

SỨC BỀN VẬT LIỆU



Canyon Bridge, Los Alamos, NM



Trần Minh Tú
Đại học xây dựng

SỨC BỀN VẬT LIỆU 1

- Giảng viên: TRẦN MINH TÚ
- Email: tpnt2002@yahoo.com
- Cell phone: 0912101173
- Tài liệu học tập
 - Sức bền Vật liệu. PGs Lê Ngọc Hồng
NXB Khoa học Kỹ thuật
 - Bài tập Sức bền Vật liệu. PGs Tô Văn Tấn
 - www.nuce.edu.vn
E-learning\Khoa Xay dung\TranMinhTu

Sức bền Vật liệu1 - 2010

- Số tín chỉ: 3
- Số tiết lý thuyết và bài tập: 52
- Số tiết thí nghiệm: 3

Đánh giá học phần

- Chuyên cần: 10%
- Bài tập lớn: 10%
- Bài kiểm tra giữa kỳ: 10% (Cuối chương 5)
- Thí nghiệm: 10%
- Bài thi kết thúc học phần: 60%
- **HỌC TẬP NGHIÊM TÚC LÀ CHÌA KHÓA**

CỦA THÀNH CÔNG

QUI ĐỊNH VỀ ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

- Điểm đánh giá học phần (ĐHP) gồm điểm quá trình (ĐQT) và điểm thi kết thúc học phần (ĐKT)
- Điểm quá trình học tập (ĐQT) tính theo thang điểm 10 (làm tròn đến 0,5)
- Điểm thi kết thúc học phần (ĐKT) tính theo thang điểm 10 (làm tròn đến 0,5)
- Phòng đào tạo qui định như sau:

$$\text{ĐHP} = 0,4 \times \text{ĐQT} + 0,6 \times \text{ĐKT}$$

QUI ĐỊNH VỀ ĐÁNH GIÁ HỌC PHẦN

- Điểm quá trình học tập (ĐQT), bộ môn Sức bền Vật liệu qui định như sau:
- ĐQT gồm 4 môđun, mỗi môđun đánh giá theo thang điểm 10
 - Điểm chuyên cần (ĐCC)
 - Điểm Bài tập lớn (ĐBTL)
 - Điểm Thí nghiệm (ĐTN)
 - Điểm kiểm tra giữa kỳ (ĐGK)

$$\text{ĐQT} = (\text{ĐCC} + \text{ĐBTL} + \text{ĐTN} + \text{ĐGK}) / 4$$

(làm tròn đến 0,5)

Chương trình môn học Sức bền Vật liệu1

Chương 1: Những khái niệm chung

1.1. Nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của môn học

1.2 . Nội lực – Ứng suất – Biến dạng – Chuyển vị

1.3. Các giả thiết trong môn học SBVL - Nguyên lý độc lập tác dụng.

Chương 2: Ứng lực trong bài toán thanh

2.1. Khái niệm về ứng lực.

2.2. Cách xác định ứng lực trong bài toán phẳng - Phương pháp mặt cắt

2.3. Biểu đồ ứng lực.

Chương 3: Thanh chịu kéo (nén) đúng tâm

3.1. Khái niệm.

3.2. Ứng suất, biến dạng và chuyển vị của thanh chịu kéo (nén) đúng tâm

Chương trình môn học Sức bền Vật liệu1

- 3.3. Thế năng biến dạng đàn hồi
- 3.4. Các đặc trưng cơ học của vật liệu.
- 3.5. Điều kiện bền, điều kiện cứng, ba bài toán cơ bản.
- 3.6. Bài toán siêu tĩnh
- 3.7. *Một số hiện tượng phát sinh trong vật liệu khi chịu lực

Chương 4: Trạng thái ứng suất và thuyết bền

- 4.1. Khái niệm về trạng thái ứng suất tại một điểm,
- 4.2. Trạng thái ứng suất phẳng (Giải tích và đồ thị)
- 4.3. Quan hệ ứng suất - biến dạng (Định luật Hooke) .
- 4.4. Thế năng biến dạng đàn hồi
- 4.5. Các thuyết bền.

Chương trình môn học Sức bền Vật liệu1

Chương 5: Đặc trưng hình học của mặt cắt ngang

5.1. Khái niệm chung.

5.2. Mômen quán tính khi chuyển trục song song

5.3. Mômen quán tính khi xoay trục.

5.4. Cách xác định hệ trục và các mômen quán tính chính trung tâm

Chương 6: Thanh chịu xoắn thuần túy

6.1. Khái niệm - Cách xác định mômen xoắn

6.2. ứng suất, biến dạng và chuyển vị của thanh tròn chịu xoắn.

6.3. Điều kiện bền và điều kiện cứng của thanh tròn chịu xoắn

6.4. Bài toán siêu tĩnh

6.5*. Xoắn thanh có mặt cắt ngang hình chữ nhật

6.6*. Thế năng biến dạng đàn hồi của thanh chịu xoắn

6.7*. Lò xo hình trụ bước ngắn

Chương trình môn học Sức bền Vật liệu1

Chương 7: Thanh thẳng chịu uốn phẳng

7.1. Khái niệm chung

7.2. Thanh thẳng chịu uốn thuần túy

7.3. Thanh thẳng chịu uốn ngang phẳng

7.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn: Độ võng, góc xoay

7.5. Phương pháp tích phân không định hạn

7.6. Phương pháp thông số ban đầu

7.7. Bài toán siêu tĩnh

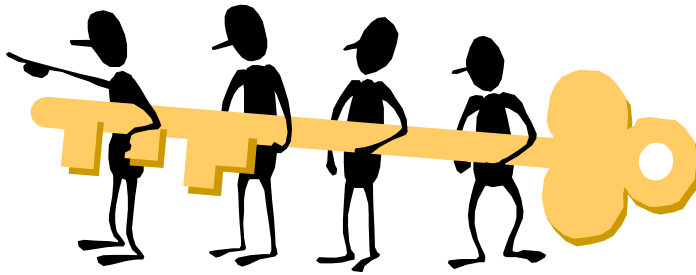
Tài liệu tham khảo chính

- Sức bền Vật liệu. PGs Lê Ngọc Hồng
- Giáo trình SBVL của các trường đại học: Thủy lợi, Bách khoa, Giao thông Vận tải
- Các bài giảng của Đại học Auckland, Pearson Press, ASCE, ...
- Mechanics of Materials – Ferdinand Beer – E. Russell Johnston – Jr. John DeWolf
- Lecture Notes: J Walt Oler – Texas Tech. University

Civil Engineering – Xây dựng dân dụng

Ngành xây dựng dân dụng – xây dựng các cơ sở hạ tầng cho mục đích dân sự

- Công trình nhà ở dân dụng và công nghiệp
- Công trình cấp, thoát nước, đập nước
- Công trình cây xanh, tháp truyền tin, truyền hình
- Công trình đường sắt, đường cao tốc
- Công trình cầu, đường hầm
- Công trình tưới tiêu nước, công trình sông và biển
- Công trình giao thông đường bộ
- Công trình nhà cao tầng, khu công nghiệp,...

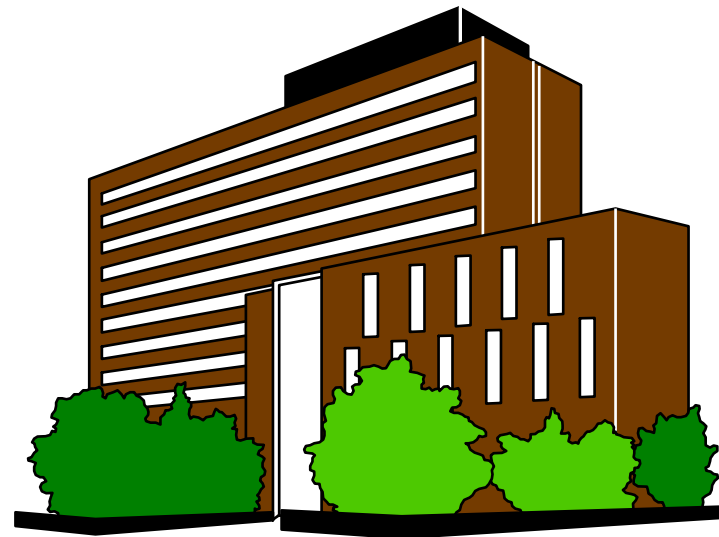


Mục đích?

Ai ???

Tiền ?

Vị trí?



Civil Engineering Process - Quy trình thực hiện

- Planning ...Lập kế hoạch
- Design ...Thiết kế kiến trúc
- Construction ...Thiết kế kết cấu
- Operation/Maintenance ...Thi công và bảo dưỡng
- Rehabilitation ...Phục chế



Chương mở đầu

1. Nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của môn học
2. Phân loại vật thể nghiên cứu theo hình dạng
3. Ngoại lực - Phản lực và liên kết
4. Khái niệm về chuyển vị và biến dạng
5. Nội lực - PP mặt cắt - Ứng suất
6. Các giả thiết của môn học

1. Nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của môn học

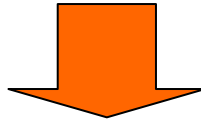
1a. Sức bền Vật liệu - môn cơ sở kỹ thuật:

- Sức bền vật liệu là môn học nghiên cứu **sự chịu lực của vật liệu** để đề ra các phương pháp tính toán, thiết kế các chi tiết máy, các bộ phận công trình dưới tác dụng của ngoại lực nhằm thoả mãn các yêu cầu đặt ra về **độ bền, độ cứng và ổn định**

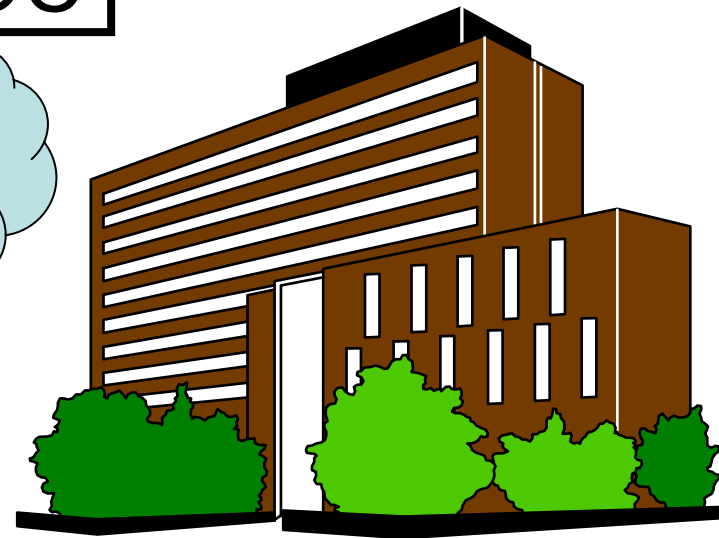
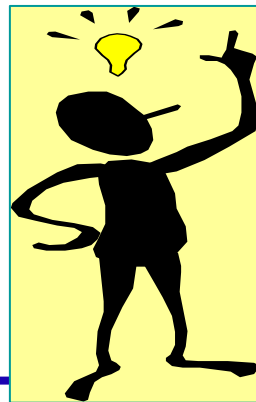
1. Nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của môn học

- Đảm bảo độ bền:
 - Các chi tiết máy hay các bộ phận công trình làm việc bền vững, lâu dài: không bị vỡ, nứt,...
- Đảm bảo độ cứng
 - Những thay đổi về kích thước hình học của các chi tiết máy hay bộ phận công trình không vượt quá giá trị cho phép.
- Đảm bảo điều kiện ổn định
 - Dưới tác dụng của ngoại lực, các chi tiết máy hay bộ phận công trình bảo toàn được hình dáng ban đầu

KINH TẾ >< KỸ THUẬT



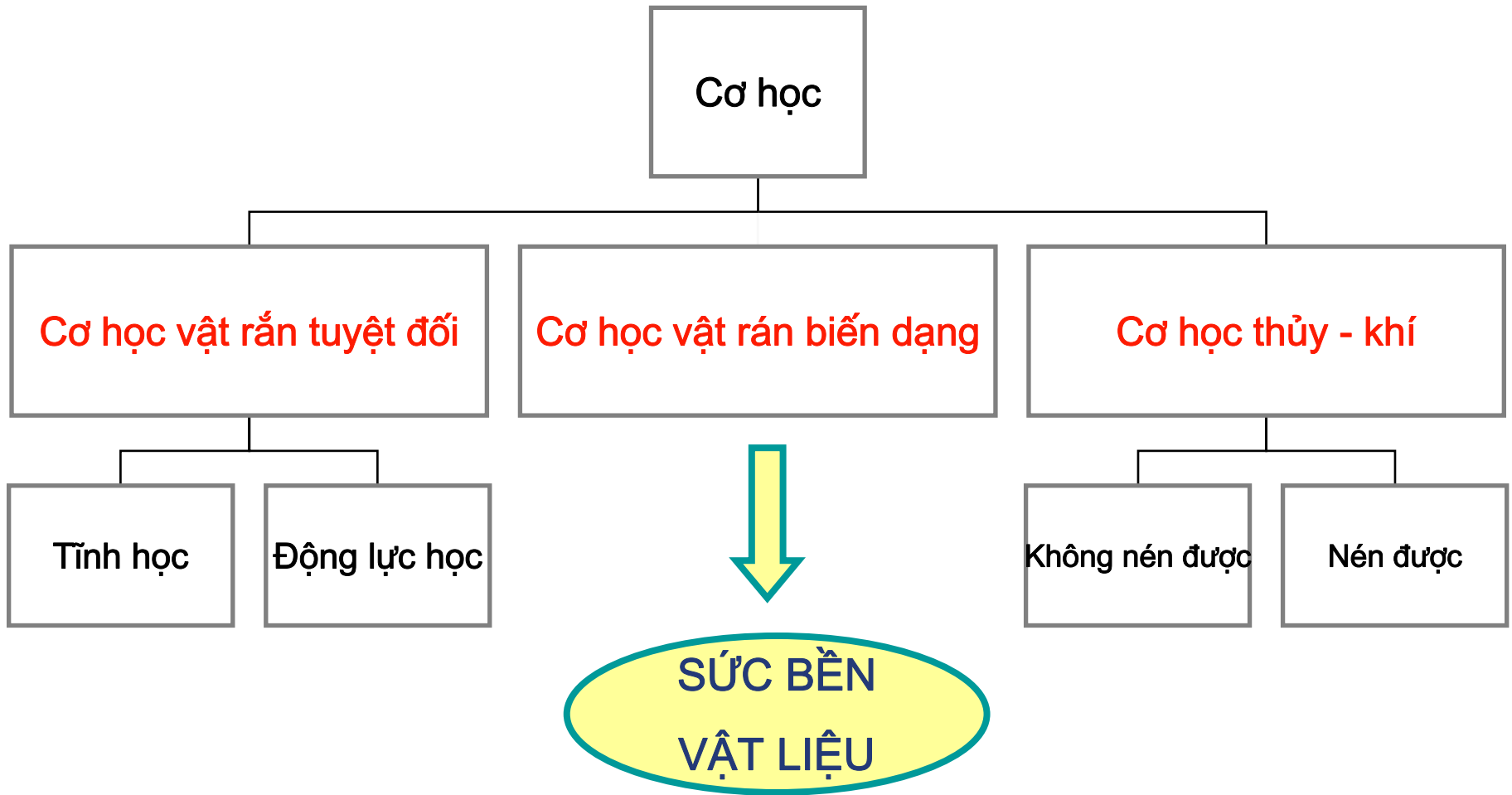
PHÁT TRIỂN MÔN HỌC



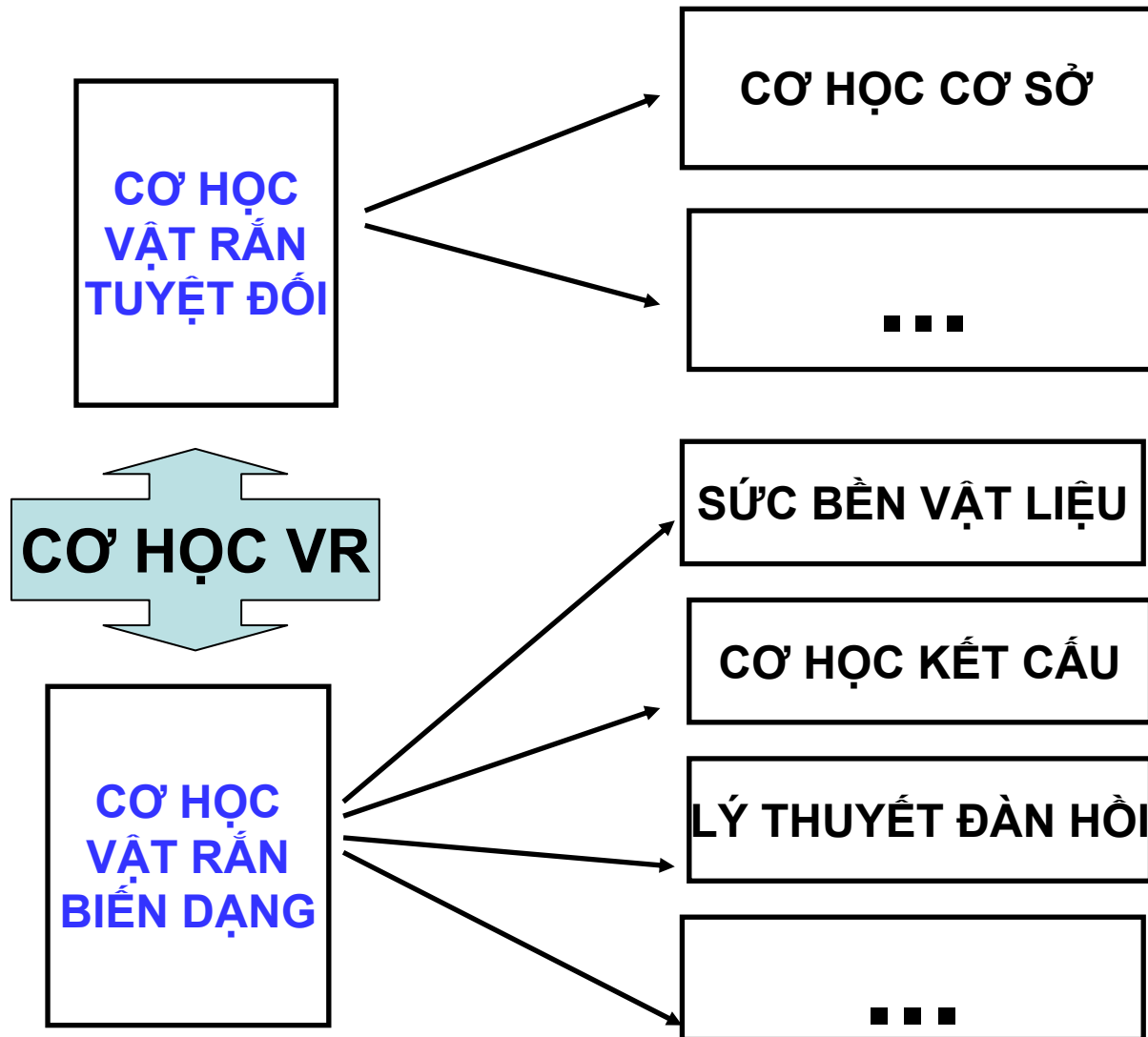
1. Nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của môn học

- Xác định ứng suất, biến dạng, chuyển vị trong vật thể chịu tác dụng của ngoại lực
- Ba bài toán cơ bản
 - Kiểm tra điều kiện bền, cứng, ổn định
 - Xác định kích thước và hình dạng hợp lý của các chi tiết máy hay bộ phận CT
 - Xác định trị số tải trọng lớn nhất mà các chi tiết máy hay bộ phận công trình có thể chịu được

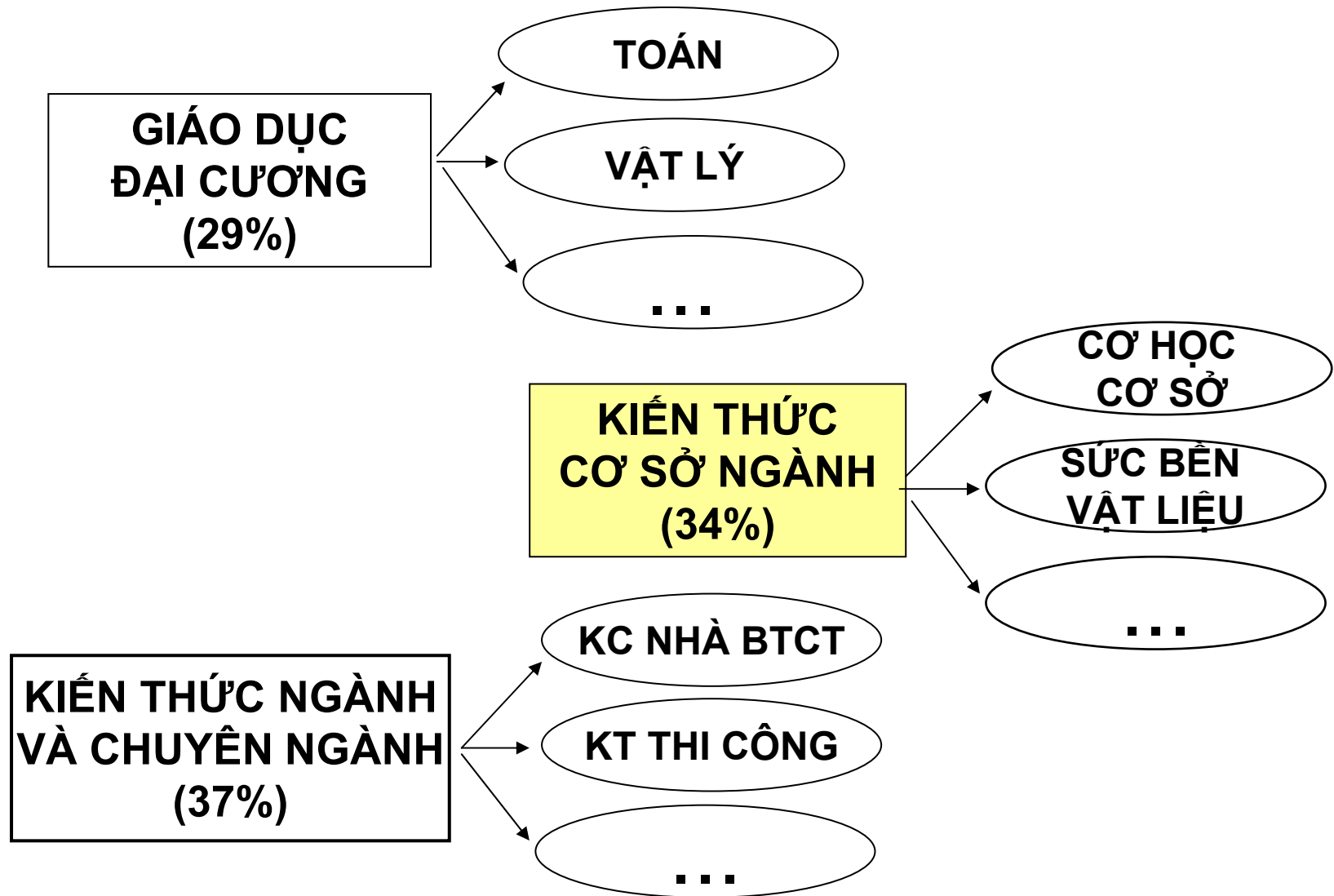
1. Nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của môn học



1. Nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của môn học

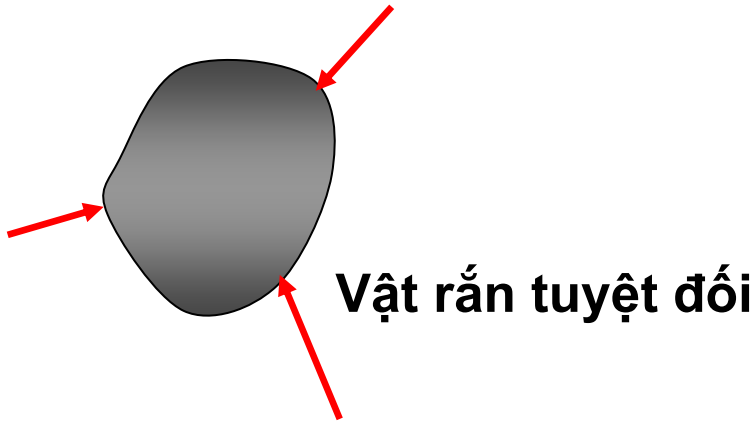


1. Nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của môn học



1. Nhiệm vụ và đối tượng nghiên cứu của môn học

• Cơ học cơ sở



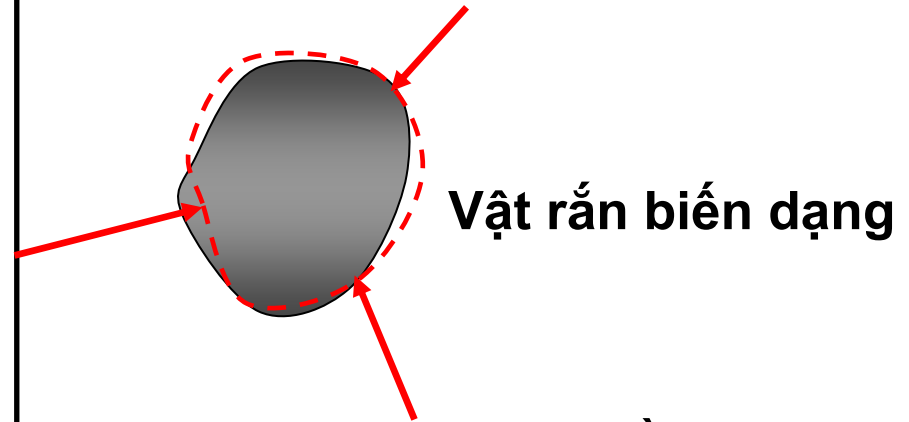
(1) Phương trình cân bằng

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0;$$

$$\sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0$$

(2) Động học: $\sum F = ma$

• Sức bền vật liệu



(1) Phương trình cân bằng

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum F_z = 0;$$

$$\sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0$$

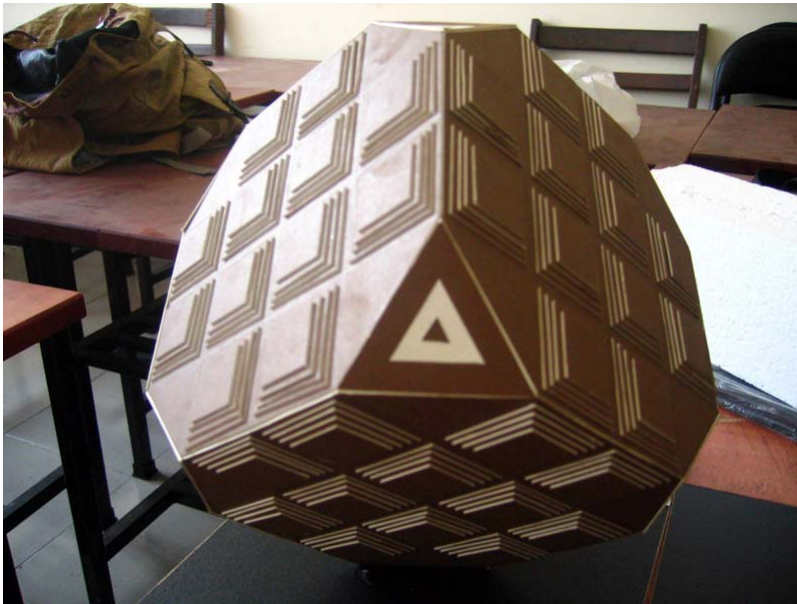
(2) Quan hệ ứng suất - biến dạng:

$$\sigma = E\varepsilon$$

2. Phân loại vật thể nghiên cứu theo hình dạng

- Vật thể hình khối:

Có kích thước theo ba phương cùng lớn tương đương nhau.



2. Phân loại vật thể nghiên cứu theo hình dạng

- Vật thể hình tấm và vỏ:
Có kích thước theo hai phương rất lớn so với phương thứ ba



2. Phân loại vật thể nghiên cứu theo hình dạng

- Vật thể hình thanh:
Có kích thước theo một phương rất lớn so với hai phương còn lại



2. Phân loại vật thể nghiên cứu theo hình dạng



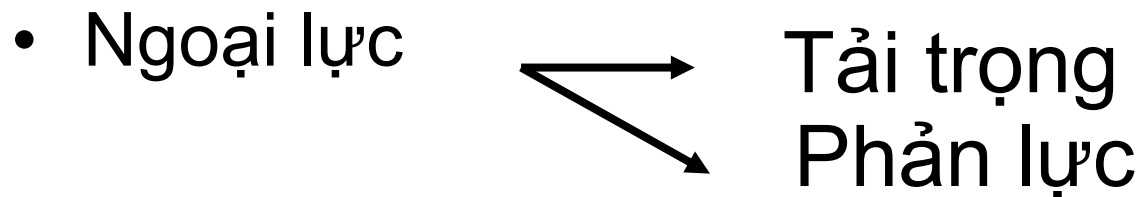
Thanh: là chi tiết đơn giản và phổ biến nhất
Đối tượng nghiên cứu của môn học SBVL

- Phân loại thanh theo hình dạng trục thanh:
 - Thanh thẳng
 - Thanh cong
 - Thanh không gian
- Phân loại thanh theo hình dạng mặt cắt ngang
 - Thanh tròn, chữ nhật, vuông,..
 - Thanh đặc, rỗng,...
 - Thanh tiết diện thay đổi, không đổi,..

3. Ngoại lực - Phản lực và liên kết

3a. Ngoại lực

- Là những lực tác dụng của môi trường bên ngoài hay của vật thể khác lên vật thể đang xét
- Ví dụ: sức gió, áp lực nước, lực căng dây đai lên trục truyền động, trọng lực,...



3. Ngoại lực - Phản lực và liên kết (tiếp)

- **Tải trọng:**

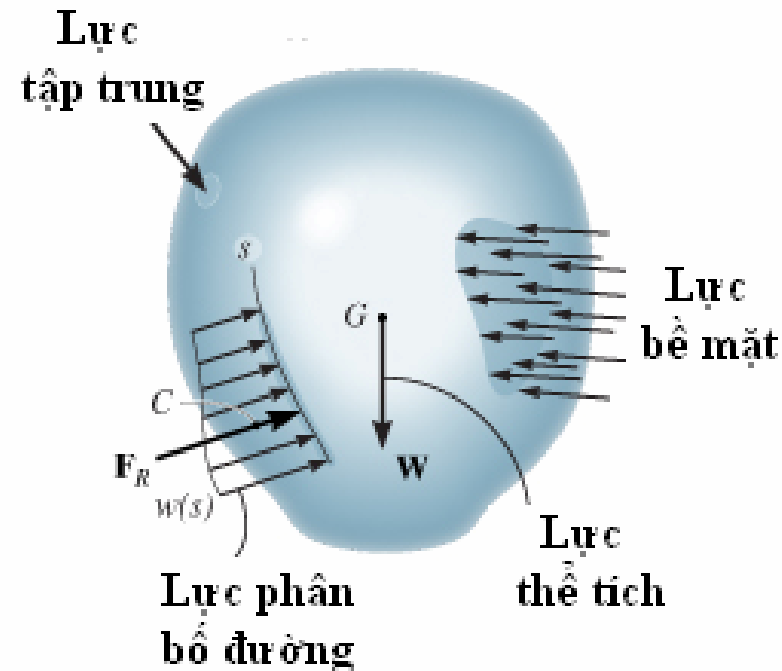
Là những lực chủ động, biết trước, được lấy theo các qui định, tiêu chuẩn

- **Phản lực :**

Là những lực thụ động, phát sinh tại vị trí liên kết vật thể đang xét với vật thể khác

3. Ngoại lực - Phản lực và liên kết (tiếp)

- Phân loại ngoại lực: theo tính phân bố
 - Lực phân bố thể tích: γ [N/m³]
 - Lực phân bố bề mặt: p [N/m²]
 - Lực phân bố chiều dài: q [N/m]
 - Lực tập trung: [N]
- Phân loại tải trọng: theo tính chất tác động
 - Tải trọng tĩnh
 - Tải trọng động



3. Ngoại lực - Phản lực và liên kết (tiếp)

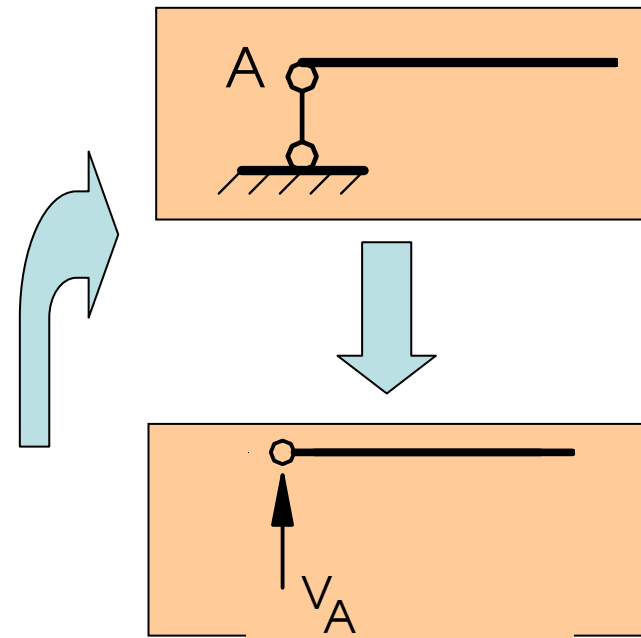
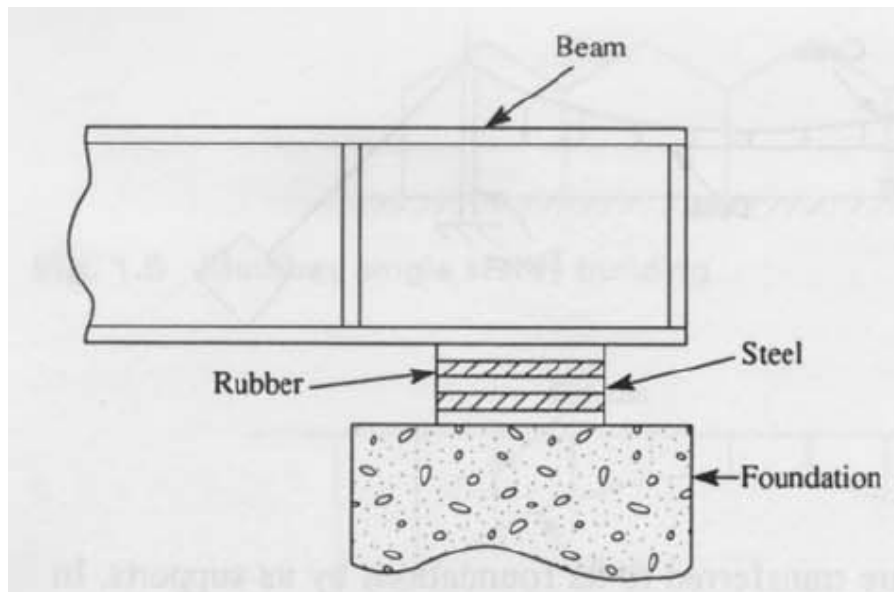
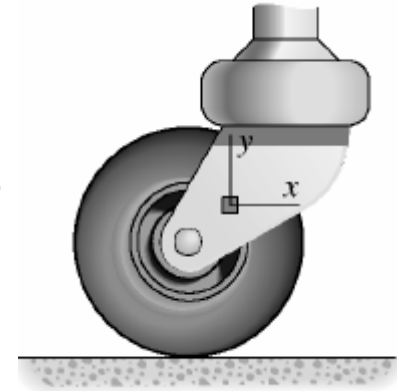
3b. Liên kết - Phản lực liên kết

- Các vật thể bị ràng buộc với nhau hoặc với đất bởi các **liên kết**. Thông qua liên kết các vật thể có tác dụng **lực và phản lực** với nhau hoặc với đất => Lực liên kết
- **Giới hạn: Bài toán phẳng** – thanh có ba bậc tự do ≈ 3 khả năng chuyển động, liên kết ngăn cản chuyển động theo phương nào thì có phản lực liên kết theo phương đó
- Ba loại liên kết thường gặp:

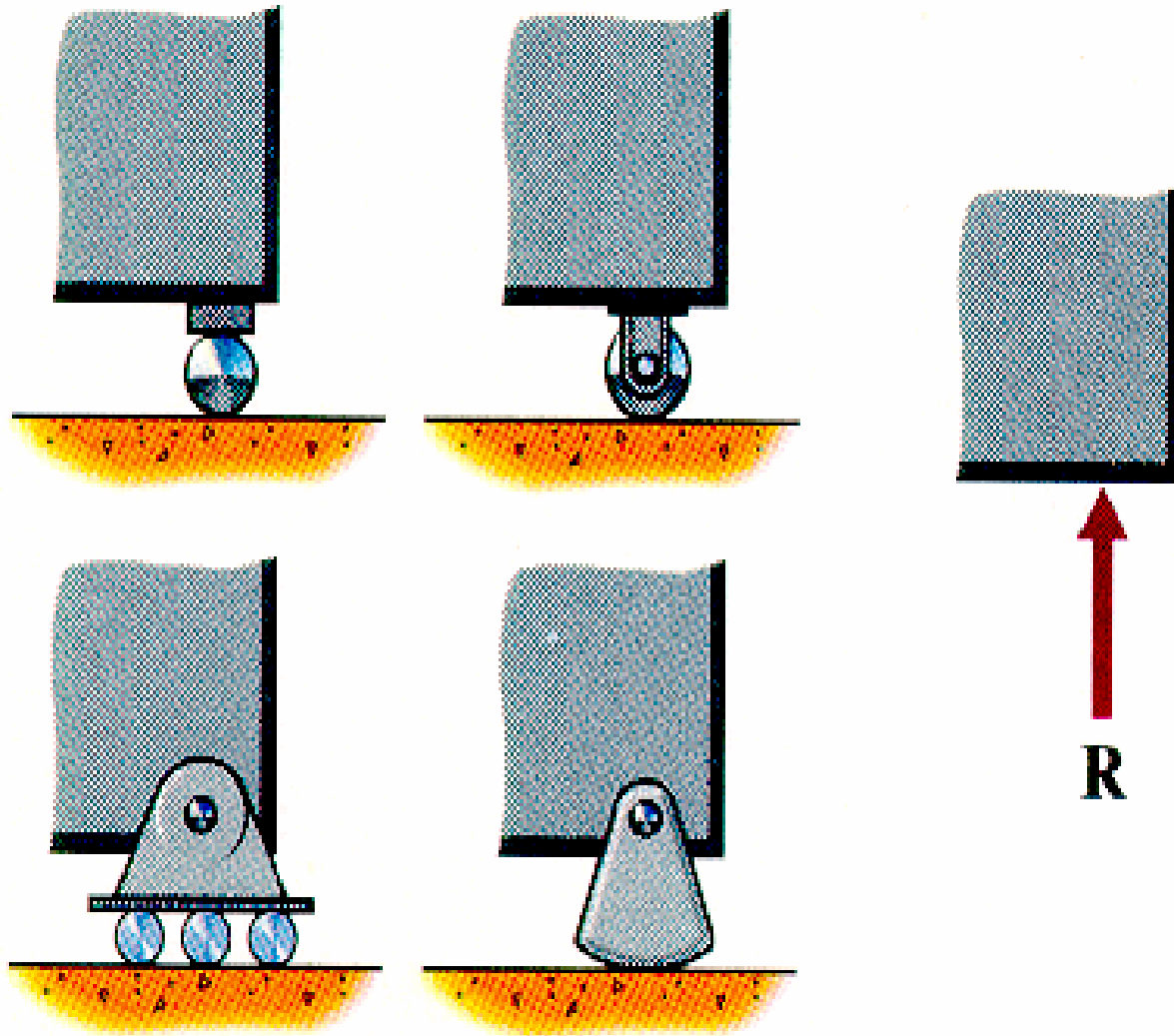
3. Ngoại lực - Phản lực và liên kết (tiếp)

➤ Liên kết gối tựa di động (liên kết đơn)

Cho phép thanh quay quanh một khớp và có thể di động theo một phương nào đó



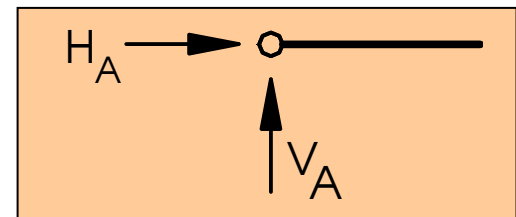
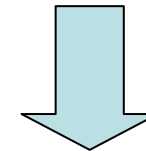
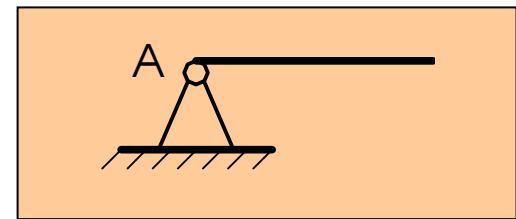
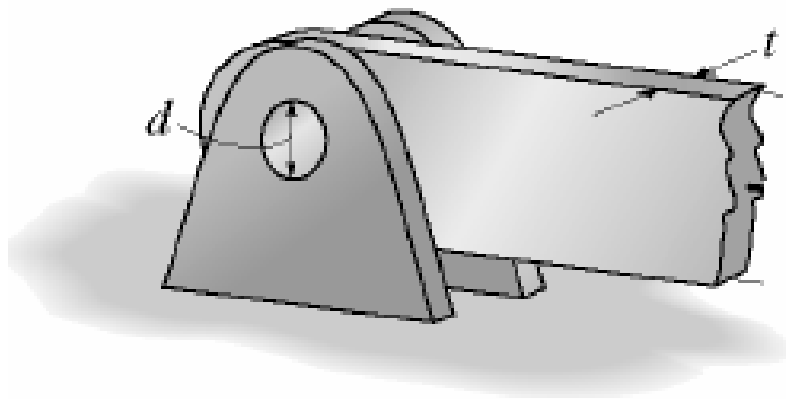
Liên kết gối tựa di động (liên kết đơn)



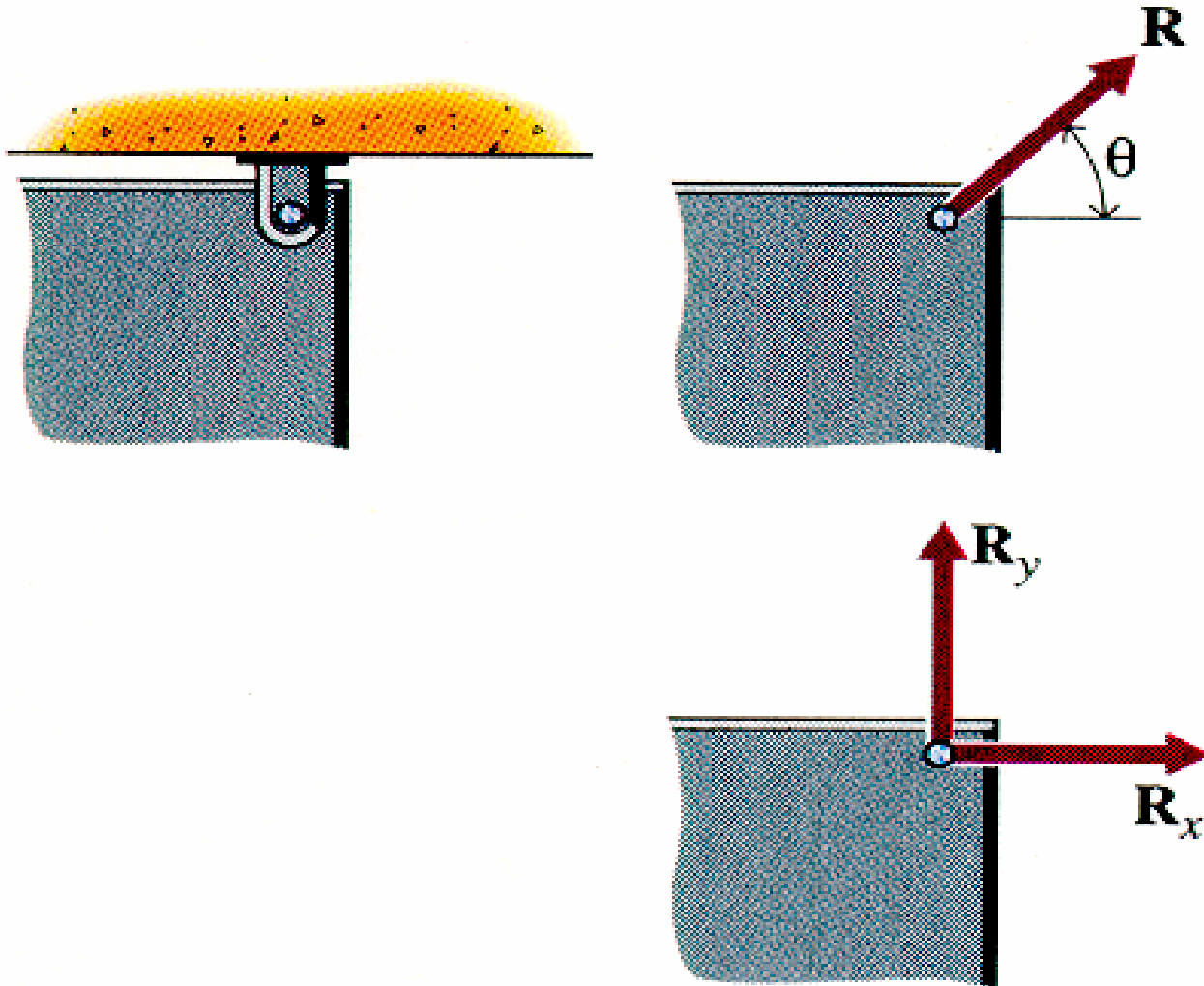
3. Ngoại lực - Phản lực và liên kết (tiếp)

➤ Liên kết gối tựa cố định (khớp)

Chỉ cho phép thanh quay quanh một khớp, ngăn cản mọi chuyển động tịnh tiến



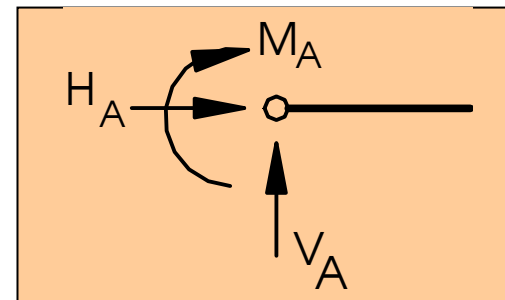
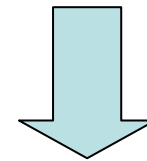
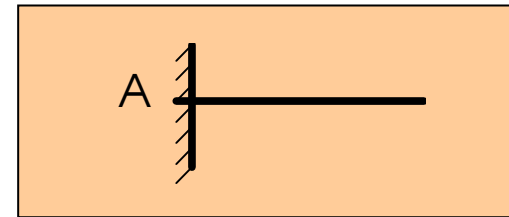
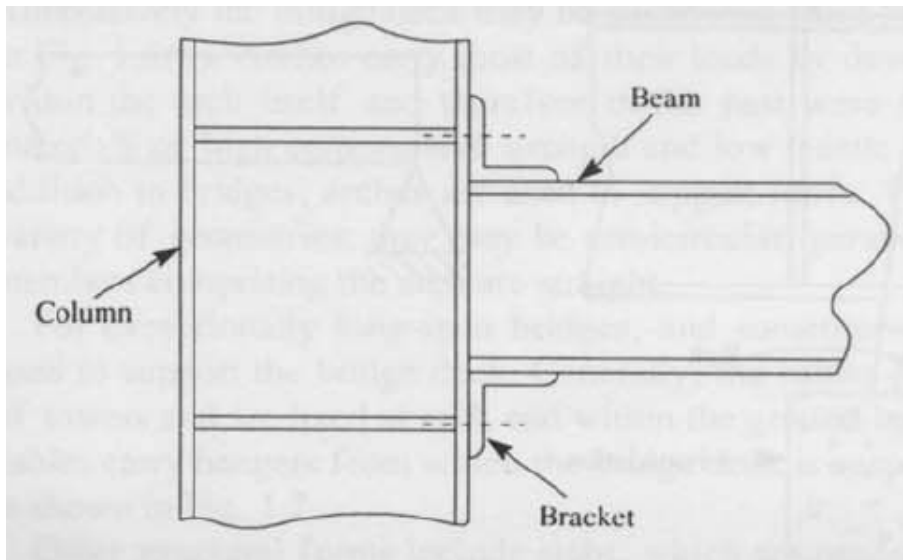
Liên kết gối tựa cố định (khớp)



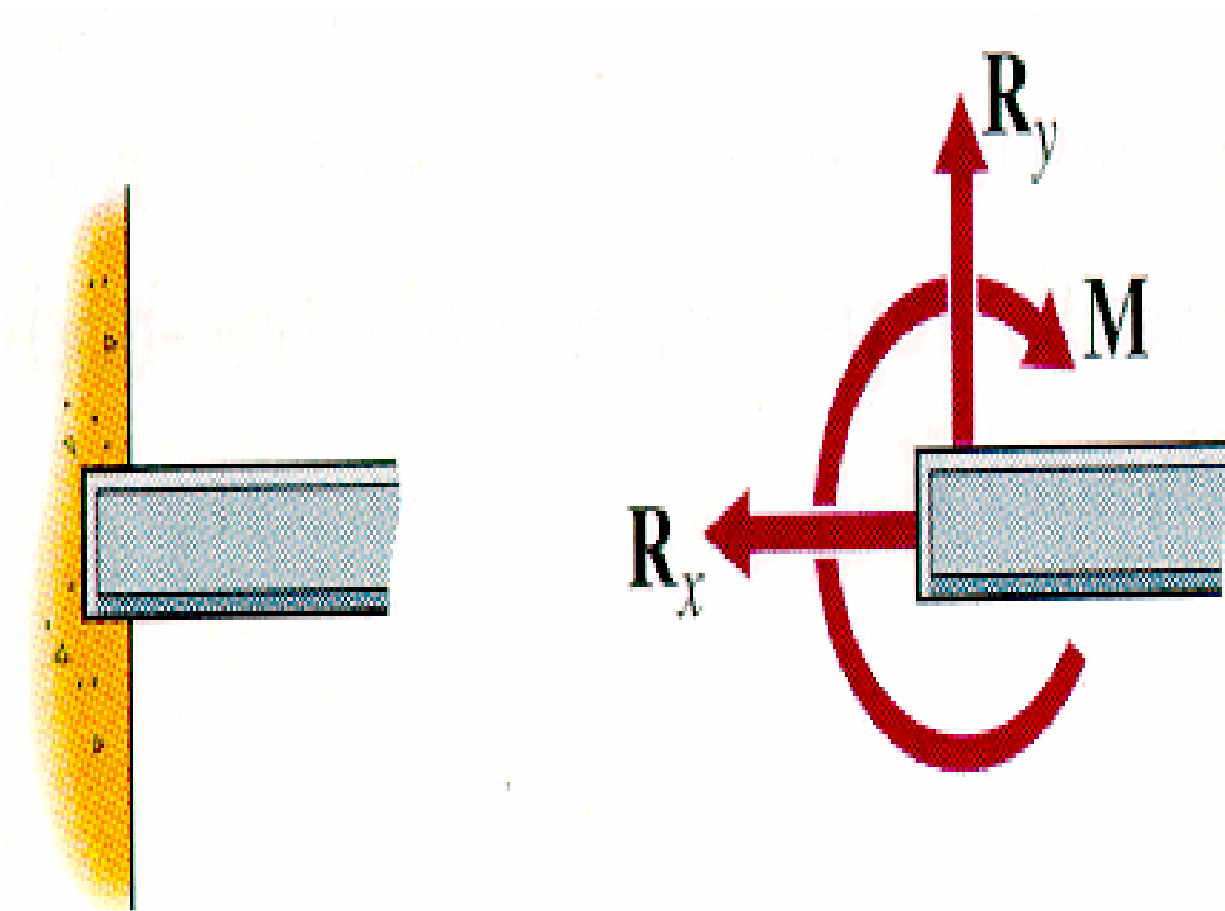
3. Ngoại lực - Phản lực và liên kết (tiếp)

- Liên kết ngàm (hàn)

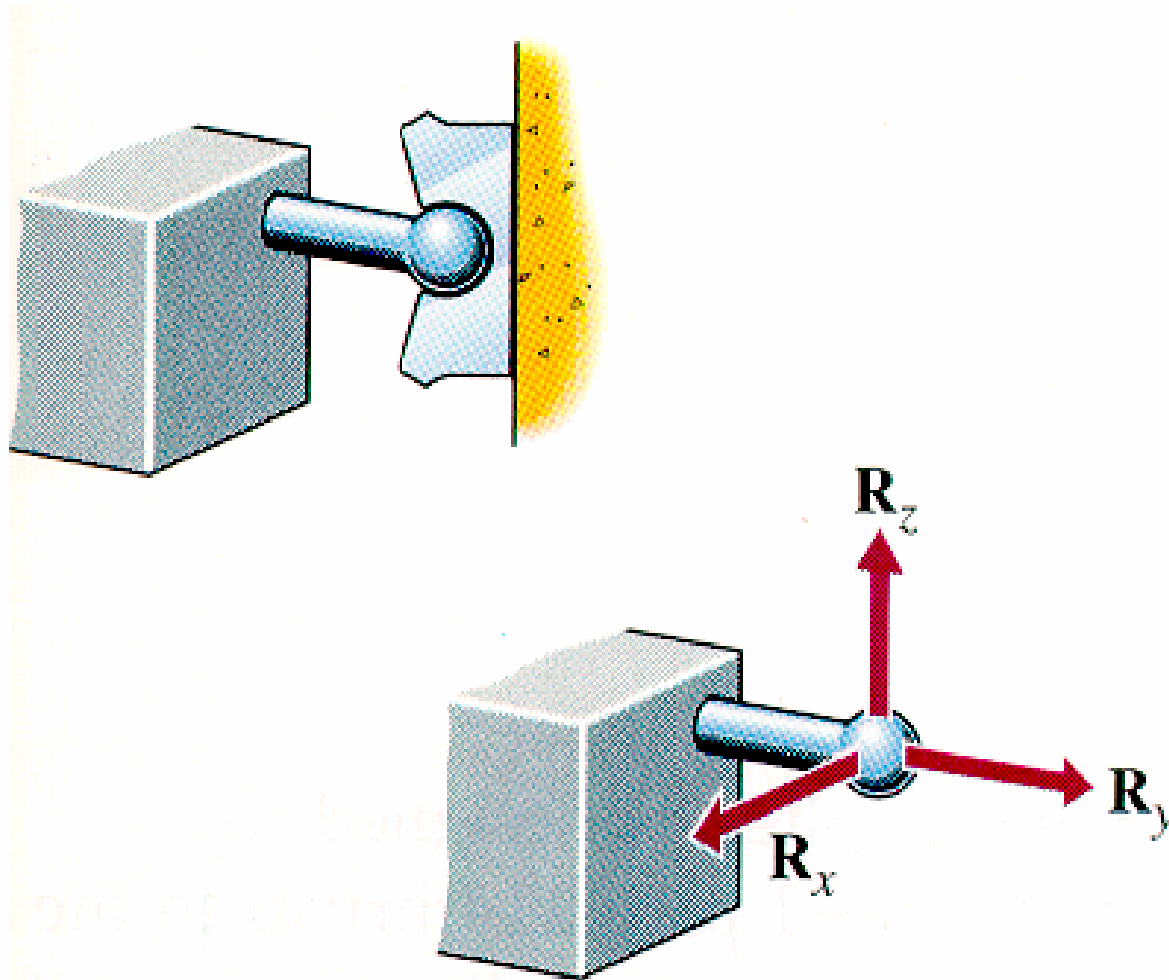
Ngăn cản mọi khả năng chuyển động



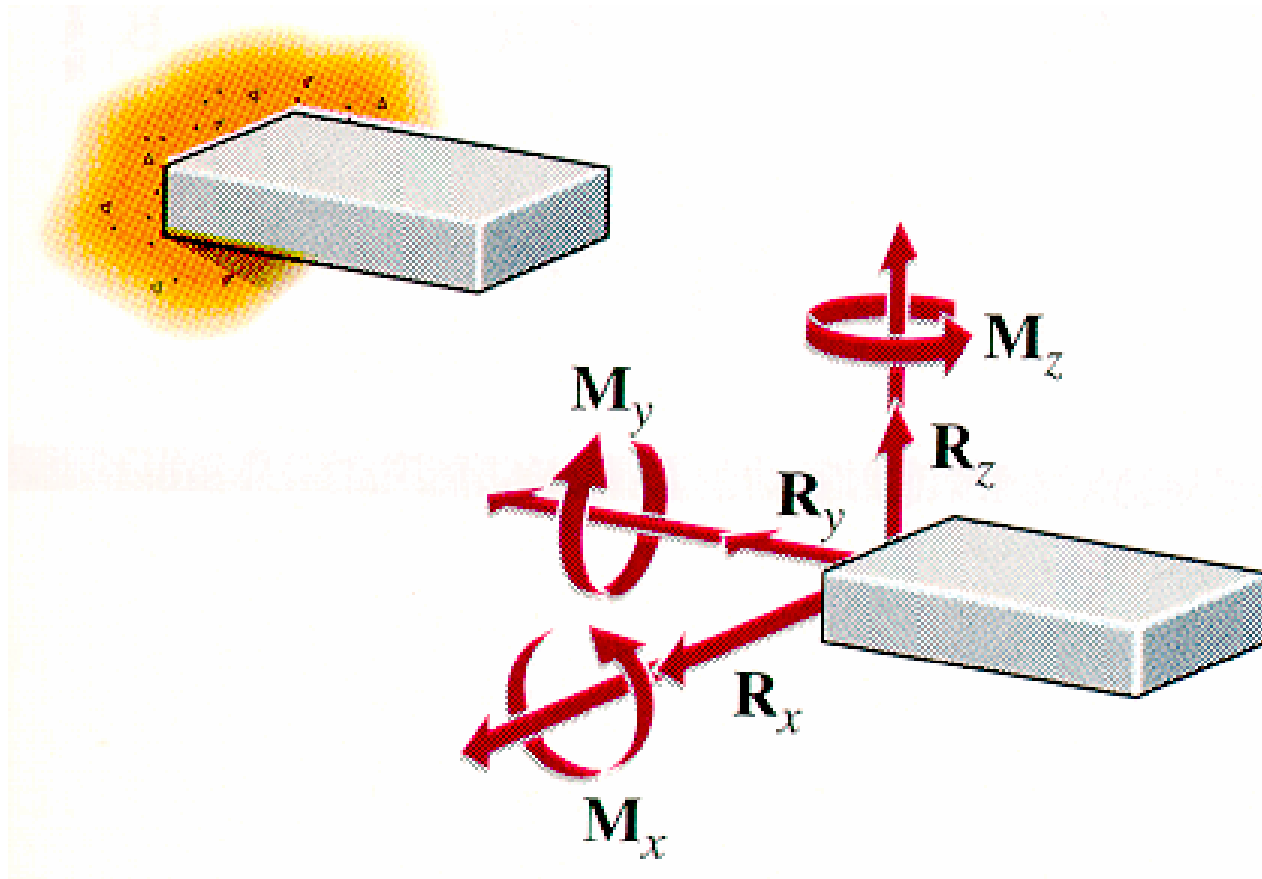
Liên kết ngàm (hàn)



Khớp cầu (3D)



Ngàm (3D)



Các liên kết cơ bản của dầm



Simply supported beam



Cantilevered beam



Overhanging beam

3. Ngoại lực - Phản lực và liên kết (tiếp)

- Cách xác định phản lực
 - Coi thanh như vật rắn tuyệt đối, xét sự cân bằng của thanh dưới tác dụng của tải trọng và phản lực
 - Các dạng điều kiện cân bằng tĩnh học :
 - $\Sigma X = 0, \Sigma Y = 0; \Sigma M_C = 0 ; x \nparallel y, C$ bất kỳ
 - $\Sigma U = 0, \Sigma M_A = 0, \Sigma M_B = 0 ; AB \not\perp u$
 - $\Sigma M_A = 0, \Sigma M_B = 0, \Sigma M_C = 0 ; A, B, C$ không thẳng hàng.
- Bài tập ví dụ

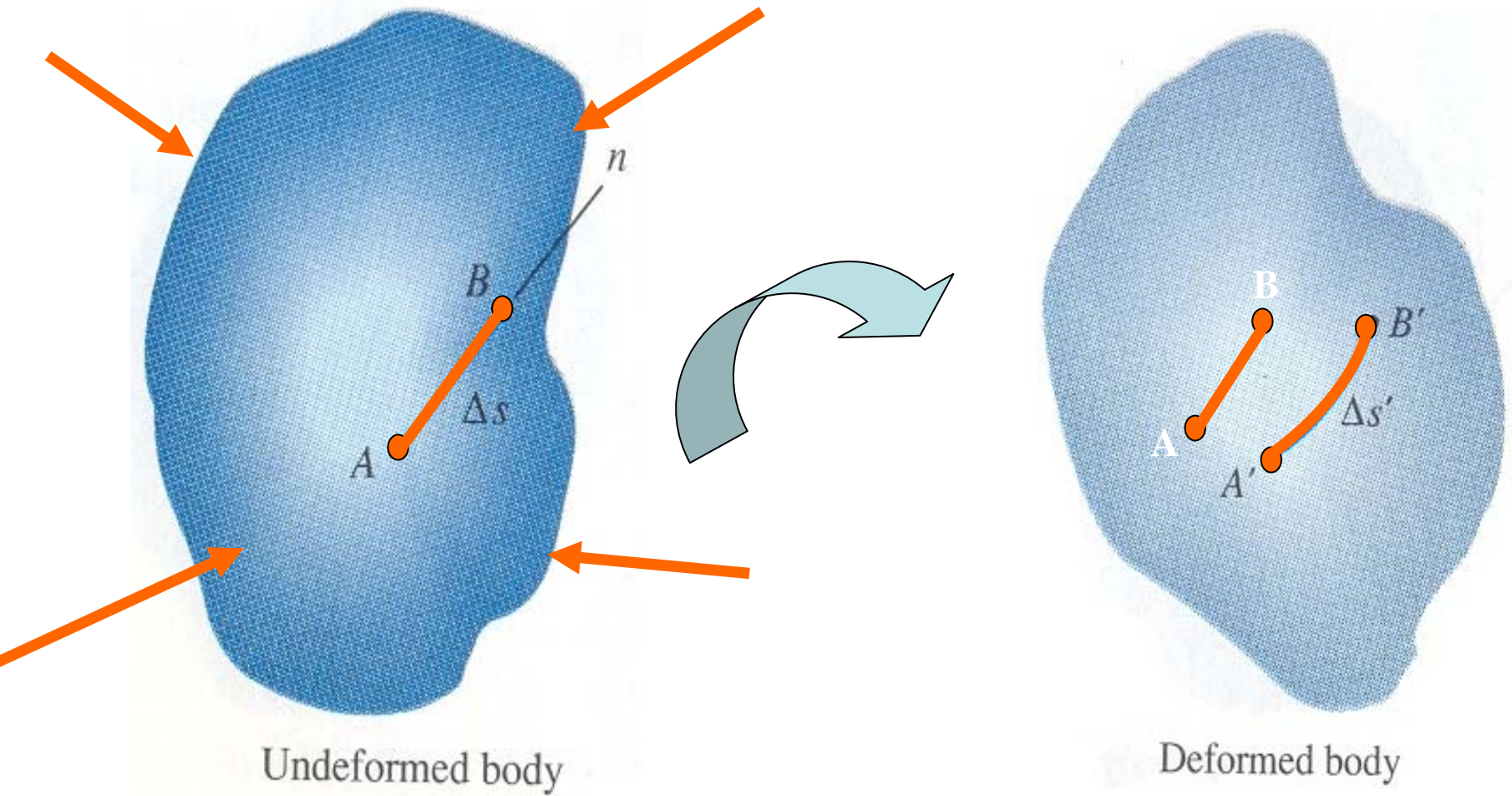
3. Ngoại lực - Phản lực và liên kết (tiếp)

- Bài toán tĩnh định
 - Để xác định phản lực liên kết hoặc nội lực trong các thanh chỉ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học
- Bài toán siêu tĩnh
 - Chỉ sử dụng các phương trình cân bằng tĩnh học, chưa thể xác định hết phản lực liên kết hoặc nội lực trong các thanh
 - Viết thêm pt phụ => Đk biến dạng

4. Khái niệm về chuyển vị, biến dạng (1)

- Bộ phận công trình, chi tiết máy: vật rắn thực => dưới tác dụng ngoại lực => Hình dạng, kích thước thay đổi
- Biến dạng
 - Sự thay đổi hình dạng, kích thước của vật thể dưới tác dụng của ngoại lực
- Chuyển vị
 - Sự thay đổi vị trí của điểm vật chất thuộc vật thể dưới tác dụng của ngoại lực

Vật rắn biến dạng

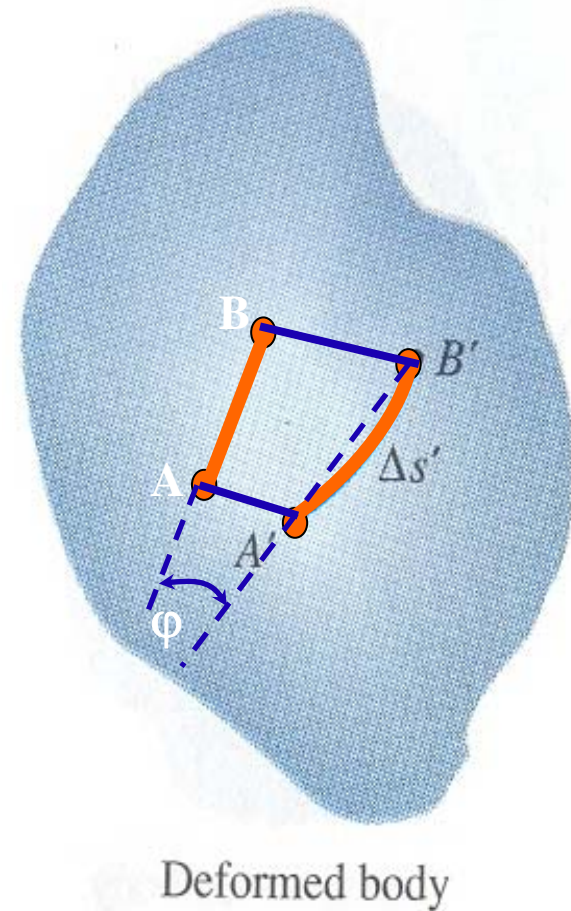


4. Khái niệm về chuyển vị, biến dạng (2)

a. Chuyển vị

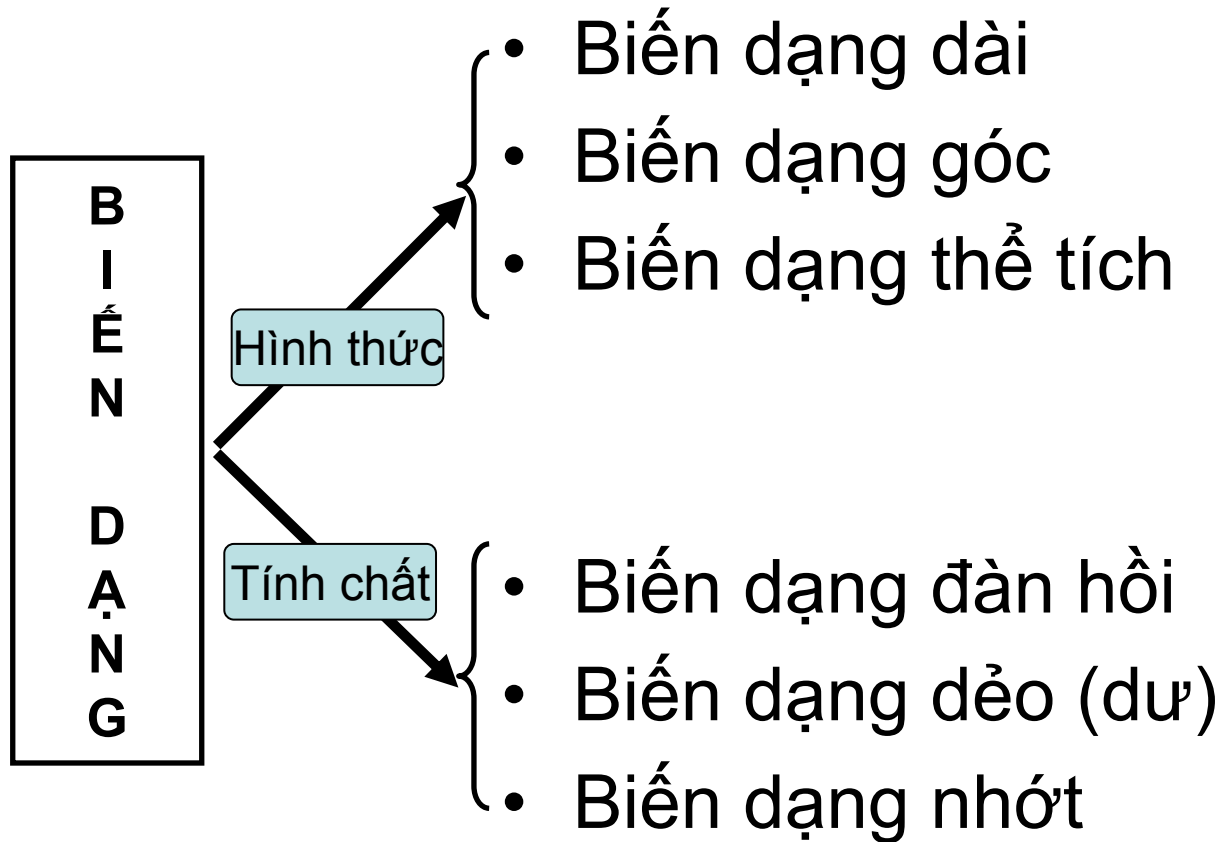
AA', BB' - chuyển vị dài

φ - chuyển vị góc



4. Khái niệm về chuyển vị, biến dạng (4)

b. Biến dạng



4. Khái niệm về chuyển vị, biến dạng (5)

- **Biến dạng dài:** Sự thay đổi chiều dài
- **Biến dạng góc:** Sự thay đổi góc vuông
- **Biến dạng thể tích:** Sự thay đổi thể tích
- **Biến dạng đàn hồi:** mất đi khi loại bỏ nguyên nhân gây biến dạng
- **Biến dạng dẻo (dư):** không mất đi khi loại bỏ nguyên nhân gây biến dạng
- **Biến dạng nhớt:** không xảy ra tức thời mà biến đổi theo thời gian

5. Nội lực. PP mặt cắt. Ứng suất (1)

- **Lực tương tác:**

- Lực tương hỗ giữa các phần tử vật chất của vật thể nhằm giữ vật thể có hình dạng nhất định

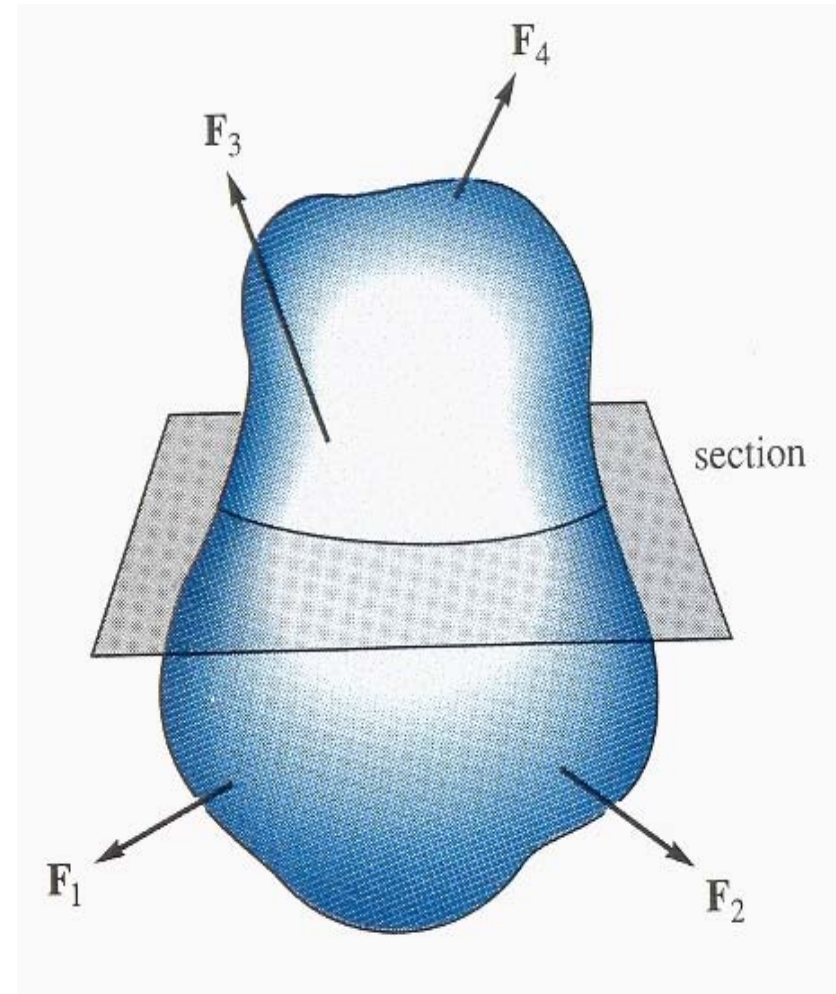
- Khi có tác dụng ngoại lực => biến dạng => lực tương tác thay đổi

5.1. Nội lực:

- Lượng thay đổi lực tương tác giữa các phần tử vật chất của vật thể khi chịu tác dụng của ngoại lực

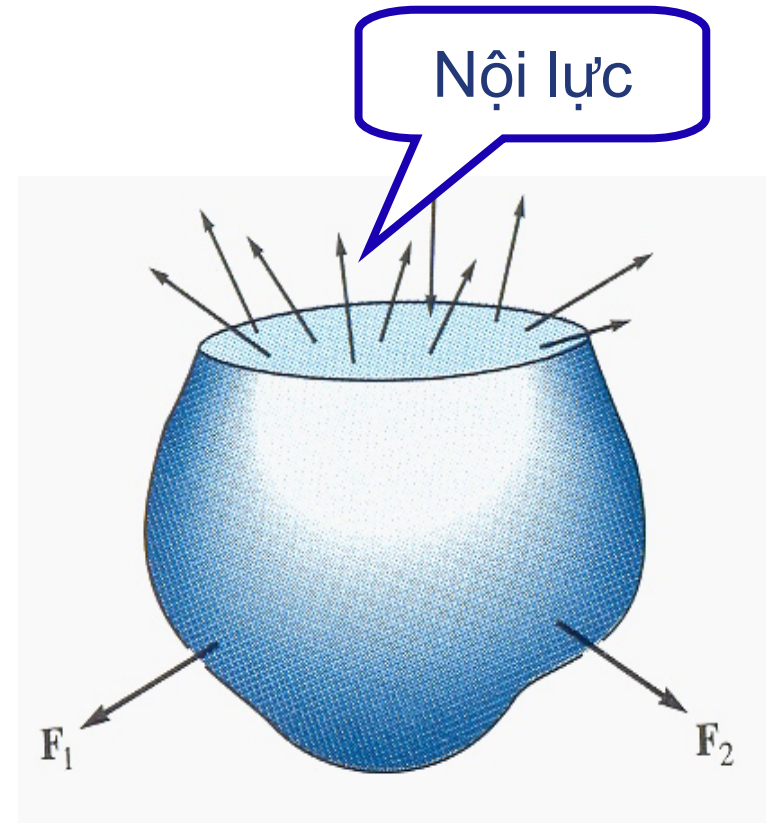
5. Nội lực. PP mặt cắt. Ứng suất (2)

- Xét vật thể hình dạng bất kỳ chịu tác dụng của ngoại lực (F_1, F_2, F_3, F_4)
=> Biến dạng => Nội lực
- Để nghiên cứu nội lực
=> **PHƯƠNG PHÁP MẶT CẮT**
- Cắt vật thể bởi mặt cắt bất kỳ chia vật thể làm 2 phần



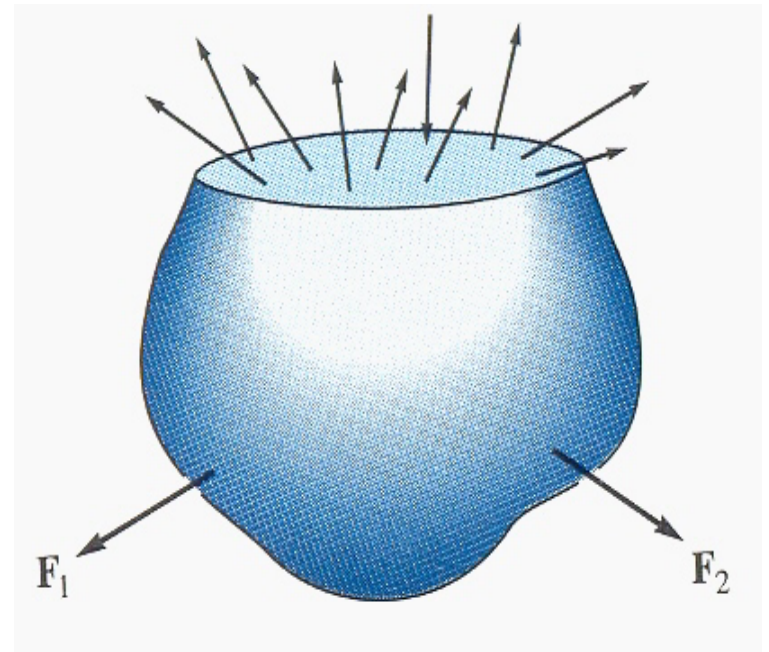
5. Nội lực. PP mặt cắt. Ứng suất (3)

- Vật thể ở trạng thái cân bằng \Rightarrow mỗi phần thoả mãn điều kiện cân bằng
- Phần dưới cân bằng:
 - Ngoại lực
 - Nội lực do phần trên tác dụng vào phần dưới



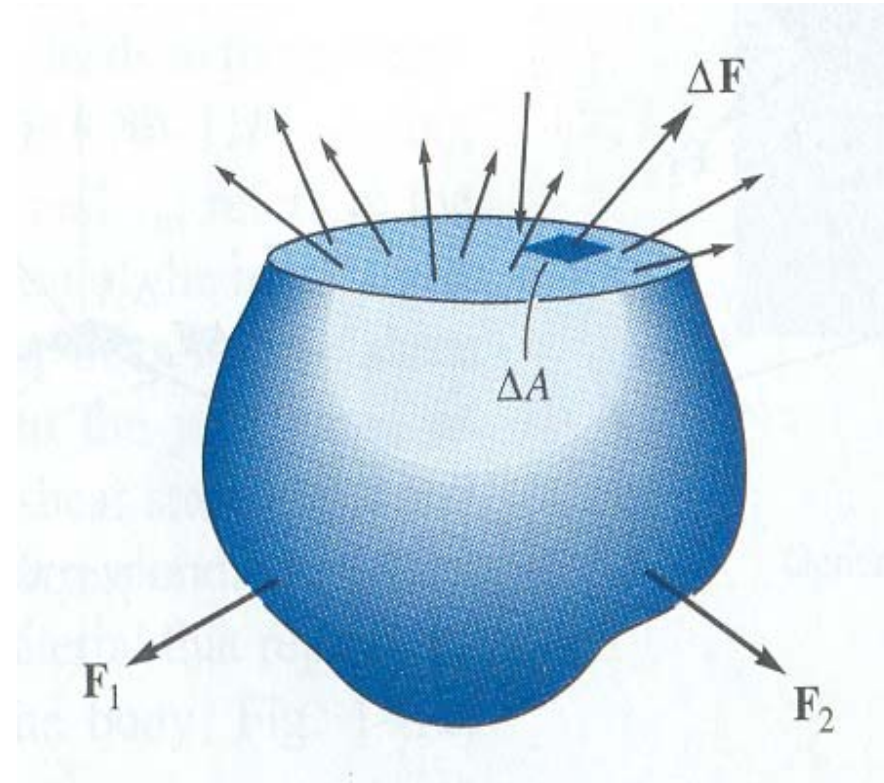
5. Nội lực. PP mặt cắt. Ứng suất (4)

- **Nội lực:**
 - ✓ phân bố bề mặt
 - ✓ qui luật phân bố?
 - ✓ Xác định được hợp lực



5. Nội lực. PP mặt cắt. Ứng suất (5)

- ΔA – phân tố diện tích mặt cắt chứa điểm K
- ΔF - hợp lực nội lực trên ΔA



5. Nội lực. PP mặt cắt. Ứng suất (6)

5.2. Ứng suất tại điểm K:

- Ứng suất toàn phần

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

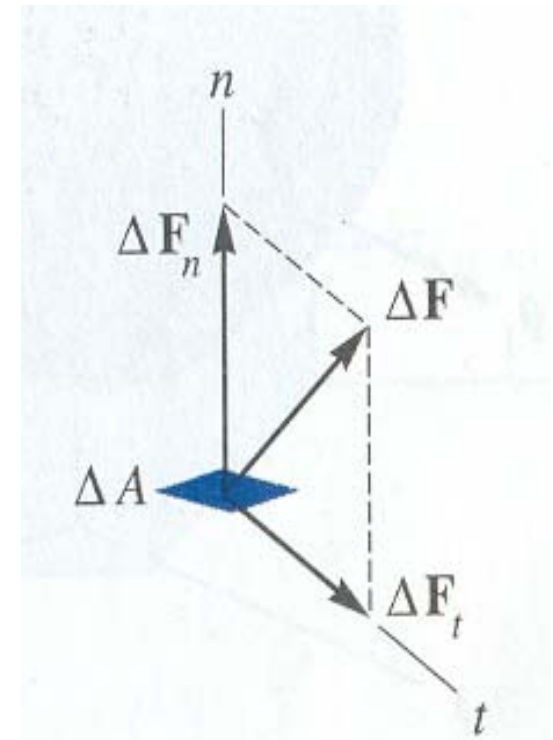
- Ứng suất pháp

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta A}$$

- Ứng suất tiếp

$$\vec{\tau} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_t}{\Delta A}$$

- Đơn vị: N/m^2 (Pa) Pascal

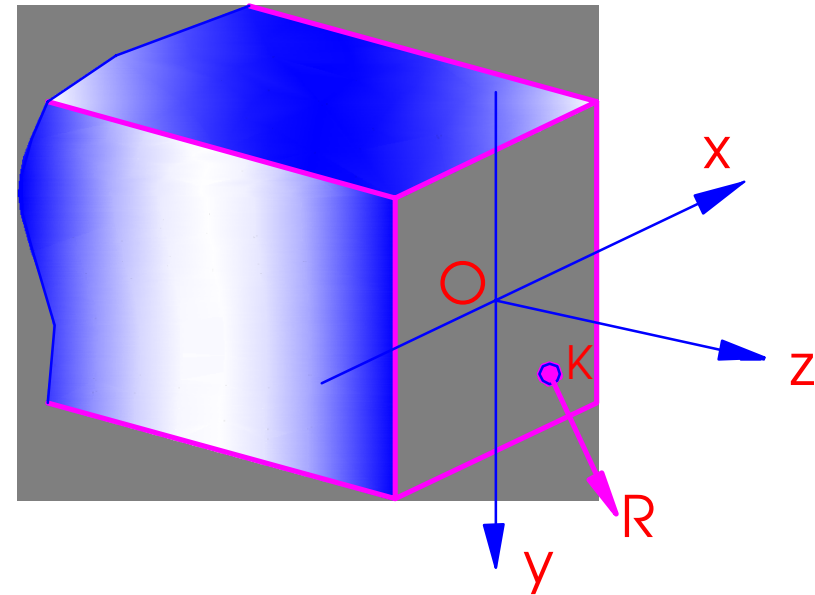


ΔF → ΔF_n – pháp tuyến
 → ΔF_t – tiếp tuyến

5. Nội lực. PP mặt cắt. Ứng suất (7)

5.3. Ứng lực – Các tp ứng lực trên mcn của thanh

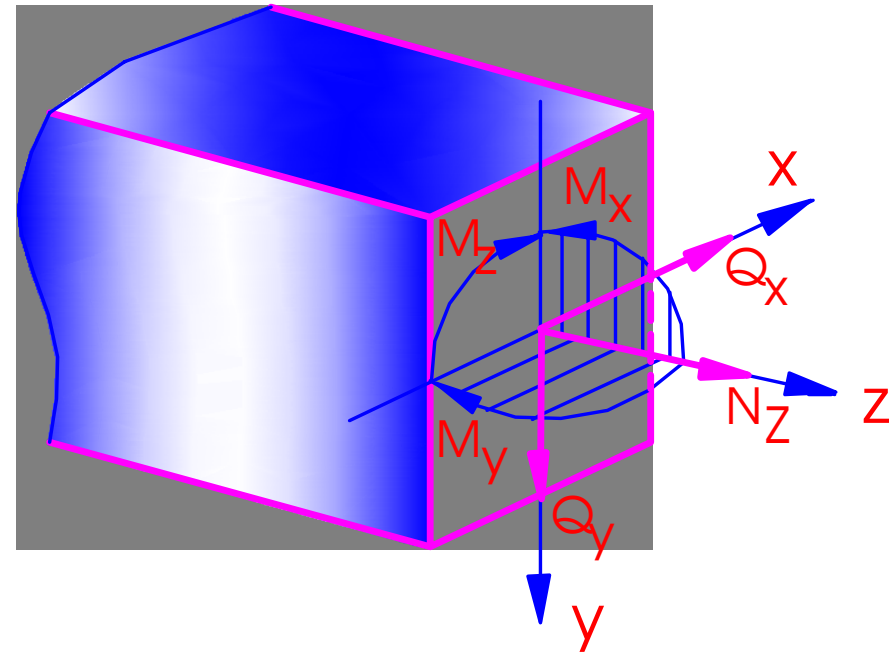
- Hợp lực nội lực trên mặt cắt ngang - **Ứng lực R**
- R: phương, chiều, điểm đặt bất kỳ \Rightarrow dời về trọng tâm O



5. Nội lực. PP mặt cắt. Ứng suất (8)

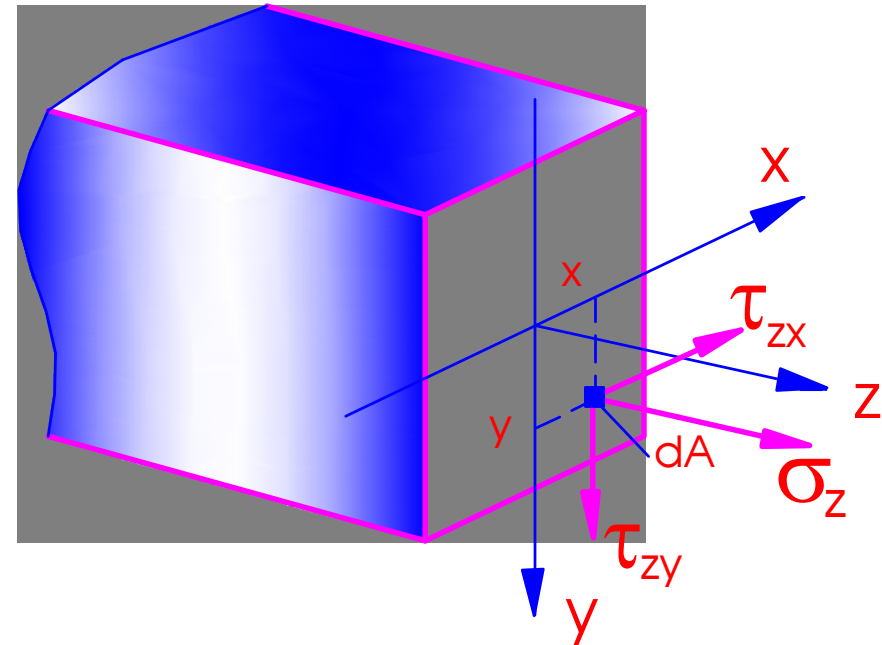
- N_z – lực dọc
- Q_x, Q_y - lực cắt
- M_x, M_y – mô men uốn
- M_z – mô men xoắn

➔ 6 ứng lực



5. Nội lực. PP mặt cắt. Ứng suất (9)

- Các thành phần ứng suất trên mặt cắt ngang
- ứng suất pháp σ_z
 - chỉ số z – phương pháp tuyến mcn
- ứng suất tiếp τ_{zx}, τ_{zy}
 - chỉ số thứ 1: phương pháp tuyến mcn
 - chỉ số thứ 2: phương ứng suất tiếp



5. Nội lực. PP mặt cắt. Ứng suất (10)

5.4. Quan hệ ứng suất và các thành phần ứng lực trên mặt cắt ngang

$$N_z = \int_A \sigma_z dA$$

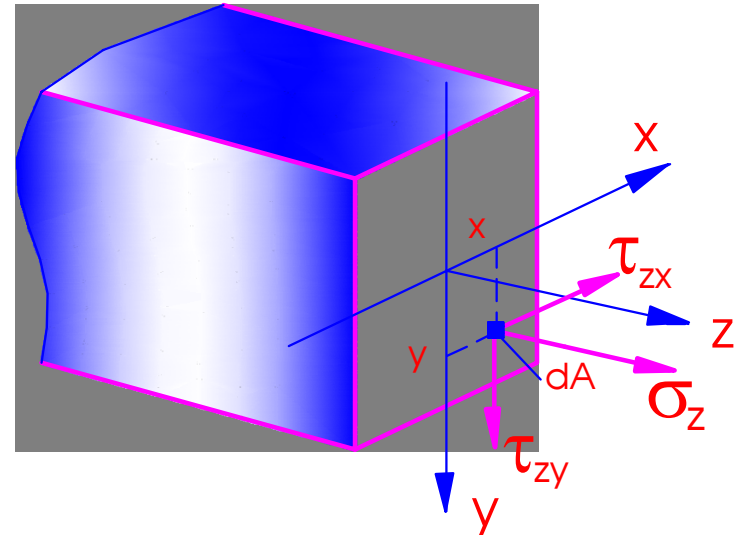
$$M_x = \int_A y \sigma_z dA$$

$$Q_x = \int_A \tau_{zx} dA$$

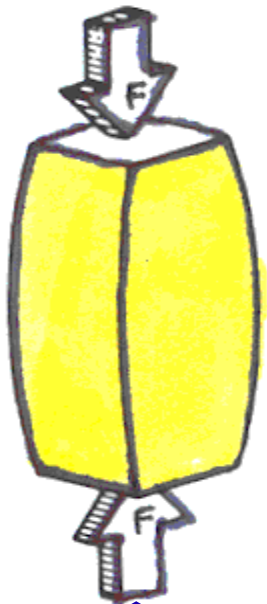
$$M_y = \int_A x \sigma_z dA$$

$$Q_y = \int_A \tau_{zy} dA$$

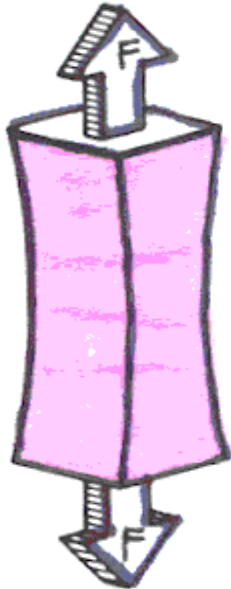
$$M_z = \int_A (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dA$$



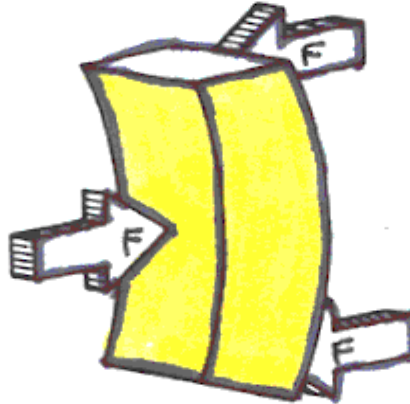
6. Các dạng chịu lực cơ bản



NÉN



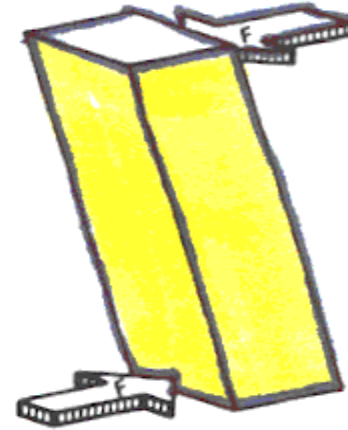
KÉO



UỐN



XOẮN



CẮT

7. Các giả thiết của môn học

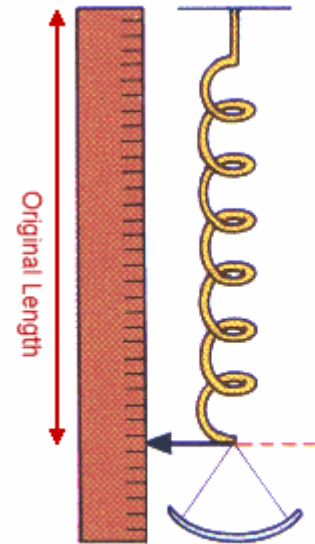
- Giả thiết 1: Vật liệu có cấu tạo vật chất liên tục, đồng nhất và đẳng hướng.
- Giả thiết 2: Ứng xử cơ học của vật liệu tuân theo định luật Hooke (quan hệ nội lực - biến dạng là bậc nhất thuần nhất),
- Giả thiết 3: Tính đàn hồi của vật liệu được xem là đàn hồi tuyệt đối. Biến dạng vật thể được xem là bé

7. Các giả thiết của môn học (2)

- Định luật Hooke
 - Độ giãn dài của lò xo tỉ lệ thuận với lực tác dụng
 - Lò xo sẽ quay về vị trí cũ khi loại bỏ lực tác dụng, cho đến khi vượt qua giới hạn đàn hồi

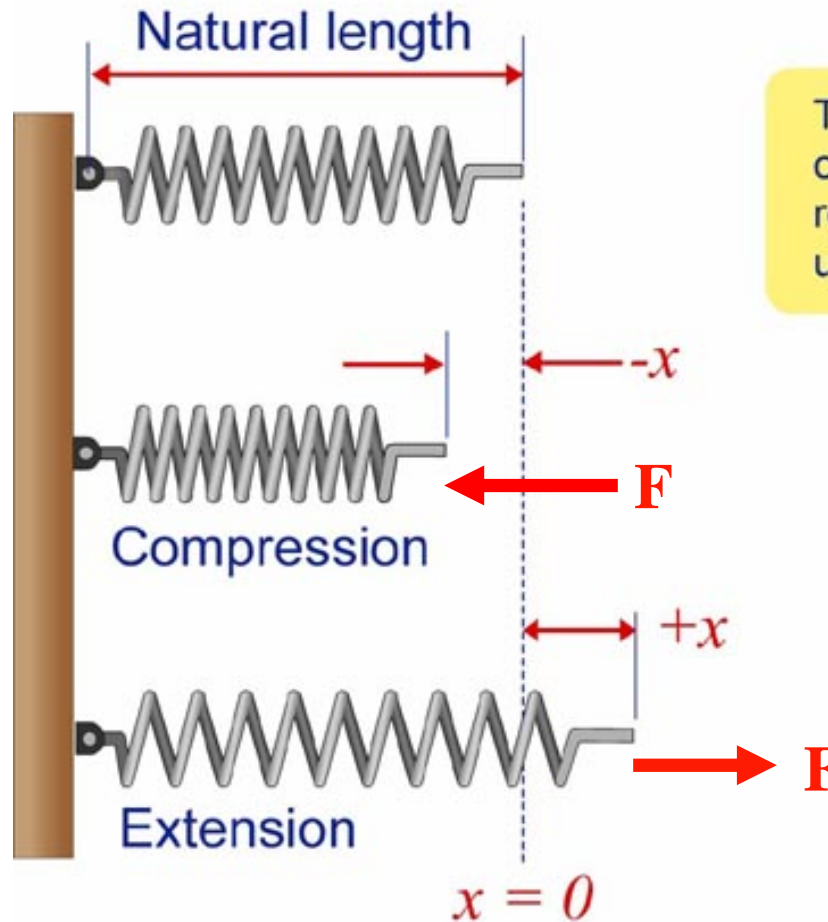


ROBERT HOOKE (1635-1703)



Định luật Hooke

Deformation of a Spring

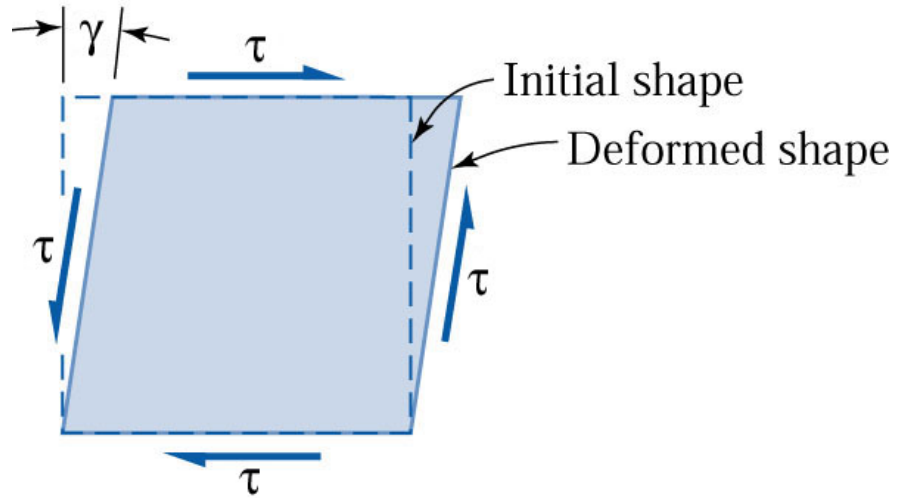
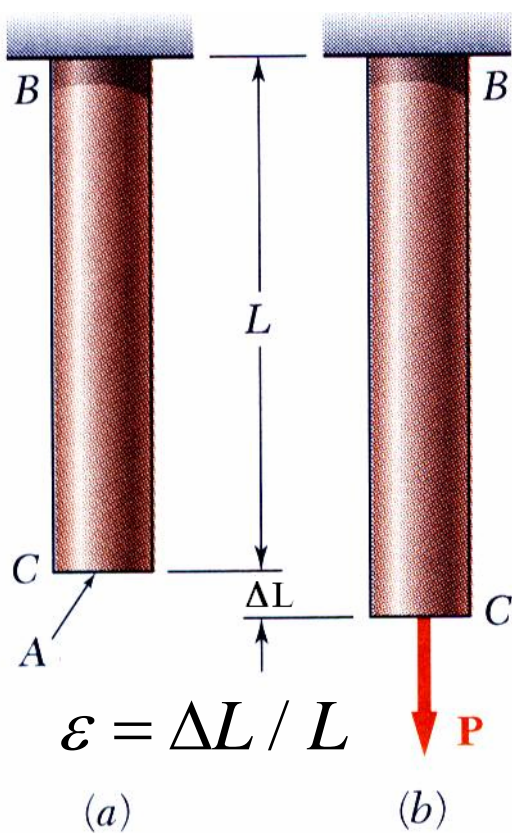


The deformation (x) of a spring is measured relative to its unstretched length.

$$F = kx$$

Độ cứng lò xo
[N/m]

Định luật Hooke



$$\tau = G\gamma$$

$$\sigma = E\varepsilon$$

Mô đun đàn hồi kéo (nén)

Biến dạng góc

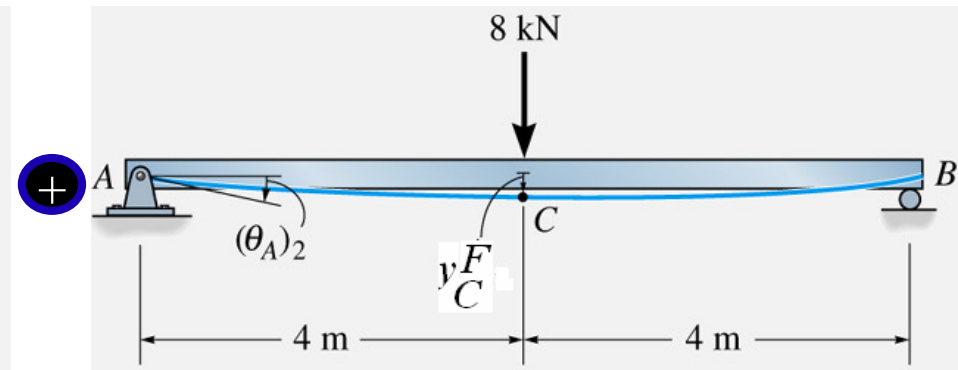
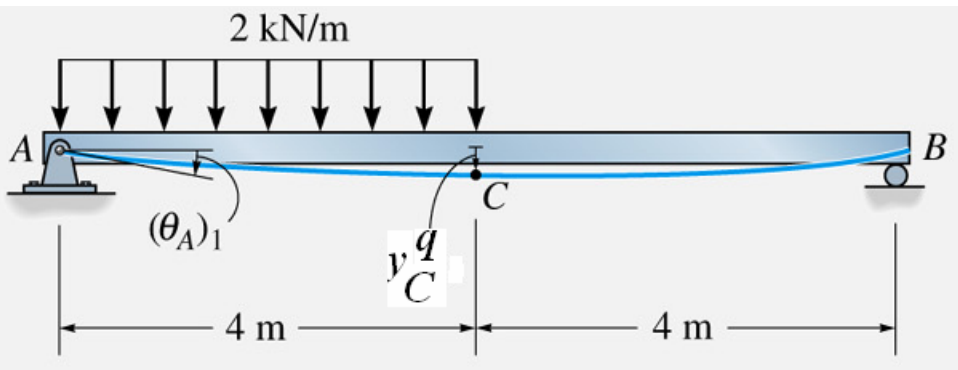
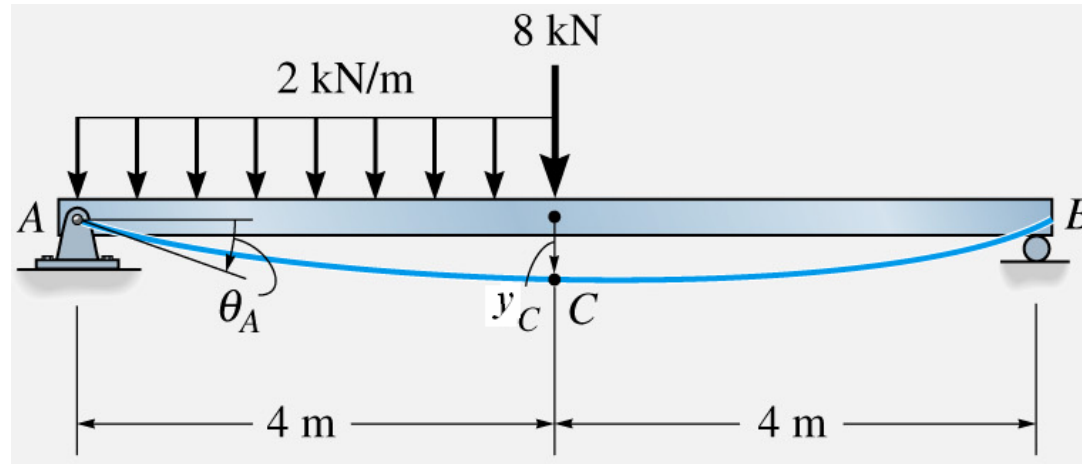
Mô đun đàn hồi kéo (nén)

Biến dạng dài tỉ đối

8. Nguyên lý độc lập tác dụng

- **Nguyên lý:** Ứng suất, biến dạng hay chuyển vị do một hệ ngoại lực gây ra sẽ bằng tổng các đại lượng do từng thành phần ngoại lực gây ra riêng rẽ
- **Điều kiện áp dụng**
 - Vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi
 - Biến dạng bé

8. Nguyên lý độc lập tác dụng



Thank you for attention

**Trần Minh Tú – University of
Civil Engineering
E-mail: tpnt2002@yahoo.com**

- Xin chân thành cảm ơn các nhà khoa học, các đồng nghiệp trong và ngoài nước vì những tư liệu, hình ảnh mà tác giả đã sử dụng khi xây dựng các bài giảng của mình.
- Xin chân thành cảm ơn các thầy cô giáo đồng nghiệp trong Bộ môn SBVL đã giúp đỡ, đóng góp nhiều ý kiến trong quá trình hoàn thành tập bài giảng



SỨC BỀN VẬT LIỆU

Trần Minh Tú - Đại học Xây dựng

Chương 1

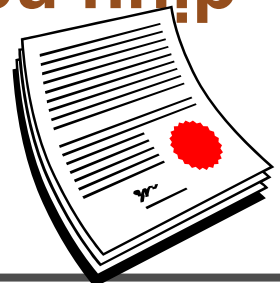
NỘI LỰC TRONG BÀI TOÁN THANH



Chương 1. Nội lực trong bài toán thanh

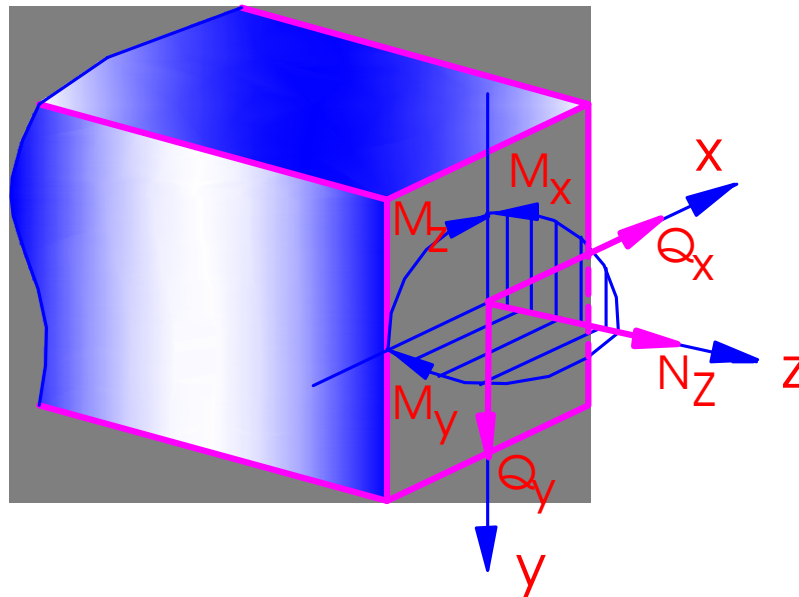
NỘI DUNG

- 1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang
- 1.2. Biểu đồ ứng lực – PP mặt cắt biến thiên
- 1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải trọng ngang phân bố
- 1.4. Phương pháp vẽ biểu đồ ứng lực theo điểm đặc biệt
- 1.5. Biểu đồ ứng lực của dầm tĩnh định nhiều nhịp
- 1.6. Biểu đồ ứng lực của khung phẳng



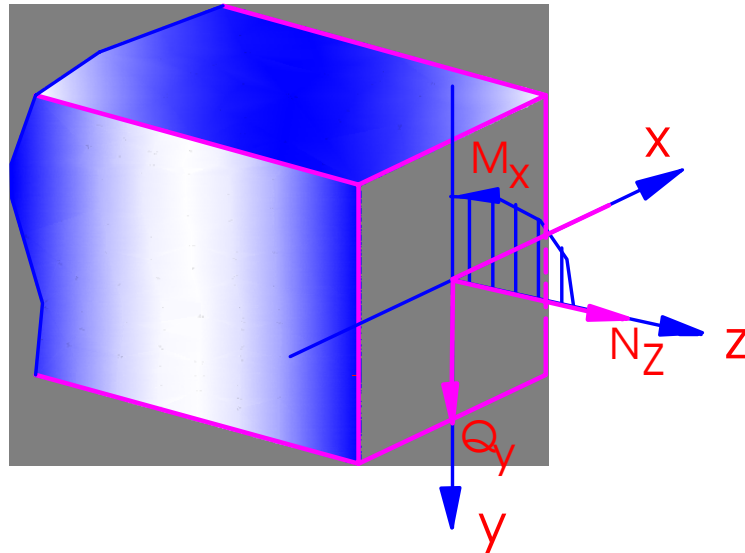
1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (1)

- Trong trường hợp tổng quát trên mặt cắt ngang của thanh chịu tác dụng của ngoại lực có 6 ứng lực:



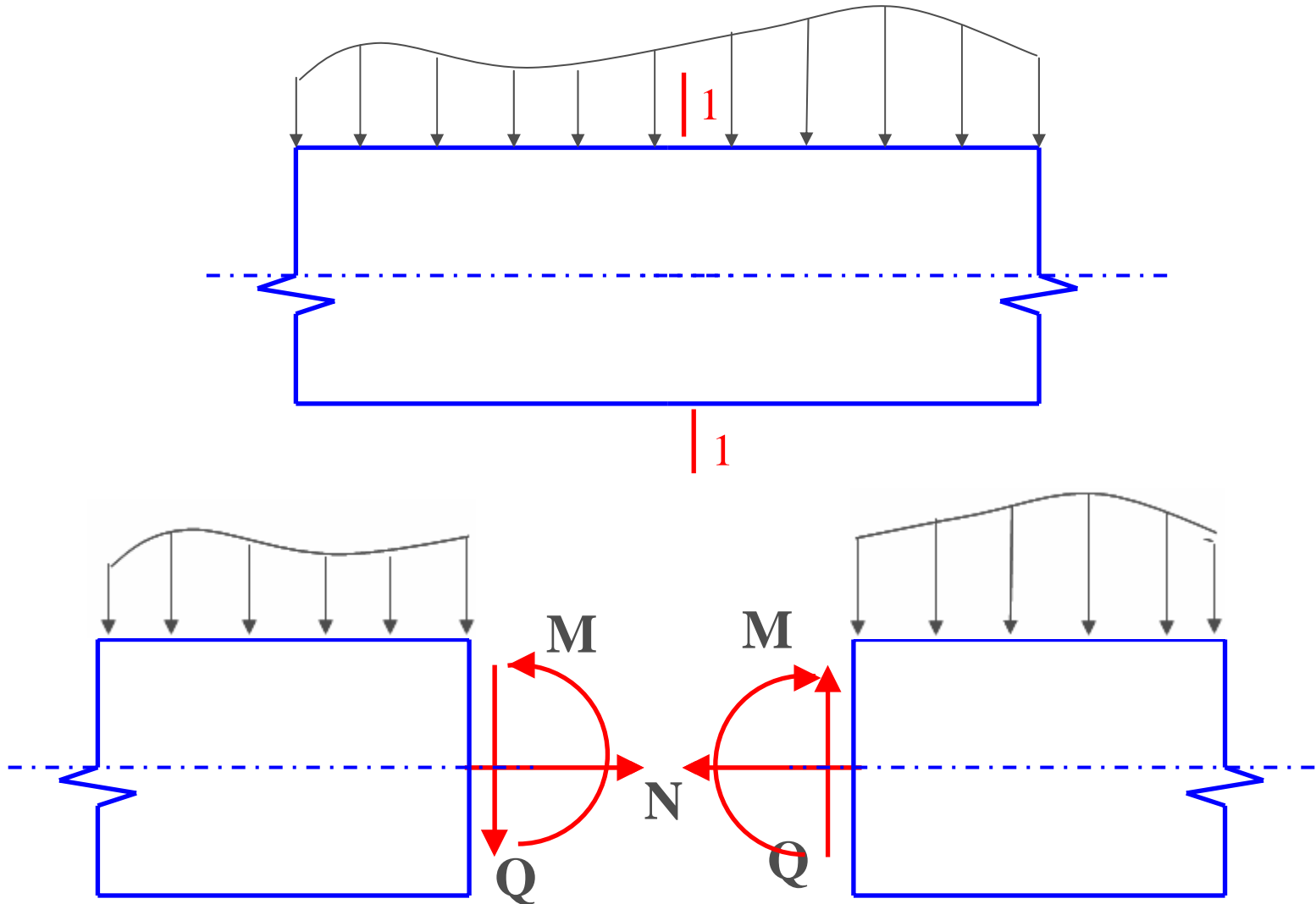
1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (2)

- **Bài toán phẳng**: Ngoại lực nằm trong mặt phẳng đi qua trục z (yOz) \Rightarrow Chỉ tồn tại các ứng lực trong mặt phẳng này: N_z , M_x , Q_y



- N_z - lực dọc; Q_y - lực cắt; M_x – mô men uốn

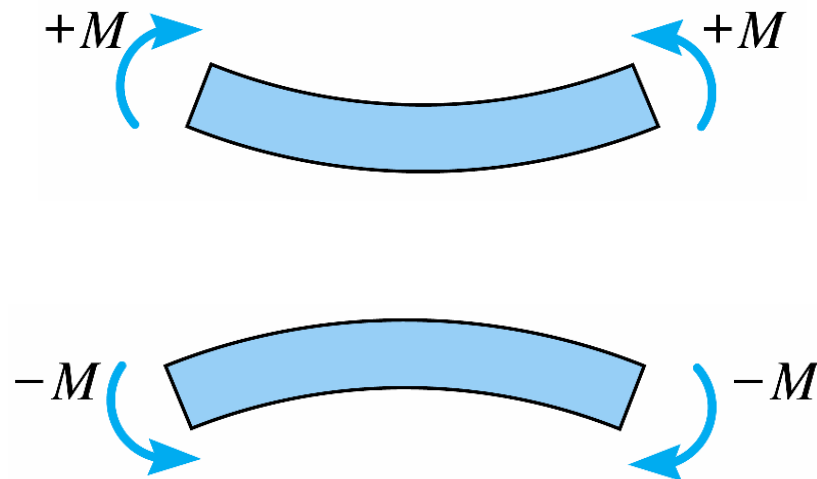
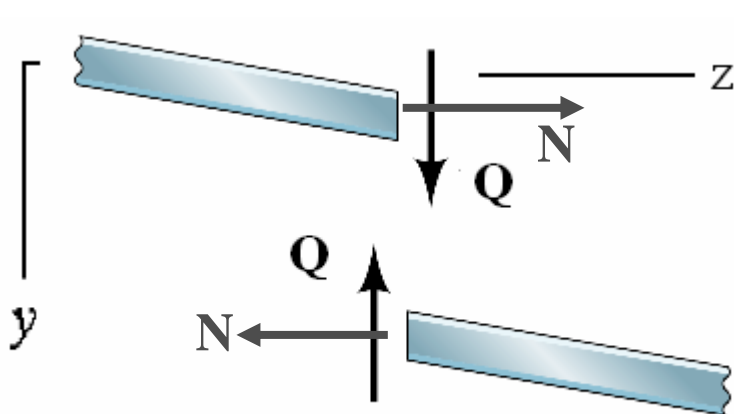
1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (3)



1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (4)

❖ Quy ước dấu các thành phần ứng lực

- Lực dọc: $N > 0$ khi có chiều đi ra khỏi mặt cắt
- Lực cắt: $Q > 0$ khi có chiều đi vòng quanh phần thanh đang xét theo chiều kim đồng hồ
- Mô men uốn: $M > 0$ khi làm căng các thớ dưới



1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (5)

❖ Cách xác định các thành phần ứng lực

- Giả thiết chiều các thành phần M, N, Q theo chiều dương qui ước
- Thiết lập phương trình hình chiếu lên các trục z, y và phương trình cân bằng mô men với trọng tâm O của mặt cắt ngang

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N = \dots$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q = \dots$$

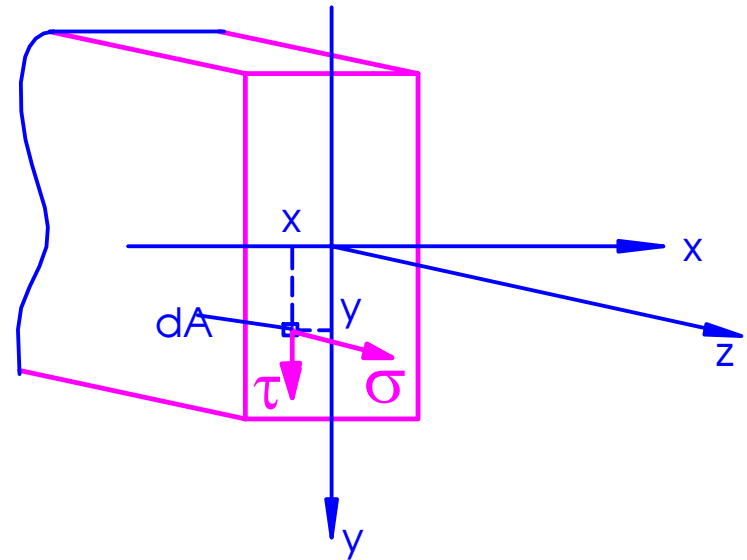
$$\sum M_O = 0 \Rightarrow M = \dots$$

1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (6)

❖ Biểu thức quan hệ ứng lực - ứng suất

- Vì là bài toán phẳng nên chỉ tồn tại các thành phần ứng suất trong mặt phẳng $zOy \Rightarrow$ ký hiệu $\sigma_z, \tau_{zy} \Rightarrow (\sigma, \tau)$
- Các thành phần ứng lực trên mặt cắt ngang

$$N = \int_{(A)} \sigma dA$$
$$Q = \int_{(A)} \tau dA$$
$$M = \int_{(A)} y \sigma dA$$



- $dA(x, y)$ là phân tố diện tích của dt mặt cắt ngang A

1.2. Biểu đồ ứng lực (1)

- ❖ Khi tính toán \Rightarrow cần tìm vị trí mặt cắt ngang có trị số ứng lực lớn nhất \Rightarrow biểu đồ
- ❖ **Biểu đồ ứng lực** - là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của các thành phần ứng lực theo toạ độ mặt cắt ngang
- ❖ **Các bước vẽ biểu đồ ứng lực**

1.2. Biểu đồ ứng lực (3)

- a. Xác định phản lực tại các liên kết
- b. Phân đoạn thanh sao cho biểu thức của các ứng lực trên từng đoạn là liên tục
- c. Viết biểu thức xác định các ứng lực N , Q , M theo tọa độ mặt cắt ngang bằng phương pháp mặt cắt
- d. Vẽ biểu đồ cho từng đoạn căn cứ vào phương trình nhận được từ bước (c)
- e. Kiểm tra biểu đồ nhờ vào các nhận xét mang tính trực quan

1.2. Biểu đồ ứng lực (4)

- ❖ Biểu đồ lực dọc, lực cắt vẽ theo qui ước và mang dấu



- ❖ Biểu đồ mô men luôn vẽ về phía thó' căng



Ví dụ 1.1 (1)

Vẽ biểu đồ các thành phần ứng lực trên các mặt cắt ngang của thanh chịu tải trọng như hình vẽ

GIẢI:

1. Xác định phản lực

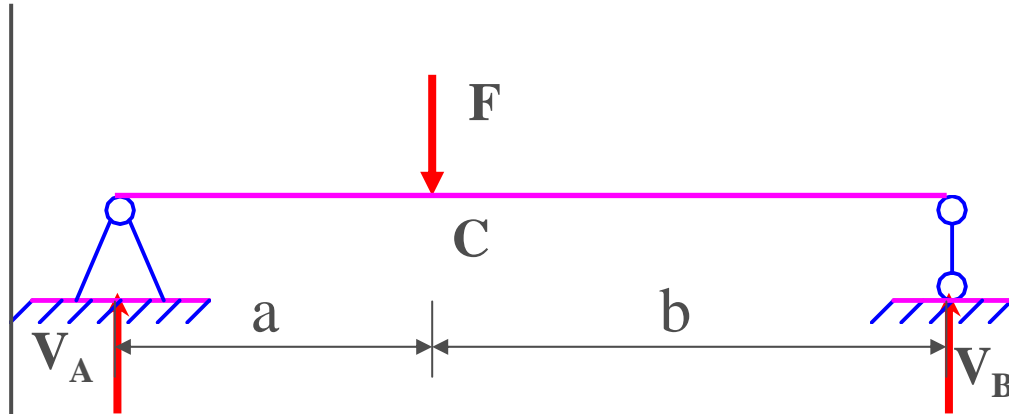
$$\sum M_A = V_B (a + b) - Fa = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{Fa}{(a + b)}$$

$$\sum M_B = V_A (a + b) - Fb = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{Fb}{(a + b)}$$

Thử lại: $\sum Y = 0$



Ví dụ 1.1 (2)

Đoạn AC

Mặt cắt 1 – 1: $0 \leq z_1 \leq a$

$$N = 0$$

$$\sum Y = Q - V_A = 0 \Rightarrow Q = V_A = \frac{Fb}{(a+b)}$$

$$\sum M_0 = M - V_A z_1 = 0 \Rightarrow M = V_A z_1 = \frac{Fbz_1}{(a+b)}$$

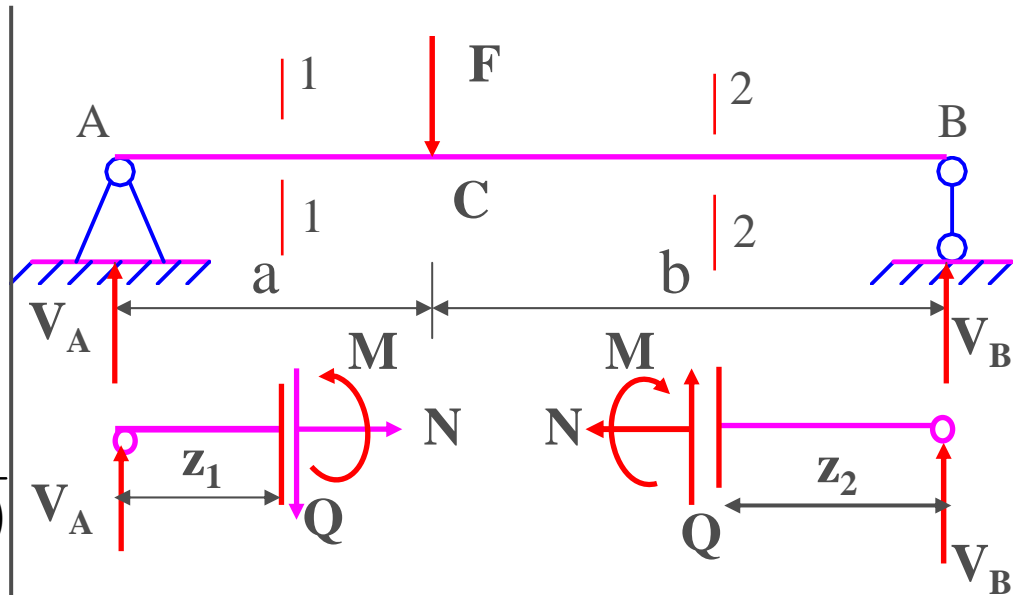
Đoạn BC

Mặt cắt 2 – 2: $0 \leq z_2 \leq b$

$$N = 0$$

$$\sum Y = Q + V_B = 0 \Rightarrow Q = -V_B = -\frac{Fa}{(a+b)}$$

$$\sum M_0 = M - V_B z_2 = 0 \Rightarrow M = V_B z_2 = \frac{Faz_2}{(a+b)}$$



Ví dụ 1.1 (3)

$$AC : Q = \frac{Fb}{(a+b)}$$

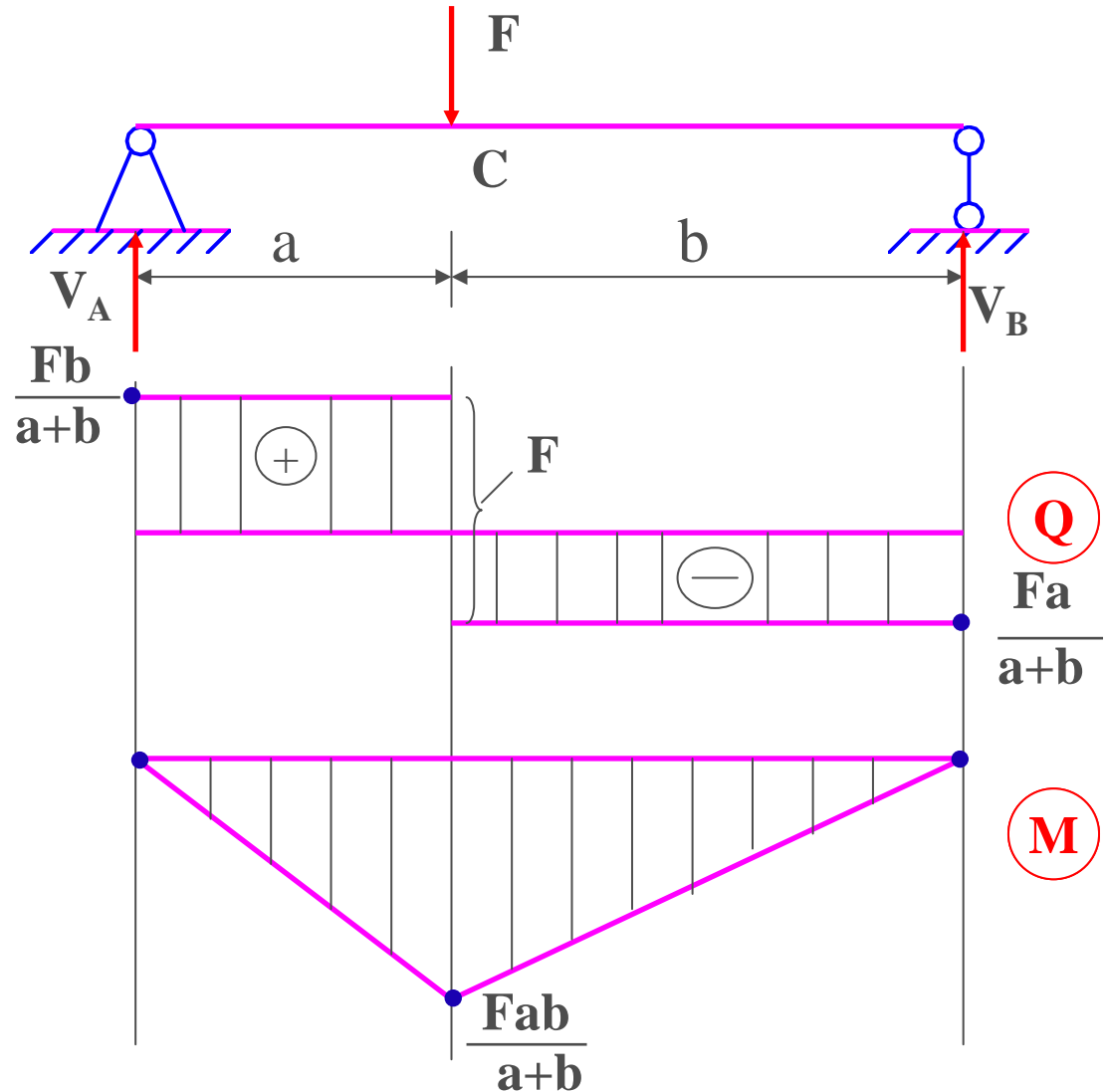
$$BC : Q = -\frac{Fa}{(a+b)}$$

$$AC : M = \frac{Fbz_1}{(a+b)}$$

$$BC : M = \frac{Faz_2}{(a+b)}$$

Nhận xét 1

Tại mặt cắt có lực tập trung \Rightarrow biểu đồ lực cắt có bước nhảy, độ lớn bước nhảy bằng giá trị lực tập trung, xét từ trái qua phải, chiều bước nhảy cùng chiều lực tập trung



Ví dụ 1.2 (1)

Vẽ biểu đồ các thành phần ứng lực trên các mặt cắt ngang của thanh chịu tải trọng như hình vẽ

GIẢI

1. Xác định các phản lực liên kết

Bài toán đối xứng:

$$\Rightarrow V_A = V_B = \frac{ql}{2}$$

Hoặc:

$$\sum M_A = V_B \cdot l - \frac{ql^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{ql}{2}$$

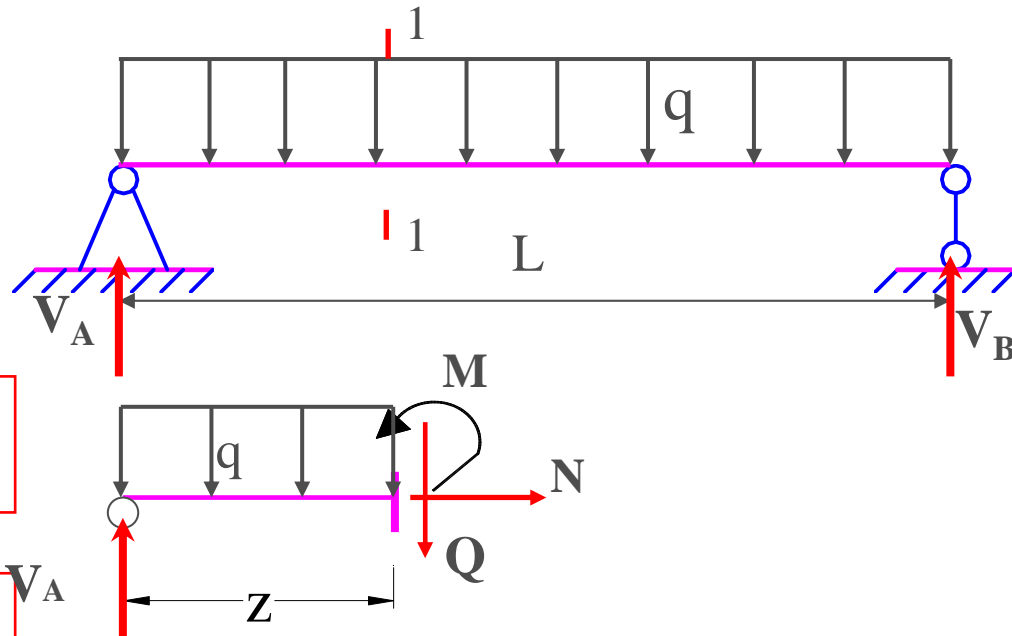
$$\sum M_B = V_A \cdot l - \frac{ql^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{ql}{2}$$

2. Biểu thức nội lực

Xét mặt cắt 1-1
($0 \leq z \leq L$)

$$\sum Y = Q + qz - V_A = 0 \Rightarrow Q = \frac{ql}{2} - qz$$



$$\sum M_0 = M - V_A z_1 + \frac{qz_1^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{ql}{2} \cdot z - \frac{q}{2} \cdot z^2$$

Ví dụ 1.2 (2)

$$Q = \frac{ql}{2} - q \cdot z \begin{cases} z = 0 \Rightarrow Q_A = \frac{qL}{2} \\ z = L \Rightarrow Q_B = -\frac{qL}{2} \end{cases}$$

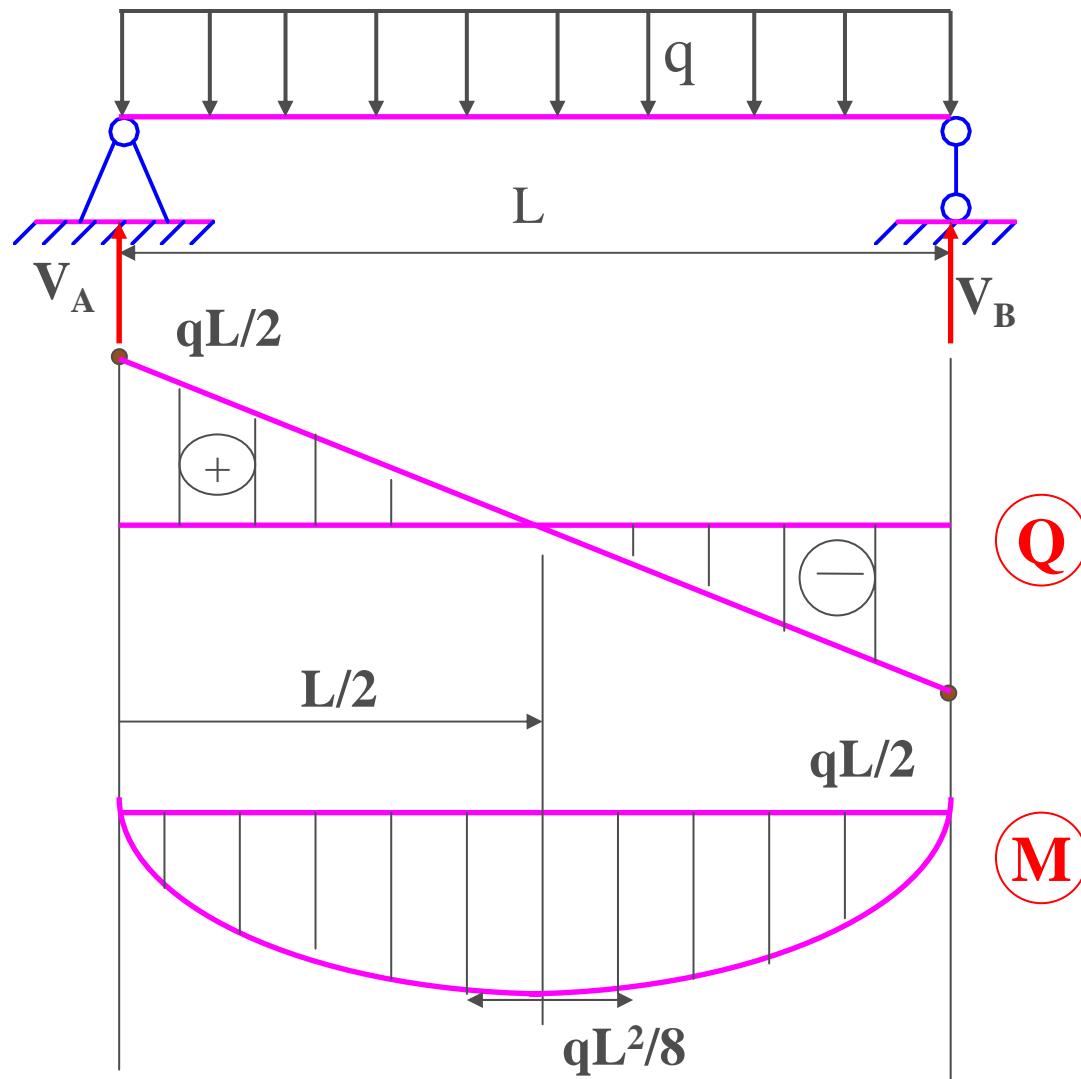
$$M = \frac{ql}{2} \cdot z - \frac{q}{2} \cdot z^2 \begin{cases} z = 0 \Rightarrow M_A = 0 \\ z = L \Rightarrow M_B = 0 \end{cases}$$

$$M' = \frac{qL}{2} - qz \quad M' = 0 \Rightarrow z = \frac{L}{2}$$

$$M'' = -q < 0 \quad \Rightarrow M_{max} = M_{(z=L/2)} = \frac{qL^2}{8}$$

▪ Nhận xét 2

Tại mặt cắt có lực cắt bằng 0, biểu đồ mô men đạt cực trị



Ví dụ 1.3 (1)

1. Xác định phản lực:

$$\sum M_A = V_B \cdot (a + b) - M = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{M}{a + b}$$

$$\sum M_B = V_A \cdot (a + b) - M = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{M}{a + b}$$

2. Lập các biểu thức ứng lực:

AC: Xét mặt cắt 1-1 ($0 \leq z_1 \leq a$)

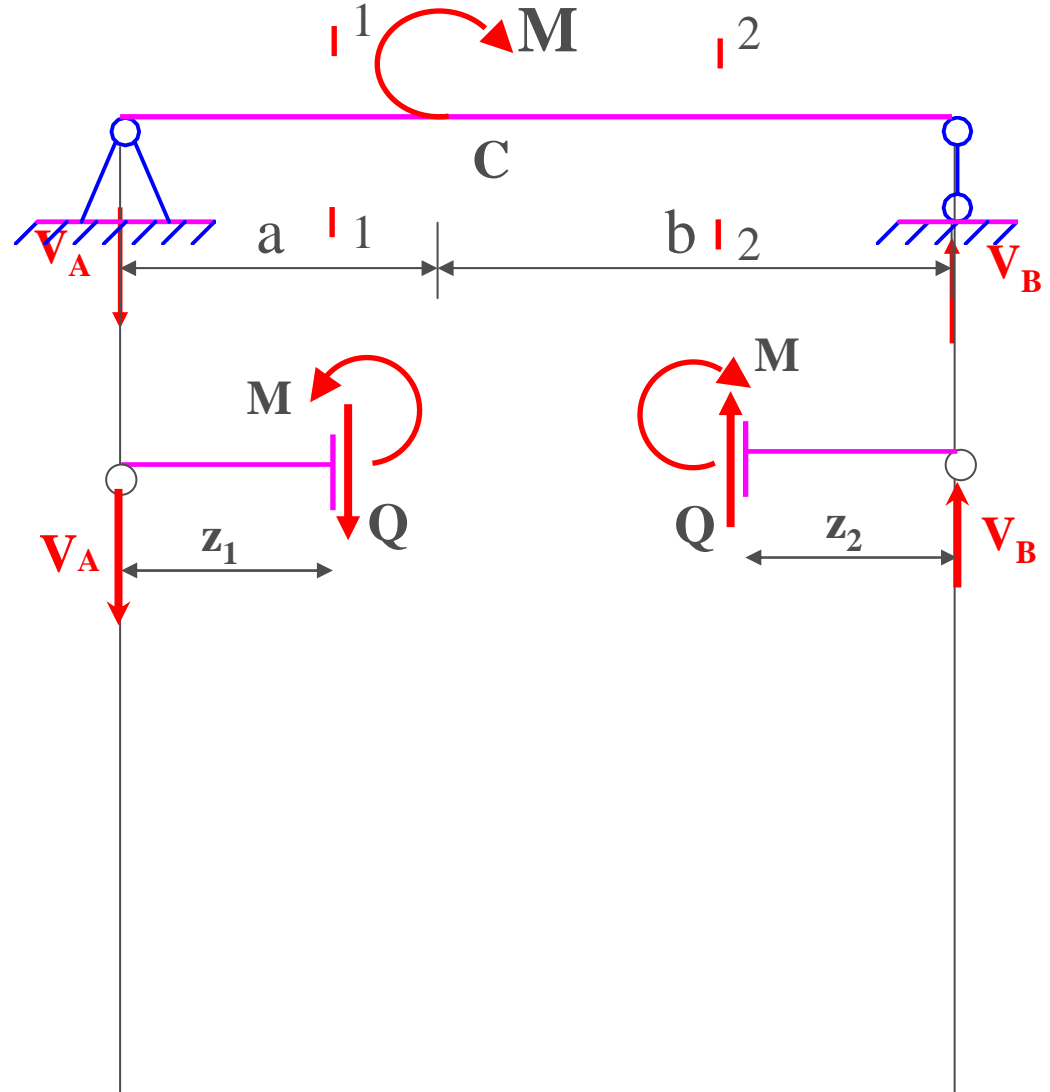
$$Q_y = -V_A = -\frac{M}{a + b}$$

$$M_x = -V_A \cdot z$$

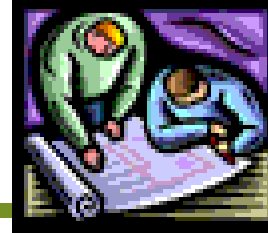
Xét mặt cắt 2-2 ($0 \leq z_2 \leq b$)

$$Q_y = -V_A = -\frac{M}{a + b}$$

$$M_x = V_B \cdot z_2$$



Ví dụ 1.3 (2)



AC: ($0 \leq z_1 \leq a$)

$$Q_y = -V_A = -\frac{M}{a+b}$$

$$M_x = -V_A \cdot z_1$$

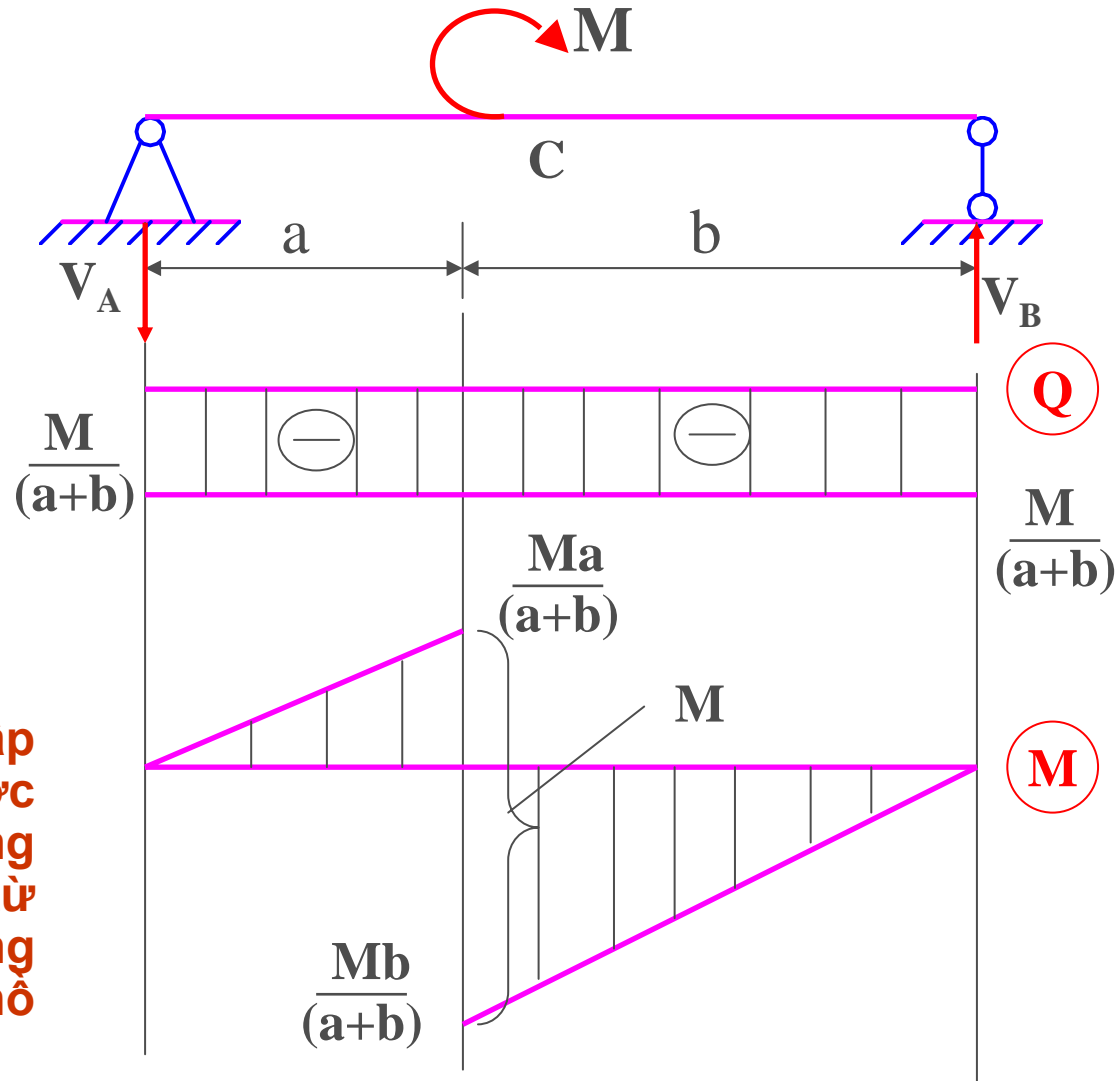
BC: ($0 \leq z_2 \leq b$)

$$Q_y = -V_A = -\frac{M}{a+b}$$

$$M_x = V_B \cdot z_2$$

Nhận xét 3

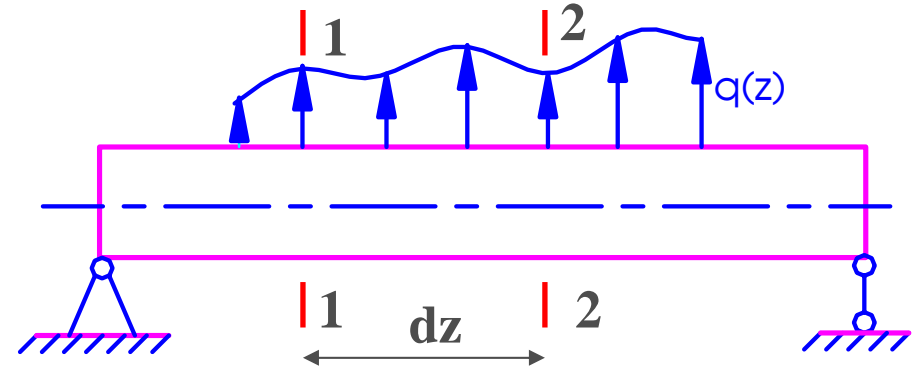
Tại mặt cắt có mô men tập trung, biểu đồ mô men có bước nhảy, độ lớn bước nhảy bằng giá trị mô men tập trung, xét từ trái qua phải, mômen tập trung quay thuận chiều kim đồng hồ thì bước nhảy đi xuống



1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải ngang phân bố (1)

- Xét dầm chịu tải phân bố $q(z) > 0$: hướng lên 

Tách đoạn thanh có chiều dài dz giới hạn bởi 2 mặt cắt ngang 1-1 và 2-2

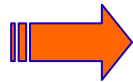


$$\sum Y = Q + dQ - Q - q(z)dz = 0$$

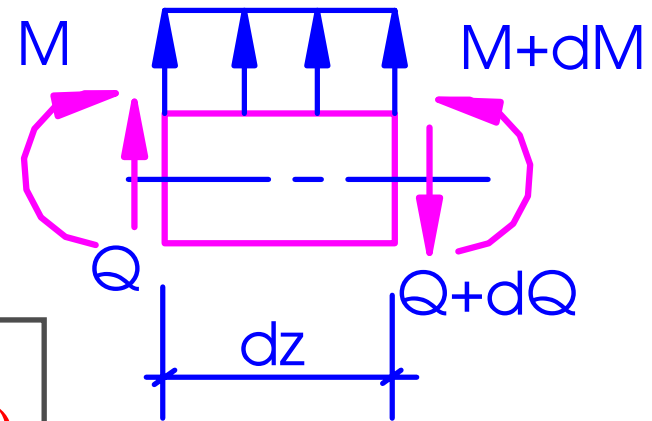
$$\Rightarrow \frac{dQ}{dz} = q(z)$$

$$\sum M = M + dM - M - (Q + dQ)\frac{dz}{2} - Q\frac{dz}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dz} = Q$$



$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q(z)$$



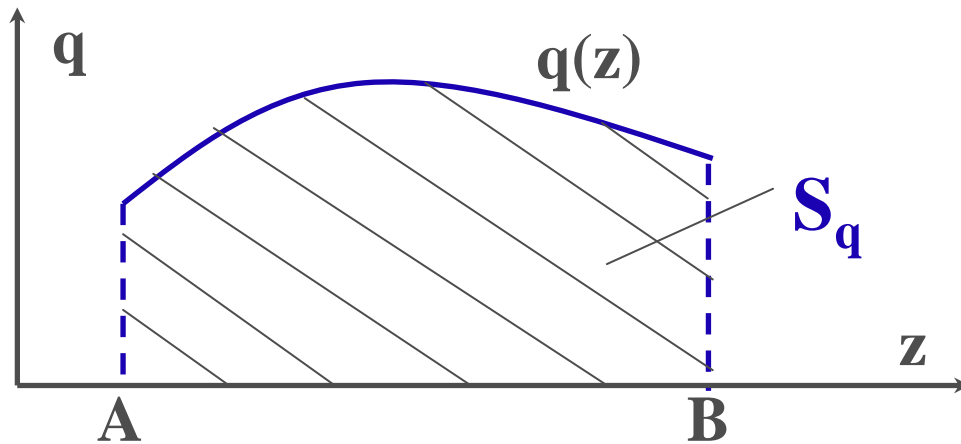
Đạo hàm bậc hai của mô men uốn bằng đạo hàm bậc nhất của lực cắt và bằng cường độ tải trọng phân bố

1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải ngang phân bố (2)

❖ Ứng dụng

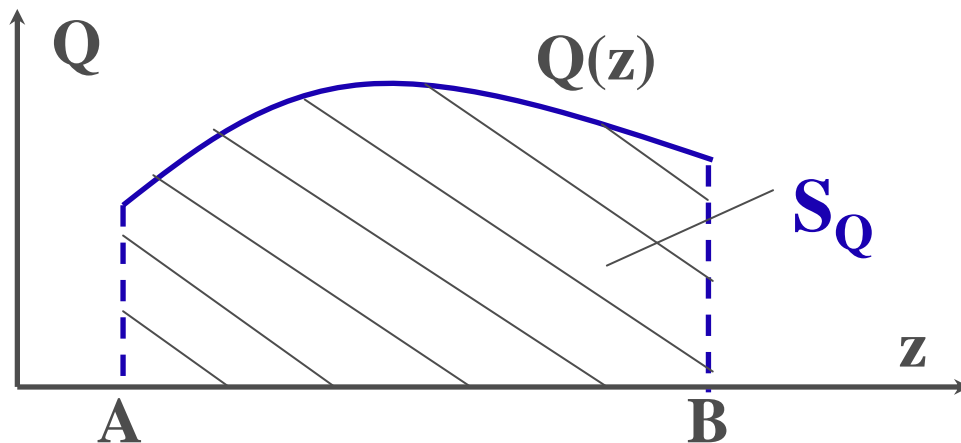
- Nhận dạng các biểu đồ Q, M khi biết qui luật phân bố của tải trọng $q(z)$. Nếu trên một đoạn thanh biểu thức của $q(z)$ bậc n thì biểu thức lực cắt Q bậc $(n+1)$, biểu thức mô men M bậc $(n+2)$
- Tại mặt cắt có $Q=0 \Rightarrow M$ cực trị
- Tính các thành phần Q, M tại mặt cắt bất kỳ khi biết giá trị của chúng tại mặt cắt xác định
 - $Q_{\text{phải}} = Q_{\text{trái}} + S_q$ (S_q – Dtích biểu đồ q)
 - $M_{\text{phải}} = M_{\text{trái}} + S_Q$ (S_Q – Dtích biểu đồ Q)

1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải ngang phân bố (3)



$$\int_A^B dQ = \int_A^B q(z) dz$$

$$Q_B = Q_A + S_q$$



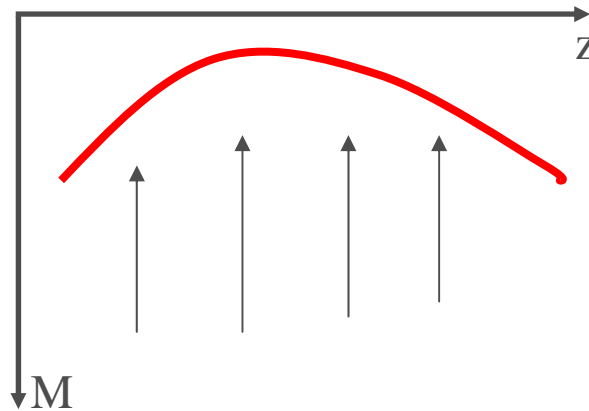
$$\int_A^B dM = \int_A^B Q(z) dz$$

$$M_B = M_A + S_Q$$

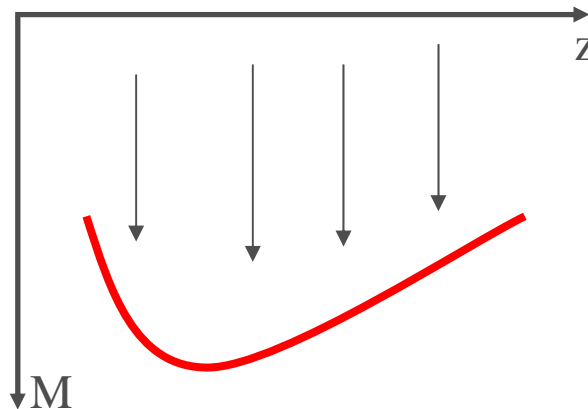
1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải ngang phân bố (4)

$$M'' = q(z)$$

$q(z) > 0 \Rightarrow M \text{ lõm} \Rightarrow$



$q(z) < 0 \Rightarrow M \text{ lõm} \Rightarrow$



Nhận xét:

Biểu đồ mô men luôn có xu hướng hứng lực

1.4. Vẽ biểu đồ ứng lực theo điểm đặc biệt

- ❖ Cơ sở: Dựa vào mối liên hệ vi phân giữa Q , M và $q(z)$
- ❖ Biết tải trọng phân bố \Rightarrow nhận xét dạng biểu đồ Q , $M \Rightarrow$ xác định số điểm cần thiết để vẽ được biểu đồ
 - $q=0 \Rightarrow Q=\text{const} \Rightarrow Q_A=?$ (hoặc Q_B)
 M bậc 1 $\Rightarrow M_A=?$ và $M_B=?$
 - $q=\text{const} \Rightarrow Q$ bậc 1 $\Rightarrow Q_A=?$ $Q_B=?$
 M bậc 2 $\Rightarrow M_A=?$; $M_B=?$; cực trị?
tính lồi, lõm,..?

1.4. Vẽ biểu đồ ứng lực theo điểm đặc biệt (2)

❖ Các giá trị Q_A , Q_B , M_A , M_B , cực trị - là giá trị các điểm đặc biệt. Được xác định bởi:

- Quan hệ bước nhảy của biểu đồ

- Phương pháp mặt cắt

- $Q_{\text{phải}} = Q_{\text{trái}} + S_q$ (S_q - Dtích biểu đồ q)

- $M_{\text{phải}} = M_{\text{trái}} + S_Q$ (S_Q - Dtích biểu đồ Q)

❖ Ví dụ

Ví dụ 1.4 (1)

❖ Xác định phản lực

$$\sum M_B = V_A \cdot 3a - 2qa \cdot 2a - F \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{5}{3}qa$$

$$\sum M_A = V_B \cdot 3a - 2qa \cdot a - F \cdot 2a = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{4}{3}qa$$

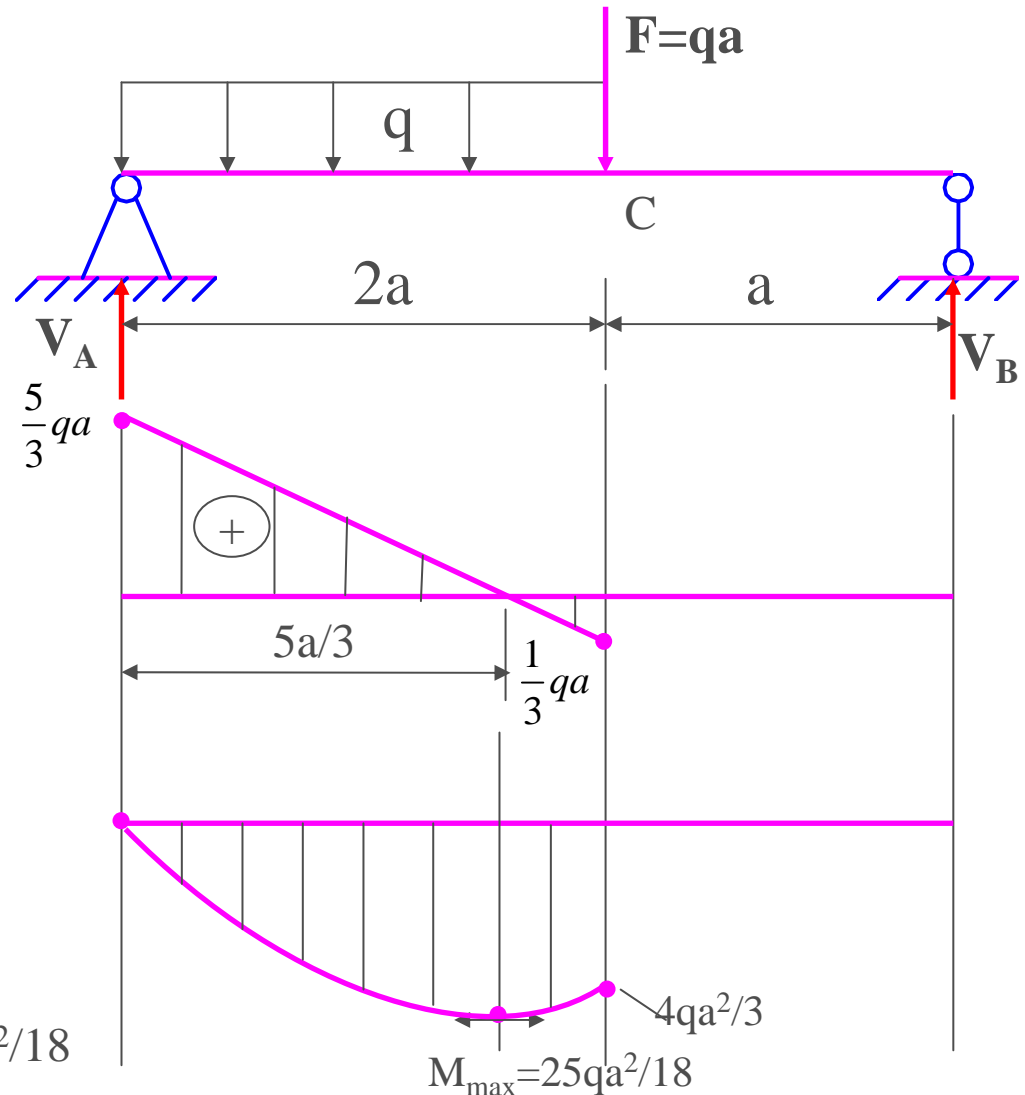
Xét đoạn AC: $q = \text{const} \rightarrow Q$ bậc 1

$$Q_A = V_A$$

$$Q_C = V_A + S_q = 5qa/3 - 2qa = -qa/3$$

$$M \text{ bậc 2: } M_A = 0$$

$$M_C = M_A + S_Q = 4qa^2/3; M_{\max} = 25qa^2/18$$



Ví dụ 1.4 (2)

Xét đoạn BC: $q=0$

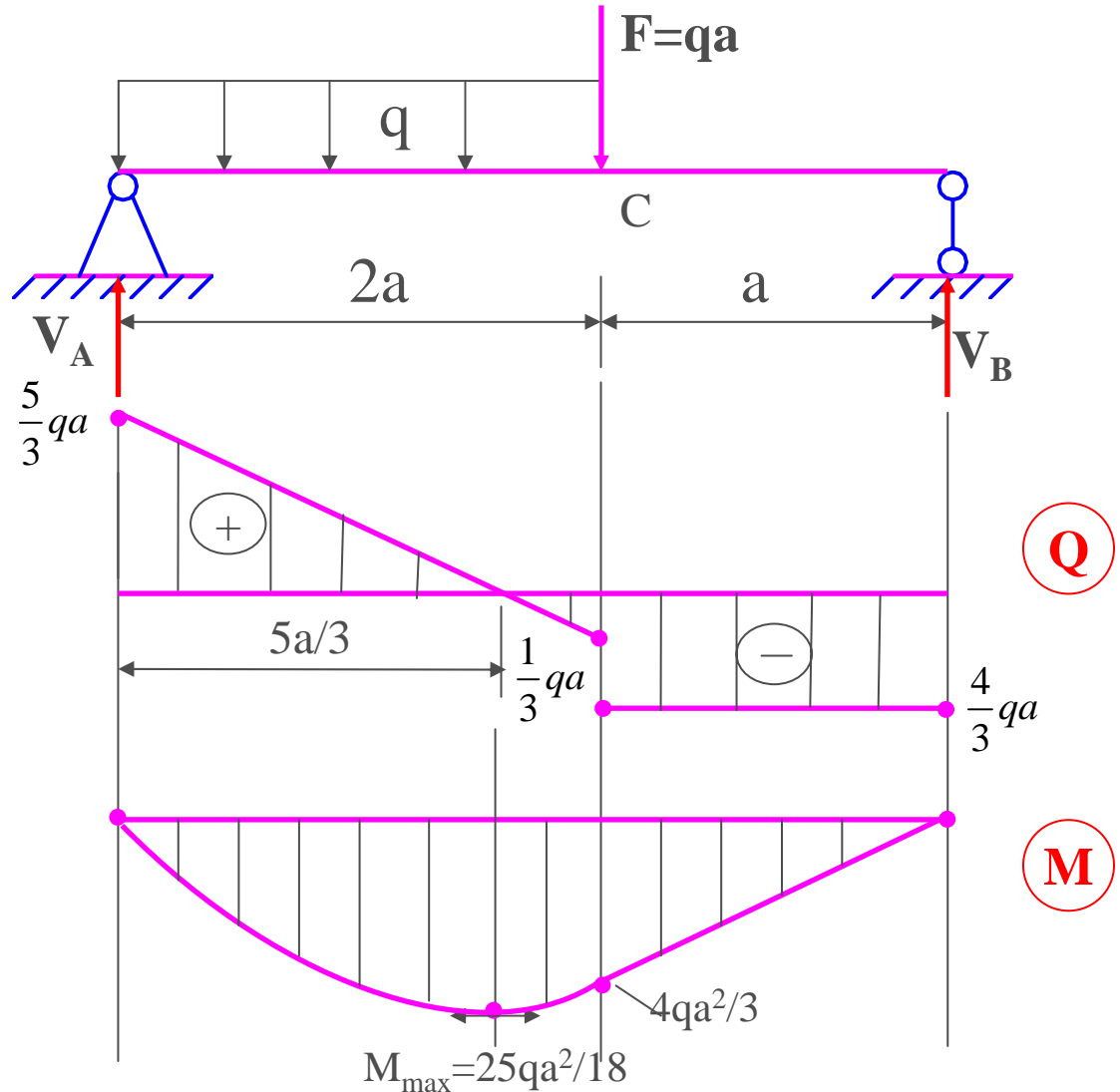
→ $Q = \text{const}$

$$Q_B = -V_B$$

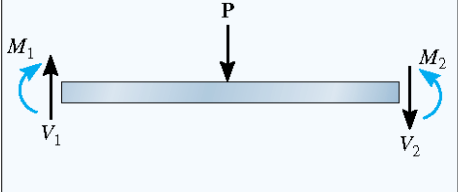
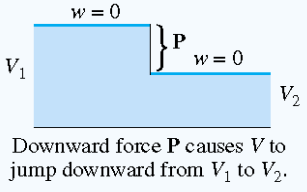
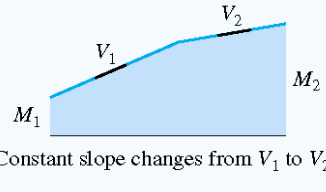
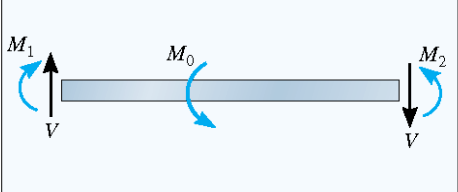
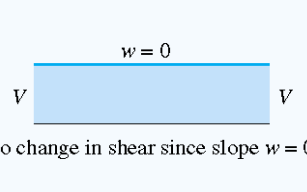
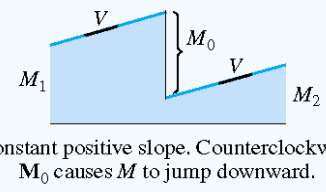
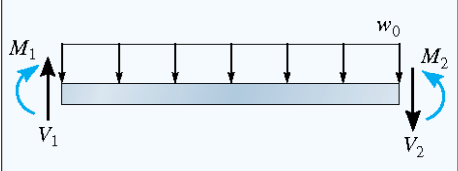
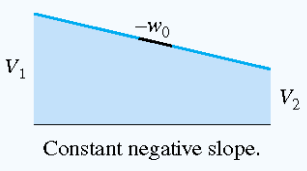
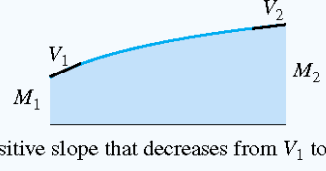
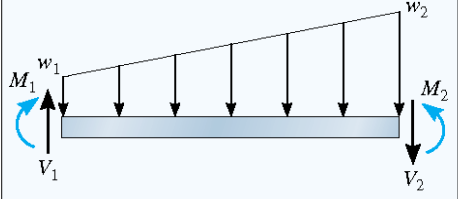
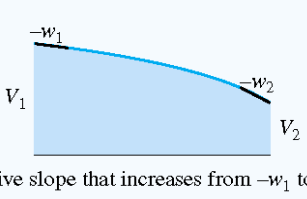
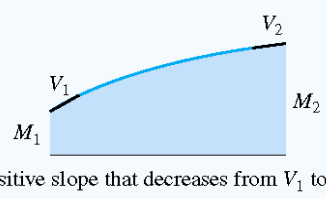
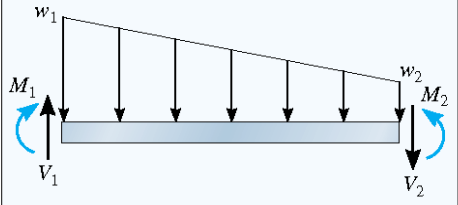
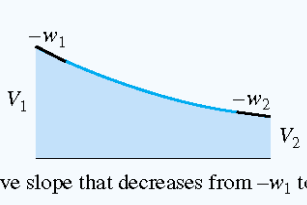
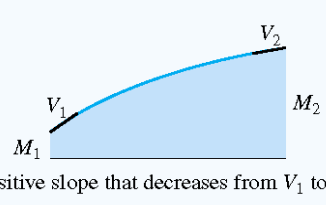
→ M bậc 1:

$$M_B = 0$$

$$M_C = M_B - S_Q = 4qa^2/3$$



Biểu đồ Q, M các trường hợp chịu tải trọng đơn giản

Loading	Shear Diagram $\frac{dV}{dx} = -w$	Moment Diagram $\frac{dM}{dx} = V$
	 <p>Downward force P causes V to jump downward from V_1 to V_2.</p>	 <p>Constant slope changes from V_1 to V_2.</p>
	 <p>No change in shear since slope $w = 0$.</p>	 <p>Constant positive slope. Counterclockwise M_0 causes M to jump downward.</p>
	 <p>Constant negative slope.</p>	 <p>Positive slope that decreases from V_1 to V_2.</p>
	 <p>Negative slope that increases from $-w_1$ to $-w_2$.</p>	 <p>Positive slope that decreases from V_1 to V_2.</p>
	 <p>Negative slope that decreases from $-w_1$ to $-w_2$.</p>	 <p>Positive slope that decreases from V_1 to V_2.</p>

4.5. Biểu đồ ứng lực dầm tĩnh định nhiều nhịp

Định nghĩa: Là hệ tĩnh định gồm tập hợp các dầm, nối với nhau bằng các liên kết khớp

Cách vẽ biểu đồ:

- Phân biệt dầm chính và dầm phụ
- Dầm chính là dầm khi đứng độc lập vẫn chịu được tải trọng
- Dầm phụ là dầm khi đứng độc lập không chịu được tải trọng, phải tựa lên dầm chính mới chịu được tải trọng
- Tải trọng đặt lên dầm chính không ảnh hưởng tới dầm phụ, tải trọng đặt trên dầm phụ sẽ truyền tới dầm chính thông qua phản lực liên kết
- Vẽ biểu đồ cho dầm phụ trước rồi đến dầm chính, sau đó ghép lại với nhau

Ví dụ 1.5 (1)

Ví dụ 1.5: Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm ghép tĩnh định sau:

Bài giải:

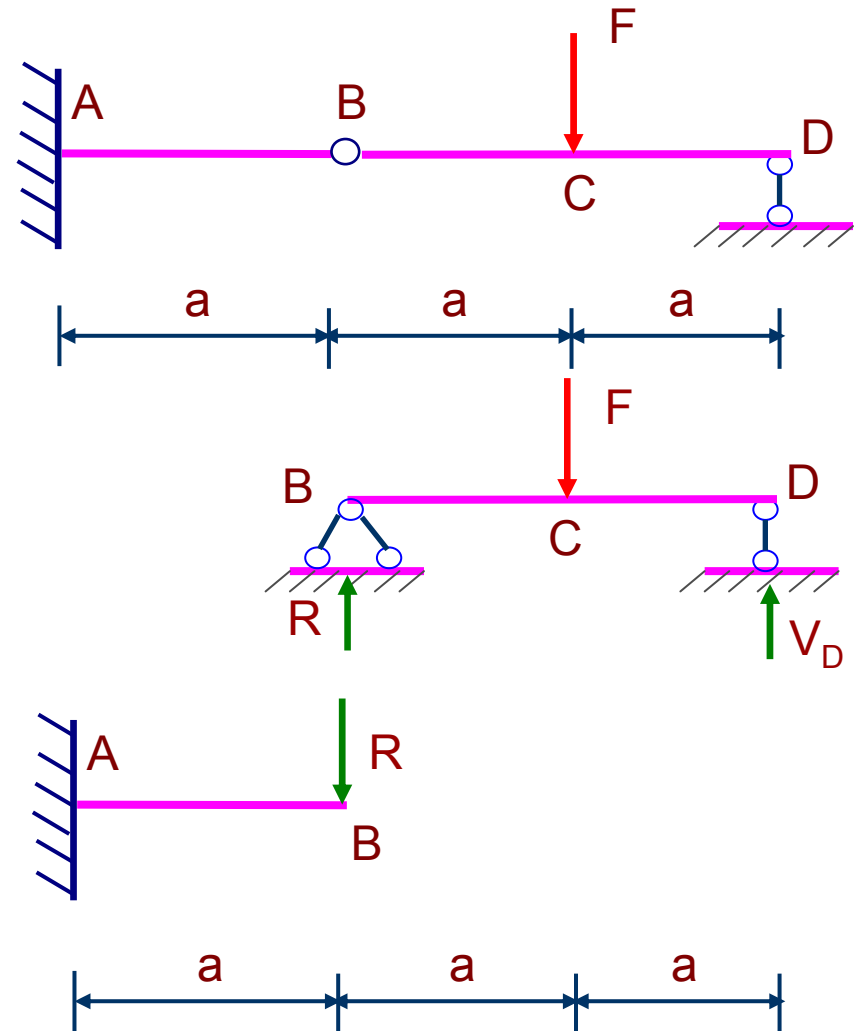
Hệ dầm ABCD là hệ dầm ghép gồm:

- + Dầm phụ BCD
- + Dầm chính AB

1) Dầm phụ BCD:

- Xác định phản lực:

$$V_D = R = \frac{F}{2}$$



Ví dụ 1.5 (2)

a. Đoạn BC: $q(z)=0$

$$\Rightarrow Q = \text{const} \Rightarrow Q_B = R = F/2$$

$$\Rightarrow M \text{ bậc nhất} \Rightarrow M_B = 0$$

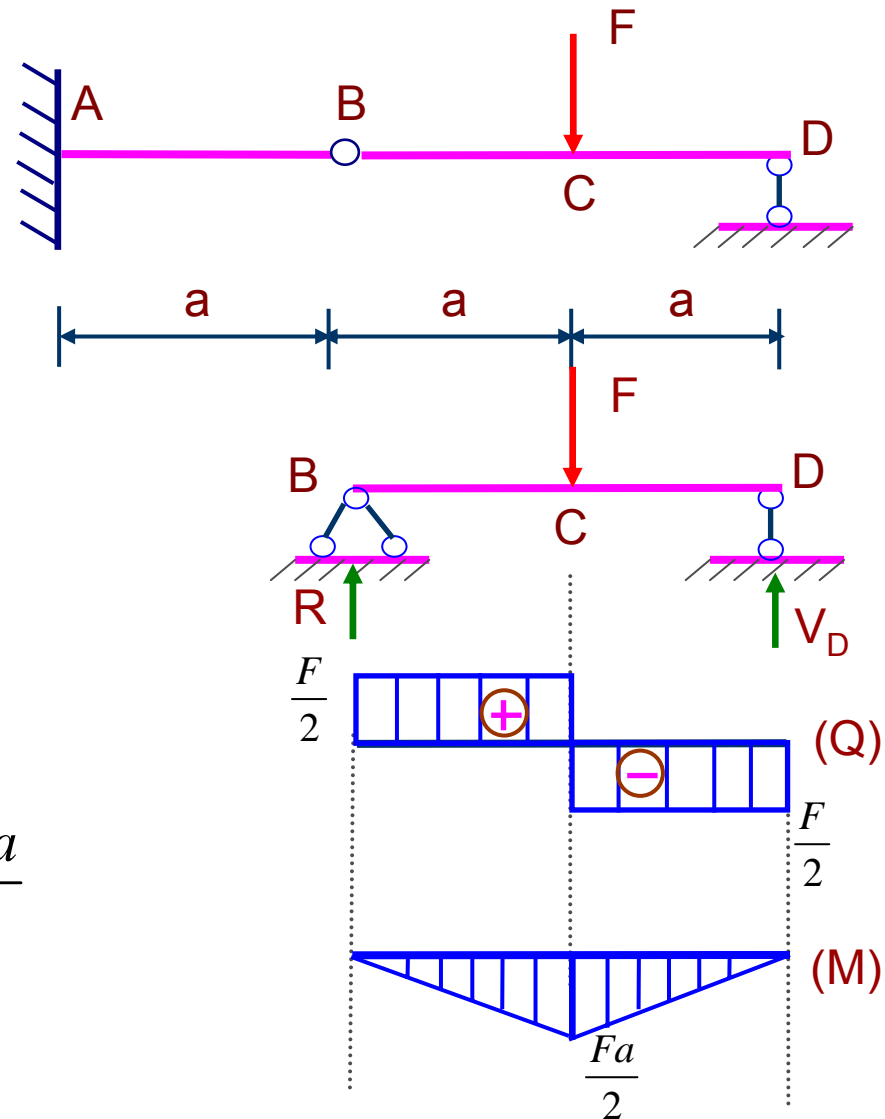
$$\Rightarrow M_C = M_B + S_Q = 0 + \left(\frac{F}{2}a\right) = \frac{Fa}{2}$$

b. Đoạn CD: $q(z)=0$

$$\Rightarrow Q = \text{const} \Rightarrow Q_D = -V_D = -F/2$$

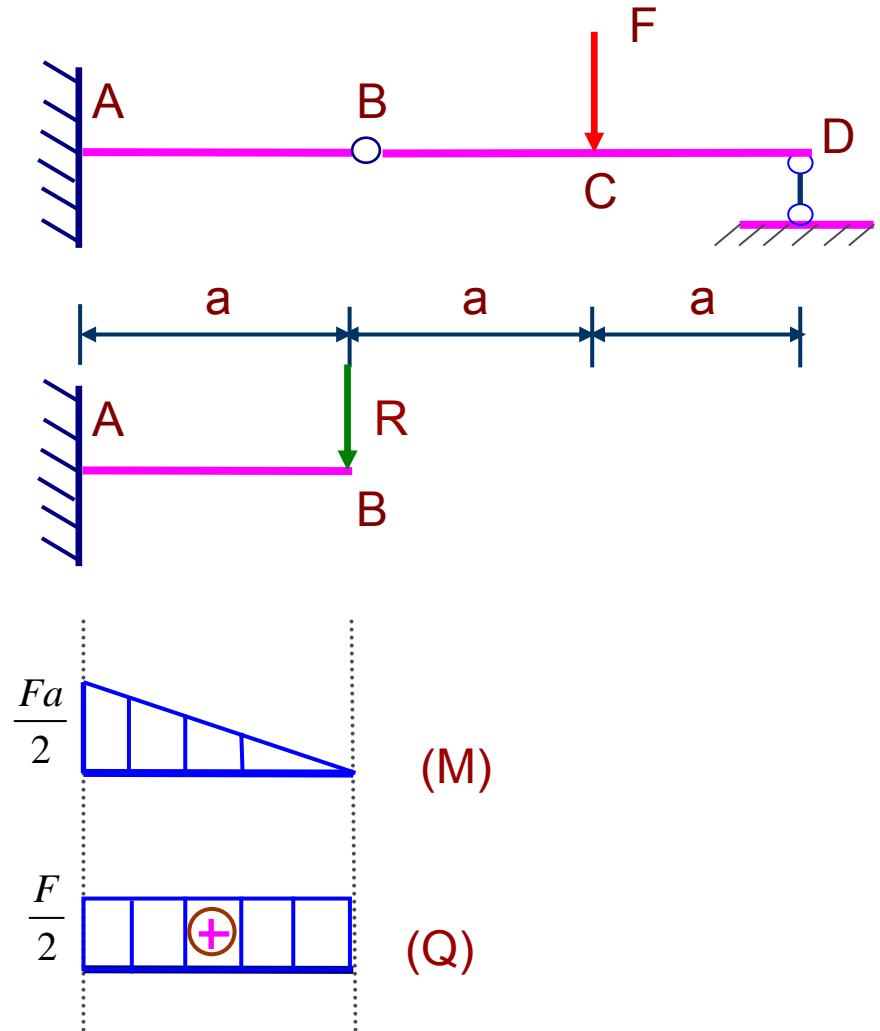
$$\Rightarrow M \text{ bậc nhất} \Rightarrow M_D = 0$$

$$\Rightarrow M_C = M_D - S_Q = 0 - \left(-\frac{Fa}{2}\right) = \frac{Fa}{2}$$



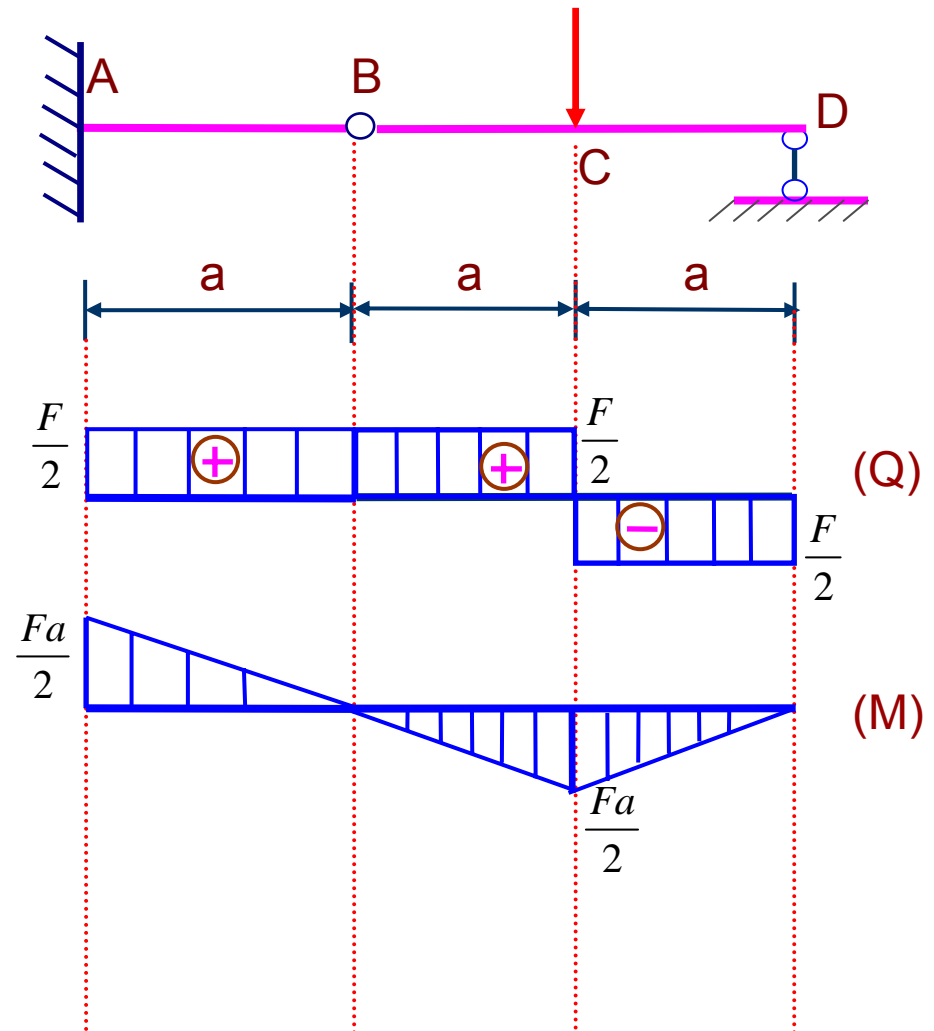
Ví dụ 1.5 (3)

2.) Dầm chính AB:



Ví dụ 1.5 (4)

3.) Biểu đồ ứng lực toàn hệ dầm ghép



4.6. Biểu đồ ứng lực khung phẳng

- ❖ Khung phẳng là hệ phẳng gồm những thanh nối nhau bằng các liên kết cứng (là liên kết mà góc giữa các thanh tại điểm liên kết không thay đổi khi khung chịu lực)
- ❖ Đối với các đoạn khung nằm ngang, biểu đồ các thành phần ứng lực vẽ như qui ước với thanh thẳng
- ❖ Đối với các đoạn khung thẳng đứng, biểu đồ N , Q vẽ về phía tùy ý và mang dấu. Biểu đồ mô men vẽ về phía thứ căng
- ❖ Để kiểm tra biểu đồ ta cần kiểm tra điều kiện cân bằng các mắt khung: Tại mắt khung, nội lực và ngoại lực thỏa mãn điều kiện cân bằng tĩnh học.

Ví dụ 1.6 (1)

Ví dụ 5: Vẽ biểu đồ ứng lực của khung phẳng sau:

Biết $M=qa^2$, $F=2qa$

Bài giải:

1. Xác định các phản lực:

Từ điều kiện cân bằng của khung ta có

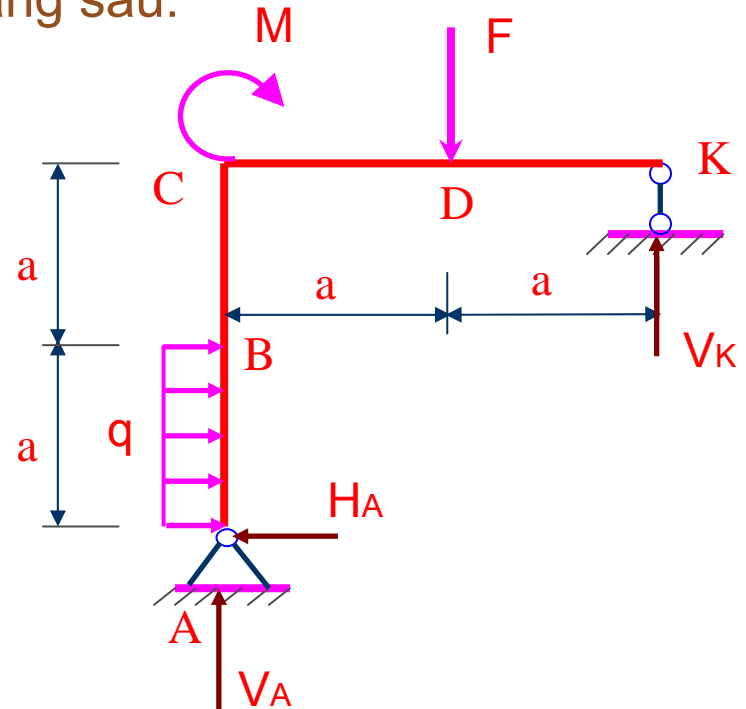
$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = qa$$

$$\sum M_A = 0$$

$$= V_K \cdot 2a - Fa - M_0 - \frac{1}{2}qa^2$$

$$= V_K \cdot 2a - 2qa^2 - qa^2 - \frac{1}{2}qa^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_K = \frac{7}{4}qa$$



Ví dụ 1.6 (2)

$$\sum M_K = 0$$

$$= V_A \cdot 2a + H_A \cdot 2a - qa \cdot \frac{3a}{2} + M_0 - Fa$$

$$= V_A \cdot 2a + 2qa^2 - \frac{3}{2}qa^2 + qa^2 - 2qa^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{1}{4}qa$$

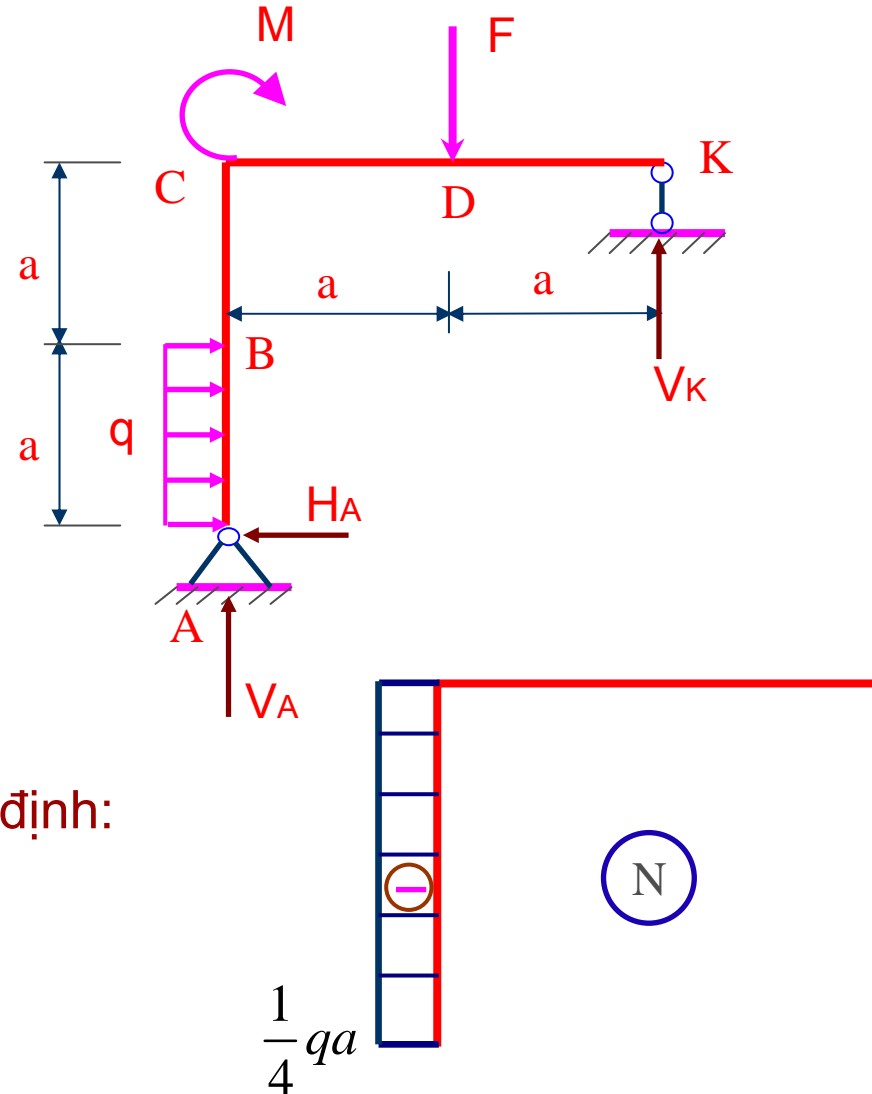
2. Nhận xét dạng biểu đồ các thành phần ứng lực trên từng đoạn:

+ Biểu đồ lực dọc:

Bằng phương pháp mặt cắt để dàng xác định:

$$N_{AB} = N_{BC} = -V_A = -\frac{qa}{4}$$

$$N_{DK} = N_{CD} = 0$$



Ví dụ 1.6 (3)

Đoạn AB: $q = \text{const}$

⇒ Biểu đồ Q bậc nhất

⇒ Cần xác định: $Q_A = H_A = qa$

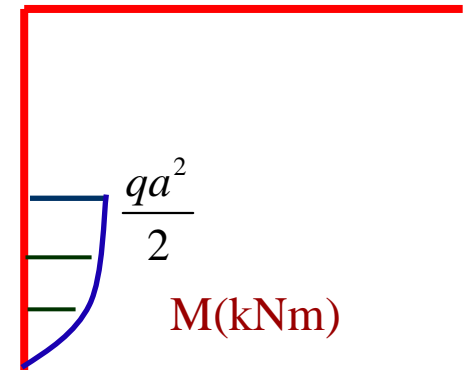
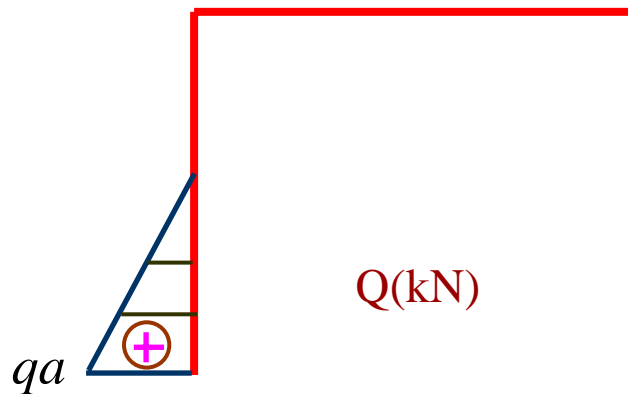
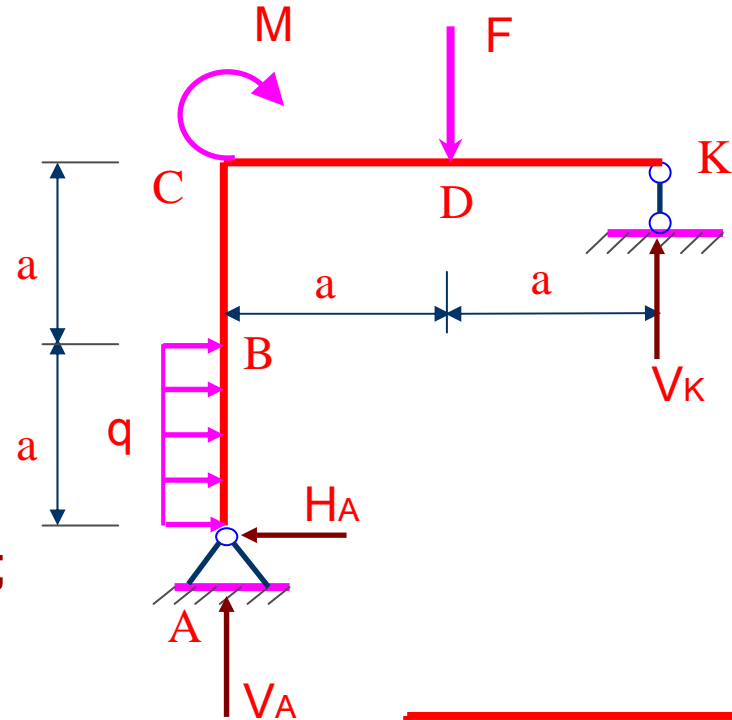
⇒ $Q_B = Q_A + S_q = qa + (-q) \cdot a = 0$

⇒ Biểu đồ M bậc hai

⇒ Cần xác định: $M_A = 0$

⇒ $M_B = M_A + S_Q = 0 + qa \cdot a/2 = qa^2/2$;

⇒ tại B có $Q = 0 \Rightarrow M_{\text{max}} = qa^2/2$



Ví dụ 1.6 (4)

Đoạn BC: $q=0$

⇒ Biểu đồ $Q=\text{const}$

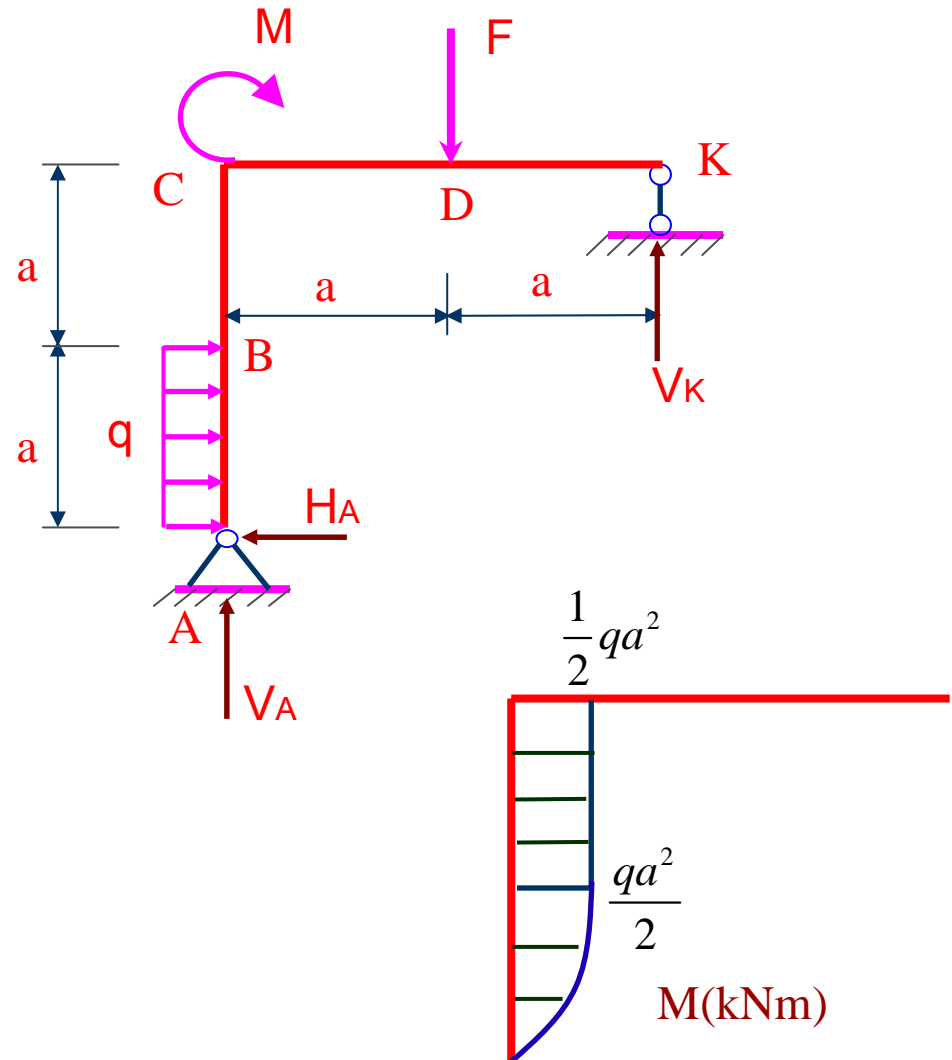
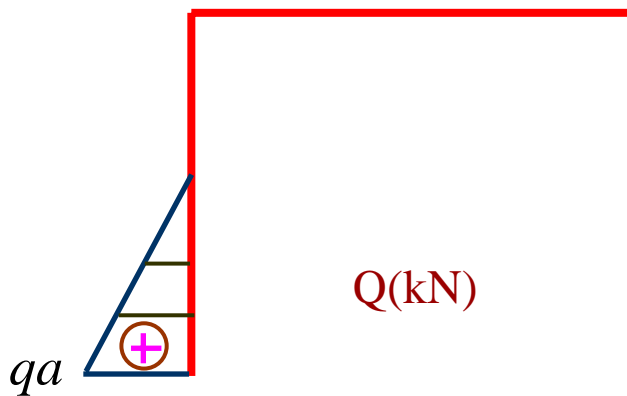
⇒ Cần xác định $Q_B=0$

⇒ Biểu đồ M bậc nhất

⇒ Cần xác định

$$M_B = M_B^{(AB)} = qa^2 / 2;$$

$$M_C = M_B + S_Q = qa^2 / 2 + 0 = qa^2 / 2$$



Ví dụ 1.6 (5)

Trên đoạn CD: $q=0$

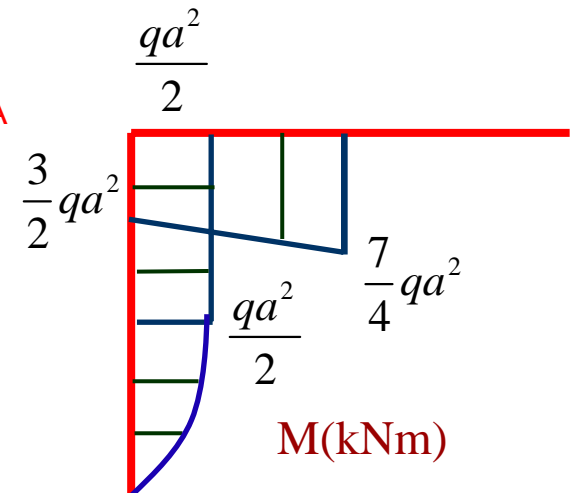
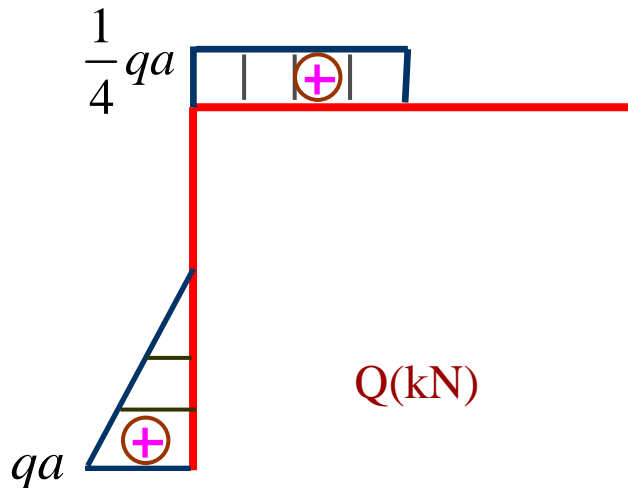
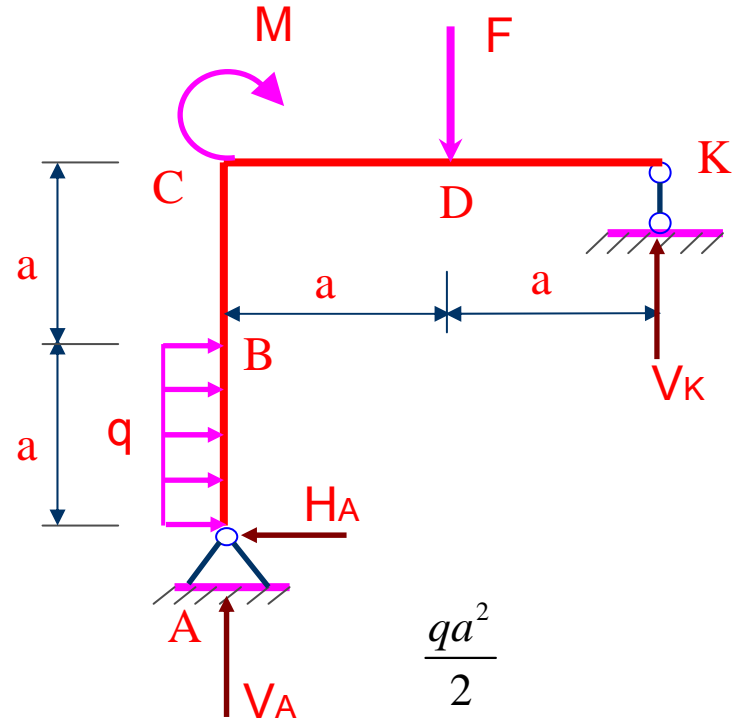
⇒ Biểu đồ $Q=\text{const} \Rightarrow$ Cần xác định

$$Q_D = F - V_K = 2qa - \frac{7}{4}qa = \frac{1}{4}qa$$

⇒ Biểu đồ M bậc nhất ⇒ Cần xác định

$$M_D = V_K a = \frac{7}{4}qa^2$$

$$M_C = M_D - S_Q = \frac{7}{4}qa^2 - \left(\frac{1}{4}qa\right)a = \frac{3}{2}qa^2$$



Ví dụ 1.6 (6)

Trên đoạn DK: $q=0$

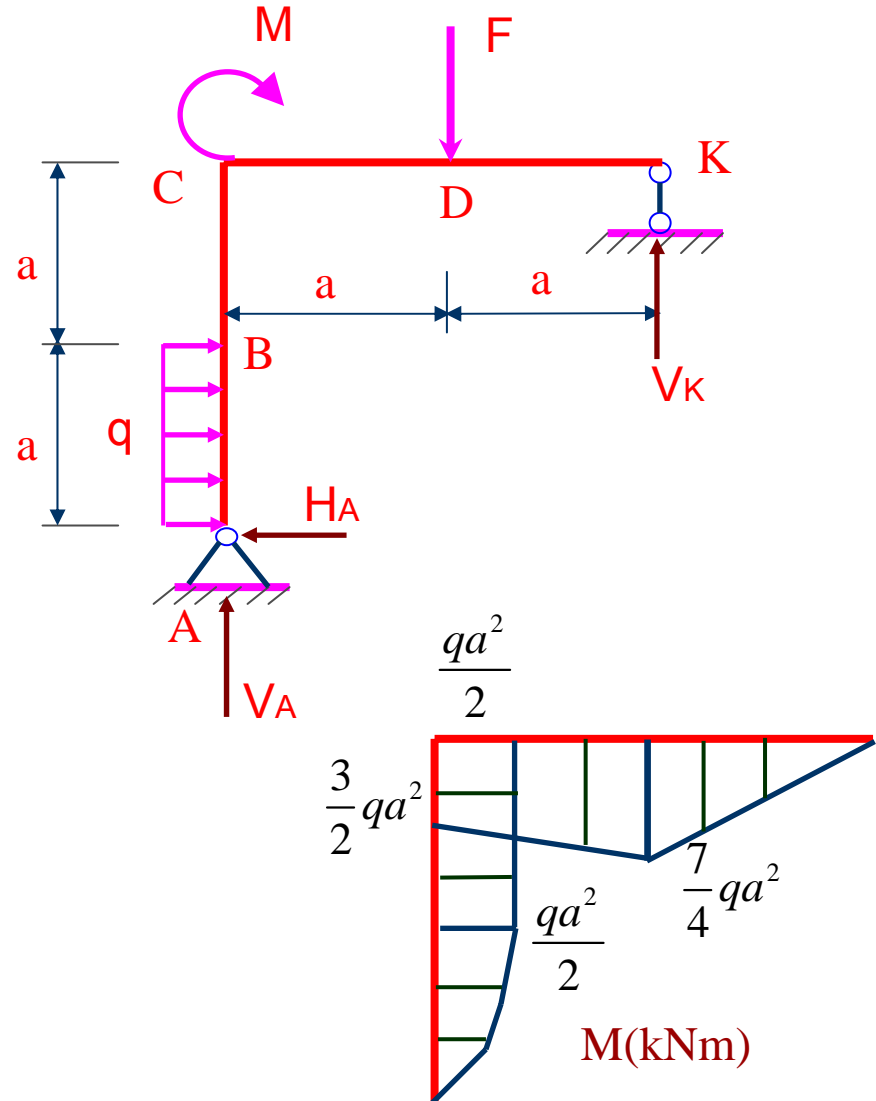
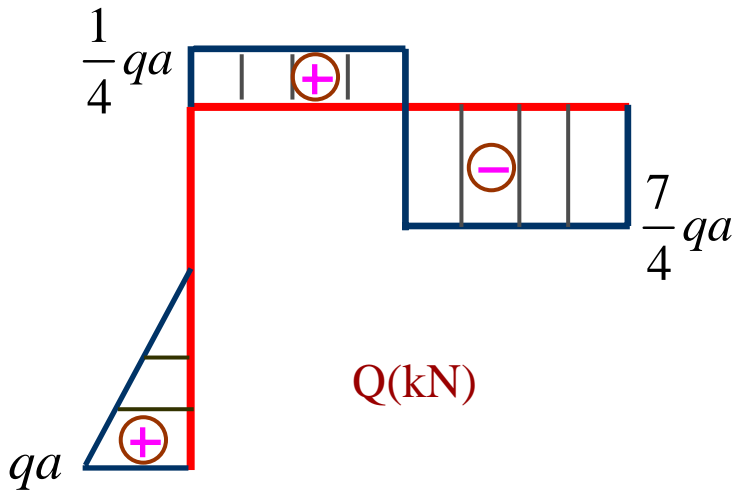
⇒ Biểu đồ $Q=\text{const} \Rightarrow$ Cần xác định

$$Q_K = -V_K = -\frac{7}{4}qa$$

⇒ Biểu đồ M bậc nhất ⇒ Cần xác định

$$M_K = 0$$

$$M_D = M_D^{(CD)} = \frac{7}{4}qa^2$$



Ví dụ 1.6 (7)

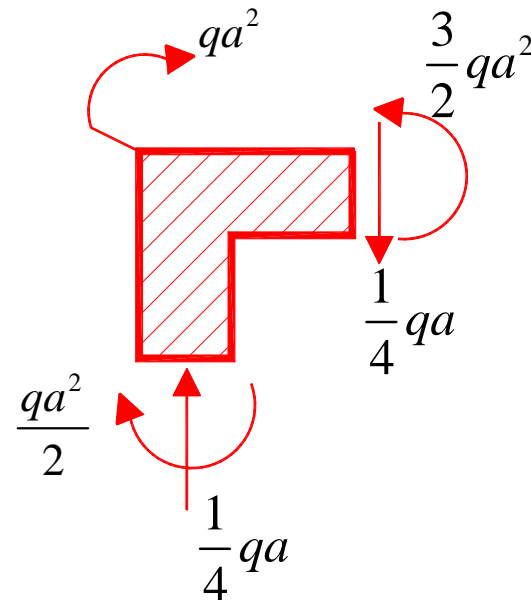
4. Xét cân bằng các mắt khung

Tại mắt C, biểu diễn các ngoại lực, các ứng lực trên hai mặt cắt ngay sát C thuộc đoạn BC và CD theo chiều thực (căn cứ vào các biểu đồ). Kiểm tra điều kiện cân bằng: Tại mắt khung tổng nội lực và ngoại lực bằng không.

$$\sum X = 0$$

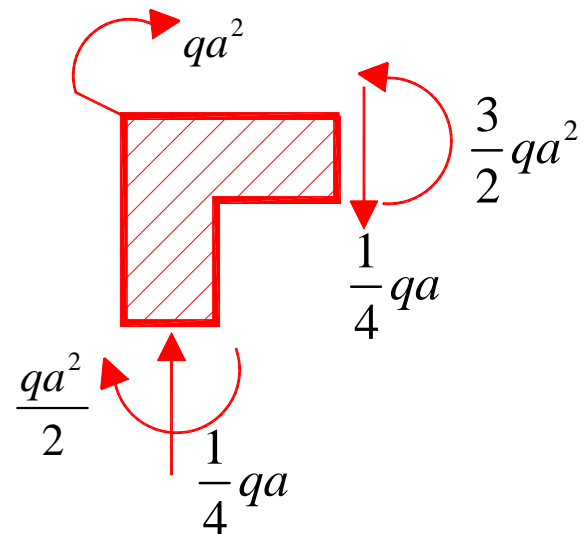
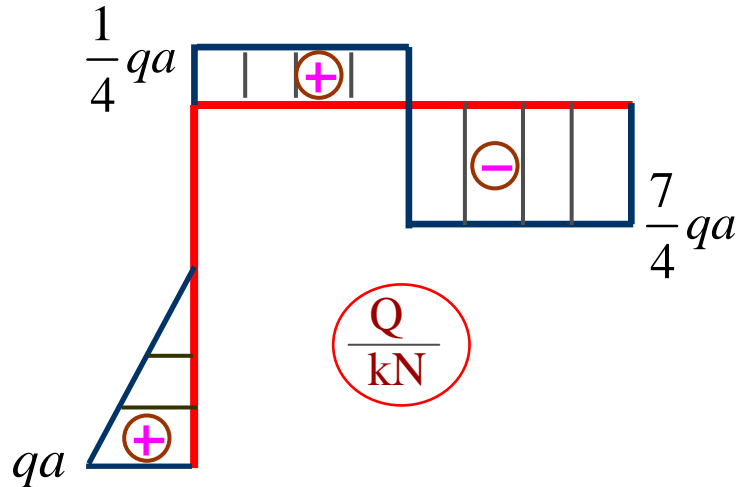
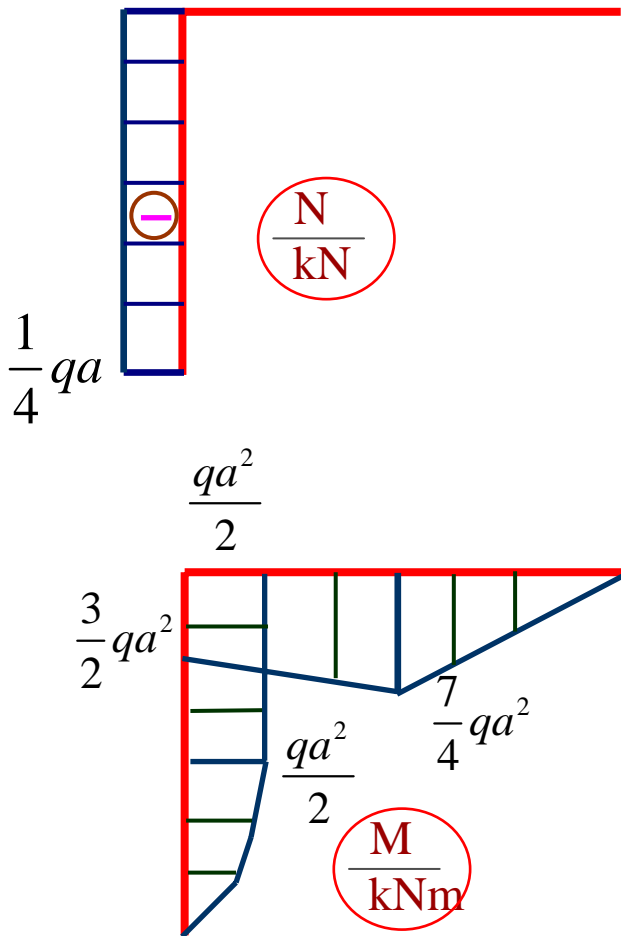
$$\sum Y = 0$$

$$\sum M_C = 0$$



Ví dụ 1.6 (8)

Biểu đồ nội lực của khung



4.7. Biểu đồ ứng lực thanh cong

- ❖ **Thanh cong: trục thanh là đường cong phẳng, ngoại lực nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh**
- ❖ **Dùng phương pháp mặt cắt để xác định các thành phần ứng lực trên mặt cắt ngang**

Ví dụ 1.7 (1)

Ví dụ 2: Vẽ biểu đồ nội lực cho thanh cong như hình bên. Biết: $R=2m$, $M_1=5kNm$, $M_2=10kNm$, $P_1=15kN$.

Bài giải:

1) Tính phản lực tại gối A và E

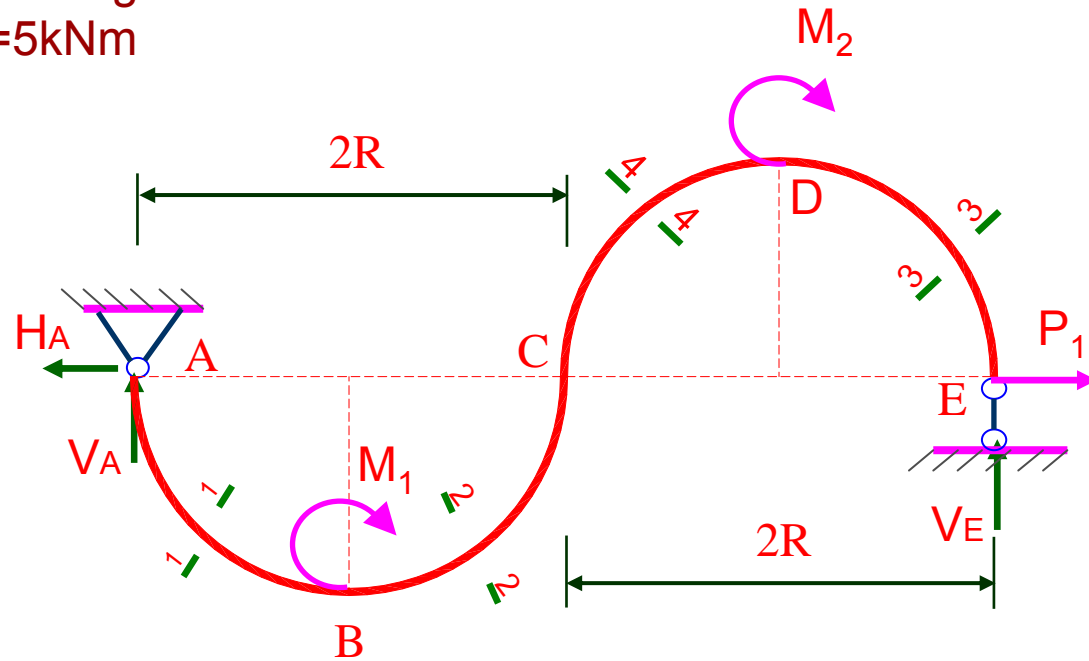
Ta có:

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = P_1 = 15kN$$

$$\sum M_A = M_1 + M_2 - V_E \cdot 4R = 0$$

$$V_E = \frac{M_1 + M_2}{4R} = \frac{10 + 5}{8} = 1,875(kN)$$

$$V_A = V_E = 1,875kN$$



Ví dụ 1.7 (2)

2) Chia thành thành 4 đoạn

a. Xét đoạn AB:

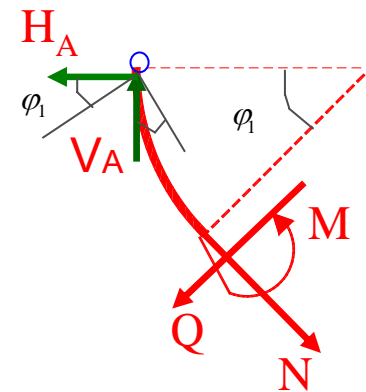
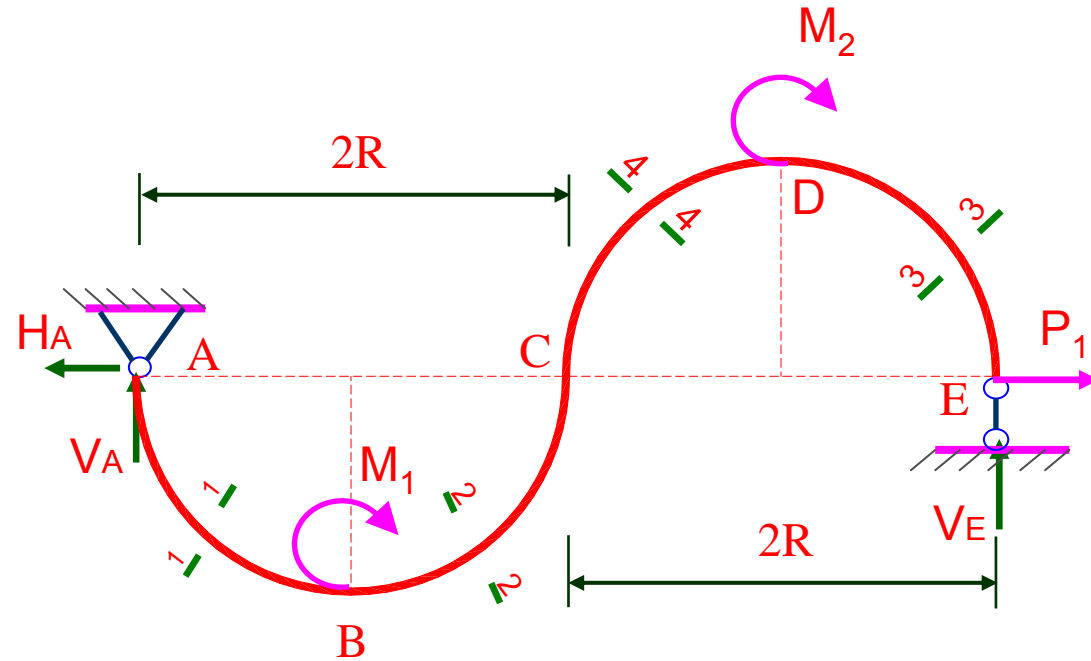
Dùng mặt cắt 1 – 1, ta có:

$$0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} N &= -V_A \cdot \cos \varphi_1 + H_A \cdot \sin \varphi_1 \\ &= -1,875 \cos \varphi_1 + 15 \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

$$Q = -V_A \cdot \sin \varphi_1 - H_A \cdot \cos \varphi_1 = -1,875 \sin \varphi_1 - 15 \cos \varphi_1$$

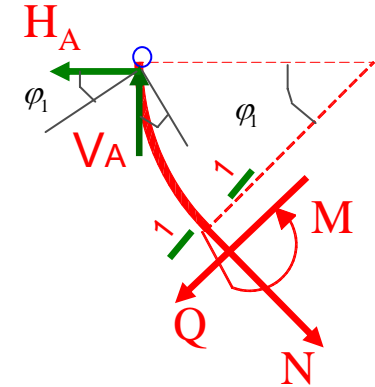
$$\begin{aligned} M &= -V_A \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi_1) - R \cdot H_A \cdot \sin \varphi_1 \\ \Rightarrow M &= 3,75 \cdot \cos \varphi_1 - 30 \sin \varphi_1 - 3,75 \end{aligned}$$



Ví dụ 1.7 (3)

Bảng biến thiên:

φ_1 [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
N [kN]	-1,88	5,88	9,28	12,05	15
Q[kN]	-15	-13,98	-11,93	-9,12	-1,88
M[kNm]	0	-15,50	-22,31	-27,86	-33,75



b, Xét đoạn BC: $0 \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}$

Ta có (mặt cắt 2-2):

$$N = V_A \cdot \sin \varphi_2 + H_A \cdot \cos \varphi_2 = 1,875 \cdot \sin \varphi_2 + 15 \cdot \cos \varphi_2$$

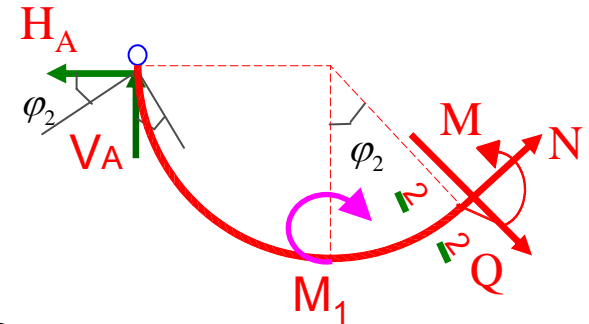
$$Q = -V_A \cos \varphi_2 + H_A \sin \varphi_2 = -1,875 \cos \varphi_2 + 15 \sin \varphi_2$$

$$Q = 0 \Rightarrow \varphi_2 = 7,13^\circ$$

$$M = -V_A R (1 + \sin \varphi_2) + M_1 - H_A R \cos \varphi_2$$

$$M = -3,75 - 3,75 \sin \varphi_2 - 30 \cos \varphi_2 + 5$$

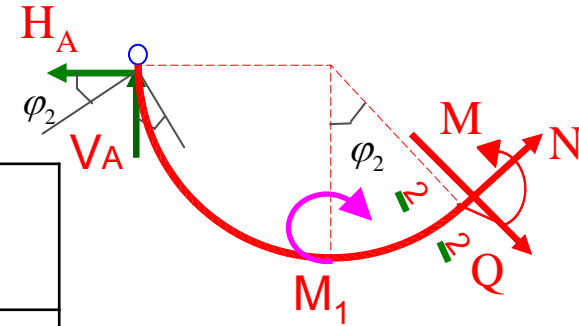
$$M_{\max} = M_{(\varphi_2=7,13^\circ)} = 29 \text{ (kNm)}$$



Ví dụ 1.7 (4)

Bảng biến thiên:

φ_2 [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
N [kN]	15,00	13,93	11,93	9,12	1,88
Q[kN]	-1,88	5,88	9,28	12,05	15
M[kNm]	-28,75	-26,61	-22,61	-17,00	-2,5



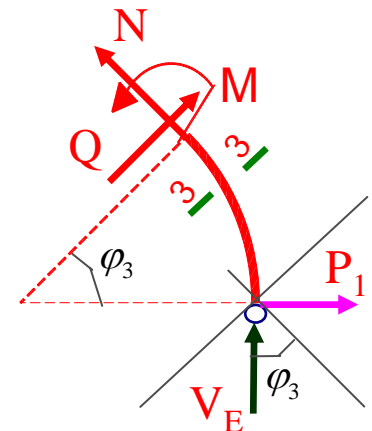
c, Xét đoạn ED: $0 \leq \varphi_3 \leq \frac{\pi}{2}$
Ta có:

$$N = -V_E \cdot \cos \varphi_3 + P_1 \cdot \sin \varphi_3 = -1,875 \cdot \cos \varphi_3 + 15 \cdot \sin \varphi_3$$

$$Q = -V_E \cdot \sin \varphi_3 - P_1 \cdot \cos \varphi_3 = -1,875 \cdot \sin \varphi_3 - 15 \cdot \cos \varphi_3$$

$$M = -V_E \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi_3) - R \cdot P_1 \cdot \sin \varphi_3$$

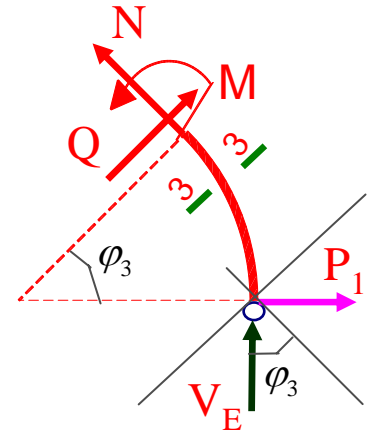
$$= -3,75 \cdot \cos \varphi_3 - 30 \cdot \sin \varphi_3 - 3,75$$



Ví dụ 1.7 (5)

Bảng biến thiên:

φ_3 [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
N [kN]	-1,88	5,88	9,28	12,05	15,00
Q[kN]	15,00	12,05	9,28	5,88	-1,88
M[kNm]	0	-15,5	-22,31	-27,86	-33,75



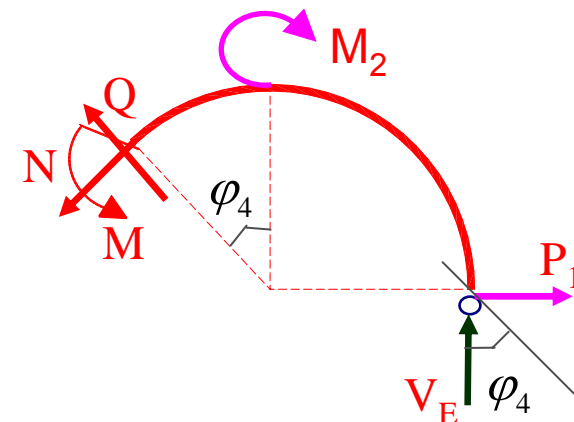
d, Xét đoạn CD: $0 \leq \varphi_4 \leq \frac{\pi}{2}$

Ta có:

$$N = V_E \cdot \sin \varphi_4 + P_1 \cdot \cos \varphi_4 = 1,875 \cdot \sin \varphi_4 + 15 \cdot \cos \varphi_4$$

$$Q = -V_E \cdot \cos \varphi_4 + P_1 \cdot \sin \varphi_4 = -1,875 \cdot \cos \varphi_4 + 15 \cdot \sin \varphi_4$$

$$Q = 0 \Rightarrow \varphi_4 = 7,13^\circ$$



Ví dụ 1.7 (7)

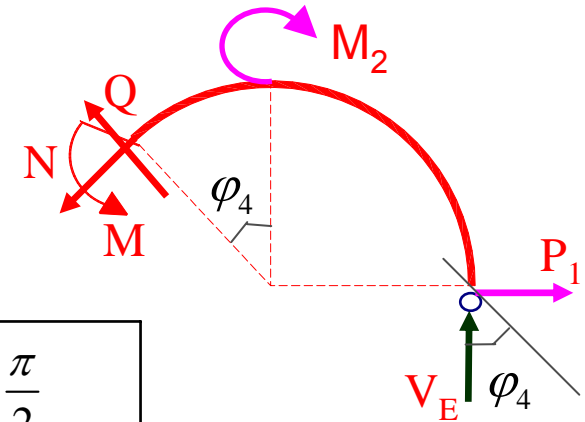
$$M = -V_E \cdot R \cdot (1 + \sin \varphi_4) + M_2 - P_1 R \cos \varphi_4$$

$$= -3.75 - 3.75 \sin \varphi_4 - 30 \cdot \cos \varphi_4 + 10$$

$$M_{\max} = M_{(\varphi_4 = 7,13^\circ)} = 24 \text{ (kNm)}$$

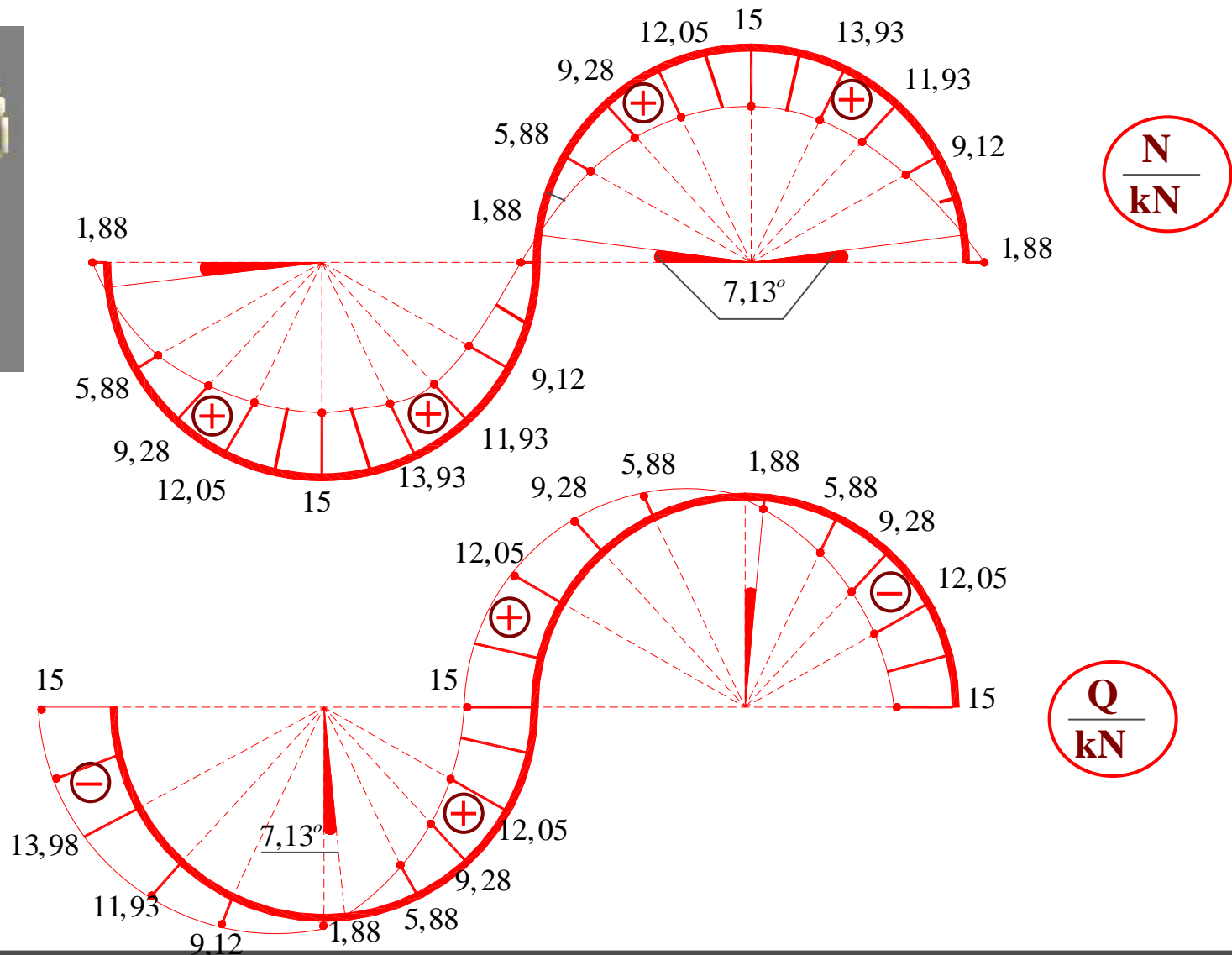
Bảng biến thiên:

φ_4 [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
N [kN]	15,00	13,93	11,93	9,12	1,88
Q [kN]	-1,88	5,88	9,28	12,05	15,00
M [kNm]	-23,75	-21,61	-17,61	-12,00	2,50

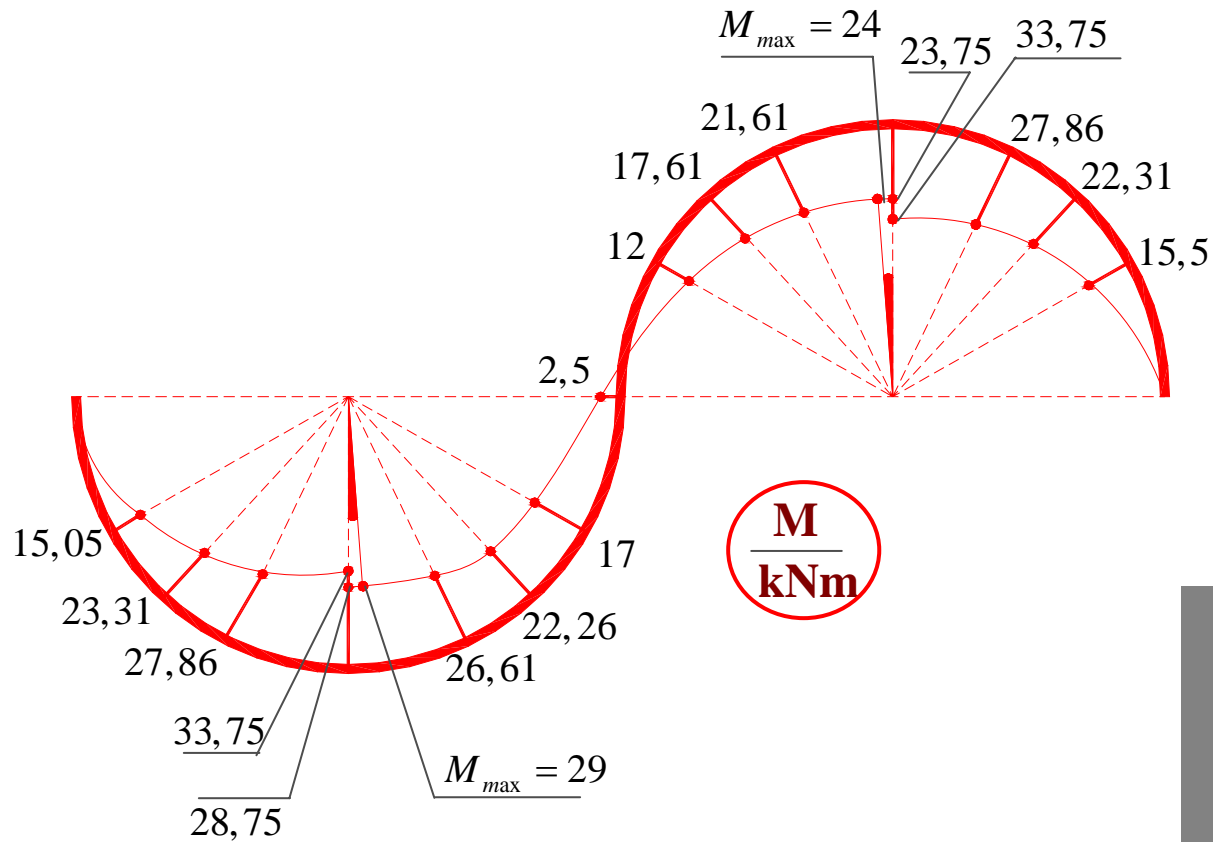


3, Biểu đồ nội lực:

Ví dụ 1.7 (8)



Ví dụ 1.7 (9)



4. Câu hỏi???





Thank you for your attention

E- mail:
tpnt2002@yahoo.com



SỨC BỀN VẬT LIỆU

Trần Minh Tú - Đại học Xây dựng

Chương 2



THANH CHỊU KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM



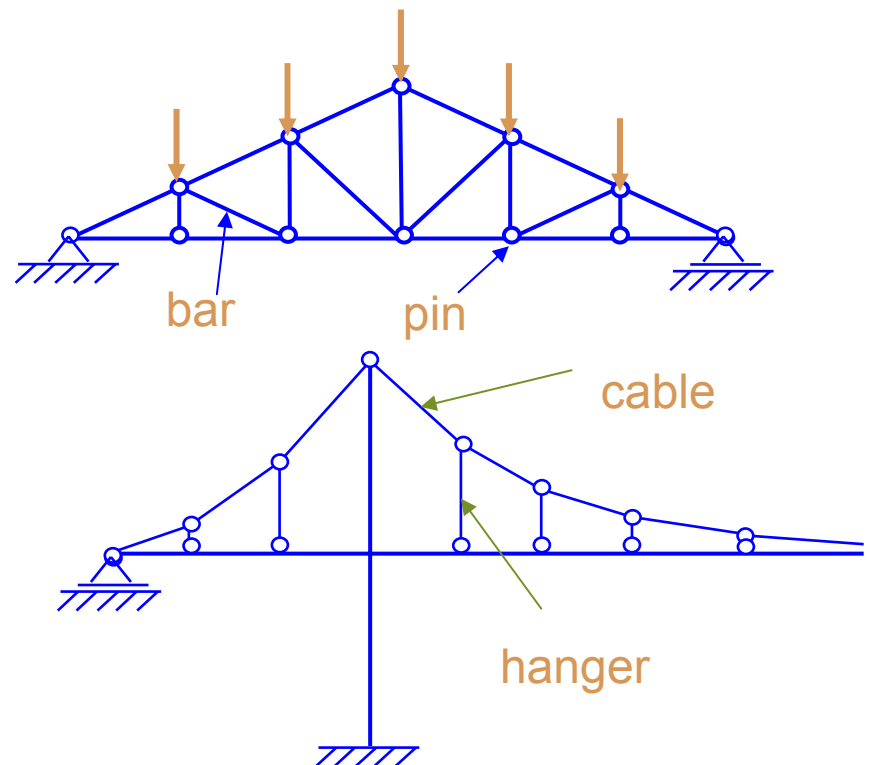
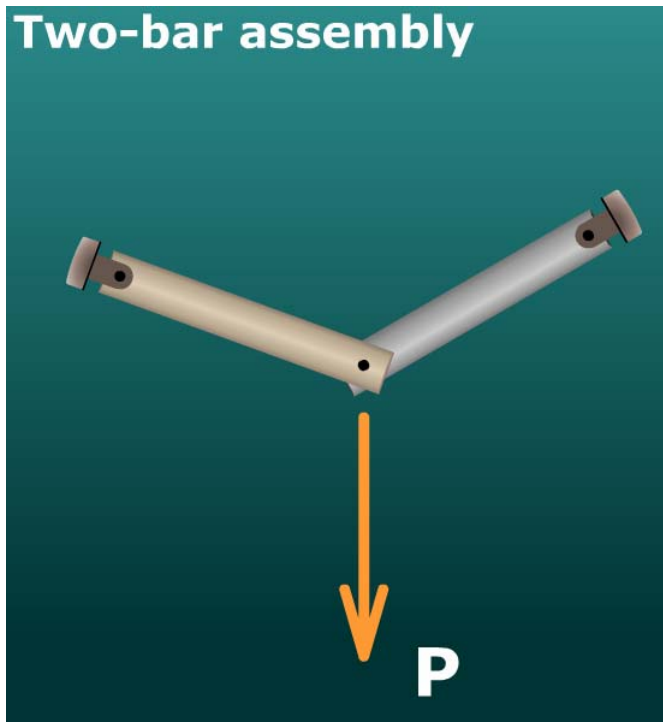
Chương 2. Thanh chịu kéo (nén) đúng tâm

NỘI DUNG

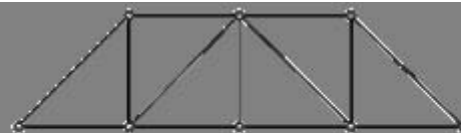
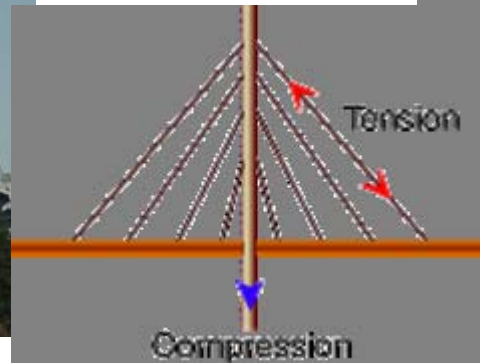
- 2.1. Định nghĩa - nội lực
- 2.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang
- 2.3. Biến dạng - Hệ số Poisson
- 2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu
- 2.5. Thế năng biến dạng đàn hồi
- 2.6. Ứng suất cho phép và hệ số an toàn
– Điều kiện bền
- 2.7. Bài toán siêu tĩnh

2.1. Định nghĩa

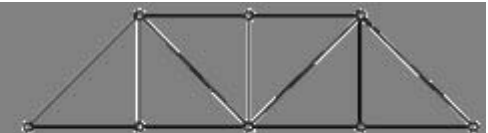
- ❖ **Định nghĩa:** Thanh được gọi là chịu kéo hoặc nén đúng tâm nếu trên mặt cắt ngang của nó chỉ tồn tại một thành phần ứng lực là N_z ($N_z > 0$ – đi ra khỏi mặt cắt ngang)



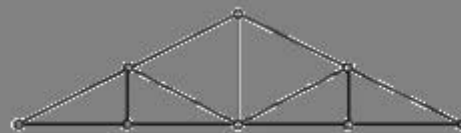
Ví dụ - các thanh chịu kéo (nén) đúng tâm



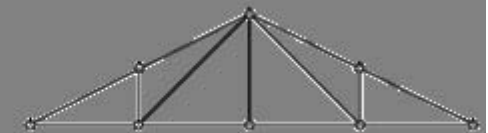
Howe Bridge Truss



Pratt Bridge Truss

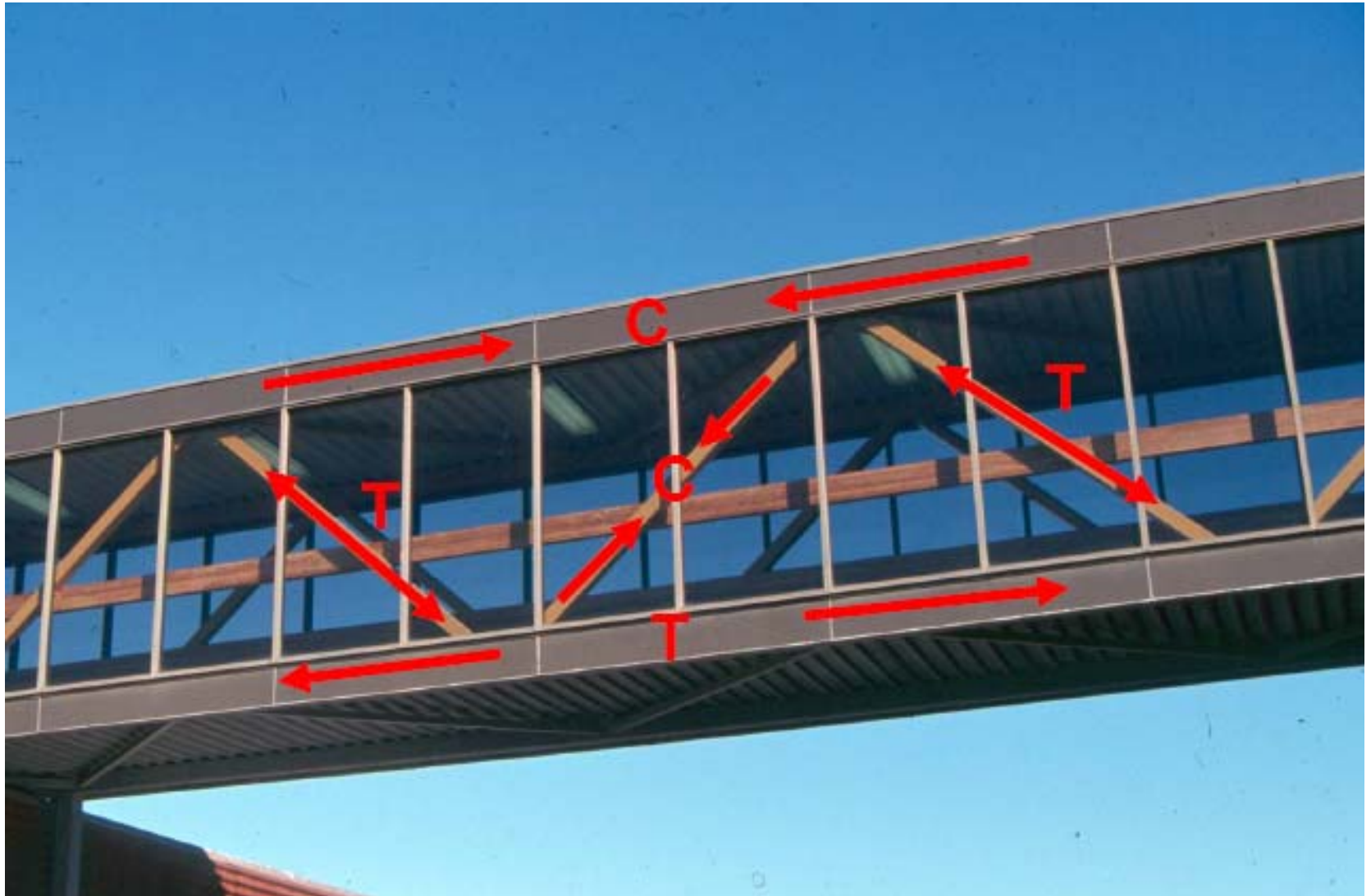


Howe Roof Truss

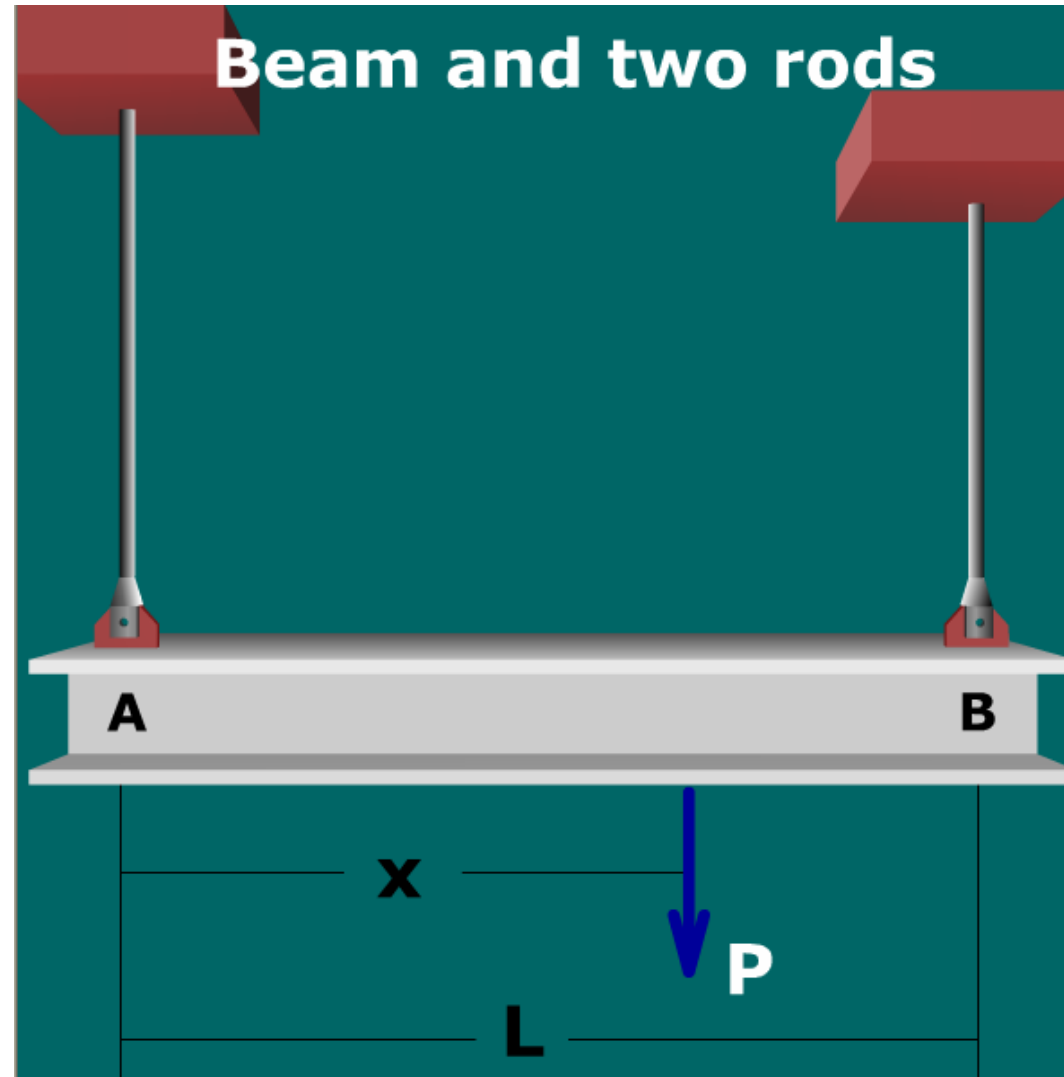
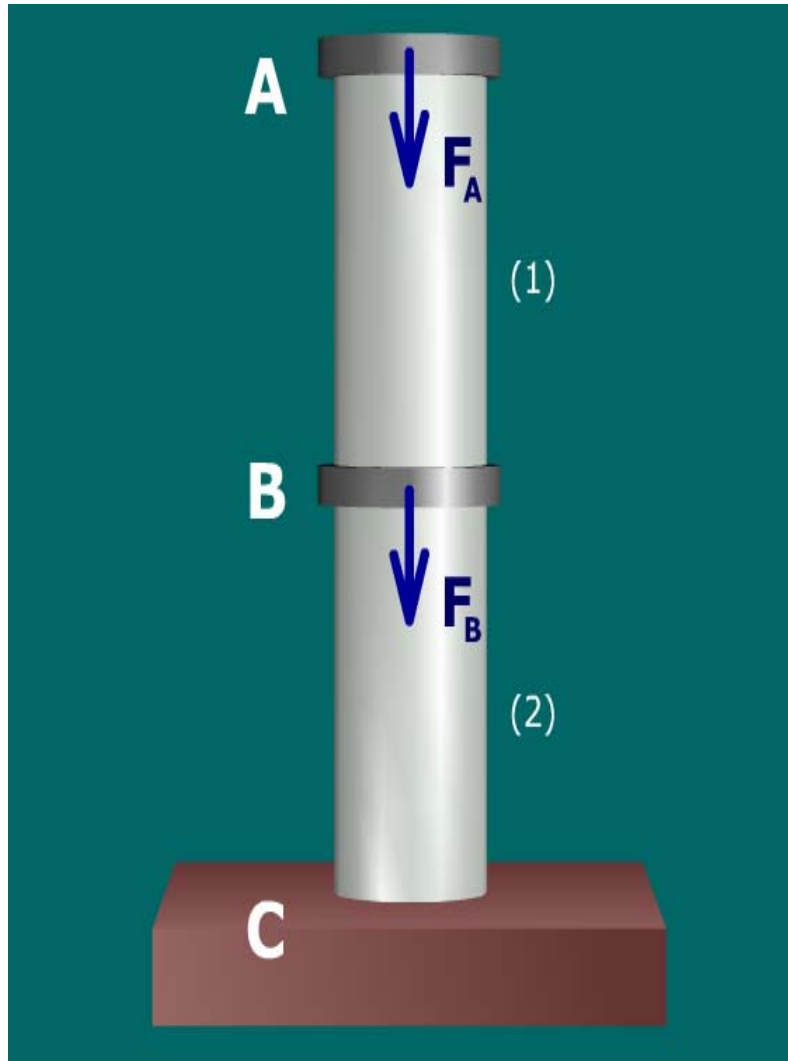


Pratt Roof Truss

Ví dụ - các thanh chịu kéo (nén) đúng tâm



Ví dụ - các thanh chịu kéo (nén) đúng tâm



2.1. Định nghĩa

❖ Biểu đồ lực dọc:

Phương pháp mặt cắt, xét cân bằng một phần thanh, lực dọc trên đoạn thanh đang xét xác định từ phương trình cân bằng

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N_z = \dots$$

2.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang

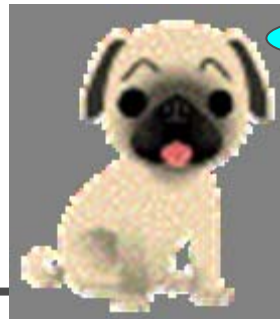
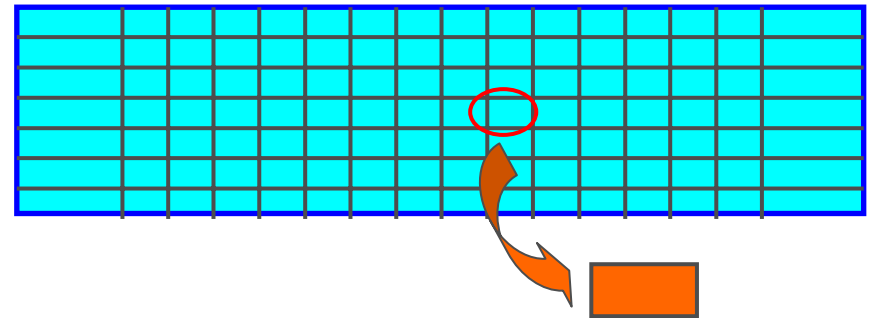
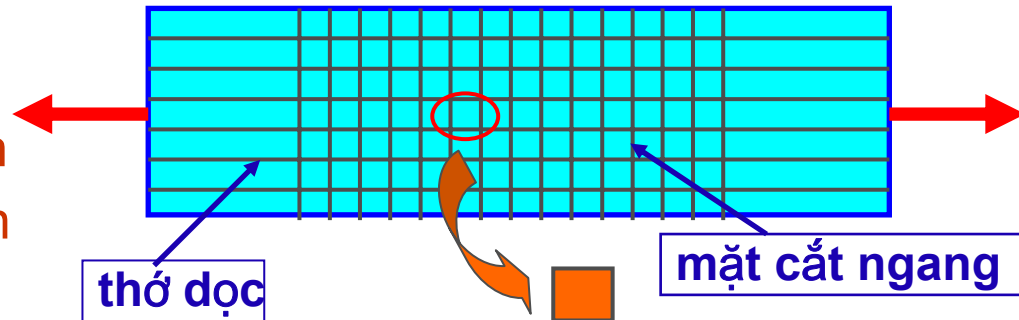
1. Thí nghiệm

Vạch trên bề mặt ngoài

- Hệ những đường thẳng // trục thanh
- Hệ những đường thẳng \perp trục thanh

2. Quan sát

- Những đường thẳng // trục thanh
=> vẫn // trục thanh, k/c hai đường kề nhau không đổi
- Những đường thẳng \perp trục thanh
=> vẫn \perp , k/c hai đường kề nhau thay đổi



Giả thiết biến dạng

2.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang

3. Các giả thiết về biến dạng

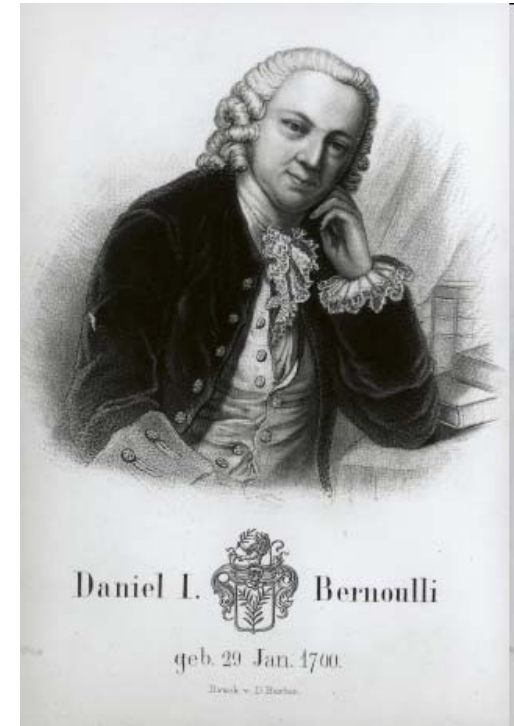
GT 1- Giả thiết mặt cắt ngang phẳng
(Bernouli)

Mặt cắt ngang trước biến dạng là phẳng và vuông góc với trục thanh, sau biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục

GT 2 - Giả thiết về các thớ dọc

Các lớp vật liệu dọc trục không có tác dụng tương hỗ với nhau (không chèn ép, xô đẩy lẫn nhau)

Vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi (tuân theo định luật Hooke)



2.2. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang

4. Công thức xác định ứng suất

- Giả thiết 1 $\Rightarrow \tau = 0$
- Giả thiết 2 $\Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = 0$



Trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất pháp σ_z

- Theo định nghĩa - Lực dọc trên mặt cắt ngang:

$$N_z = \int_{(A)} \sigma_z dA$$

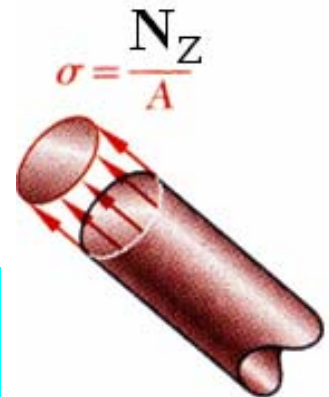
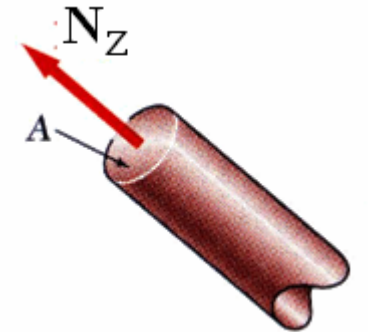
Theo định luật Hooke: $\sigma_z = E \varepsilon_z$

Mà theo gt1: $\varepsilon_z = \text{const} \Rightarrow \sigma_z = \text{const}$

$$\longrightarrow N_z = \sigma_z A$$

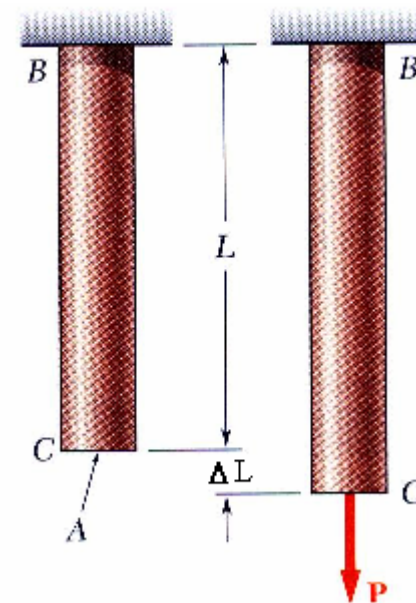
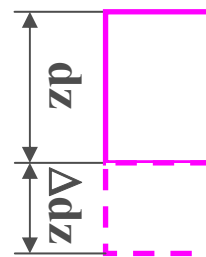


$$\sigma_z = \frac{N_z}{A}$$



2.3. Biến dạng - Hệ số Poisson

- ❖ Thanh chiều dài L chịu kéo đúng tâm
- ΔL - độ dãn dài tuyệt đối
- ❖ Phân tố chiều dài dz có độ dãn dài tuyệt đối Δdz (biến dạng dọc)
- ❖ Biến dạng dài tỉ đối

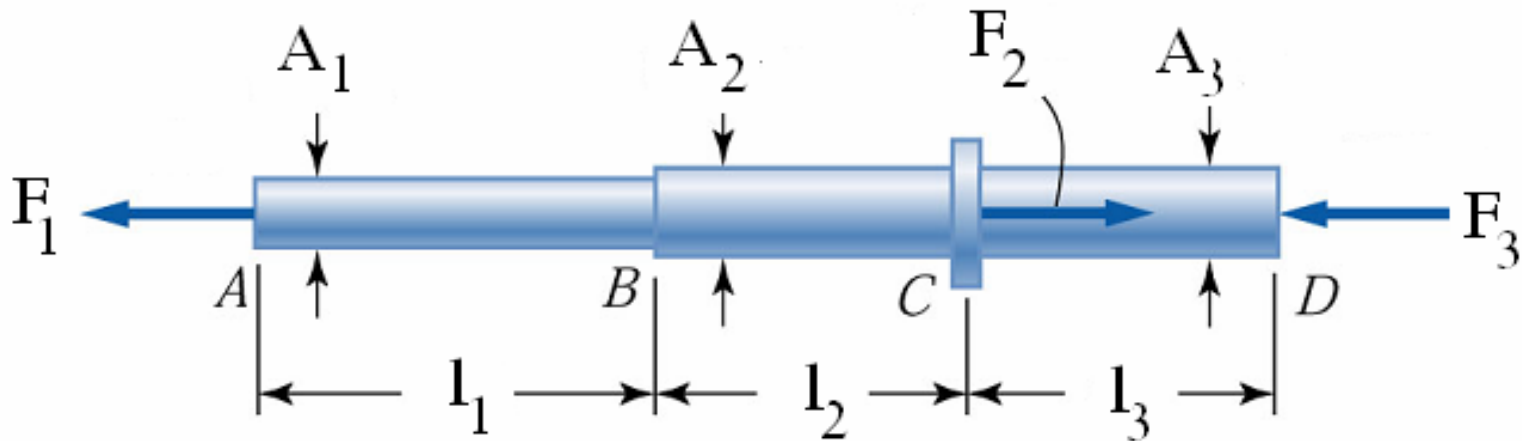


$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} \rightarrow \Delta dz = \varepsilon_z dz \rightarrow \Delta L = \int_0^L \varepsilon_z dz = \int_0^L \frac{\sigma_z dz}{E}$$

$$\rightarrow \Delta L = \int_0^L \frac{N_z dz}{EA} \rightarrow \frac{N_z}{EA} = \text{const} \rightarrow \Delta L = \frac{N_z L}{EA} \quad \boxed{EA - \text{độ cứng}}$$

2.3. Biến dạng - Hệ số Poisson

- ❖ Thanh gồm nhiều đoạn chiều dài, độ cứng và lực dọc trên mỗi đoạn thứ i là L_i , $(EA)_i$, N_{zi}



$$\frac{N_{zi}}{(EA)_i} = \text{const}$$



$$\Delta L = \sum_{i=1}^n \frac{N_{zi} L_i}{(EA)_i}$$

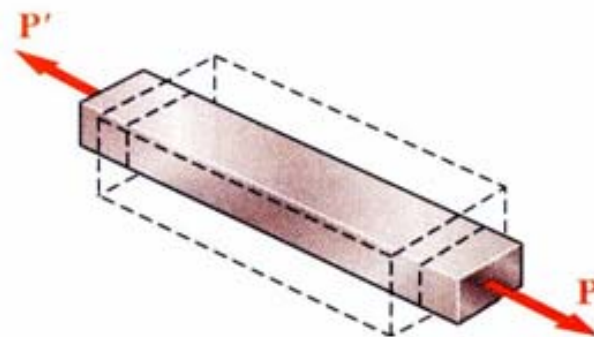
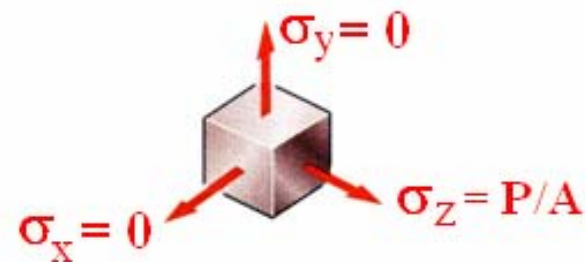
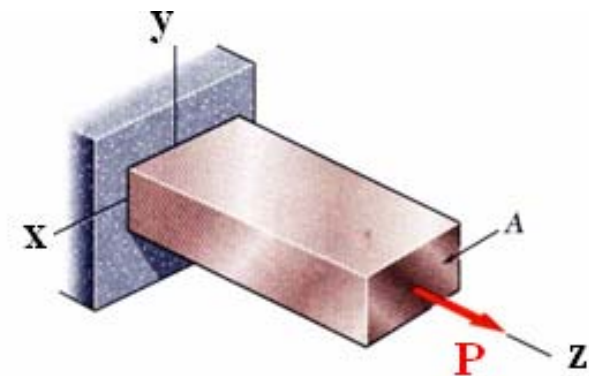
2.3. Biến dạng - Hệ số Poisson

HỆ SỐ POISSON

- Theo phương z trục thanh – biến dạng dọc ε_z
- Theo hai phương x, y vuông góc với z – biến dạng ngang $\varepsilon_x, \varepsilon_y$
- Poisson tìm được mối liên hệ:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu\varepsilon_z$$

μ - hệ số Poisson



Hệ số Poisson

Vật liệu	Hệ số	Vật liệu	Hệ số
Thép	0,25-0,33	Đồng đen	0,32-0,35
Gang	0,23-0,27	Đá hộc	0,16-0,34
Nhôm	0,32-0,36	Bê tông	0,08-0,18
Đồng	0,31-0,34	Cao su	0,47

Ví dụ 2.1 (1)



Bài 1: Cho các thanh chịu lực như hình vẽ.
Vẽ biểu đồ lực dọc, ứng suất và chuyển vị của các mặt cắt ngang.

Biết $a=1m$; $A_3=1,5A_2=2A_1=15cm^2$; $F_1=25kN$;
 $F_2=60 kN$; $q=10kN/m$; $E=10^4kN/cm^2$

Giải:

1) Xác định phản lực:

Giải phóng liên kết ngàm tại A: R_A

$$\sum Z = R_A + F_1 - F_2 - q.a = 0$$

$$\Rightarrow R_A = F_2 + q.a - F_1 = 60 + 10.1 - 25 = 45(kN)$$

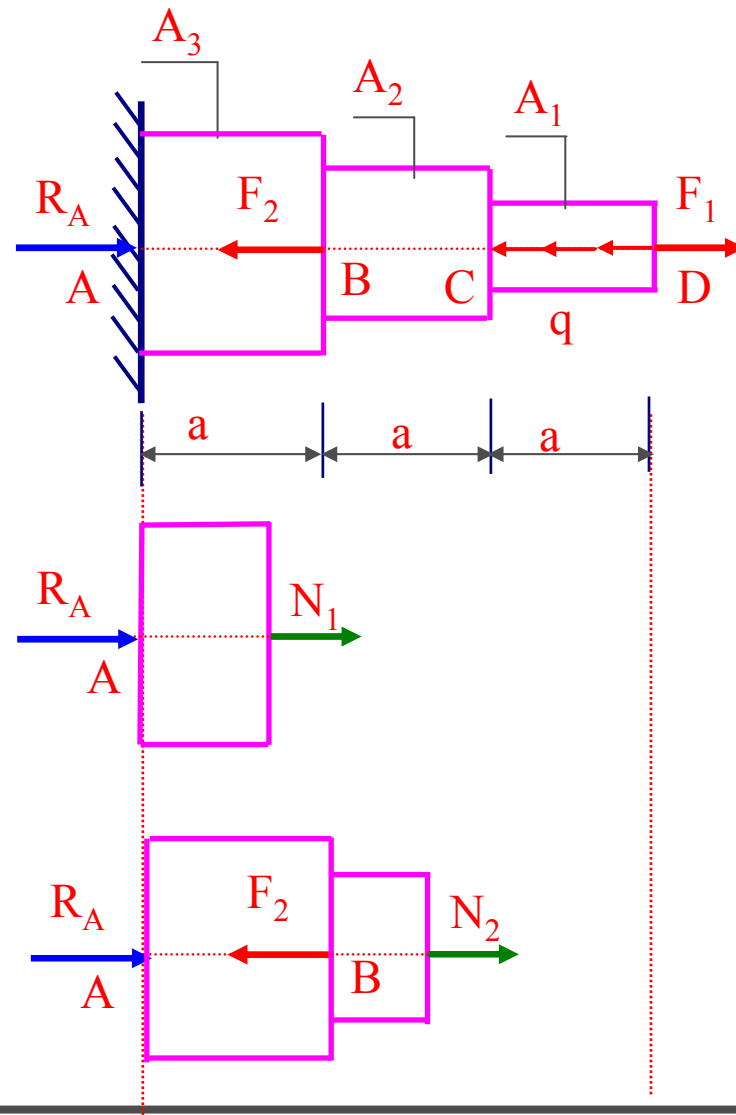
2) Nội lực trong các đoạn thanh:

- Đoạn AB:

$$N_1 = -R_A = -45(kN)$$

- Đoạn BC:

$$N_2 = F_2 - R_A = 60 - 45 = 15(kN)$$



Ví dụ 2.1 (2)



- Mặt cắt trong đoạn CD: $0 \leq z \leq a$

$$N_3 = F_2 - R_A + q \cdot z = 15 + 10z$$

3. Vẽ biểu đồ lực dọc

4. Tính ứng suất trên các tiết diện:

- Đoạn AB:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{AB}}{A_3} = -\frac{45}{15} = -3(kN/cm^2)$$

- Đoạn BC:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_2} = \frac{15}{10} = 1,5(kN/cm^2)$$

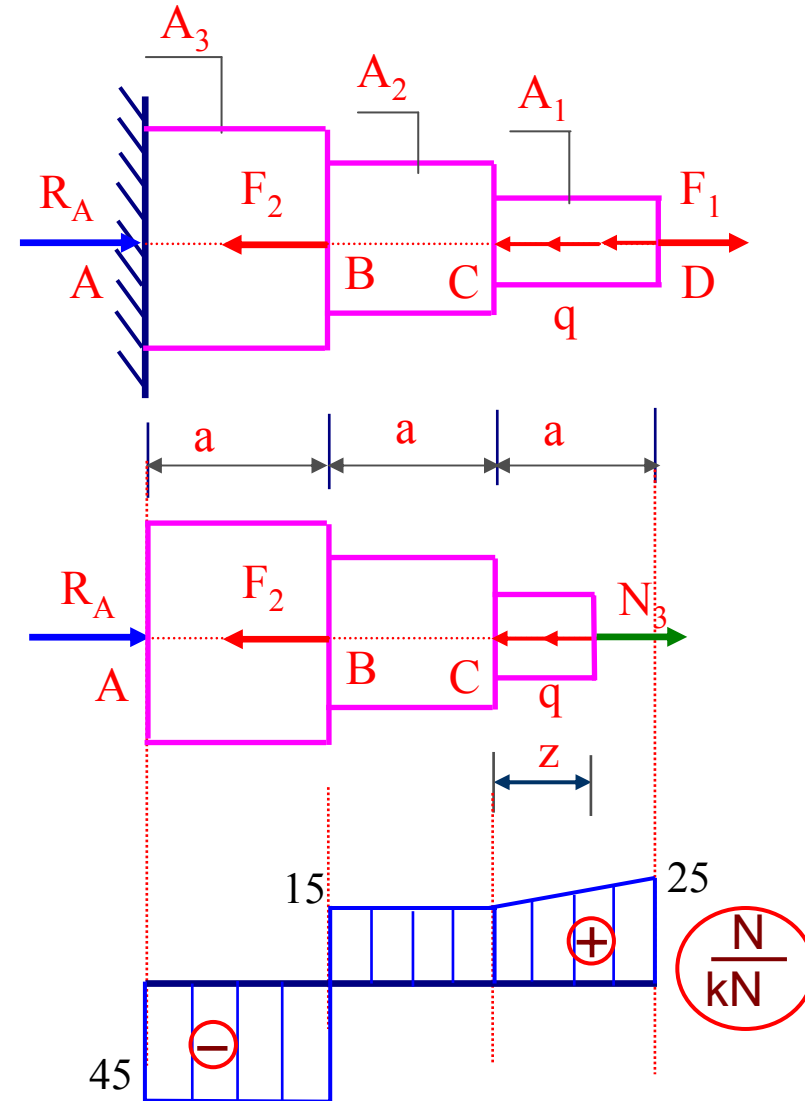
- Đoạn CD:

$$z = 0 \Rightarrow N_{CD} = 15(kN)$$

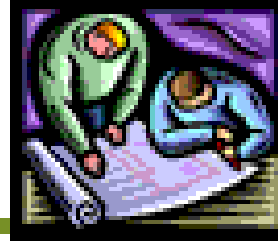
$$\Rightarrow \sigma_C = \frac{N_{CD}}{A_1} = \frac{15}{7,5} = 2(kN/cm^2)$$

$$z = 1(m) \Rightarrow N_{CD} = 25(kN)$$

$$\Rightarrow \sigma_D = \frac{N_{CD}}{A_1} = \frac{25}{7,5} = 3,33(kN/cm^2)$$



Ví dụ 2.1 (3)



4. Tính chuyển vị tại các đoạn:

- Chuyển vị đoạn AB: $0 \leq z_1 \leq 100(\text{cm})$

$$w_1 = w_A + \int_0^{z_1} \frac{N_{AB}}{E \cdot A_3} dz_1 = 0 + \frac{-45 \cdot z_1}{10^4 \cdot 15} = -3 \cdot 10^{-4} z_1 (\text{cm})$$

- Chuyển vị đoạn BC: $0 \leq z_2 \leq 100(\text{cm})$

$$w_2 = w_B + \int_0^{z_2} \frac{N_{BC}}{E \cdot A_2} dz_2 = -0,03 + \frac{15 \cdot z_2}{10^4 \cdot 10}$$

$$w_2 = -0,03 + 1,5 \cdot 10^{-4} z_2 (\text{cm})$$

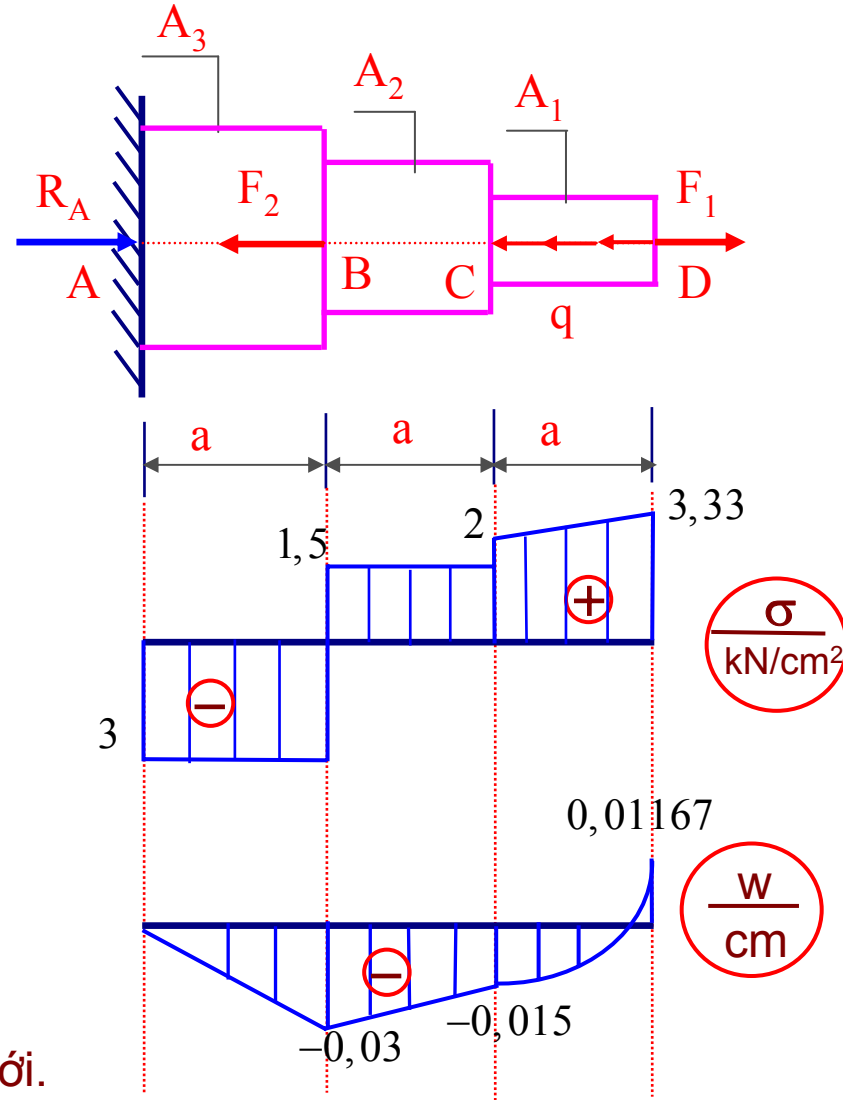
- Chuyển vị đoạn CD: $0 \leq z_3 \leq 100(\text{cm})$

$$w_3 = w_C + \int_0^{z_3} \frac{N_{CD}}{E \cdot A_1} dz_3 = -0,015 + \int_0^{z_3} \frac{(15 + 10z)}{75000} dz_3$$

$$w_3 = -0,015 + \frac{15z_3 + 5z_3^2}{75000} (\text{cm})$$

$$w_3' = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{3} (3 + 2z_3)$$

$$w_3'' = \frac{4 \cdot 10^{-4}}{3} > 0 \Rightarrow \text{Hàm lõm quay xuống dưới.}$$

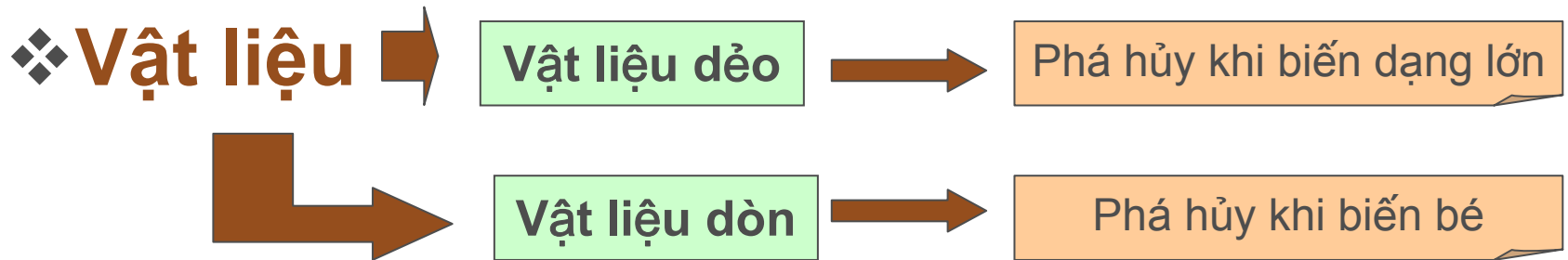


2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu

❖ Đặc trưng cơ học của vật liệu:

Là các thông số đánh giá khả năng chịu lực, chịu biến dạng của vật liệu trong từng trường hợp chịu lực cụ thể

❖ Để xác định các đặc trưng cơ học của vật liệu: tiến hành các thí nghiệm với các loại vật liệu khác nhau



Vật liệu dẻo, vật liệu giòn

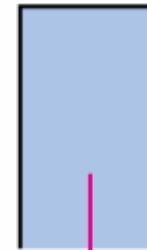
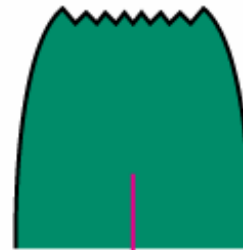
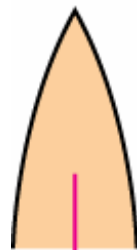
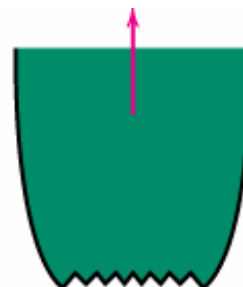
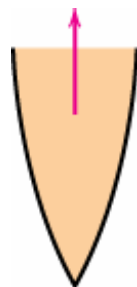
• Phân loại:

Đặc điểm phá hủy:

Rất dẻo

Dẻo vừa

Dòn



Đặc điểm biến dạng:

Lớn

Trung bình

Bé

Dự báo biến dạng:

Luôn báo trước

Báo trước

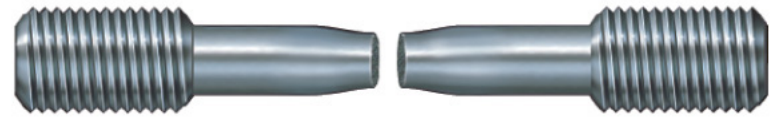
Không báo trước

Vật liệu dẻo, vật liệu giòn



Necking

(a)

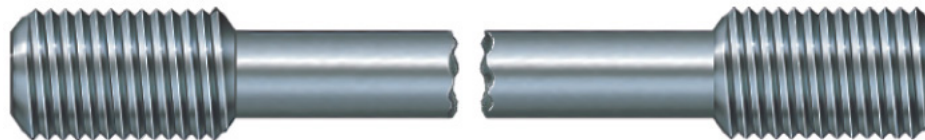


Failure of a ductile material

(b)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

[TensileTestingofPlastic.mp4](#)



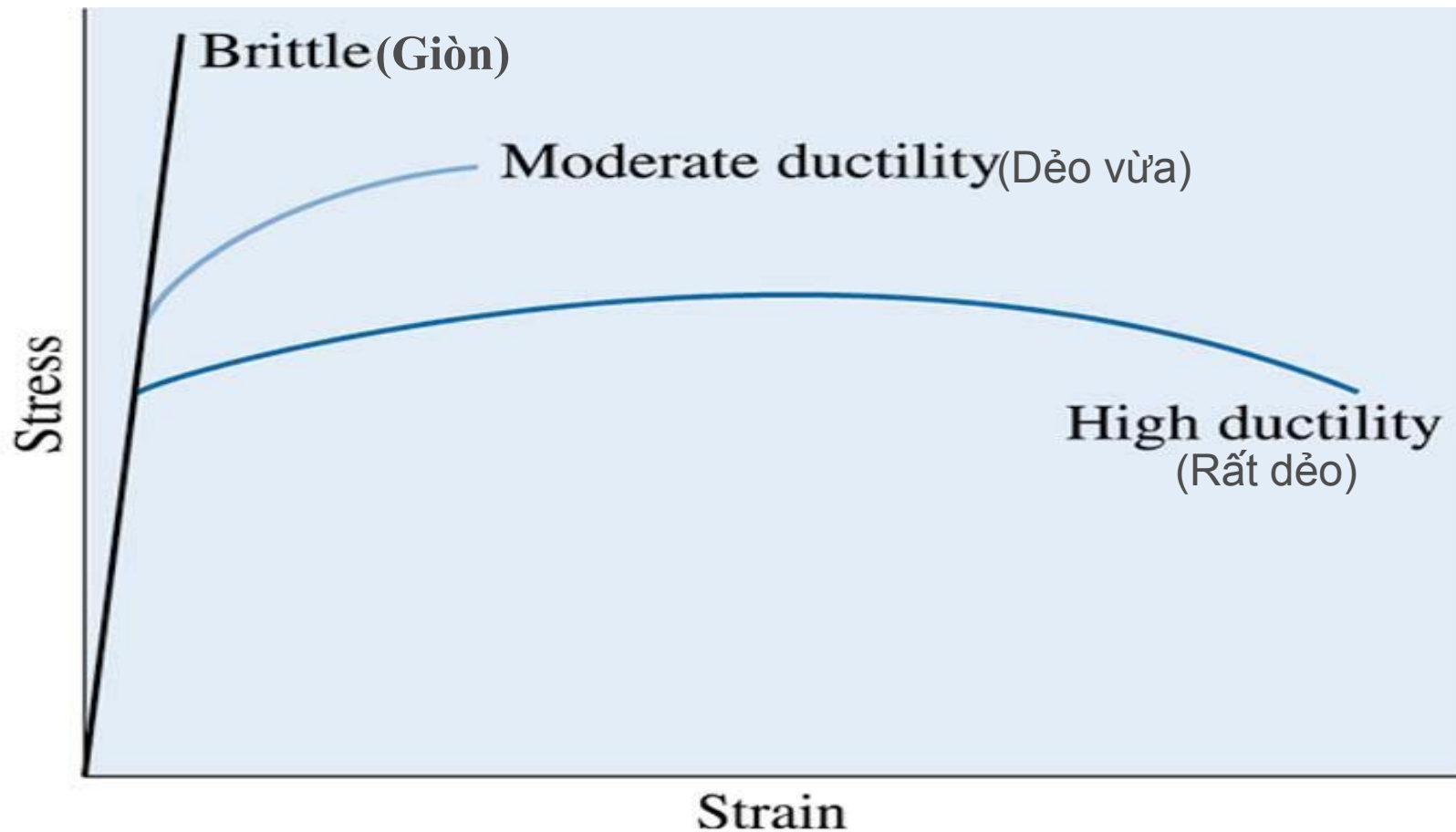
Tension failure of a brittle material

(a)

Copyright © 2005 Pearson Prentice Hall, Inc.

Vật liệu dẻo, vật liệu giòn

Đồ thị ứng suất - biến dạng



(c)2003 Brooks/Cole, a division of Thomson Learning, Inc. Thomson Learning, Inc. is a trademark used herein under license.

2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu

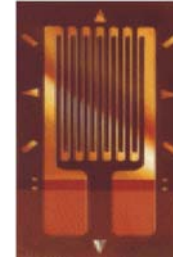
Mục tiêu làm thí nghiệm:

- Xác định khả năng chịu lực
- Xác định khả năng chịu biến dạng
- Xác định các “tính chất vật liệu”
 - ✓ Đặc trưng cơ học (g.h tỉ lệ, g.h chảy, g.h bền)
 - ✓ Độ cứng, độ mềm, ...
 - ✓ Độ bền uốn, độ bền phá hủy,...
 - ✓ Nhiệt độ, độ ẩm,...
- **Đồ thị ứng suất – biến dạng**: không phụ thuộc vào kích thước mẫu thí nghiệm => Xác định cơ tính của vật liệu

Các phương pháp thực nghiệm (*)

Các loại máy thí nghiệm.

Điện - Cơ.
Thủy lực.
Một chiều.
Nhiều chiều



Các dạng thử nghiệm.

Load control – apply force/time.
Stroke control – apply displacement/time
Torsion (torque control or angle control)

Đo lực bằng “load cell”

Đo biến dạng và chuyển vị

Khung trượt lực
Cảm biến chuyển vị (Extensometer)
Cảm biến điện trở (single, rosette, array, ...)
Cảm biến quang học (Optical extensometers)

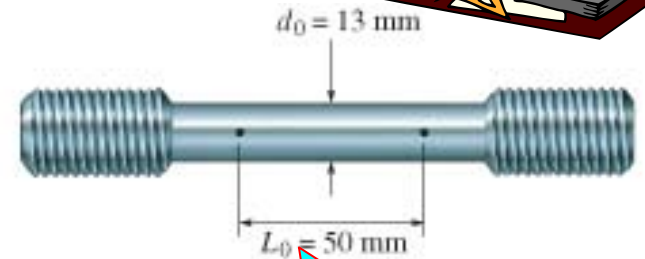
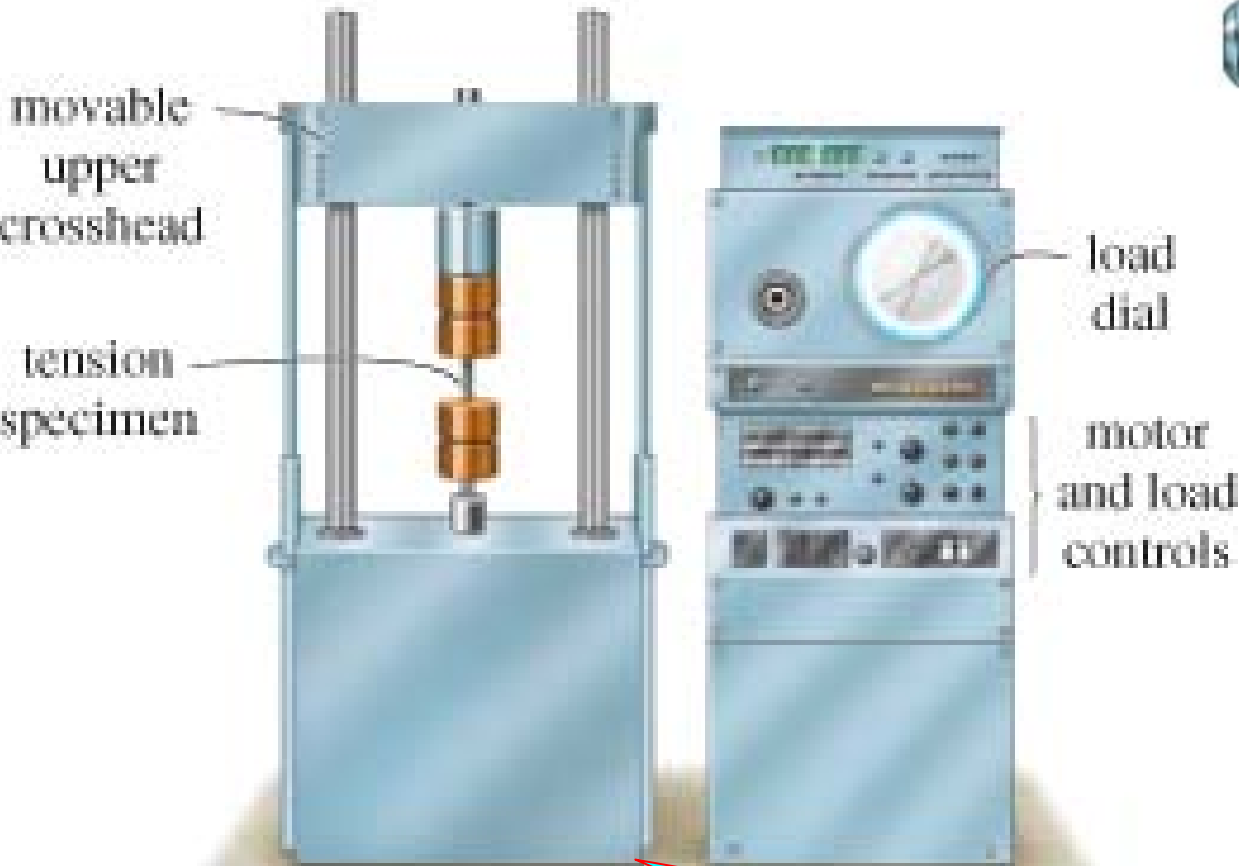


Các phương pháp thực nghiệm (*)

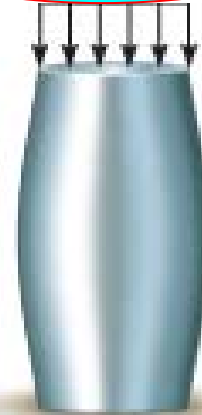
❖ Thí nghiệm kéo – nén

- ✓ Mẫu thí nghiệm: hình dạng, kích thước qui định theo tiêu chuẩn (TCVN, ISO, ASTM,...)
- ✓ Kẹp mẫu vào ngàm kẹp
- ✓ Gia tải, chú ý tốc độ gia tải chậm
- ✓ Ghi lại quan hệ lực kéo (nén) và biến dạng dài tương ứng
- ✓ Suy ra đồ thị quan hệ ứng suất pháp – biến dạng dài tỉ đối

Thí nghiệm kéo – nén (*)



Mẫu kéo



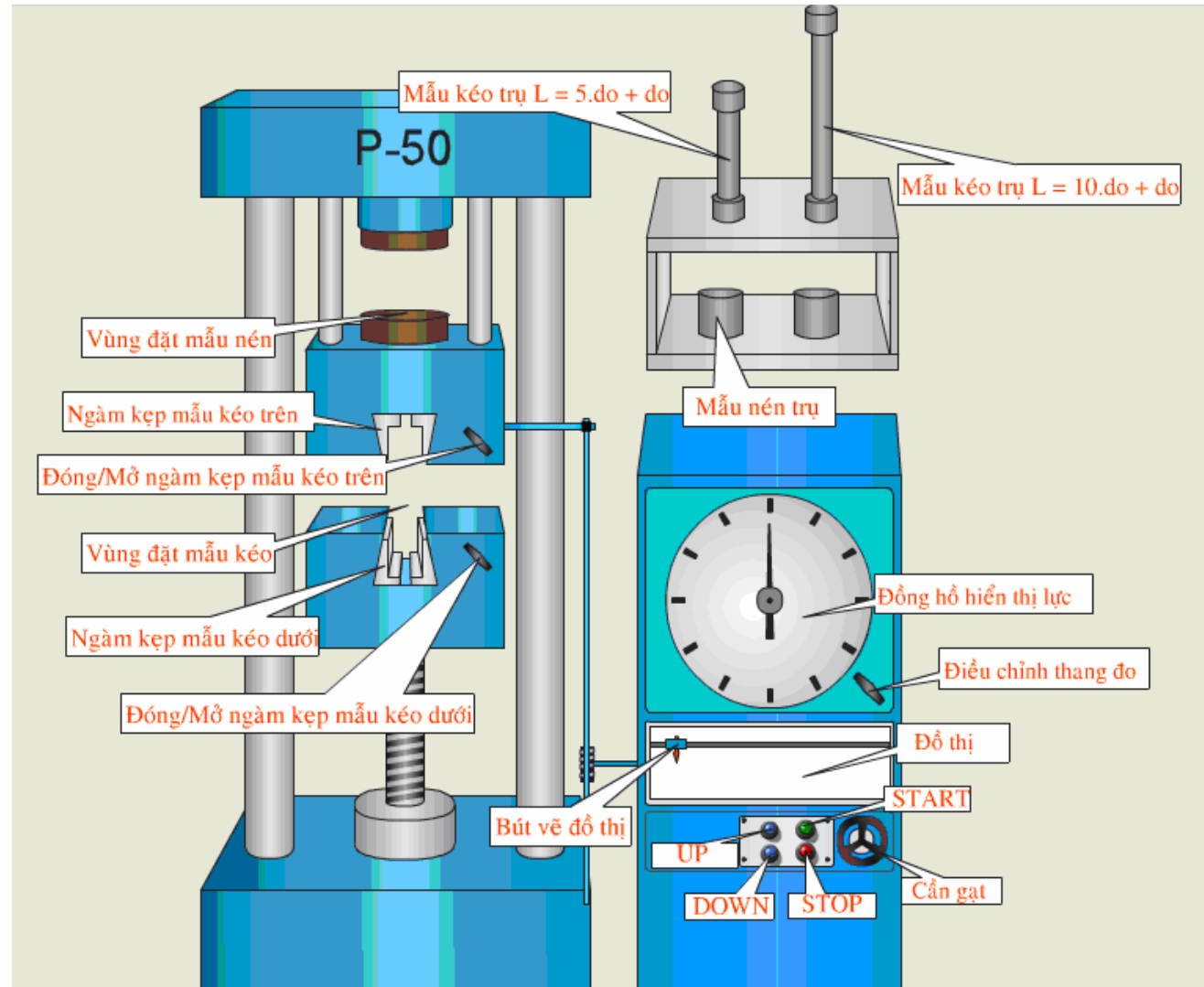
Compression causes material to bulge out

Mẫu nén

Máquina de ensaio

2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu

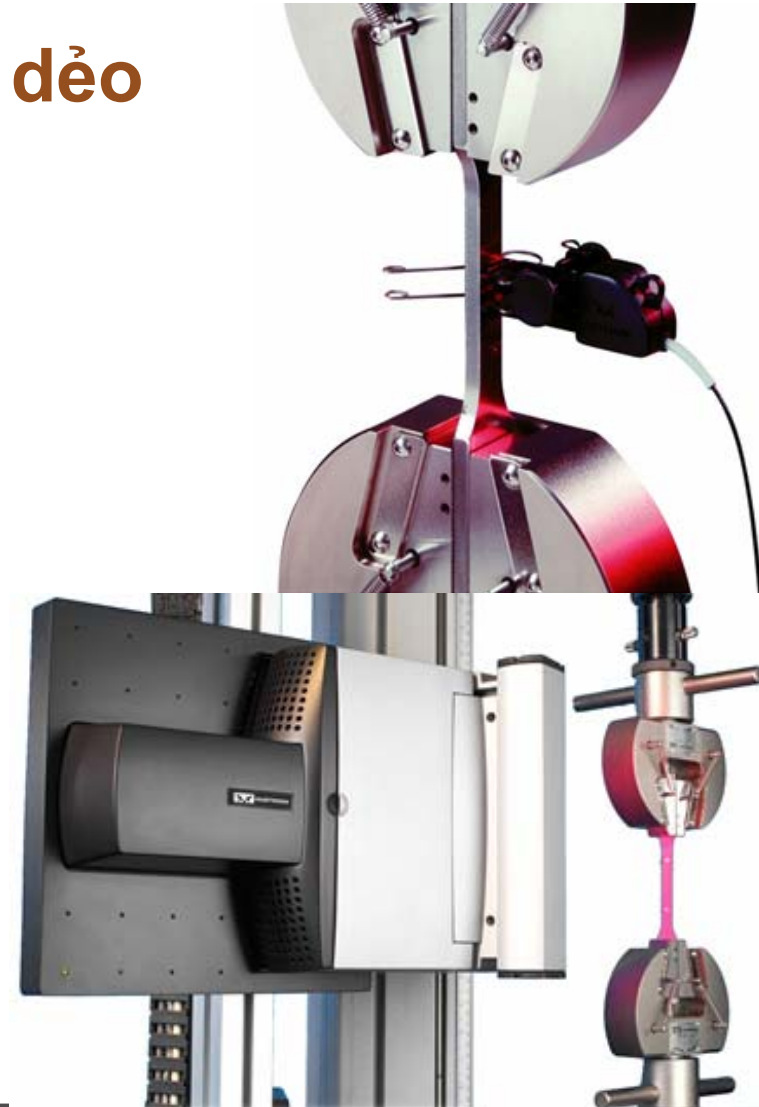
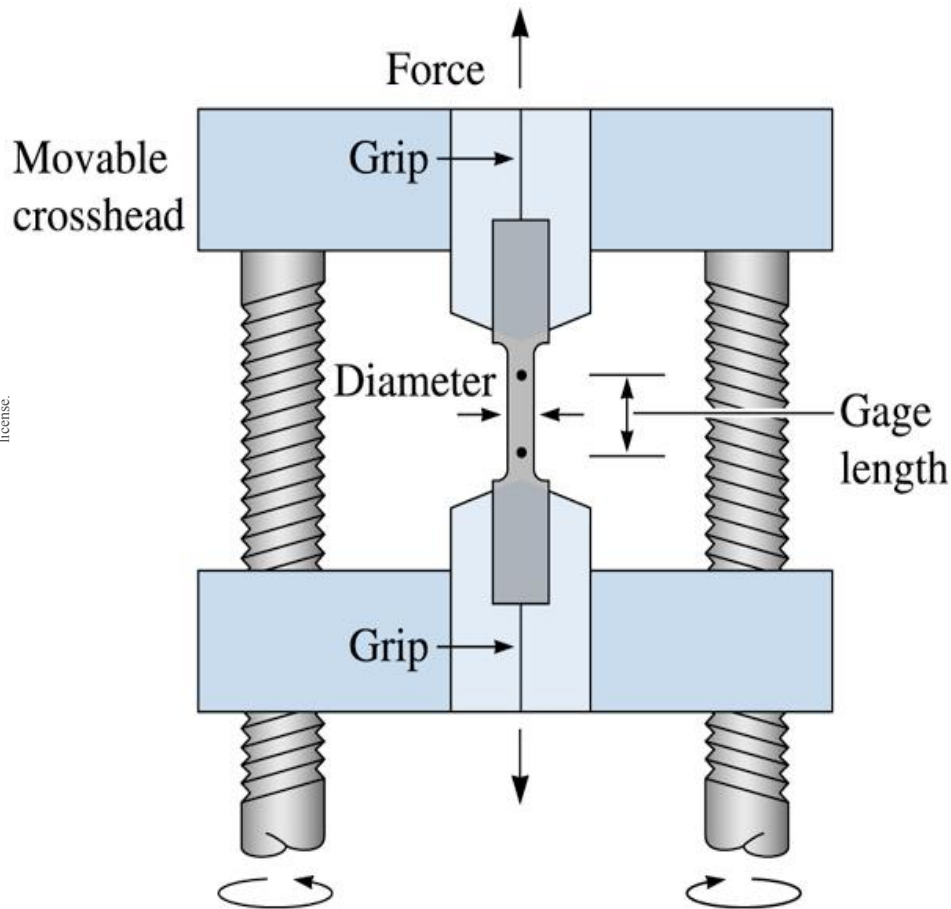
**MẪU
THÍ
NGHIỆM
VÀ
MÁY
KÉO -
NÉN
ĐÚNG
TÂM**



2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu

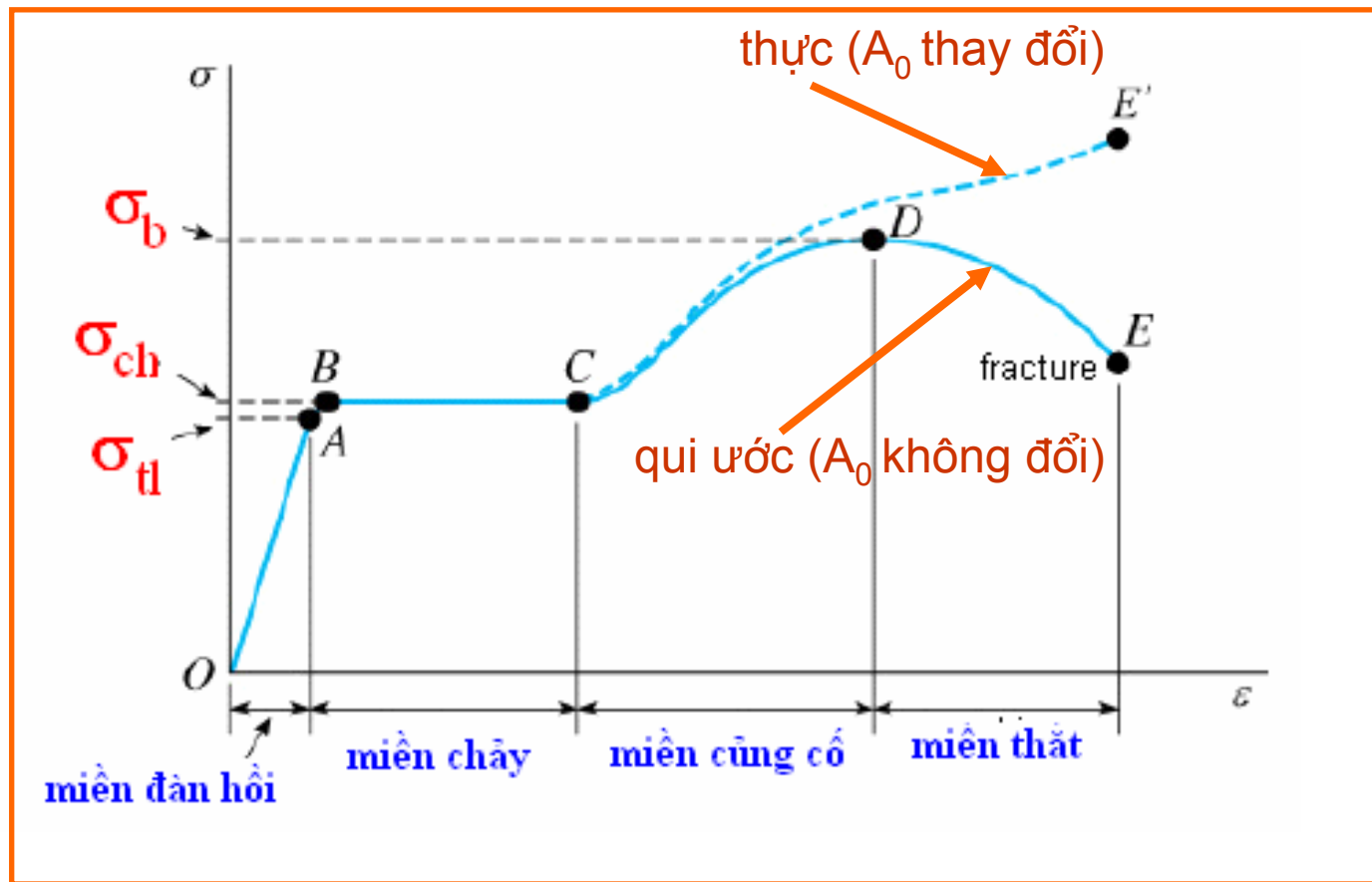
1. Thí nghiệm kéo mẫu vật liệu dẻo

(c)2003 Brooks/Cole, a division of Thomson Learning, Inc. Thomson Learning, Inc. is a trademark used herein under license.



2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu

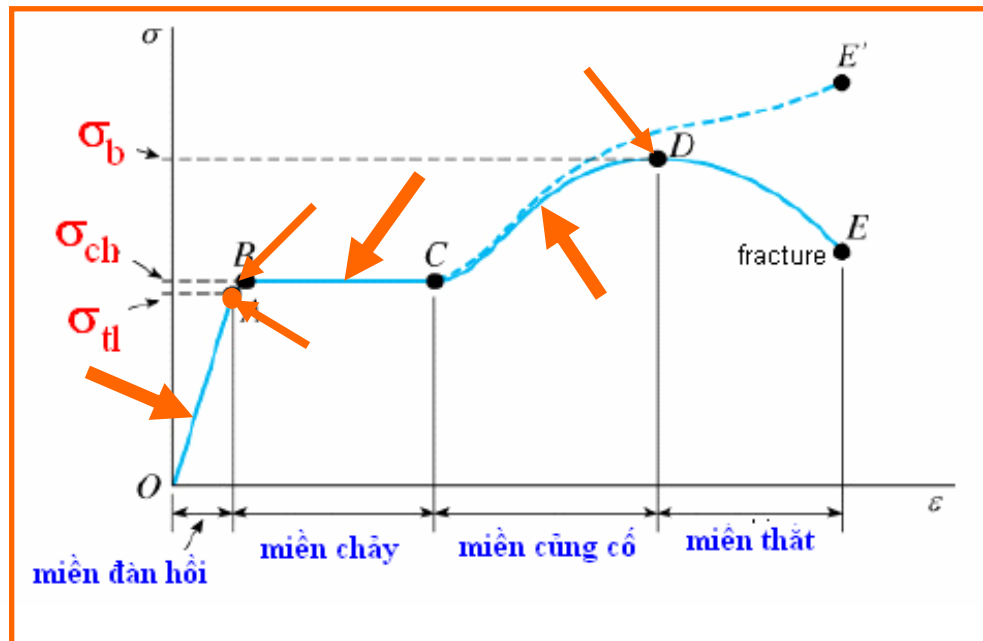
Đồ thị kéo mẫu vật liệu dẻo



2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu

Đồ thị chia 3 giai đoạn

1. Giai đoạn tỉ lệ: ứng suất tỉ lệ bậc nhất với biến dạng dài tỉ đối



σ_{tl} , σ_{ch} , σ_b - đặc trưng cơ học của vật liệu

Ứng suất lớn nhất - giới hạn tỉ lệ σ_{tl}

2. Giai đoạn chảy: ứng suất không tăng nhưng biến dạng tăng

Giới hạn chảy σ_{ch} - giá trị ứng suất lớn nhất

3. Giai đoạn củng cố: quan hệ ứng suất - biến dạng là phi tuyến (CDE)

Giới hạn bền σ_b - giá trị ứng suất lớn nhất

2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu

σ_{tl} , σ_{ch} , σ_b - đặc trưng về tính bền của vật liệu.

Đặc trưng cho tính dẻo:

❖ **Biến dạng dài tỷ đối**

$$\varepsilon = \frac{L_1 - L_0}{L_0} 100\%$$

L_1 - Chiều dài mẫu sau khi đứt

L_0 - Chiều dài mẫu trước khi đứt

❖ **Độ thắt tỷ đối**

$$\psi = \frac{A_1 - A_0}{A_0} 100\%$$

A_1 - Diện tích chỗ thắt khi đứt

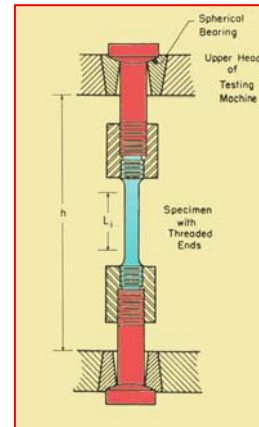
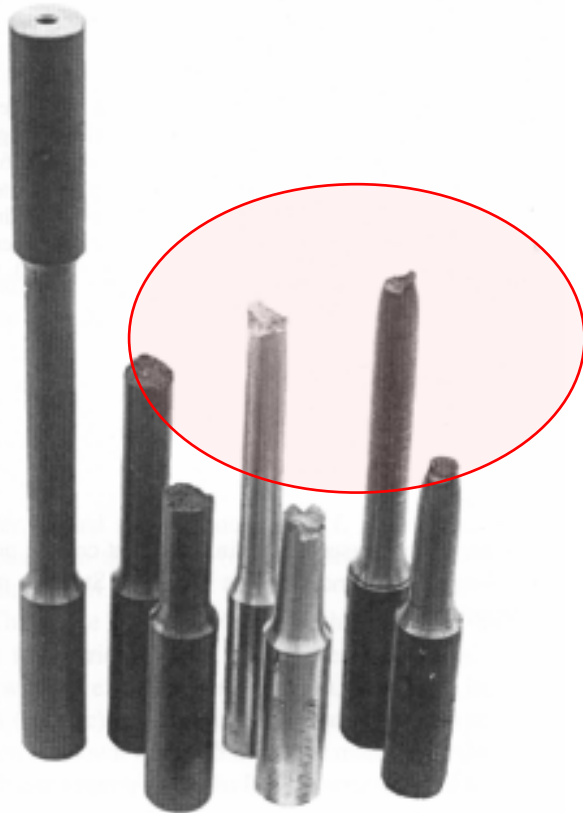
A_0 - Diện tích tiết diện trước khi đứt

2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu

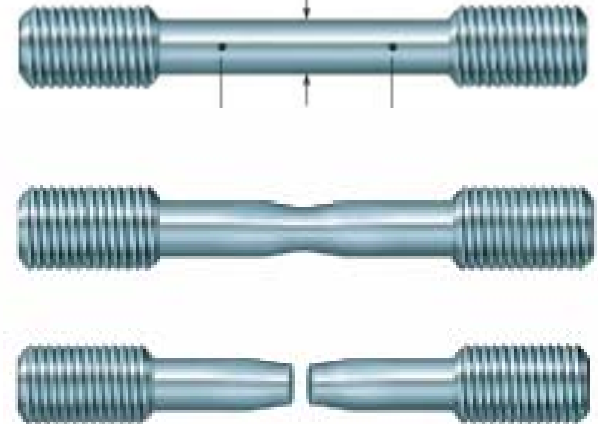
Các đặc trưng cơ học của một số vật liệu

Material	Density ρ (kg/m^3)	Young's Modulus E (10^9N/m^2)	Ultimate Strength σ_b (10^6N/m^2)	Yield Strength σ_{ch} (10^6N/m^2)
Steel	7860	200	400	250
Aluminum	2710	70	110	90
Glass	2190	65	50	—
Concrete	2320	30	40	—
Wood	525	13	50	—
Bone	1900	9	170	—
Polystyrene	1050	3	48	—

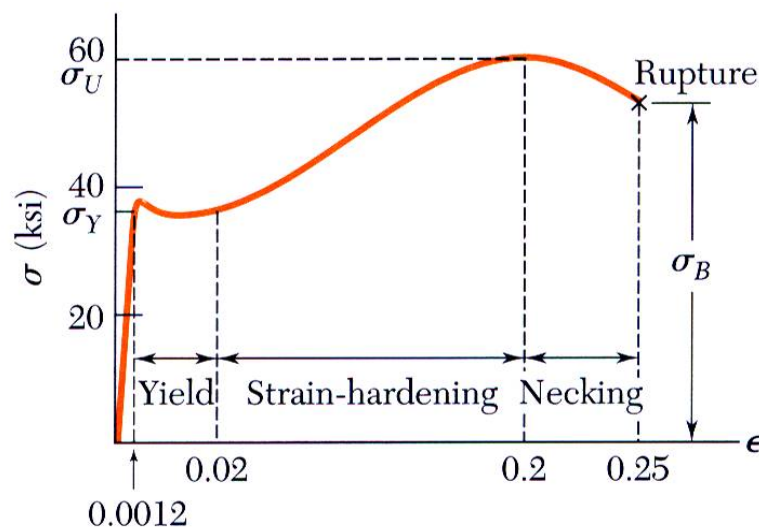
2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu



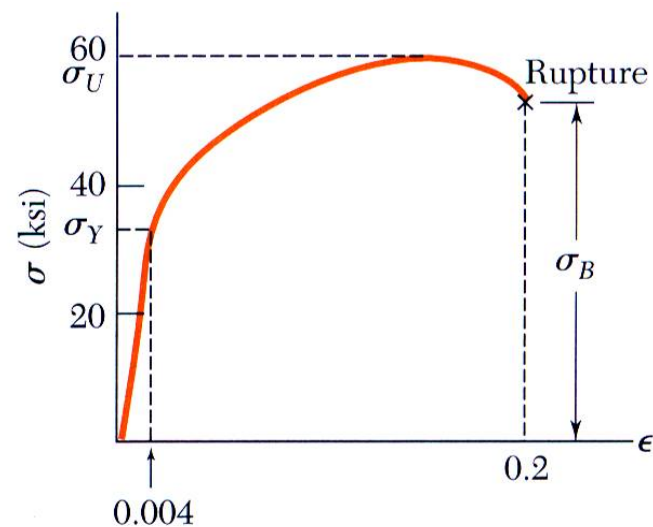
$d_0 = 13 \text{ mm}$



Đồ thị kéo vật liệu dẻo



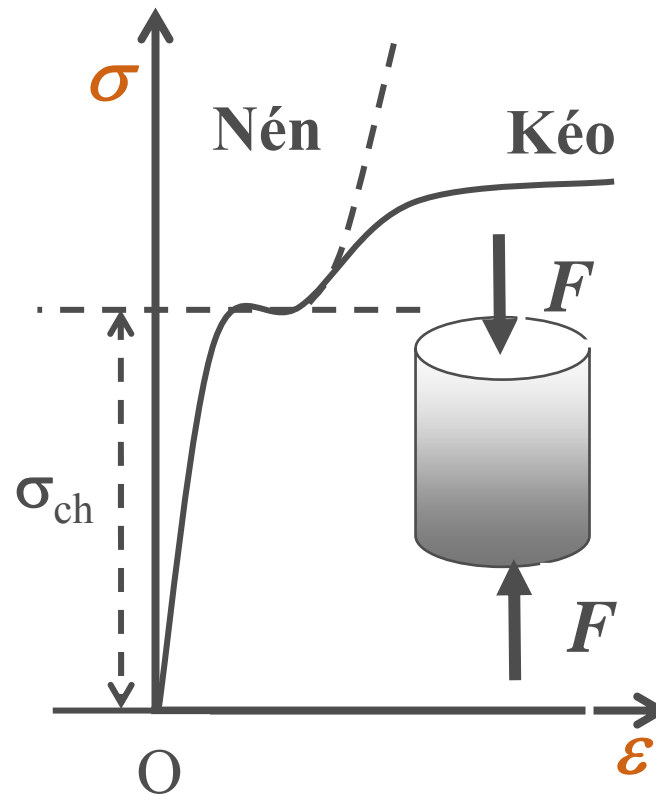
(a) Low-carbon steel



(b) Aluminum alloy

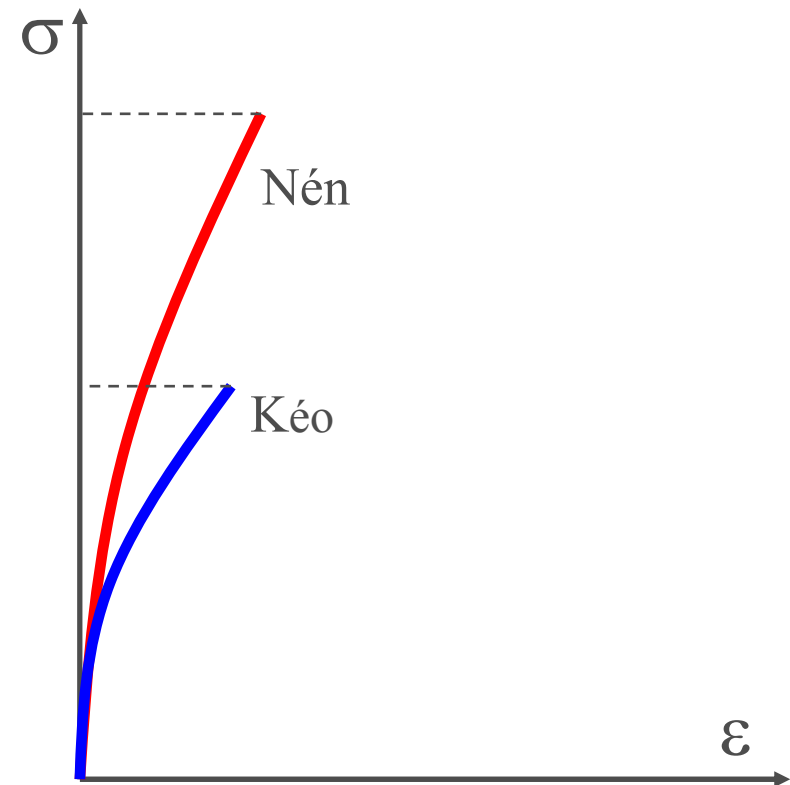
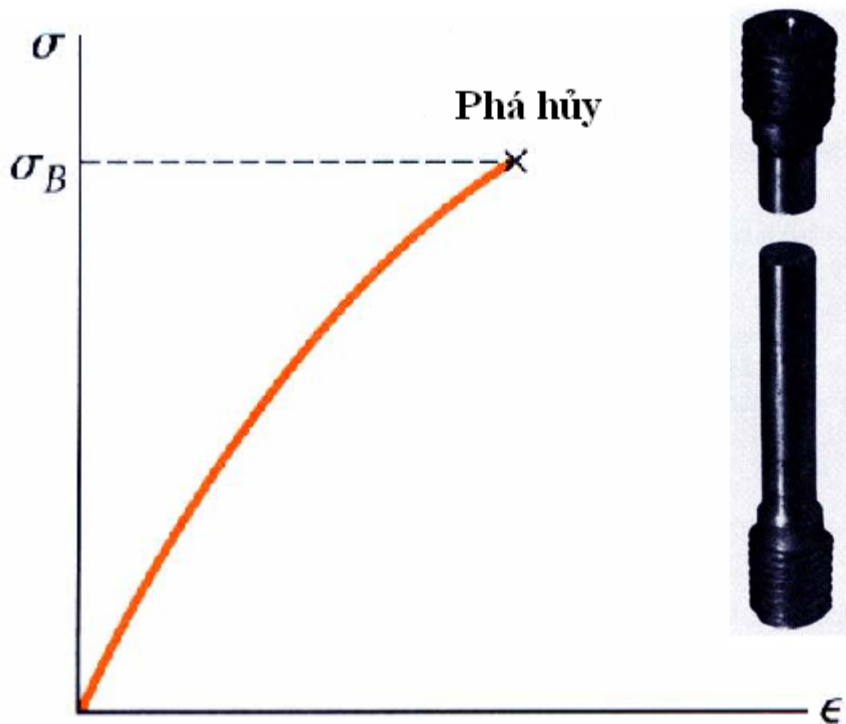
2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu

2. Thí nghiệm nén mẫu vật liệu dẻo



2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu

3. Thí nghiệm kéo - nén mẫu vật liệu giòn



- Không xác định được giới hạn tỉ lệ và giới hạn chảy, chỉ xác định được giới hạn bền

2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu

Xác định môđun đàn hồi kéo (nén)

- Định luật Hooke

$$\sigma = E \varepsilon$$

- E – mô đun đàn hồi
(mô đun Young)

$$E = \text{tg } \varphi$$

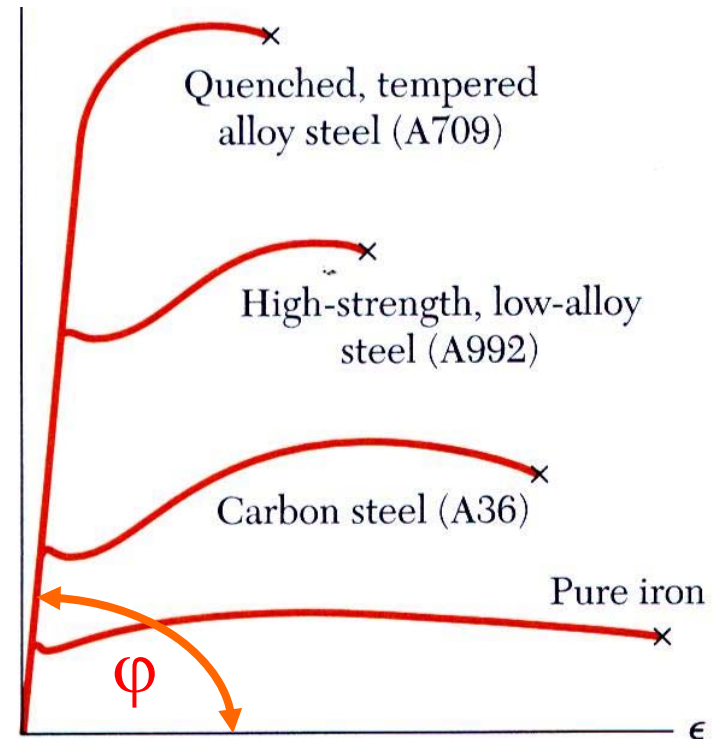


Fig. 2.16 Stress-strain diagrams for iron and different grades of steel.

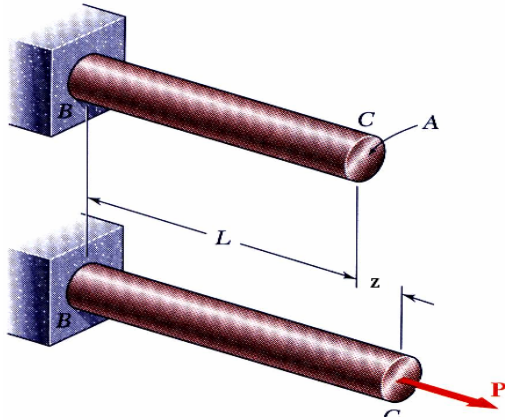
2.4. Đặc trưng cơ học của vật liệu

KẾT LUẬN

- ❖ **Vật liệu dẻo:** khả năng chịu kéo và nén như nhau
- ❖ **Vật liệu giòn:** Khả năng chịu nén lớn hơn nhiều so với khả năng chịu kéo



2.5. Thế năng biến dạng đàn hồi



- Xét thanh chịu kéo (nén) đúng tâm
- Phân tố công ngoại lực trên chuyển vị dz

$$dA = P dz$$

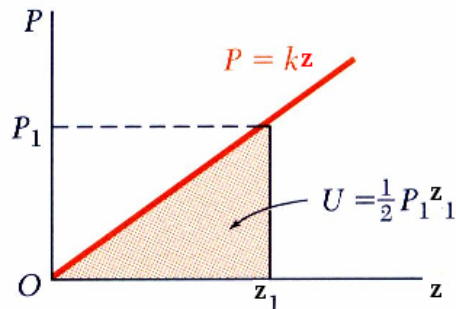
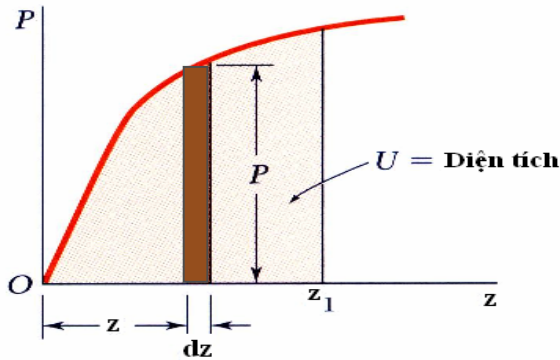
công này bằng phần diện tích trên đồ thị trong khoảng dz .

- Công ngoại lực cho biến dạng z_1 :

$$A = \int_0^{z_1} P dz$$

- Trong miền đàn hồi

$$A = \int_0^{z_1} kz dz = \frac{1}{2} kz_1^2 = \frac{1}{2} P_1 z_1$$



2.5. Thế năng biến dạng đàn hồi

- ❖ Trong miền đàn hồi, nếu bỏ nguyên nhân gây biến dạng => vật thể trở về hoàn toàn hình dạng ban đầu
- ❖ Năng lượng làm cho vật thể phục hồi hình dạng ban đầu: *thế năng biến dạng đàn hồi U*
- ❖ Định luật bảo toàn năng lượng

Năng lượng mà hệ nhận được từ bên ngoài sẽ hoàn toàn chuyển hoá thành thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong hệ

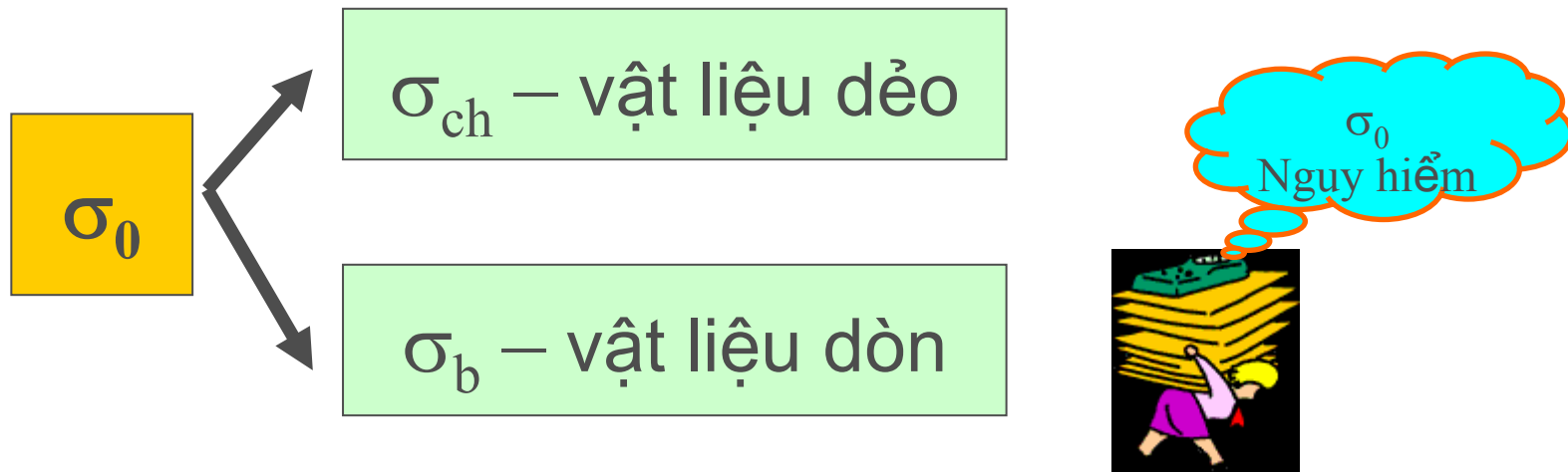
$$U = A = \frac{1}{2} P \Delta L = \frac{P^2 L}{2EA}$$

- ❖ Thế năng biến dạng đàn hồi trên một đơn vị thể tích –
Thế năng biến dạng đàn hồi riêng

$$u = \frac{U}{A} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$$

2.6. Ứng suất cho phép - Hệ số an toàn – Điều kiện bền

- ❖ Thí nghiệm => ứng suất nguy hiểm σ_0 – tương ứng với thời điểm vật liệu mất khả năng chịu lực



- Vật liệu làm việc an toàn khi ứng suất xuất hiện chưa vượt quá ứng suất nguy hiểm
- Khi tính toán, không bao giờ tính theo ứng suất nguy hiểm: vật liệu không đồng nhất, điều kiện làm việc thực tế khác với PTN, tải trọng vượt quá thiết kế,...=> Hệ số an toàn

2.6. Ứng suất cho phép - Hệ số an toàn – Điều kiện bền

❖ Dùng trị số ứng suất cho phép để tính toán:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$$

n - hệ số an toàn - đặc trưng cho khả năng dự trữ về mặt chịu lực ($n > 1$)

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \dots$$

- n_1 - hệ số kể đến sự đồng nhất của vật liệu
- n_2 - hệ số kể đến điều kiện làm việc, phương pháp tính toán, ...
- Các hệ số lấy theo qui phạm

2.6. Ứng suất cho phép - Hệ số an toàn – Điều kiện bền

❖ Điều kiện để thanh làm việc an toàn => Điều kiện bền

- Vật liệu dẻo:

$$\max \left\{ \sigma_{z \max}, \left| \sigma_{z \min} \right| \right\} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{ch}}{n}$$

- Vật liệu giòn:

$$\sigma_{z \max} \leq [\sigma]_k = \frac{\sigma_b^k}{n}$$

$$\left| \sigma_{z \min} \right| \leq [\sigma]_n = \frac{\sigma_b^n}{n}$$



2.6. Ứng suất cho phép - Hệ số an toàn – Điều kiện bền

- ❖ Thanh chịu kéo (nén) đúng tâm:

$$\sigma = \frac{|N_z|}{A} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$$

- ❖ Ba bài toán cơ bản

a. Bài toán kiểm tra điều kiện bền

b. Bài toán chọn kích thước mặt cắt ngang

$$A \geq \frac{|N_z|}{[\sigma]}$$

c. Bài toán tìm giá trị cho phép của tải trọng

$$|N_z| \leq [\sigma] \cdot A$$

2.7. Bài toán siêu tĩnh

- ❖ **Hệ siêu tĩnh:** là hệ mà ta không thể xác định được hết các phản lực liên kết và nội lực trong hệ nếu chỉ nhờ vào các phương trình cân bằng tĩnh học
- ❖ Số ẩn số $>$ số phương trình cân bằng
 - ➔ viết thêm phương trình bổ sung
 - ➔ phương trình biến dạng
- ❖ Ví dụ



Ví dụ 2.2 (1)



Bài 2.2: Một thanh có mặt cắt thay đổi bậc bị ngàm cứng hai đầu, chịu lực P và lực phân bố đều có cường độ $q = P/a$ như hình vẽ. Mô đun đàn hồi của vật liệu là E , diện tích mặt cắt ngang của các đoạn ghi trên hình vẽ. Vẽ biểu đồ nội lực của thanh.

Tính σ_{\max} , w_B , w_C .

Giải:

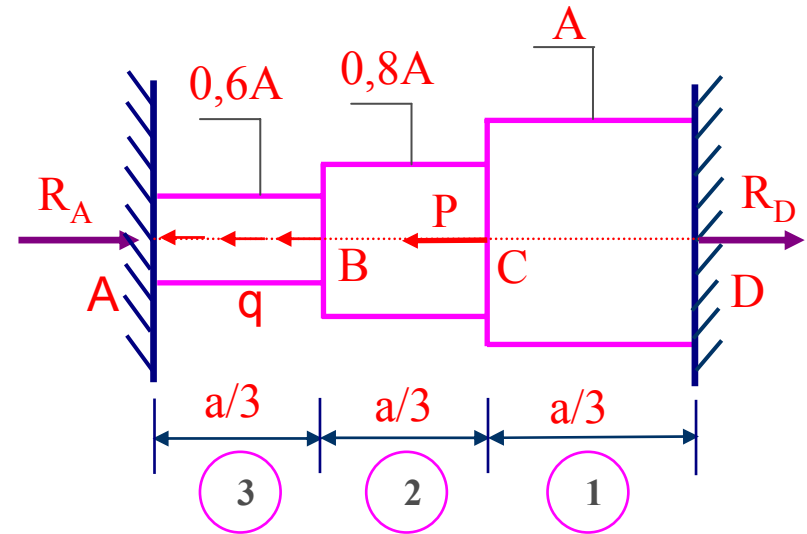
1. Giả sử phản lực tại ngàm A, D là R_A , R_D
Phương trình cân bằng:

$$R_A + R_D = P + \frac{q \cdot a}{3} = \frac{4P}{3} \quad (1) \Rightarrow \text{Bài toán siêu tĩnh}$$

Điều kiện biến dạng:

$$\Delta L_{AD} = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 = 0 \quad (2)$$

$$\Delta L_{AD} = \frac{N_1 l_1}{EA_1} + \frac{N_2 l_2}{EA_2} + \int_0^{l_3} \frac{N_3 dz}{EA_3} = 0 \quad (3)$$



Ví dụ 2.2 (2)



* Bằng phương pháp mặt cắt, xác định nội lực trong các đoạn

$$N_1 = R_D$$

$$N_2 = R_D - P$$

* Đoạn AB: $0 \leq z \leq a/3$

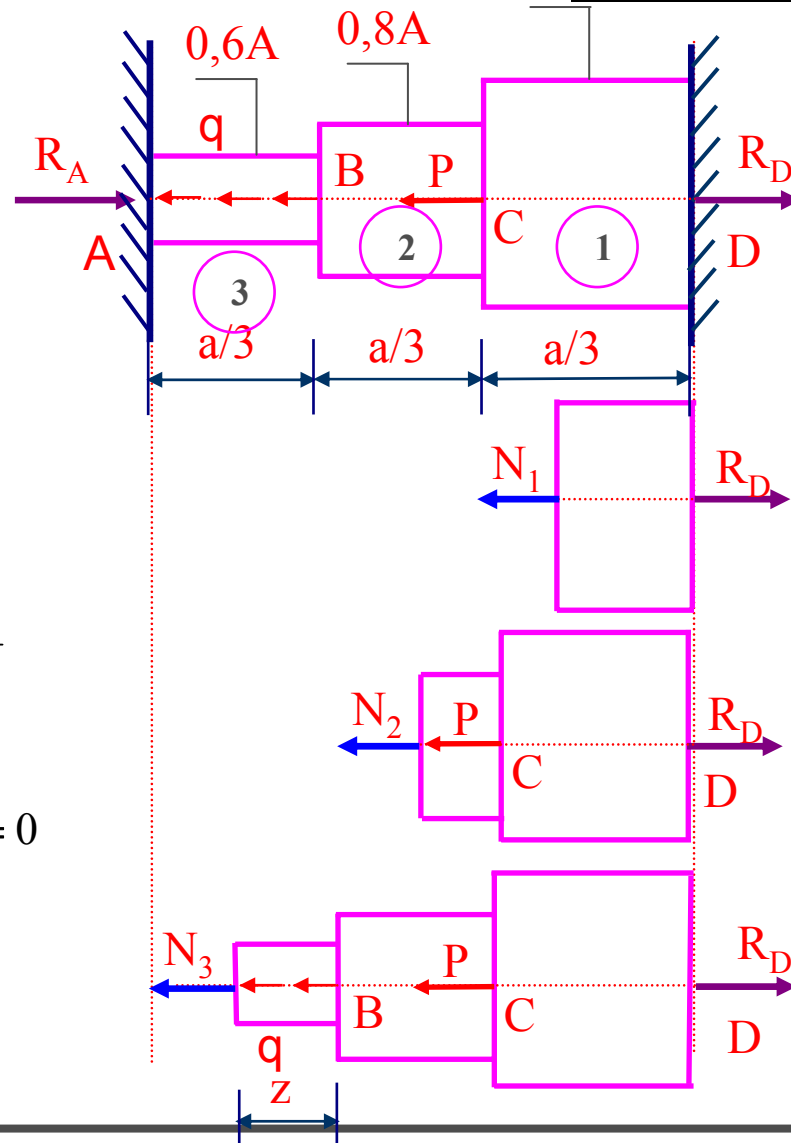
$$N_3 = R_D - P - \frac{P}{a}z$$

Thay vào (3) ta có:

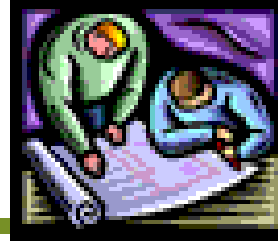
$$\Delta L_3 = \int_0^{a/3} \frac{N_3}{EA_3} dz = \int_0^{a/3} \frac{(R_D - P - \frac{P}{a}z)}{0.6EA} dz = \frac{(R_D - \frac{7}{6}P)}{0.6EA} \frac{a}{3}$$

$$\Rightarrow \Delta L_{AD} = \frac{R_D \cdot (a/3)}{EA} + \frac{(R_D - P) \cdot (a/3)}{0.8EA} + \frac{(R_D - \frac{7}{6}P) \cdot (a/3)}{0.6EA} = 0$$

$$\Rightarrow R_D = 0,8156P \quad \Rightarrow R_A = 0,5177P$$



Ví dụ 2.2 (3)



*Từ đó ta có biểu đồ lực dọc như hình bên

$$N_1 = 0,8156P$$

$$N_2 = -0,1844P$$

$$N_3 = -0,1844P - \frac{P}{a}z \quad (0 \leq z \leq a/3)$$

Ứng suất lớn nhất: $\sigma_{1\max} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,8156P}{A}$

$$|\sigma_2|_{\max} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,1844P}{0,8A} = 0,2305 \frac{P}{a}$$

$$|\sigma_3|_{\max} = \frac{N_3}{A_3} = \frac{0,5177P}{0,6A} = 0,8628 \frac{P}{a}$$

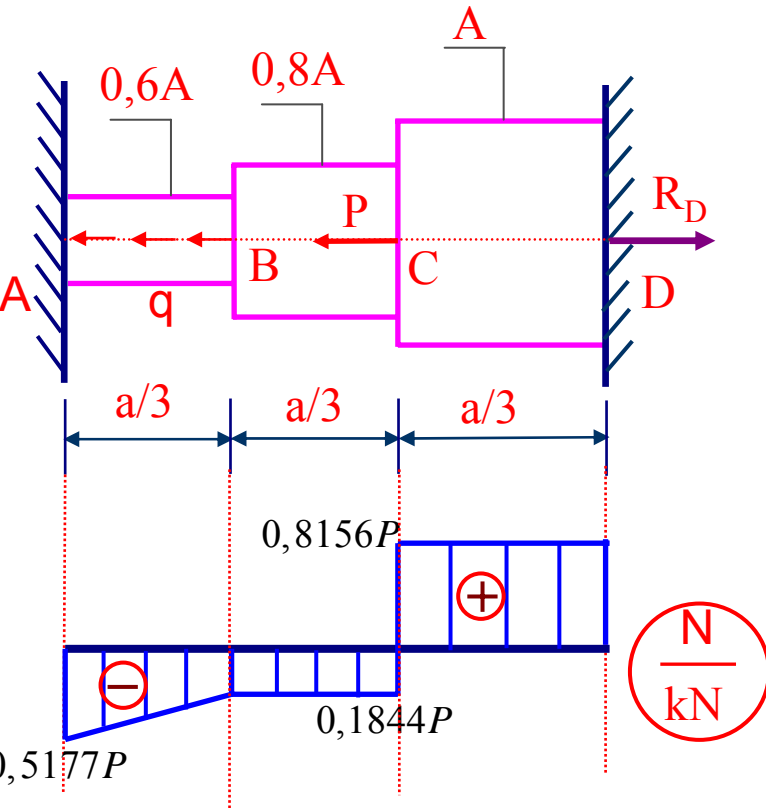
$$\Rightarrow \sigma_{\max} = 0,8628 \frac{P}{a}$$

Chuyển vị điểm B và C là:

$$W_C = W_D + \frac{N_1 \cdot L_1}{EA_1} = \frac{0,8156Pa}{3EA} = 0,2718 \frac{Pa}{EA}$$

(Chuyển dịch sang trái)

$$W_B = W_C + \frac{N_2 l_2}{EA_2} = 0,2718 \frac{Pa}{EA} + \frac{0,1844P \frac{a}{3}}{0,8EA} = 0,3486 \frac{Pa}{EA}$$



$\frac{N}{kN}$

Ví dụ 2.3 (1)



Bài 2.3: Cho hệ thanh chịu lực như hình vẽ.
Xác định lực dọc trong các thanh và chuyển vị điểm C. Biết độ cứng các thanh là EA, chiều cao h

Giải:

1. Xác định lực dọc:

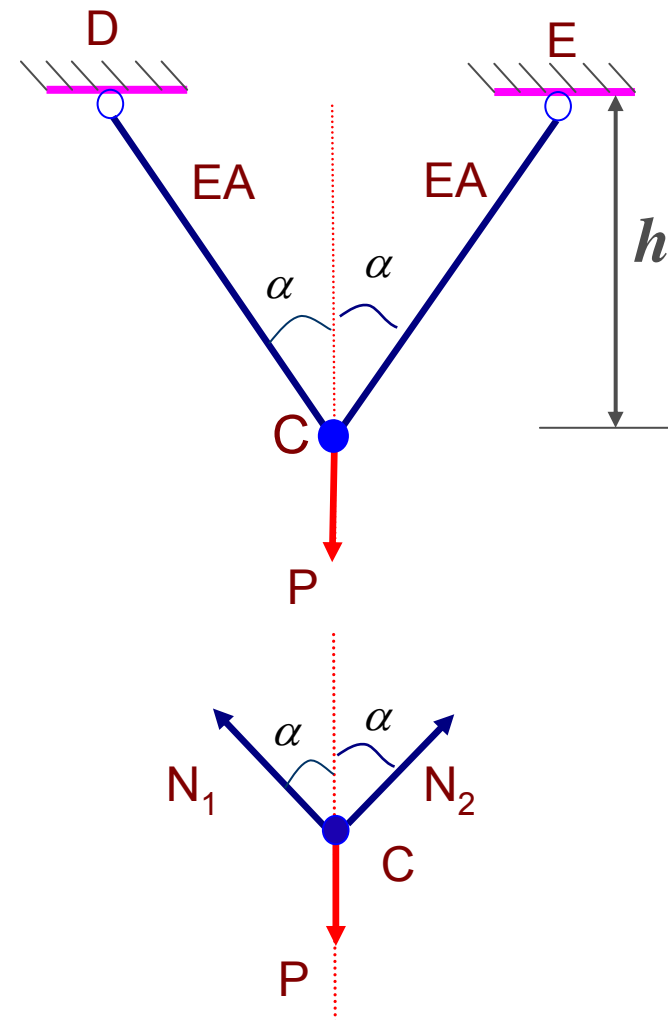
Tách nút C: Lực dọc N_1, N_2

Phương trình cân bằng:

$$\begin{aligned}\sum X = 0 &\Leftrightarrow -N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0 \\ \Rightarrow N_1 &= N_2 \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum Y = 0 &\Leftrightarrow N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha - P = 0 \\ \Rightarrow 2N_1 \cos \alpha &= P \quad (2)\end{aligned}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow N_1 = N_2 = \frac{P}{2 \cos \alpha}$$



Ví dụ 2.3 (2)



2. Xác định chuyển vị tại C:

Do hệ đối xứng, C di chuyển theo phương thẳng đứng xuống C'.

Khi đó ta có:

$$y_C = \frac{\Delta L_1}{\cos \alpha}$$

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{EA}$$

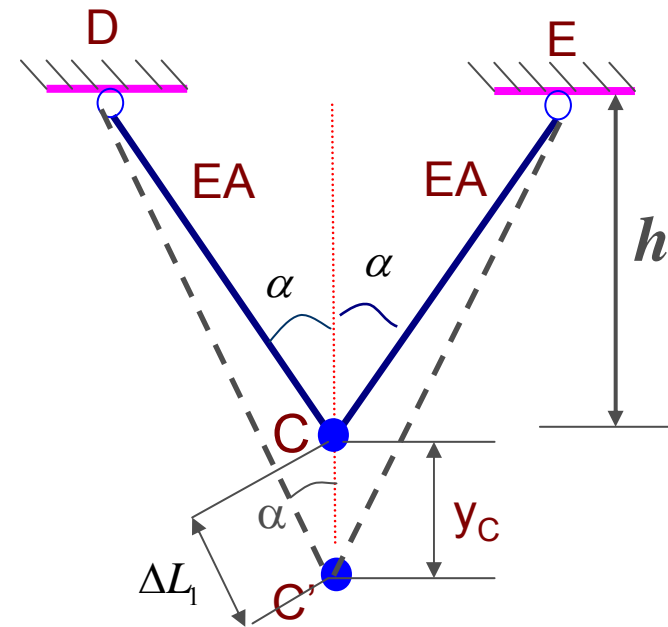
Mà

$$N_1 = \frac{P}{2 \cos \alpha}$$

$$L_1 = \frac{h}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \Delta L_1 = \frac{Ph}{2EA \cos^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow y_C = \frac{Ph}{2EA \cos^3 \alpha}$$



Ví dụ 2.4 (1)



Bài 2.4: Cho hệ thanh chịu lực như hình vẽ.

Xác định lực dọc trong các thanh. Tìm chuyển vị

điểm C. Biết $A=5\text{cm}^2$, $E=2.10^4\text{kN/cm}^2$,

$P=50\text{kN}$, $H=4\text{m}$

Giải:

1. Xác định lực dọc:

Tách nút C ta được N_1 , N_2 , N_3

Phương trình cân bằng:

$$\sum X = 0 \Leftrightarrow -N_1 \sin 30^\circ + N_3 \sin 30^\circ = 0$$

$$\Rightarrow N_1 = N_3 \quad (1)$$

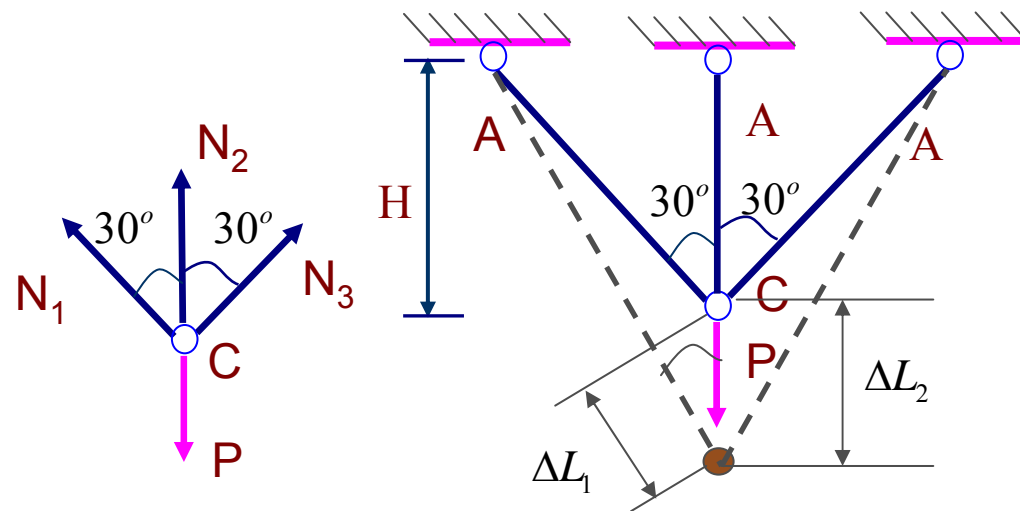
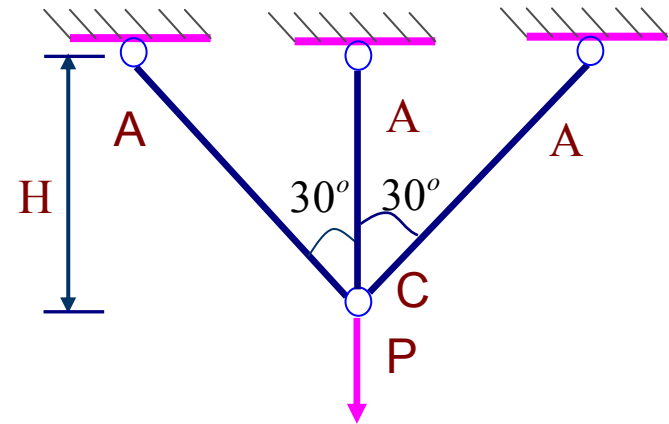
$$\sum Y = 0 \Leftrightarrow (N_1 + N_3) \cdot \cos 30^\circ + N_2 - P = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}N_1 + N_2 = P \quad (2)$$

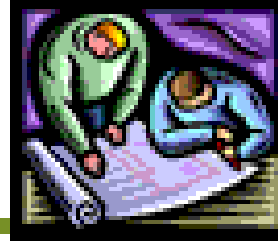
Điều kiện biến dạng

$$\Delta L_1 = \Delta L_3 = \Delta L_2 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta L_2$$

$$\frac{2N_1 H}{\sqrt{3}EA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{N_2 \cdot H}{EA} \Rightarrow N_1 = \frac{3}{4} N_2 \quad (3)$$



Ví dụ 2.4 (2)



Từ (1)(2)(3) ta giải ra được lực dọc trong các thanh là

$$N_1 = N_3 = 0,3263P = 16,315(kN)$$

$$N_2 = 0,435P = 21,75(kN)$$

Chuyển vị điểm C là:

$$y_C = CC' = \Delta L_2 = \frac{N_2 \cdot H}{EA} = \frac{21,75 \cdot 400}{2 \cdot 10^4 \cdot 5} = 0,087(cm)$$

4. Câu hỏi ???





Thank you for your attention



SỨC BỀN VẬT LIỆU

Trần Minh Tú
Đại học xây dựng

Chương 3

TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT



7/18/2010

Chương 3. Trạng thái ứng suất

- 3.1. Khái niệm về trạng thái ứng suất tại một điểm
- 3.2. Trạng thái ứng suất phẳng
- 3.3. Vòng tròn Mohr ứng suất
- 3.4. Trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt
- 3.5. Trạng thái ứng suất khối
- 3.6. Quan hệ ứng suất – biến dạng.

Định luật Hooke

- 3.6. Điều kiện bền cho phân tử ở TTU'S phức tạp –
Các thuyết bền



3.1. Khái niệm về trạng thái ứng suất tại một điểm (1)

a. Khái niệm về trạng thái ứng suất tại một điểm

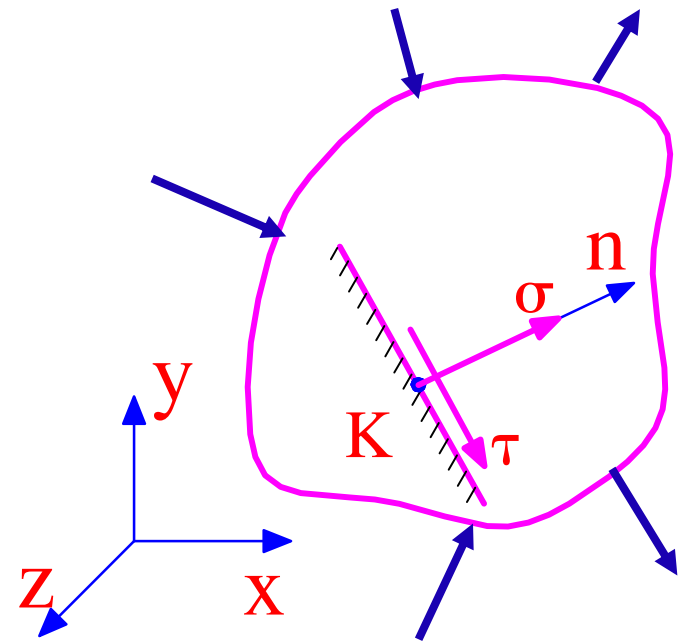
■ Ứng suất

- điểm $K(x,y,z)$
- mặt cắt (pháp tuyến n)

■ Mặt cắt bất kỳ đi qua K

- ứng suất pháp σ
- ứng suất tiếp τ

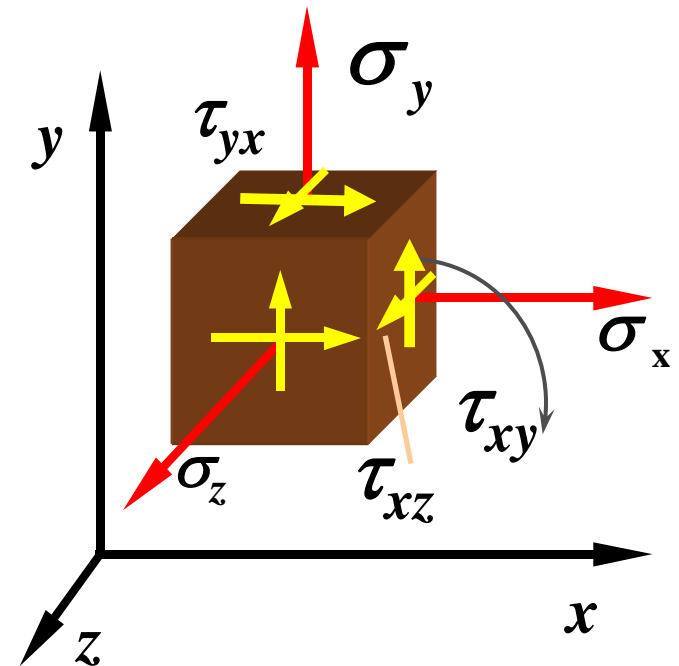
■ Qua K : vô số mặt cắt



Trạng thái ứng suất tại một điểm là tập hợp tất cả những thành phần ứng suất trên tất cả các mặt đi qua điểm đó

3.1. Khái niệm về trạng thái ứng suất tại một điểm (2)

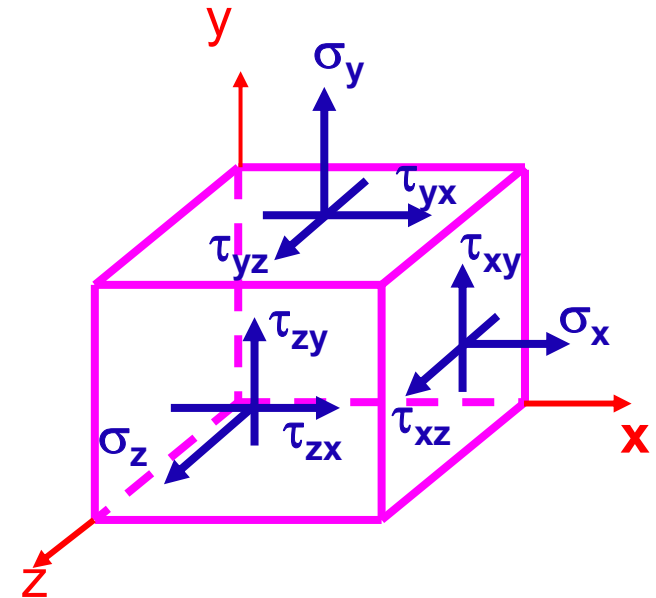
❖ Để nghiên cứu TTUS tại một điểm \Rightarrow tách ra phân tử lập phương vô cùng bé chứa điểm đó \Rightarrow gắn hệ trục $xyz \Rightarrow$ trên mỗi mặt vuông góc với trục có 3 thành phần ứng suất: 1 tp ứng suất pháp và 2 thành phần ứng suất tiếp



3.1. Khái niệm về trạng thái ứng suất tại một điểm (3)

❖ Chín thành phần ứng suất tác dụng trên 3 cặp mặt vuông góc với ba trục tạo thành ten-xơ ứng suất

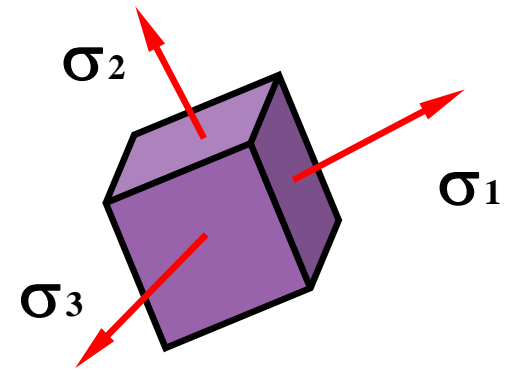
$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



3.1. Khái niệm về trạng thái ứng suất tại một điểm (4)

b. Mặt chính – ứng suất chính – phương chính

- **Mặt chính:** Là mặt không có tác dụng của ứng suất tiếp.
- **Phương chính:** là phương pháp tuyến của mặt chính.
- **Ứng suất chính:** là ứng suất pháp tác dụng trên mặt chính.
- **Phân tử chính:** ứng suất tiếp trên các mặt bằng 0



3.1. Khái niệm về trạng thái ứng suất tại một điểm (5)

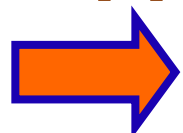
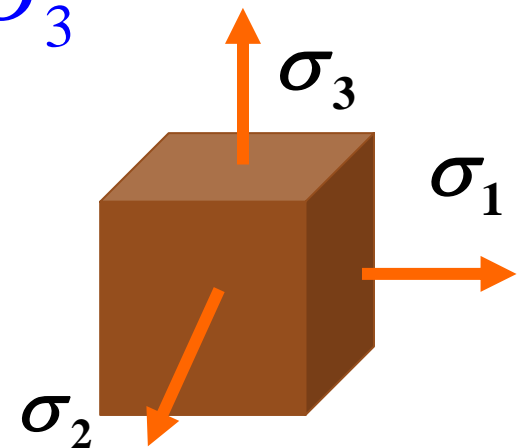
d) Qui ước gọi tên các ứng suất chính:

❖ Tại 1 điểm luôn tồn tại ba mặt chính vuông góc với nhau với ba ứng suất chính tương ứng ký hiệu là $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

❖ Theo qui ước: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

e) Phân loại TTU'S

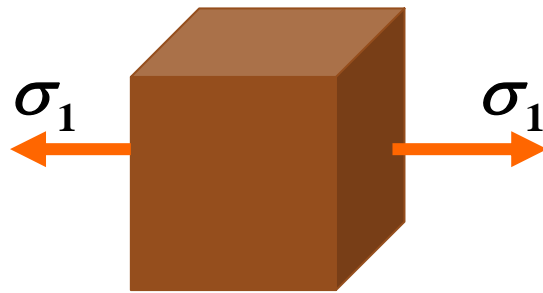
- TTU'S đơn
- TTU'S phẳng
- TTU'S khối



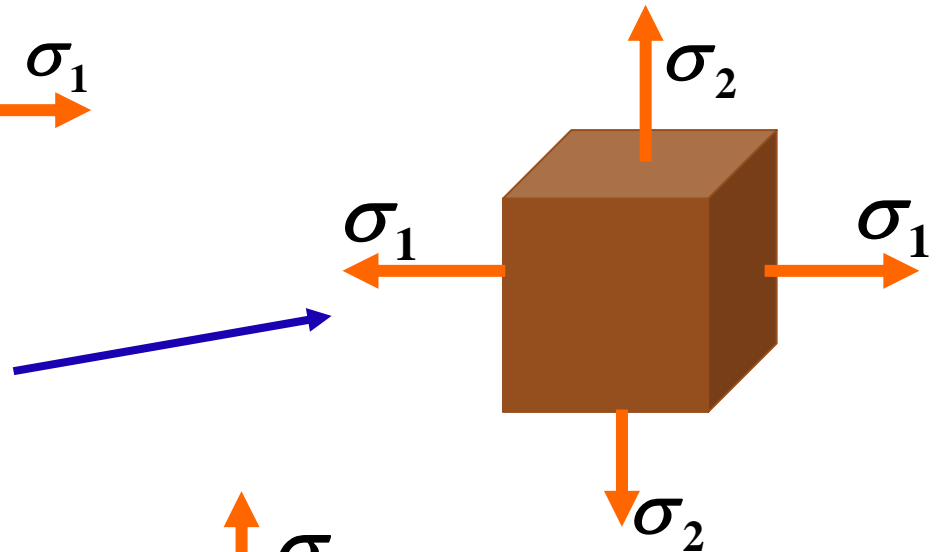
Nghiên cứu trạng thái ứng suất phẳng

3.1. Khái niệm về trạng thái ứng suất tại một điểm (6)

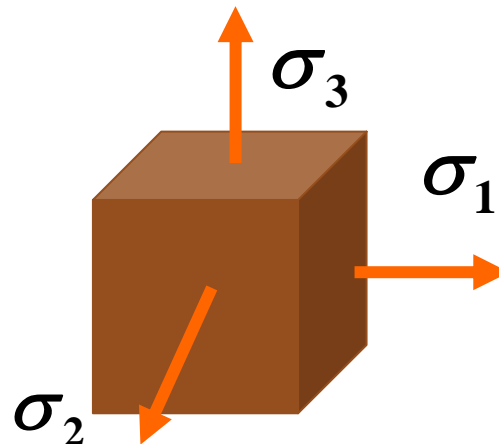
❖ TTU'S đơn: Hai trong ba ứng suất chính bằng không



❖ TTU'S phẳng: Một trong ba ứng suất chính bằng không

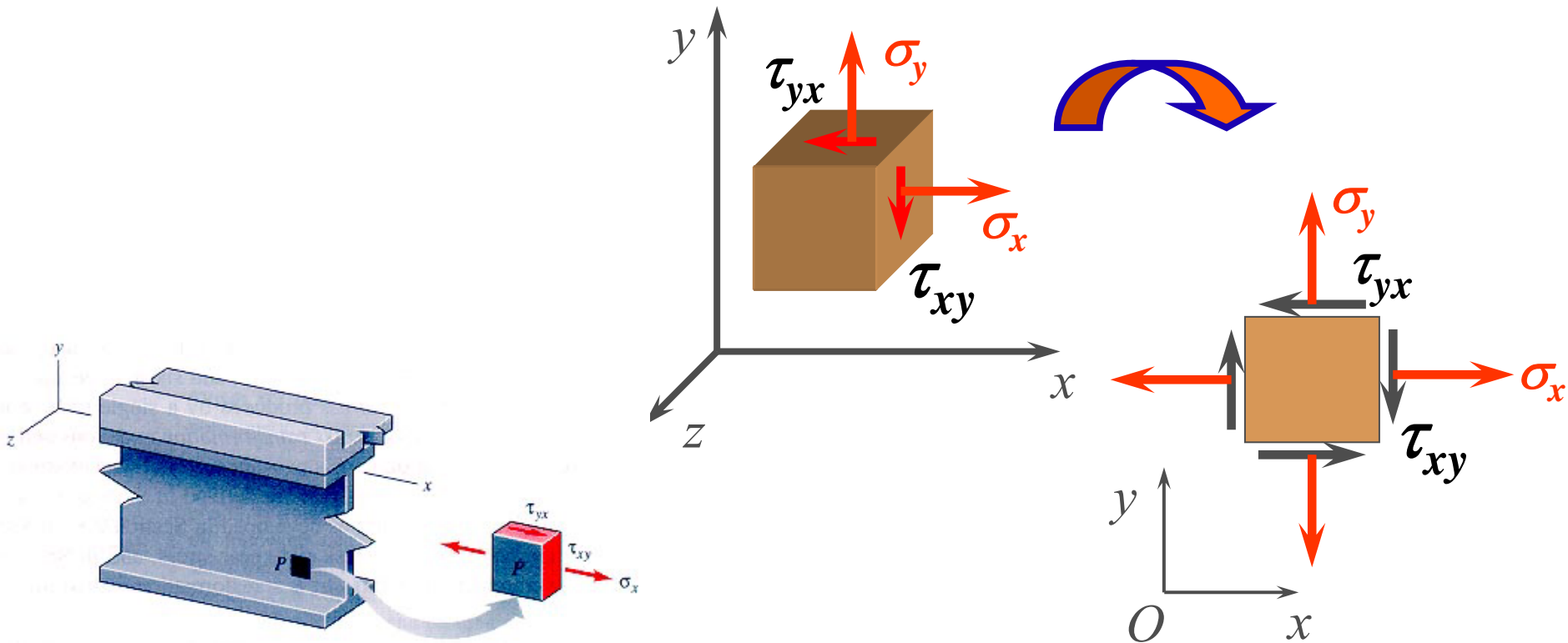


❖ TTU'S khối: Cả ba ứng suất chính khác không



3.2. TTU'S phẳng (1)

- ❖ Mặt vuông góc với trục z là mặt chính có ứng suất chính = 0 \Rightarrow Chỉ tồn tại các thành phần ứng suất trong mặt phẳng xOy



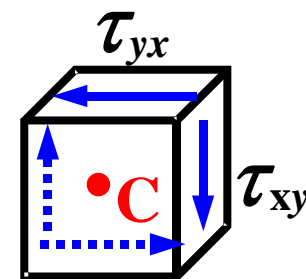
3.2. TTƯ'S phẳng (2)

❖ Quy ước dấu

- Ứng suất pháp dương khi có chiều đi ra khỏi phân tử
- Ứng suất tiếp có chiều dương khi đi vòng quanh phân tử theo chiều kim đồng hồ

a) Định luật đối ứng của ứng suất tiếp

$$\sum M_z = 0 \quad \longrightarrow \quad |\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$$



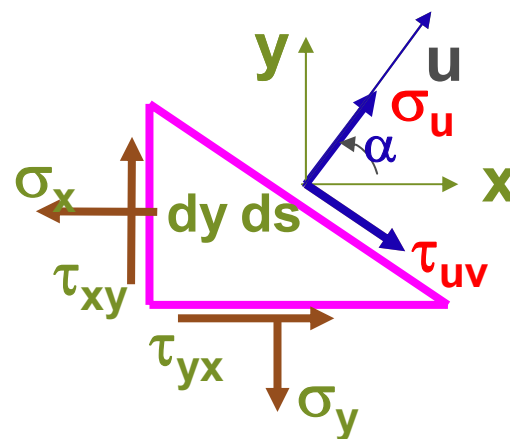
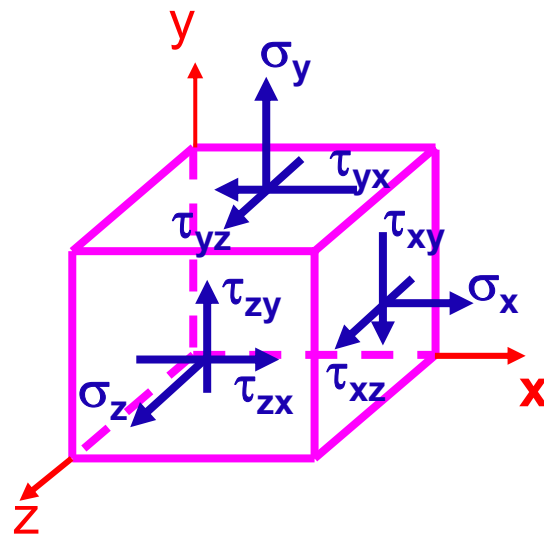
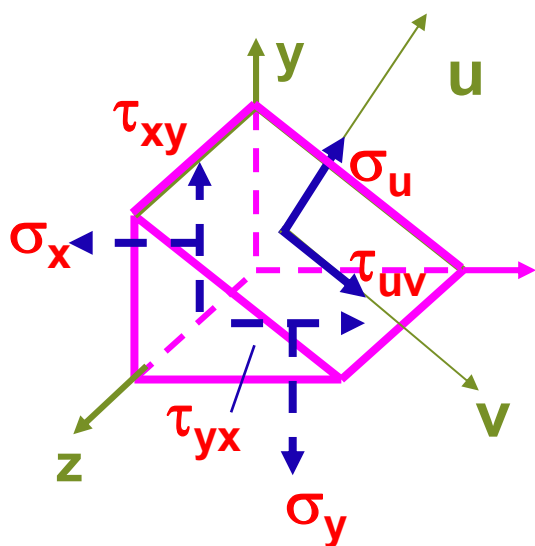
Ứng suất tiếp trên hai mặt bất kỳ vuông góc với nhau có trị số bằng nhau, có chiều cùng đi vào cạnh chung hoặc cùng đi ra khỏi cạnh chung.

TTƯ'S phẳng xác định bởi: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$

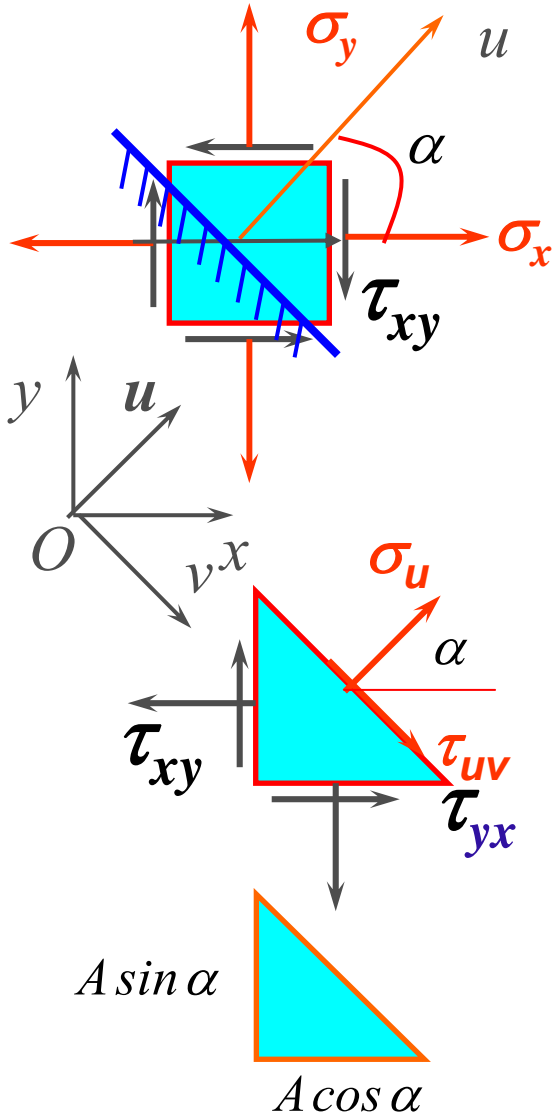
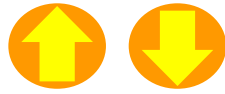
3.2. TTƯ'S phẳng (3)

b) Ứng suất trên mặt nghiêng ($//z$)

Mặt nghiêng có pháp tuyến u hợp với phương ngang x góc α ($\alpha > 0$: từ x quay đến u theo chiều ngược chiều kim đồng hồ)



3.2. TTU'S phẳng (*)



Qui ước dấu :

- ① $\alpha > 0$ - chiều ngược kim đồng hồ ;
- ② $\sigma_u > 0$ - hướng ra
- ③ τ_{uv} - thuận chiều kim đồng hồ

$$\sum F_u = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma_u A - \sigma_x A \cos^2 \alpha + \tau_{xy} A \cos \alpha \sin \alpha$$

$$- \sigma_y A \sin^2 \alpha + \tau_{yx} A \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

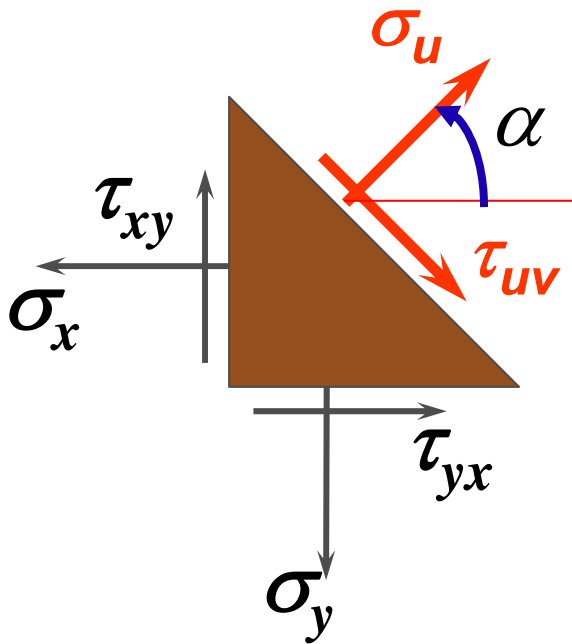
$$\sum F_v = 0 \Rightarrow$$

$$\tau_{uv} A - \tau_{xy} A \cos^2 \alpha - \sigma_x A \cos \alpha \sin \alpha$$

$$+ \tau_{yx} A \sin^2 \alpha + \sigma_y A \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

3.2. TTU'S phẳng (4)

TTU'S phẳng



$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

3.2. TTU'S phẳng (5)

c) Ứng suất pháp cực trị là các ứng suất chính

- Ứng suất pháp cực trị khi:

$$\frac{d\sigma_u}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1)$$

- Các ứng suất chính (phương chính) xác định từ đk:

$$\tau_{uv} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2)$$

Từ (1) và (2): $\alpha \equiv \alpha_0$ (d.p.c.m)

3.2. TTƯ'S phẳng (6)

- Ứng suất pháp cực trị là các ứng suất chính

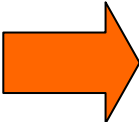
$$\sigma_{max, min} = \sigma_{1,2(3)} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

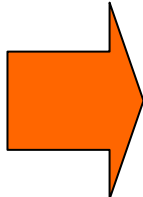
- Hai phương chính vuông góc với nhau

$$tg 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Hoặc:

$$tg \alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{max}}$$
$$tg \alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_{min}}$$


$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$


$$\alpha_{01,02} = \begin{cases} \alpha_0 \\ \alpha_0 + 90^\circ \end{cases}$$

3.2. TTU'S phẳng (7)

d) Ứng suất tiếp cực trị: mặt có ứng suất tiếp cực trị hợp với mặt chính góc 45^0

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}2\beta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \Rightarrow \beta = \alpha_0 + 45^0$$

$$\tau_{max,min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

e) Bất biến của TTU'S phẳng: tổng các ứng suất pháp trên hai mặt bất kỳ vuông góc với nhau tại một điểm có giá trị không đổi

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_u + \sigma_v = \text{const}$$

3.3. Vòng tròn Mohr ứng suất (1)

- ❖ Biết TTƯ'S tại một điểm \Rightarrow các thành phần ứng suất trên mặt nghiêng, ứng suất chính, phương chính theo công thức ...: **PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH**
- ❖ Bằng đồ thị \Rightarrow vòng tròn Mohr ứng suất

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha\right)^2$$

$$(\tau_{uv})^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha\right)^2$$

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Pt đường tròn}$$

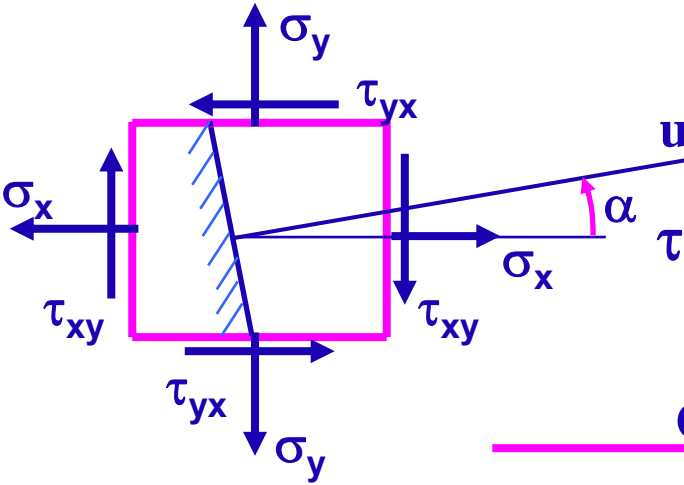
Tâm $I\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0\right)$

bán kính

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

3.3. Vòng tròn Mohr ứng suất (2) – Cách dựng vòng tròn Mohr

TTƯ'S phẳng

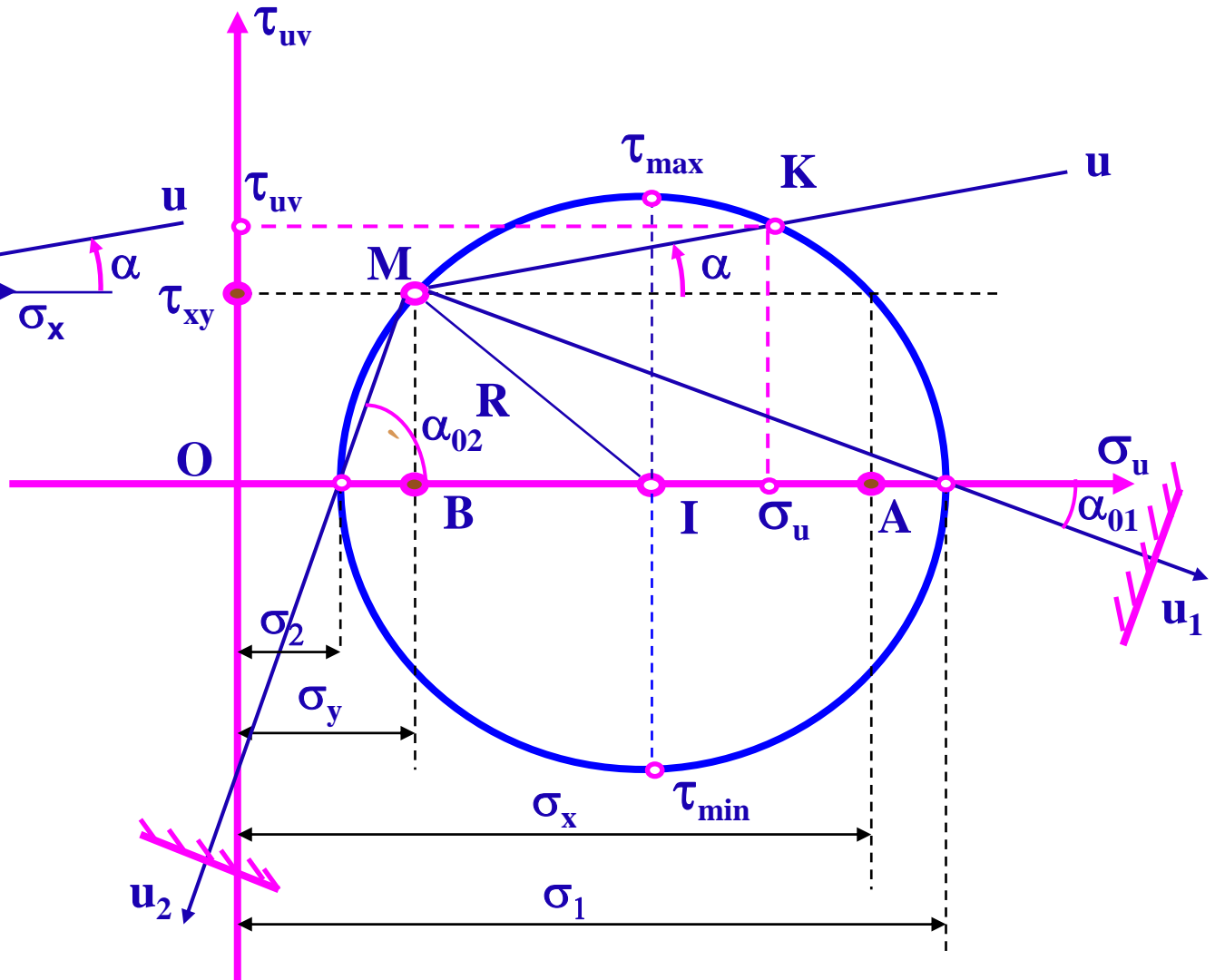


$$I \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Điểm cực

$$M \left(\sigma_y, \tau_{xy} \right)$$

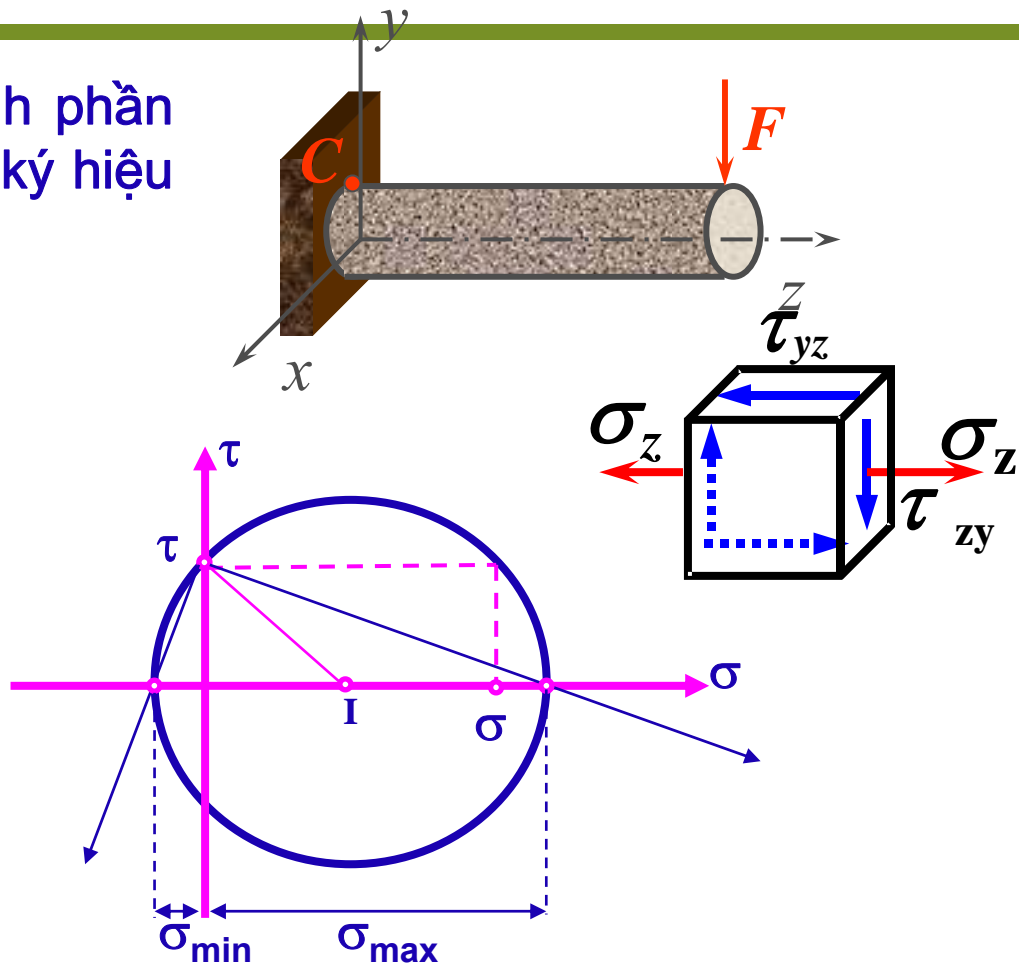
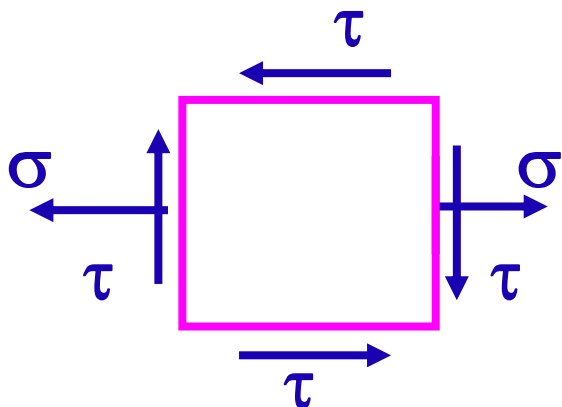


3.4. TTƯ'S phẳng đặc biệt (1)

TTƯ'S phẳng mà 1 trong 2 thành phần ứng suất pháp σ_x, σ_y bằng 0 \Rightarrow ký hiệu các thành phần ứng suất: σ và τ

Thanh chịu uốn ngang phẳng

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y, \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b_c}$$

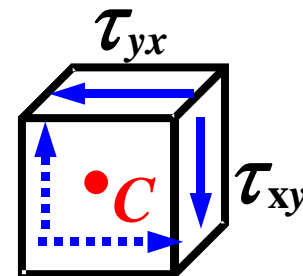
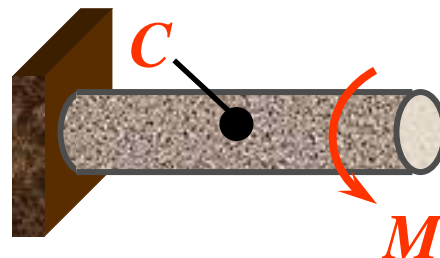


$$\sigma_{\max, \min} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

3.4. TTU'S phẳng đặc biệt (2)

- TTU'S trượt thuần túy: trên các mặt của phân tử chỉ có ứng suất tiếp

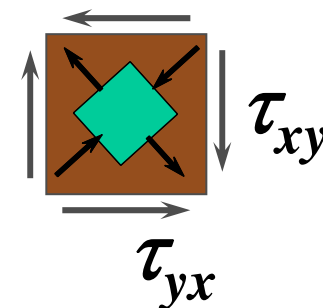
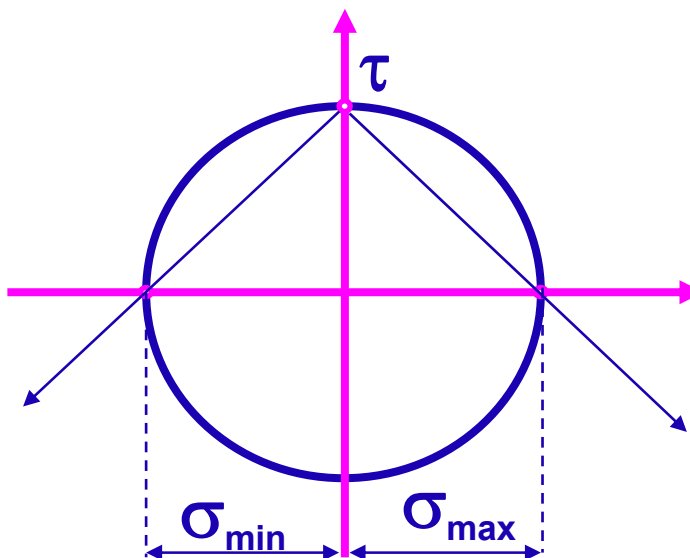


Thanh chịu xoắn

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau = \frac{M_z}{W_P}$$

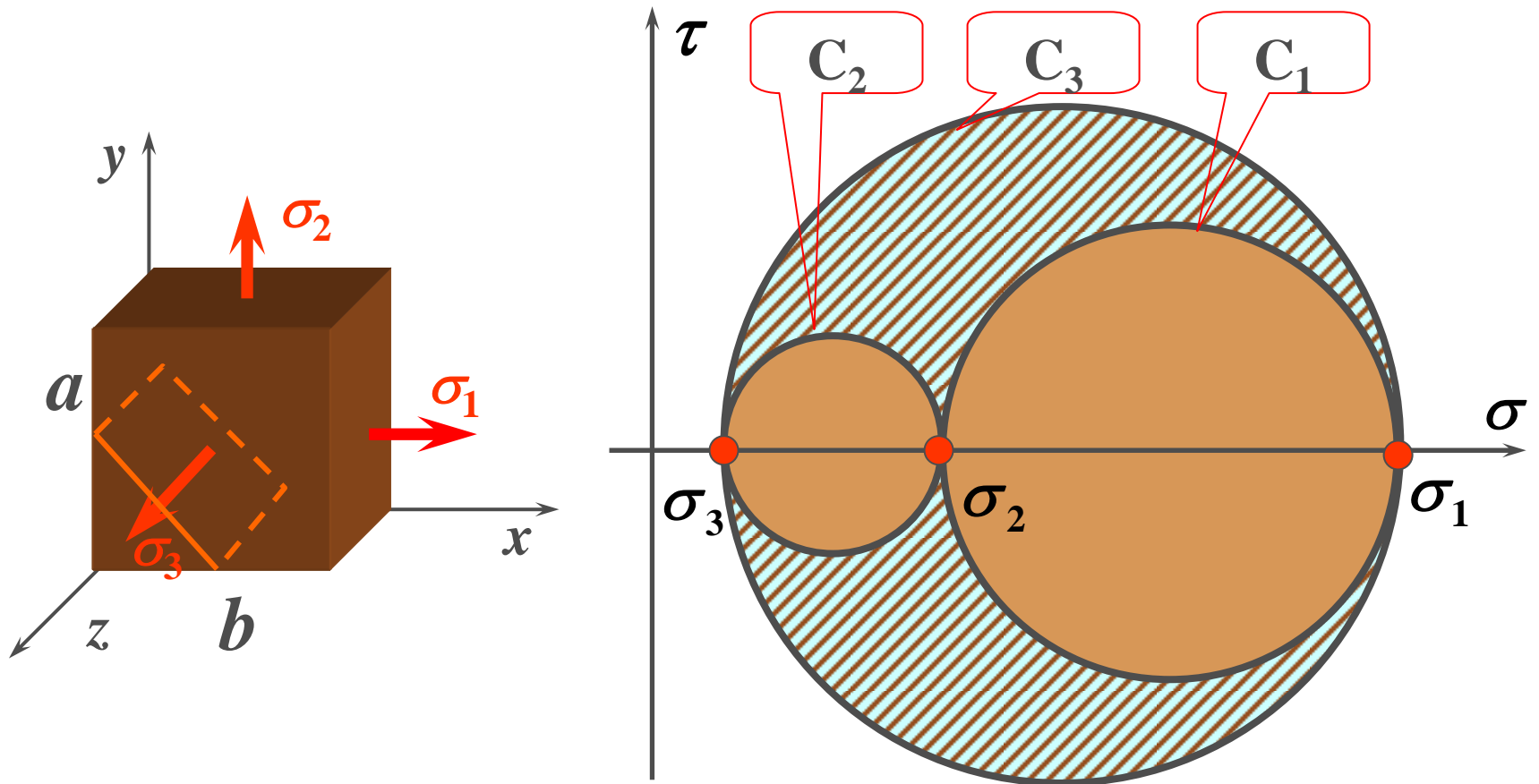
➔ $\begin{cases} \sigma_{max} \\ \sigma_{min} \end{cases} = \pm \tau$



3.5. TTU'S khối (1)

- ❖ TTU'S khối có cả 3 thành phần ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \neq 0$
- ❖ Ứng với mỗi cặp ứng suất $(\sigma_1, \sigma_2), (\sigma_1, \sigma_3), (\sigma_2, \sigma_3)$ ta vẽ được 3 vòng tròn có tâm C_1, C_2, C_3 .
- ❖ LTDH đã chứng minh:
 - ứng suất trong mặt cắt nghiêng bất kỳ (không // với mặt chính nào) tương ứng với 1 điểm nằm trong vùng gạch chéo
 - Các điểm nằm trên chu vi đường tròn $C_1(\sigma_1, \sigma_2)$, tương ứng với các thành phần ứng suất trên trên mặt // với phương chính còn lại σ_3

3.5. TTƯ'S khối (2)



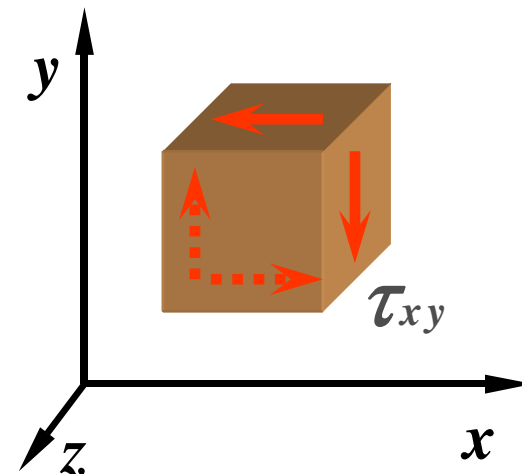
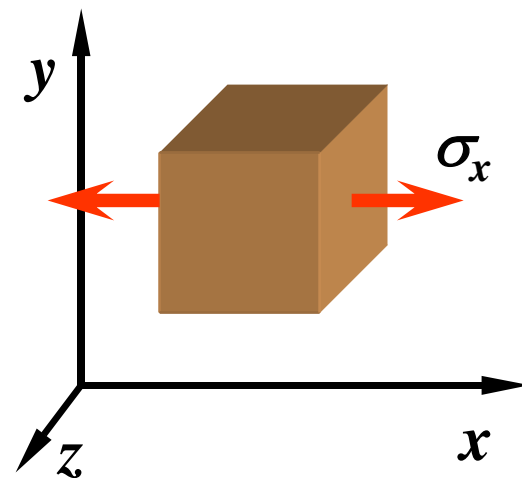
3.6. Quan hệ ứng suất – biến dạng (1)

1. Trạng thái ứng suất đơn

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = -\frac{\mu}{E} \sigma_x \quad \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} \sigma_x$$

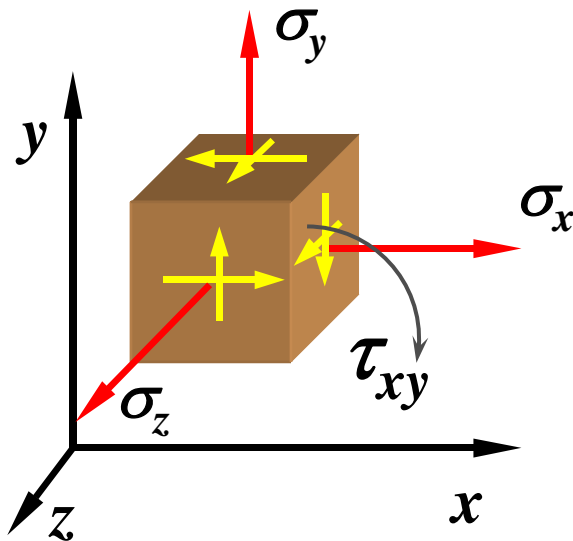
2. Trạng thái ứng suất trượt thuần túy

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zx} \approx 0$$



3.6. Quan hệ ứng suất – biến dạng (2)

3. Trạng thái ứng suất tổng quát



- Gt: biến dạng dài chỉ sinh ra ứng suất pháp, biến dạng góc làm phát sinh ứng suất tiếp

- Theo nguyên lý cộng tác dụng

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E} \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]\end{aligned}$$

3.6. Quan hệ ứng suất – biến dạng (3)

a. Quan hệ ứng suất pháp – biến dạng dài

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)] \end{array} \right.$$

b. Quan hệ ứng suất tiếp – biến dạng góc

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

với E , μ , G là mô đun đàn hồi kéo (nén), hệ số Poisson, mô đun đàn hồi trượt, liên hệ với nhau bởi công thức:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

3.6. Quan hệ ứng suất – biến dạng (3)

❖ Trạng thái ứng suất phẳng:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu\sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu\sigma_x]$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu\sigma_2]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu\sigma_1]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

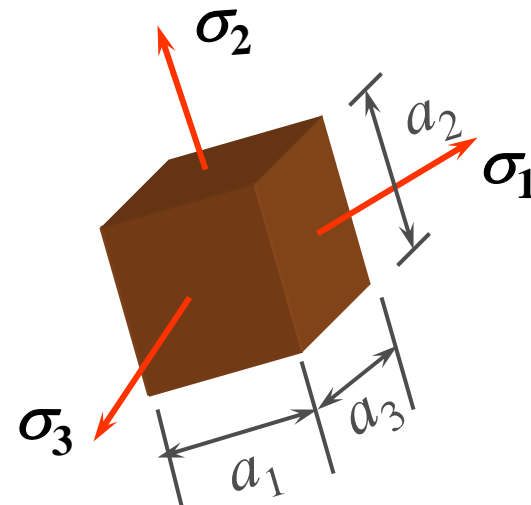
3.6. Quan hệ ứng suất – biến dạng (4)

c. Quan hệ ứng suất pháp – biến dạng thể tích

$$V = a_1 a_2 a_3$$

$$V_1 = a_1(1 + \varepsilon_1) a_2(1 + \varepsilon_2) a_3(1 + \varepsilon_3)$$

$$\theta = \frac{V_1 - V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

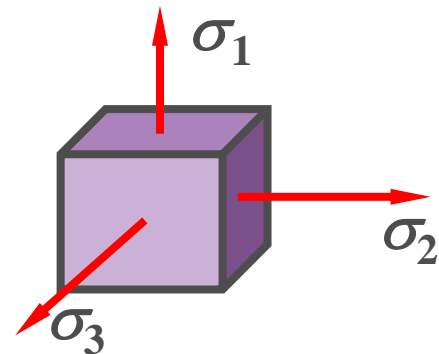


$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

3.6. Quan hệ ứng suất – biến dạng (5)

3. Thế năng biến dạng đàn hồi

$$u = u_{\sigma} + u_{\tau} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon + \frac{1}{2} \tau \gamma$$

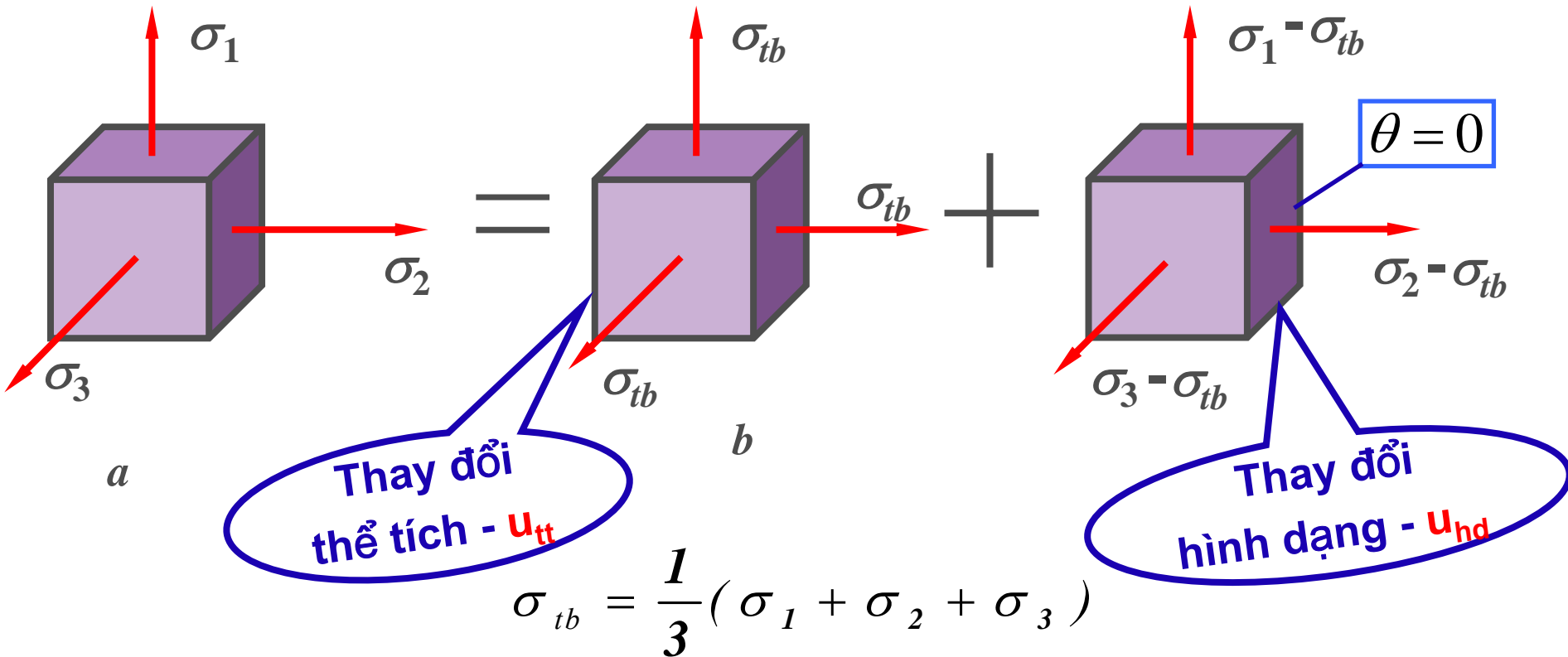


Xét phân tử chính: $\tau=0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3 \\ &= \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3) \right] \end{aligned}$$

3.6. Quan hệ ứng suất – biến dạng (6)

Biến dạng => thay đổi \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{Hình dạng} \\ \text{Thể tích} \end{array} \right.$



3.6. Quan hệ ứng suất – biến dạng (7)

TNBDĐH riêng $u \Rightarrow \begin{cases} \text{TNBD hình dạng } u_{hd} \\ \text{TNBD thể tích } u_{tt} \end{cases}$

$$u = u_{hd} + u_{tt}$$

$$u_{tt} = \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$u_{hd} = \frac{1 + \mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

3.7. Các thuyết bền (1)

A. Khái niệm về các thuyết bền

- TTUS đơn (kéo – nén đúng tâm):
điều kiện bền:

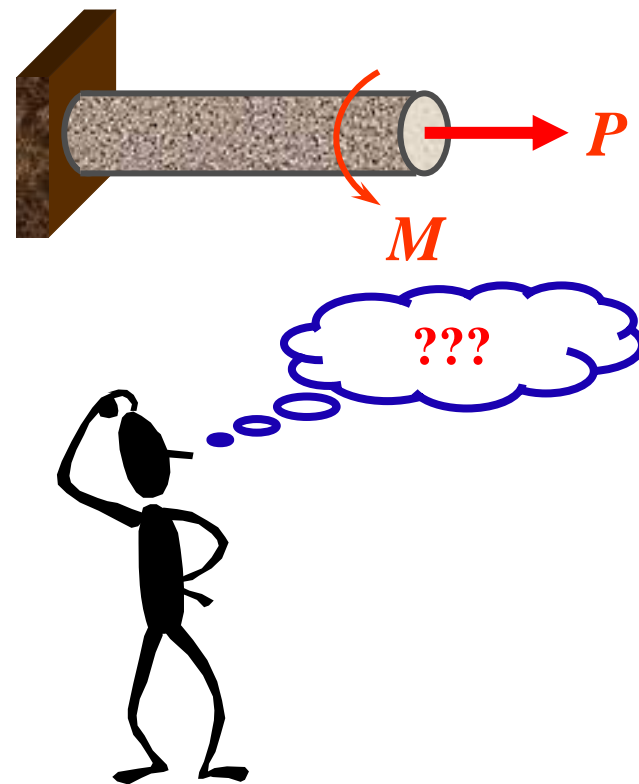
$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k = \frac{\sigma_0^k}{n} \quad |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n = \frac{\sigma_0^n}{n}$$

- TTUS trượt thuần túy:

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau_0}{n}$$

- Giá trị các ứng suất cho phép xác định theo ứng suất nguy hiểm => từ thực nghiệm

TTUS phức tạp: cần phải thực nghiệm để xác định những ứng suất nguy hiểm cho TTUS tương ứng => không thực hiện được



3.7. Các thuyết bền (2)

❖ Lý do:

- Số lượng thí nghiệm lớn (để đáp ứng được các tỉ lệ giữa các ứng suất chính có thể xảy ra trong thực tế)
- Kỹ thuật thí nghiệm chưa thực hiện được
- **Không tiến hành thực nghiệm được => Không biết nguyên nhân gây ra sự phá hoại vật liệu => Giả thiết**
- **Thuyết bền: Các giả thiết về nguyên nhân gây ra sự phá hoại vật liệu**
- **Các nguyên nhân có thể: ứng suất, biến dạng, thế năng biến dạng đàn hồi,...**

3.7. Các thuyết bền (3)

B. Các thuyết bền

a. Thuyết bền 1 - Thuyết bền ứng suất pháp lớn nhất

- Nguyên nhân vật liệu bị phá hoại là do ứng suất pháp lớn nhất của phân tử ở TTUS phức tạp đạt tới ứng suất pháp nguy hiểm của phân tử ở TTUS đơn

- Điều kiện bền

$$\sigma_{t1} = \sigma_1 \leq [\sigma]_k \quad \sigma_{t1} = |\sigma_3| \leq [\sigma]_n$$

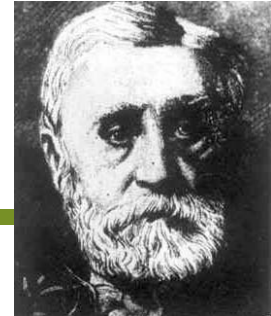
- **Hạn chế:** Chỉ phù hợp với vật liệu dòn, và TTUS đơn

3.7. Các thuyết bền (4)

b. Thuyết bền 2 - Thuyết bền biến dạng dài tương đối lớn nhất (*Mariotte*)

- Nguyên nhân vật liệu bị phá hoại là do biến dạng dài tương đối lớn nhất của phân tử ở TTU'S phức tạp đạt tới biến dạng dài tương đối ở trạng thái nguy hiểm của phân tử ở TTU'S đơn
- Điều kiện bền:
$$\sigma_{t2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_k$$
$$\sigma_{t2} = \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) \leq [\sigma]_n$$
- Chỉ phù hợp với vật liệu dòn

3.7. Các thuyết bền (5)



c. Thuyết bền 3 - Thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (*Tresca-Saint Venant*)

- Nguyên nhân vật liệu bị phá hoại là do ứng suất tiếp lớn nhất của phân tử ở TTUS phức tạp đạt tới ứng suất tiếp nguy hiểm của phân tử ở TTUS đơn
- Điều kiện bền:
$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$
- Phù hợp với vật liệu dẻo. Thường sử dụng trong ngành cơ khí

3.7. Các thuyết bền (6)



d. Thuyết bền 4 - Thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng cực đại (*Huber – Von Mises*)

- Nguyên nhân vật liệu bị phá hoại là do thế năng biến đổi hình dáng của phân tử ở TTU'S phức tạp đạt tới thế năng biến đổi hình dáng ở trạng thái nguy hiểm nguy hiểm của phân tử ở TTU'S đơn

- Điều kiện bền:

$$\sigma_{t4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq [\sigma]_k$$

- Phù hợp với vật liệu dẻo. Sử dụng trong ngành kỹ thuật xây dựng và cơ khí chế tạo.

3.7. Các thuyết bền (7)

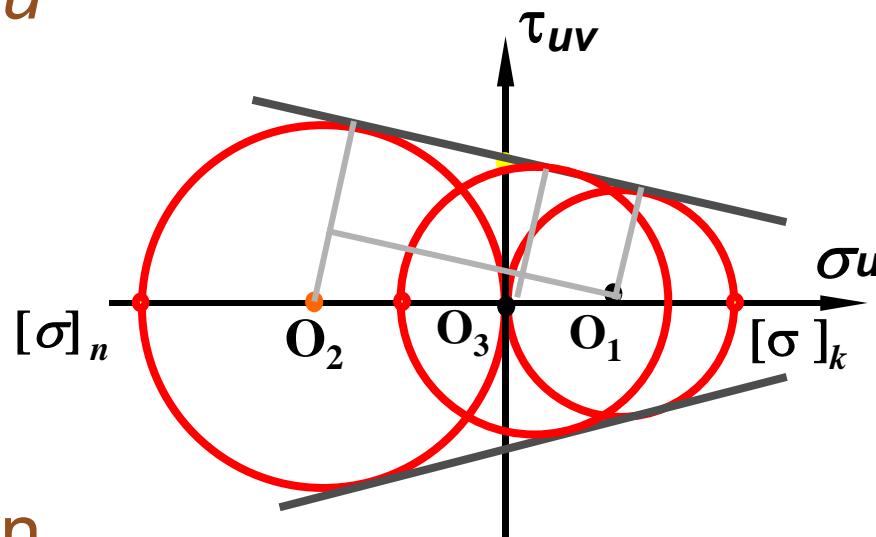


阿托·莫尔(O.Mohr),1835~1918

e. Thuyết bền 5 - Thuyết bền Mohr

- Dựa vào kết quả thí nghiệm \Rightarrow Vẽ vòng tròn ứng suất giới hạn \Rightarrow Vẽ đường bao \Rightarrow Xác định miền an toàn của vật liệu
- Điều kiện bền:

$$\sigma_{t5} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \sigma_3 \leq [\sigma]_k$$



- Chỉ phù hợp vật liệu giòn

4. Câu hỏi???



The End

Thank you for your attention

tpnt2002@yahoo.com



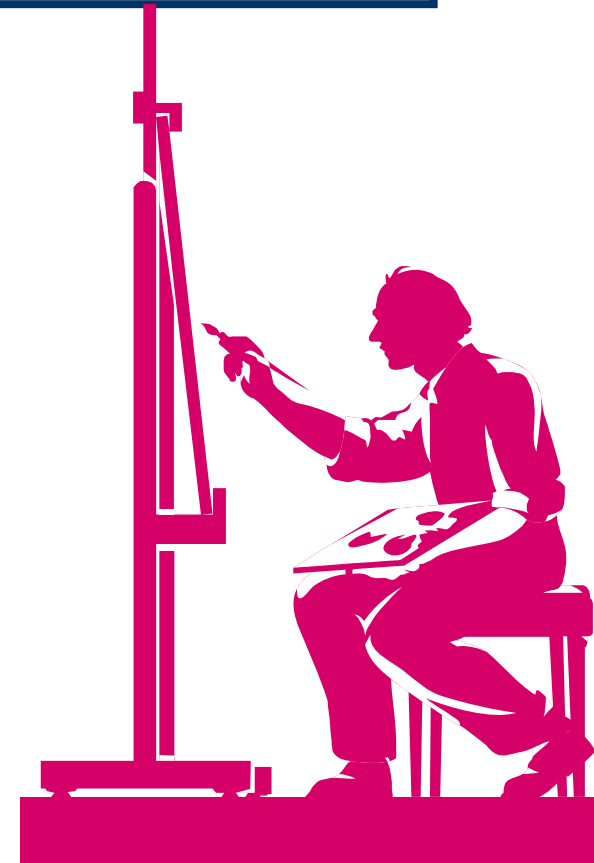
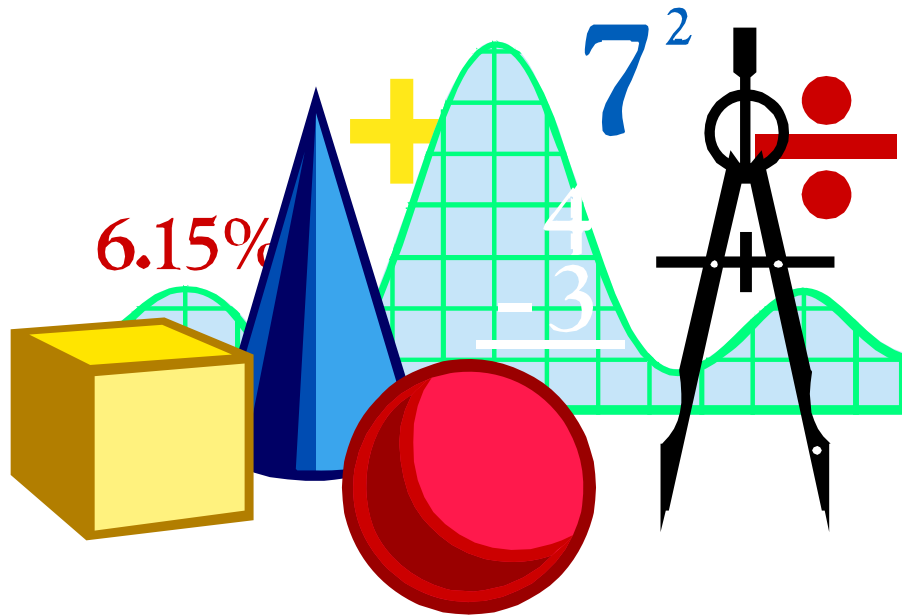
SỨC BỀN VẬT LIỆU

Trần Minh Tú
Đại học xây dựng

Chương 4



ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC MẶT CẮT NGANG



Chương 4. Đặc trưng hình học của mặt cắt ngang

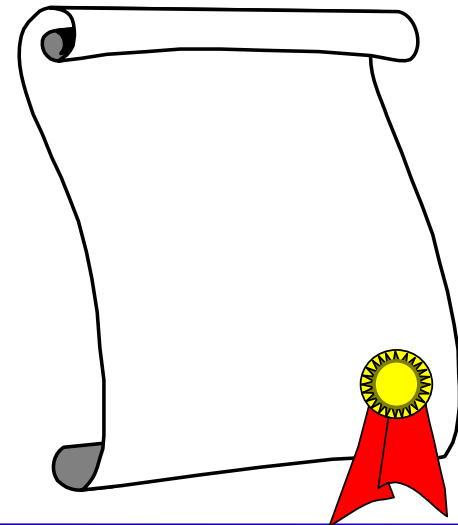
4.1. Khái niệm chung

4.2. Mômen tĩnh và các mô men quán tính

4.3. Mô men quán tính một số hình đơn giản

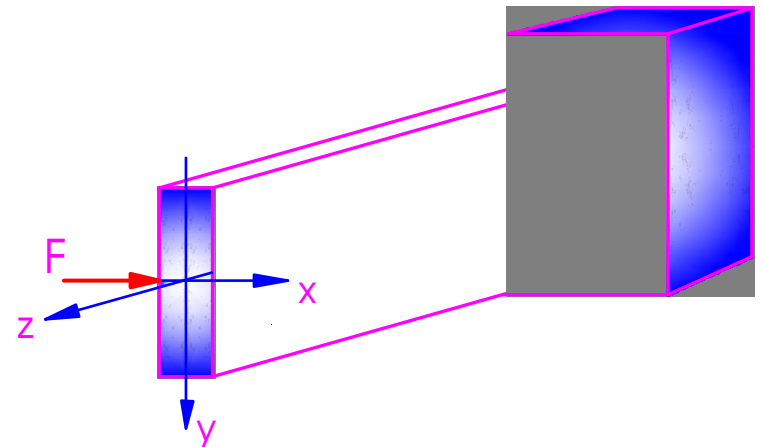
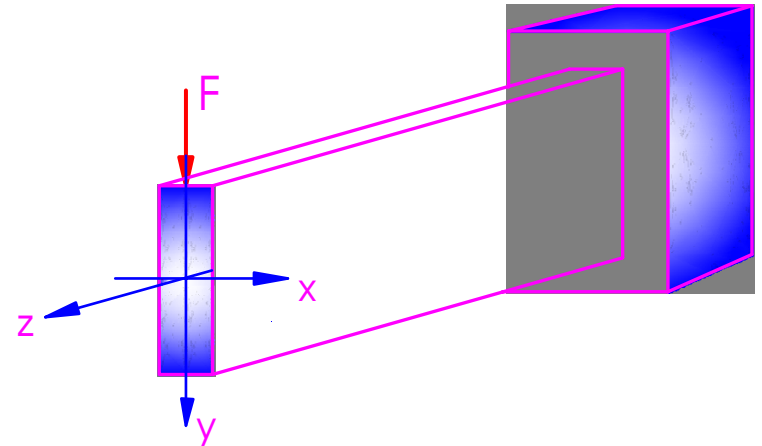
4.4. Công thức chuyển trục song song

4.5. Ví dụ



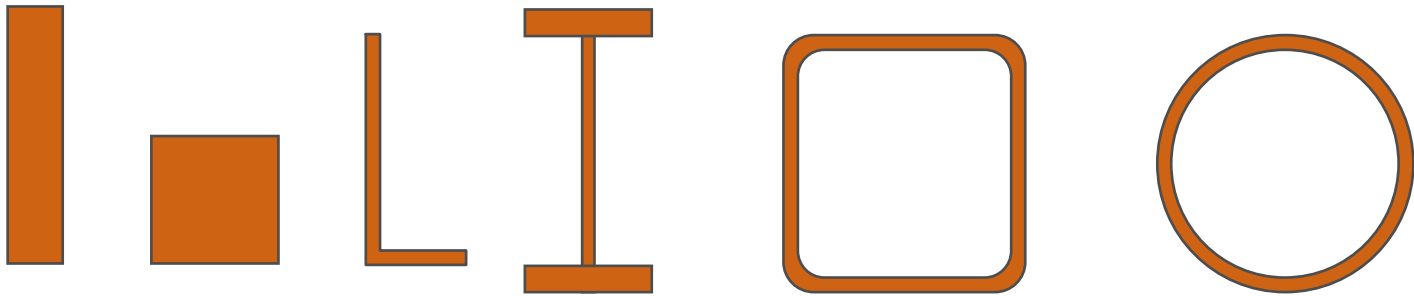
4.1. Khái niệm chung

- Kéo – nén đúng tâm:
ứng suất, biến dạng phụ thuộc vào diện tích mặt cắt ngang
- Thanh tiết diện chữ nhật
khả năng chịu lực theo hai phương x , y khác nhau
- Khả năng chịu lực của thanh phụ thuộc vào diện tích, hình dáng, cách sắp xếp, ... của mặt cắt ngang
- Các đại lượng phụ thuộc vào hình dạng, kích thước của mặt cắt ngang
- đặc trưng hình học của mặt cắt ngang



4.1. Khái niệm chung

Hình dạng các mặt cắt ngang



Kích thước, hình dạng?

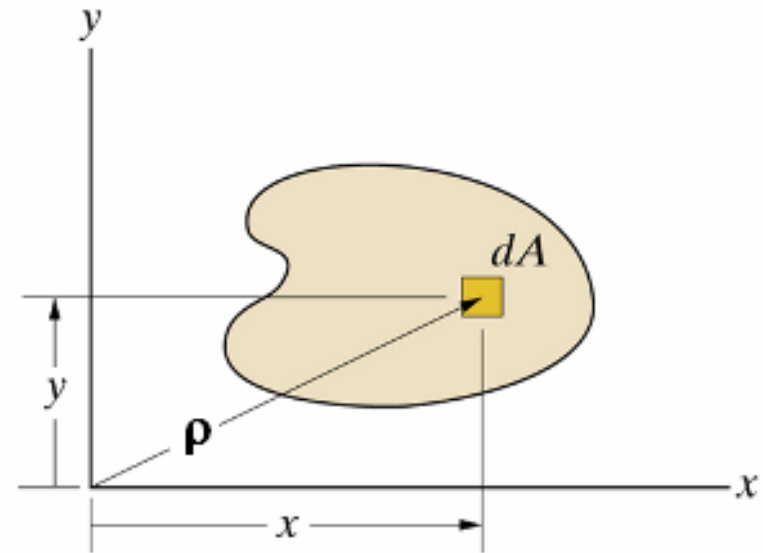
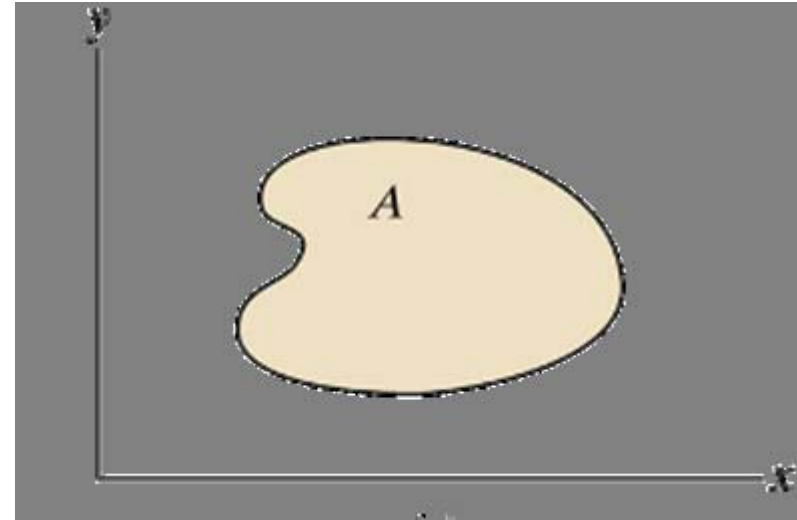
4.2. Mômen tĩnh và các mô men quán tính

- Hình phẳng, diện tích A trong hệ trục Oxy . Phần tử diện tích $dA(x,y)$

1. Mô men tĩnh của diện tích A đối với trục Ox , Oy :

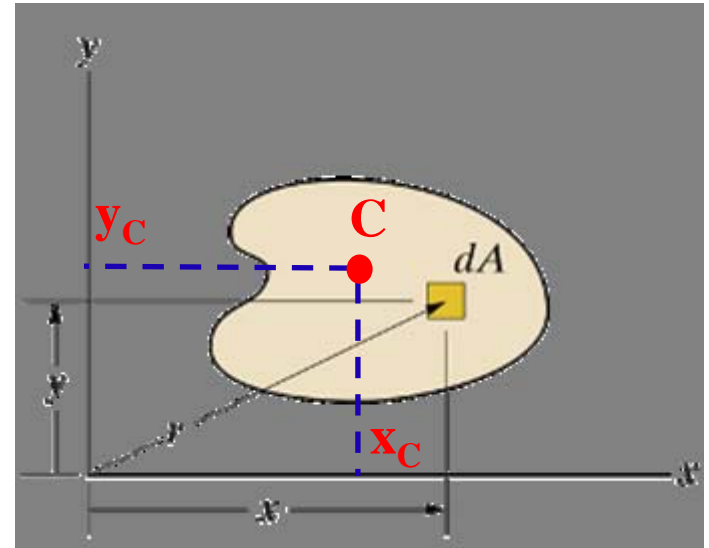
$$S_x = \int_{(A)} ydA \quad S_y = \int_{(A)} xdA$$

- Thứ nguyên của mô men tĩnh là [chiều dài³], giá trị của nó có thể là dương, bằng 0, hoặc âm.



4.2. Mômen tĩnh và các mô men quán tính

- ❖ **Trục trung tâm:** trục có mô men tĩnh của diện tích A đối với nó bằng 0.
- ❖ **Trọng tâm:** Giao điểm của hai trục trung tâm \Rightarrow mô men tĩnh của hình phẳng đối với trục đi qua trọng tâm bằng 0
- ❖ **Cách xác định trọng tâm C (x_C, y_C) của hình phẳng:**



$$x_C = \frac{S_y}{A} \quad y_C = \frac{S_x}{A}$$

4.2. Mômen tĩnh và các mô men quán tính

Bài toán xác định trọng tâm

Giả sử $C(x_C, y_C)$ là trọng tâm mặt cắt ngang

x_0, y_0 - hệ trục đi qua C

$dA(x,y)$ trong hệ tọa độ xy

$dA(x_0,y_0)$ trong hệ tọa độ x_0y_0

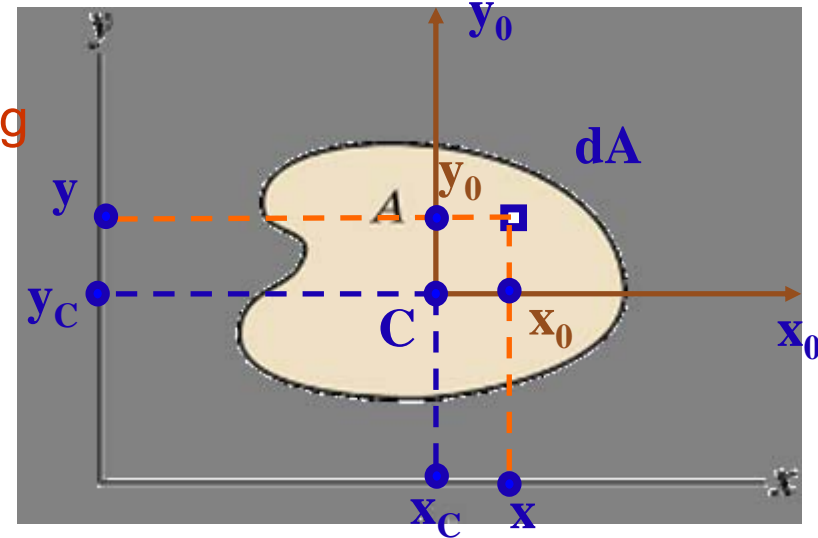
Ta có:

$$x = x_0 + x_C$$

$$y = y_0 + y_C$$

$$S_x = \int_A y dA = \int_A (y_0 + y_C) dA$$

$$\Rightarrow S_x = \int_A y_0 dA + \int_A y_C dA = y_C A$$



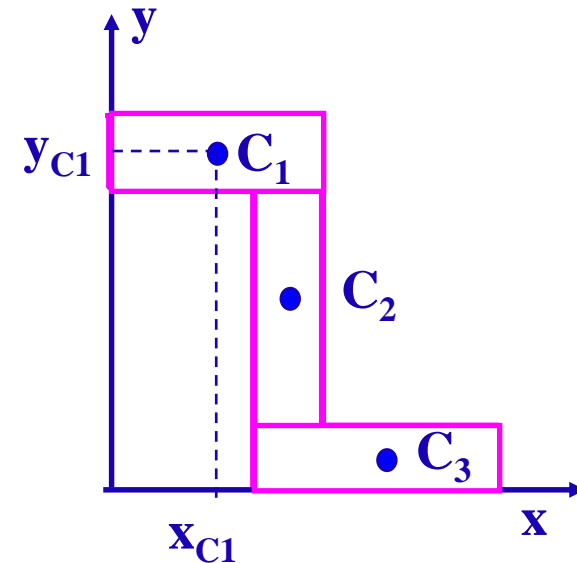
$$\Rightarrow y_C = \frac{S_x}{A}$$

$$x_C = \frac{S_y}{A} \quad y_C = \frac{S_x}{A}$$

4.2. Mômen tĩnh và các mô men quán tính

❖ Cách xác định trọng tâm của hình ghép từ nhiều hình đơn giản

- Hình đơn giản: tọa độ trọng tâm dễ xác định
- Chọn hệ trục ban đầu Oxy , biểu diễn kích thước và tọa độ trọng tâm $C(x_c, y_c)$ trong hệ trục này
- Nếu mặt cắt ngang A ghép từ nhiều hình đơn giản có diện tích A_i với tọa độ trọng tâm mỗi hình đơn giản là $C_i(x_{Ci}, y_{Ci})$ trong hệ tọa độ ban đầu, thì:

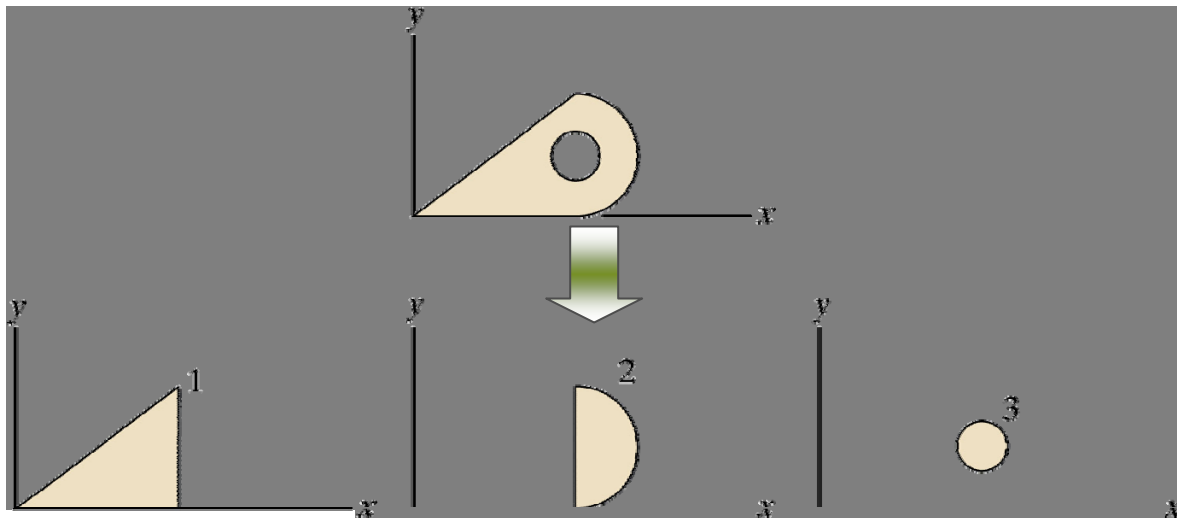


$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{Ci} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$
$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{Ci} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

4.2. Mômen tĩnh và các mô men quán tính

❖ Chú ý

- Chọn hệ trục tọa độ ban đầu hợp lý: Nếu hình có trục đối xứng thì chọn trục đối xứng làm một trục của hệ trục tọa độ ban đầu, trục còn lại đi qua trọng tâm của càng nhiều hình đơn giản càng tốt.
- Nếu hình bị khoét thì diện tích bị khoét mang giá trị âm.



4.2. Mômen tĩnh và các mô men quán tính

2. Mô men quán tính của mặt cắt ngang A đối với trục x, y

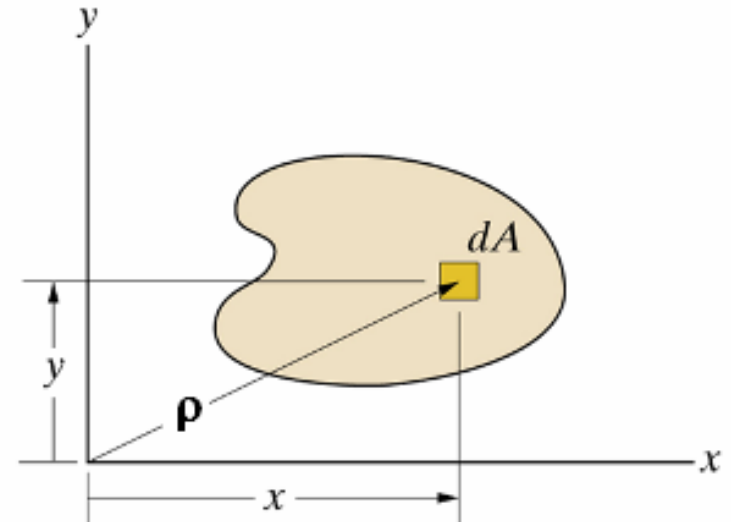
$$I_x = \int_{(A)} y^2 dA \quad I_y = \int_{(A)} x^2 dA$$

- Thứ nguyên của mô men quán tính là [chiều dài⁴], giá trị của nó luôn luôn dương

3. Mô men quán tính độc cực

$$I_p = \int_{(A)} \rho^2 dA = I_x + I_y$$

- Thứ nguyên của mô men quán tính độc cực là [chiều dài⁴], giá trị của nó luôn luôn dương

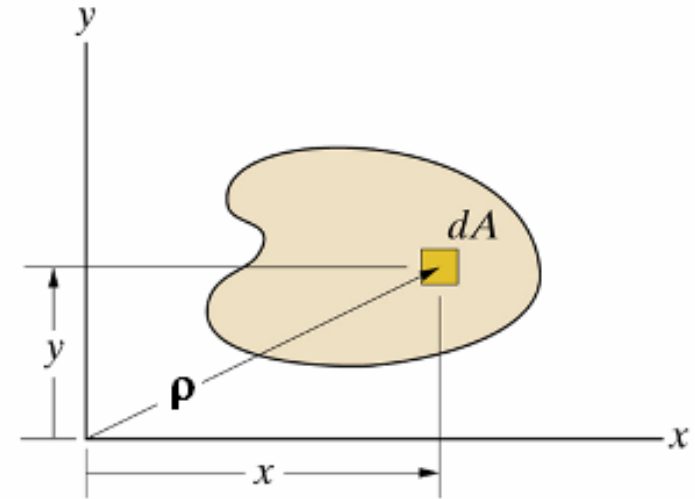


4.2. Mômen tĩnh và các mô men quán tính

4. Mô men quán tính ly tâm

$$I_{xy} = \int_{(A)} xy dA$$

Thứ nguyên của mô men quán tính ly tâm là [chiều dài⁴], giá trị của nó có thể là dương, bằng 0, hoặc âm.



❖ **Hệ trục quán tính chính** của diện tích mặt cắt ngang: là hệ trục mà mô men quán tính ly tâm của diện tích mặt cắt ngang đối với nó bằng 0.

Hệ trục quán tính chính trung tâm của diện tích mặt cắt ngang: là hệ trục quán tính chính, có gốc tọa độ trùng với trọng tâm mặt cắt ngang.

4.2. Mômen tĩnh và các mô men quán tính

❖ Tính chất:

- Nếu mặt cắt có 1 trục đối xứng thì bất cứ trục nào vuông góc với trục đối xứng đó cũng lập với nó một hệ trục quán tính chính

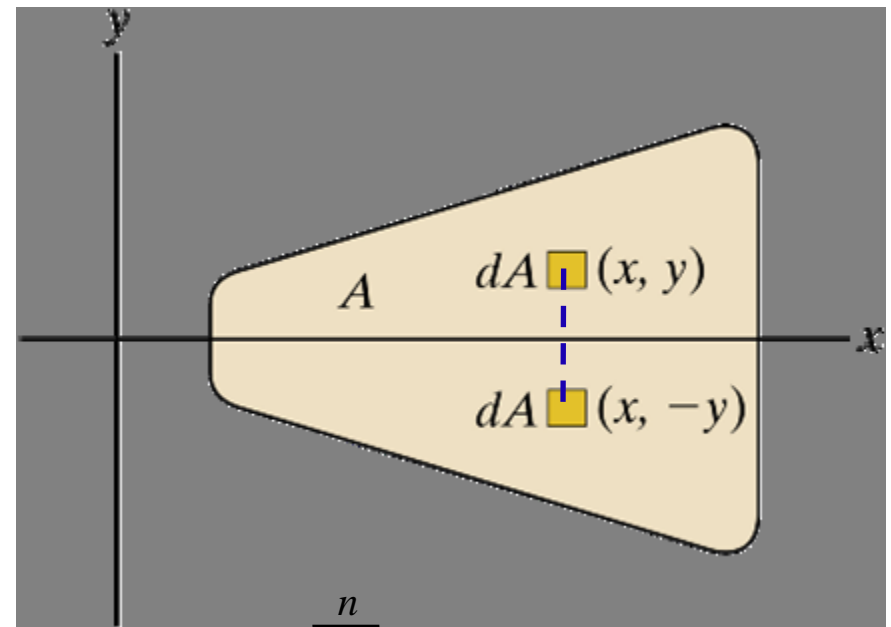
$$I_{xy} = \int_A xy dA + \int_A (-xy) dA = 0$$

- Nếu hình ghép:

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_x^i$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_y^i$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n I_{xy}^i$$



4.3. Mô men quán tính một số hình đơn giản

❖ Hình chữ nhật

$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$$

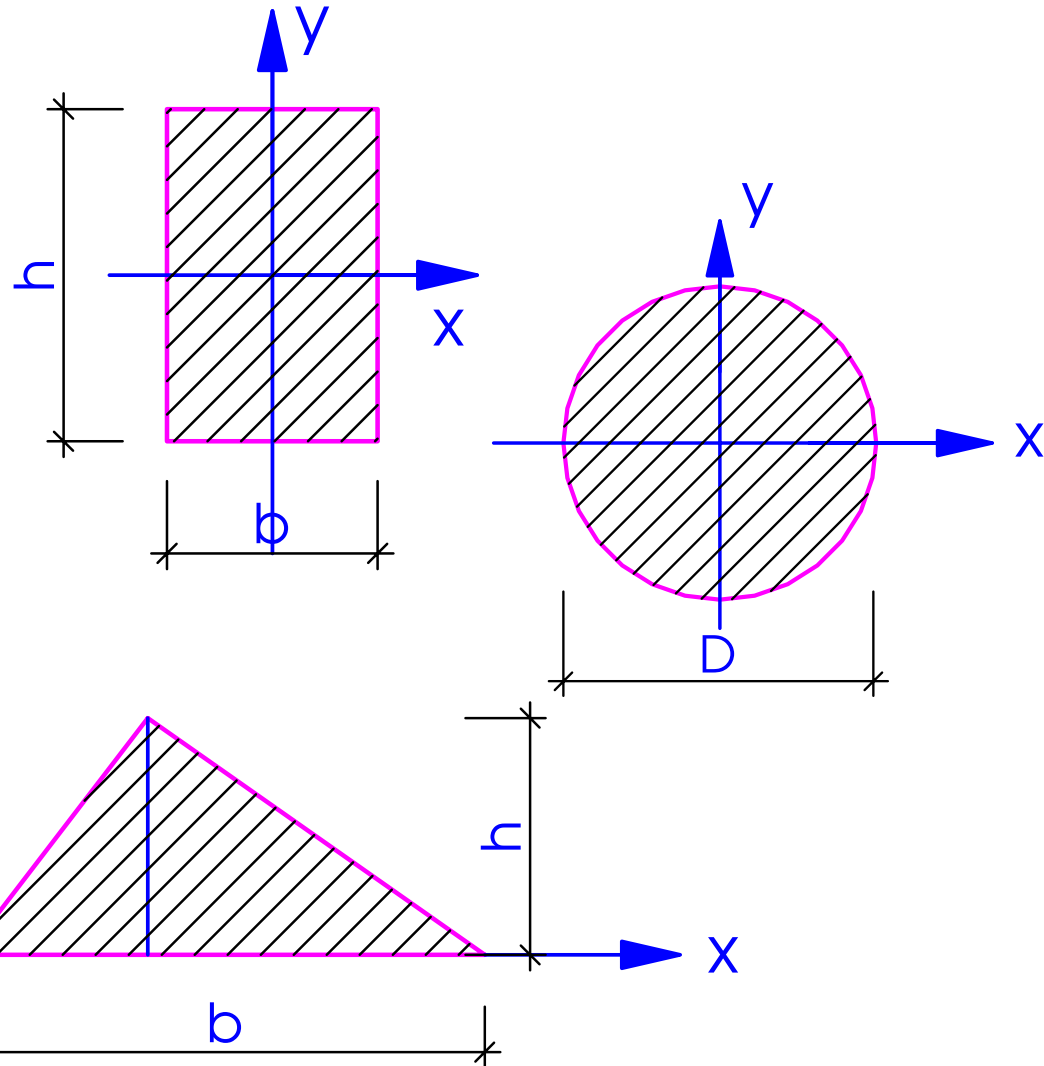
❖ Hình tròn

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05D^4$$

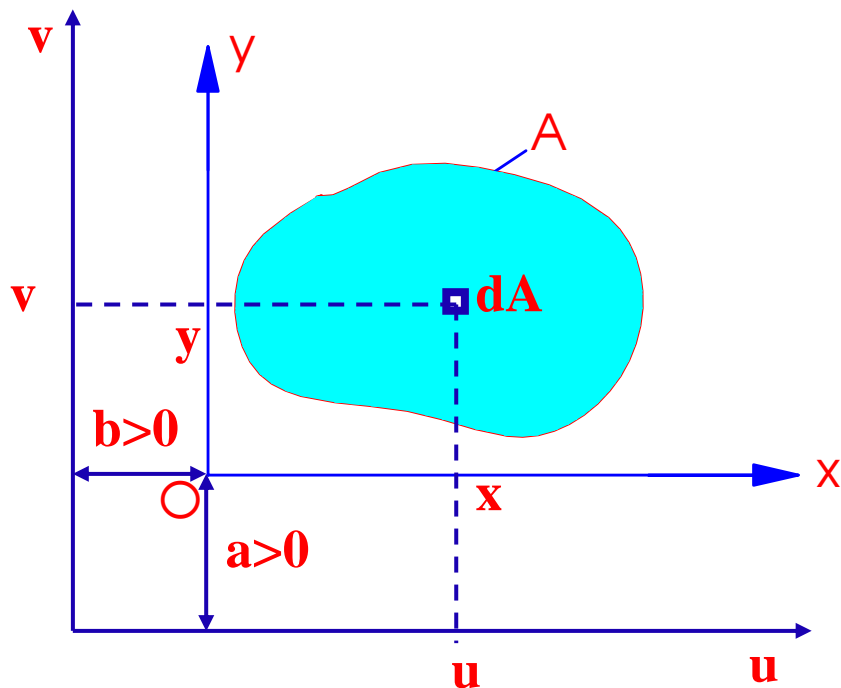
❖ Hình tam giác

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$



4.4. Công thức chuyển trục song song

- ❖ Mặt cắt ngang ngang A trong hệ trục ban đầu Oxy có các đặc trưng hình học mặt cắt ngang là $S_x, S_y, I_x, I_y, I_{xy}$
- ❖ Hệ trục mới $O'uv$ có $O'u // Ox, O'v // Oy$ và:
$$u = x + b \quad v = y + a$$
- ❖ Các đặc trưng hình học mặt cắt ngang A trong hệ trục $O'uv$ là:



$$S_u = S_x + a.A$$

$$S_v = S_y + b.A$$

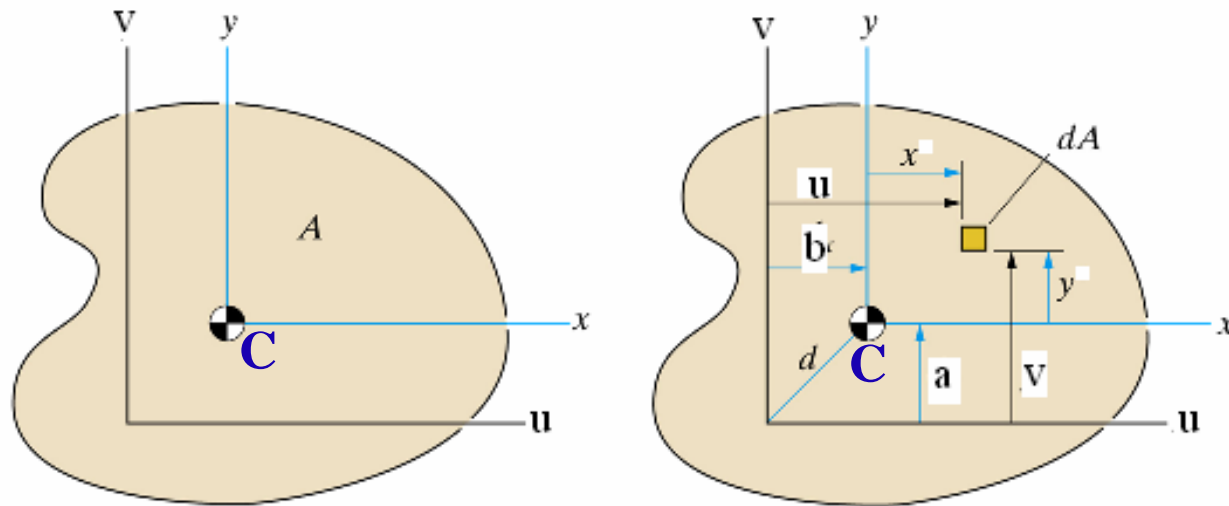
$$I_u = I_x + 2aS_x + a^2 A$$

$$I_v = I_y + 2bS_y + b^2 A$$

$$I_{uv} = I_{xy} + aS_y + bS_x + abA$$

4.4. Công thức chuyển trục song song

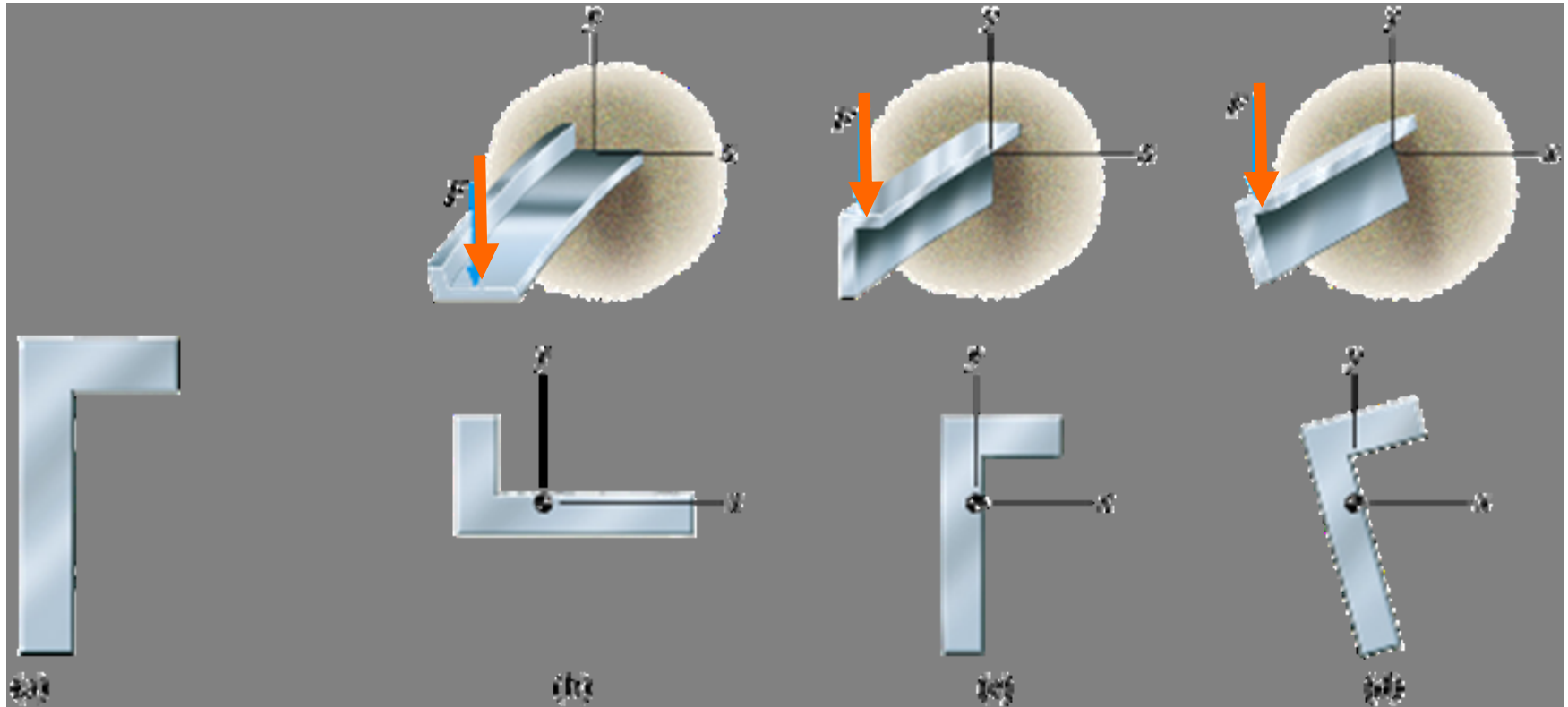
Nếu O đi qua trọng tâm C:



$$\begin{aligned} I_u &= I_x + a^2 A \\ I_v &= I_y + b^2 A \\ I_{uv} &= I_{xy} + abA \end{aligned}$$

4.5. Công thức xoay trục

- Trong nhiều trường hợp, cần xác định các đặc trưng hình học mặt cắt ngang trong hệ trục tọa độ xoay một góc nào đó so với hệ trục ban đầu



4.5. Công thức xoay trục

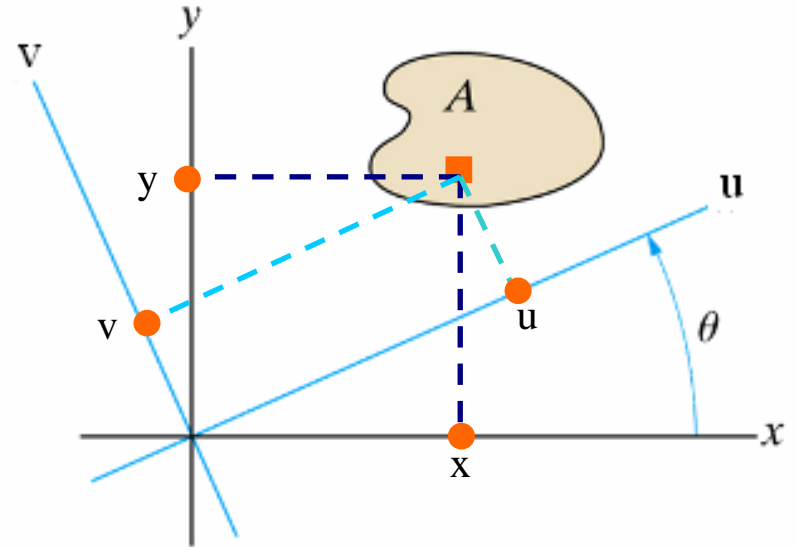
- Mặt cắt ngang ngang A trong hệ trục ban đầu Oxy có các đặc trưng hình học mặt cắt ngang là S_x , S_y , I_x , I_y , I_{xy}

- Hệ trục mới O'uv xoay góc θ ngược chiều kim đồng hồ

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$v = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

- Các đặc trưng hình học mặt cắt ngang trong hệ trục mới O'uv là S_u , S_v , I_u , I_v , I_{uv}



$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

4.5. Công thức xoay trục

- Hệ trục quán tính chính có $I_{uv}=0 \Rightarrow$ Vị trí của hệ trục quán tính chính xác định bởi góc θ_0 :

$$\tan 2\theta_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

- Các mô men quán tính đối với hệ trục quán tính chính :

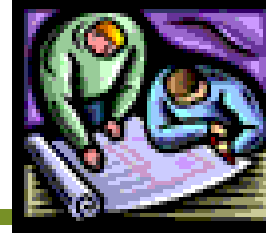
$$I_{max, min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

- Tương quan giữa $I_{u'}$ I_{uv} và $I_{x'}$ $I_{y'}$ I_{xy} tương tự như tương quan giữa $s_{u'}$ t_{uv} và $s_{x'}$ $s_{y'}$ t_{xy}



Vòng tròn Mohr quán tính

4.6. Bài tập – Ví dụ 4.6.1



Ví dụ 4.6.1. Cho mặt cắt ngang có hình dạng và kích thước như hình vẽ. Xác định các mô men quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang

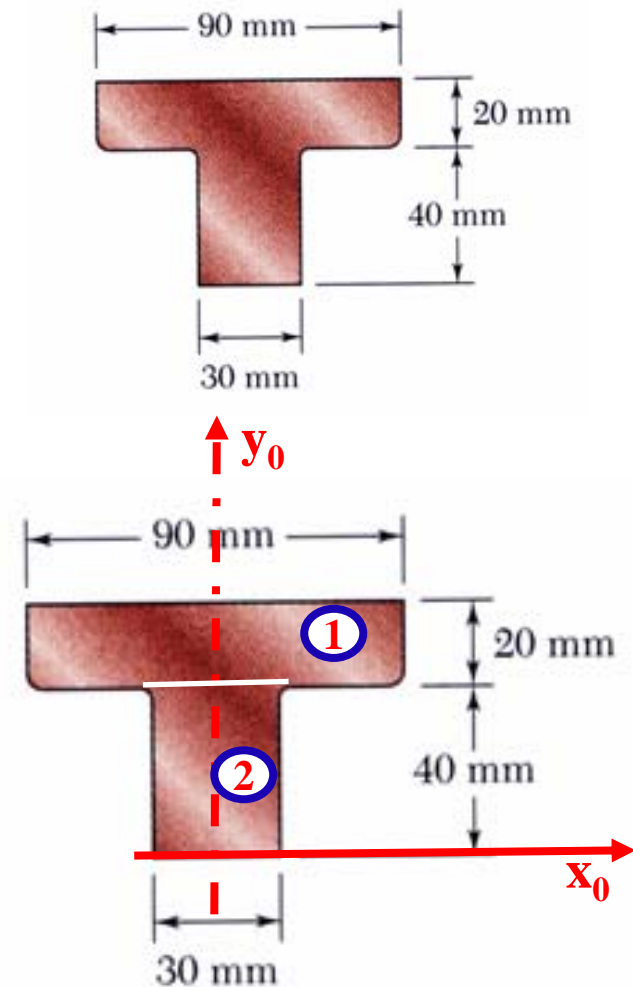
Giải: Chọn hệ trục tọa độ ban đầu x_0y_0 như hình vẽ. Chia mặt cắt ngang làm hai hình đơn giản ① và ②

1. Xác định tọa độ trọng tâm, ta có:

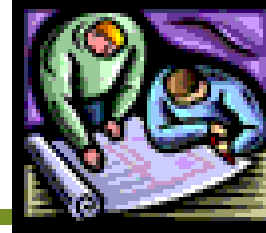
- $x_C = 0$ (y_0 - trục đối xứng)

$$y_{C1} = 50 \text{ mm}; \quad y_{C2} = 20 \text{ mm}$$

$$y_C = \frac{\sum y_{Ci} A_i}{\sum A_i} = \frac{y_{C1} A_1 + y_{C2} A_2}{A_1 + A_2} = 38 \text{ mm}$$



Ví dụ 4.6.1



- Dựn hệ trục quán tính chính trung tâm Cxy

- Các mô men quán tính chính trung tâm:

$$I_x = I_x^1 + I_x^2 = \left(\frac{1}{12} b_1 h_1^3 + A_1 a_1^2 \right) + \left(\frac{1}{12} b_2 h_2^3 + A_2 a_2^2 \right)$$

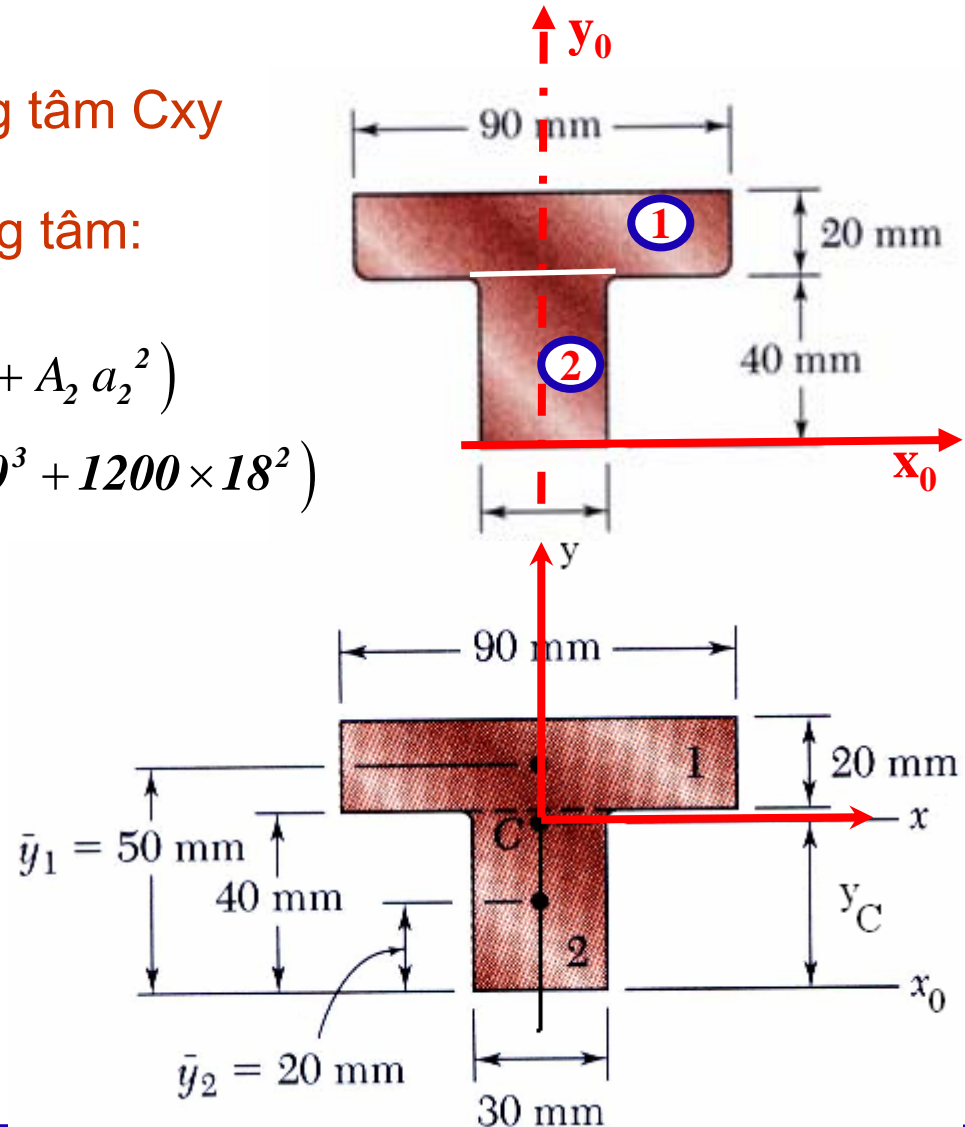
$$= \left(\frac{1}{12} 90 \times 20^3 + 1800 \times 12^2 \right) + \left(\frac{1}{12} 30 \times 40^3 + 1200 \times 18^2 \right)$$

$$I_x = 868 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 868 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$I_y = I_y^1 + I_y^2 = \frac{1}{12} h_1 b_1^3 + \frac{1}{12} h_2 b_2^3$$

$$= \left(\frac{1}{12} 20 \times 90^3 \right) + \left(\frac{1}{12} 40 \times 30^3 \right)$$

$$I_y = 1305 \times 10^3 \text{ mm}^4 = 1305 \times 10^{-9} \text{ m}^4$$

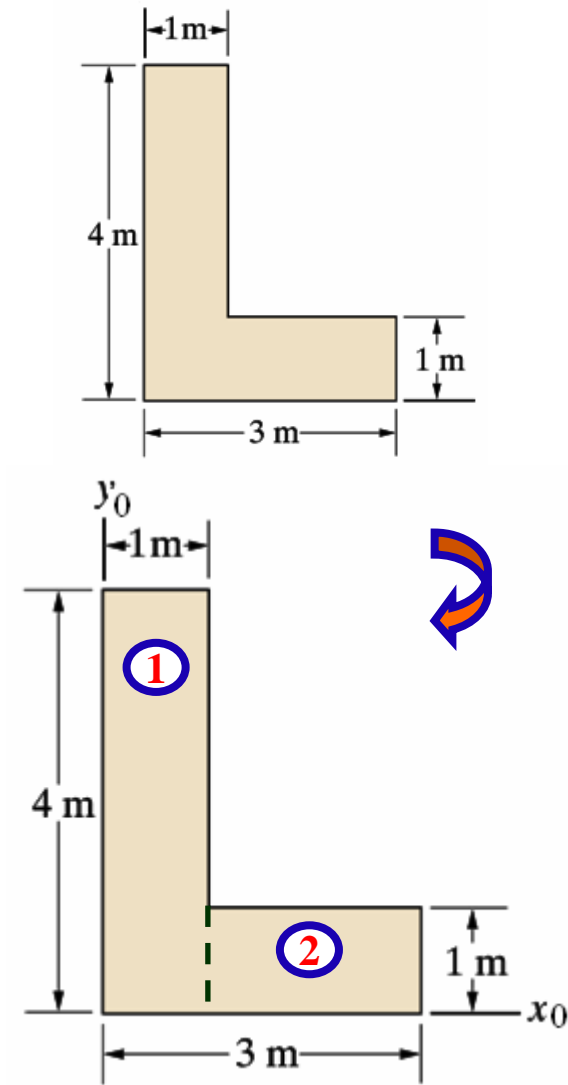
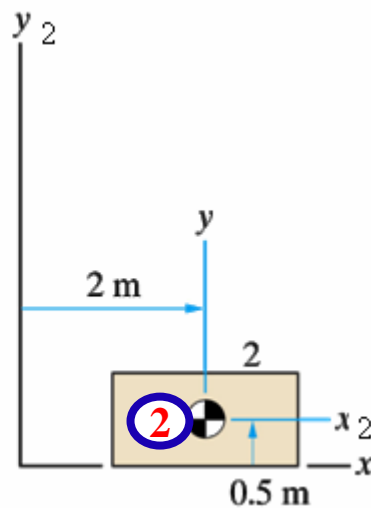
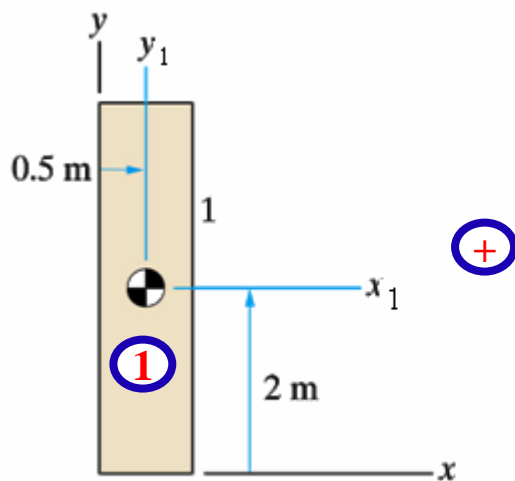


Ví dụ 4.6.2

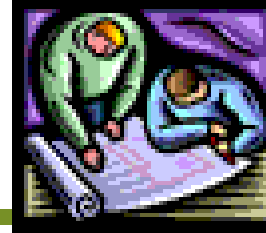


Ví dụ 4.6.2. Cho hình phẳng có hình dạng và kích thước như hình vẽ. Xác định các mô men quán tính chính trung tâm của hình phẳng

Giải: Chọn hệ trục tọa độ ban đầu x_0y_0 như hình vẽ. Chia hình phẳng làm hai hình đơn giản ① và ②



Ví dụ 4.6.2



1. Xác định tọa độ trọng tâm:

Ta có:

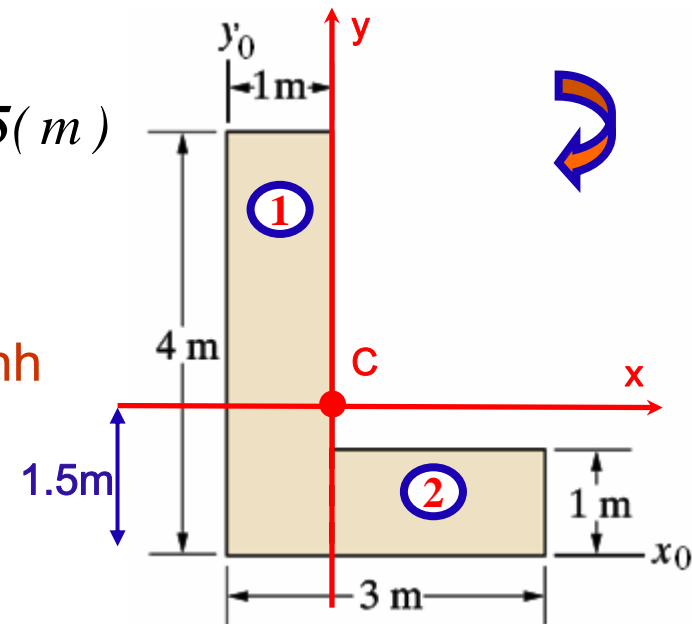
$i=$	X_i [m]	y_i [m]	A_i [m ²]	$x_i A_i$ [m ²]	$y_i A_i$ [m ²]
1	0,5	2,0	4	2	8
2	2,0	0,5	2	4	1
Σ			6	6	9

$$x_C = \frac{\sum x_{Ci} A_i}{\sum A_i} = \frac{6}{6} = 1(m) \quad y_C = \frac{\sum y_{Ci} A_i}{\sum A_i} = \frac{9}{6} = 1,5(m)$$

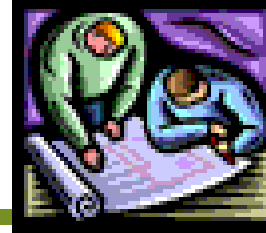
2. Qua C, dựng hệ trục quán tính trung tâm **Cxy**:

3. Các mô men quán tính đối với hệ trục quán tính trung tâm **Cxy**:

$$a_1 = -0,5m; b_1 = 0,5m; a_2 = 1m; b_2 = -1m$$



Ví dụ 4.6.2



$$A_1 \Rightarrow I_x^1 = \frac{1.4^3}{12} + 0,5^2 \cdot 4 \approx 6,33 (m^4)$$

$$I_y^1 = \frac{4.1^3}{12} + 0,5^2 \cdot 4 \approx 1,33 (m^4)$$

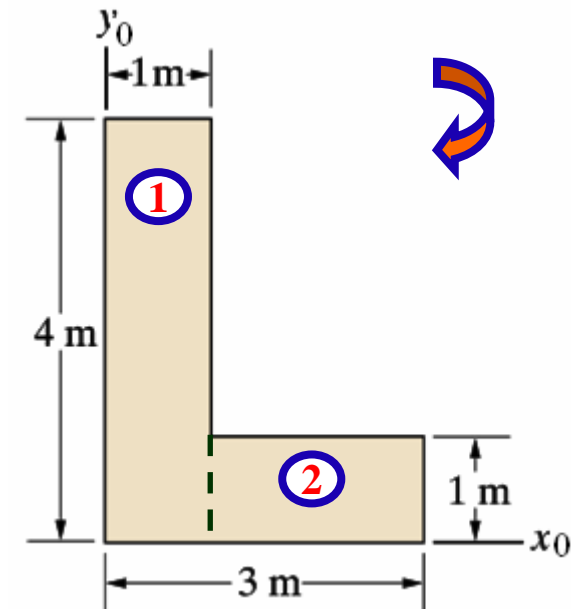
$$A_2 \Rightarrow I_x^2 = \frac{2.1^3}{12} + 1^2 \cdot 2 \approx 2,17 (m^4)$$

$$I_y^2 = \frac{1.2^3}{12} + 1^2 \cdot 2 \approx 2,67 (m^4)$$

$$I_x = I_x^1 + I_x^2 = 6,33 + 2,17 = 8,5 (m^4)$$

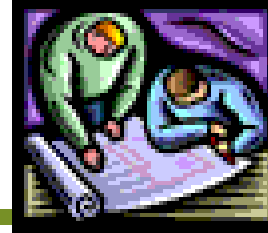
$$I_y = I_y^1 + I_y^2 = 1,33 + 2,67 = 4 (m^4)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^1 + I_{xy}^2 = 0 + a_1 b_1 A_1 + a_2 b_2 A_2 = -3 (m^4)$$



4. Các mô men quán tính đối với hệ trục quán tính chính trung tâm **Cuv**:

Ví dụ 4.6.2



4. Các mô men quán tính đối với hệ trục quán tính chính trung tâm **Cuv**:

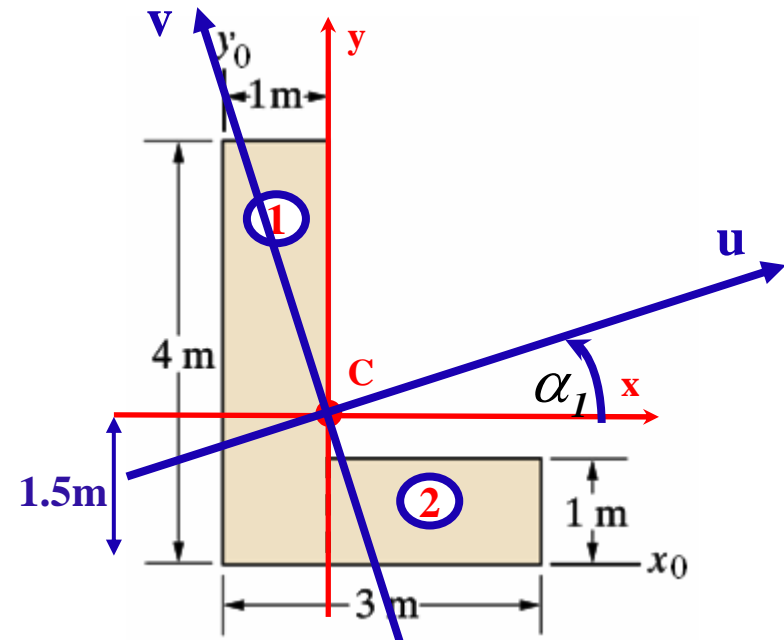
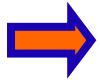
$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 10(m^4) \quad I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = -2,5(m^4)$$

5. Góc xác định hệ trục quán tính chính trung tâm **Cuv**:

$$\tan 2\theta_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = 1,333$$

$$\alpha_1 = 26^{\circ} 34'$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^{\circ} = 116^{\circ} 34'$$



4. Câu hỏi???





Thank you for your attention



SỨC BỀN VẬT LIỆU

Trần Minh Tú
Đại học xây dựng

July 2010

tpnt2002@yahoo.com

Chương 5

THANH CHỊU XOẢN THUẦN TÚY



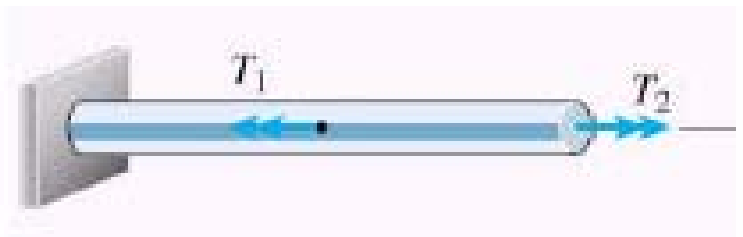
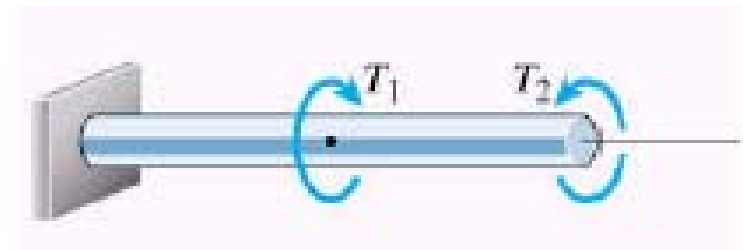
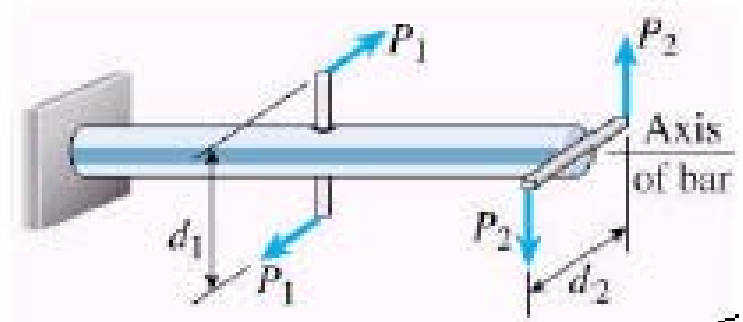
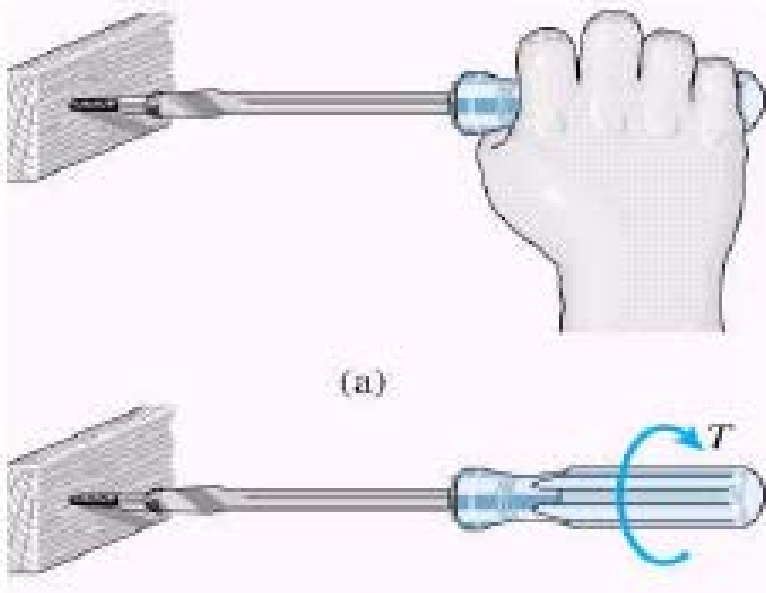
NỘI DUNG



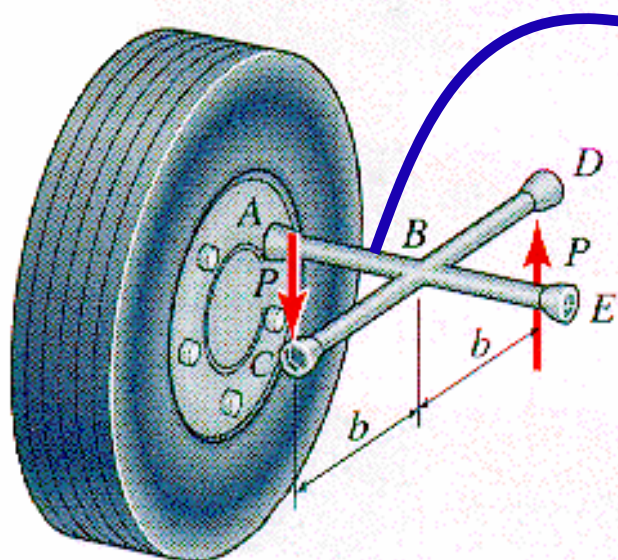
- 5.1. Khái niệm chung
- 5.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang
- 5.3. Biến dạng của thanh tròn chịu xoắn
- 5.4. Điều kiện bền
- 5.5. Điều kiện cứng
- 5.6. Thế năng biến dạng đàn hồi



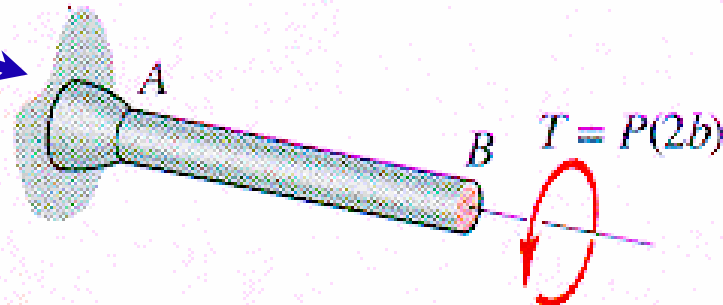
Ví dụ thanh chịu xoắn



Ví dụ thanh chịu xoắn



(a) Use of a lug-wrench.



(b) Lug-wrench shaft in torsion.

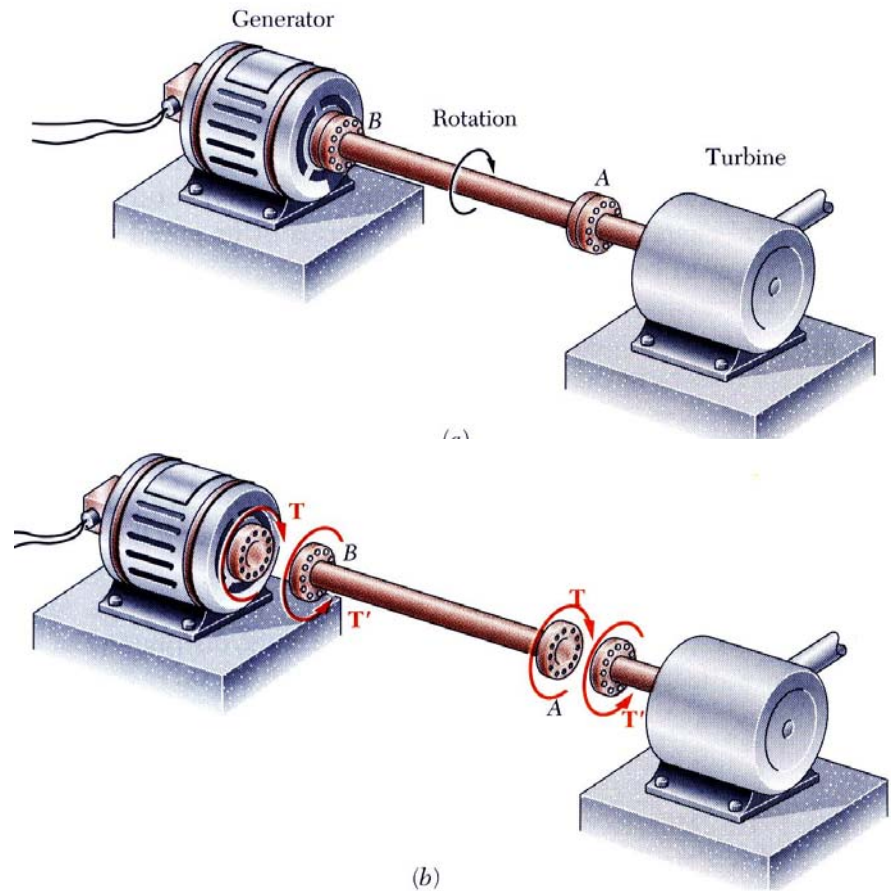
5.1. Khái niệm chung (1)

1. Định nghĩa

Thanh chịu xoắn thuần túy là thanh mà trên các mặt cắt ngang của nó chỉ có một thành phần ứng lực là **mô men xoắn M_z** nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh.

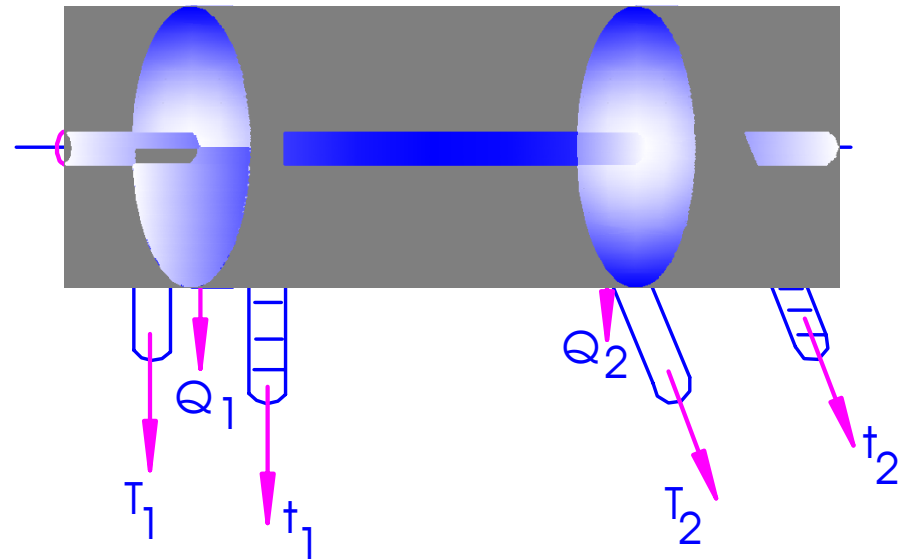
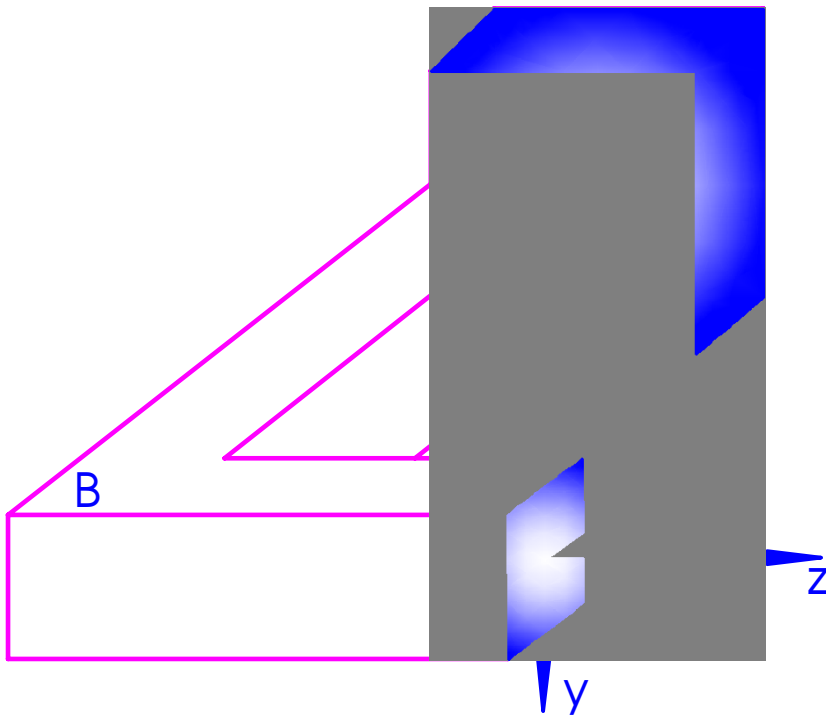
Ví dụ: Các trục truyền động, các thanh trong kết cấu không gian,...

Ngoại lực gây xoắn: mô men tập trung, mô men phân bố, ngẫu lực trong mặt cắt ngang



5.1. Khái niệm chung (2)

Ví dụ thanh chịu xoắn



5.1. Khái niệm chung (3)

2. Biểu đồ mô men xoắn nội lực

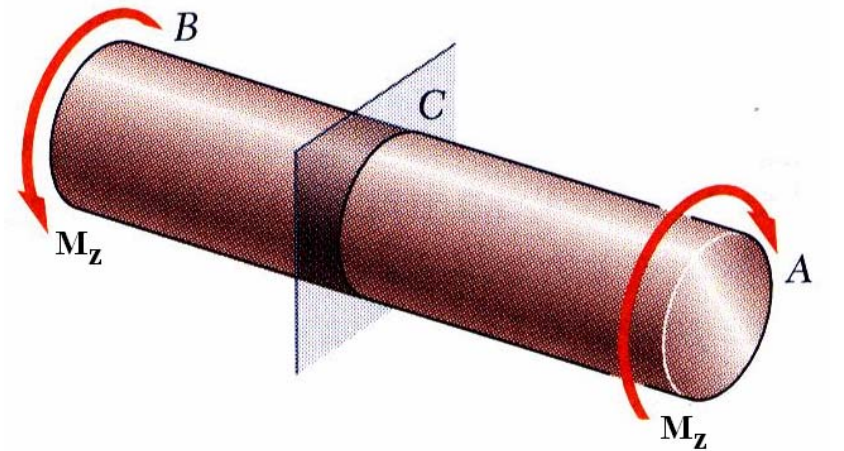
- **Qui ước dấu của M_z**

Nhìn từ bên ngoài vào mặt cắt ngang, nếu M_z có chiều **thuận chiều kim đồng hồ** thì nó mang dấu dương và ngược lại.

- **Xác định mô men xoắn nội lực trên mặt cắt ngang – PHƯƠNG PHÁP MẶT CẮT**

M_z nội lực trên mặt cắt ngang bằng tổng mô men quay đối với trục thành của những ngoại lực ở về một bên mặt cắt

- Ví dụ



$$\sum M_z = 0 \quad \longrightarrow \quad M_z =$$

5.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang (1)

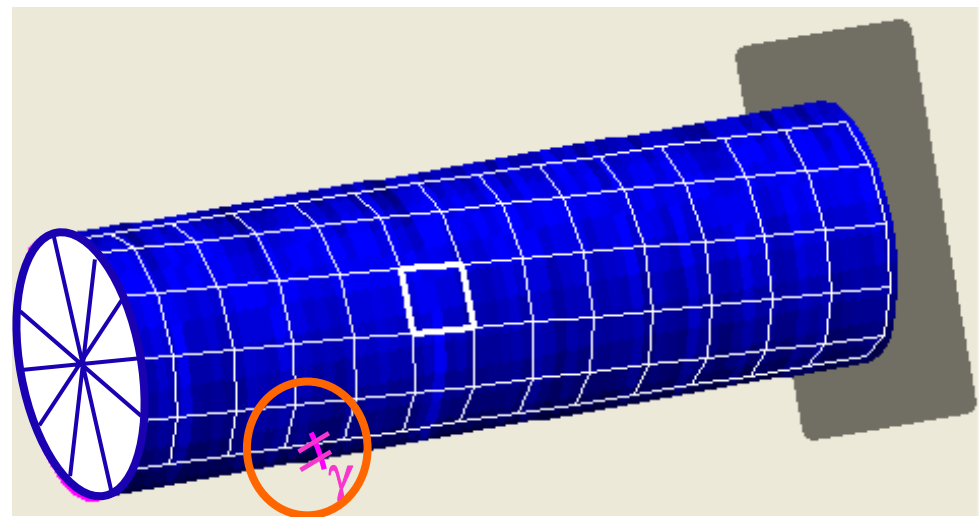
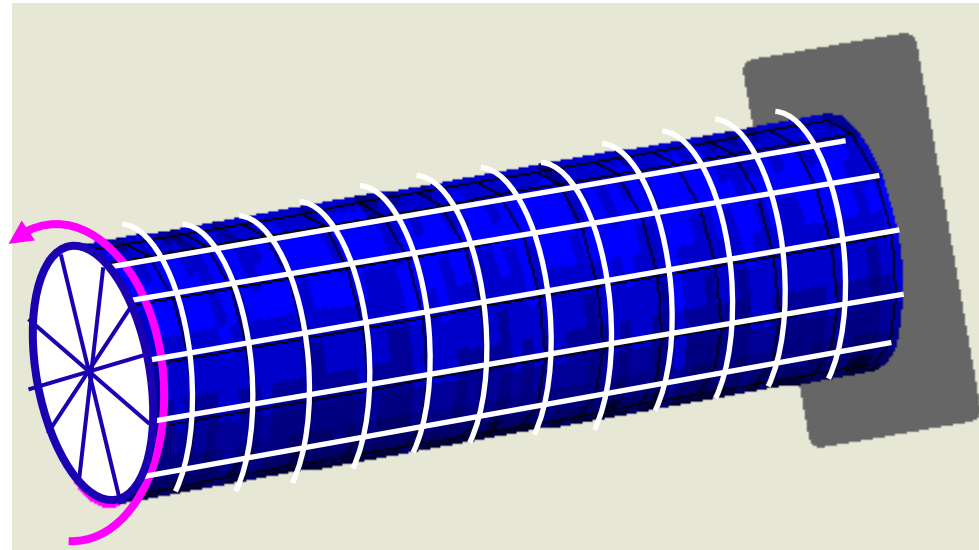
1. Thí nghiệm

Vạch trên bề mặt ngoài

- Hệ những đường thẳng // trục thanh
- Hệ những đường tròn vuông góc với trục thanh
- Các bán kính

QUAN SÁT

- Các đường // trục thanh => **ngiêng đều góc γ** so với phương ban đầu
- Các đường tròn vuông góc với trục thanh => **vuông góc**, khoảng cách 2 đường tròn kề nhau không đổi
- Các bk trên bề mặt thanh vẫn **thẳng và có độ dài không đổi**



5.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang (2)

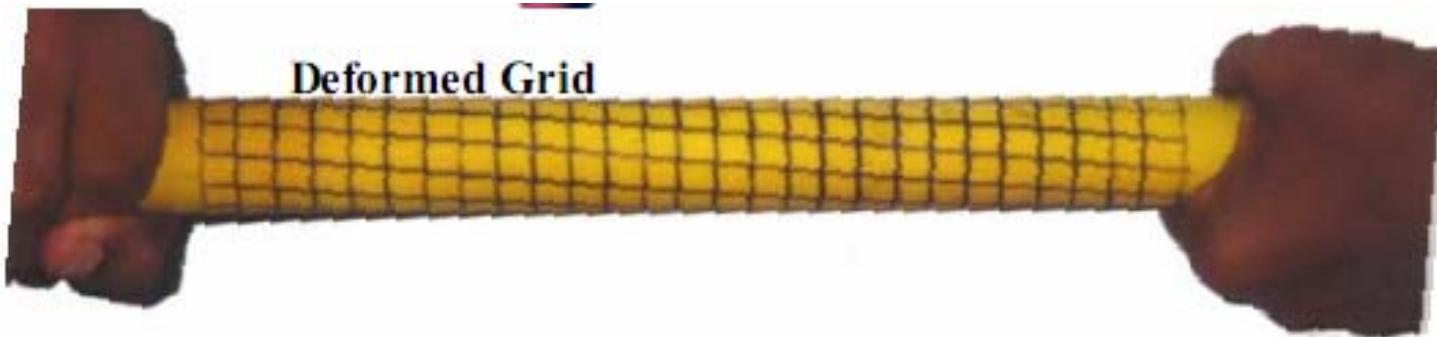
GIẢ THIẾT

Gt1 – Gt mặt cắt ngang phẳng: mặt cắt ngang trước biến dạng là phẳng và vuông góc với trục thanh thì sau biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục. Khoảng cách giữa 2 mặt cắt ngang là không đổi.

Gt2 – Gt về các bán kính: Các bán kính trước và sau biến dạng vẫn thẳng và có độ dài không đổi.

Vật liệu làm việc tuân theo định luật Hooke

Thanh tròn chịu xoắn



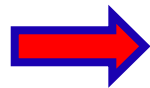
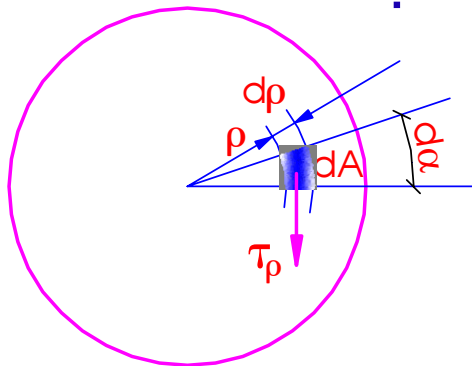
5.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang (3)

2. Công thức tính ứng suất

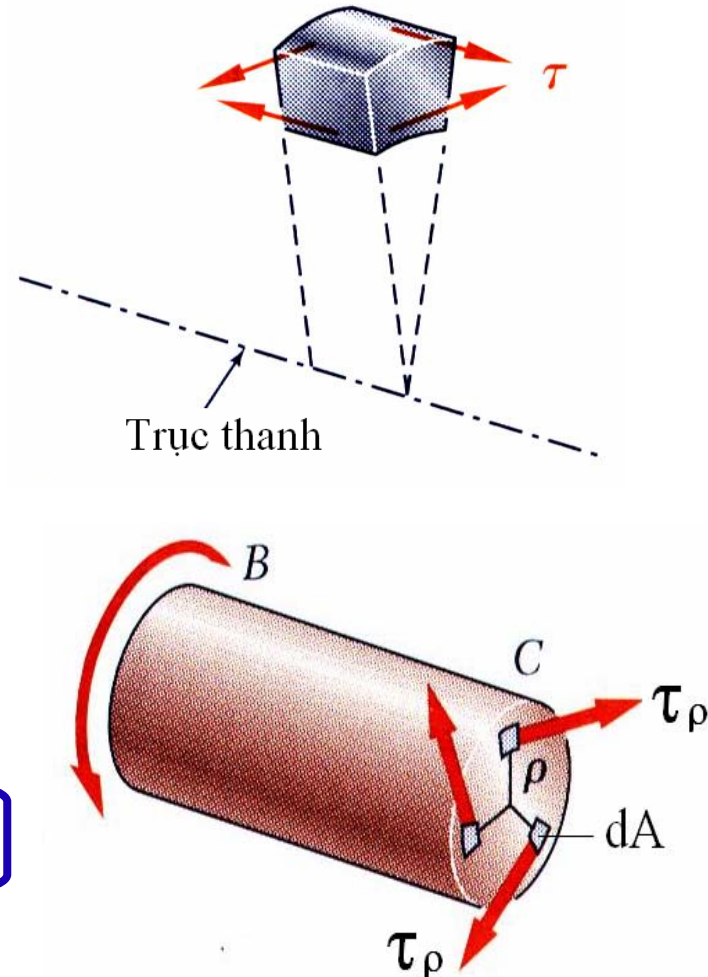
- Từ gt1 $\Rightarrow \varepsilon_z=0 \Rightarrow \sigma_z=0$
- Từ gt2 $\Rightarrow \varepsilon_x=\varepsilon_y=0 \Rightarrow \sigma_x=\sigma_y=0$

Trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất tiếp

- Ứng suất tiếp có phương vuông góc với bán kính, chiều cùng chiều mô men xoắn nội lực



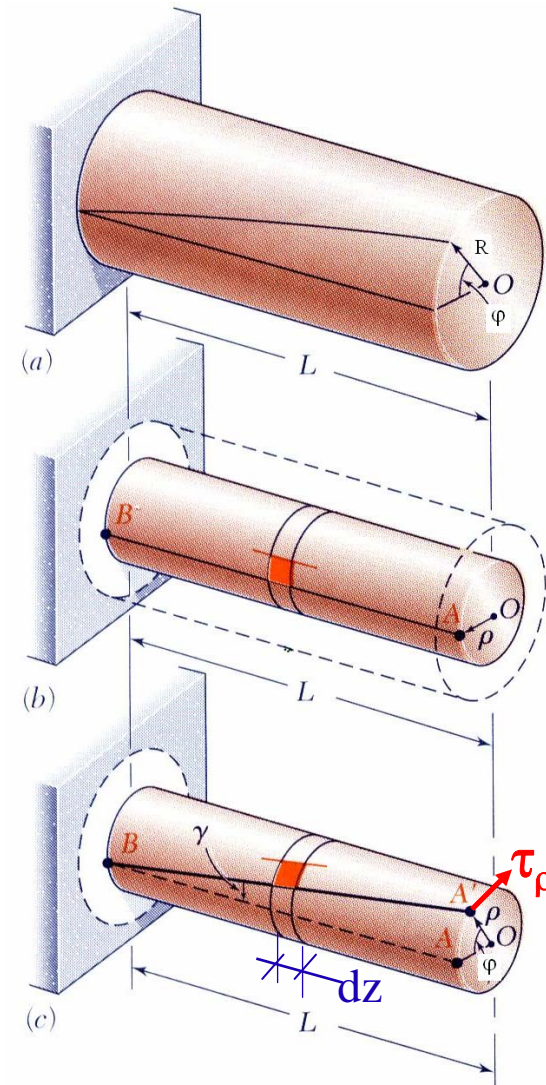
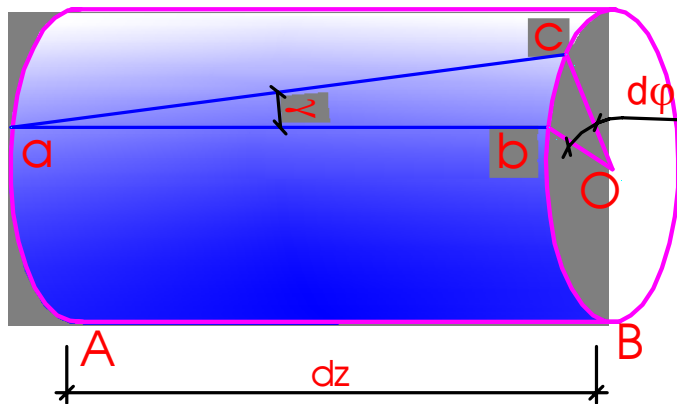
= ???



5.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang (4)

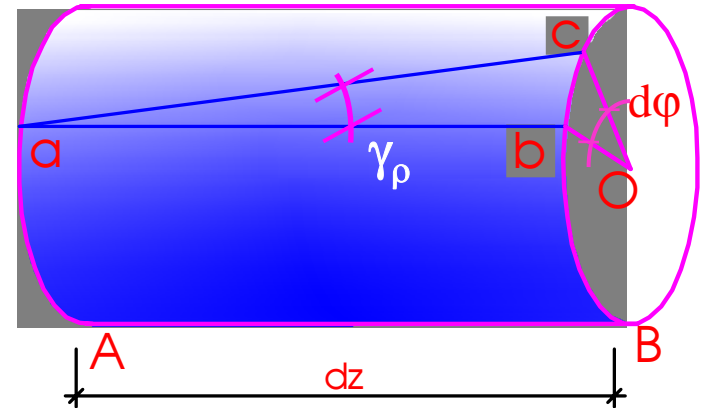
❖ Tìm ứng suất tiếp tại điểm trên mặt cắt ngang cách tâm khoảng ρ với M_z nội lực đã biết

- Xét hai mặt cắt ngang cách nhau vi phân chiều dài dz .



5.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang (5)

- Trước biến dạng :
 $ab // Oz; Ob = \rho$
- Chịu xoắn: $ab \Rightarrow ac$
- $d\varphi$ - góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt ngang cách nhau dz
- γ_ρ - góc trượt (biến dạng góc) của thớ cách trục thanh khoảng ρ
- $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ - góc xoắn tỉ đối



$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{bc}{ab} = \frac{\rho d\varphi}{dz}$$

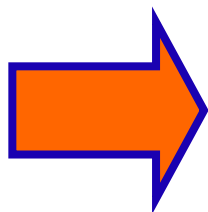
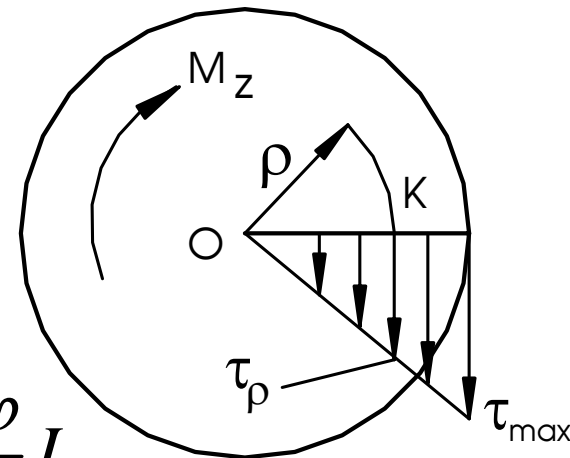
5.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang (6)

❖ Theo định luật Hooke

$$\tau_{\rho} = G\gamma = G \frac{d\varphi}{dz}$$

❖ Mặt khác

$$M_z = \int_A \tau_{\rho} \rho dA = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = G \frac{d\varphi}{dz} I_p$$



$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GI_p}$$

$$\tau_{\rho} = \frac{M_z}{I_p} \rho$$

M_z – mô men xoắn nội lực

I_p – mô men quán tính độ cực của mặt cắt ngang

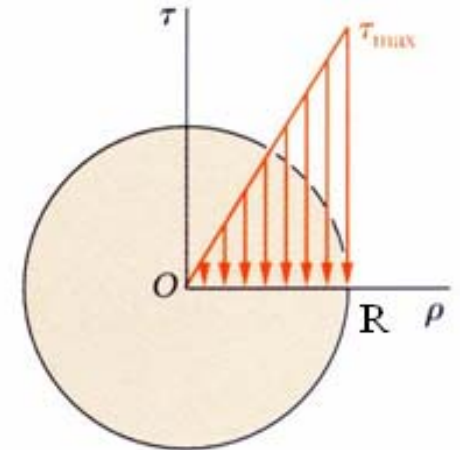
ρ – tọa độ điểm tính ứng suất

5.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang (7)

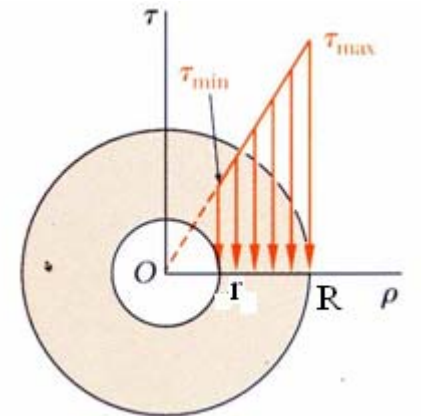
- Biến thiên của ứng suất tiếp theo khoảng cách ρ là bậc nhất => **Biểu đồ ứng suất tiếp**
- Những điểm nằm trên cùng đường tròn thì có ứng suất tiếp như nhau.
- Ứng suất tiếp cực đại trên chu vi mặt cắt ngang

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_p} \cdot R = \frac{M_z}{W_p}$$

- $W_p = I_p/R$ là **mô men chống xoắn** của mặt cắt ngang



$$W_p = \frac{\pi D^4}{32} / (D/2) \approx 0,2D^3$$



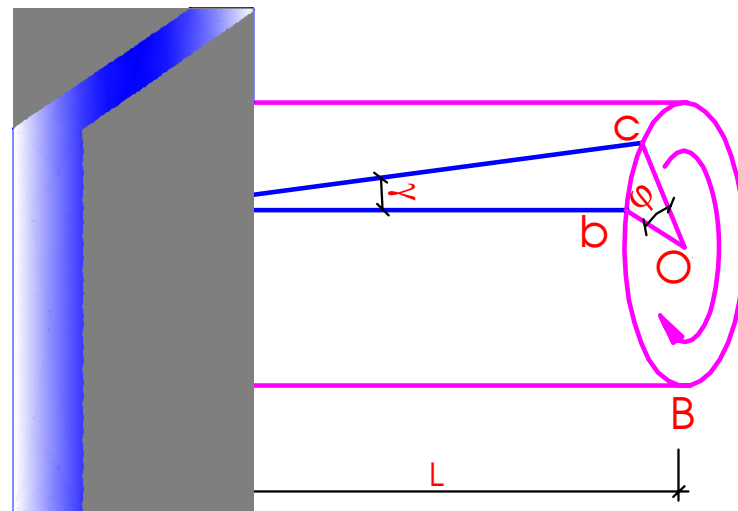
$$W_p \approx 0,2D^3(1 - \eta^4)$$

5.3. Biến dạng của thanh tròn (1)

❖ Đã có:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GI_p}$$

❖ Góc xoắn (góc xoay) tương đối giữa hai mặt cắt ngang A và B



$$\varphi_{AB} = \int_B^A \frac{M_z dz}{GI_p} = \int_0^L \frac{M_z dz}{GI_p} \quad [rad]$$

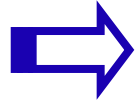
G – mô-đun đàn hồi khi trượt của vật liệu

GI_p – là độ cứng chống xoắn của mặt cắt ngang

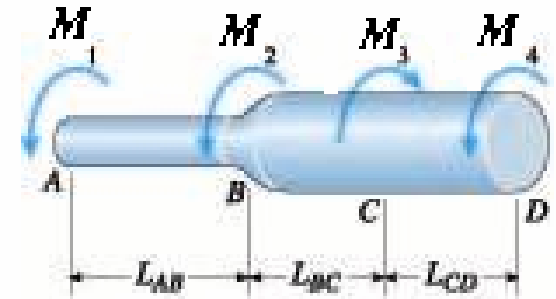


5.3. Biến dạng của thanh tròn (2)

- Khi trên đoạn AB chiều dài L có $\frac{M_z}{GI_p} = \text{const}$



$$\varphi_{AB} = \frac{M_z L}{GI_p}$$



- Khi đoạn AB gồm n đoạn, trên mỗi đoạn thứ i có chiều dài l_i :

$$\left(\frac{M_z}{GI_p} \right)_i = \text{const} \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_{AB} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{M_z}{GI_p} \right)_i l_i$$



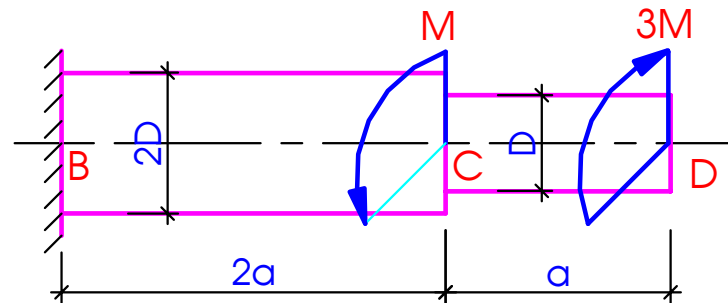
Bài tập - Ví dụ 5.1



❖ Cho trục tròn có diện tích mặt cắt ngang thay đổi chịu tác dụng của mô men xoắn ngoại lực như hình vẽ

1. Vẽ biểu đồ mô men xoắn nội lực
2. Xác định trị số ứng suất tiếp lớn nhất
3. Tính góc xoắn của mặt cắt ngang D

Biết $M=5\text{kNm}$; $a=1\text{m}$;
 $D=10\text{cm}$; $G=8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$



Bài tập - Ví dụ 5.1



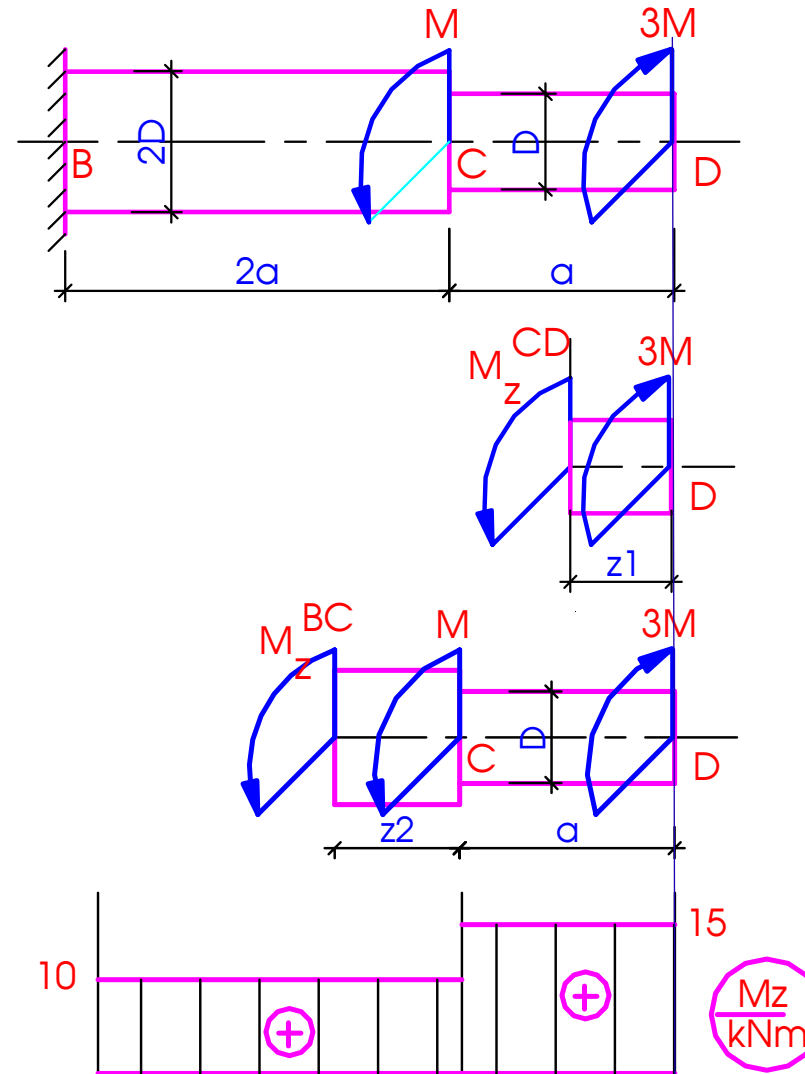
1. Biểu đồ mô men xoắn

Đoạn CD ($0 \leq z_1 \leq a$)

$$M_z^{CD} = 3M$$

Đoạn BC ($0 \leq z_2 \leq 2a$)

$$M_z^{BC} = 2M$$



Ví dụ 5.1



2. Trị số ứng suất tiếp lớn nhất

$$\tau_{CD} = \frac{M_z^{CD}}{0,2D^3} = \frac{15 \times 10^2}{0,2 \times 10^3} = 7,5 (\text{kN} / \text{cm}^2)$$

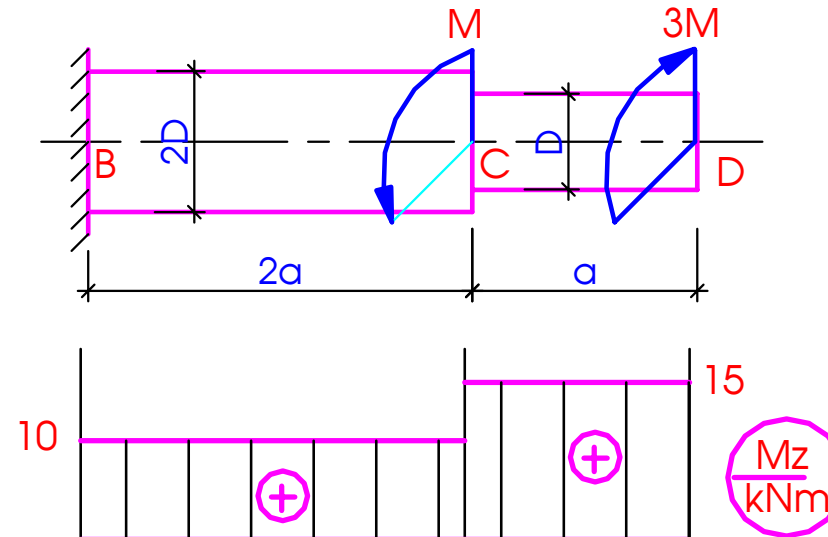
$$\tau_{BC} = \frac{M_z^{BC}}{0,2(2D)^3} = \frac{10 \times 10^2}{0,2 \times 20^3} = 0,625 (\text{kN} / \text{cm}^2)$$

3. Góc xoắn tại D

$$\varphi_D = \varphi_{BC} + \varphi_{CD}$$

$$\varphi_D = \frac{M_z^{CD} \times a}{GI_p^{CD}} + \frac{M_z^{BC} \times 2a}{GI_p^{BC}}$$

$$\varphi_D = \frac{15 \times 10^2 \times 10^2}{8 \times 10^3 \times 0,1 \times 10^4} + \frac{10 \times 10^2 \times 2 \times 10^2}{8 \times 10^3 \times 0,1 \times 20^4} = 0,02 (\text{rad})$$



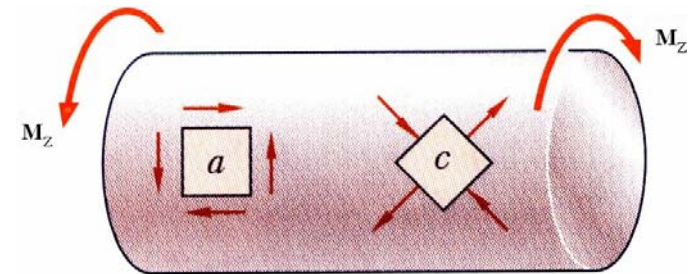
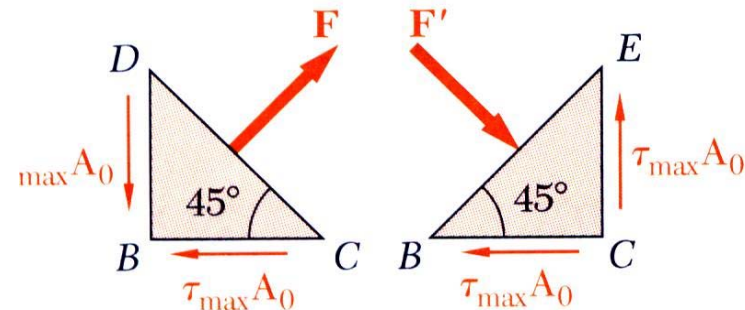
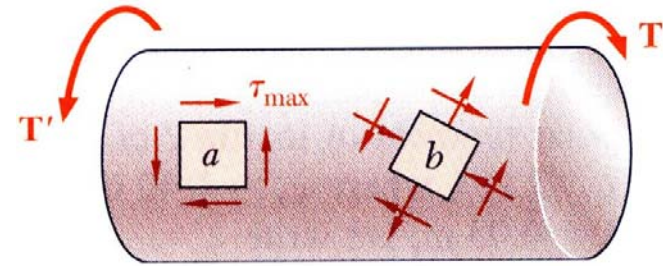
(*Phân tích trạng thái ứng suất

- Các phân tử với các mặt song song và vuông góc với trục chỉ chịu trượt thuần túy. ứng suất pháp và ứng suất tiếp hoặc đồng thời cả hai có thể tồn tại trên các mặt
- Phân tử *a* chỉ chịu trượt thuần túy.
- Xét phân tử nghiêng góc 45° so với trục,

$$F = 2(\tau_{\max} A_0) \cos 45 = \tau_{\max} A_0 \sqrt{2}$$

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{F}{A} = \frac{\tau_{\max} A_0 \sqrt{2}}{A_0 \sqrt{2}} = \tau_{\max}$$

- Phân tử chịu ứng suất kéo trên hai mặt và chịu ứng suất nén trên hai mặt

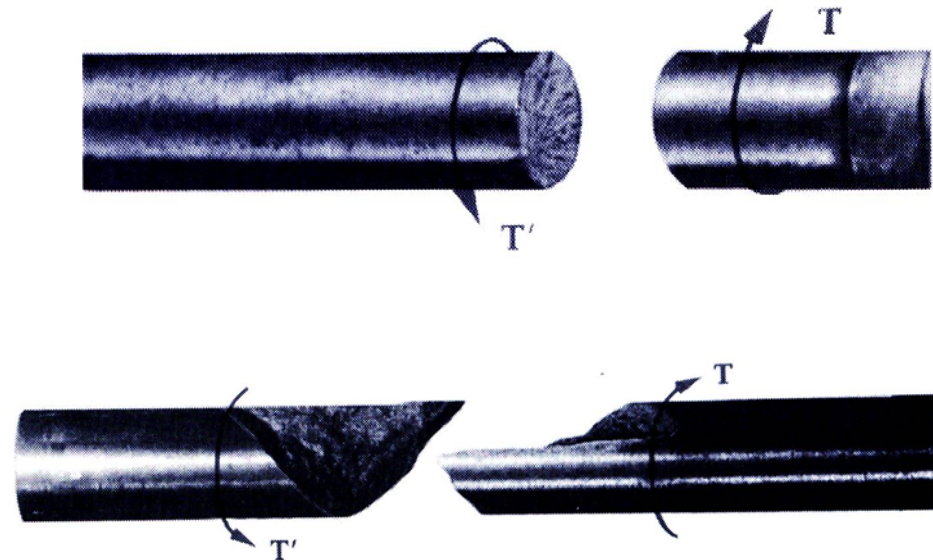
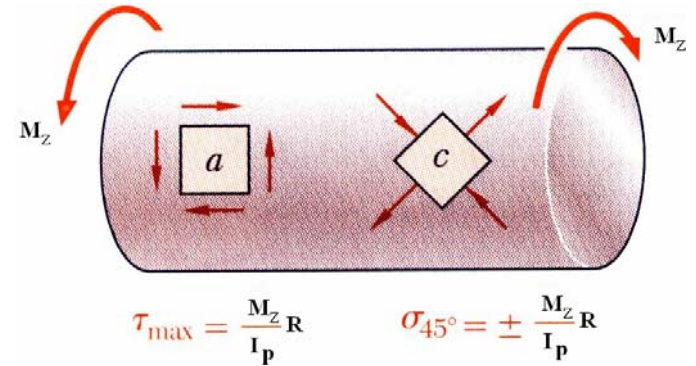


$$\tau_{\max} = \frac{M_z R}{I_p}$$

$$\sigma_{45^\circ} = \pm \frac{M_z R}{I_p}$$

(**) Phân tích trạng thái ứng suất

- Vật liệu dẻo, độ bền trượt kém thường bị phá hủy do cắt. Vật liệu giòn chịu kéo kém hơn chịu cắt.
- Khi chịu xoắn, mẫu vật liệu dẻo bị phá hủy tại mặt cắt có ứng suất tiếp lớn nhất – mặt cắt ngang.
- Khi chịu xoắn, mẫu vật liệu giòn bị phá hủy theo phương có biến dạng kéo lớn nhất – phương xiên góc 45° so với trục



5.4. Điều kiện bền - Điều kiện cứng

1. Điều kiện bền

$$\max |\tau_{\max}| = \max \frac{|M_z|}{W_p} \leq [\tau]$$

$$[\tau] = \frac{\tau_0}{n} \quad \text{- nếu dùng thực nghiệm tìm } \tau_0$$

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \quad \text{- nếu dùng thuyết bền 3}$$

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad \text{- nếu dùng thuyết bền 4}$$

2. Điều kiện cứng

$$\theta_{\max} = \left(\frac{M_z}{GI_p} \right)_{\max} \leq [\theta] \quad (\text{rad} / \text{m})$$

Nếu $[\theta]$ cho bằng độ/m \Rightarrow đổi ra rad/m

5.4. Điều kiện bền - Điều kiện cứng

3. Ba bài toán cơ bản:

- a) Bài toán 1: Kiểm tra điều kiện bền (hoặc điều kiện cứng)

$$|\tau_{max}| = \frac{|M_z|}{W_p} \leq [\tau]$$

- b) Bài toán 2: Chọn kích thước thanh theo điều kiện bền (hoặc điều kiện cứng)

$$W_p \geq \frac{|M_z|}{[\tau]}$$

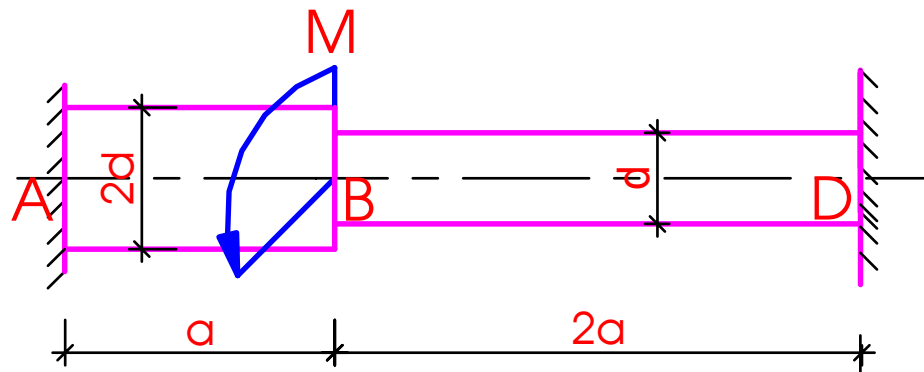
- c) Bài toán 3: Xác định giá trị cho phép của tải trọng tác dụng (là giá trị lớn nhất của tải trọng đặt lên hệ mà thanh vẫn đảm bảo điều kiện bền hoặc điều kiện cứng)

$$|M_z| \leq W_p \cdot [\tau]$$

5.5. Bài toán siêu tĩnh

Bài toán siêu tĩnh

- Là bài toán mà nếu chỉ dùng các phương trình cân bằng tĩnh học thì ta không thể xác định hết các phản lực, cũng như các thành phần nội lực trong thanh.
- Phương pháp giải: Viết thêm phương trình bổ sung – phương trình biểu diễn điều kiện biến dạng
- Ví dụ: Vẽ biểu đồ mô men xoắn nội lực



5.5. Bài toán siêu tĩnh



- ❖ Giả sử phản lực tại ngàm M_A , M_D có chiều như hình vẽ.
- ❖ Ta có: $M_A + M_D = M$ (1)
- ❖ Điều kiện biến dạng

$$\varphi_{AD} = 0$$

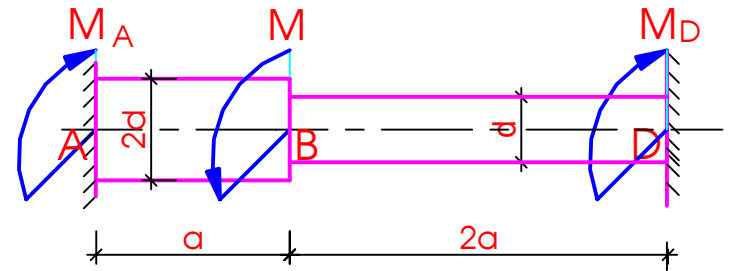
(2)

$$\varphi_{AD} = \varphi_{AB} + \varphi_{BD} = \frac{M_z^{AB} a}{GI_p^{AB}} + \frac{M_z^{BD} 2a}{GI_p^{BD}}$$

$$\varphi_{AD} = \frac{(M_D - M) a}{G \times 0,1 \times (2d)^4} + \frac{M_D 2a}{G \times 0,1 \times d^4} = 0$$

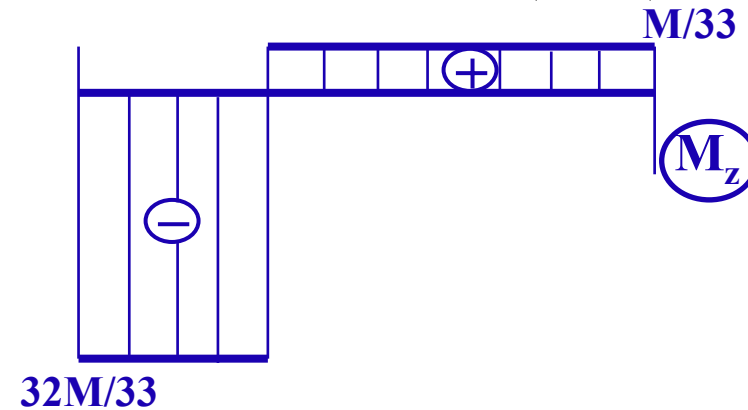


$$M_D = \frac{1}{33} M; \quad M_A = \frac{32}{33} M$$



$$M_z^{BD} = M_D$$

$$M_z^{AB} = M_D - M$$



5.6. Thế năng biến dạng đàn hồi

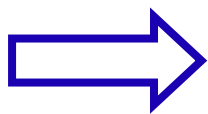
TNBD đàn hồi riêng do ứng suất tiếp:

$$u = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G}$$

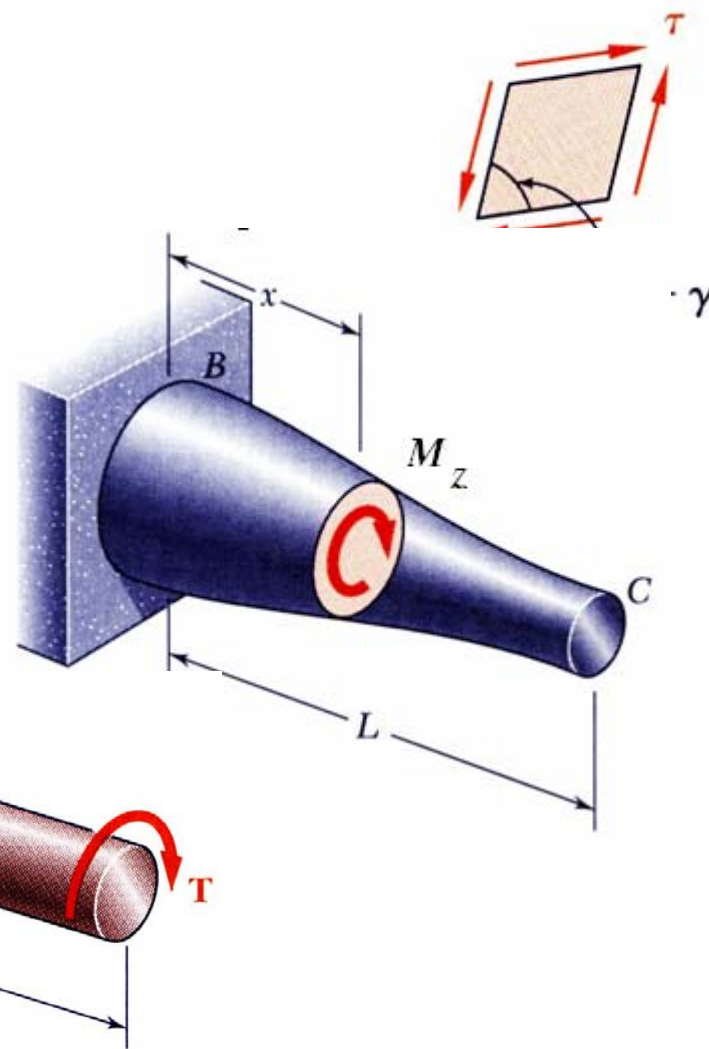
TNBD đàn hồi của thanh chịu xoắn:

$$U = \int u dV = \int \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_0^L \frac{M_z^2}{2GI_p^2} dz$$

Khi $\frac{M_z}{GI_p} = const$

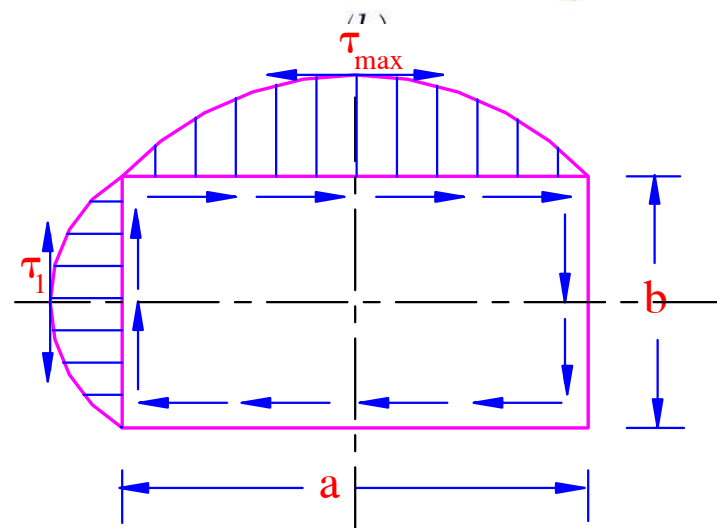
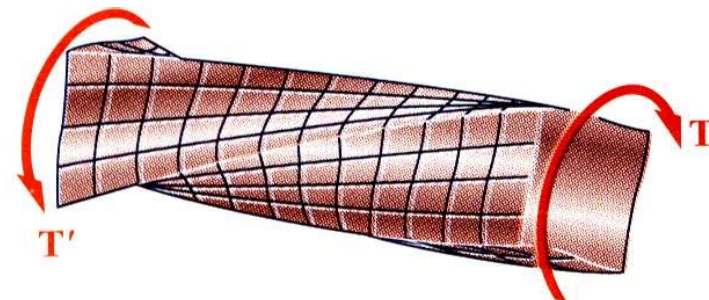


$$U = \frac{M_z^2 L}{2GI_p}$$



5.7. Xoắn thanh tiết diện chữ nhật (1)

- Khi biến dạng, giả thiết mặt cắt ngang phẳng không còn đúng: bị vặn, xoắn..
- Bài toán xoắn thanh tiết diện chữ nhật: giải theo **LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI**.
- Ở tâm và ở các góc ứng suất tiếp bằng 0, ở phía ngoài ứng suất hướng theo chu tuyến. Biểu đồ ứng suất tiếp dọc theo chu tuyến như hình vẽ. **Ứng suất tiếp lớn nhất tại điểm giữa cạnh dài...**



$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_{x0}} = \frac{M_z}{\alpha ab^2}$$

$$\tau_1 = \gamma \tau_{max}$$

- Góc xoắn

$$\theta = \frac{M_z}{GI_{x0}} = \frac{M_z}{\beta Gab^3}$$

5.7. Xoắn thanh tiết diện chữ nhật (2)

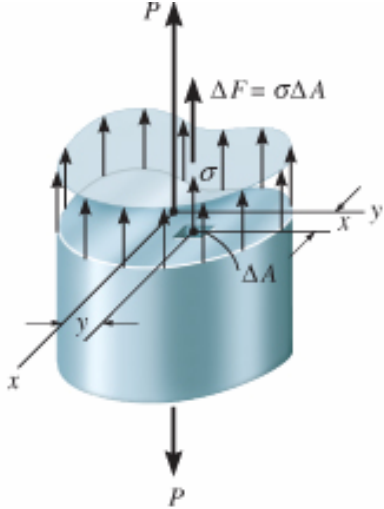
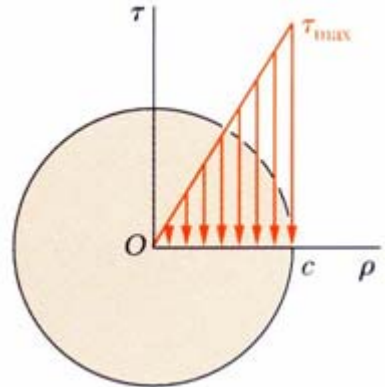
- Các hệ số α , β , γ phụ thuộc vào tỉ số a/b ($a \gg b$)

a/b	1	2	3	4	6	8	10	∞
α	0,203	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,299	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

- Khi tỉ số a/b lớn thì các hệ số α , β , $\gamma = 1/3 = 0,333$

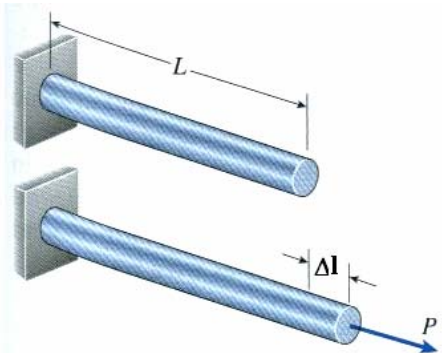
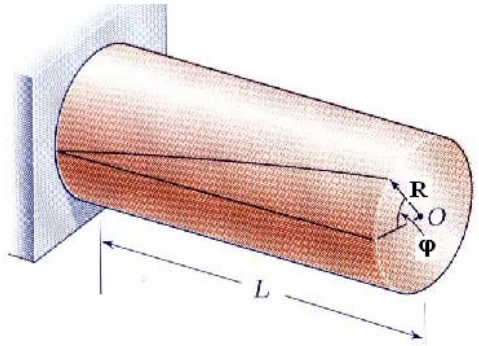
Ôn tập



	Kéo (nén) đúng tâm	Xoắn thuần túy
Nội lực	N_z	M_z
Ứng suất	$\sigma_z = \frac{N_z}{A}$	$\tau = \frac{M_z}{I_p} \rho$
Phân bố ứng suất	 <p style="text-align: center;">$\sigma_z = const$</p>	 <p style="text-align: center;">$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p}$</p>

Ôn tập



	Kéo (nén) đúng tâm	Xoắn thuần túy
Định luật Hooke	$\sigma_z = E \varepsilon_z$	$\tau = G \gamma$
Biến dạng	 $\Delta L = \int_0^L \frac{N_z dz}{EA} = \left(\frac{N_z L}{EA} \right)$	 $\varphi = \int_0^L \frac{M_z dz}{GI_p} = \left(\frac{M_z L}{GI_p} \right)$
Biến dạng	$\Delta L = \sum_{i=1}^n \Delta L_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_{zi} L_i}{(EA)_i}$	$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{M_{zi} L_i}{(GI_p)_i}$

Câu hỏi ???





Thank you for your attention



SỨC BỀN VẬT LIỆU

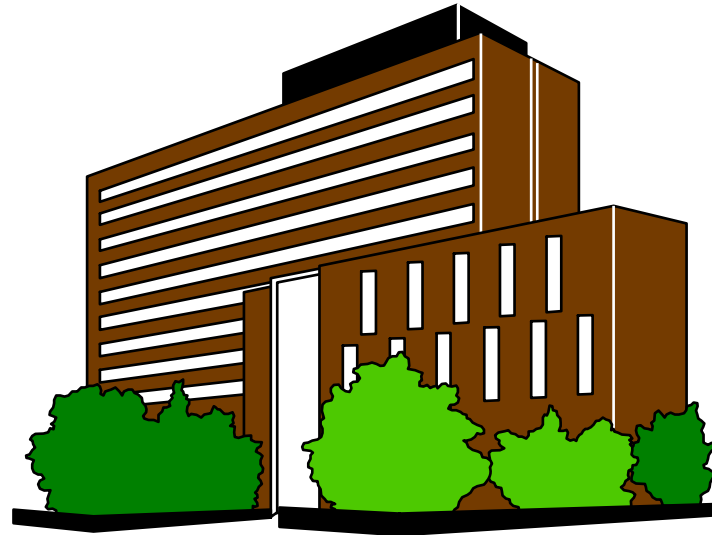
Trần Minh Tú
Đại học xây dựng

July 2010

tpnt2002@yahoo.com

Chương 6

THANH CHỊU UỐN PHẪNG



NỘI DUNG

SB1 – nghiên cứu *ứng suất, biến dạng, chuyển vị* trong thanh dưới tác dụng của các trường hợp chịu lực cơ bản

Chương 2;
Kéo (nén)
đúng tâm

Chương 5:
 Xoắn

UỐN

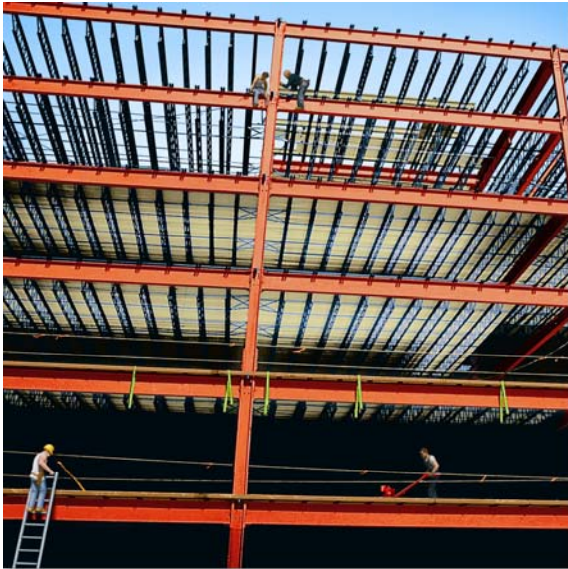
6.1. Khái niệm chung

6.2. Uốn thuần túy thanh thẳng

6.3. Uốn ngang phẳng thanh thẳng

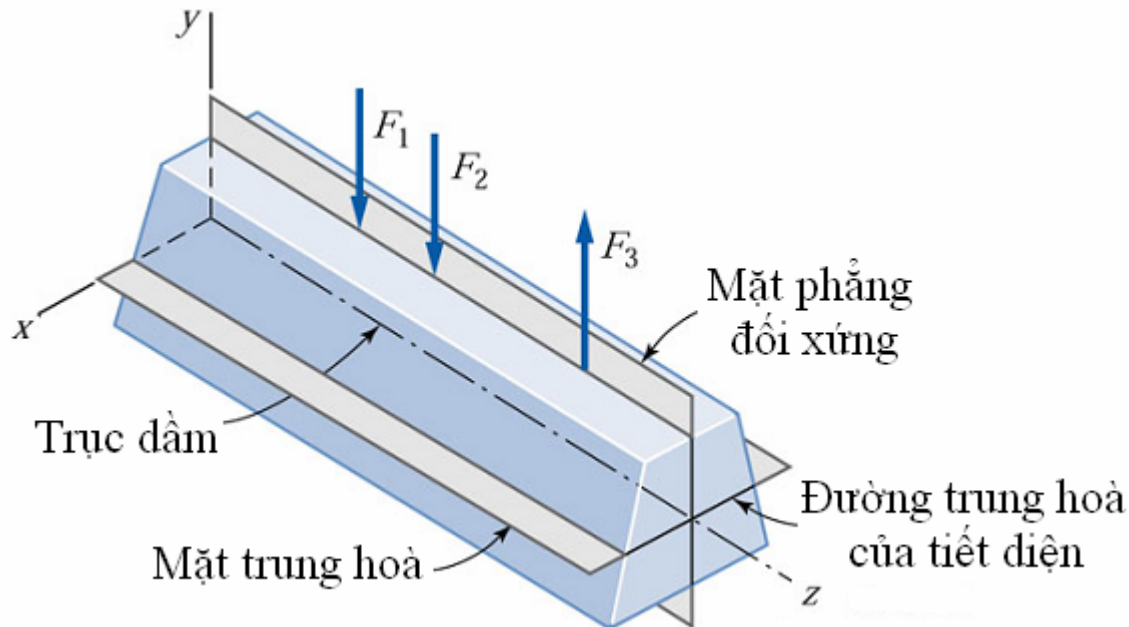
6.1. Khái niệm chung (1)

- ❖ **Thanh chịu uốn:** khi có tác dụng của ngoại lực trực thanh thay đổi độ cong
- ❖ **Dầm:** thanh chịu uốn



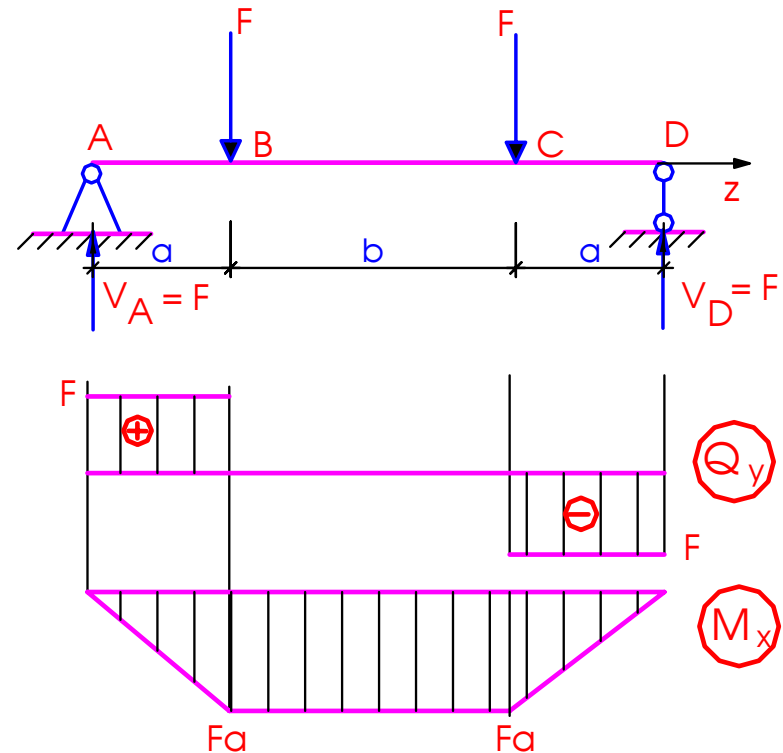
6.1. Khái niệm chung (2)

- ❖ **Mặt phẳng tải trọng:** mặt phẳng chứa tải trọng và trục thanh
- ❖ **Mặt phẳng quán tính chính trung tâm:** mặt phẳng chứa trục thanh và 1 trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang.
- ❖ **Giới hạn nghiên cứu:** Dầm với mặt cắt ngang có ít nhất 1 trục đối xứng (chữ I, T, chữ nhật, tròn,...); mặt phẳng tải trọng trùng mặt phẳng đối xứng của dầm => **Uốn phẳng**

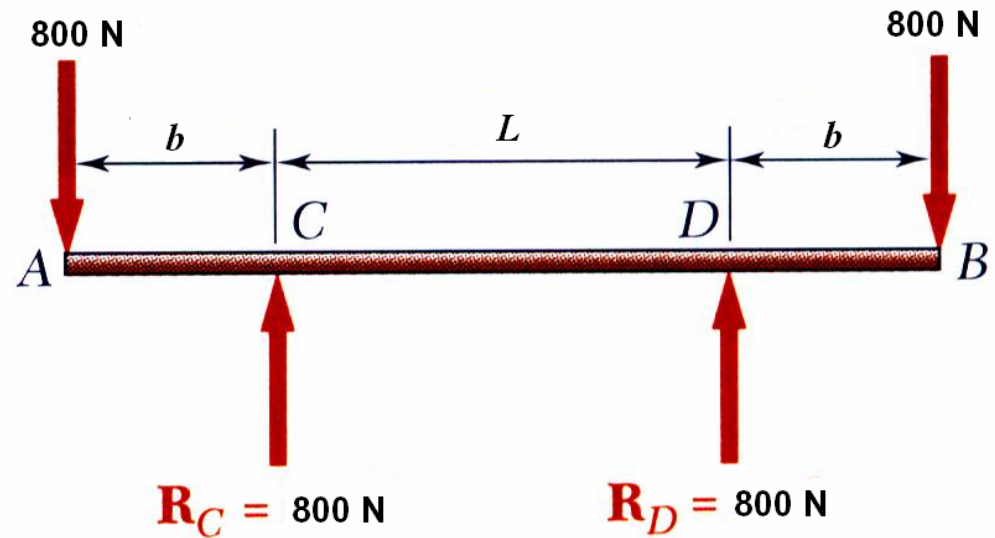
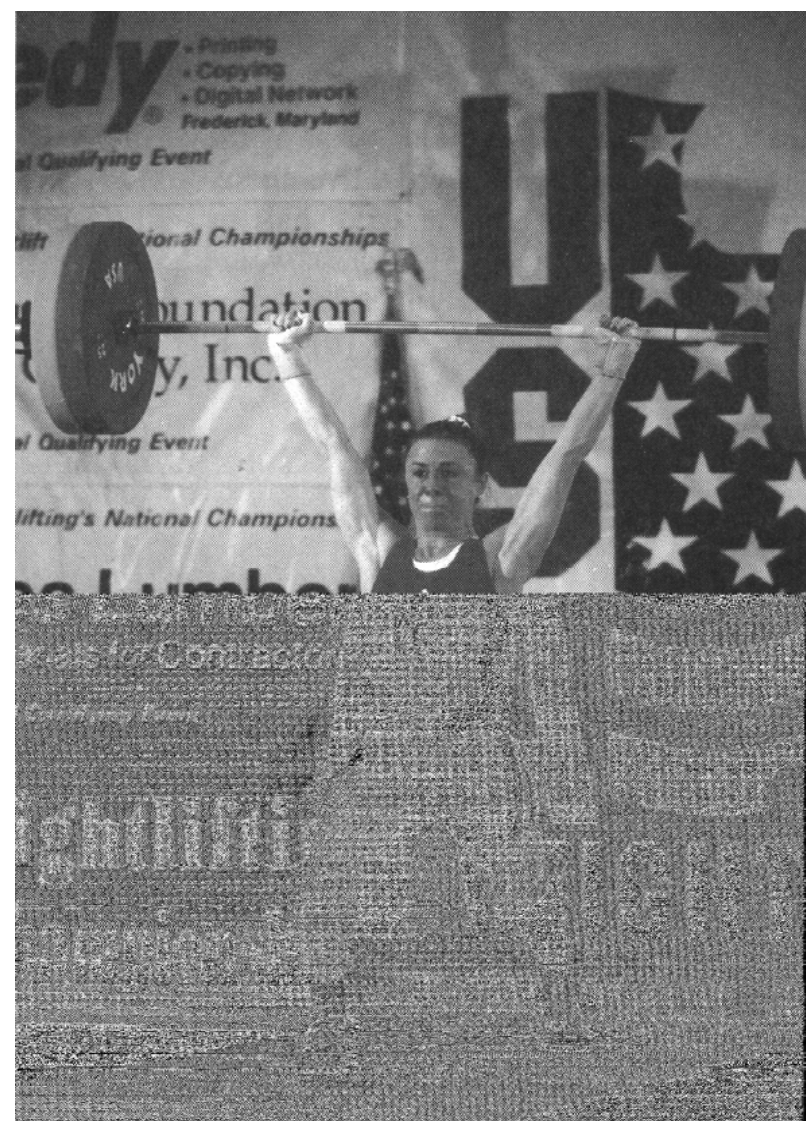


6.1. Khái niệm chung (3)

- ❖ Phân loại uốn phẳng
 - Uốn thuần túy phẳng
 - Uốn ngang phẳng
- ❖ Ví dụ: thanh chịu uốn phẳng
 - Trên đoạn BC: $M_x \neq 0, Q_y = 0$
=> Uốn thuần túy phẳng
 - Trên đoạn AB, CD: $M_x \neq 0, Q_y \neq 0$
=> Uốn ngang phẳng



6.2. Uốn thuần túy phẳng (1)



Uốn thuần túy phẳng

6.2. Uốn thuần túy phẳng (2)

- 1. Định nghĩa:** Thanh gọi là chịu uốn thuần túy nếu trên các mặt cắt ngang của nó chỉ tồn tại thành phần ứng lực là mômen uốn M_x (hoặc M_y) nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm.

Tải trọng gây uốn: nằm trong mặt phẳng đi qua trục thanh và vuông góc với trục thanh

- 2. Các giả thiết về biến dạng của thanh**

a. Thí nghiệm



6.2. Uốn thuần túy phẳng (3)

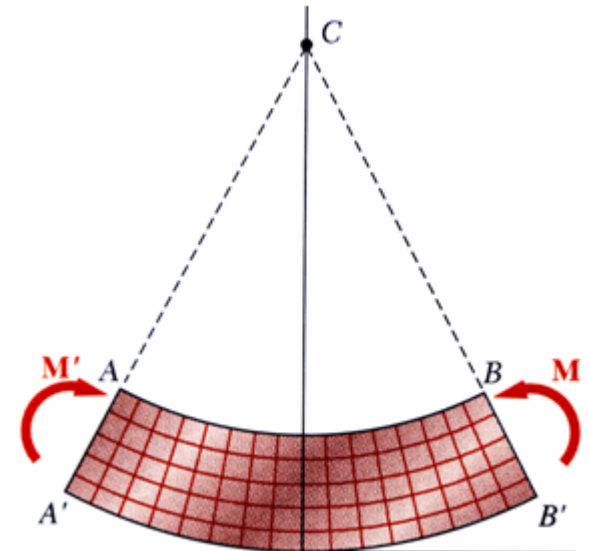
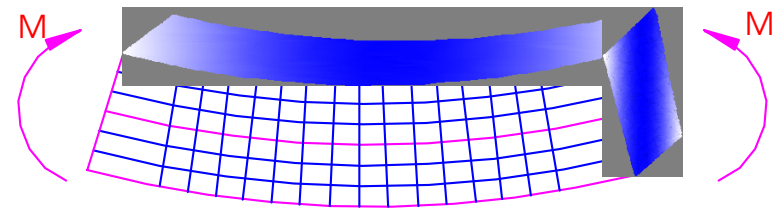
Vạch trên bề mặt ngoài của thanh

- Hệ những đường thẳng // trục thanh => thớ dọc
- Hệ những đường thẳng vuông góc với trục thanh => mặt cắt ngang

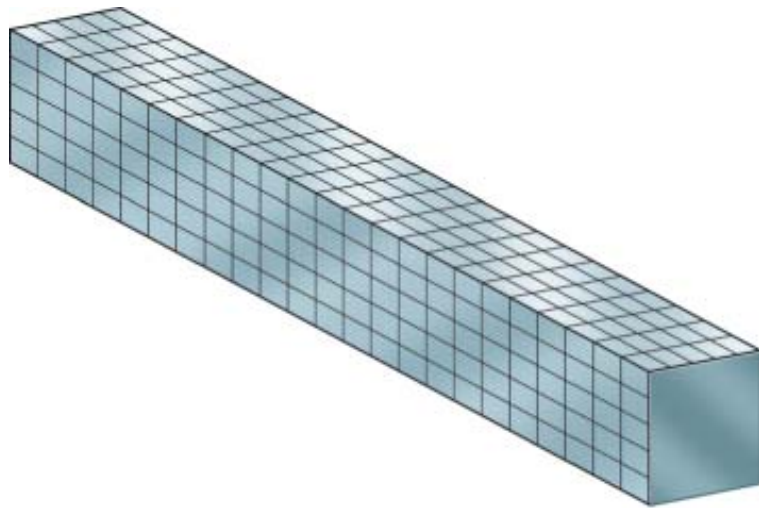
Cho thanh chịu uốn thuần túy phẳng

QUAN SÁT

- Các đường thẳng // trục thanh => đường cong // trục, khoảng cách giữa các đường cong kề nhau không đổi
- Các đường thẳng vuông góc với trục thanh => vẫn thẳng và vuông góc với trục thanh
- Các thớ phía trên bị co (chịu nén), các thớ dưới bị giãn (chịu kéo)

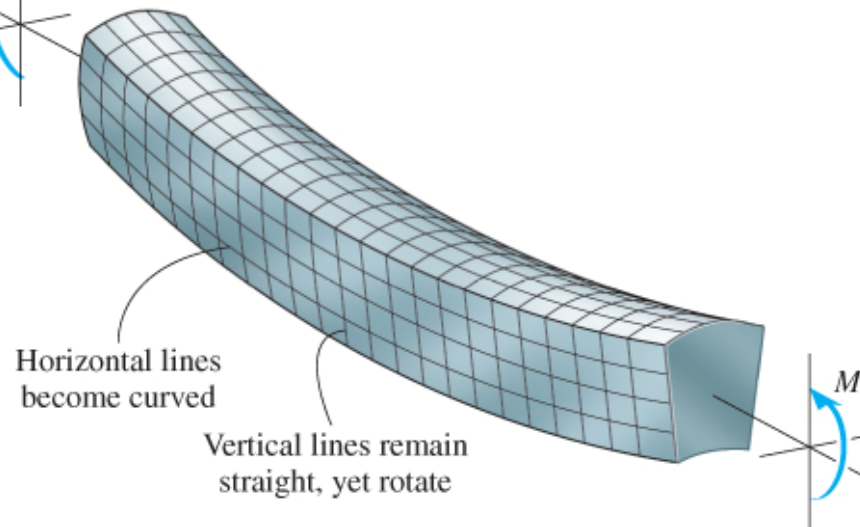


Biến dạng của thanh chịu uốn



Before deformation

(a)



Horizontal lines
become curved

Vertical lines remain
straight, yet rotate

After deformation

(b)

6.2. Uốn thuần túy phẳng (4)

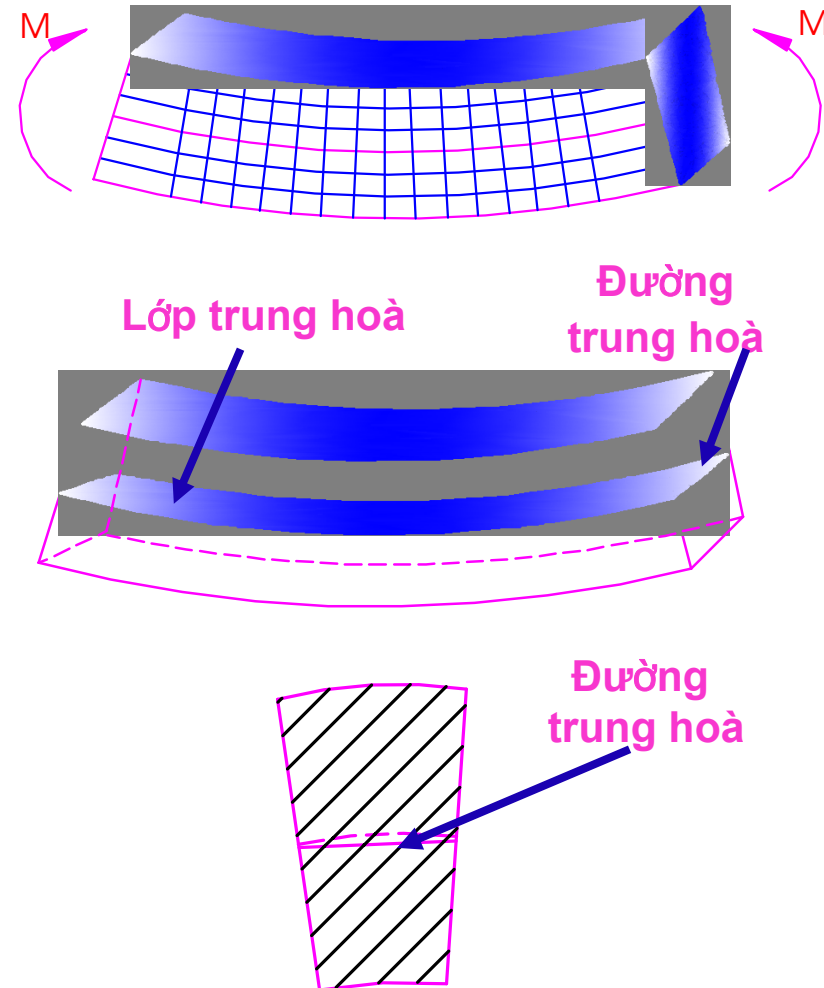
GIẢ THIẾT

- Giả thiết mặt cắt ngang phẳng:** mặt cắt ngang trước biến dạng là phẳng và vuông góc với trục thanh thì sau biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục
- Giả thiết về các thớ dọc:** trong quá trình biến dạng các lớp vật liệu dọc trục không có tác dụng tương hỗ với nhau

Vật liệu làm việc trong miền đàn hồi

Tồn tại lớp trung hoà: gồm các thớ dọc không bị dẫn cũng không bị co.

Đường trung hoà: Giao tuyến của lớp trung hoà với mặt cắt ngang



6.2. Uốn thuần túy phẳng (5)

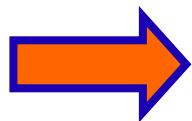
3. Ứng suất trên mặt cắt ngang

a. Biến dạng dài của thớ dọc có khoảng cách y đến thớ trung hoà

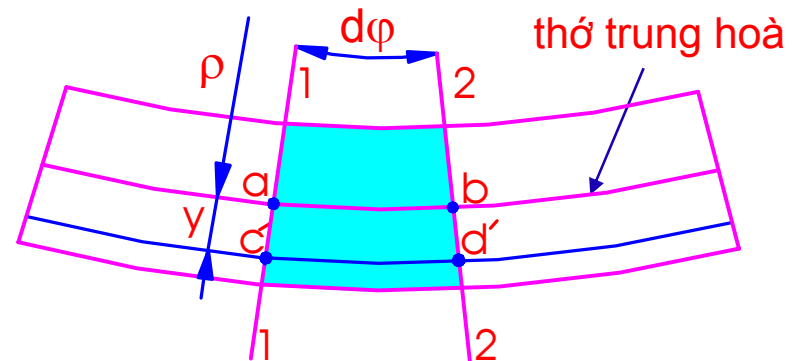
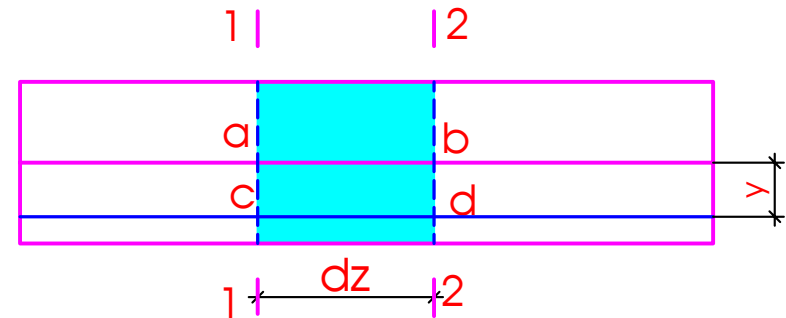
Xét vi phân chiều dài của thớ dọc $dz = cd$. Sau biến dạng cd có độ dài là $c'd'$.

Biến dạng dài tỉ đối:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{c'd' - cd}{cd} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$



$$\varepsilon_z = \frac{y}{\rho}$$



ρ – bán kính cong của thớ trung hoà

6.2. Uốn thuần túy phẳng (6)

b. Quan hệ ứng suất - biến dạng

Xét mặt cắt ngang bất kỳ, phân tố diện tích dA chứa điểm K.

Tách phân tố lập phương chứa điểm K.

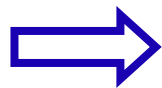
Từ gt 1: góc vuông không thay đổi $\Rightarrow \tau=0$

Từ gt 2: $\sigma_x = \sigma_y = 0$

\Rightarrow Trên mặt cắt ngang chỉ tồn tại duy nhất ứng suất pháp σ_z

Theo định luật Hooke

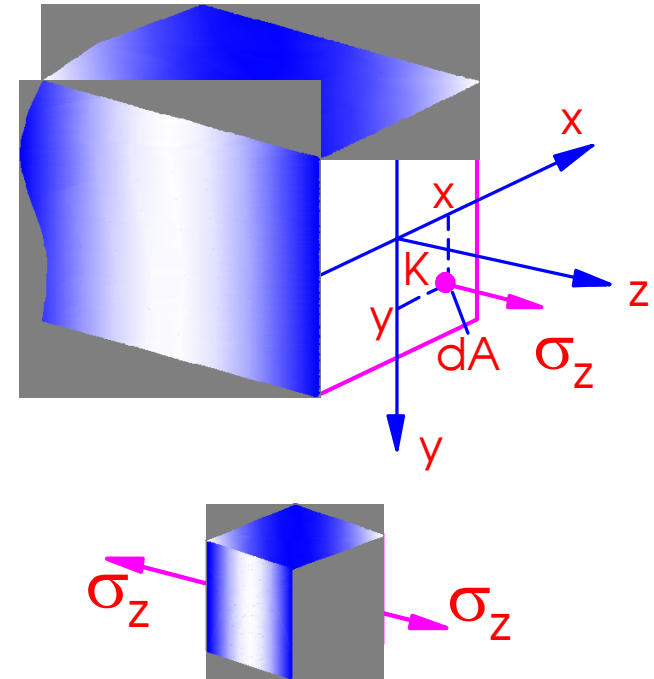
$$\sigma_z = E \varepsilon_z$$



$$\sigma_z = E \frac{y}{\rho}$$



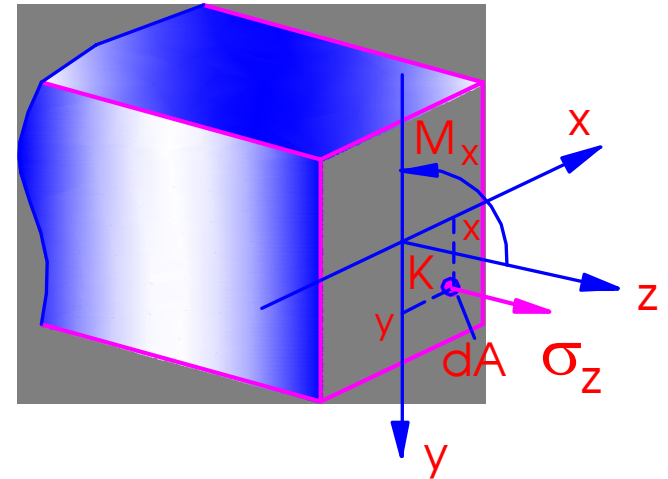
$$\frac{1}{\rho} = \text{????}$$



6.2. Uốn thuần túy phẳng (7)

c. Công thức tính ứng suất pháp

Tải trọng gây uốn nằm trong mặt phẳng yOz và vuông góc với trục thanh nên: $N_z=M_y=0$ và $M_x \neq 0$. Ta có:



$$\oplus N_z = \int_A \sigma_z dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_A y dA = S_x = 0 \Rightarrow$$

$$\oplus M_y = \int_A x \sigma_z dA = \frac{E}{\rho} \int_A xy dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_A xy dA = I_{xy} = 0 \Rightarrow$$

Đường trung hoà đi qua trọng tâm của mặt cắt ngang

Hệ trục Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm

6.2. Uốn thuần túy phẳng (8)

$$\oplus M_x = \int_A y \sigma_z dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}}$$

ρ – bán kính cong của trục trung hoà

M_x – mô men uốn nội lực

EI_x – độ cứng của dầm chịu uốn

\oplus Thay biểu thức của bán kính cong vào biểu thức xác định ứng suất pháp

y – tung độ điểm cần tính ứng suất

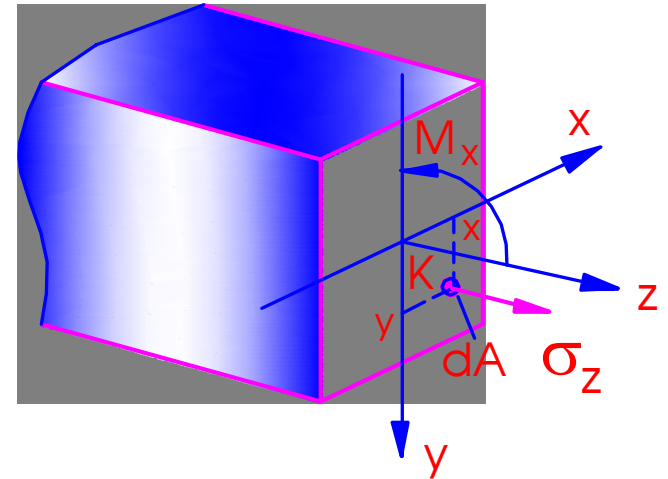
$M_x > 0$: căng thớ dưới

$M_x < 0$: căng thớ trên

\Rightarrow Để thuận tiện ta thường dùng công thức tính toán

$$\sigma_z = E \frac{y}{\rho} \Rightarrow \boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y}$$

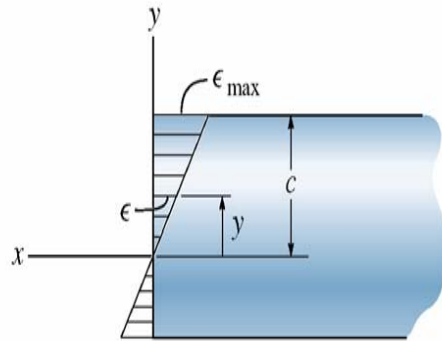
$$\boxed{\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{I_x} |y|} \quad \begin{array}{l} \oplus \text{ thuộc vùng kéo} \\ \ominus \text{ thuộc vùng nén} \end{array}$$



6.2. Uốn thuần túy phẳng (9)

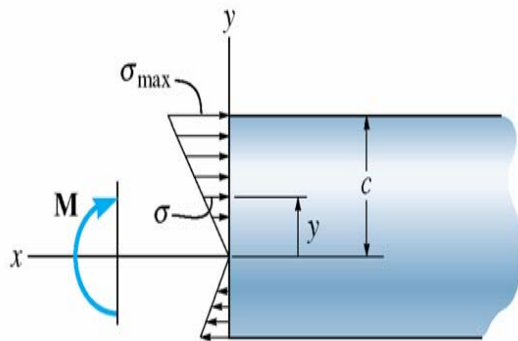
d. Biểu đồ ứng suất pháp

- Các điểm càng xa ĐTH thì trị tuyệt đối ứng suất pháp càng lớn
 - Các điểm nằm trên ĐTH thì có $\sigma_z=0$
 - Các điểm nằm trên đường thẳng // ĐTH thì có $\sigma_z=\text{const}$
- => Biểu diễn sự biến thiên của ứng suất pháp theo chiều cao mặt cắt ngang**
- Biểu đồ ứng suất pháp là đường thẳng đi qua gốc tọa độ => để vẽ được biểu đồ chỉ cần tính ứng suất pháp tại điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang
 - Đánh dấu (+) để biểu diễn phần ứng suất kéo và dấu (-) biểu diễn phần ứng suất nén



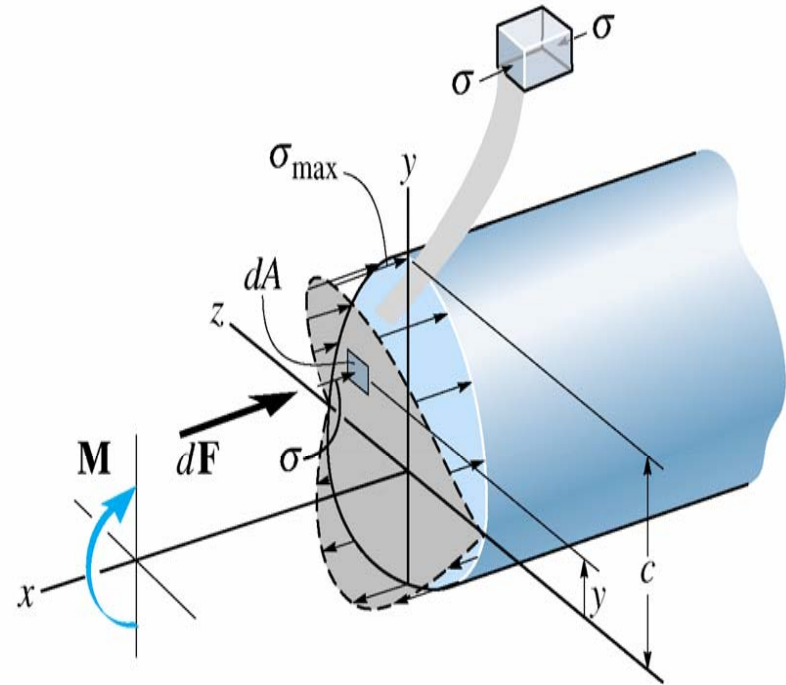
Normal strain variation
(profile view)

(a)



Bending stress variation

(c)



6.2. Uốn thuần túy phẳng (11)

❖ Mặt cắt ngang có hai trục đối xứng

$$\sigma_{\max} = + \frac{|M_x| h}{I_x 2} = \frac{|M_x|}{W_x}$$

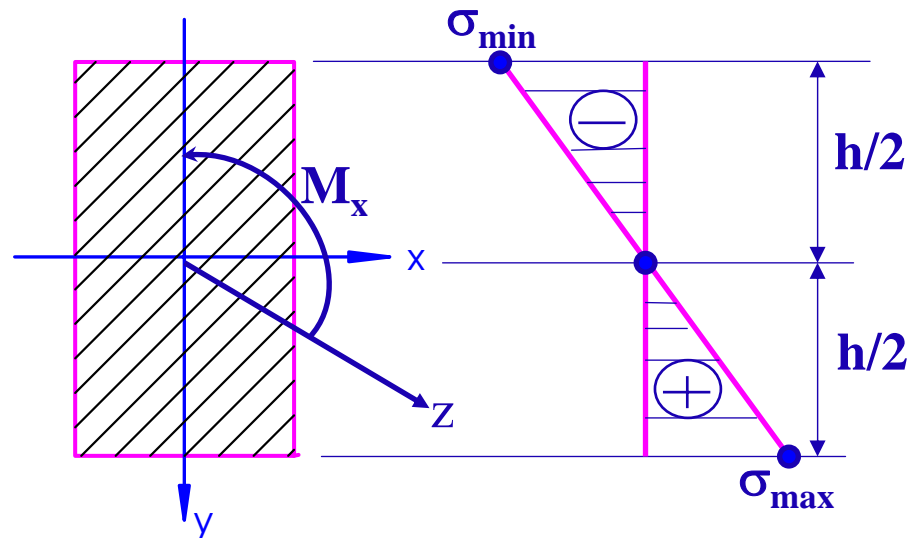
$$\sigma_{\min} = - \frac{|M_x| h}{I_x 2} = - \frac{|M_x|}{W_x}$$

⇒ $\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}|$

$W_x = \frac{I_x}{h/2}$ - mô men chống uốn của mặt cắt ngang

Hình chữ nhật: $W_x = \frac{bh^2}{6}$ Hình tròn: $W_x = \frac{I_x}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3$

Hình vành khăn: $W_x = \frac{I_x}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \eta^4) \approx 0,1D^3 (1 - \eta^4)$ với $\eta = \frac{d}{D}$



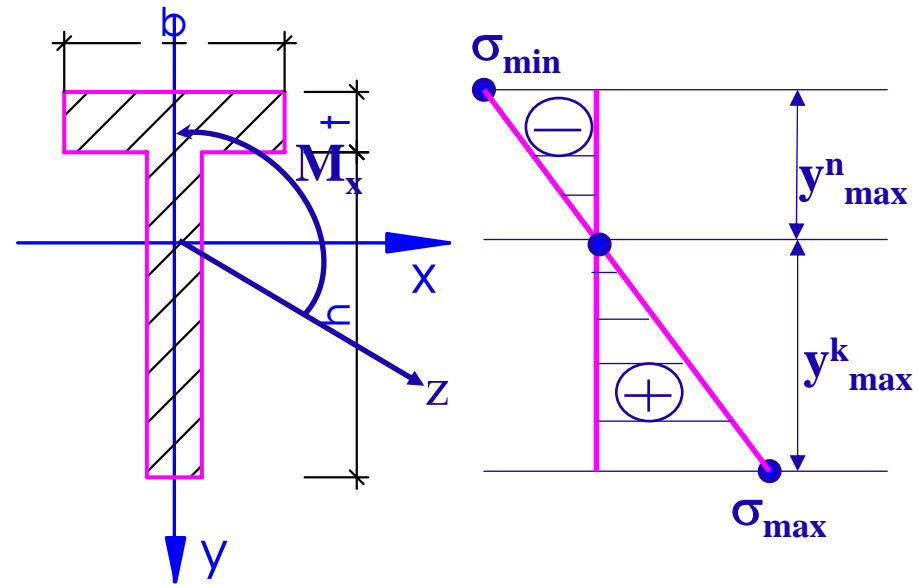
6.2. Uốn thuần túy phẳng (12)

❖ Mặt cắt ngang có 1 trục đối xứng

$$\sigma_{\max} = + \frac{|M_x|}{I_x} |y_{\max}^k| = \frac{|M_x|}{W_x^k}$$

$$\sigma_{\min} = - \frac{|M_x|}{I_x} |y_{\max}^n| = - \frac{|M_x|}{W_x^n}$$

$$W_x^k = \frac{I_x}{|y_{\max}^k|} \quad W_x^n = \frac{I_x}{|y_{\max}^n|}$$



y_{\max}^k - khoảng cách xa ĐTH nhất thuộc vùng chịu kéo

y_{\max}^n - khoảng cách xa ĐTH nhất thuộc vùng chịu nén

6.2. Uốn thuần túy phẳng (13)

4. Điều kiện bền

Dầm làm bằng vật liệu dẻo $\max \{ \sigma_{\max}, |\sigma_{\min}| \} \leq [\sigma]$

Dầm bằng vật liệu giòn $\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k \quad ; \quad |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n$

Ba bài toán cơ bản

- **Kiểm tra điều kiện bền:**

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \leq [\sigma]$$

- **Xác định kích thước của mặt cắt ngang:**

$$W_x \geq \frac{|M_x|}{[\sigma]}$$

- **Xác định tải trọng cho phép:**

$$|M_x| \leq [\sigma] W_x$$

6.2. Uốn thuần túy phẳng (14)

❖ Mặt cắt ngang có hình dáng hợp lý:

- Khả năng chịu lực của dầm lớn nhất
- Tiết kiệm vật liệu nhất

Dầm bằng vật liệu dòn: mặt cắt ngang hợp lý khi đồng thời thỏa mãn

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{|M_x|}{I_x} |y_{\max}^k| = [\sigma]_k \\ |\sigma_{\min}| &= \frac{|M_x|}{I_x} |y_{\max}^n| = [\sigma]_n \end{aligned} \right\} \frac{|y_{\max}^k|}{|y_{\max}^n|} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \quad (*)$$

Mặt cắt ngang không đối xứng qua trục x thỏa mãn đk (*)

Dầm bằng vật liệu dẻo: $[\sigma]_k = [\sigma]_n$

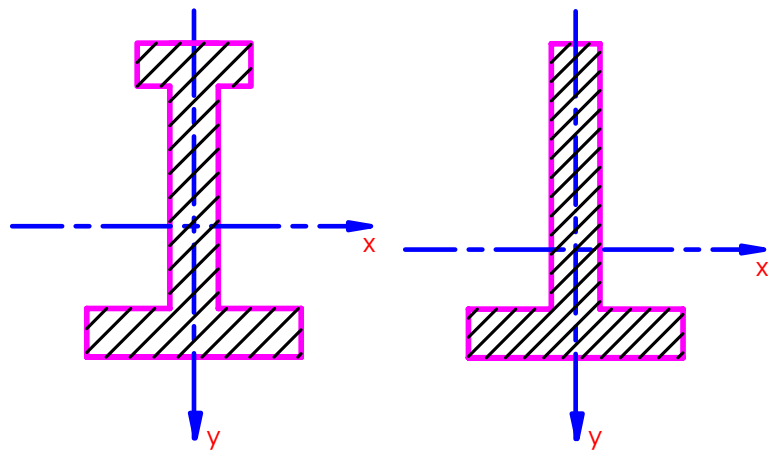
$$\Rightarrow \frac{|y_{\max}^k|}{|y_{\max}^n|} = 1 \Rightarrow$$

Mặt cắt ngang có hai trục đối xứng

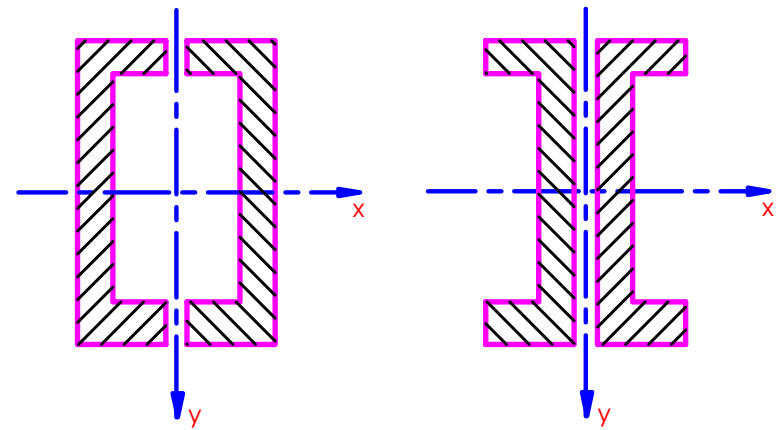
6.2. Uốn thuần túy phẳng (15)

❖ Để tiết kiệm vật liệu

Từ biểu đồ ứng suất, càng xa ĐTH ứng suất càng lớn
=> đưa vật liệu ra xa ĐTH



Vật liệu dòn



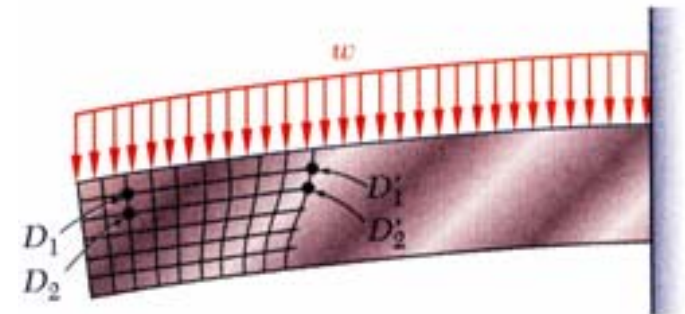
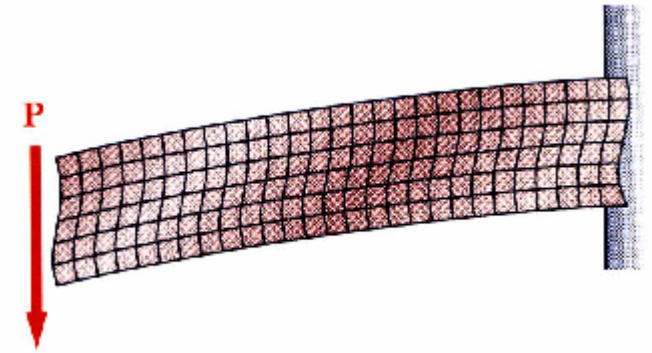
Vật liệu dẻo

6.3. Uốn ngang phẳng (1)

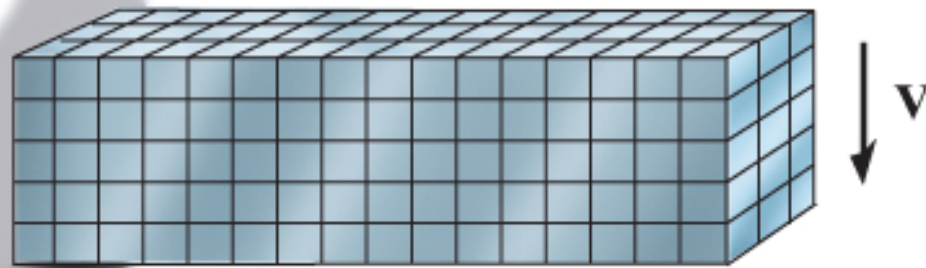
1. Định nghĩa

Thanh gọi là chịu uốn ngang phẳng nếu trên các mặt cắt ngang của nó đồng thời có cặp ứng lực là mômen uốn M_x , lực cắt Q_y nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm.

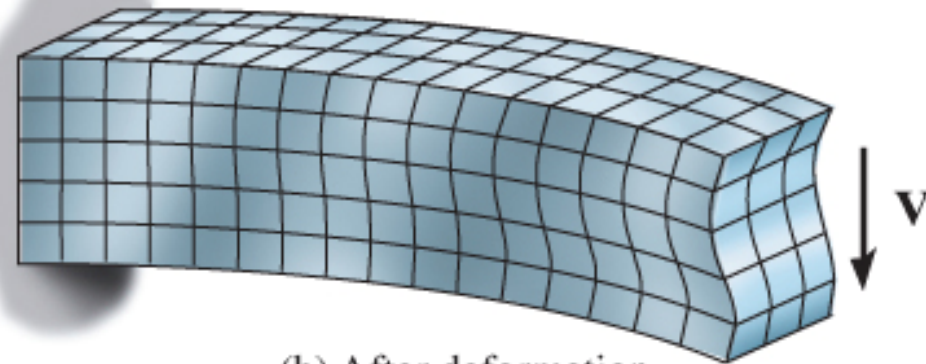
⇒ Giả thiết mặt cắt ngang phẳng không còn đúng



Biến dạng thanh chịu uốn ngang phẳng



(a) Before deformation



(b) After deformation

6.3. Uốn ngang phẳng (2)

- Mô men uốn M_x \Rightarrow Ứng suất pháp
- Lực cắt Q_y \Rightarrow Ứng suất tiếp

Ứng suất pháp

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

Trong đó

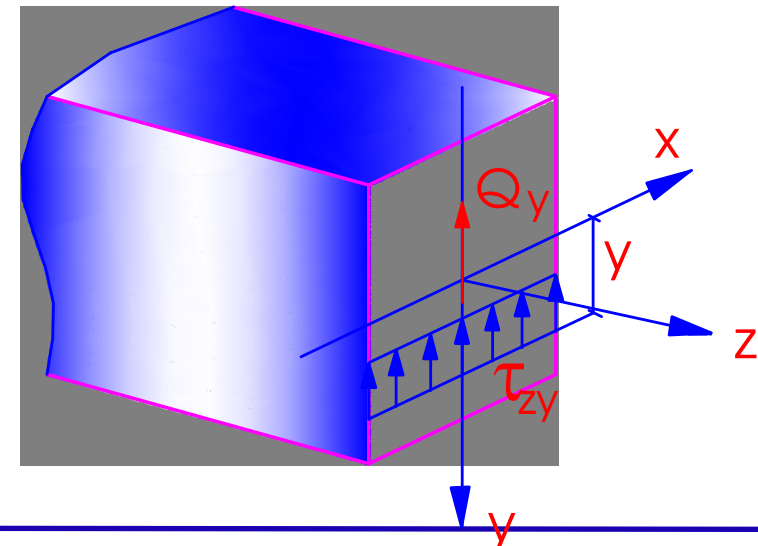
- M_x là mômen uốn nội lực trên mặt cắt ngang
- I_x là mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục quán tính chính trung tâm Ox
- y là tung độ của điểm tính ứng suất

6.3. Uốn ngang phẳng (3)

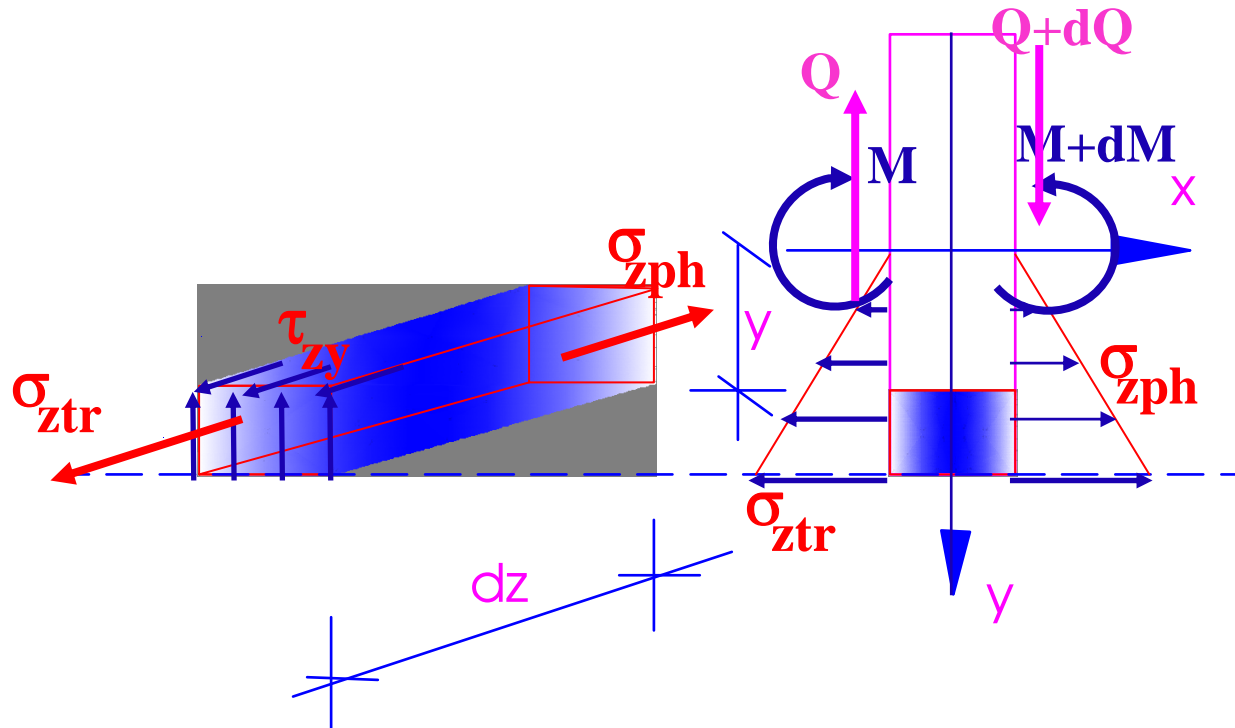
2. Ứng suất tiếp:

Với mặt cắt ngang dạng hình chữ nhật hẹp $b \ll h$.
Ứng suất tiếp tuân theo giả thiết Zuravxki:

- ❖ Có phương // với phương lực cắt Q_y , cùng chiều lực cắt Q_y
- ❖ Phân bố đều trên chiều rộng tiết diện
- ❖ Ký hiệu τ_{zy}
- ❖ Công thức Zuravxki ???



6.3. Uốn ngang phẳng (*)



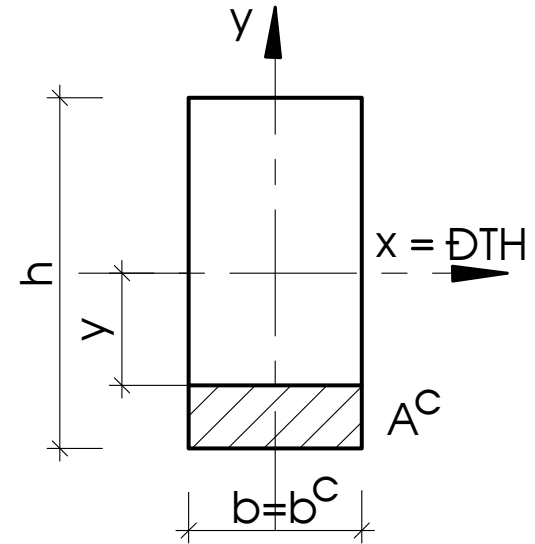
❖ Xét cân bằng phân tử

$$\sum Z = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{zy} =$$

6.3. Uốn ngang phẳng (4)

❖ Công thức Zuravski

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b^c}$$



Q_y là lực cắt theo phương y tại mặt cắt ngang.

I_x là mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục x.

b^c chiều rộng của mặt cắt ngang tại điểm tính ứng suất

A^c là phần diện tích bị cắt (là phần diện tích giới hạn bởi chiều rộng mặt cắt ngang tại điểm tính ứng suất và mép ngoài của mặt cắt ngang).

S_x^c là mô men tĩnh của phần diện tích bị cắt

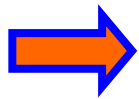
6.3. Uốn ngang phẳng (5)

❖ Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang chữ nhật

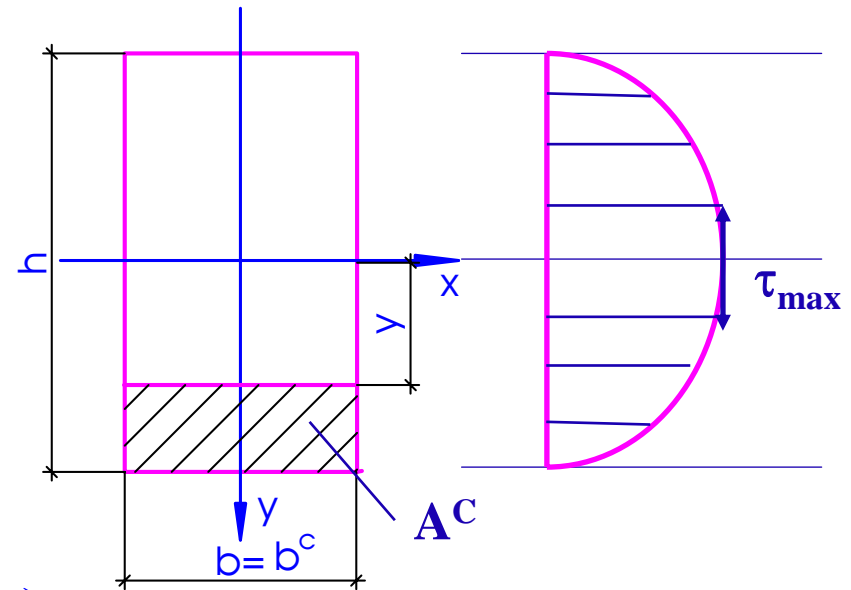
$$b^c = b; I_x = bh^3/12;$$

$$S_x^c = y_c \cdot A^c \Rightarrow$$

$$S_x^c = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) \left(\frac{h}{2} - y \right) b = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$



$$\tau_{zy} = \frac{12Q_y}{bh^3 \cdot b} \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{6Q_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$



$$\Rightarrow y = \pm \frac{h}{2} \Rightarrow \tau_{zy} = 0$$

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \tau_{max} = \frac{3Q_y}{2bh}$$

6.3. Uốn ngang phẳng (6)

❖ Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang chữ I

Trong bảng thép định hình, đã cho các kích thước h , b , s , d , I_x , S_x – mô men tĩnh của $1/2$ tiết diện. Ta có

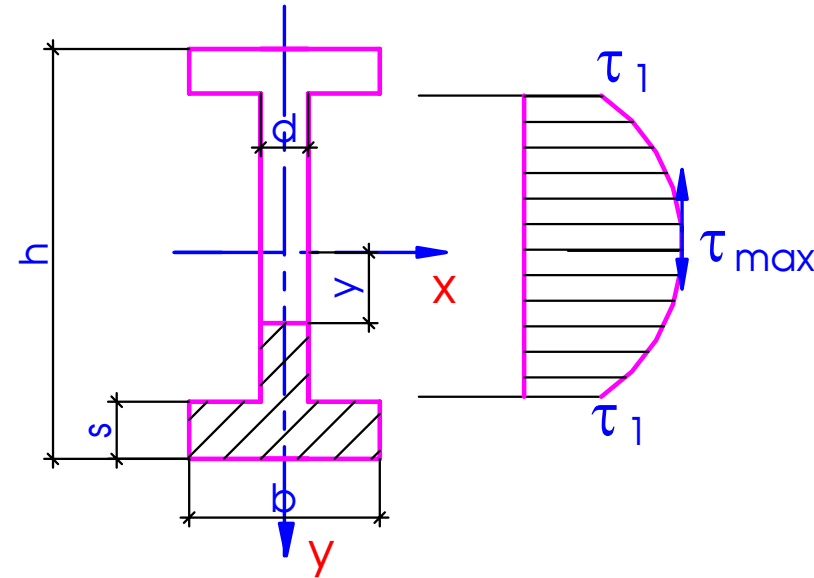
- Phần bụng: $b^c = d$

$$S_x^C = S_x - \frac{1}{2} d \cdot y^2$$

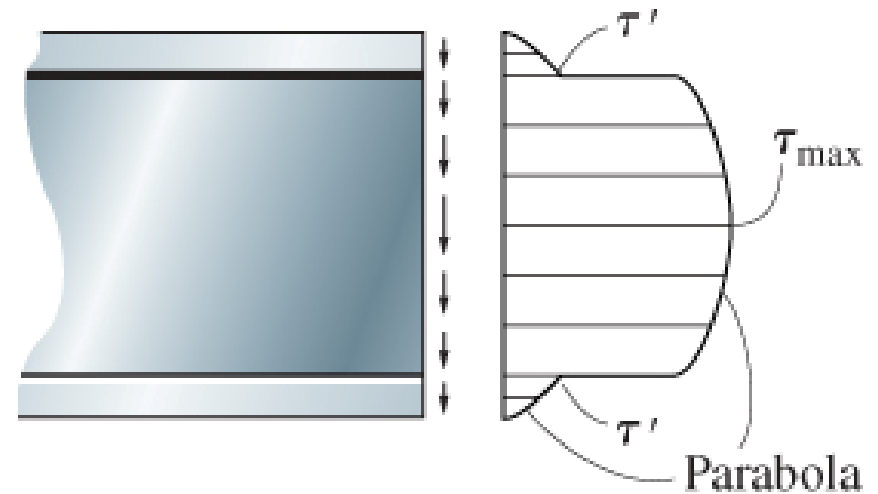
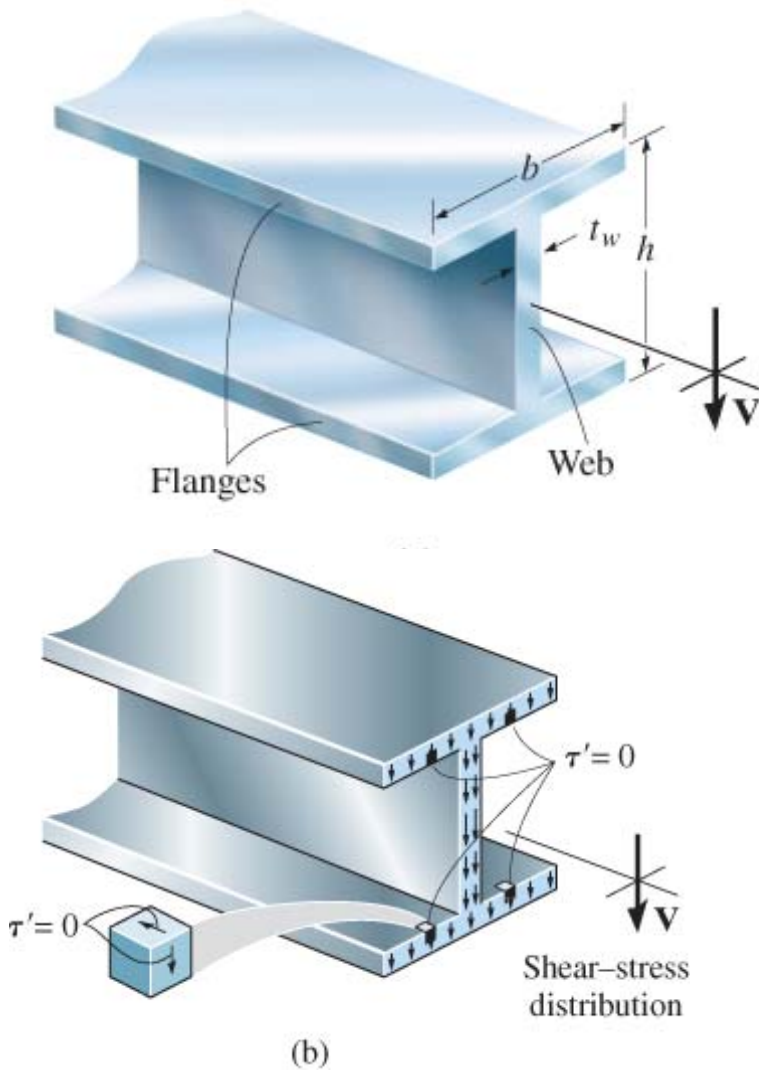
$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{I_x d} \left(S_x - \frac{1}{2} d \cdot y^2 \right)$$

$$y = 0 \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{Q_y S_x}{I_x d}$$

$$y = \pm \left(\frac{h}{2} - s \right) \Rightarrow \tau_1 = \frac{Q_y}{I_x d} \left[S_x - \frac{1}{2} d \left(\frac{h}{2} - s \right)^2 \right]$$



Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện chữ I



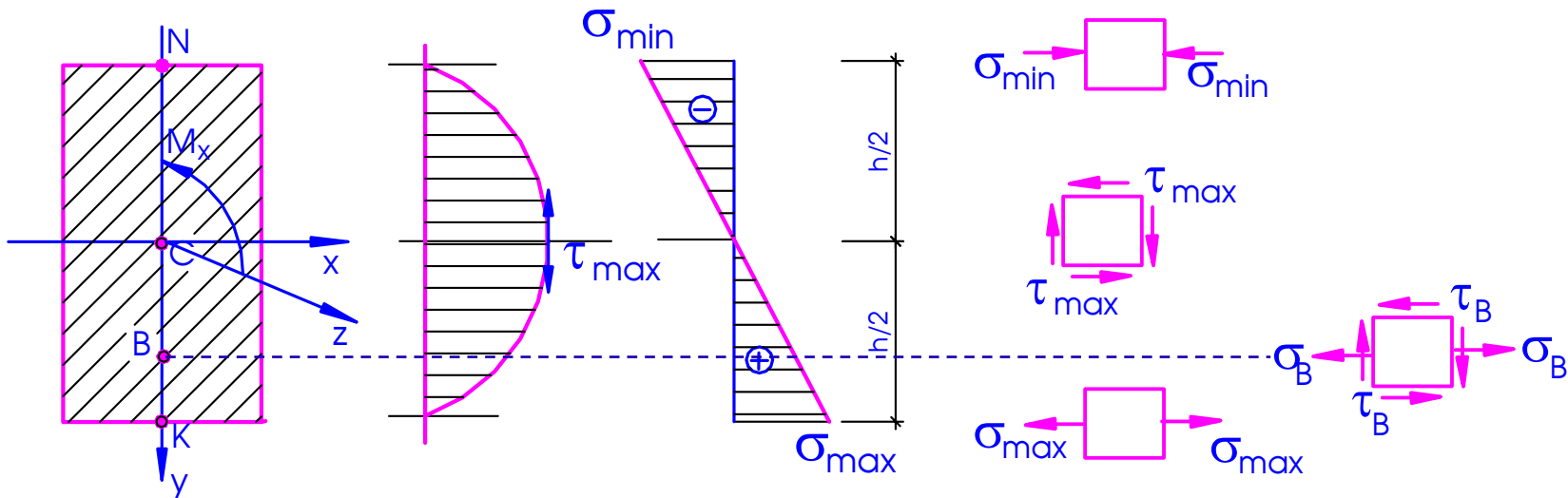
Intensity of shear-stress distribution (profile view)

(c)

6.3. Uốn ngang phẳng (7)

4. Điều kiện bền

Xét tiết diện chữ nhật chịu uốn ngang phẳng. Biểu đồ ứng suất trên tiết diện:



K, N - trạng thái ứng suất đơn

C- trạng thái ứng suất trượt thuần túy

B- trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt

6.3. Uốn ngang phẳng (8)

❖ Kiểm tra bền cho trạng thái ứng suất đơn

Mặt cắt ngang nguy hiểm: mặt cắt có mô men uốn lớn nhất (vật liệu dẻo: trị tuyệt đối của mô men lớn nhất, vật liệu giòn: mô men âm và mô men dương lớn nhất)

Vật liệu dẻo:

$$\max \left\{ \sigma_{\max}, \left| \sigma_{\min} \right| \right\} \leq [\sigma]$$

Vật liệu giòn:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k \quad ; \quad \left| \sigma_{\min} \right| \leq [\sigma]_n$$

6.3. Uốn ngang phẳng (9)

❖ Kiểm tra bền cho trạng thái ứng suất trượt thuần túy

Mặt cắt nguy hiểm: Mặt cắt có trị tuyệt đối Q_y lớn nhất

Vật liệu dẻo:

$$\max |\tau_{\max}| \leq [\tau]$$

$$[\tau] = \frac{\tau_0}{n} \quad - \text{nếu dùng thực nghiệm tìm } \tau_0$$

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \quad - \text{nếu dùng thuyết bền 3}$$

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad - \text{nếu dùng thuyết bền 4}$$

Vật liệu giòn: Dùng thuyết bền Mohr

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]_k}{1 + \alpha} = [\tau]$$

$$\alpha = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}$$

6.3. Uốn ngang phẳng (10)

❖ Kiểm tra bền cho trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt

Mặt cắt ngang nguy hiểm: có trị tuyệt đối M_x và Q_y cùng lớn

Điểm kiểm tra: điểm có ứng suất pháp và ứng suất tiếp cùng lớn (điểm tiếp giáp giữa lòng và đế với mặt cắt ngang chữ I)

Dầm bằng vật liệu dẻo:

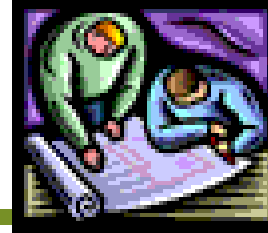
$$\sigma_{td} = \sqrt{(\sigma_z)^2 + 4(\tau_{zy})^2} \quad (\text{TB3})$$

$$\sigma_{td} = \sqrt{(\sigma_z)^2 + 3(\tau_{zy})^2} \quad (\text{TB4})$$

Dầm bằng vật liệu giòn:

$$\frac{1-\alpha}{2}\sigma_z + \frac{1+\alpha}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma]_k$$

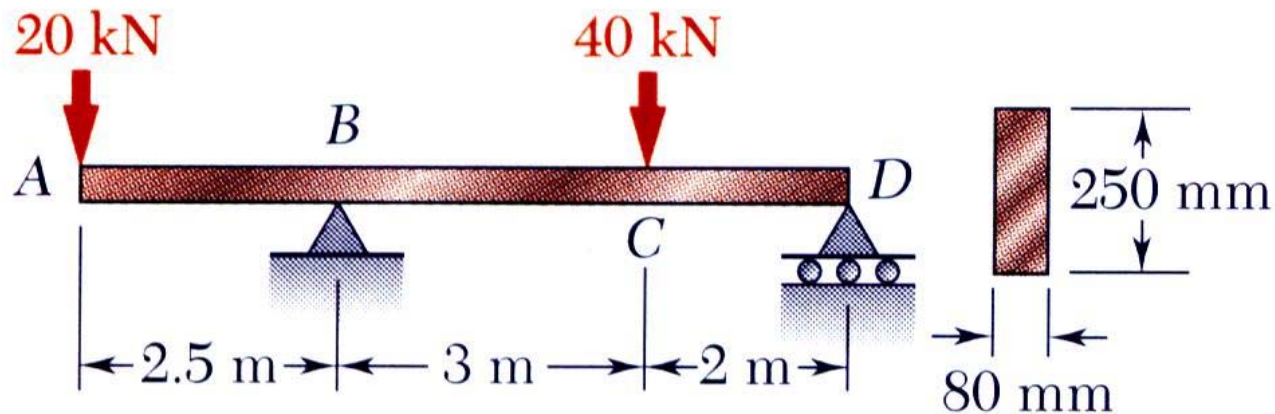
BÀI TẬP – Ví dụ 6.1 (1)



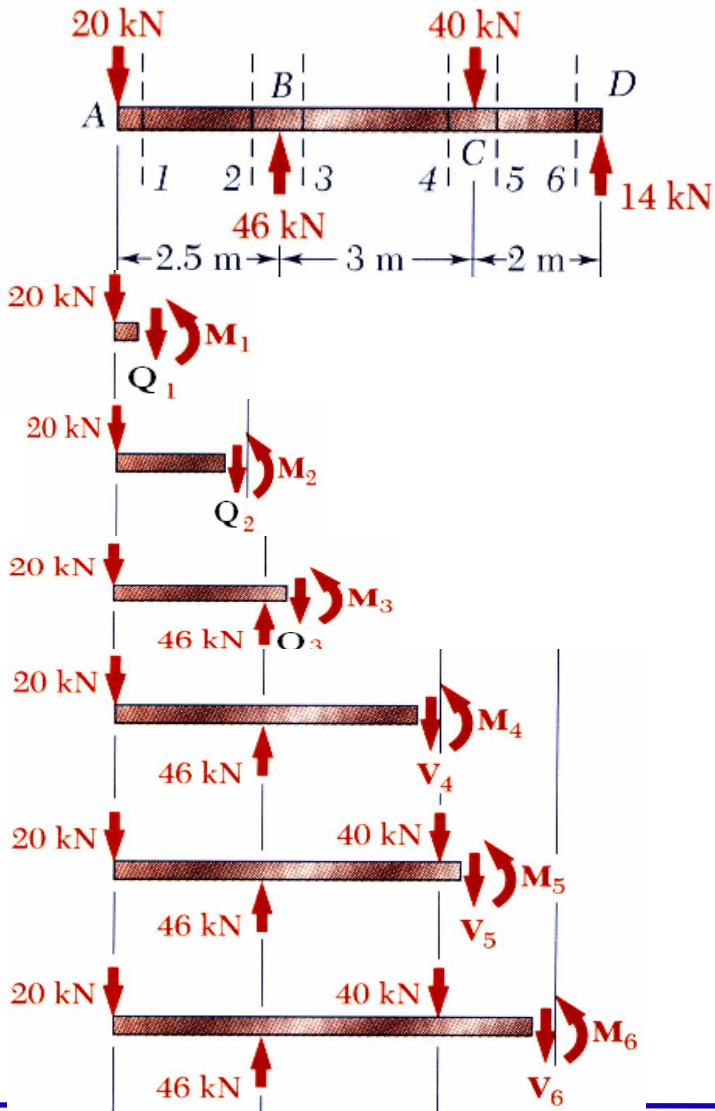
ĐỀ BÀI:

Cho dầm mặt cắt ngang chữ nhật chịu tải trọng như hình vẽ

- Vẽ biểu đồ các thành phần ứng lực
- Xác định ứng suất pháp cực đại tại mặt cắt ngang nguy hiểm
- Kiểm tra điều kiện bền cho dầm, biết $[\sigma]=1,5 \text{ kN/cm}^2$



Ví dụ 6.1 (2)



BÀI GIẢI:

- Giải phóng liên kết và xác định các phản lực

$$\sum F_y = 0 = \sum M_B : R_B = 40 \text{ kN} \quad R_D = 14 \text{ kN}$$

- Dùng phương pháp mặt cắt

- Mặt cắt 1 - 1

$$\sum F_y = 0 \quad -20 \text{ kN} - Q_1 = 0 \quad Q_1 = -20 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0 \quad (20 \text{ kN})(0 \text{ m}) + M_1 = 0 \quad M_1 = 0$$

- Mặt cắt 2 - 2

$$\sum F_y = 0 \quad -20 \text{ kN} - Q_2 = 0 \quad Q_2 = -20 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0 \quad (20 \text{ kN})(2.5 \text{ m}) + M_2 = 0 \quad M_2 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

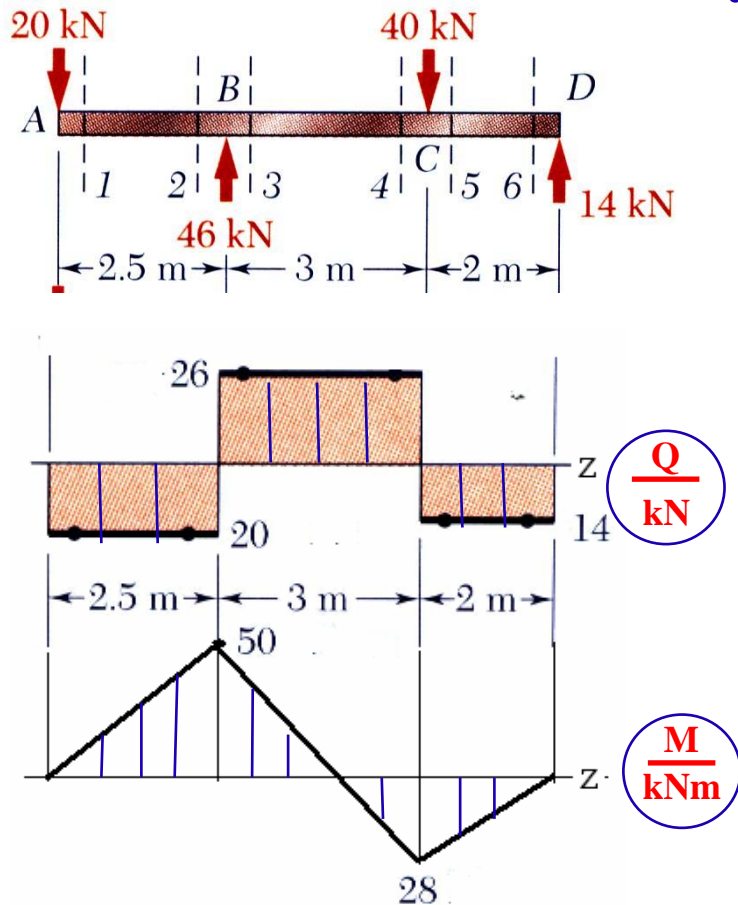
- Mặt cắt 3 - 3 $Q_3 = +26 \text{ kN} \quad M_3 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$

- Mặt cắt 4 - 4 $Q_4 = +26 \text{ kN} \quad M_4 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$

- Mặt cắt 5 - 5 $Q_5 = -14 \text{ kN} \quad M_5 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$

- Mặt cắt 6 - 6 $Q_6 = -14 \text{ kN} \quad M_6 = 0$

Ví dụ 6.1 (3)



- Từ biểu đồ các thành phần ứng lực ta thấy, mặt cắt ngang nguy hiểm tại B có:

$$Q_{\max} = 26 \text{ kN} \quad M_{\max} = |M_B| = 50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- Ứng suất pháp cực đại

$$W_x = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} (0.080 \text{ m})(0.250 \text{ m})^2 = 833.33 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} = \frac{50 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}}{833.33 \times 10^{-6} \text{ m}^3}$$

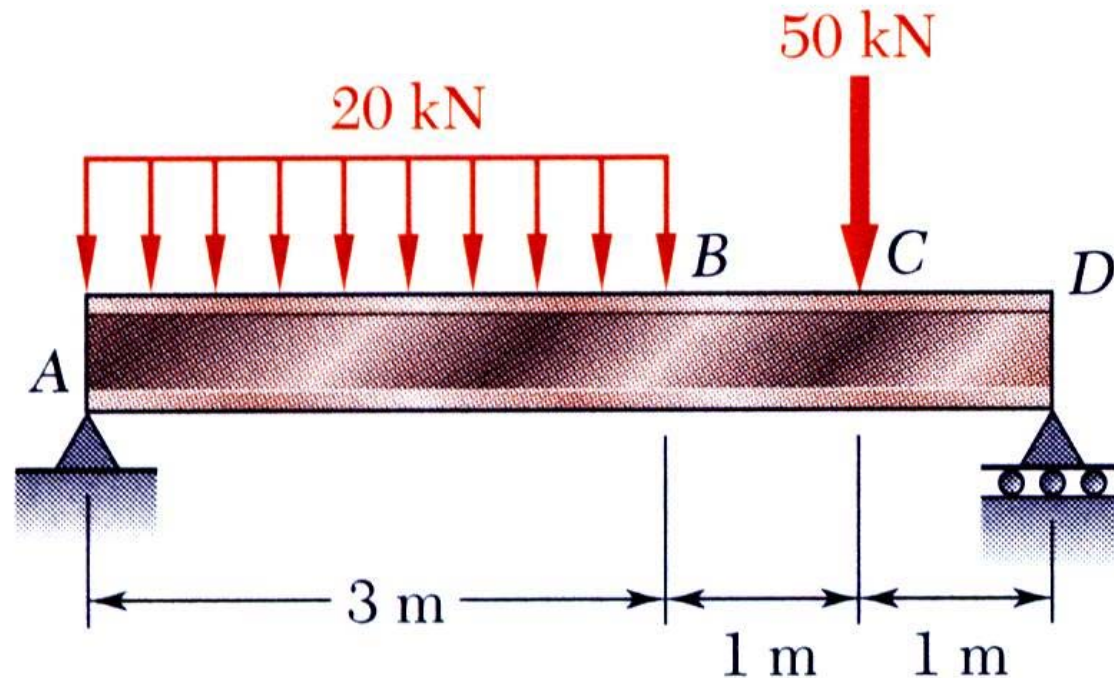
$$\sigma_{\max} = 60.0 \times 10^6 \text{ Pa} = 60 \text{ MPa} = 6 \text{ kN/cm}^2$$

- Ta thấy: $\sigma_{\max} > [\sigma] \Rightarrow$ Dầm không thỏa mãn điều kiện bền

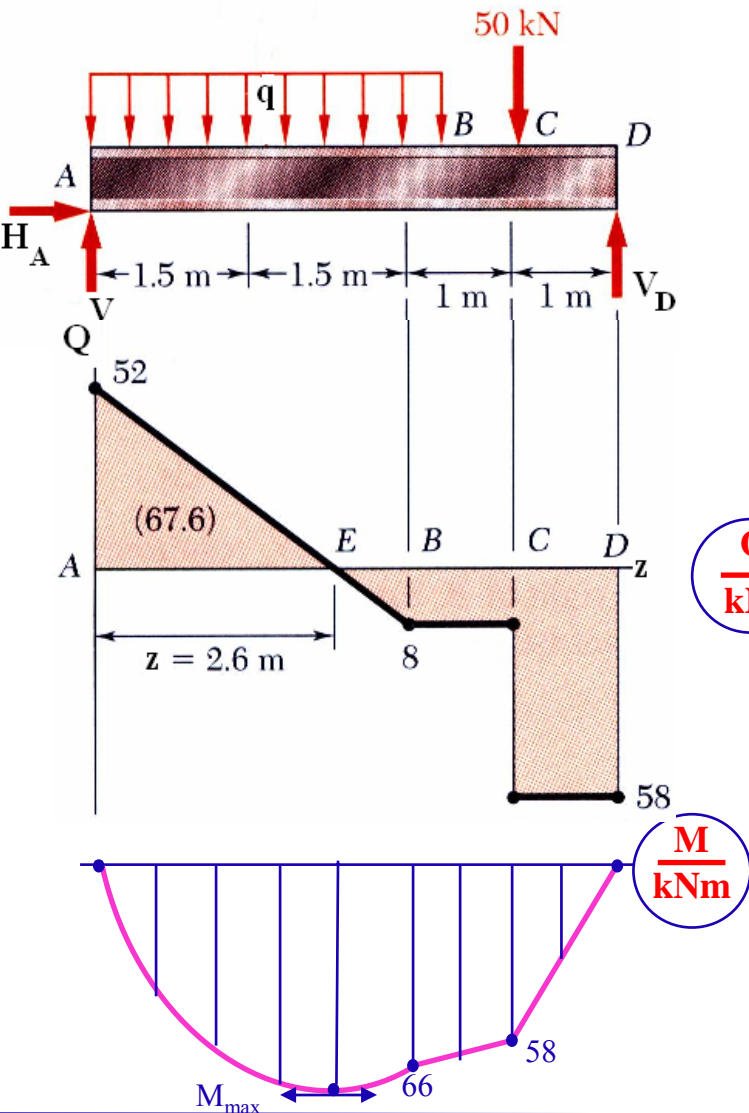
Ví dụ 6.2 (1)



Cho dầm mặt cắt ngang thép chữ I chịu tải trọng như hình vẽ. Biết ứng suất cho phép của thép $[\sigma]=16 \text{ kN/cm}^2$. Hãy chọn số hiệu mặt cắt ngang thép theo điều kiện bền ứng suất pháp của dầm.



Ví dụ 6.2 (2)



- Xác định phản lực liên kết tại A và D

$$\sum M_A = V_D (5 \text{ m}) - (60 \text{ kN})(1.5 \text{ m}) - (50 \text{ kN})(4 \text{ m}) = 0$$

$$\Rightarrow V_D = 58.0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = V_A + 58.0 \text{ kN} - 60 \text{ kN} - 50 \text{ kN} = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 52.0 \text{ kN}$$

- Vẽ biểu đồ lực cắt và mô men uốn nội lực.

$\frac{Q}{\text{kN}}$

$$Q_A = V_A = 52.0 \text{ kN}$$

$$Q_B - Q_A = S_q = -60 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow Q_B = -8 \text{ kN}$$

- Mô men lớn nhất tại:

$$Q = 0 \Rightarrow z = 2,6 \text{ m.}$$

$$|M|_{\max} = S_Q(AE) = 67.6 \text{ kNm}$$

$\frac{M}{\text{kNm}}$

Ví dụ 6.2 (3)



<i>Thep</i>	W_x [mm ³]
I 27	371
I 27a	407
I 30	472
I 30a	518
I 33	597

- Điều kiện bền theo ứng suất pháp của dầm:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} \leq [\sigma] \Rightarrow W_x \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]}$$

$$\begin{aligned} W_{\min} &= \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{67.6 \text{ kN} \cdot \text{m}}{16 \text{ kN/cm}^2} \\ &= 422.5 \times 10^{-6} \text{ m}^3 = 422.5 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- Chọn số hiệu thép từ bảng tra

I30

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (1)

1. Khái niệm chung

Đường đàn hồi: Đường cong của trục dầm sau khi chịu uốn

Trọng tâm mặt cắt ngang của dầm

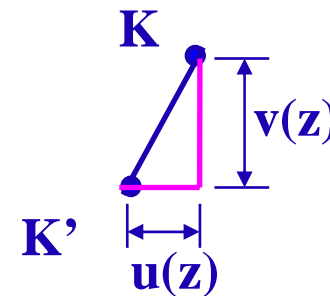
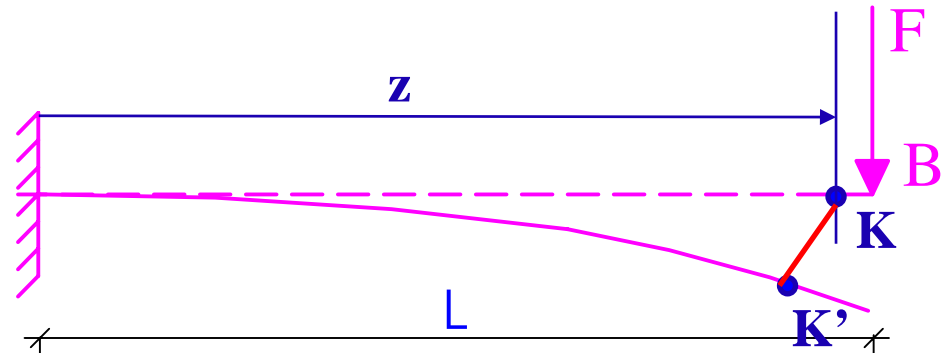
K - trước biến dạng

K' - sau biến dạng

KK' - chuyển vị của trọng tâm mặt cắt ngang

Biến dạng bé: $u(z) \ll v(z)$

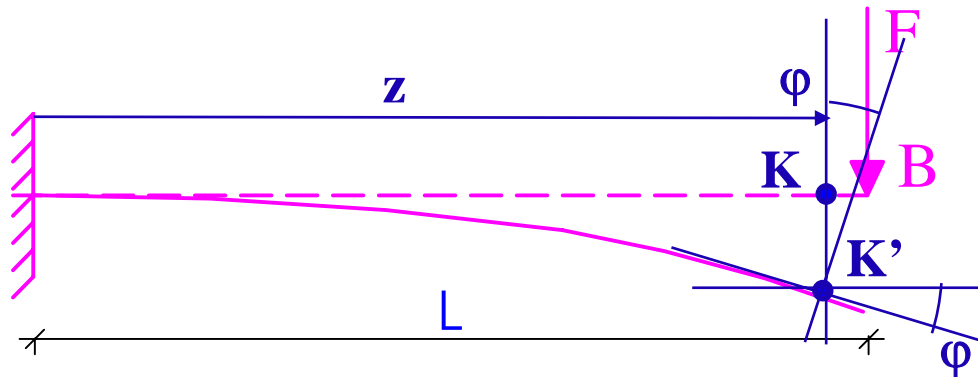
$v(z) \Rightarrow$ độ võng: $y(z) \Rightarrow$



KK' $\begin{cases} v(z) - \text{chuyển vị đứng} \\ u(z) - \text{chuyển vị ngang} \end{cases}$

Độ võng của dầm chịu uốn là chuyển vị theo phương thẳng đứng của trọng tâm mặt cắt ngang

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (2)



- Tại K' dựng **tiếp tuyến t** với đường đàn hồi, đường vuông góc với tiếp tuyến t tại K' =>

- Mặt cắt ngang dầm sau biến dạng tạo với mặt cắt ngang dầm trước biến dạng góc φ => **góc xoay $\varphi(z)$**

Góc xoay: góc hợp bởi mặt cắt ngang dầm trước và sau biến dạng

Biến dạng bé: $\varphi(z) = \operatorname{tg}\varphi = y'(z) \Rightarrow$ Đạo hàm bậc nhất của độ võng là góc xoay

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (3)

2. Phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi

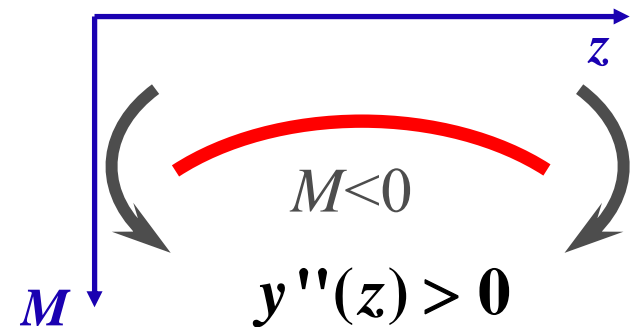
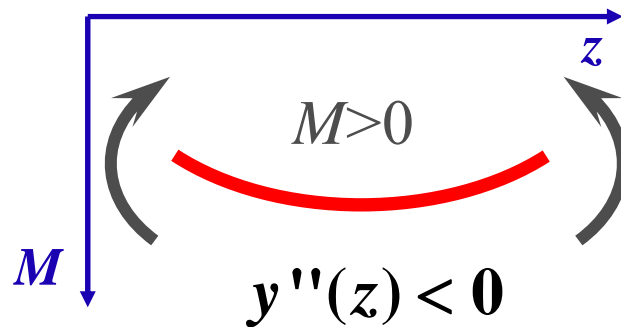
• Gt: Khi chịu uốn vật liệu thanh làm việc trong miền đàn hồi:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M_x(z)}{EI_x}$$

• Hình học giải tích:
Biến dạng bé

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''(z)}{(1 + y'^2)^{3/2}} \approx \pm y''(z)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} = -\frac{M_x(z)}{EI_x} \\ \frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''(z)}{(1 + y'^2)^{3/2}} \approx \pm y''(z) \end{array} \right\} y'' = \pm \frac{M_x(z)}{EI_x}$$



$$\therefore y''(z) = -\frac{M_x(z)}{EI_x}$$

- Phương trình vi phân gần đúng đường đàn hồi

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (4)

3. Các phương pháp xác định đường đàn hồi

a. Phương pháp tích phân trực tiếp

Từ phương trình vi phân gần đúng lấy tích phân lần thứ nhất ta được góc xoay.

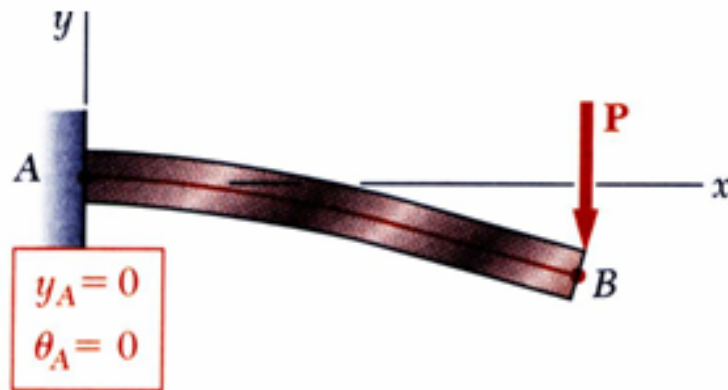
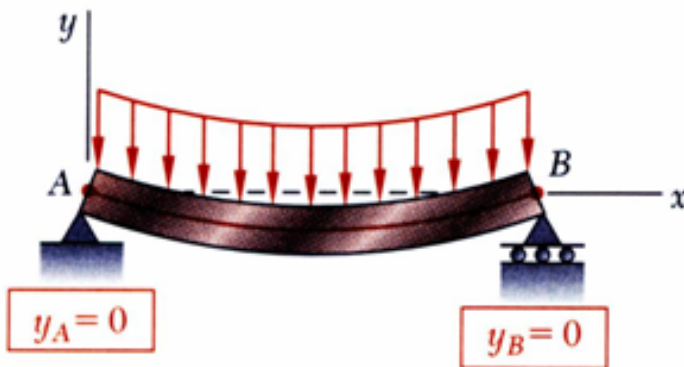
$$\varphi(z) = \frac{dy}{dz} = \int -\frac{M_x}{EI_x} dz + C$$

Tích phân lần thứ hai ta được biểu thức tính độ võng

$$y(z) = \int \left[\int -\frac{M_x}{EI_x} dz + C \right] dz + D$$

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (5)

trong đó C và D là hai hằng số tích phân, được xác định nhờ vào điều kiện biên chuyển vị.



Điều kiện liên tục:

$$y_{C^-} = y_{C^+}$$
$$\varphi_{C^-} = \varphi_{C^+}$$

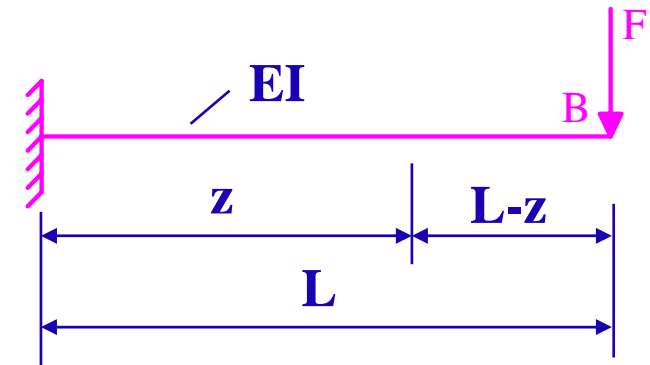


6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (5b)

Nhược điểm: công kênh về mặt toán học khi dầm gồm nhiều đoạn, do phải giải hệ phương trình để xác định các hằng số tích phân ($2n$ phương trình $2n$ ẩn số khi dầm gồm n đoạn)

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (6)

VD 6.4.1: Xác định độ võng tại đầu tự do của dầm công-xôn chịu tác dụng của tải tập trung như hình vẽ



Ta có: $M = -F(L - z)$

$$y''(z) = -\frac{M_x(z)}{EI_x} = \frac{F(L - z)}{EI_x} \Rightarrow \varphi(z) = \int \frac{F(L - z)}{EI_x} dz + C = \frac{F}{EI_x} \left(Lz - \frac{z^2}{2} \right) + C$$

$$\Rightarrow y(z) = \frac{F}{EI_x} \left(L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + Cz + D$$

$$z = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$z = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow D = 0$$

Điều kiện biên

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi_B = \varphi(z = L) = \frac{FL^2}{2EI_x} \\ y_B = y(z = L) = \frac{FL^3}{3EI_x} \end{array} \right.$$

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (7)

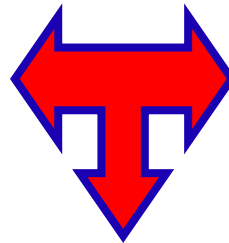
b. Phương pháp tải trọng giả tạo

Liên hệ vi phân giữa các thành phần ứng lực và tải trọng phân bố

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q(z)$$

Liên hệ vi phân giữa độ võng, góc xoay và mô men uốn nội lực

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{M_x}{EI_x}$$



$$M \approx y$$

$$Q \approx \varphi$$

$$q(z) \approx -\frac{M_x}{EI_x}$$

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (8)



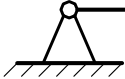

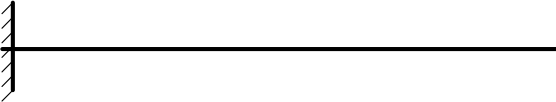
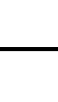
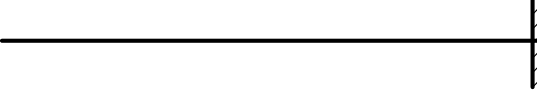
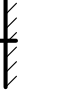



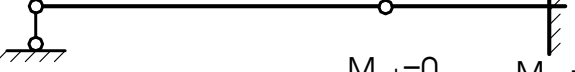

- Dùng kỹ năng tìm lực cắt và mômen uốn nội lực khi biết tải trọng phân bố để áp dụng vào bài toán tìm góc xoay và độ võng.
- Tưởng tượng chọn một dầm không có thực - gọi là *dầm giả tạo* và đặt tải trọng phân bố giả tạo

$$q_{gt}(z) = -\frac{M_x}{EI_x}$$

vào nó. Lực cắt và mômen uốn ở dầm giả tạo do tải trọng giả tạo gây ra tại mặt cắt ngang nào đó chính là góc xoay và độ võng ở dầm thực ban đầu tại mặt cắt ngang đó do tải trọng thực gây ra. **Quy tắc để chọn dầm giả tạo như sau**

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (9)

- ❖ *Dầm giả tạo phải có chiều dài bằng chiều dài của dầm thực.*
- ❖ *Liên kết phải sao cho điều kiện biên về nội lực tại các liên kết trên dầm giả tạo phải phù hợp với điều kiện biên về chuyển vị trên dầm thực tại các vị trí đó.*

 $y=0$ $\varphi \neq 0$	 $y=0$ $\varphi \neq 0$	 $M_{gt}=0$ $Q_{gt} \neq 0$	 $M_{gt}=0$ $Q_{gt} \neq 0$
 $y=0$ $\varphi=0$	 $y \neq 0$ $\varphi \neq 0$	 $M_{gt}=0$ $Q_{gt}=0$	 $M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$
 $y=0$ $\varphi \neq 0$	 $y=0$ $\varphi \neq 0$	 $y \neq 0$ $\varphi \neq 0$	 $M_{gt}=0$ $Q_{gt} \neq 0$
			 $M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (10)

Các bước thực hiện:

- ❖ Vẽ biểu đồ mô men uốn trên dầm thực. Chia tung độ biểu đồ cho độ cứng EI để có trị số của tải trọng giả tạo.
- ❖ Nếu $M_x > 0$ thì $q_{gt} < 0$ (chiều hướng xuống);
 $M_x < 0$ thì $q_{gt} > 0$ (chiều hướng lên)
- ❖ Thay thế liên kết trên dầm thực bằng các liên kết trên dầm giả tạo theo mẫu.
- ❖ Tính Q_{gt} và M_{gt} trên dầm giả tạo tại những mặt cắt ngang cần xác định độ võng và góc xoay trên dầm thực.

Bài tập - Ví dụ 6.4.1 (1)



Ví dụ 6.2: Cho dầm có liên kết và chịu tải trọng như hình vẽ. Xác định độ võng tại tiết diện đặt lực P

Giải:

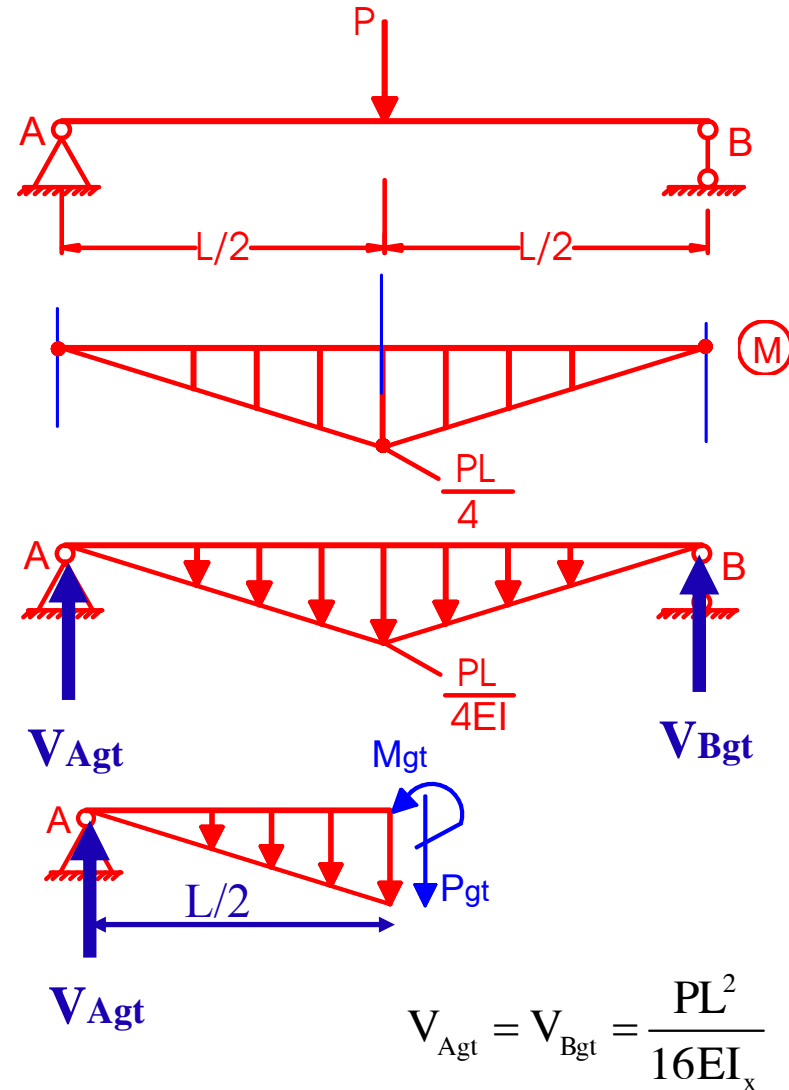
Bước 1: Vẽ biểu đồ mô men uốn nội lực

Bước 2: Xác định liên kết trên dầm giả tạo, tải trọng giả tạo, $M > 0$ nên tải trọng giả tạo hướng xuống

$$q_{gt} = -\frac{M}{EI_x} = -\frac{PL}{4EI_x}$$

Bước 3: Xác định nội lực trên dầm giả tạo tại tiết diện cần tìm độ võng và góc xoay

$$y = M_{gt} = \frac{PL^2}{16EI_x} \cdot \frac{L}{2} - \frac{PL}{4EI_x} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{PL^3}{48EI_x}$$



$$V_{Agt} = V_{Bgt} = \frac{PL^2}{16EI_x}$$

Bảng tính diện tích một số hình đơn giản



	<p>Bậc 1</p> $\Omega = \frac{1}{2} \cdot h \cdot l$ $z_c = l/3$
	<p>Bậc 2</p> $\Omega = \frac{1}{3} \cdot h \cdot l$ $z_c = l/4$
	<p>Bậc n</p> $\Omega = \frac{1}{n+1} \cdot h \cdot l$ $z_c = l/(n+2)$
	<p>Bậc 2</p> $\Omega = \frac{2}{3} \cdot h \cdot l$ $z_c = (3/8) \cdot l$

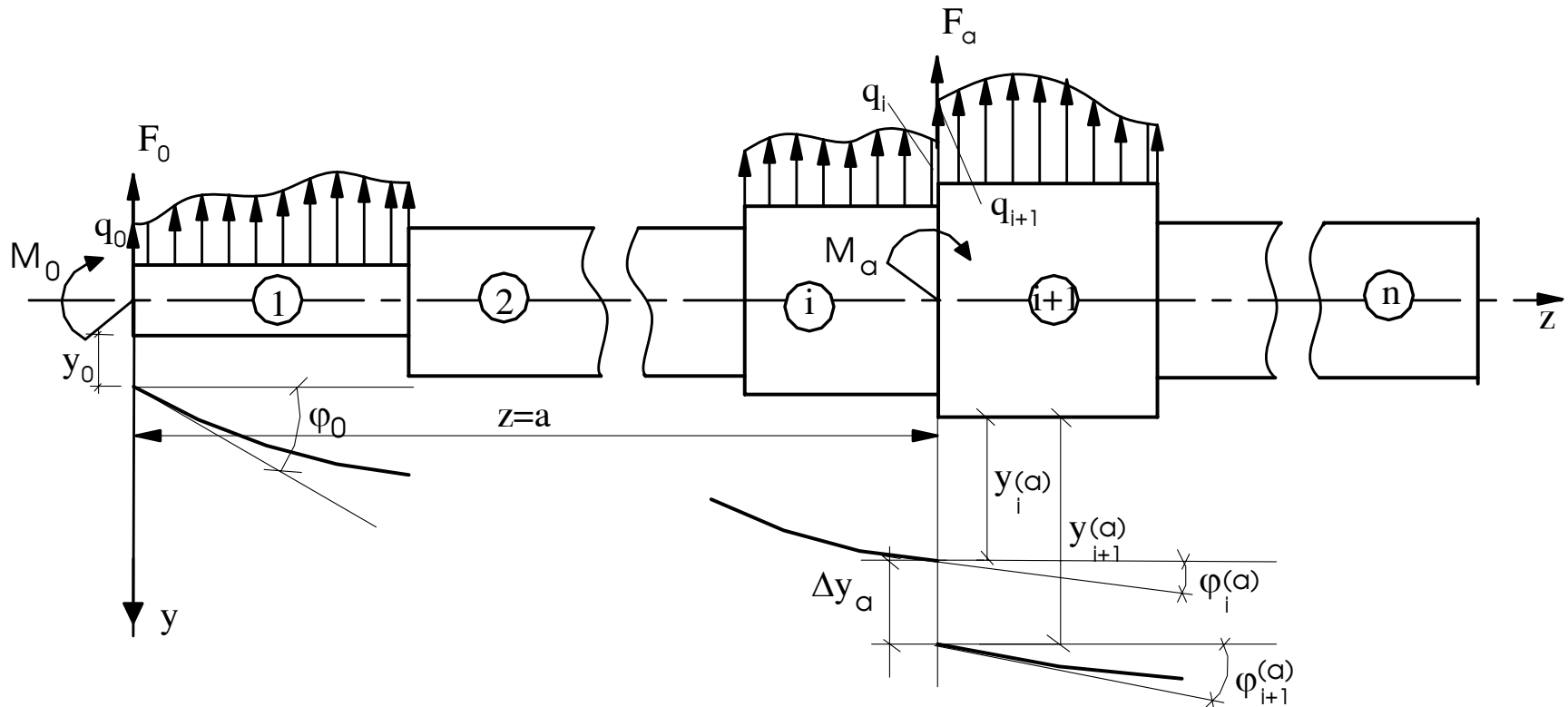
6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (10)

❖ *Phương pháp tải trọng giả tạo chỉ có ưu thế khi biểu đồ mô men uốn trên dầm thực là các diện tích dễ xác định trọng tâm và dễ tính diện tích.*

e. Phương pháp thông số ban đầu để xác định đường đàn hồi

Xét dầm chịu uốn ngang phẳng gồm n đoạn, đánh số thứ tự $1, 2, \dots, i, i+1, \dots, n$ từ trái sang phải. Độ cứng mỗi đoạn là $E_1 I_1, E_2 I_2, \dots, E_n I_n$. Xét hai đoạn kề nhau thứ i và $i+1$ có liên kết dạng đặc biệt sao cho độ võng và góc xoay tại đây có bước nhảy, tại mặt cắt ngang giữa hai đoạn có lực tập trung và mô men tập trung, đồng thời lực phân bố cũng có bước nhảy

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (11)



- ❖ Bằng các phép biến đổi toán học (khai triển Taylor hàm độ võng tại $z=a$), sử dụng quan hệ vi phân giữa các thành phần ứng lực và tải phân bố, ta nhận được công thức truy hồi của hàm độ võng (hàm độ võng trên đoạn thứ $i+1$ được xác định khi biết hàm độ võng trên đoạn thứ i)

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (12)

❖ Khi độ cứng của dầm $EI = \text{const}$ trên cả chiều dài

$$y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_a + \Delta \varphi_a (z - a) - \frac{1}{EI} \left[\Delta M_a \frac{(z - a)^2}{2!} + \Delta Q_a \frac{(z - a)^3}{3!} + \Delta q_a \frac{(z - a)^4}{4!} + \Delta q'_a \frac{(z - a)^5}{5!} + \dots \right] -$$

❖ Với

$$\Delta M_a = M_a \quad \Delta q_a = q_{i+1}(a) - q_i(a)$$

$$\Delta Q_a = Q_a \quad \Delta q'_a = q'_{i+1}(a) - q'_i(a)$$

❖ độ võng đoạn thứ nhất

$$y_1(z) = y_0 + \varphi_0 z - \frac{1}{EI} \left[M_0 \frac{z^2}{2!} + Q_0 \frac{z^3}{3!} + q_0 \frac{z^4}{4!} + q'_0 \frac{z^5}{5!} + \dots \right]$$

6.4. Chuyển vị của dầm chịu uốn (13)

❖ Các thông số $y_0, \varphi_0, M_0, Q_0, q_0, q_0, \dots$ gọi là các thông số ban đầu và được xác định từ điều kiện biên.

❖ Chú ý:

- Chiều dương của mô men tập trung, lực tập trung, tải trọng phân bố như hình vẽ.
- Nếu liên kết giữa hai đoạn thứ (i) và $(i+1)$ là khớp treo thì $\Delta y_a = 0$
- Nếu hai đoạn thứ (i) và $(i+1)$ là liền nhau thì

$$\Delta y_a = \Delta \varphi_a = 0$$

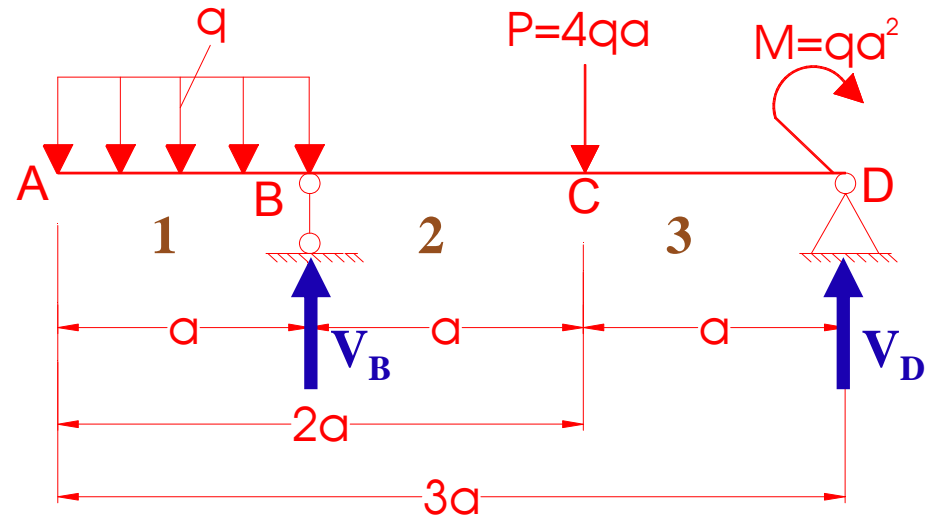
- Ví dụ

Bài tập – Ví dụ 6.4.2 (1)



Ví dụ 6.4.2:

Dùng phương pháp thông số ban đầu, xác định độ võng tại C và góc xoay tại D của dầm chịu tải trọng như hình vẽ.



Bài giải:

1. Xác định phản lực

$$V_B = \frac{11}{4}qa \quad V_D = \frac{9}{4}qa$$

2. Lập bảng thông số ban đầu

Tìm $y_C \Rightarrow$ hàm độ võng y_2

Tìm $\varphi_D \Rightarrow$ hàm góc xoay y_3'

$z = 0$	$z = a$	$z = 2a$
$y_0 \neq 0$	$\Delta y_a = 0$	$\Delta y_a = 0$
$\varphi_0 \neq 0$	$\Delta \varphi_a = 0$	$\Delta \varphi_a = 0$
$M_0 = 0$	$\Delta M_a = 0$	$\Delta M_a = 0$
$Q_0 = 0$	$\Delta Q_a = V_B$	$\Delta Q_a = -P$
$q_0 = -q$	$\Delta q_a = q$	$\Delta q_a = 0$
$q'_0 = 0$	$\Delta q'_a = 0$	$\Delta q'_a = 0$

Ví dụ 6.4.2 (2)



Công thức truy hồi:

$$y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_a + \Delta \varphi_a (z - a) - \frac{1}{EI} \left[\Delta M_a \frac{(z - a)^2}{2!} + \Delta Q_a \frac{(z - a)^3}{3!} + \Delta q_a \frac{(z - a)^4}{4!} + \Delta q'_a \frac{(z - a)^5}{5!} + \dots \right]$$

▪ Xét đoạn 1(AB): $0 \leq z \leq a$

$$y_1(z) = y_0 + \varphi_0 z + \frac{qz^4}{24EI_x}$$

▪ Xét đoạn 2 (BC): $a \leq z \leq 2a$

$z = 0$	$z = a$	$z = 2a$
$y_0 \neq 0$	$\Delta y_a = 0$	$\Delta y_a = 0$
$\varphi_0 \neq 0$	$\Delta \varphi_a = 0$	$\Delta \varphi_a = 0$
$M_0 = 0$	$\Delta M_a = 0$	$\Delta M_a = 0$
$Q_0 = 0$	$\Delta Q_a = V_B$	$\Delta Q_a = -P$
$q_0 = -q$	$\Delta q_a = q$	$\Delta q_a = 0$
$q'_0 = 0$	$\Delta q'_a = 0$	$\Delta q'_a = 0$

$$y_2(z) = y_0 + \varphi_0 z + \frac{qz^4}{24EI_x} - \frac{q(z - a)^4}{24EI_x} - \frac{V_B(z - a)^3}{6EI_x}$$

Ví dụ 6.4.2 (3)



$$y_{i+1}(z) = y_i(z) + \Delta y_a + \Delta \varphi_a (z - a) - \frac{1}{EI} \left[\Delta M_a \frac{(z - a)^2}{2!} + \Delta Q_a \frac{(z - a)^3}{3!} + \Delta q_a \frac{(z - a)^4}{4!} + \Delta q'_a \frac{(z - a)^5}{5!} + \dots \right]$$

- Xét đoạn 3 (CD): $2a \leq z \leq 3a$

$z = 0$	$z = a$	$z = 2a$
$y_0 \neq 0$	$\Delta y_a = 0$	$\Delta y_a = 0$
$\varphi_0 \neq 0$	$\Delta \varphi_a = 0$	$\Delta \varphi_a = 0$
$M_0 = 0$	$\Delta M_a = 0$	$\Delta M_a = 0$
$Q_0 = 0$	$\Delta Q_a = -V_B$	$\Delta Q_a = -P$
$q_0 = 0$	$\Delta q_a = q$	$\Delta q_a = 0$
$q'_0 = 0$	$\Delta q'_a = 0$	$\Delta q'_a = 0$

$$y_3(z) = y_0 + \varphi_0 z + \frac{qz^4}{24EI_x} - \frac{q(z - a)^4}{24EI_x} - \frac{V_B(z - a)^3}{6EI_x} + \frac{P(z - 2a)^3}{6EI_x}$$

Ví dụ 6.4.2 (4)

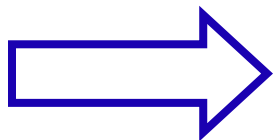


Ta có phương trình độ võng trên từng đoạn:

$$y_1(z) = y_0 + \varphi_0 z + \frac{qz^4}{24EI_x}$$

$$y_2(z) = y_0 + \varphi_0 z + \frac{qz^4}{24EI_x} - \frac{q(z-a)^4}{24EI_x} - \frac{V_B(z-a)^3}{6EI_x}$$

$$y_3(z) = y_0 + \varphi_0 z + \frac{qz^4}{24EI_x} - \frac{q(z-a)^4}{24EI_x} - \frac{V_B(z-a)^3}{6EI_x} + \frac{P(z-2a)^3}{6EI_x}$$



$y_0, \varphi_0 ???$

Ví dụ 6.4.2 (5)



- Để xác định 2 thông số ban đầu là y_0 và φ_0 ta xét điều kiện liên kết của dầm:

$$z = a \Rightarrow y_1(z=a) = 0$$

$$z = 3a \Rightarrow y_3(z=3a) = 0$$

- Từ hai phương trình độ võng $y_1(z)$ và $y_3(z)$, áp dụng điều kiện biên:

$$y_0 = -\frac{5qa^4}{24EI_x} \quad \varphi_0 = \frac{qa^3}{6EI_x}$$

- Từ đó tính được:

$$y_C = y_2(z=2a) = \frac{7qa^4}{24EI_x}$$

$$\varphi_D = y'_3(z=3a) = -\frac{qa^3}{6EI_x}$$

6.5. Bài toán siêu tĩnh uốn

Cho dầm chịu lực như hình vẽ

- Số phản lực liên kết là 4, trong khi chỉ viết được 3 pt cân bằng => Bài toán siêu tĩnh

- Bổ sung thêm pt biến dạng: $y_B = 0$

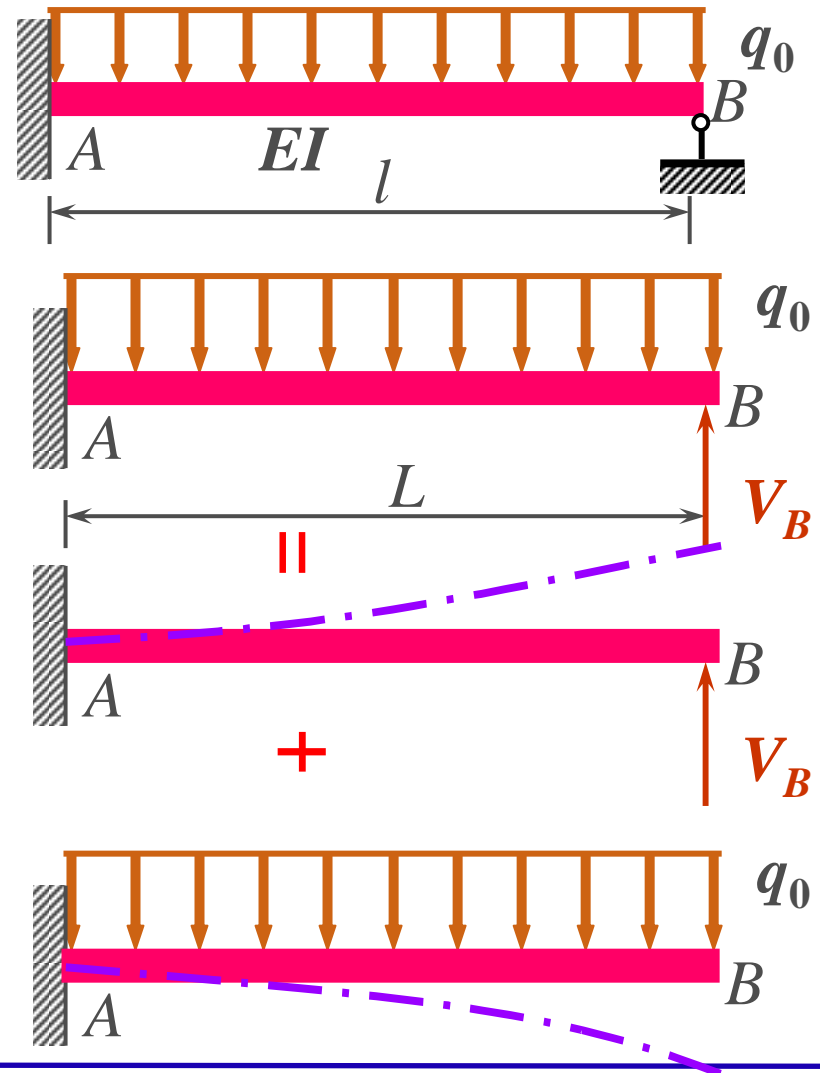
- Tưởng tượng bỏ gối tựa tại B và thay bằng phản lực V_B

Theo nguyên lý cộng tác dụng

$$y_B = y_{B,q} + y_{B,V_B} = 0$$

Mà

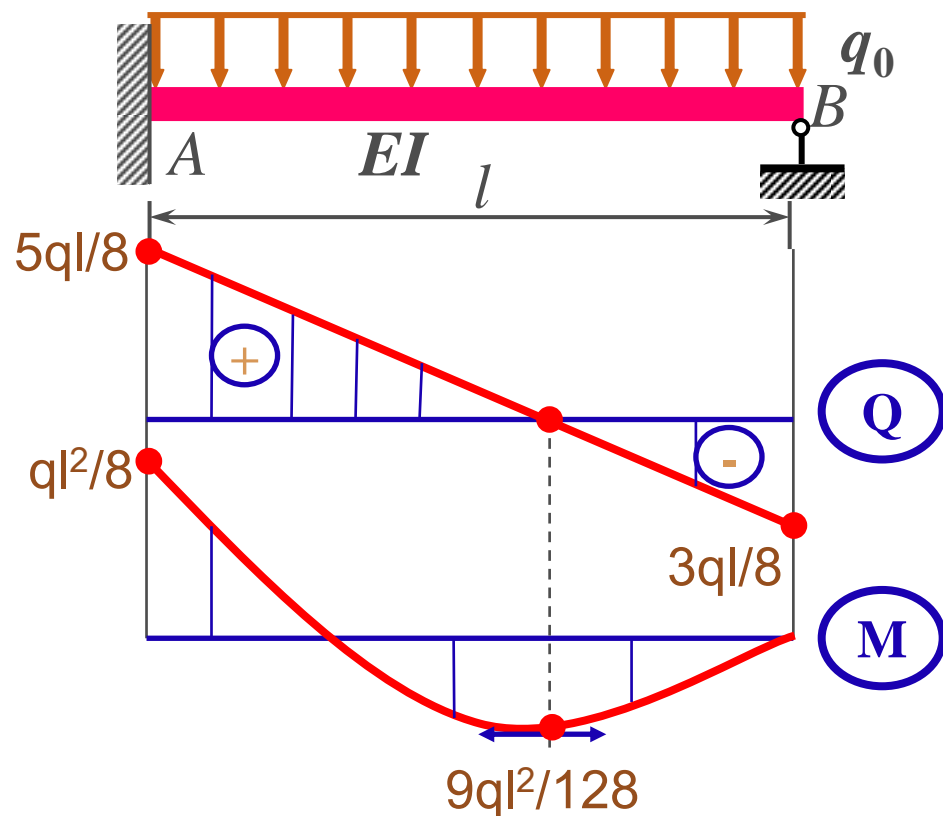
$$y_{B,q} = \frac{qL^4}{8EI}; \quad y_{B,V_B} = -\frac{V_B L^3}{3EI}$$



6.5. Bài toán siêu tĩnh uốn

Do vậy: $\therefore V_B = \frac{3qL}{8}$

Biểu đồ ứng lực:



Câu hỏi ???



Thank You

