$$

- Đáp ứng tần số $H(\omega)$ tồn tại nếu hệ thống là ổn định BIBO

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

- Khi đáp ứng xung h(n) là thực thì :
  - đáp ứng biên độ $|H(\omega)|$ là hàm chẵn
  - đáp ứng pha $\phi_H(\omega)$ là hàm lẻ.
- Đáp ứng biên độ phát biểu theo decibel (dB)

$$|H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}|H(\omega)|$$

Ví dụ 5.1: Tìm H(ω), vẽ đáp ứng biên độ & pha, biết:

h(n)=rect$_3$(n)

Giải:

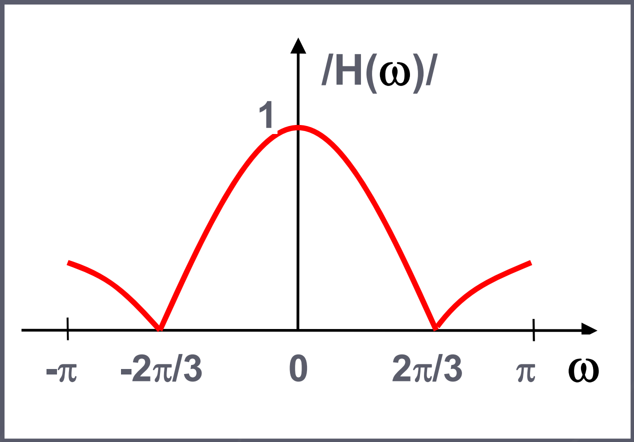
Biến đổi Fourier của **h(n)**:

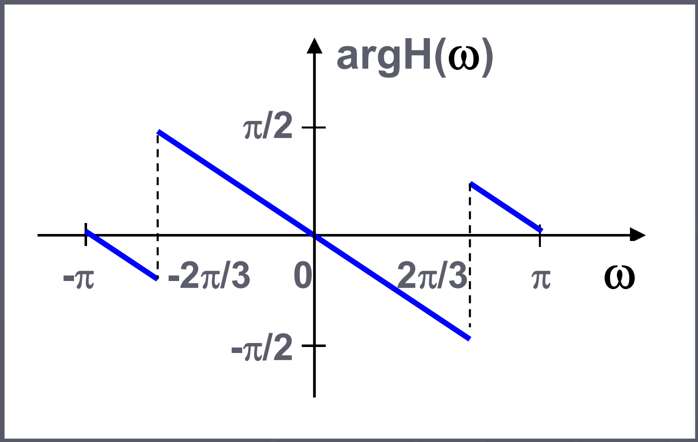
$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} rect_3(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{2} e^{-j\omega n} = \frac{1-e^{-j3\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{e^{-j3\omega/2}\left(e^{j3\omega/2} - e^{-j3\omega/2}\right)}{e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right)} = \frac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(\omega)| = \left|\dfrac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)}\right| \\ \phi(\omega) = \begin{cases} -\omega : A(\omega) > 0 \\ -\omega + \pi : A(\omega) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Với $A(\omega) = \dfrac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$


/H(ω)/
1
-π
-2π/3
0
2π/3
π
ω


argH(ω)
π/2
-π/2
-π
-2π/3
0
2π/3
π
ω

5.2 Đáp ứng tần số của các hệ thống ghép nối

a. Ghép nối tiếp

- <u>Miền n:</u>

$$x(n) \rightarrow \boxed{h_1(n)} \rightarrow \boxed{h_2(n)} \rightarrow y(n)$$

$$\equiv$$

$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)=h_1(n)*h_2(n)} \rightarrow y(n)$$

Theo tính chất tổng chập: $\boxed{h_1(n)*h_2(n) \xleftrightarrow{F} H_1(\omega)H_2(\omega)}$

- <u>Miền ω :</u>

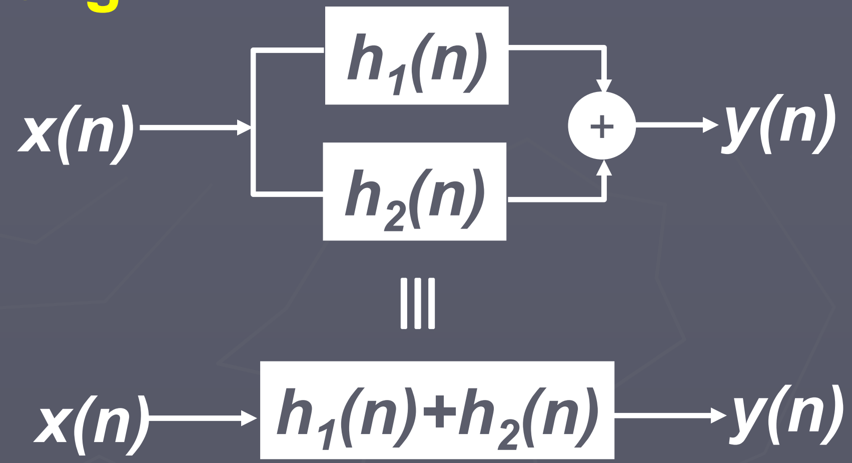
$$X(\omega) \rightarrow \boxed{H_1(\omega)} \rightarrow \boxed{H_2(\omega)} \rightarrow Y(\omega)$$

$$\equiv$$

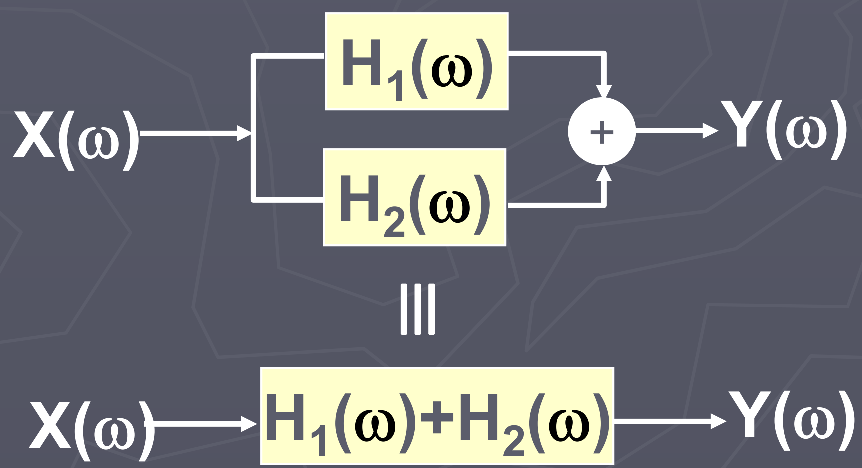
$$X(\omega) \rightarrow \boxed{H(\omega)=H_1(\omega)H_2(\omega)} \rightarrow Y(\omega)$$

b. Ghép song song

- Miền n:



- Miền ω:



5.3 Đáp ứng ra hệ thống với tín hiệu vào hàm mũ phức

Xét tín hiệu vào có dạng mũ phức: **$x(n)=Ae^{j\omega n}$**

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)Ae^{j\omega(n-m)} \boxed{= Ae^{j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} = x(n)H(\omega)}$$

- **Hàm riêng và trị riêng**

Tín hiệu x(n) vào sao cho : $y(n) = \beta x(n)$

x(n): hàm riêng

β : trị riêng.

$\Rightarrow$ Đối với các mạch lọc số: $e^{j\omega n}$: hàm riêng

$H(\omega)$: trị riêng

Ví dụ 5.2: Tìm y(n) biết: $x(n) = 2e^{j\frac{\pi}{3}n}$ $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

$$y(n) = x(n)H(\omega) = 2e^{j\frac{\pi}{3}n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)\Bigg|_{\omega=\frac{\pi}{3}} = 2\frac{e^{j\frac{\pi}{3}n}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{3}}}$$

5.4 Đáp ứng ra hệ thống với tín hiệu vào hàm cos, sin

Xét tín hiệu vào có dạng hàm cos:

$$x(n) = A\cos(\omega_0 n) = \frac{A}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right)$$

Biểu diễn đáp ứng tần số dưới dạng môđun & pha:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

$$y(n) = x(n)H(\omega_0) = \frac{A}{2}\left[H(\omega_0)e^{j\omega_0 n} + H(-\omega_0)e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$y(n) = \frac{A}{2}\left[H(\omega_0)e^{j\omega_0 n} + H^*(\omega_0)e^{-j\omega_0 n}\right] = A.\mathrm{Re}\left\{H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}\right\}$$

$$y(n) = A.\mathrm{Re}\left\{H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}\right\} = A\left|H(\omega_0)\right|\cos\left[\omega_0 n + \phi(\omega_0)\right]$$

Tương tự với tín hiệu vào có dạng hàm sin:

$$x(n) = A\sin(\omega_0 n) = \frac{A}{2j}\left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right)$$

Ta cũng được kết quả:

$$y(n) = A.\mathrm{Im}\left\{H(\omega_0)e^{j\omega_0 n}\right\} = A\left|H(\omega_0)\right|\sin\left[\omega_0 n + \phi(\omega_0)\right]$$

5.4 Đáp ứng tần số phát biểu theo các hệ số lọc

- Đối với lọc lọc phi đệ quy (FIR) có phương trình hiệu số là

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

Trong đó b_k là hệ số của lọc. Với $x(n) = e^{j\omega n}$

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r e^{j\omega(n-r)} = \left[\sum_{r=0}^{M} b_r e^{-j\omega r}\right] e^{j\omega n}$$

$$\boxed{\Rightarrow \qquad H(\omega) = \sum_{r=0}^{M} b_r e^{-j\omega r}}$$

- Đối với lọc đệ quy (lọc IIR), gọi H(ω) là đáp ứng tần số của lọc thì:

$$\boldsymbol{y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)} : \quad a_0 = 1$$

$$y(n) = H(\omega) e^{j\omega n}$$

$$H(\omega)e^{j\omega n} = \sum_{r=0}^{M} b_r e^{j\omega(n-r)} - \sum_{k=1}^{N} a_k H(\omega) e^{j\omega(n-k)}$$

$$\boxed{\Rightarrow \qquad H(\omega) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r e^{-j\omega r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-j\omega k}}}$$

Bài tập

1. Hệ thống có đáp ứng xung: $h(n) = 0.8^n u(n)$

Xác định và vẽ $H_R(\omega)$, $H_I(\omega)$, $|H(\omega)|$, $\phi_H(\omega)$.

2. Cho bộ lọc có đáp ứng xung:

$$h(n) = (0.5)^n\, u(n)$$

Tìm tín hiệu ra khi biết tín hiệu vào:

a. $x(n) = 2.5e^{jn\pi/2}$

b. $x(n) = 10 - 5\sin(n\pi/2) + 20\cos(n\pi)$

Chương 6:

LẤY MẪU & KHÔI PHỤC TÍN HiỆU

Giảng viên: Ths. Đào Thị Thu Thủy

Chương 6:
LẤY MẪU & KHÔI PHỤC TÍN HiỆU

6.1 Lấy mẫu và định lý lấy mẫu

6.2 Sự chồng phổ

6.3 Tiền lọc chống biệt danh

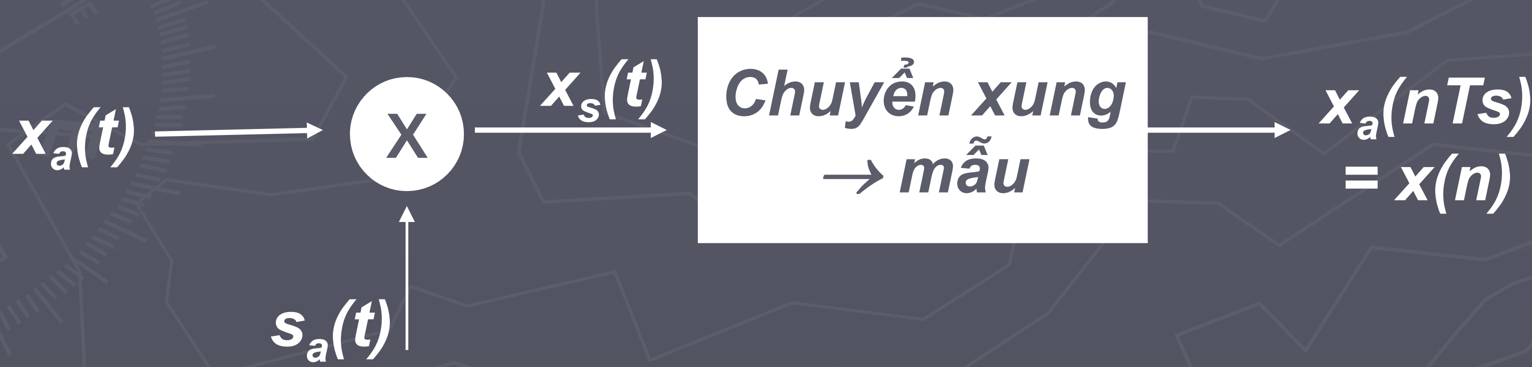
6.4 Lấy mẫu quá mức và tiêu hủy

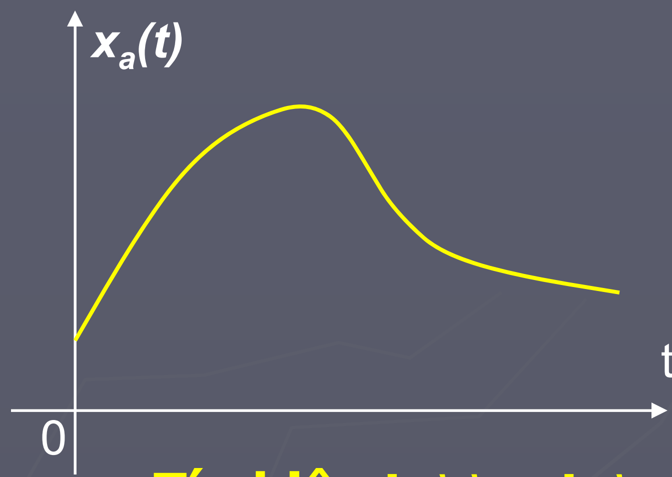
6.5 Mạch khôi phục tương tự

6.1 LẤY MẪU & KHÔI PHỤC TÍN HiỆU THỜI GIAN LIÊN TỤC

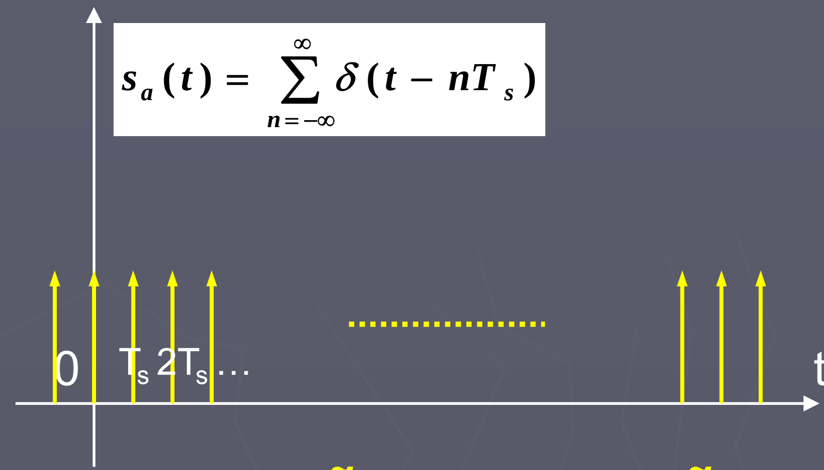
6.1.1 Khái niệm lấy mẫu tín hiệu

Quá trình lấy mẫu tín hiệu

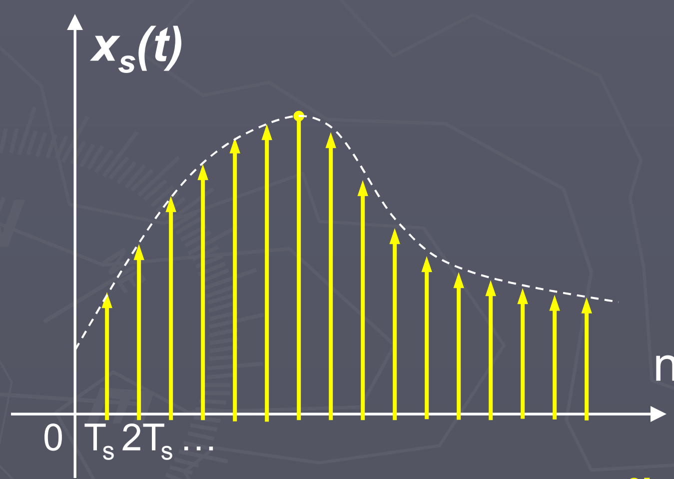




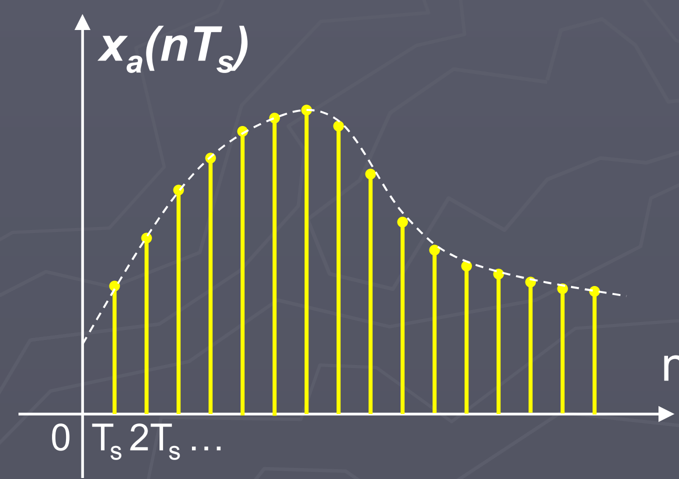
Tín hiệu tương tự



Chuỗi xung lấy mẫu



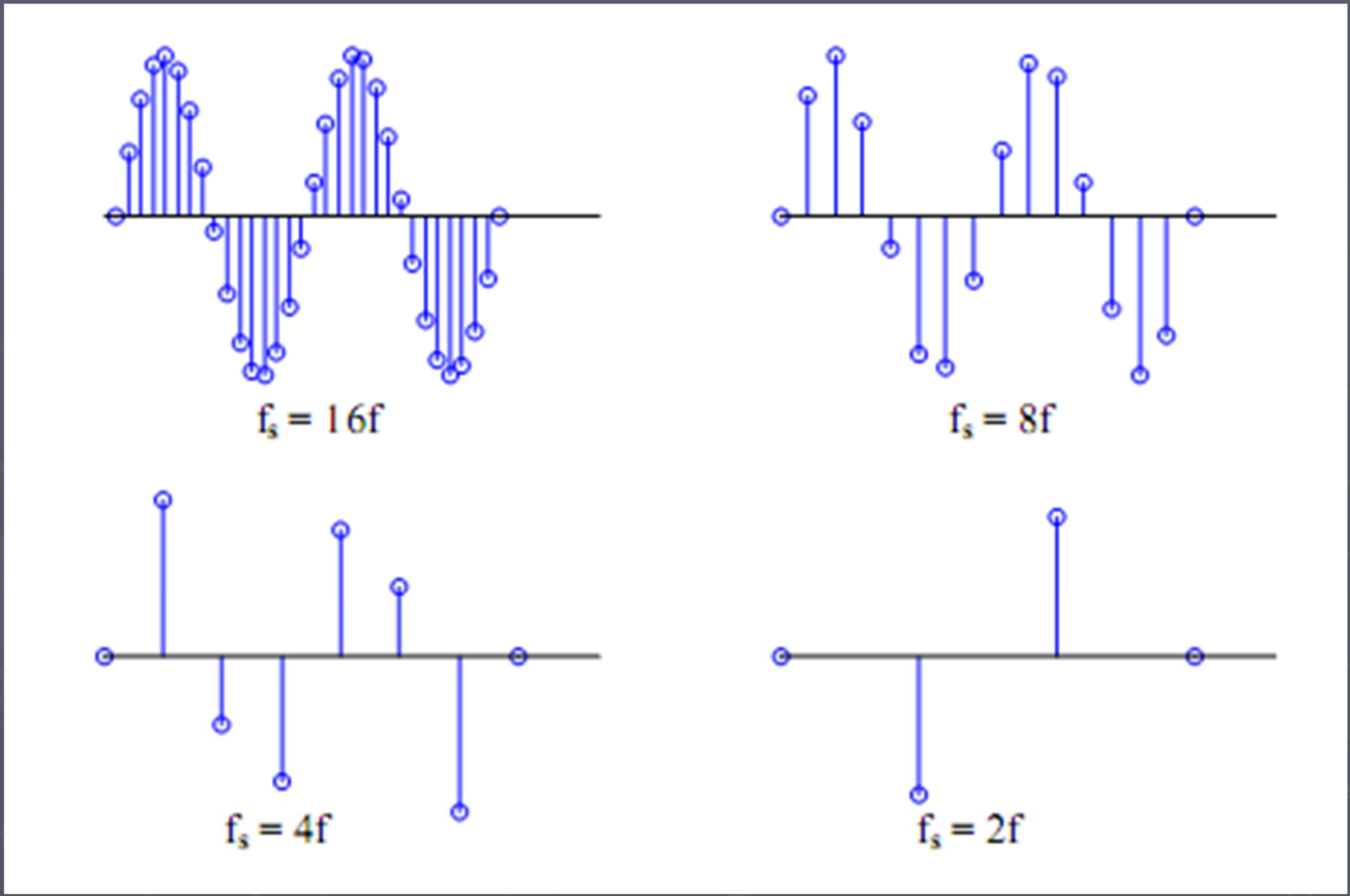
Tín hiệu được lấy mẫu



Tín hiệu rời rạc

Tốc độ lấy mẫu càng lớn -> khôi phục tín hiệu càng chính xác

Ví dụ lấy mẫu tín hiệu sin



Tần số lấy mẫu càng cao

$\Rightarrow$ càng có khả năng khôi phục giống tín hiệu gốc.

Tần số lấy mẫu càng cao

$\rightarrow$ lượng mẫu lớn $\Rightarrow$ dung lượng lưu trữ lớn.

$\Rightarrow$ tốc độ xử lý sẽ chậm lại.

- Tần số lấy mẫu???
  - để khôi phục lại gần đúng dạng tín hiệu
  - với tốc độ xử lý giới hạn trong mức cho phép

6.1.2 Quan hệ giữa tần số tín hiệu rời rạc và tương tự

$$x_a(t) = A\cos\Omega t \xrightarrow[t = nT_s]{\text{Lấy mẫu}} x_a(nT_s) = A\cos(n\Omega T_s)$$

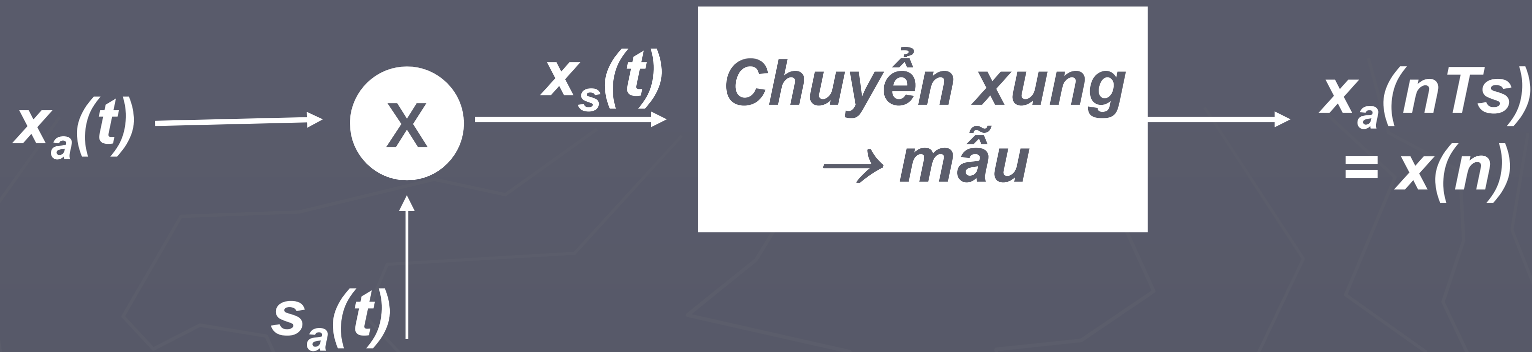
$$x(n) = x_a(nT_s) = A\cos(n\Omega T_s) = A\cos(\omega n) \Rightarrow \boxed{\omega = \Omega T_s}$$

Trong đó: ω - tần số của tín hiệu rời rạc

Ω - tần số của tín hiệu tương tự

T_s - chu kỳ lấy mẫu

6.1.3 Quan hệ giữa phổ tín hiệu rời rạc và phổ tín hiệu tương tự



$$x_a(nT_s) = x_a(t)s_a(t)$$

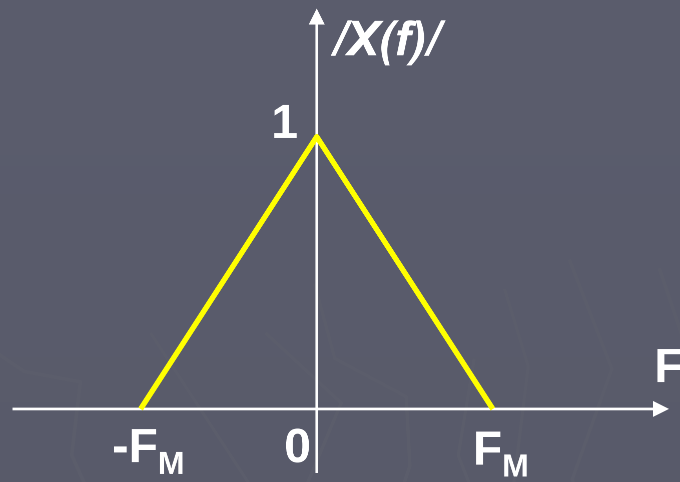
$$s_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$\Rightarrow X_s(f) = X(f) * S(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

Với: $X_s(f)$ là phổ của tín hiệu lấy mẫu
$X(f)$ là phổ của $x_a(t)$
$S(f)$ là phổ của $s_a(t)$

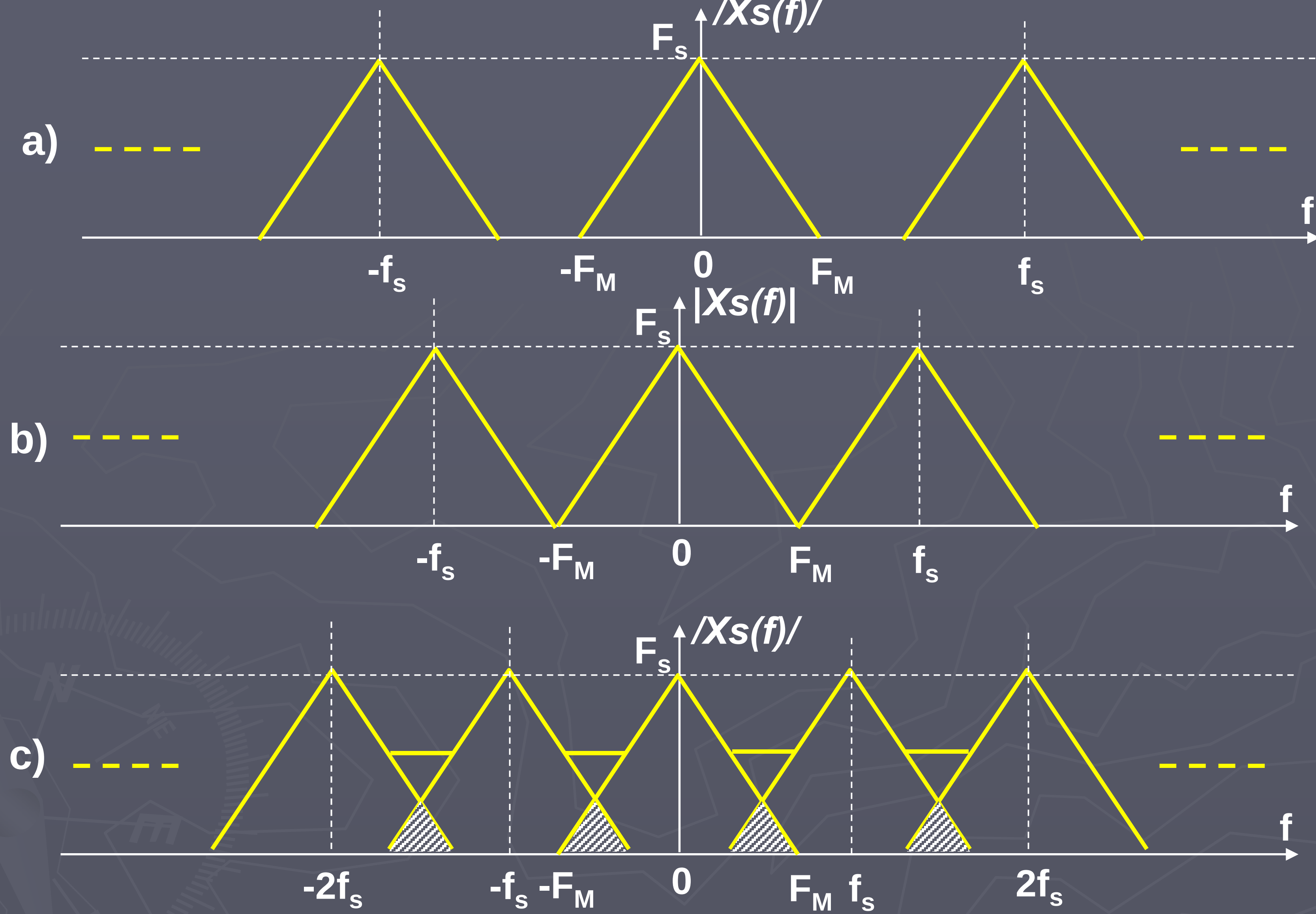
Ví dụ: Hãy vẽ phổ biên độ tín hiệu rời rạc, biết phổ biên độ tín hiệu tương tự cho như hình vẽ, với các tốc độ lấy mẫu:

a) $f_s > 2F_M$ b) $f_s = 2F_M$ c) $f_s < 2F_M$

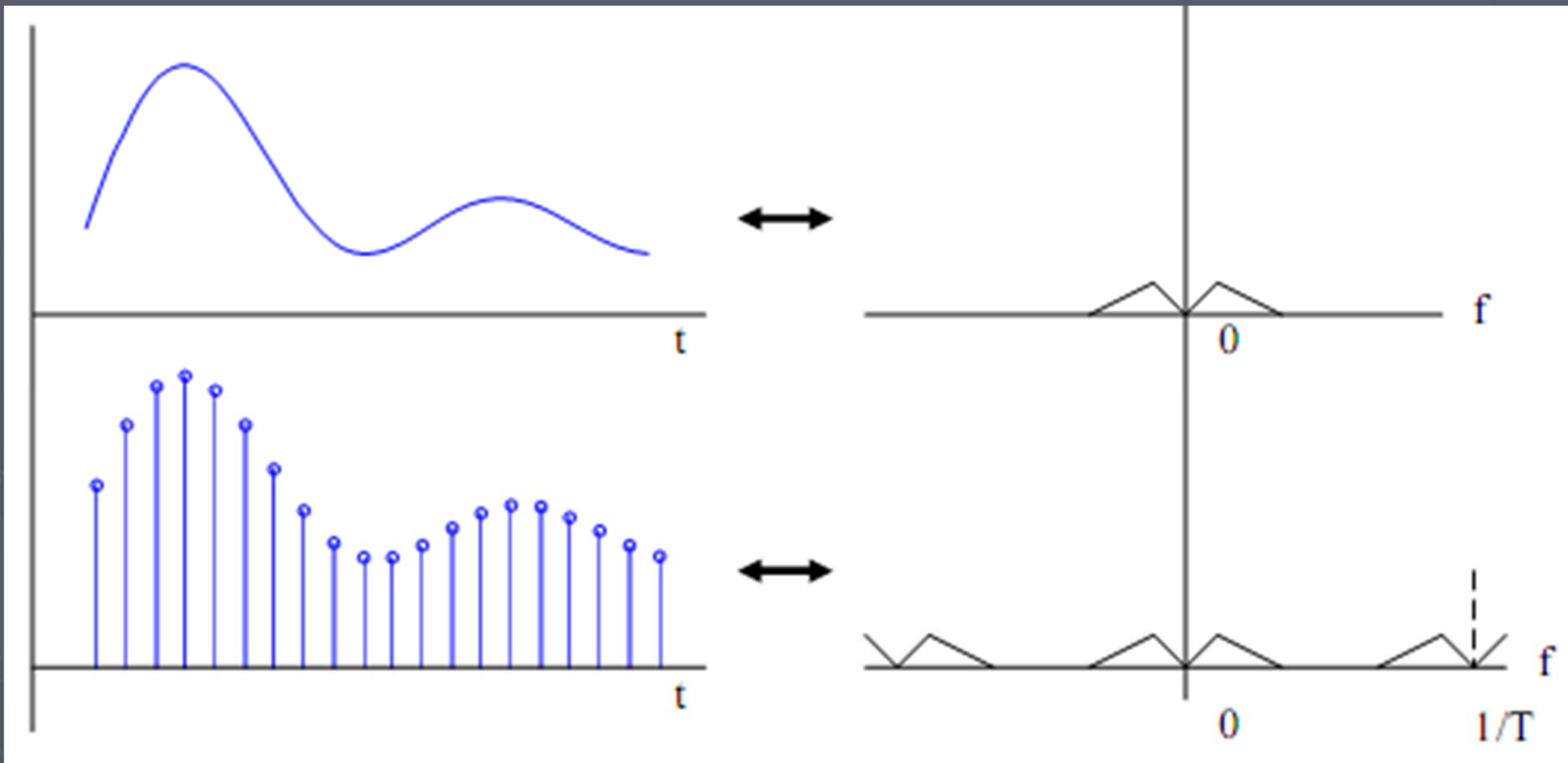


$$\Rightarrow X_s(f) = X(f) * S(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

phổ của các mẫu là sự lặp lại phổ tín hiệu gốc ở các tần số $\pm$ fs, $\pm$ 2fs, $\pm$ 3fs,...



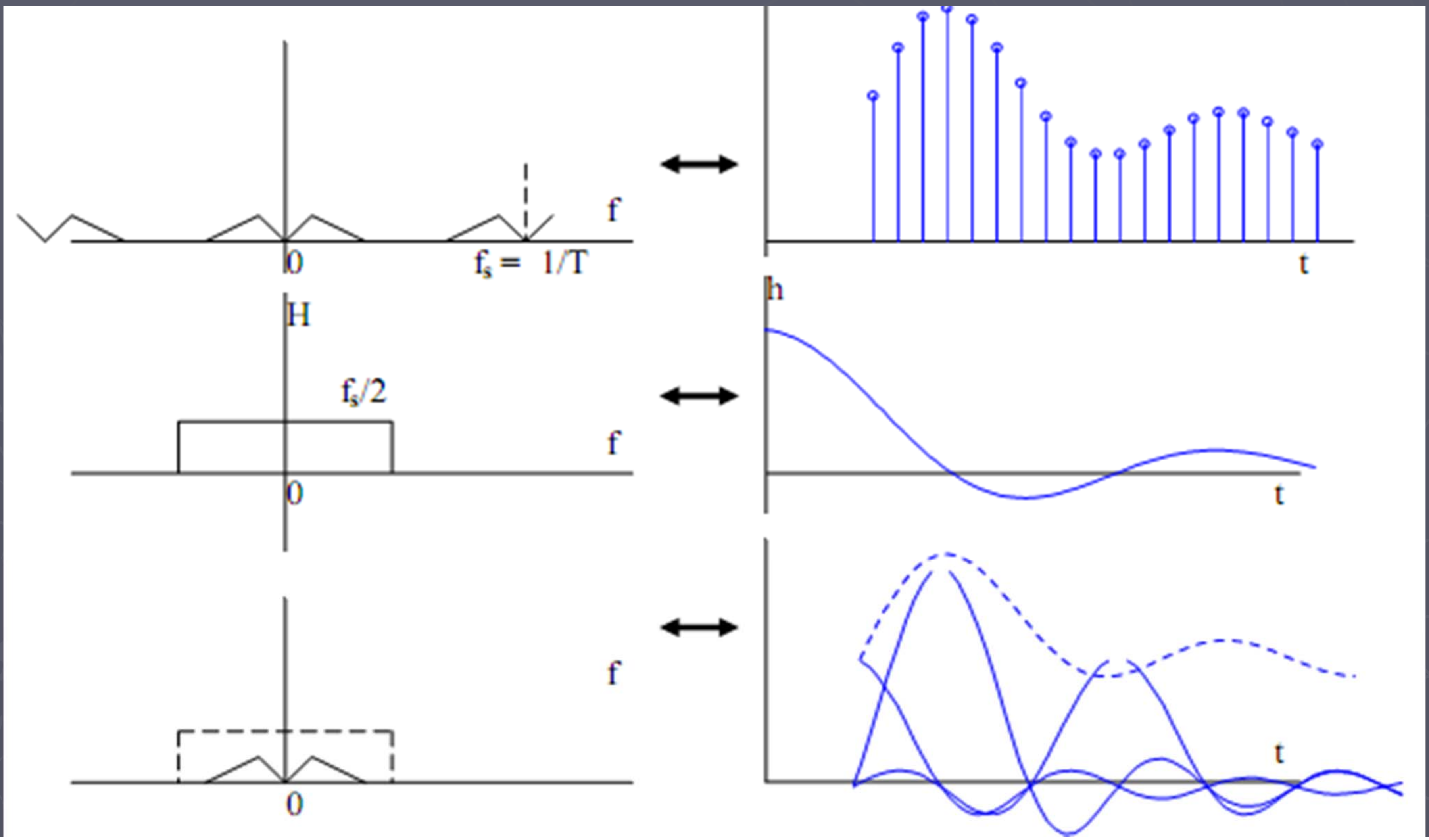
Nếu tần số lấy mẫu fs < 2 fM ta có hiện tượng chồng phổ (aliasing)


t
f
0
t
f
0
1/T

Để khôi phục lại dạng của tín hiệu, ta chỉ cần giới hạn phổ tần của tín hiệu.

Quá trình này có thể thực hiện bằng một mạch lọc thông

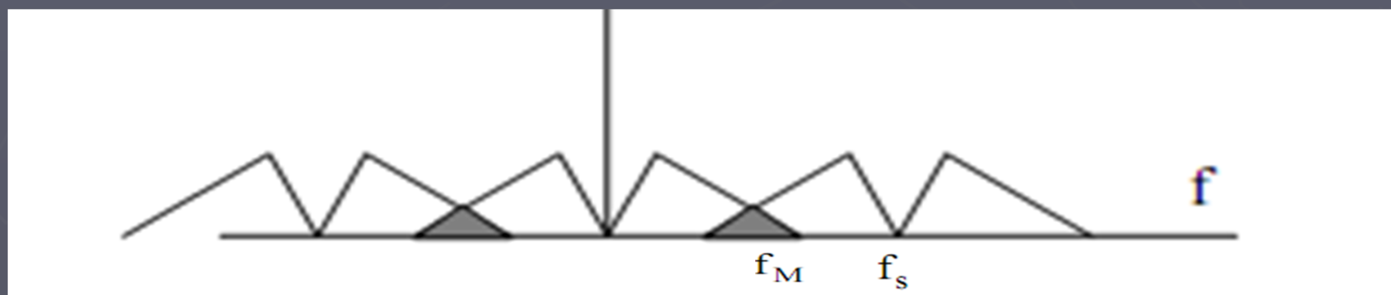
thấp y n n u u ng n u c



Để khôi phục lại tín hiệu trước khi lấy mẫu

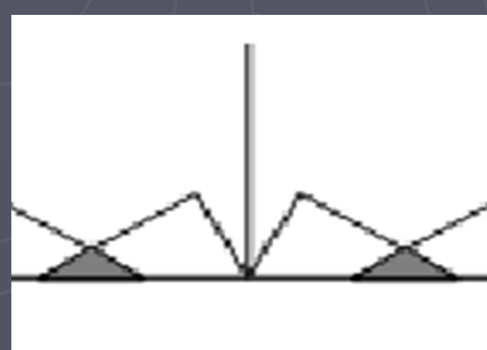
⇒ phổ tín hiệu sau khi qua mạch lọc phải giống hoàn toàn với phổ tín hiệu gốc.

u $f_s < 2 f_M$ ta n ng ng (aliasing)



⇒ phổ tín hiệu sau khi qua mạch lọc không giống hoàn toàn với phổ tín hiệu gốc.

⇒ Ko khôi phục đúng tín hiệu gốc



6.1.4 Định lý lấy mẫu

Định lý lấy mẫu: Để các mẫu biểu diễn đúng tín hiệu tương tự, tức từ các mẫu ta có thể phục hồi tín hiệu tương tự ban đầu, tốc độ lấy mẫu phải lớn hơn hay ít nhất là bằng 2 lần thành phần tần số cao nhất của tín hiệu tương tự:

$$f_s \geq 2F_M$$

- Tần số giới hạn 2 f_M được gọi là tốc độ Nyquist.
- $f_s/2$: tần số Nyquist (hay tần số gấp).
- $[-f_s/2, f_s/2]$: khoảng Nyquist.
- f_s: tần số lấy mẫu (tốc độ lấy mẫu).
- f_M: tần số cao nhất của tín hiệu tương tự.

Ví dụ 6.1. Cho tín hiệu tương tự:

$$x(t) = 3\cos 50\pi t + 10\sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$

Xác định tốc độ Nyquist.

Giải:

$$x(t) = 3\cos 50\pi t + 10\sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$

Tín hiệu x(t) có 3 tần số:

f1= 25Hz, f2= 150Hz, f3= 50Hz

Tần số cao nhất là $f_M = f_2 = 150$ Hz nên tốc độ Nyquist là 2x150 Hz = 300Hz.

Khi lấy mẫu ở tần số này hay lớn hơn sẽ không có hiện tượng chồng phổ hay biệt danh.

Ví dụ 6.2. Cho tín hiệu tương tự:

$$x(t) = 4 + 3\cos 2\pi t + 10\sin 3\pi t - \cos 4\pi t \quad (t:ms)$$

Xác định tốc độ Nyquist

Giải:

Tín hiệu x(t) có 4 tần số:

$f_1 = 0Hz$, $f_2 = 1kHz$, $f_3 = 1.5kHz$, $f_4 = 2kHz$

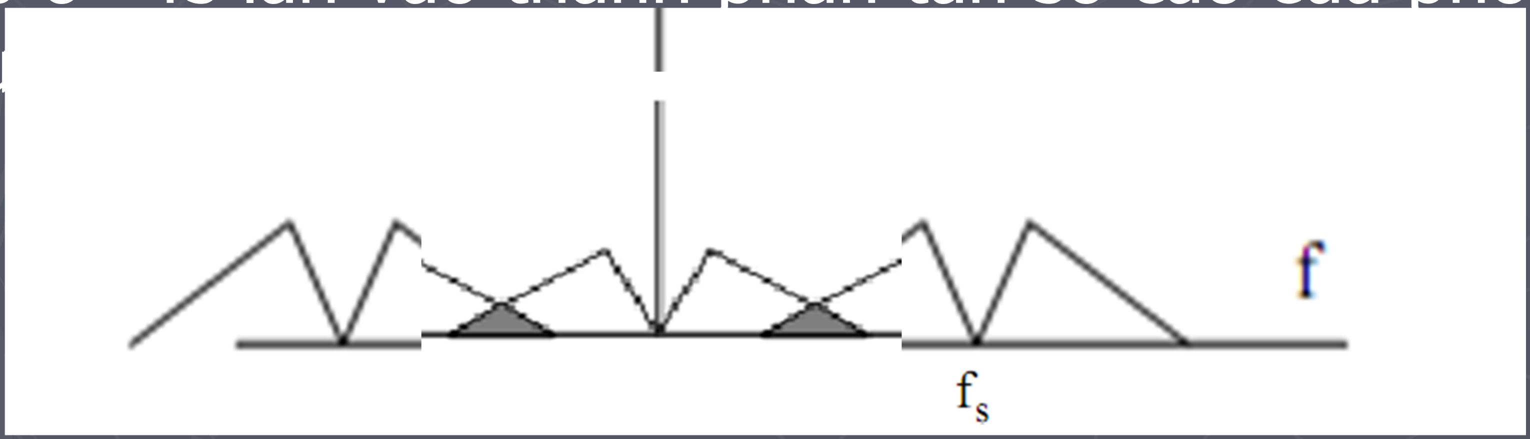
Tần số cao nhất là $f_M = f_4 = 2kHz$ nên tốc độ Nyquist là 2x2kHz = 4kHz

NG PHỔ (T DANH)

- Khi $f_s < 2\ f_M$ (lấy mẫu dưới mức)

⇒ta có hiện tượng chồng phổ (xét về mặt tần số) hay biệt danh (xét về mặt tín hiệu).

- Khi lọc ta thấy thành phần tần số   p của phần phổ lặp ở ±fs lẫn vào thành phần tần số cao của phổ tru



⇒ tín hiệu được tái lập sẽ không đúng.

6.2 SỰ CHỒNG PHỔ (BIỆT DANH)

- Khi tín hiệu tương tự ở tần số f được lấy mẫu ở tốc độ f_s thì để tìm các tần số tái lập f_o trước tiên ta cộng hoặc trừ vào f bội số của fs:

$$f_o = f \pm mf_s \qquad m=0, 1, 2, \ldots.$$

- Các tần số f_o nằm trong khoảng Nyquist $[-f_s/2, f_s/2]$ là các biệt danh của f.

Ví dụ 6.3. Tín hiệu tương tự ở tần số f =100 Hz.

a. Tín hiệu được lấy mẫu ở tần số fs=120Hz. Tần số của tín hiệu khôi phục là bao nhiêu?

b. Lặp lại khi lấy mẫu ở fs=220 Hz.

6.3. Tín hiệu tương tự ở tần số f =100 Hz.

a. Tín hiệu được lấy mẫu ở tần số fs=120Hz. Tần số của tín hiệu khôi phục là bao nhiêu?

Giải:

a. Khoảng Nyquist [-60Hz, 60Hz].

$\Rightarrow$ tín hiệu được lấy mẫu ko thỏa định lý lấy mẫu

$\Rightarrow$ Các tần số tái lập là:

$$f_o = f \pm mf_s = 100 \pm m120$$

$$= 100,\ 100 \pm 120,\ 100 \pm 240,\ 100 \pm 360, \ldots$$

$$= 100,\ 220,\ \mathbf{-20},\ 340,\ -140,\ 460,\ -260,\ \ldots$$

Chỉ có tần số -20 Hz $\in$ khoảng Nyquist.

$\Rightarrow$ tín hiệu khôi phục có tần số -20Hz (20Hz đảo pha) thay vì 100 Hz.

6.3.Tín hiệu tương tự ở tần số f =100 Hz.

a. Tín hiệu được lấy mẫu ở tần số fs=120Hz. Tần số của tín hiệu khôi phục là bao nhiêu?

b. Lặp lại khi lấy mẫu ở fs=220 Hz.

Giải

b. Khi lấy mẫu ở tốc độ fs=220Hz thì thỏa định lý lấy mẫu. Khoảng Nyquist là (-110Hz,110Hz). Ta có:

$$f_o = f \pm mf_s = 100 \pm m220$$

$$= 100, 320, -120, 540, -340, \ldots$$

- **Vậy không có tần số nào lọt vào khoảng Nyquist ngoại trừ tần số nguyên thủy 100Hz.**

Ví dụ

6.4. Tín hiệu tương tự:

$x(t) = 4 + 3\cos\pi t + 2\cos2\pi t + \cos3\pi t$ (t:ms)

a. Xác định tốc độNyquist.

b. Nếu lấy mẫu ở phân nửa tốc độ Nyquist, xác định tín hiệu $x_o(t)$ sẽ biệt danh với x(t).

6.5 Tín hiệu $x(t)= 2\cos8\pi t +2\cos6\pi t +\cos4\pi t$ (t:s). Được lấy mẫu ở fs=15Hz. Xác định tín hiệu tương tự tái lập

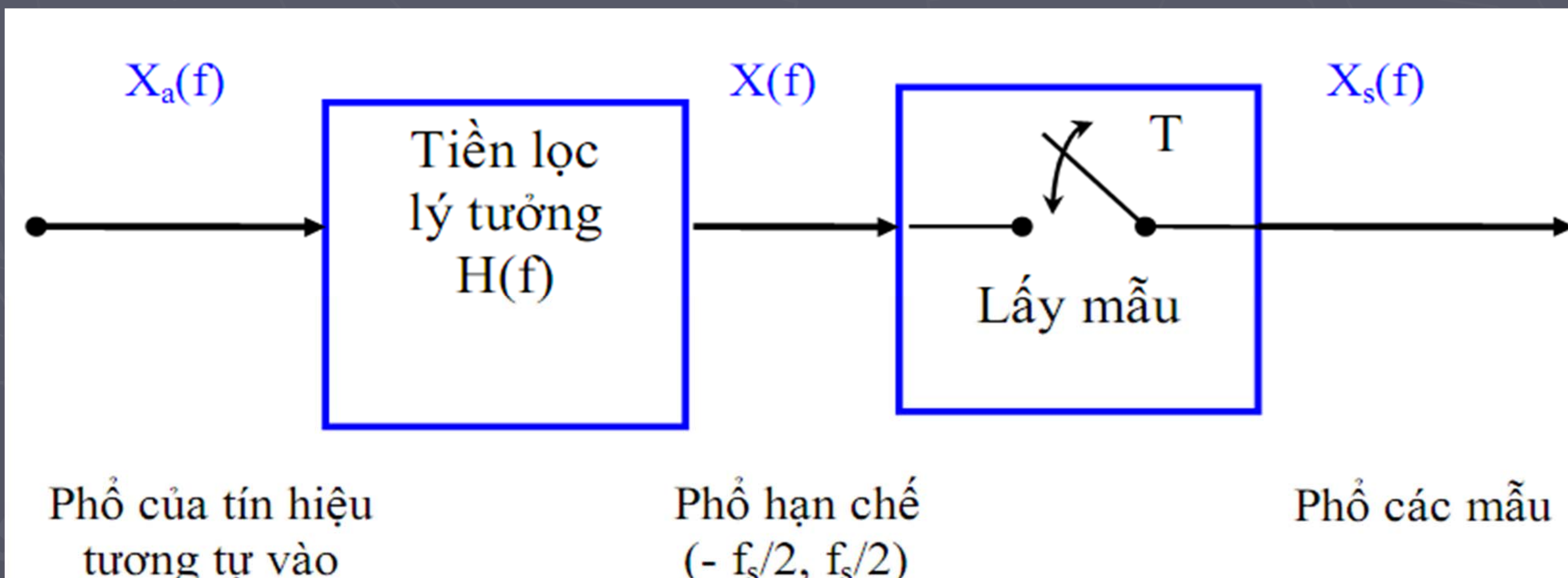
6.6 Tín hiệu $x(t)= 5\cos8\pi t + 4\cos4\pi t \cos6\pi t$ (t:ms).

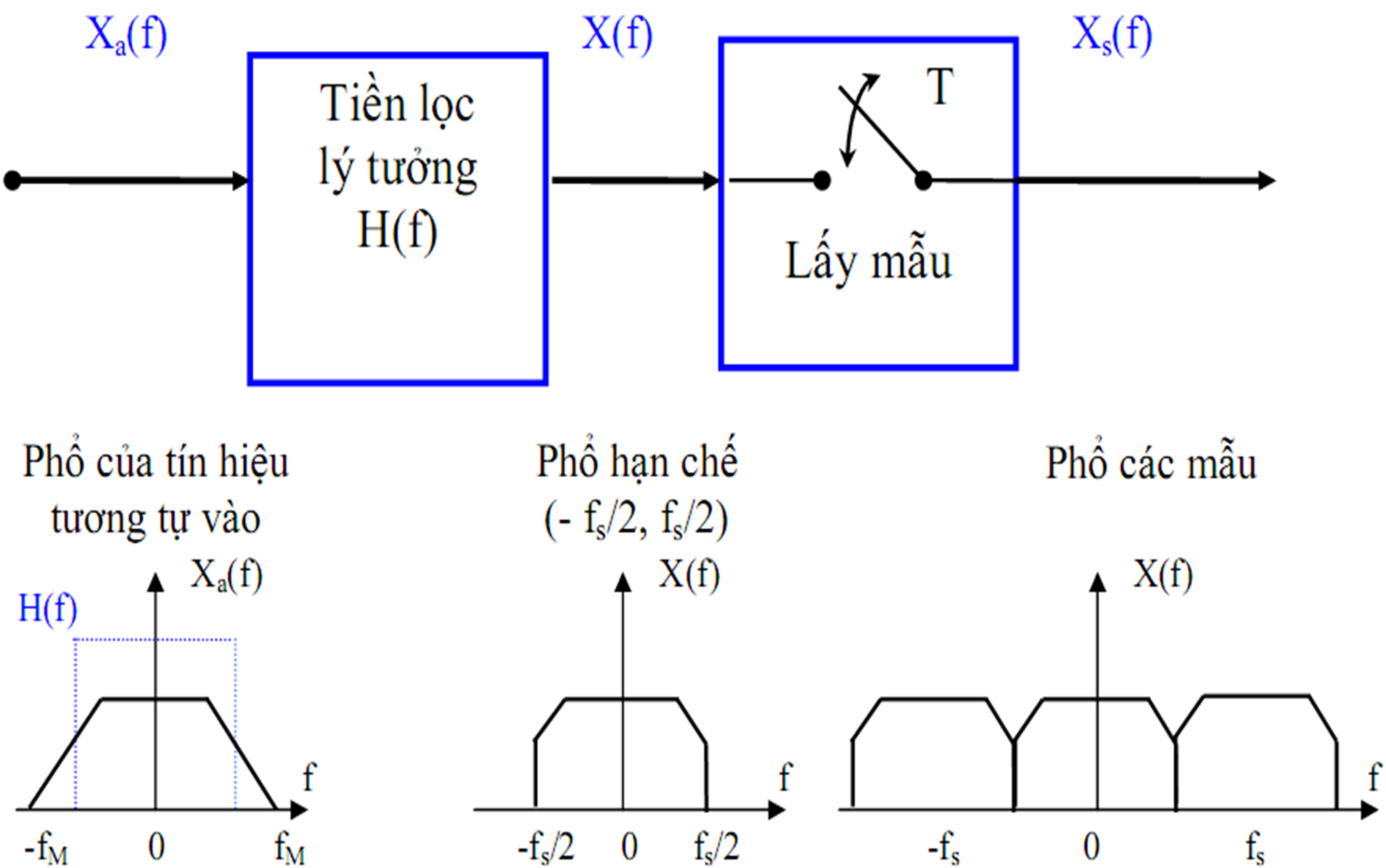
a. Tần số lấy mẫu bằng bao nhiêu để có thể khôi phục lại đúng tín hiệu ban đầu.

b. Xác định tín hiệu tương tự tái lập khi lấy mẫu ở fs =9kHz.

. N C NG T DANH

Mạch tiền lọc chống biệt danh là một lọc thông thấp thêm vào trước mạch lấy mẫu để loại bỏ các thành phần tần số cao hơn tần số cao nhất f_M của tín hiệu mà ta muốn giữ lại (hay các tần số trên fs/2 và cao hơn).





Xa(f)
Tiền lọc lý tưởng H(f)
X(f)
T
Lấy mẫu
Xs(f)
Phổ của tín hiệu tương tự vào
Phổ hạn chế (- fs/2, fs/2)
Phổ các mẫu
Xa(f)
H(f)
f
-fM
0
fM
X(f)
f
-fs/2
0
fs/2
X(f)
f
-fs
0
fs

6.4 LẤY MẪU QUÁ MỨC VÀ TIÊU HỦY

a. Lấy mẫu quá mức

Là tốc độ lấy mẫu cao hơn tốc độ Nyquist nhiều để sự biệt danh càng ít đi và mạch tiền lọc đơn giản hơn.

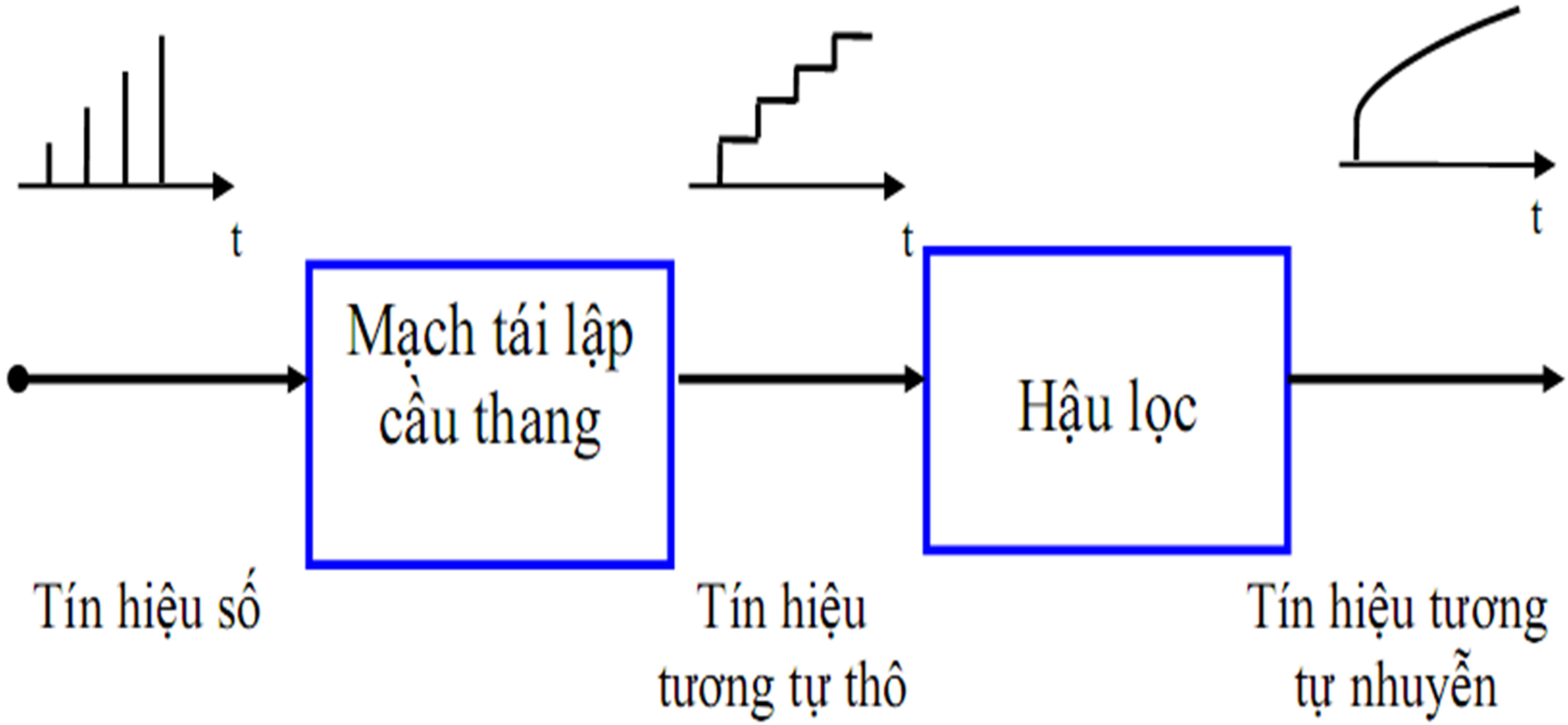
Tuy nhiên có những ứng dụng tần số lấy mẫu phải được giảm lại tần số ban đầu để được xử lý tiếp.

b. Lọc tiêu hủy

Là bộ lọc số thông thấp sau khi lấy mẫu quá mức trước khi đưa tần số lấy mẫu giảm trở lại trị số ban đầu, để bảo đảm là sự biệt danh không xuất hiện trở lại.

6.5 MẠCH KHÔI PHỤC TƯƠNG TỰ

- Mục đích của mạch khôi phục tương tự là chuyển đổi các mẫu rời rạc x(nT) trở thành tín hiệu tương tự $x_o(t)$.
- Dựa theo nguyên lý mạch lấy mẫu và giữ. Mỗi mẫu được duy trì biên độ cho đến khi gặp mẫu kế tiếp (mạch tái lập cầu thang) ta được tín hiệu tương tự thô.
- Sau đó qua mạch hậu lọc (lọc thông thấp) có tác dụng làm trơn tru dạng sóng tương tự thô.



Hình 3.7 Khôi phục tương tự

Chương 7,8:

BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC
BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH

Giảng viên: Ths. Đào Thị Thu Thủy

Chương 7,8:
BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC
BIẾN ĐỔI FOURIER NHANH

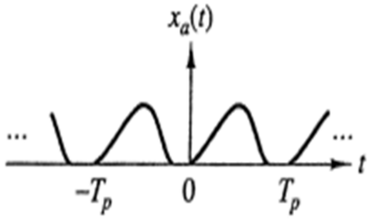
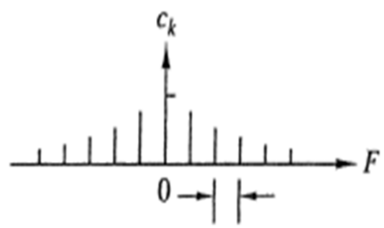
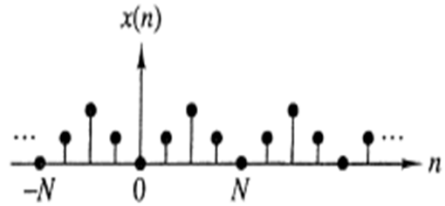
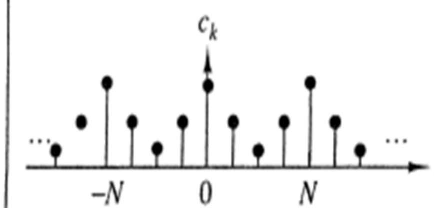
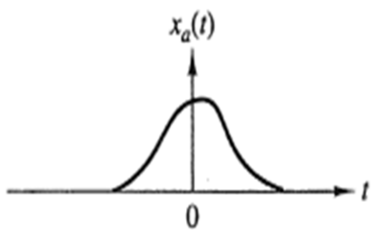
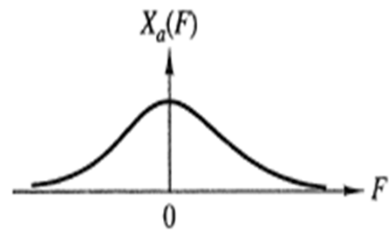
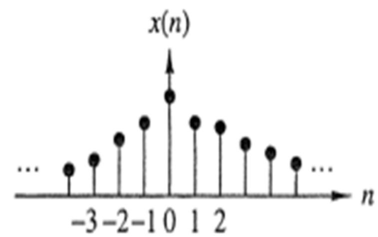
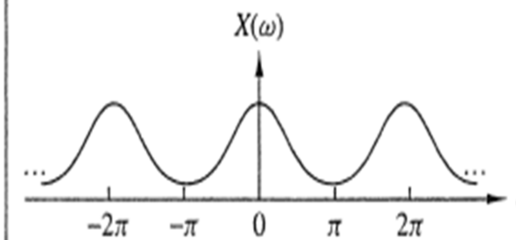
(BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC)

7.1 KHÁI NiỆM DFT

7.2 BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC (DFT)

7.3 CÁC TÍNH CHẤT DFT

7.4 BiẾN ĐỔI FOURIER NHANH (FFT)

	Continuous-time signals		Discrete-time signals	
	Time-domain	Frequency-domain	Time-domain	Frequency-domain
Periodic signals / Fourier series				
	$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x_a(t)e^{-j2\pi kF_0 t}\,dt$ $\Longrightarrow$	$F_0 = \frac{1}{T_p}$	$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(2\pi/N)kn}$ $\Longrightarrow$	
	$\Longleftarrow$	$x_a(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi kF_0 t}$	$\Longleftarrow$	$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j(2\pi/N)kn}$
	Continuous and periodic	Discrete and aperiodic	Discrete and periodic	Discrete and periodic
Aperiodic signals / Fourier transforms				
	$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t)e^{-j2\pi Ft}\,dt$ $\Longrightarrow$		$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$ $\Longrightarrow$	
	$\Longleftarrow$	$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F)e^{j2\pi Ft}\,dF$	$\Longleftarrow$	$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}\,d\omega$
	Continuous and aperiodic	Continuous and aperiodic	Discrete and aperiodic	Continuous and periodic

7.1 KHÁI NiỆM DFT

Biến đổi Fourier dãy x(n):

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

X(ω) có các hạn chế khi xử lý trên thiết bị, máy tính:

- Tần số ω liên tục
- Độ dài x(n) là vô hạn: n biến thiên -∞ đến ∞

Khi xử lý X(Ω) trên thiết bị, máy tính cần:

- Rời rạc tần số ω -> ω_K
- Độ dài x(n) hữu hạn là N: n = 0 ÷ N -1

⇒ *Biến đổi Fourier của dãy có độ dài hữu hạn theo tần số rời rạc, gọi tắt là* biến đổi Fourier rời rạc – DFT (Discrete Fourier Transform)

7.2 BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC - DFT

► **DFT** của x(n) có độ dài N định nghĩa:

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & : 0 \le k \le N-1 \\ 0 & : k \quad \text{còn lại} \end{cases}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \Rightarrow X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & : 0 \le k \le N-1 \\ 0 & : k \quad \text{còn lại} \end{cases}$$

► **W_N** tuần hòan với độ dài **N:**

$$W_N^{(r+mN)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}(r+mN)} = e^{-j\frac{2\pi}{N}r} = W_N^r$$

► X(k) biểu diễn dưới dạng modun & argument:

$$X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)}$$

Trong đó:

$|X(k)|$ - phổ rời rạc biên độ

$\varphi(k) = \arg[X(k)]$ - phổ rời rạc pha

► **IDFT:**

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} & : 0 \le n \le N-1 \\ 0 & : n \text{ còn lại} \end{cases}$$

► **Cặp biến đổi Fourier rời rạc:**

$$\begin{cases} X(k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} & : 0 \le k \le N-1 \\ x(n) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} & : 0 \le n \le N-1 \end{cases}$$

Ví dụ 7.1: Tìm DFT của dãy: $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{kn}$$

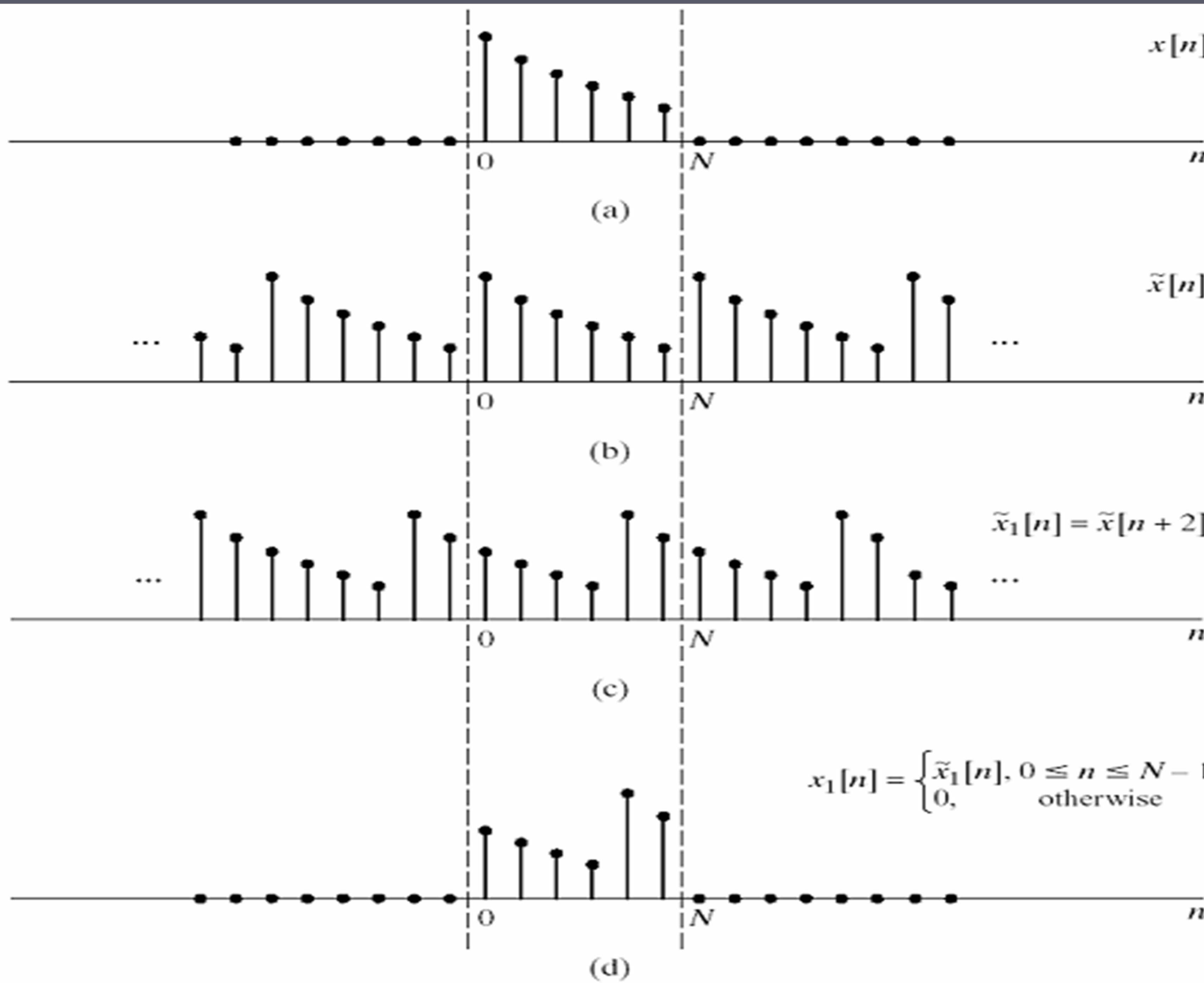
$$W_4^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j; W_4^2 = -1; W_4^3 = j$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^0 = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 10$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^n = x(0) + x(1)W_4^1 + x(2)W_4^2 + x(3)W_4^3 = -2 + j2$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{2n} = x(0) + x(1)W_4^2 + x(2)W_4^4 + x(3)W_4^6 = -2$$

$$X(3) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_4^{3n} = x(0) + x(1)W_4^3 + x(2)W_4^6 + x(3)W_4^9 = -2 - j2$$


x[n]
n
0
N
(a)
x̃[n]
(b)
x̃₁[n] = x̃[n + 2]
(c)
x₁[n] = { x̃₁[n], 0 ≤ n ≤ N − 1; 0, otherwise
(d)

7.3 CÁC TÍNH CHẤT DFT

a) Tuyến tính

- Nếu: $x_1(n)_N \xleftrightarrow{DFT} X_1(k)_N$ $\quad$ $x_2(n)_N \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)_N$
- Thì: $a_1x_1(n)_N + a_2x_2(n)_N \xleftrightarrow{DFT} a_1X_1(k)_N + a_2X_2(k)_N$

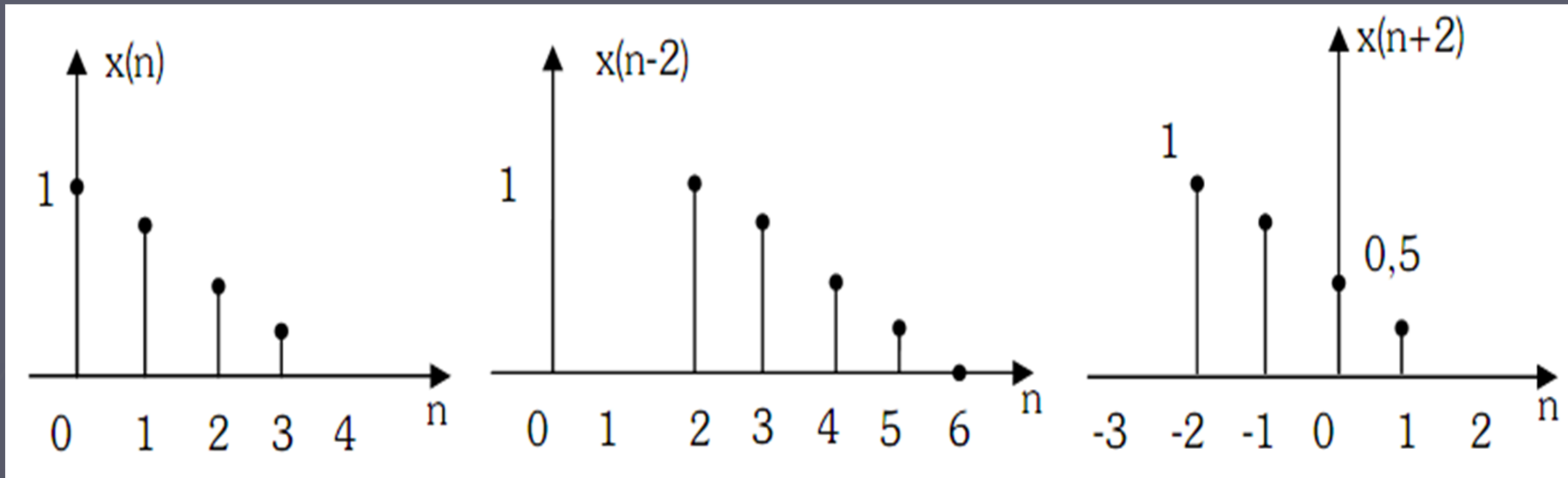
Nếu: $L_{x_1} = N_1 \neq N_2 = L_{x_2}$ Chọn: $N = \max\{N_1, N_2\}$

b) Dịch vòng:

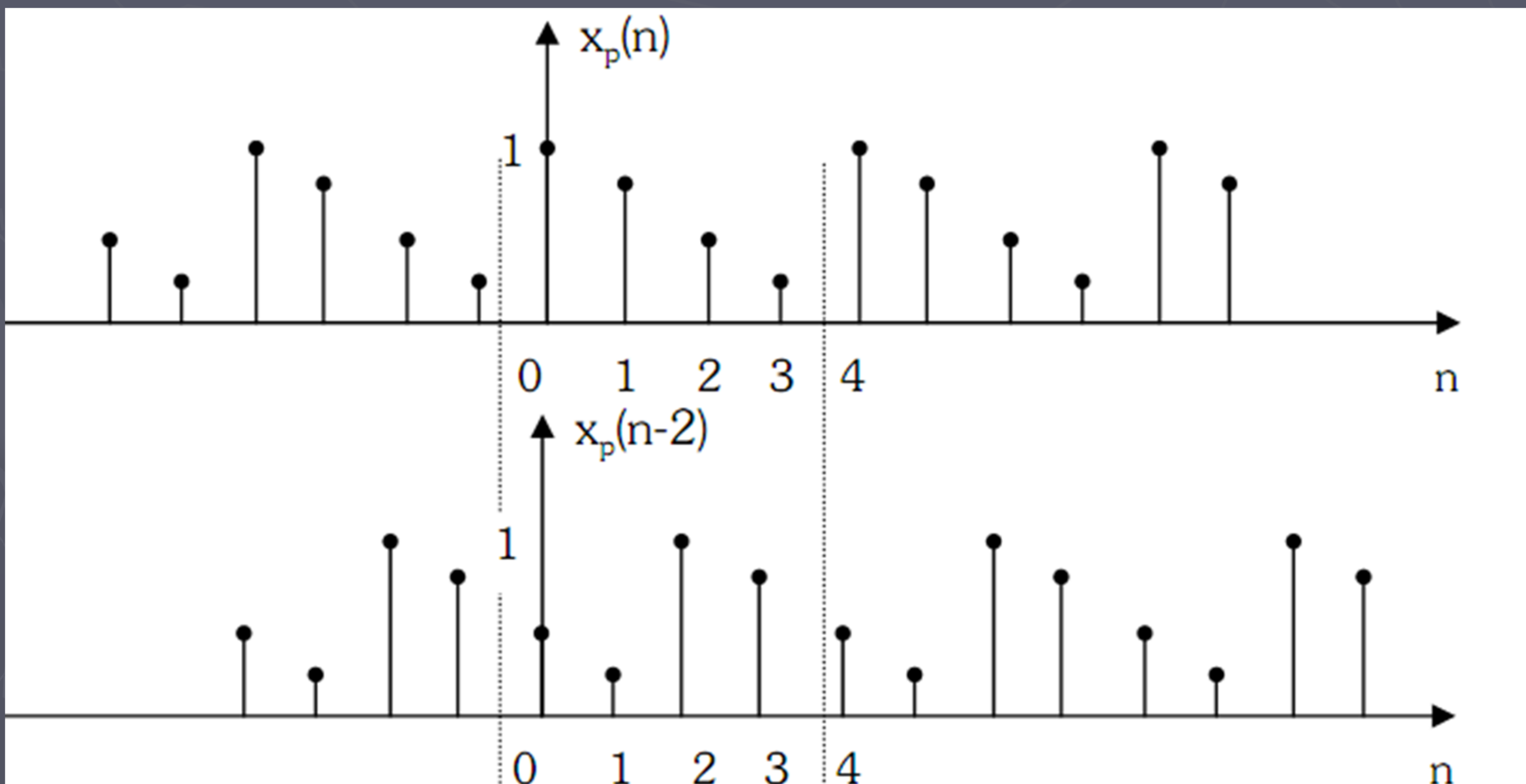
- Nếu: $x(n)_N \xleftrightarrow{DFT} X(k)_N$
- Thì: $x(n-n_0)_N \xleftrightarrow{DFT} W_N^{kn_0} X(k)_N$

Với: $x(n-n_0)_N = \tilde{x}(n-n_0)_N \,\mathrm{rect}_N(n)$

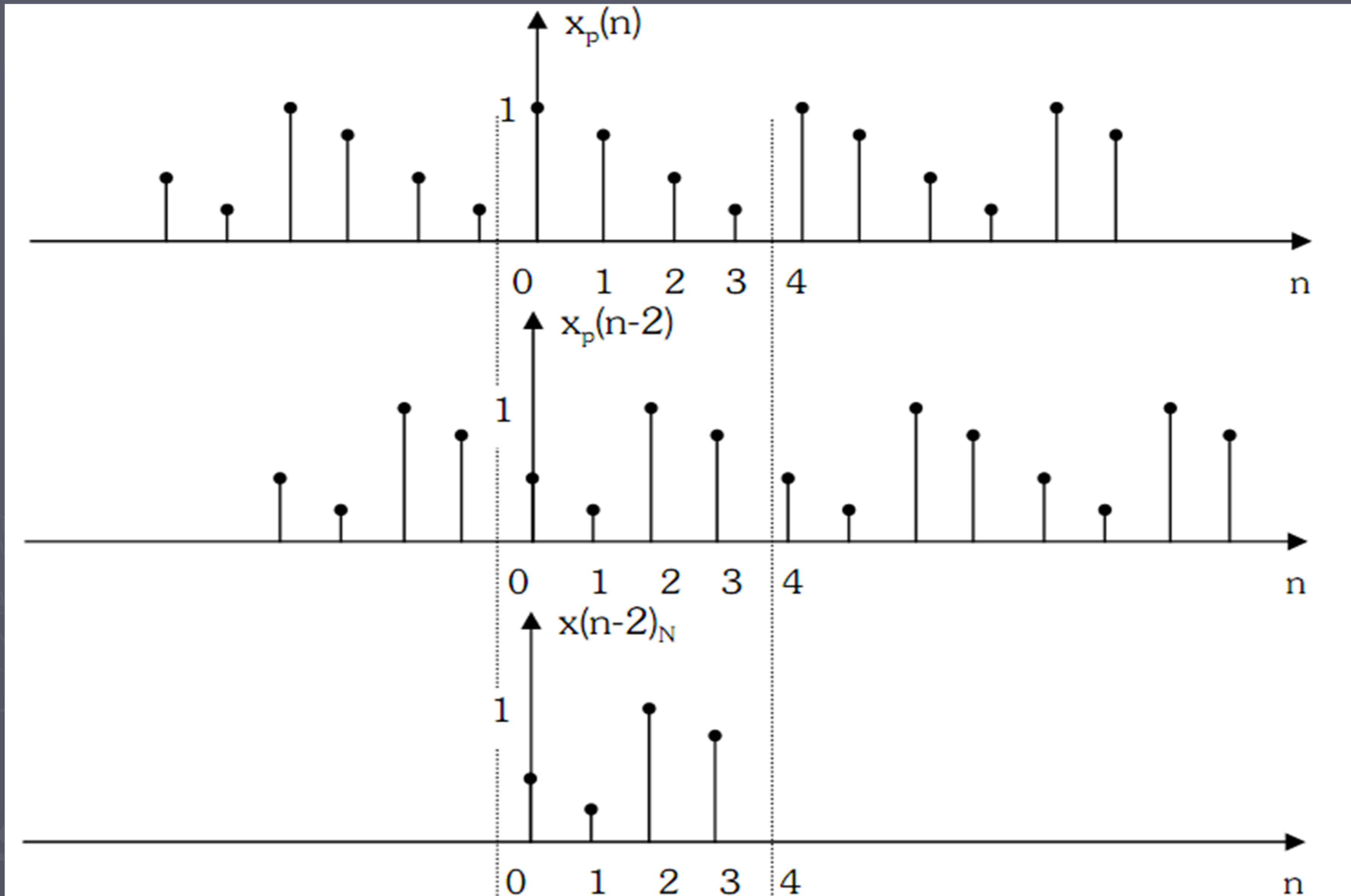
gọi là dịch vòng của **$x(n)_N$** đi **n_0** đơn vị



x(n)
1
0 1 2 3 4
n
x(n-2)
1
0 1 2 3 4 5 6
n
x(n+2)
1
0,5
-3 -2 -1 0 1 2
n



$x_p(n)$
1
0 1 2 3 4
n
$x_p(n-2)$
1
0 1 2 3 4
n

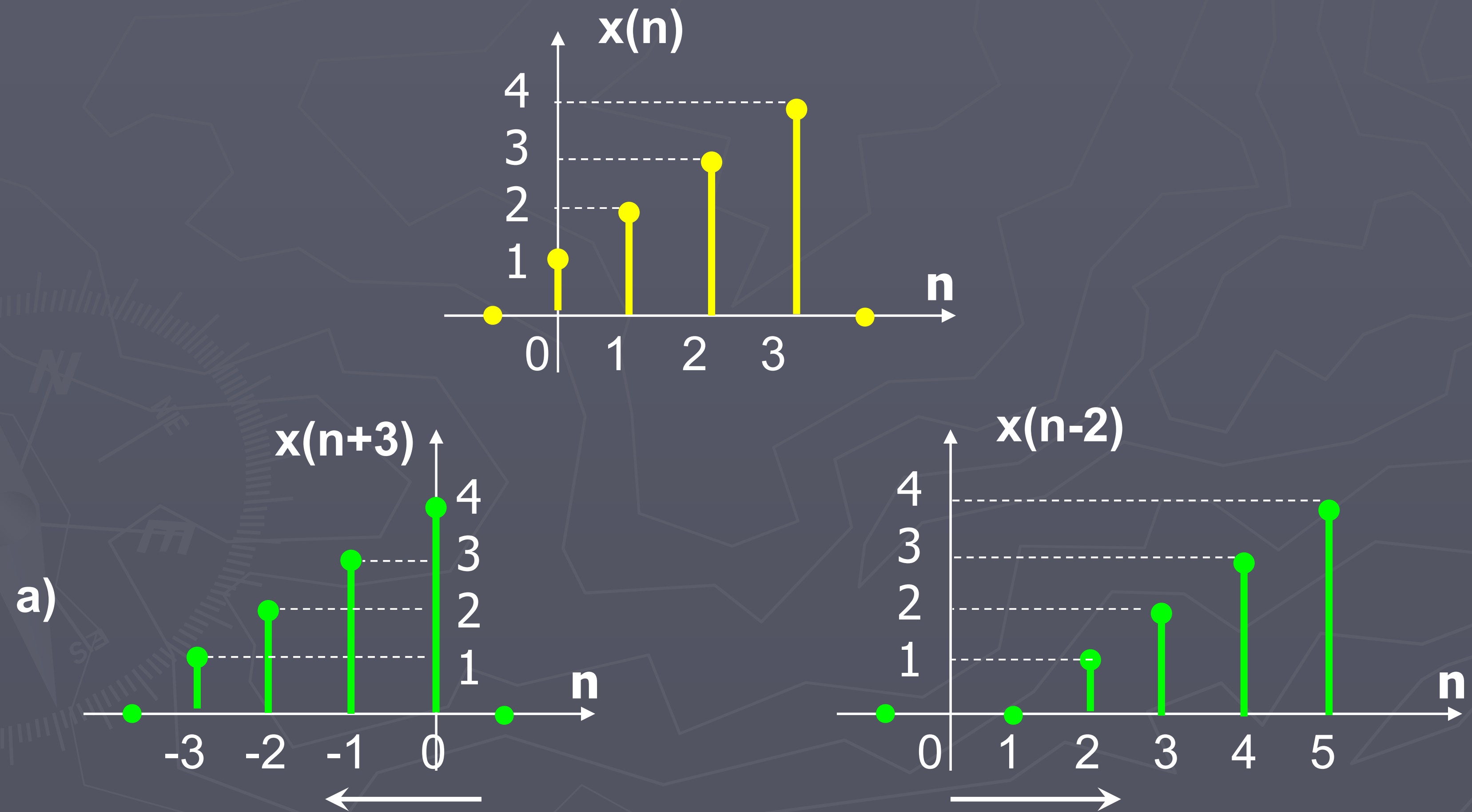


xp(n)
1
0 1 2 3 4
n
xp(n-2)
1
0 1 2 3 4
n
x(n-2)N
1
0 1 2 3 4
n

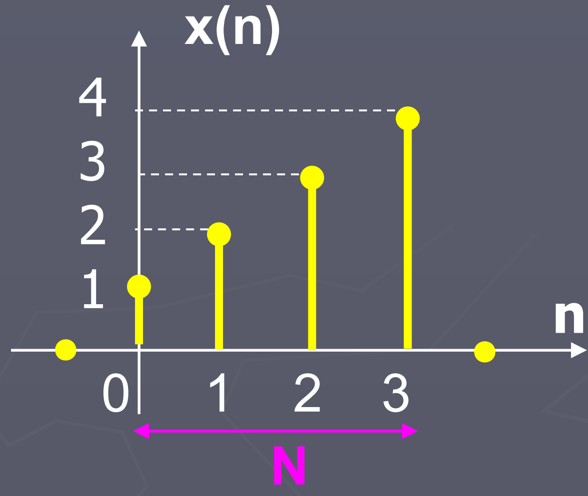
Ví dụ 7.2: Cho: $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$

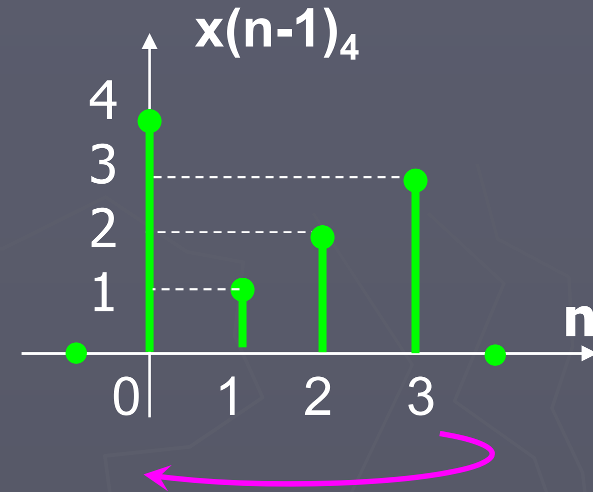
a) Tìm dịch tuyến tính: **x(n+3), x(n-2)**

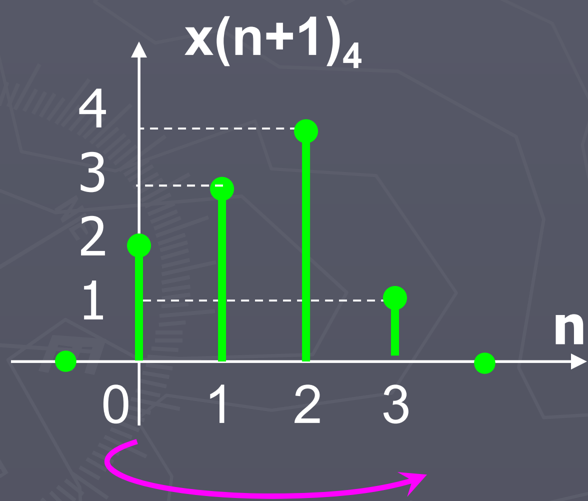
b)Tìm dịch vòng: **$x(n+3)_4$, $x(n-2)_4$**



b)







$$x(n-2)_4 = \left\{\underset{\uparrow}{3},4,1,2\right\}$$

$$x(n+3)_4 = \left\{\underset{\uparrow}{4},1,2,3\right\}$$

c) Chập vòng:

► Nếu: $x_1(n)_N \xleftrightarrow{DFT} X_1(k)_N$ $x_2(n)_N \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)_N$

► Thì: $x_1(n)_N \otimes x_2(n)_N \xleftrightarrow{DFT} X_1(k)_N X_2(k)_N$

Với: $x_1(n)_N \otimes x_2(n)_N = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N x_2(n-m)_N$

Chập vòng 2 dãy $x_1(n)$ & $x_2(n)$

Và: $x_2(n-m)_N = \tilde{x}_2(n-m)_N rect_N(n)$

Dịch vòng dãy $x_2(-m)$ đi n đ/vị

Chập vòng có tính giao hóan:

$$x_1(n)_N \otimes x_2(n)_N = x_2(n)_N \otimes x_1(n)_N$$

Nếu: $L_{x_1} = N_1 \neq N_2 = L_{x_2}$ Chọn: $N = \max\{N_1, N_2\}$

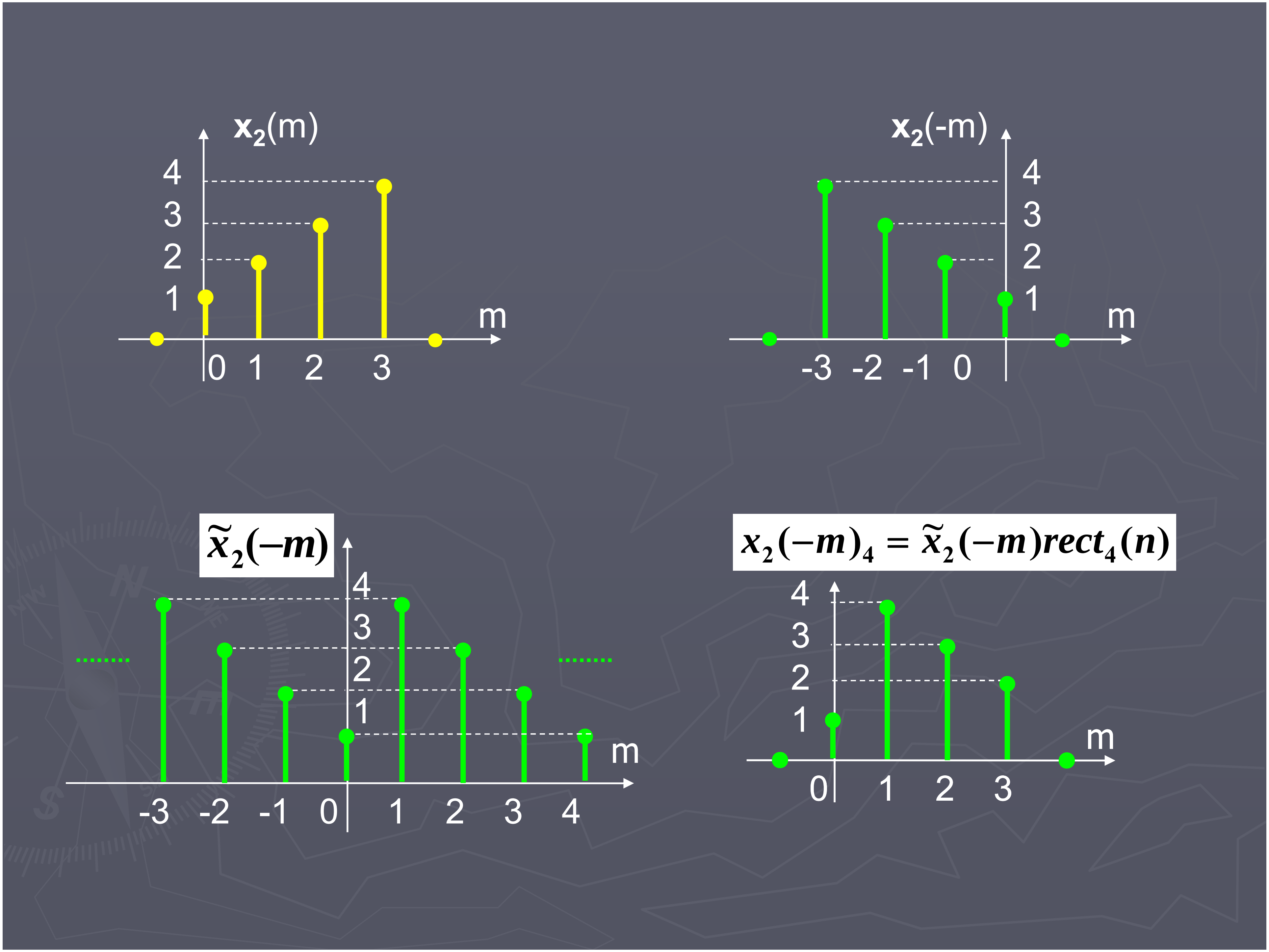
Ví dụ 7.3: Tìm chập vòng 2 dãy $x_1(n) = \{\underset{\uparrow}{2},3,4\}$ $x_2(n) = \{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$

- Chọn độ dài N: $N_1 = 3, N_2 = 4 \Rightarrow N = \max\{N_1, N_2\} = 4$

$$x_3(n)_4 = x_1(n)_4 \otimes x_2(n)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4 x_2(n-m)_4 : 0 \le n \le 3$$

- Đổi biến n->m: $x_1(m) = \{\underset{\uparrow}{2},3,4,0\}$ $x_2(m) = \{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$

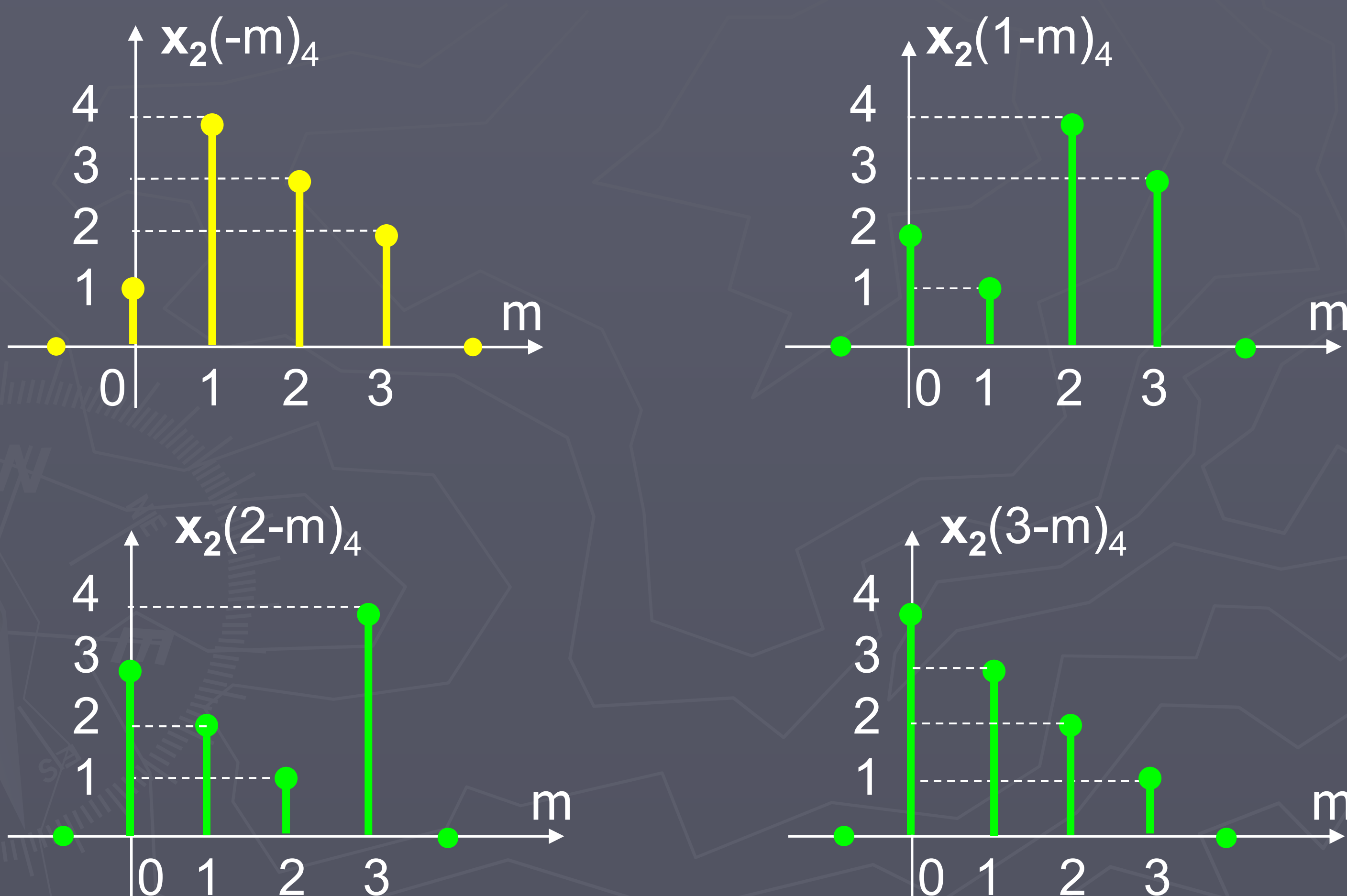
- Xác định $x_2(-m)_4$: $x_2(-m)_4 = \tilde{x}_2(-m)_4 rect_4(n) = \{\underset{\uparrow}{1},4,3,2\}$



$x_2(m)$
4
3
2
1
m
0 1 2 3
$x_2(-m)$
4
3
2
1
m
-3 -2 -1 0
$\widetilde{x}_2(-m)$
4
3
2
1
m
-3 -2 -1 0 1 2 3 4
$x_2(-m)_4 = \widetilde{x}_2(-m) rect_4(n)$
4
3
2
1
m
0 1 2 3

- Xác định $x_2(n\text{-}m)$ là dịch vòng của $x_2(-m)$ đi n đơn vị

n>0: dịch vòng sang phải, n<0: dịch vòng sang trái



- Tìm biến đổi nghịch IDFT 10 điểm của
  $X(k) = 1 + 2\delta(k)$ với $0 \le k \le 9$

- Nhân các mẫu **x_1**(m) & **x_2**(n-m) và cộng lại:

$$x_3(n)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4\, x_2(n-m)_4 : 0 \le n \le 3$$

- **n=0:**

$$x_3(0)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4\, x_2(0-m)_4 = 26$$

- **n=1:**

$$x_3(1)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4\, x_2(1-m)_4 = 23$$

- **n=2:**

$$x_3(2)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4\, x_2(2-m)_4 = 16$$

- **n=3:**

$$x_3(3)_4 = \sum_{m=0}^{3} x_1(m)_4\, x_2(3-m)_4 = 25$$

Vậy:

$$x_3(n)_4 = x_1(n)_4 \otimes x_2(n)_4 = \{\underset{\uparrow}{2}6,23,16,25\}$$

7.4 BiẾN ĐỔI FOURIER NHANH FFT

7.4.1 KHÁI NiỆM BiẾN ĐỔI FOURIER NHANH FFT

- Vào những năm thập kỷ 60, khi công nghệ vi xử lý phát triển chưa mạnh thì thời gian xử lý phép tóan DFT trên máy tương đối chậm, do số phép nhân phức tương đối lớn.
- DFT của x(n) có độ dài N: $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \; : \;\; 0 \le k \le N-1$
- Để tính **X(k)**, với mỗi giá trị **k** cần có **N** phép nhân và (**N-1**) phép cộng, vậy với **N** giá trị **k** thì cần có **N^2** phép nhân và **N(N-1)** phép cộng.
- Để khắc phục về mặt tốc độ xử lý của phép tính DFT, nhiều tác giả đã đưa ra các thuật tóan riêng dựa trên DFT gọi là FFT (Fast Fourier Transform).

7.4.2 THUẬT TOÁN FFT CƠ SỐ 2

a. THUẬT TÓAN FFT CƠ SỐ 2 PHÂN THEO THỜI GIAN

- Giả thiết dãy x(n) có độ dài **$N=2^M$**, nếu không có dạng lũy thừa 2 thì thêm vài mẫu 0 vào sau dãy x(n).

- Thuật tóan dựa trên sự phân chia dãy vào x(n) thành các dãy nhỏ, do biến n biểu thị cho trục thời gian nên gọi là phân chia theo thời gian.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0,2,4...}^{N-1} x(n) W_N^{kn} + \sum_{n=1,3,5...}^{N-1} x(n) W_N^{kn}$$

- Thay **n=2r** với n chẵn và **n=2r+1** với n lẽ:

$$X(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r) W_N^{2kr} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1) W_N^{k(2r+1)}$$

Do: $$W_N^{k2r} = e^{j\frac{2\pi}{N}k2r} = e^{j\frac{2\pi}{N/2}kr} = W_{N/2}^{kr}$$

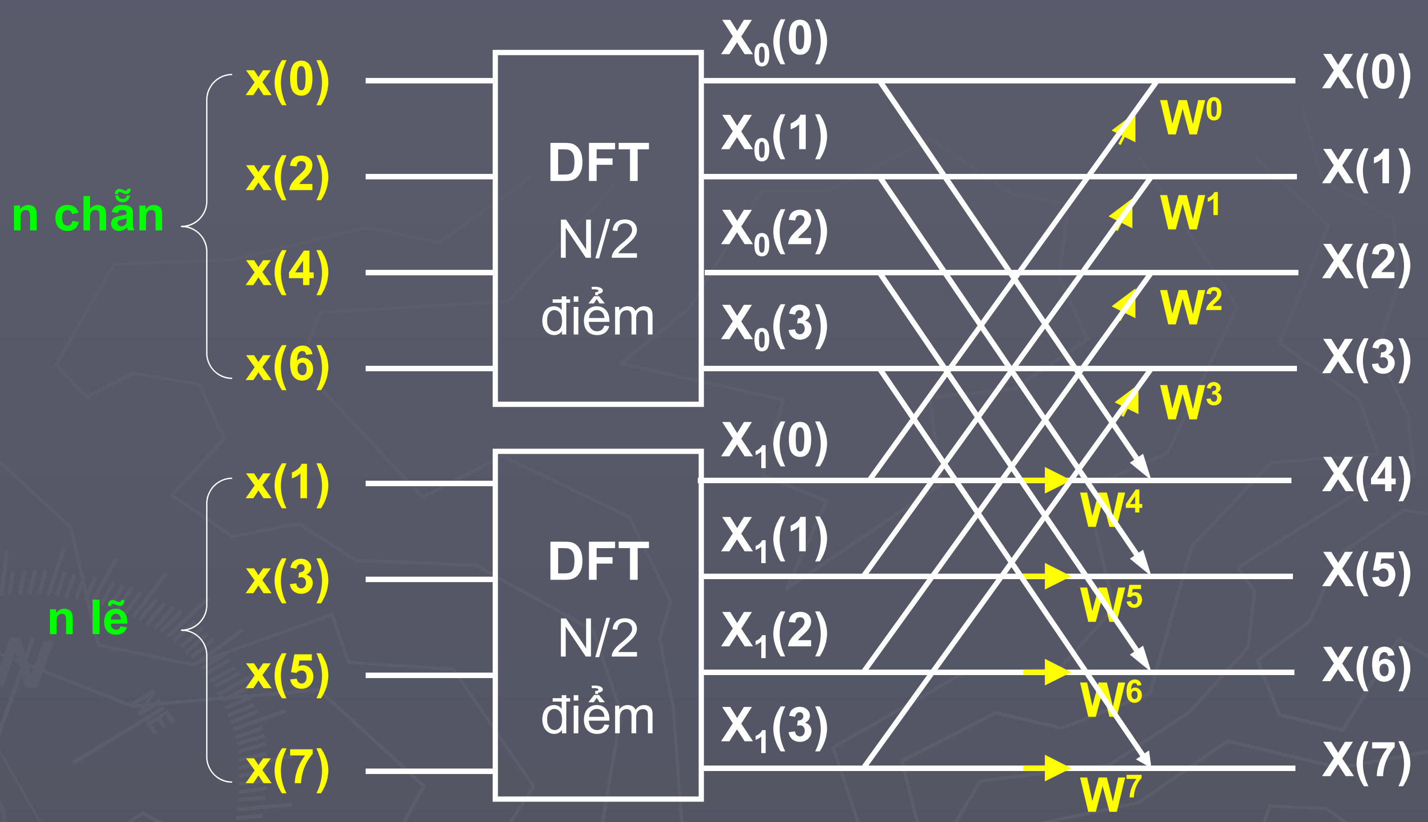
$$\Rightarrow \quad X(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{kr} + W_N^k . \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_{N/2}^{kr}$$

Đặt: $$X_0(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{kr} \qquad X_1(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)W_{N/2}^{kr}$$

$$\Rightarrow \quad X(k) = X_0(k) + W_N^k . X_1(k)$$

- **$X_0(k)$** – DFT của N/2 điểm ứng với chỉ số n chẵn
- **$X_1(k)$** – DFT của N/2 điểm ứng với chỉ số n lẽ
- Lấy ví dụ minh họa cho x(n) với N=8

- **Phân chia DFT- N điểm -> 2 DFT- N/2 điểm;**



► Qui ước cách tính X(k) theo lưu đồ:

- Nhánh ra của 1 nút bằng tổng các nhánh vào nút đó
- Giá trị mỗi nhánh bằng giá trị nút xuất phát nhân hệ số

- Sau đó đánh lại chỉ số theo thứ tự các mẫu x(n), tiếp tục phân chia DFT của N/2 điểm thành 2 DFT của N/4 điểm theo chỉ số n chẵn và lẽ và cứ thế tiếp tục phân chia cho đến khi nào còn DFT 2 điểm thì dừng lại.
- Ví dụ **$X_0(k)$** được phân chia:

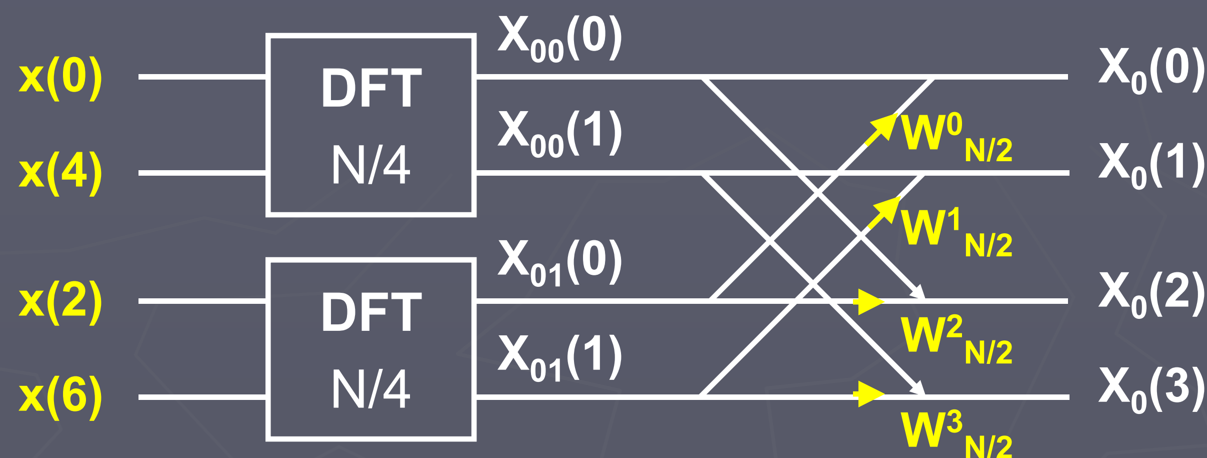
$$X_0(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)W_{N/2}^{kr} = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} g(r)W_{N/2}^{kr}$$

$$= \sum_{r=0,2,4...}^{(N/2)-1} g(r)W_{N/2}^{kr} + \sum_{r=1,3,5...}^{(N/2)-1} g(r)W_{N/2}^{kr}$$

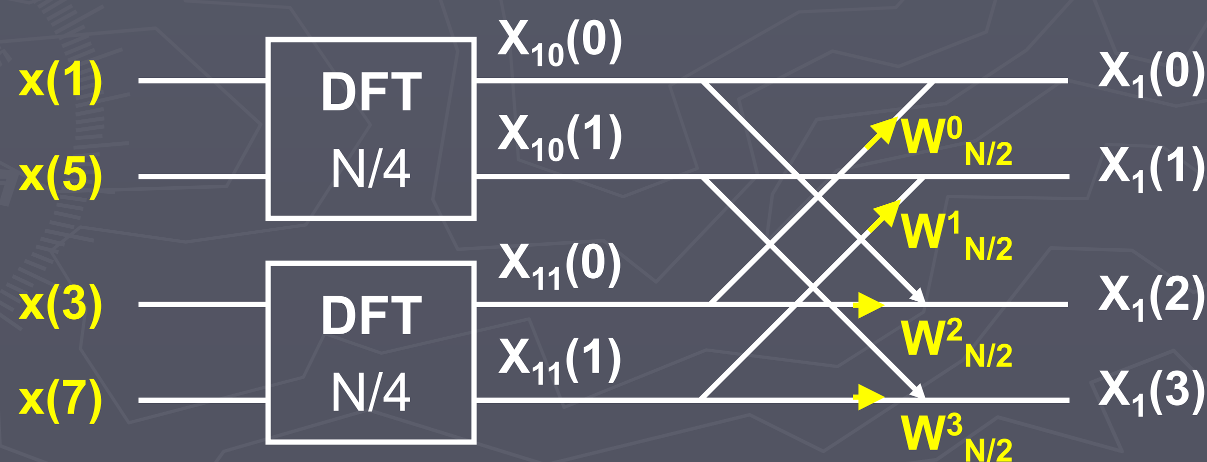
$$= \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l)W_{N/4}^{kl} + W_{N/2}^{k} \sum_{l=0}^{(N/4)-1} g(2l+1)W_{N/4}^{kl}$$

$$= X_{00}(k) + W_{N/2}^{k}.X_{01}(k)$$

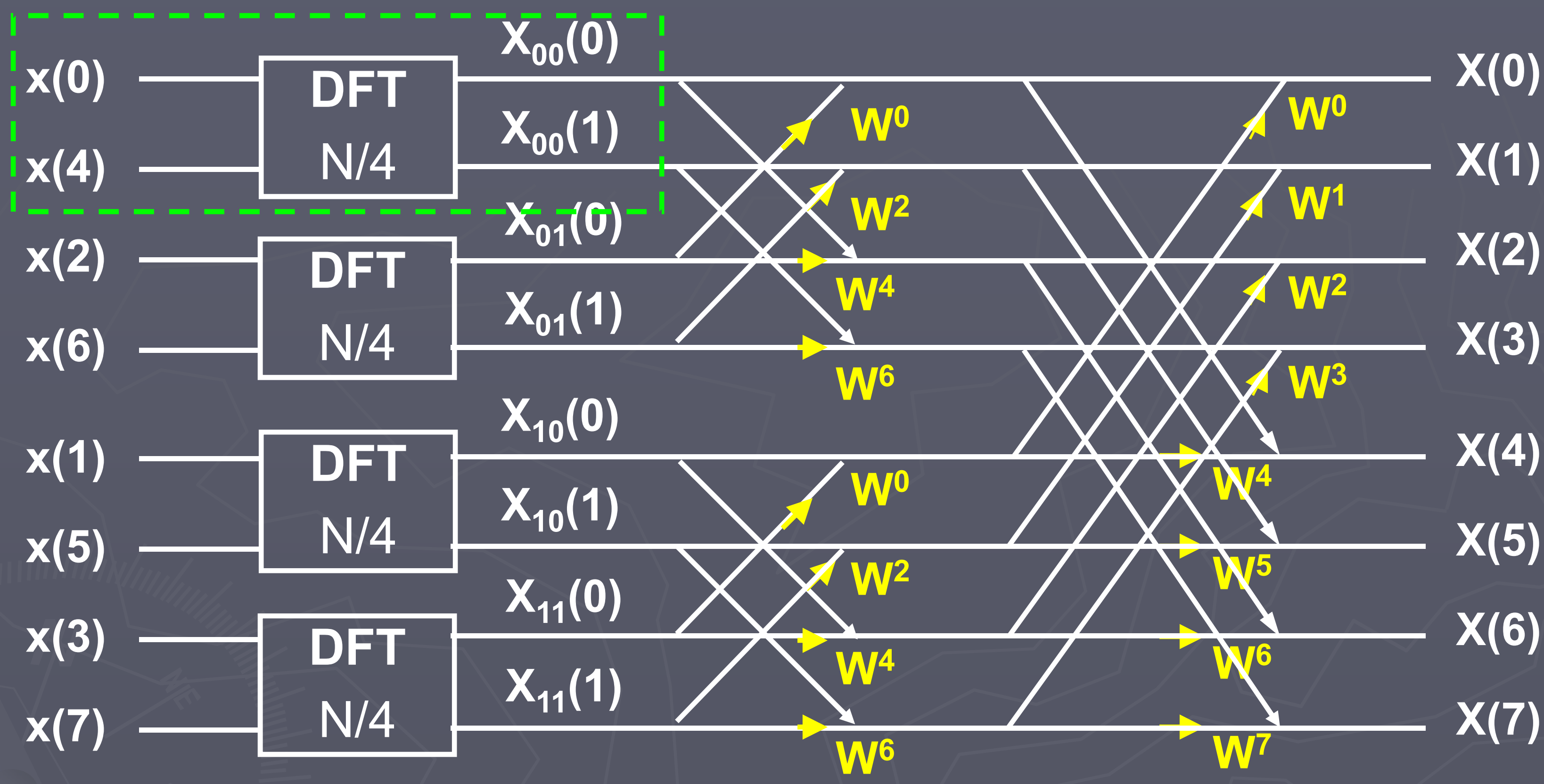
- **Phân chia DFT- N/2 điểm -> 2 DFT- N/4 điểm của $X_0(k)$**



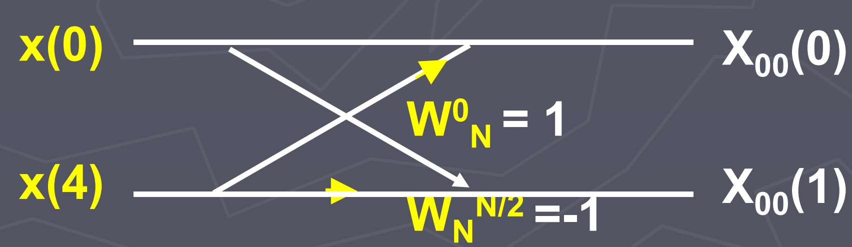
- **Phân chia $X_1(k)$ tương tự:** $X_1(k) = X_{10}(k) + W^k_{N/2}.X_{11}(k)$



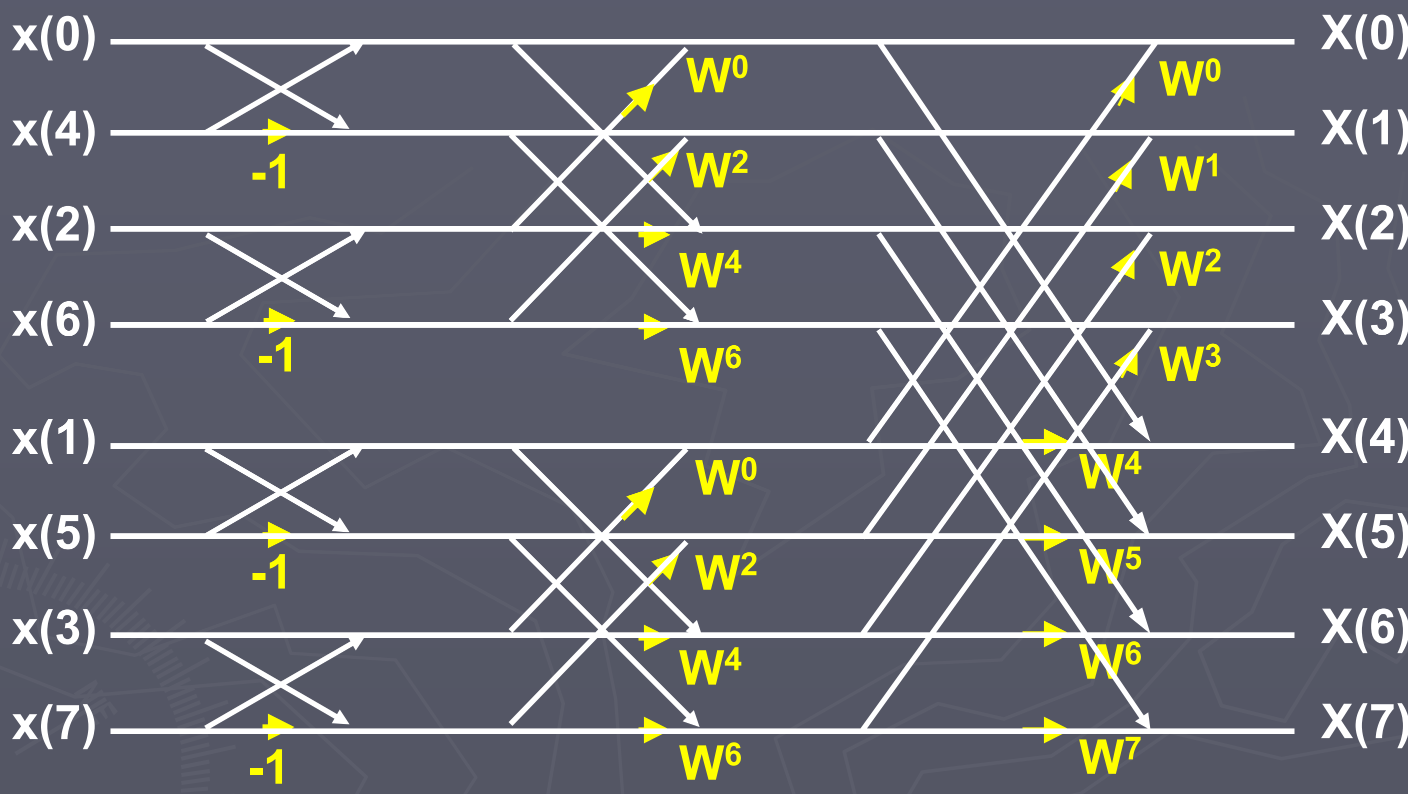
- Lưu đồ DFT dãy x(n) sau 2 lần phân chia với N=8

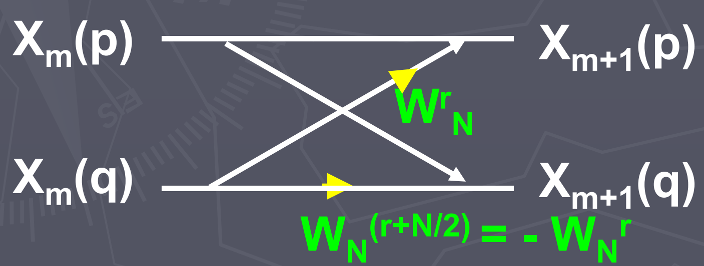


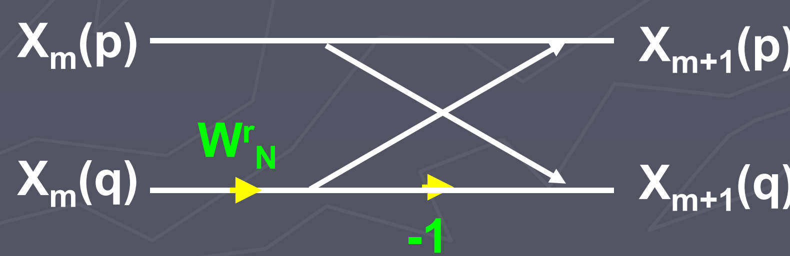
- Lưu đồ DFT 2 điểm:



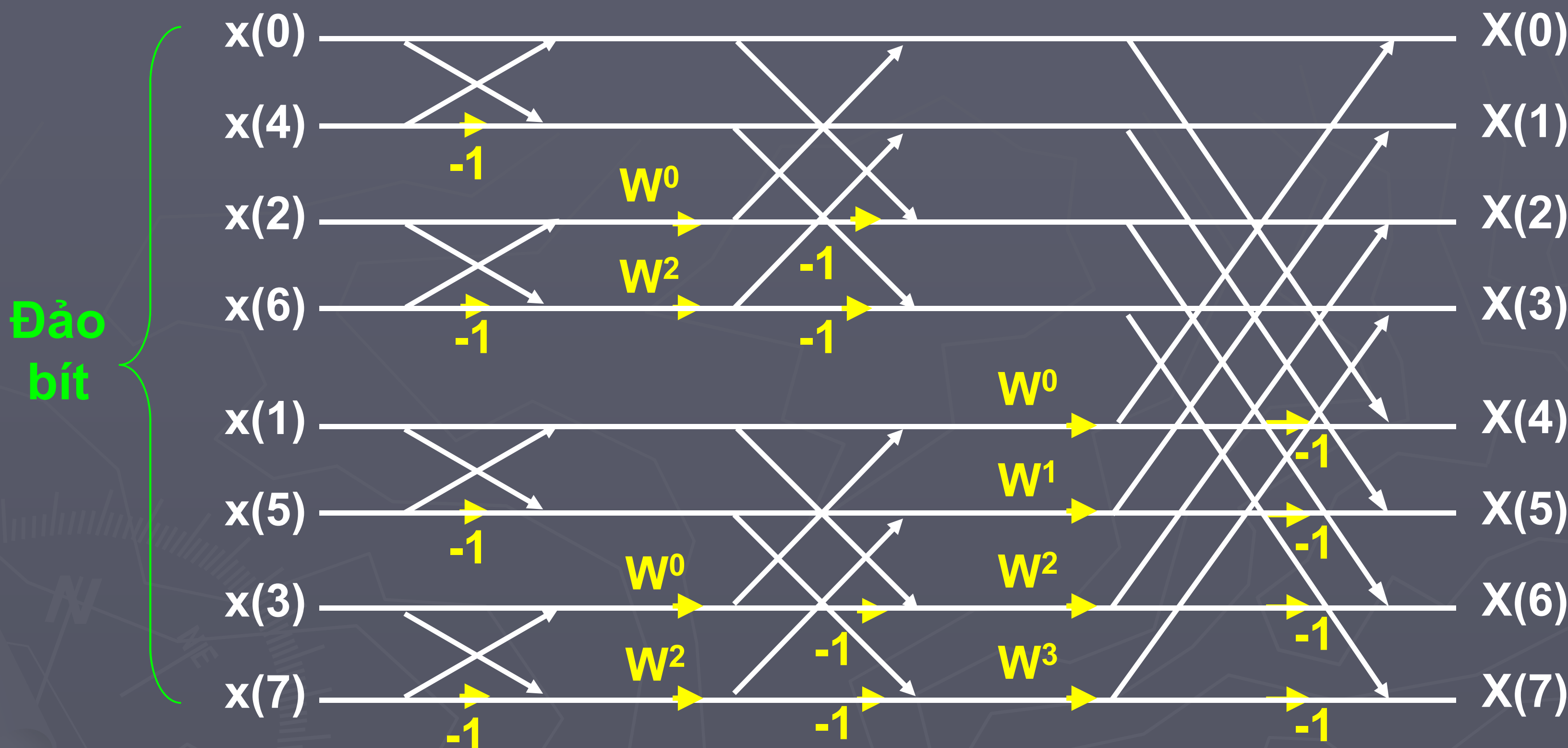
- Lưu đồ DFT dãy x(n) sau 3 lần phân chia với N=8







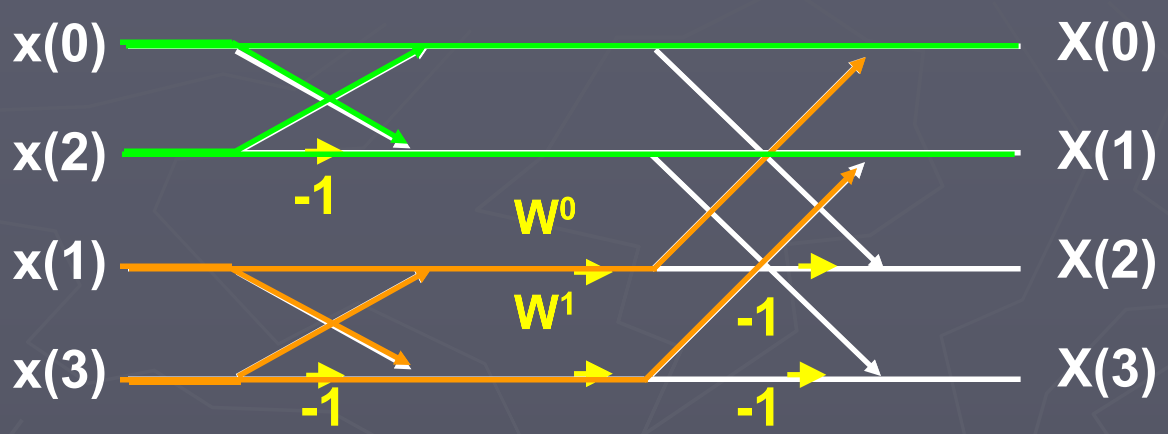
▪ Lưu đồ DFT dãy x(n) sau 3 lần phân chia với N=8



- Với **N=2^M -> M** lần phân chia
- Số phép nhân = số phép cộng = **NM/2=(N/2)log$_2$N**

Ví dụ : Hãy vẽ lưu đồ và tính FFT cơ số 2 phân theo t/g

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$$



- k=0: $X(0) = [x(0) + x(2)] + W^0[x(1) + x(3)] = 10.$
- k=1: $X(1) = [x(0) - x(2)] + W^1[x(1) - x(3)] = -2 + j2.$
- k=2: $X(2) = [x(0) + x(2)] - W^0[x(1) + x(3)] = -2.$
- k=3: $X(3) = [x(0) - x(2)] - W^1[x(1) - x(3)] = -2 - j2.$

- Bảng mô tả qui luật đảo bít:

Chỉ số tự nhiên	Số nhị phân chưa đảo (N_2,N_1,N_0)	Số nhị phân đảo (N_0,N_1,N_2)	Chỉ số đảo
0	0 0 0	0 0 0	0
1	0 0 1	1 0 0	4
2	0 1 0	0 1 0	2
3	0 1 1	1 1 0	6
4	1 0 0	0 0 1	1
5	1 0 1	1 0 1	5
6	1 1 0	0 1 1	3
7	1 1 1	1 1 1	7

b. THUẬT TÓAN FFT CƠ SỐ 2 PHÂN THEO TẦN SỐ

- Thuật tóan dựa trên sự phân chia dãy ra X(k) thành các dãy nhỏ, do biến k biểu thị cho trục tần số nên gọi là phân chia theo tần số.

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=N/2}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x(n)W_N^{kn}+\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x(n+N/2)W_N^{k(n+N/2)}$$

$$=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x(n)W_N^{kn}+W_N^{kN/2}\sum_{n=0}^{(N/2)-1}x(n+N/2)W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{(N/2)-1}\left[x(n)+(-1)^k x(n+N/2)\right]W_N^{kn}$$

► Với k chẵn, thay **k=2r**:

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[x(n) + x(n+N/2)\right] W_{N/2}^{rn}$$

► Với k lẽ, thay **k=2r+1**

$$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{\left[x(n) - x(n+N/2)\right] W_N^{n}\right\} W_{N/2}^{rn}$$

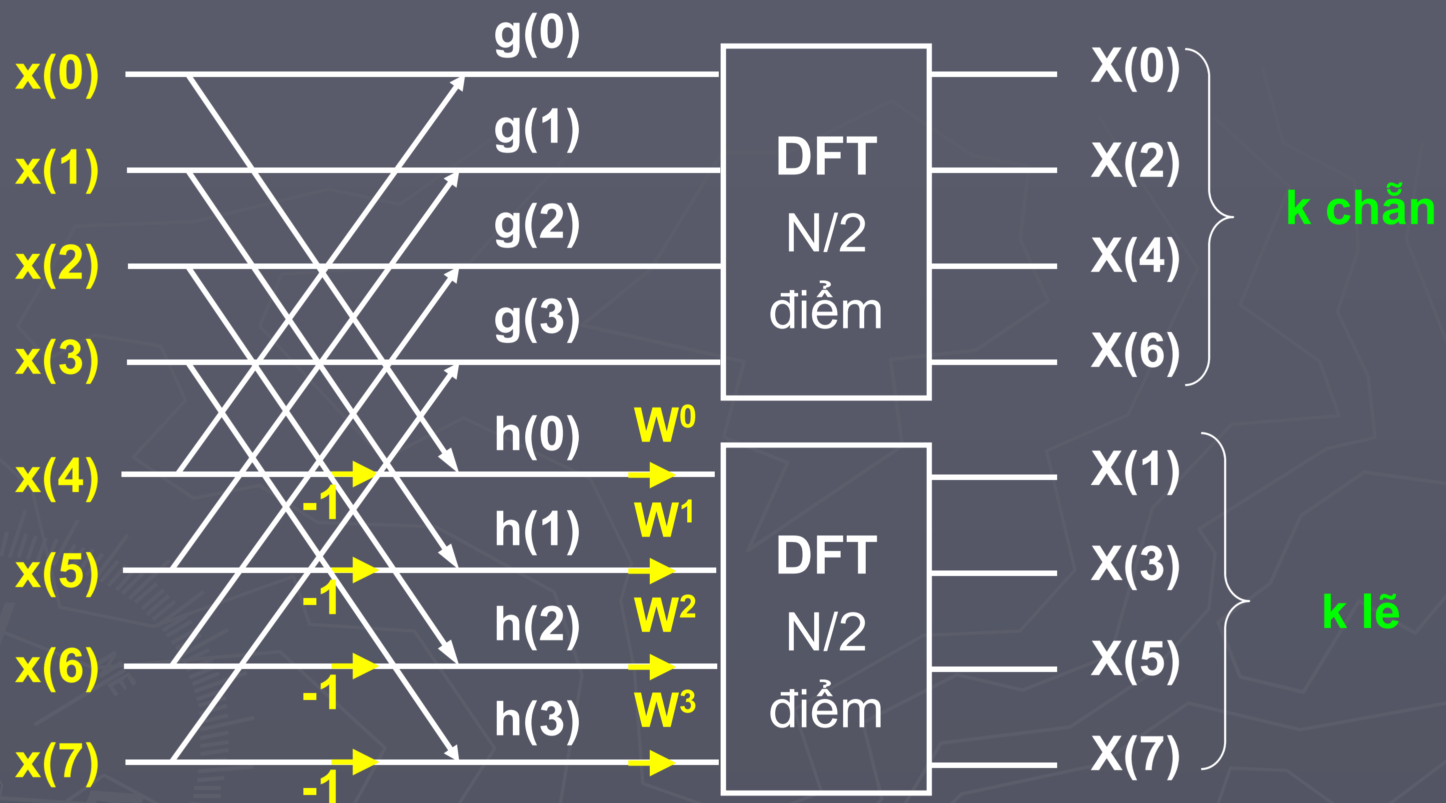
► Đặt: $g(n) = x(n) + x(n+N/2); \;\; h(n) = x(n) - x(n+N/2)$

$$X(2r) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g(n) W_{N/2}^{rn} \qquad X(2r+1) = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left[h(n) W_N^{n}\right] W_{N/2}^{rn}$$

► **X(2r)** – DFT của N/2 điểm ứng với chỉ số k chẵn

► **X(2r+1)** – DFT của N/2 điểm ứng với chỉ số k lẽ

- **Phân chia DFT N=8 điểm -> 2 DFT N/2= 4 điểm**

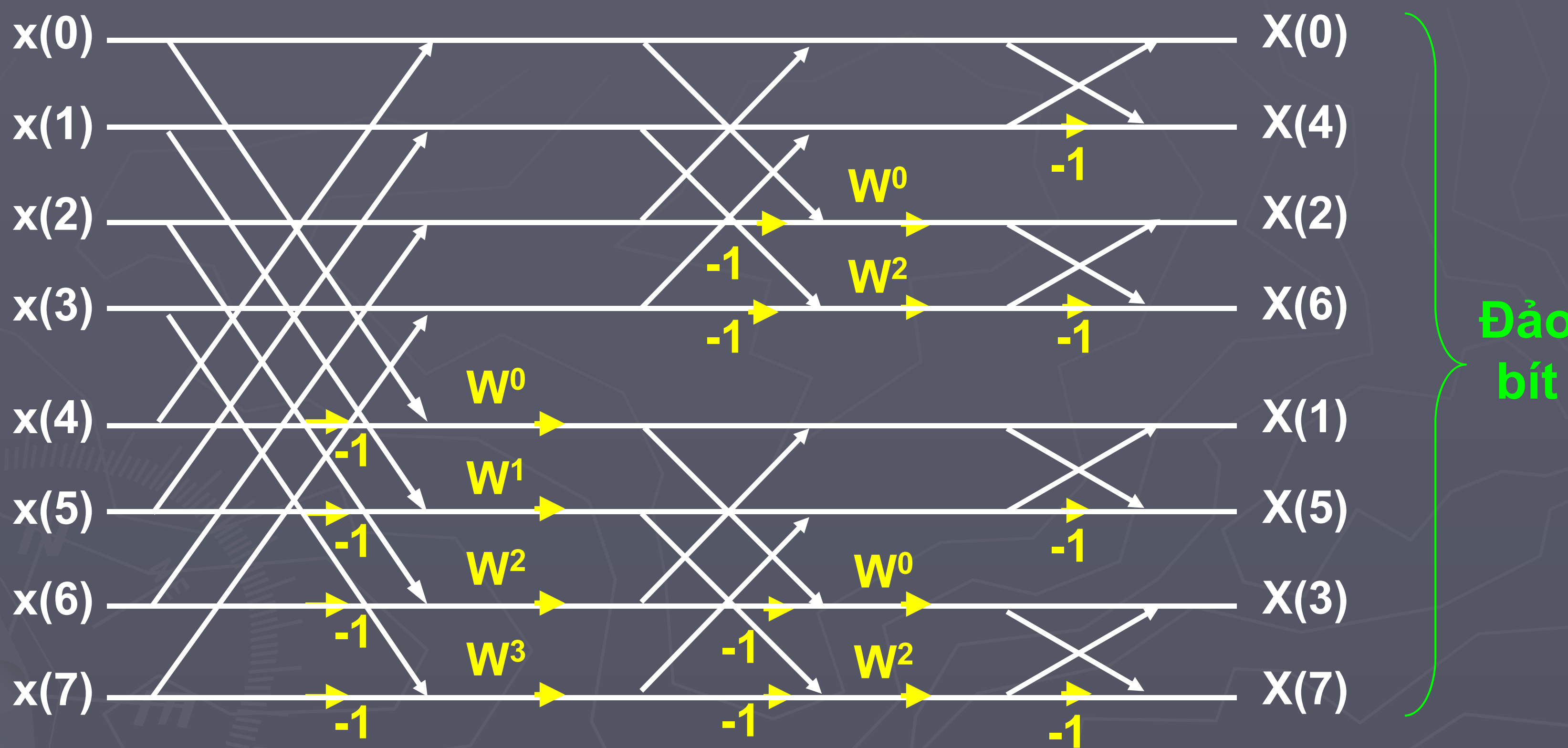


- Sau đó đánh lại chỉ số theo thứ tự các mẫu X(k), tiếp tục phân chia DFT của N/2 điểm thành 2 DFT của N/4 điểm theo chỉ số k chẵn và lẽ. Tiếp tục phân chia cho đến khi nào còn DFT 2 điểm thì dừng lại.

- Dữ liệu ra X(k) được sắp xếp theo thứ tự đảo bít, còn dữ liệu vào được sắp theo thứ tự tự nhiên.

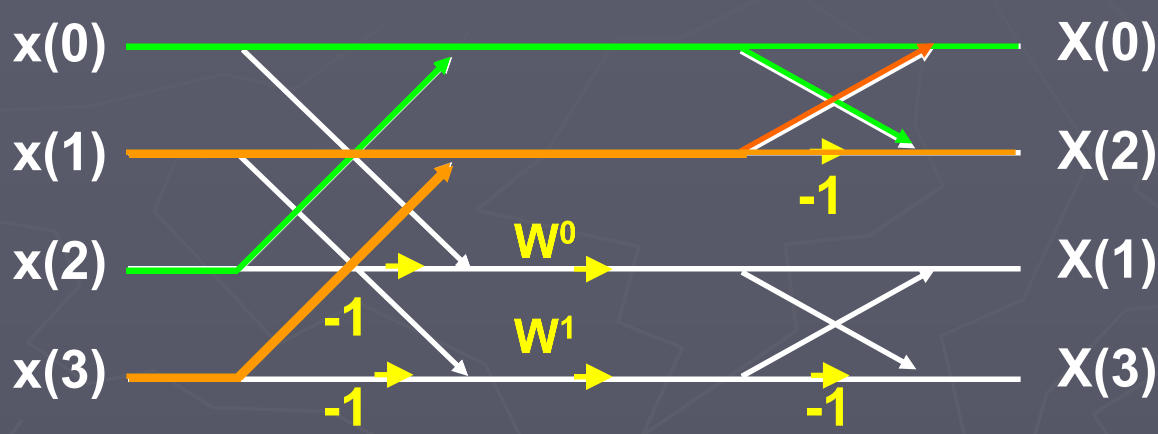
- Số phép nhân và phép cộng trong lưu đồ phân theo tần số bằng với số phép nhân và cộng trong lưu đồ phân theo thời gian.

- Lưu đồ DFT dãy x(n) sau 3 lần phân chia với N=8



<u>Ví dụ 4.4.2</u>: Hãy vẽ lưu đồ và tính FFT cơ số 2 phân theo t/s

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 4\}$$



- k=0: $X(0) = [x(0) + x(2)] + [x(1) + x(3)] = 10.$
- k=2: $X(2) = [x(0) + x(2)] - [x(1) + x(3)] = -2.$
- k=1: $X(1) = [x(0) - x(2)] + W^1[x(1) - x(3)] = -2 + j2.$
- k=3: $X(3) = [x(0) - x(2)] - W^1[x(1) - x(3)] = -2 - j2.$

7.4.3 THUẬT TOÁN FFT VỚI $N=N_1N_2$

► Giả thiết độ dài dãy x(n) có thể phân tích $\mathbf{N=N_1N_2}$, nếu độ dài không thể biểu diễn dưới dạng trên thì thêm vài mẫu 0 vào sau dãy x(n).

► Giả thiết dữ liệu vào được sắp xếp vào trong mảng theo thứ tự từng cột với số cột $\mathbf{N_1}$ và số hàng $\mathbf{N_2}$:

$n_2 \backslash n_1$	0	1	…	N_1-1
0	x(0)	$x(N_2)$	…	$x[N_2(N_1-1)]$
1	x(1)	$x(N_2+1)$	…	$x[N_2(N_2-1)+1]$
…	…	…	…	…
N_2-1	$x(N_2-1)$	$x(2N_2-1)$	…	$x[N_1N_2-1]$

► Lấy ví dụ sắp xếp dãy x(n) với N=12, chọn N_1=3 và N_2=4

$n_2 \setminus n_1$	0	1	2
0	**x(0)**	**x(4)**	**x(8)**
1	**x(1)**	**x(5)**	**x(9)**
2	**x(2)**	**x(6)**	**x(10)**
3	**x(3)**	**x(7)**	**x(11)**

► Các chỉ số **n** của x(n), **k** của X(k) xác định:

► $$n = n_1 N_2 + n_2 \quad \begin{cases} 0 \le n_1 \le N_1 - 1 \\ 0 \le n_2 \le N_2 - 1 \end{cases}$$

► $$k = k_1 + k_2 N_1 \quad \begin{cases} 0 \le k_1 \le N_1 - 1 \\ 0 \le k_2 \le N_2 - 1 \end{cases}$$

► DFT N điểm dãy x(n) được phân tích:

$$X(k) = X(k_1 + k_2 N_1) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_2 + n_1 N_2) W_N^{(k_1+k_2N_1)(n_2+n_1N_2)}$$

$$= \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_2 + n_1 N_2) W_N^{n_2k_1} W_N^{n_1k_1N_2} W_N^{n_2k_2N_1} W_N^{n_1k_2N_1N_2}$$

$$\mathrm{Do:} W_N^{n_1k_1N_2} = W_{N_1}^{n_1k_1}; W_N^{n_2k_2N_1} = W_{N_2}^{n_2k_2}; W_N^{n_1k_2N_1N_2} = 1$$

$$\Rightarrow X(k) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \left[\sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_2 + n_1 N_2) W_{N_1}^{n_1k_1} \right] W_N^{n_2k_1} \right\} W_{N_2}^{n_2k_2}$$

► Đặt:

$$\begin{cases} F(n_2,k_1) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_2+n_1N_2)W_{N_1}^{n_1k_1} \\ G(n_2,k_1) = F(n_2,k_1).W_N^{n_2k_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X(k) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} G(n_2,k_1)W_{N_2}^{n_2k_2}}$$

Các bước tiến hành thuật tóan:

- Sắp xếp dữ liệu vào theo thứ tự từng cột, mảng **x**
- Tính DFT theo từng hàng mảng **x**, được $F(n_2,k_1)$
- Tính mảng hệ số $W_N^{n_2k_1}$
- Nhân mảng $F(n_2,k_1)$ với $W_N^{n_2k_1}$, được $G(n_2,k_1)$
- Tính DFT theo từng cột mảng $G(n_2,k_1)$, được $X(k)$
- Đọc dữ liệu ra theo thứ tự từng hàng $X(k)$.

Ví dụ : Nêu các bước tính và vẽ lưu đồ thuật tóan FFT dãy x(n) với $N=N_1N_2=12$, chọn $N_1=3$ và $N_2=4$

- **Sắp xếp dữ liệu vào theo thứ tự từng cột như bảng:**

n_2 \ n_1	0	1	2
0	x(0)	x(4)	x(8)
1	x(1)	x(5)	x(9)
2	x(2)	x(6)	x(10)
3	x(3)	x(7)	x(11)

- Tính DFT theo từng hàng mảng **x**, được **F(n_2,k_1)**:

$$F(n_2,k_1)=\sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_2+n_1N_2)W_{N_1}^{n_1k_1}$$

n_2 \ k_1	0	1	2
0	F(0,0)	F(0,1)	F(0,2)
1	F(1,0)	F(1,1)	F(1,2)
2	F(2,0)	F(2,1)	F(2,2)
3	F(3,0)	F(3,1)	F(3,2)

► Tính mảng hệ số $W_N^{n_2k_1}$

n_2 \ k_1	0	1	2
0	W_N^0	W_N^0	W_N^0
1	W_N^0	W_N^1	W_N^2
2	W_N^0	W_N^2	W_N^4
3	W_N^0	W_N^3	W_N^6

- Nhân các phần tử mảng $F(n_2,k_1)$ với các hệ số của mảng W_N^{n2k1} tương ứng, được $G(n_2,k_1)$:

Phần tử: $G(n_i,k_j) = F(n_i,k_j).\ W_N^{n_ik_j}$

$n_2 \backslash k_1$	0	1	2
0	G(0,0)	G(0,1)	G(0,2)
1	G(1,0)	G(1,1)	G(1,2)
2	G(2,0)	G(2,1)	G(2,2)
3	G(3,0)	G(3,1)	G(3,2)

► Tính DFT theo từng cột mảng **$G(n_2,k_1)$**, được **$X(k)$:**

$$X(k) = X(k_1 + N_1 k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} G(n_2,k_1) W_{N_2}^{n_2 k_2}$$

k_2 \ k_1	0	1	2
0	X(0)	X(1)	X(2)
1	X(3)	X(4)	X(5)
2	X(6)	X(7)	X(8)
3	X(9)	X(10)	X(11)

► Đọc dữ liệu ra theo thứ tự từng hàng **X(k)**

▪ Lưu đồ FFT dãy x(n) $N=N_1N_2$, với $N_1=3$, $N_2=4$: