

www.mientayvn.com

Khi đọc qua tài liệu này, nếu phát hiện sai sót hoặc nội dung kém chất lượng xin hãy thông báo để chúng tôi sửa chữa hoặc thay thế bằng một tài liệu cùng chủ đề của tác giả khác. Tài liệu này bao gồm nhiều tài liệu nhỏ có cùng chủ đề bên trong nó. Phần nội dung bạn cần có thể nằm ở giữa hoặc ở cuối tài liệu này, hãy sử dụng chức năng Search để tìm chúng.

Bạn có thể tham khảo nguồn tài liệu được dịch từ tiếng Anh tại đây:

http://mientayvn.com/Tai_lieu_da_dich.html

Thông tin liên hệ:

Yahoo mail: thanhlam1910_2006@yahoo.com

Gmail: frbwrthes@gmail.com

Theo yêu cầu của khách hàng, trong một năm qua, chúng tôi đã dịch qua 16 môn học, 34 cuốn sách, 43 bài báo, 5 sổ tay (chưa tính các tài liệu từ năm 2010 trở về trước) Xem ở đây

**DỊCH VỤ
DỊCH
TIẾNG
ANH
CHUYÊN
NGÀNH
NHANH
NHẤT VÀ
CHÍNH
XÁC
NHẤT**

Chỉ sau một lần liên lạc, việc dịch được tiến hành

Giá cả: có thể giảm đến 10 nghìn/1 trang

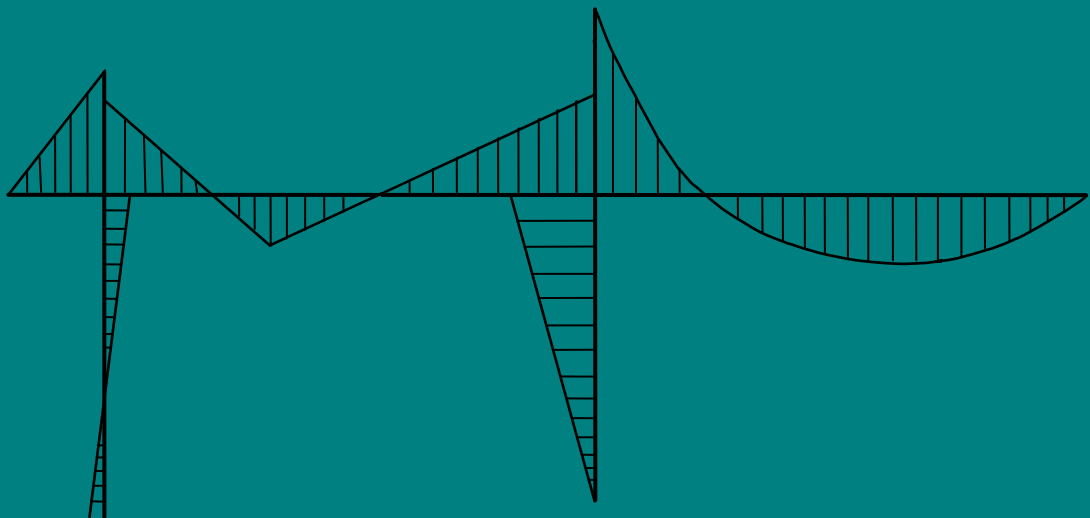
Chất lượng: Tạo dựng niềm tin cho khách hàng bằng công nghệ 1. Bạn thấy được toàn bộ bản dịch; 2. Bạn đánh giá chất lượng. 3. Bạn quyết định thanh toán.

LÈU MỘC LAN – NGUYỄN VŨ VIỆT NGA

ĐỀ BÀI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI TẬP LỚN

SỨC BỀN VẬT LIỆU - CƠ HỌC KẾT CẤU



NXB-...

LÊU MỘC LAN – NGUYỄN VŨ VIỆT NGÀ

ĐỀ BÀI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI TẬP LỚN

SỨC BỀN VẬT LIỆU - CƠ HỌC KẾT CẤU

NXB-...

LỜI GIỚI THIỆU

Tài liệu tham khảo “**Đề bài và hướng dẫn giải bài tập lớn Sức bền vật liệu - Cơ học kết cấu**“ được biên soạn theo đúng đề cương “Chương trình giảng dạy môn SBVL và CHKC” do tiểu ban môn học của bộ giáo dục và đào tạo soạn thảo .

SBVL và CHKC cung cấp một phần kiến thức cơ sở cho các kỹ sư theo học trong các trường đại học kỹ thuật như : thủy lợi , xây dựng , giao thông

Hai môn học này trang bị cho các sinh viên và các kỹ sư những kiến thức cần thiết để giải quyết các bài toán thực tế từ công việc thiết kế , thẩm định . đến thi công và là cơ sở cho việc nghiên cứu các môn kỹ thuật thuộc các chuyên ngành khác.

Trong chương trình đào tạo hai môn học này , ngoài các bài tập nhỏ bố trí sau mỗi chương của giáo trình , các sinh viên còn buộc phải hoàn thành một số **bài tập lớn** , có tính chất tổng hợp các kiến thức cơ bản nhất , và được bố trí theo từng học phần của môn học .

Để giúp các sinh viên củng cố các kiến thức của môn học và nắm vững từng bước giải quyết các yêu cầu của các bài tập lớn trong chương trình đào tạo của hai môn học, chúng tôi biên soạn tài liệu tham khảo này với đầy đủ các bài tập lớn của hai môn SBVL và CHKC . Tài liệu này bao gồm hai phần , tương ứng với hai môn học . Phân công biên soạn như sau :

❶ Phần I do cô giáo Nguyễn Vũ Việt Nga biên soạn , bao gồm **4 bài tập lớn SBVL**.

❷ Phần II do cô giáo Lê Mộc Lan biên soạn , bao gồm **3 bài tập lớn CHKC**.

Các bài tập lớn này yêu cầu các sinh viên phải hoàn thành theo đúng yêu cầu của giáo viên phụ trách môn học , phù hợp với từng giai đoạn .

Trong mỗi phần của tài liệu này , đều bao gồm : **phần đề bài và phần bài giải mẫu**.

Trong phần bài giải mẫu , tài liệu này sẽ giới thiệu cho các bạn đọc các bước giải cũng như cách trình bày một bài tập lớn , nhằm củng cố các kiến thức cơ bản trước khi thi hết môn học .

Tuy đã có nhiều cố gắng trong quá trình biên soạn , nhưng do trình độ và thời gian có hạn nên không tránh khỏi những sai sót . Chúng tôi mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp của các bạn đồng nghiệp , các bạn sinh viên và các bạn đọc , để tài liệu này ngày càng được hoàn thiện hơn .

Xin chân thành cảm ơn sự quan tâm và những ý kiến đóng góp quý báu của tất cả các đồng nghiệp đã giúp đỡ chúng tôi rất nhiều trong quá trình biên soạn tài liệu này .

CÁC TÁC GIẢ

CÁC YÊU CẦU CHUNG

I –YÊU CẦU VỀ TRÌNH BÀY

- ☞ Trang bìa trình bày theo mẫu qui định (xem phần Phụ lục của tài liệu này);
- ☞ Bài làm trình bày trên khổ giấy A4;
- ☞ Các hình vẽ trong bài làm phải rõ ràng, phải ghi đầy đủ các kích thước và tải trọng đã cho bằng số lên sơ đồ tính;
- ☞ Các bước tính toán, các kết quả tính toán, các biểu đồ nội lực v.v... cần phải được trình bày rõ ràng, sạch sẽ và theo bài mẫu (xem phần ví dụ tham khảo của tài liệu này).

II –YÊU CẦU VỀ NỘI DUNG

- ☞ Môn Sức bền vật liệu có 4 bài tập lớn sau :
 1. Tính đặc trưng hình học của hình phẳng
 2. Tính dầm thép
 3. Tính cột chịu lực phức tạp
 4. Tính dầm trên nền đàn hồi.
- ☞ Môn Cơ học kết cấu có 3 bài tập lớn sau :
 1. Tính hệ tĩnh định
 2. Tính khung siêu tĩnh theo phương pháp lực
 3. Tính khung siêu tĩnh theo phương pháp chuyển vị và phương pháp phân phối mômen

PHẦN I

ĐỀ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI TẬP LỚN SỨC BỀN VẬT LIỆU

BÀI TẬP LỚN SỐ 1

TÍNH ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA HÌNH PHẪNG

BẢNG SỐ LIỆU BÀI TẬP LỚN SỐ 1

STT	a(cm)	h(cm)	R(cm)	c(cm)	D(cm)	Bxbxd (mm)	N ^o I	N ^o [
1	15	15	15	12	24	180x110x10	27a	27
2	18	27	18	14	26	250x160x20	20	20a
3	10	18	20	16	24	125x80x7	30	30
4	14	24	26	20	25	125x80x10	33	33
5	20	18	16	14	26	140x90x8	40	40
6	19	21	18	14	22	140x90x10	45	24a
7	18	24	20	22	26	160x100x9	24	24
8	15	18	24	20	25	160x100x12	24a	24
9	20	21	22	18	24	180x110x12	27	27
10	22	18	25	18	22	200x125x16	22	22a
11	20	24	26	24	25	250x160x18	22a	22
12	22	24	24	20	20	250x160x20	22a	22

Ghi chú: Sinh viên chọn những số liệu trong bảng số liệu phù hợp với hình vẽ của mình.

YÊU CẦU VÀ THỨ TỰ THỰC HIỆN

Yêu cầu:

Xác định các mô men quán tính chính trung tâm và phương của các trục quán tính chính trung tâm của hình phẳng đã cho. Giải bằng hai phương pháp: *giải tích và đồ giải*.

Các bước giải:

1. *Xác định tọa độ trọng tâm của hình phẳng:*

- ☛ Chọn hệ trục ban đầu x_0y_0 tùy ý
- ☛ Xác định tọa độ trọng tâm và tính các diện tích, các mô men tĩnh của từng hình thành phần với hệ trục ban đầu đã chọn,
- ☛ Dùng công thức xác định trọng tâm $C(x_C, y_C)$:

$$x_C = \frac{\sum S_{Y_0}}{\sum F}; \quad y_C = \frac{\sum S_{X_0}}{\sum F}$$

2. Tính các mô men quán tính chính trung tâm:

☛ Chọn hệ trục trung tâm XCY (đi qua trọng tâm C và song song với hệ trục ban đầu). Xác định tọa độ trọng tâm của từng hình thành phần đối với hệ trục trung tâm XCY.

☛ Tính các mô men quán tính trung tâm của từng hình thành phần (J_X^i , J_Y^i và J_{XY}^i) lấy với hệ trục XCY bằng cách dùng công thức chuyển trục song song. Từ đó tính các mô men quán tính trung tâm của toàn hình (J_X , J_Y , J_{XY}).

☛ Tính mô men quán tính chính trung tâm $J_{\max, \min}$ bằng hai phương pháp:

a) Phương pháp giải tích:

Dùng công thức xoay trục để xác định mô men quán tính chính trung tâm và vị trí của hệ trục quán tính chính trung tâm (J_{\max} , J_{\min} và α_{\max})

$$J_{\max, \min} = \frac{J_X + J_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_X - J_Y}{2}\right)^2 + J_{XY}^2}$$

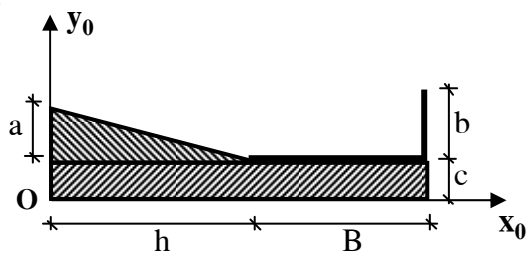
$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = -\frac{J_{XY}}{J_{\max} - J_Y} = -\frac{J_{XY}}{J_X - J_{\min}}$$

b) Phương pháp đồ giải:

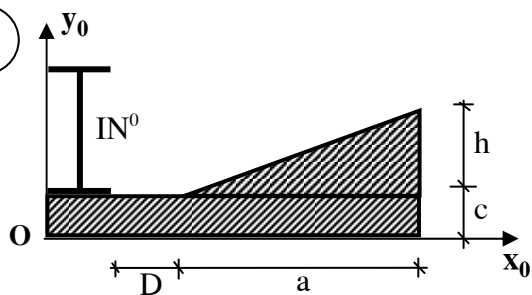
Dựa vào các giá trị J_X , J_Y , J_{XY} đã tính được ở trên, vẽ và sử dụng vòng tròn Mo quán tính để xác định mô men quán tính chính trung tâm và vị trí của hệ trục quán tính chính trung tâm (J_{\max} , J_{\min} và α_{\max}).

HÌNH DẠNG MẶT CẮT NGANG

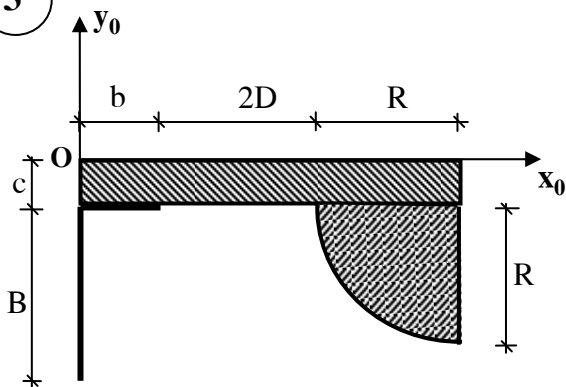
1



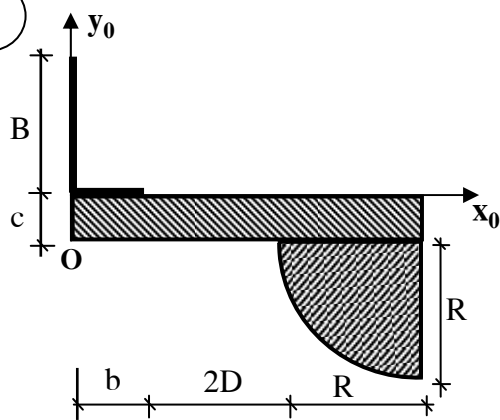
2



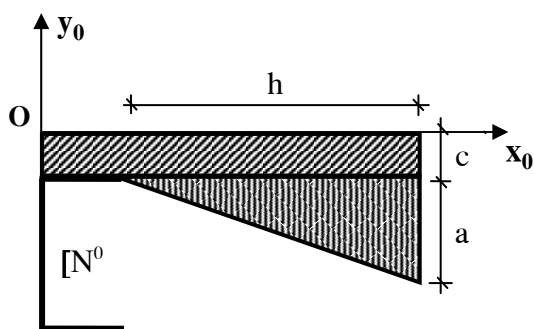
3



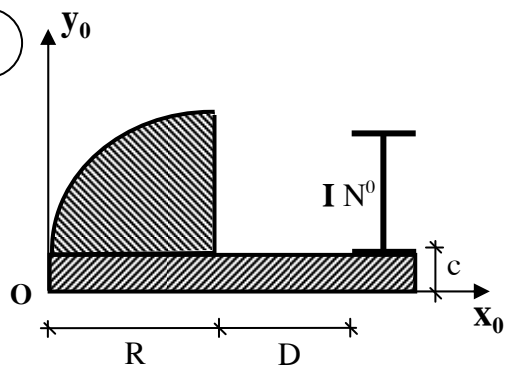
4



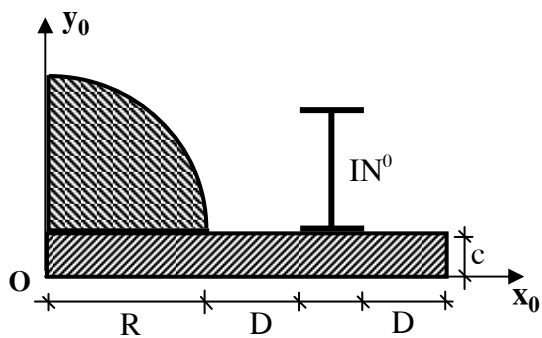
5



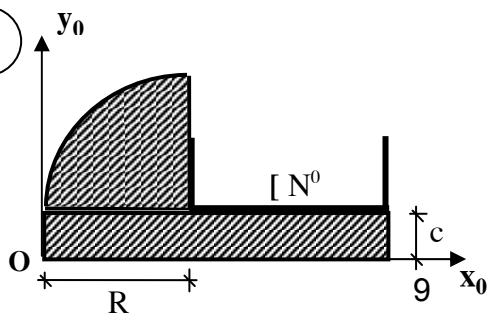
6



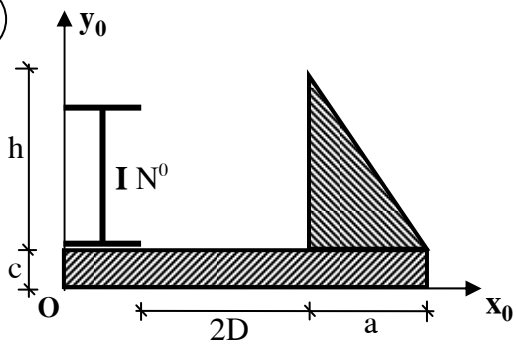
7



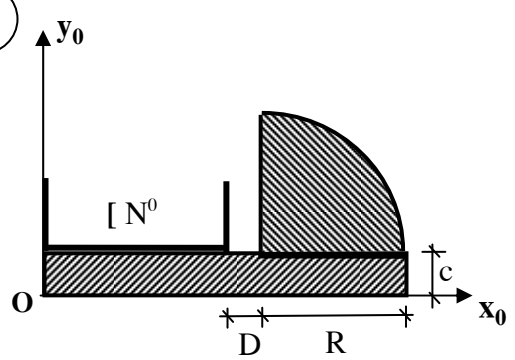
8



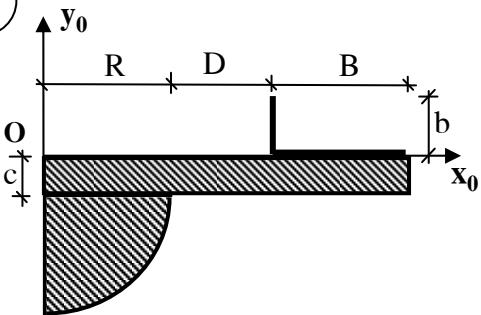
9



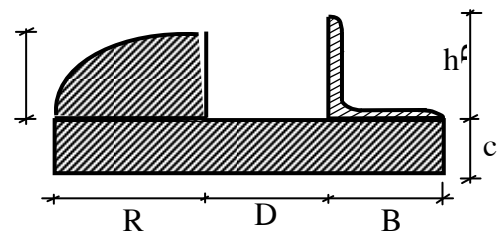
10



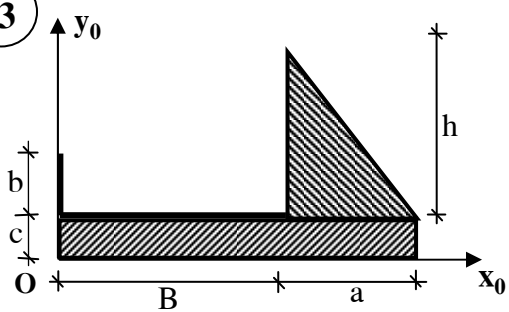
11



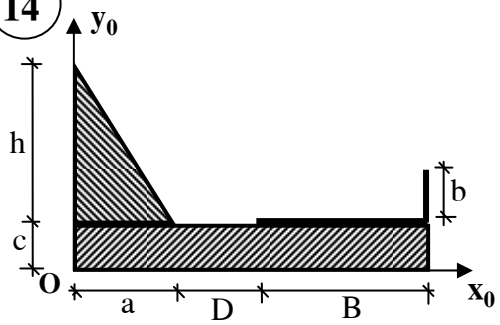
12



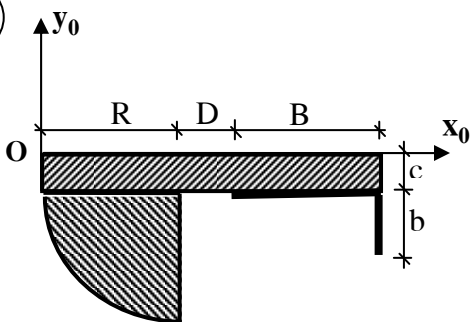
13



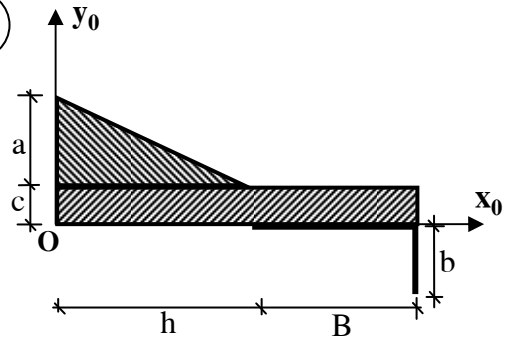
14



15



16

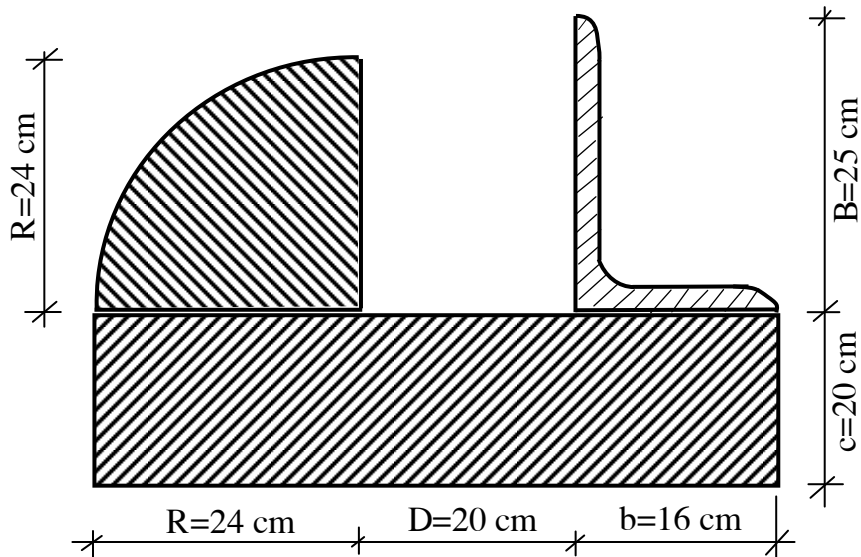


VÍ DỤ THAM KHẢO

Đề bài:

Xác định các mô men quán tính chính trung tâm và vị trí hệ trục quán tính chính trung tâm của hình phẳng cho trên *hình 1.1*, biết:

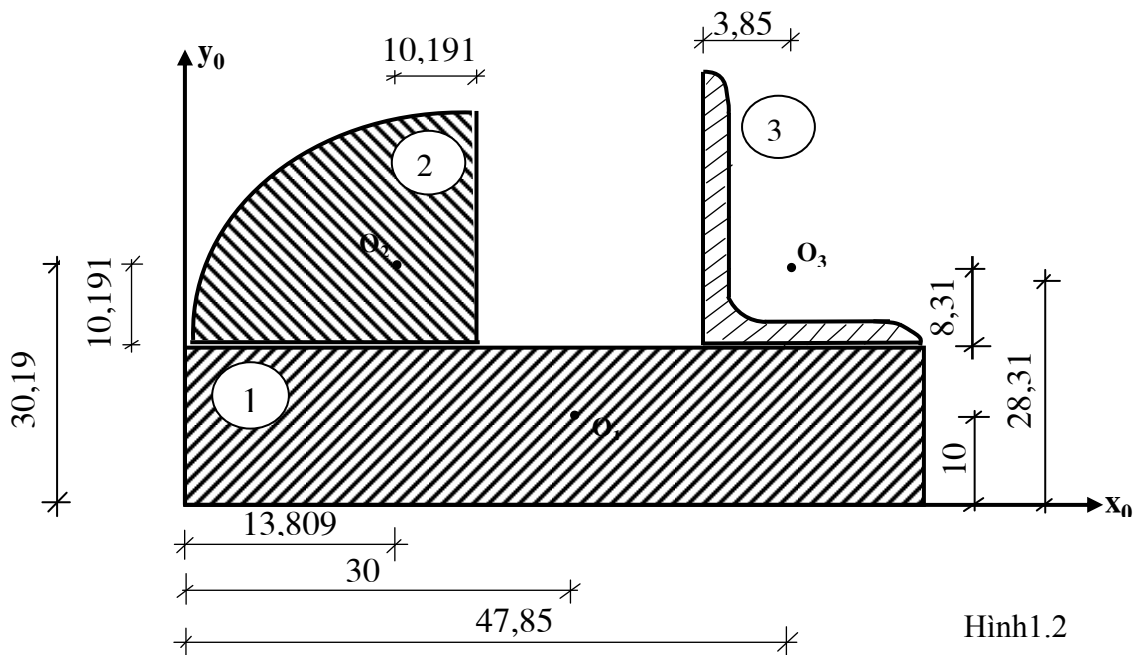
Thép góc Bxbxd: 250x160x20(mm); D = 20 cm; c = 20 cm; R = 24cm.



Hình 1.1

Tra bảng thép góc có:

B = 250 mm	F = 78,5 cm ²	x ₀ = 3,85 cm	J _U = 949 cm ⁴
b = 160 mm	J _x = 4987 cm ⁴	y ₀ = 8,31 cm	tg α = 0,405
d = 20 mm	J _y = 1613 cm ⁴		



Hình 1.2

Bài làm:

1. Xác định trọng tâm:

Chọn hệ trục ban đầu x_0y_0 như hình vẽ: xem *hình 1.2*.

Chia hình phẳng đã cho thành 3 hình (xem *hình 1.2*), kích thước và tọa độ trọng tâm của từng hình thành phần lấy với hệ trục ban đầu là:

- Hình 1 (chữ nhật):

$$b_1 = b + D + R = 16 + 20 + 24 = 60 \text{ cm};$$

$$h_1 = 20 \text{ cm};$$

$$x_1 = 30 \text{ cm};$$

$$y_1 = 10 \text{ cm};$$

$$O_1 (30, 10); \quad F_1 = b_1 \cdot h_1 = 1200 \text{ cm}^2;$$

$$S_x^{(1)} = F_1 \cdot y_1 = 1200 \cdot 10 = 12000 \text{ cm}^3$$

$$S_y^{(1)} = F_1 \cdot x_1 = 1200 \cdot 30 = 36000 \text{ cm}^3$$

- Hình 2 (1/4 tròn): $R = 24 \text{ cm};$

Tọa độ trọng tâm của 1/4 tròn với hệ trục đi qua trọng tâm hình tròn là:

$$x_2^* = y_2^* = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 24}{3 \cdot 3,14} = 10,191 \text{ cm}$$

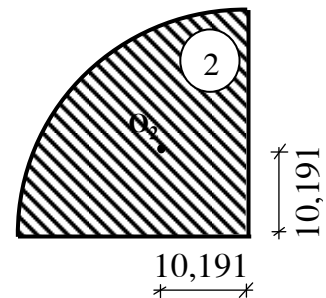
$$\rightarrow x_2 = R - x_2^* = 24 - 10,191 = 13,809 \text{ cm}$$

$$\rightarrow y_2 = c + y_2^* = 20 + 10,191 = 30,191 \text{ cm}$$

$$O_2 (13,809; 30,191); F_2 = \pi \cdot R^2 / 4 = 452,16 \text{ cm}^2;$$

$$S_x^{(2)} = F_2 \cdot y_2 = 452,16 \cdot 30,191 = 13651,162 \text{ cm}^3$$

$$S_y^{(2)} = F_2 \cdot x_2 = 452,16 \cdot 13,809 = 6243,877 \text{ cm}^3$$



Hình 1.2a

- Hình 3 (thép góc): sử dụng các giá trị tra bảng thép ở trên, ta có

$$x_3^* = 3,85 \text{ cm}$$

$$y_3^* = 8,31 \text{ cm}$$

$$x_3 = R + D + x_3^* = 24 + 20 + 3,85 \text{ cm} = 47,85 \text{ cm}$$

$$y_3 = c + y_3^* = 20 + 8,31 = 28,31 \text{ cm}$$

$$O_3 (47,85; 28,31); F_3 = 78,5 \text{ cm}^2.$$

$$S_x^{(3)} = F_3 \cdot y_3 = 78,5 \cdot 28,31 = 2222,335 \text{ cm}^3$$

$$S_y^{(3)} = F_3 \cdot x_3 = 78,5 \cdot 47,85 = 3756,225 \text{ cm}^3$$

Bảng kết quả tính toán

i	x_i (cm)	y_i (cm)	F_i (cm ²)	$S_{x_0}^i$ (cm ³)	$S_{y_0}^i$ (cm ³)
1	30,000	10,000	1200,00	12 000,000	36 000,000
2	13,809	30,191	452,16	13 651,162	6 243,877
3	47,850	28,310	78,50	2 222,335	3 756,225

Tổng 1730,66 27 873,497 46 000,102

Toạ độ trọng tâm:

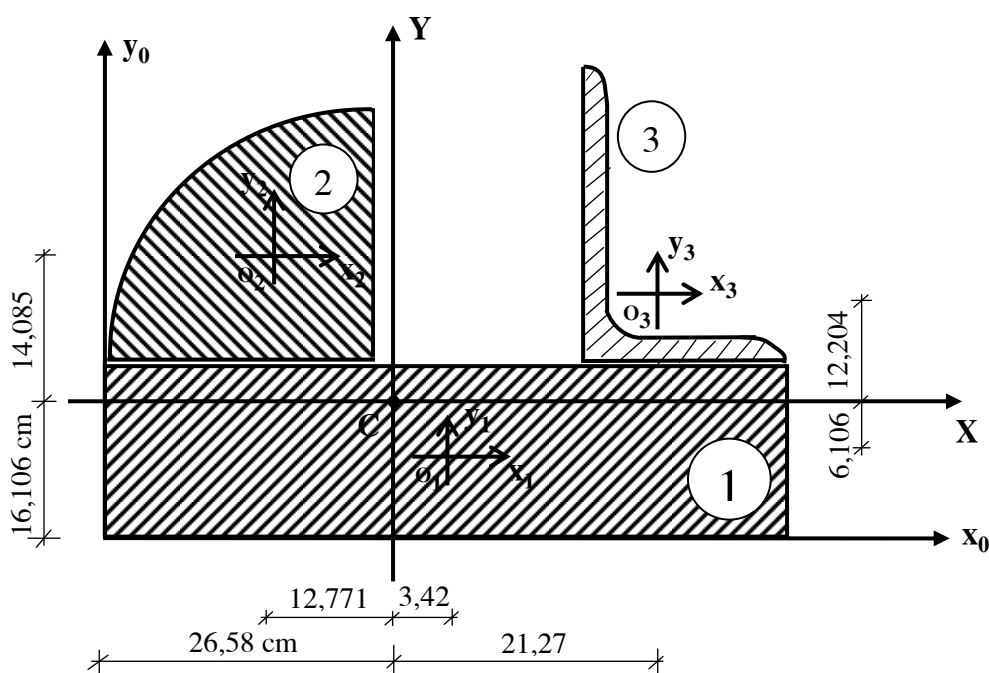
$$X_C = \frac{\sum S_{y_0}^i}{\sum F_i} = \frac{36000 + 6243,877 + 3756,225}{1200 + 452,16 + 78,5} = \frac{46000,102}{1730,66} \rightarrow X_C = + 26,58 \text{ cm}$$

$$Y_C = \frac{\sum S_{x_0}^i}{\sum F_i} = \frac{12000 + 13651,162 + 2222,335}{1200 + 452,16 + 78,5} = \frac{27873,497}{1730,66} \rightarrow Y_C = + 16,106 \text{ cm}$$

Toạ độ trọng tâm trong hệ trục ban đầu x_0y_0 là: **C(+26,58; +16,106)**

2. Tính các mô men quán tính trung tâm:

Chọn hệ trục trung tâm XCY như hình vẽ: Xem hình 1.3.



Hình 1.3

a. Toạ độ trọng tâm của từng hình thành phần đối với hệ trục trung tâm XCY là:

Hình	a_i (cm)	b_i (cm)
1	3,420	- 6,106
2	-12,771	14,085
3	21,270	12,204

b. Tính mô men quán tính của từng hình thành phần đối với hệ trục trung tâm XCY: Dùng công thức chuyển trục song song.

- Hình 1: chữ nhật

$$J_X^{(1)} = J_X^{(1)} + b_1^2 F_1 = \frac{60 \cdot 20^3}{12} + (-6,106)^2 \cdot 1200 = 40\,000 + 44\,739,883$$

$$\rightarrow J_X^{(1)} = 84\,739,883 \text{ cm}^4$$

$$J_Y^{(1)} = J_Y^{(1)} + a_1^2 F_1 = \frac{20 \cdot 60^3}{12} + (3,42)^2 \cdot 1200 = 360\,000 + 14\,035,68$$

$$\rightarrow J_Y^{(1)} = 374\,035,68 \text{ cm}^4$$

$$J_{XY}^{(1)} = a_1 b_1 F_1 = (3,42)(-6,106) \cdot 1200 = -25\,059,024 \text{ cm}^4$$

$$\rightarrow J_{XY}^{(1)} = -25\,059,024 \text{ cm}^4$$

- Hình 2: 1/4 tròn

Tính mô men quán tính $J_X^{(2)}$ và $J_Y^{(2)}$ lấy với hệ trục trung tâm của hình 1.2

$$J_X^{(2)} = J_Y^{(2)} = \left[\frac{\pi R^4}{16} - \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2 \frac{\pi R^2}{4} \right]$$

$$\rightarrow J_X^{(2)} = J_Y^{(2)} = 0,19625R^4 - 0,14154R^4 = 0,05471R^4$$

Vậy: $J_X^{(2)} = J_X^{(2)} + b_2^2 F_2 = 0,05471R^4 + b_2^2 F_2$

$$J_X^{(2)} = 0,05471 \cdot 24^4 + (14,085)^2 \cdot 452,16 = 18\,151,464 + 89\,702,765$$

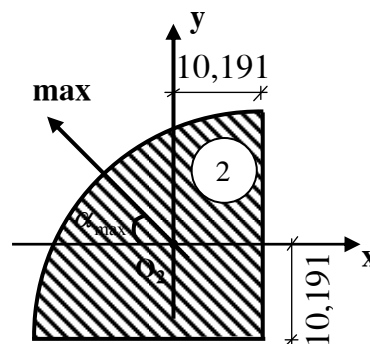
$$\rightarrow J_X^{(2)} = 107\,854,23 \text{ cm}^4$$

Tương tự: $J_Y^{(2)} = J_Y^{(2)} + a_2^2 F_2$

$$J_Y^{(2)} = 0,05471 \cdot 24^4 + (-12,771)^2 \cdot 452,16 = 18\,151,464 + 73\,746,59$$

$$\rightarrow J_Y^{(2)} = 91\,898,054 \text{ cm}^4$$

Áp dụng công thức: $J_{XY}^{(2)} = J_{x_2 y_2}^{(2)} + a_2 b_2 F_2$



Hình 1.3a

Ta có:
$$J_{x_2y_2}^{(2)} = \pm \left[\frac{R^4}{8} - \left(\frac{4.R}{3.\pi} \cdot \frac{4.R}{3.\pi} \cdot \frac{\pi.R^2}{4} \right) \right]$$

$$J_{x_2y_2}^{(2)} = \pm (0,125R^4 - 0,14154R^4) = \mp 0,01654R^4$$

Trường hợp này $\text{tg } \alpha_{\max} < 0$ nên $J_{x_2y_2}^{(2)} = 0,01654R^4$, lấy dấu > 0 :

$$J_{XY}^{(2)} = 0,01654R^4 + a_2b_2F_2 = 0,01654.24^4 + (14,085).(-12,771).452,16$$

$$J_{XY}^{(2)} = 5\,487,575 - 81\,334,328 = -75\,846,753 \text{ cm}^4$$

- Hình 3: thép góc

$$J_X^{(3)} = 4987 + b_3^2.F_3 = 4987 + (12,204)^2.78,5 = 4987 + 11\,691,606$$

$$\rightarrow J_X^{(3)} = 16\,678,602 \text{ cm}^4$$

$$J_Y^{(3)} = 1613 + a_3^2.F_3 = 1\,613 + (21,27)^2.78,5 = 1\,613 + 35\,514,412$$

$$\rightarrow J_Y^{(3)} = 37\,127,412 \text{ cm}^4$$

$$J_{XY}^{(3)} = J_{x_3y_3}^{(3)} + a_3b_3F_3$$

Áp dụng công thức:

$$\text{tg } \alpha_{\max} = \frac{J_{xy}}{J_{\min} - J_x} \rightarrow J_{xy} = (J_{\min} - J_x) \text{tg } \alpha_{\max}$$

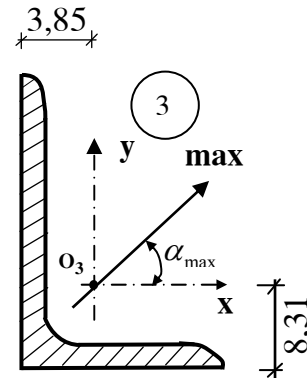
Vì $\text{tg } \alpha_{\max} > 0$ nên $J_{x_3y_3}^{(3)} < 0$, do đó $J_{x_3y_3}^{(3)}$ của

thép góc là:

$$J_{x_3y_3}^{(3)} = (949 - 4987) \cdot 0,405 = -1\,635,39 \text{ cm}^4$$

$$J_{XY}^{(3)} = J_{x_3y_3}^{(3)} + a_3b_3F_3 = -1\,635,39 + (21,27).(12,204).78,5$$

$$\rightarrow J_{XY}^{(3)} = -1\,635,39 + 20\,376,957 = 18\,741,567 \text{ cm}^4$$



Hình 1.3b

Bảng kết quả tính toán

Hình	J_x^i (cm ⁴)	J_y^i (cm ⁴)	J_{xy}^i (cm ⁴)	a_i (cm)	b_i (cm)
1	40 000	360 000	0	3,42	- 6,106
2	18 151,464	18 151,464	5 487,575	-12,771	14,085
3	4 987	1 613	1635,39	21,27	12,204

J_x^i (cm ⁴)	J_y^i (cm ⁴)	J_{xy}^i (cm ⁴)
84 739,883	374 035,68	- 25 059,024
107 854,23	91 898,054	-75 846,753
16 678,602	37 127,412	18 741,567

c. Tính mô men quán tính trung tâm của toàn hình:

$$J_X = \sum J_X^i = 84\,739,883 + 107\,854,23 + 16\,678,602$$

$$\rightarrow J_X = 209\,272,715 \text{ cm}^4$$

$$J_Y = \sum J_Y^i = 374\,035,68 + 91\,898,054 + 37\,127,412$$

$$\rightarrow J_Y = 583\,328,384 \text{ cm}^4$$

$$J_{XY} = \sum J_{XY}^i = -25\,059,204 - 75\,846,753 + 18\,741,567$$

$$\rightarrow J_{XY} = -82\,164,210 \text{ cm}^4$$

3. Tính các mô men quán tính chính trung tâm:

$$J_{\max,\min} = \frac{J_X + J_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_X - J_Y}{2}\right)^2 + J_{XY}^2}$$

$$J_{\max,\min} = \frac{209272,715 + 583328,384}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{209272,715 - 583328,384}{2}\right)^2 + (-82164,210)^2}$$

$$J_{\max,\min} = \frac{792601,099}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-374055,669}{2}\right)^2 + (-82164,210)^2}$$

$$J_{\max} = 396300,55 + 204280,12 = 600580,67$$

$$J_{\min} = 396300,55 - 204280,12 = 192020,43$$

$$\text{tg}\alpha_{\max} = -\frac{J_{XY}}{J_{\max} - J_Y} = -\frac{-82164,210}{600580,67 - 583328,384} = -\frac{-82164,210}{17252,29} = 4,7625$$

4. Kết quả tính toán:

$$J_{\max} = 600580,67 \text{ cm}^4$$

$$J_{\min} = 192020,43 \text{ cm}^4$$

$$\alpha_{\max} \cong 78^{\circ}08'5''$$

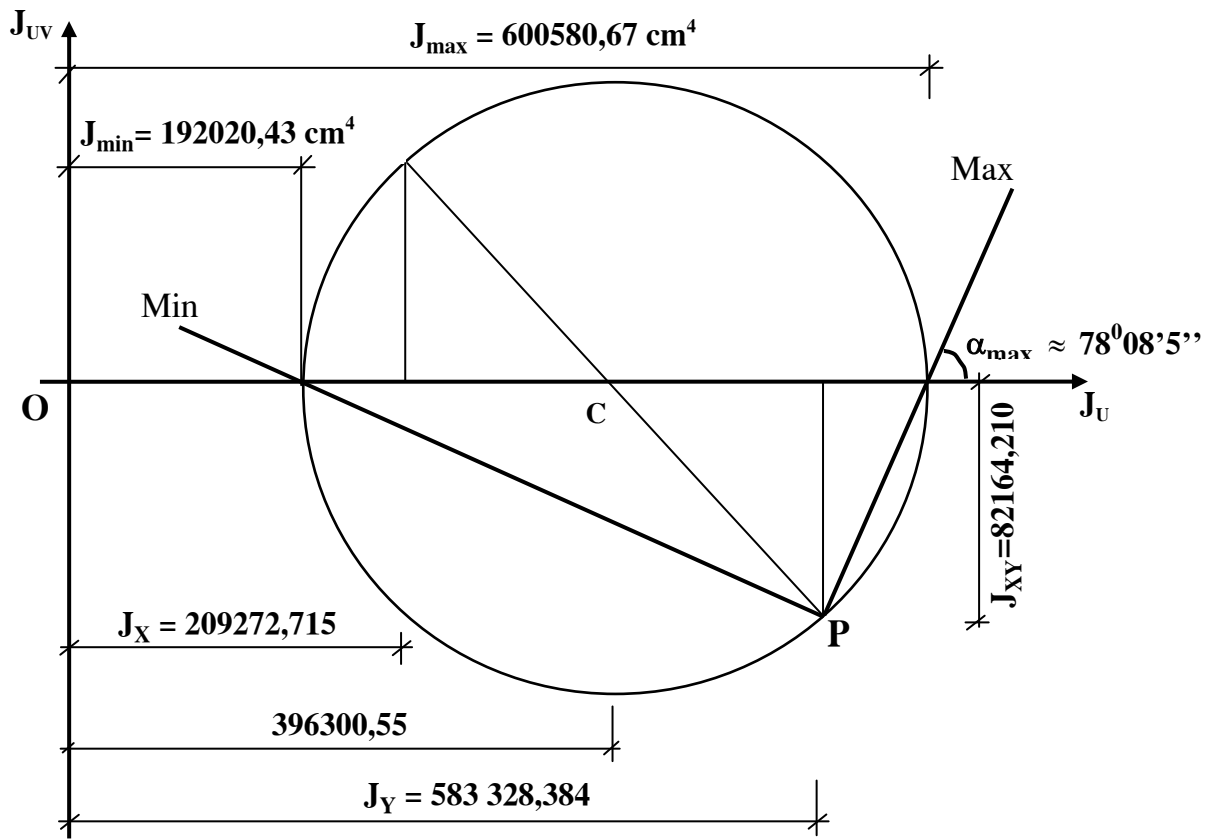
Vòng Mo trên hình 1.4 được vẽ với:

- Tâm: C $\left(\frac{209272,715 + 583328,384}{2}; 0\right) \rightarrow C(396300,55; 0)$

- Bán kính: $R = \sqrt{\left(\frac{209272,715 - 583328,384}{2}\right)^2 + (-82164,210)^2}$

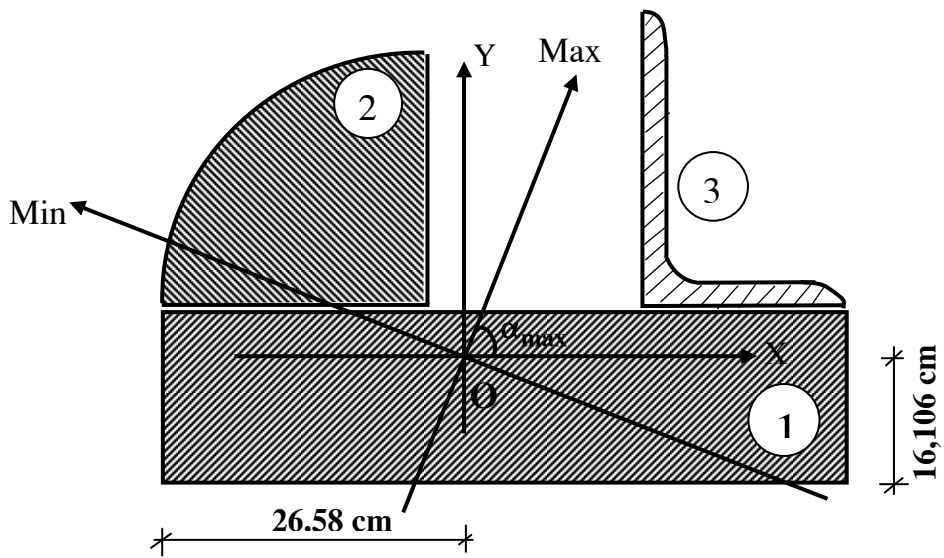
$\rightarrow R = 204280,12$

- Cực: P $(J_Y, J_{XY}) \rightarrow P(583\,328,384; -82\,164,210)$



Hình 1.4

Vị trí hệ trục quán tính chính trung tâm được biểu diễn trên hình 1.5



Hình 1.5

BÀI TẬP LỚN SỐ 2
TÍNH DÀM THÉP

BẢNG SỐ LIỆU BÀI TẬP LỚN SỐ 2

STT	P (KN)	M (KNm)	q (KN/m)	a (m)	b (m)	c (m)
1	24	40	18	0,8	1,8	0,9
2	20	52	16	0,7	1,4	0,8
3	36	54	12	1,0	1,2	0,8
4	22	50	14	1,1	1,4	1,4
5	40	44	10	0,8	1,6	1,1
6	30	42	22	0,7	1,4	0,7
7	32	56	15	0,5	1,2	0,9
8	28	46	20	0,6	1,2	1,2
9	26	38	24	0,9	1,8	1,2
10	20	62	16	0,5	1,5	1,0

Ghi chú: Sinh viên chọn những số liệu trong bảng số liệu phù hợp với hình vẽ của mình.

YÊU CẦU VÀ THỨ TỰ THỰC HIỆN

Yêu cầu:

Hãy chọn số hiệu mặt cắt cho dầm làm bằng thép chữ I (I_{No}) để thoả mãn điều kiện bền của dầm, biết $[\sigma] = 210 \text{ MN/m}^2$.

Tính chuyển vị tại mặt cắt D.

Các bước giải:

1. Chọn sơ bộ mặt cắt:

- ☛ Vẽ biểu đồ nội lực của sơ đồ tính với tải trọng đã cho (M_X, Q_Y)
- ☛ Từ biểu đồ M_X vẽ được, chọn mặt cắt nguy hiểm có $|M_X|_{\max}$
- ☛ Chọn kích thước mặt cắt theo điều kiện bền của ứng suất pháp:

$$W_x \geq \frac{|M_x|_{\max}}{[\sigma]}$$

Từ đó tra bảng thép để được số hiệu thép ($N^0 I$) cần tìm.

2. Kiểm tra lại điều kiện bền khi có kể đến trọng lượng bản thân:

☛ Vẽ biểu đồ nội lực trong trường hợp có kể đến trọng lượng bản thân dầm.

☛ Chọn các mặt cắt nguy hiểm: từ biểu đồ M_X và Q_Y chọn ra 3 loại mặt cắt sau:

* Mặt cắt có $|M_X|_{\max}$

* Mặt cắt có $|Q_Y|_{\max}$

* Mặt cắt có M_X và Q_Y cùng lớn

(đôi khi 3 loại mặt cắt này trùng nhau).

☛ Kiểm tra bền cho dầm tại các điểm sau:

* Điểm có ứng suất pháp lớn nhất (tại các điểm trên biên của mặt cắt có $|M_X|_{\max}$)

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_X|_{\max}}{W_X} \leq [\sigma]$$

* Điểm có ứng suất tiếp lớn nhất (tại các điểm trên đường trung hoà của mặt cắt có $|Q_Y|_{\max}$):

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_Y|_{\max} |S_X^C|}{J_X b^C} \leq [\tau]$$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại thì: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng thì: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$

* Điểm có ứng suất pháp và ứng suất tiếp đều khá lớn (điểm tiếp giáp giữa thân và cánh trên mặt cắt có M_X và Q_Y cùng lớn):

Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại thì:

$$\sigma_{tt} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{ZY}^2} \leq [\sigma]$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng thì:

$$\sigma_{tt} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{ZY}^2} \leq [\sigma]$$

☛ Nếu một trong các điều kiện bền trên không thoả mãn thì phải chọn lại số hiệu thép, và kiểm tra bền lại cho dầm.

3. Xác định ứng suất chính:

☛ Tính ứng suất chính và phương chính tại 5 điểm đặc biệt trên mặt cắt có M_x và Q_y cùng lớn (điểm trên 2 biên, điểm trên đường trung hoà, điểm tiếp giáp giữa thân và cánh) bằng phương pháp giải tích

☛ Xác định ứng suất chính và phương chính tại 5 điểm đó bằng phương pháp vẽ vòng Mo.

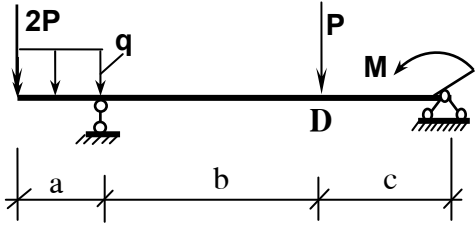
4. Tính chuyển vị:

☛ Viết phương trình độ võng và góc xoay cho toàn dầm bằng phương pháp thông số ban đầu.

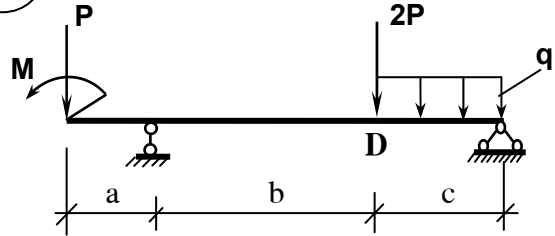
☛ Tính chuyển vị đứng và góc xoay tại mặt cắt D.

SƠ ĐỒ TÍNH

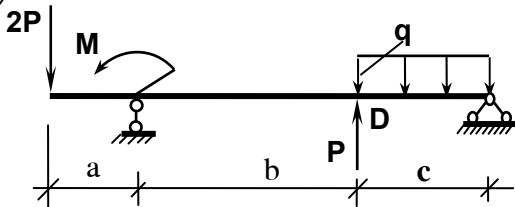
1



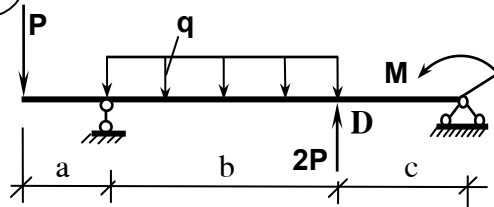
2



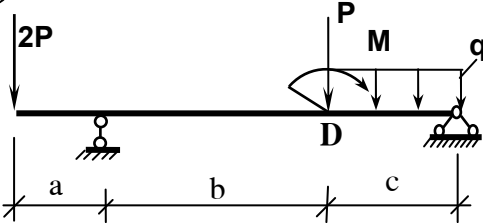
3



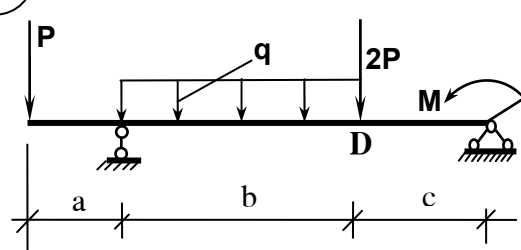
4



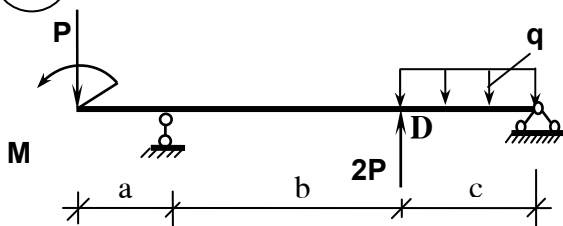
5



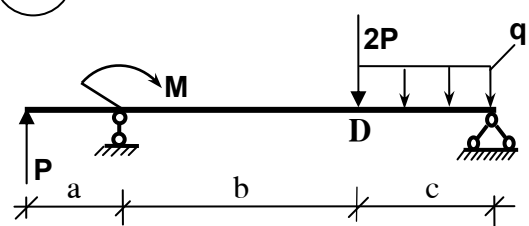
6

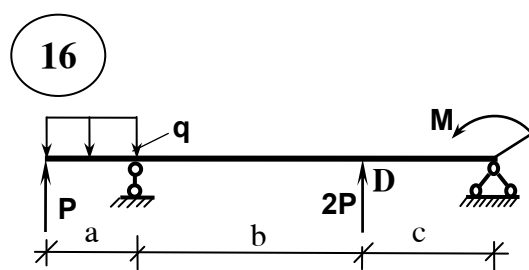
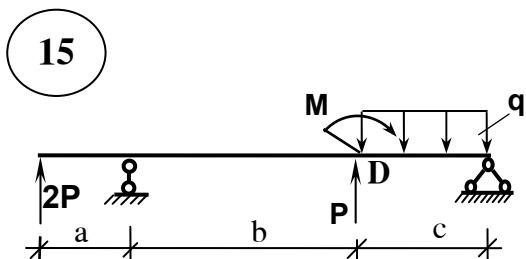
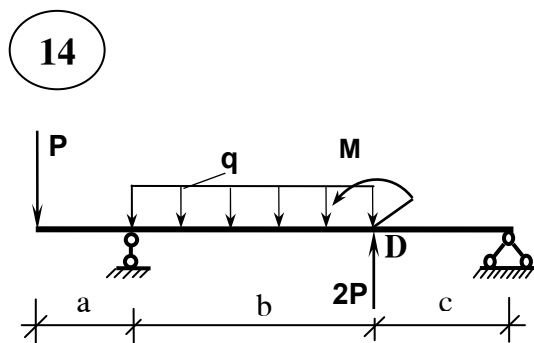
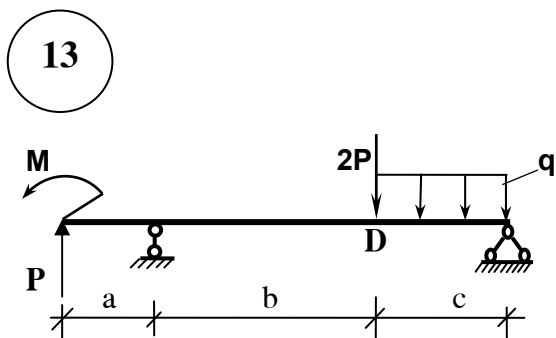
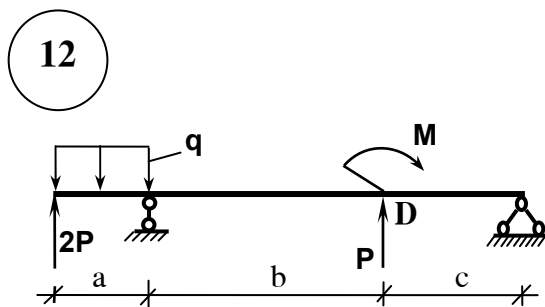
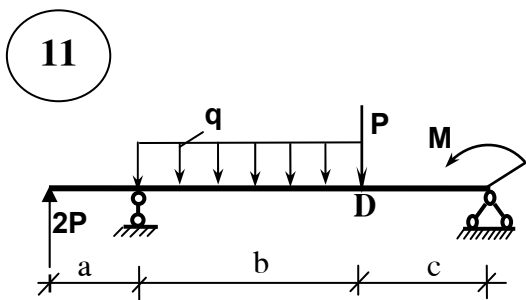
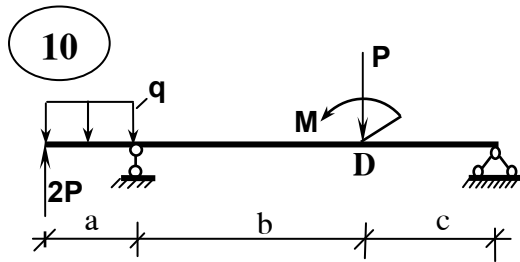
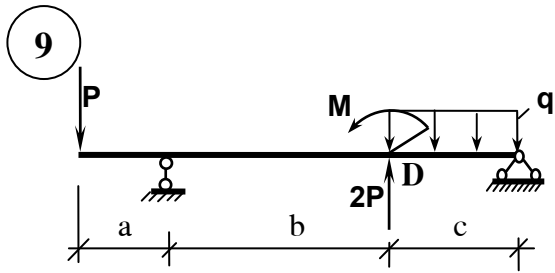


7



8





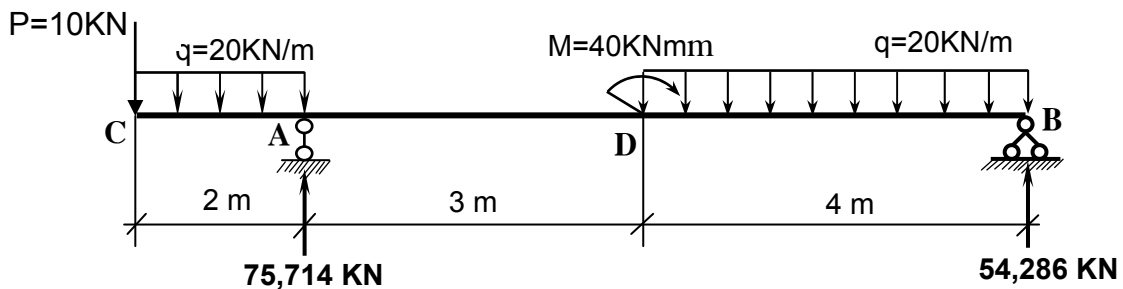
VÍ DỤ THAM KHẢO

Đề bài:

Chọn số hiệu thép chữ I (N^oI) của mặt cắt ngang dầm dưới đây,

Biết: $[\sigma] = 210 \text{ MN/m}^2$, (xem hình 2.1).

Tính độ võng và góc xoay tại mặt cắt D.



Hình 2.1

Bài làm:

1. Chọn sơ bộ mặt cắt theo điều kiện bền của ứng suất pháp:

1.1. Xác định phản lực gối tựa:

$$\sum M_A = V_B \cdot 7 + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 - M - q \cdot 4 \cdot 5 = 0 \rightarrow V_B = \frac{-20 - 40 + 40 + 400}{7}$$

$$\rightarrow V_B = 54,286 \text{ KN}$$

$$\sum M_B = -V_A \cdot 7 + P \cdot 9 + q \cdot 2 \cdot 8 - M + q \cdot 4 \cdot 2 = 0 \rightarrow V_A = \frac{90 + 320 - 40 + 160}{7}$$

$$\rightarrow V_A = 75,714 \text{ KN}$$

Kiểm tra lại phản lực:

$$\sum Y = V_A + V_B - P - q \cdot 2 - q \cdot 4 = 75,714 + 54,286 - 10 - 20 \cdot 2 - 20 \cdot 4 = 0$$

$$\rightarrow V_A \text{ và } V_B \text{ đã tính đúng.}$$

1.2. Viết phương trình nội lực: Chia dầm làm 3 đoạn

- Đoạn CA: Chọn gốc tọa độ tại C và trục z hướng sang phải ($0 \leq Z_1 \leq 2 \text{ m}$)

$$Q_Y = -P - q \cdot Z_1 \rightarrow Q_Y = -10 - 20 \cdot Z_1 \rightarrow \text{Phương trình bậc nhất}$$

$$M_X = -P \cdot Z_1 - q \cdot \frac{Z_1^2}{2} \rightarrow M_X = -10 \cdot Z_1 - 10 \cdot Z_1^2 \rightarrow \text{Phương trình bậc hai}$$

- * Tại $Z_1 = 0$ (tại C): $Q_Y = - 10 \text{ KN}; \quad M_X = 0$
- * Tại $Z_1 = 1 \text{ m}$ (tại giữa đoạn): $Q_Y = - 30 \text{ KN}; \quad M_X = - 20 \text{ KNm}$
- * Tại $Z_1 = 2 \text{ m}$ (tại A): $Q_Y = - 50 \text{ KN}; \quad M_X = - 60 \text{ KNm}$
- Đoạn AD: Chọn gốc toạ độ tại A và trục z hướng sang phải ($0 \leq Z_2 \leq 3 \text{ m}$)
 - $Q_Y = - P - q \cdot 2 + V_A = - 10 - 20 \cdot 2 + 75,714$
 - $Q_Y = 25,714 \text{ KN} \rightarrow$ Phương trình hằng số
 - $M_X = - P \cdot (2+Z_2) - q \cdot 2 \cdot (1+Z_2) + V_A \cdot Z_2 = - 10(2+Z_2) - 40 \cdot (1+Z_2) + 75,714 \cdot Z_2$
 - $M_X = 25,714 \cdot Z_2 - 60 \rightarrow$ Phương trình bậc nhất
- * Tại $Z_2 = 0$ (tại A): $Q_Y = 25,714 \text{ KN}; \quad M_X = - 60 \text{ KNm}$
- * Tại $Z_2 = 3 \text{ m}$ (tại D): $Q_Y = 25,714 \text{ KN}; \quad M_X = 17,142 \text{ KNm}$
- Đoạn DB: Chọn gốc toạ độ tại B và trục z hướng sang trái ($0 \leq Z_3 \leq 4 \text{ m}$)
 - $Q_Y = - V_B + q \cdot Z_3 \rightarrow Q_Y = - 54,286 + 20 \cdot Z_3 \rightarrow$ Phương trình bậc nhất
 - $M_X = V_B \cdot Z_3 - q \cdot \frac{Z_3^2}{2} \rightarrow M_X = 54,286 \cdot Z_3 - 10 Z_3^2 \rightarrow$ Phương trình bậc hai
- * Tại $Z_3 = 0$ (tại B): $Q_Y = - 54,286 \text{ KN}; \quad M_X = 0$
- * Tại $Z_3 = 2 \text{ m}$ (tại giữa đoạn): $Q_Y = - 14,286 \text{ KN}; \quad M_X = 14,286 \text{ KNm}$
- * Tại $Z_3 = 4 \text{ m}$ (tại D): $Q_Y = 25,714 \text{ KN}; \quad M_X = 57,14 \text{ KNm}$

1.3. Xác định vị trí có M_{max} : Cho phương trình $Q_Y = 0$ (ở đoạn DB), ta tìm được toạ độ mặt cắt có M_{max} : (mặt cắt E)

$$- 54,286 + 20 \cdot Z_3 = 0 \rightarrow Z_3 = \frac{54,286}{20} \rightarrow Z_3 = 2,714 \text{ m}$$

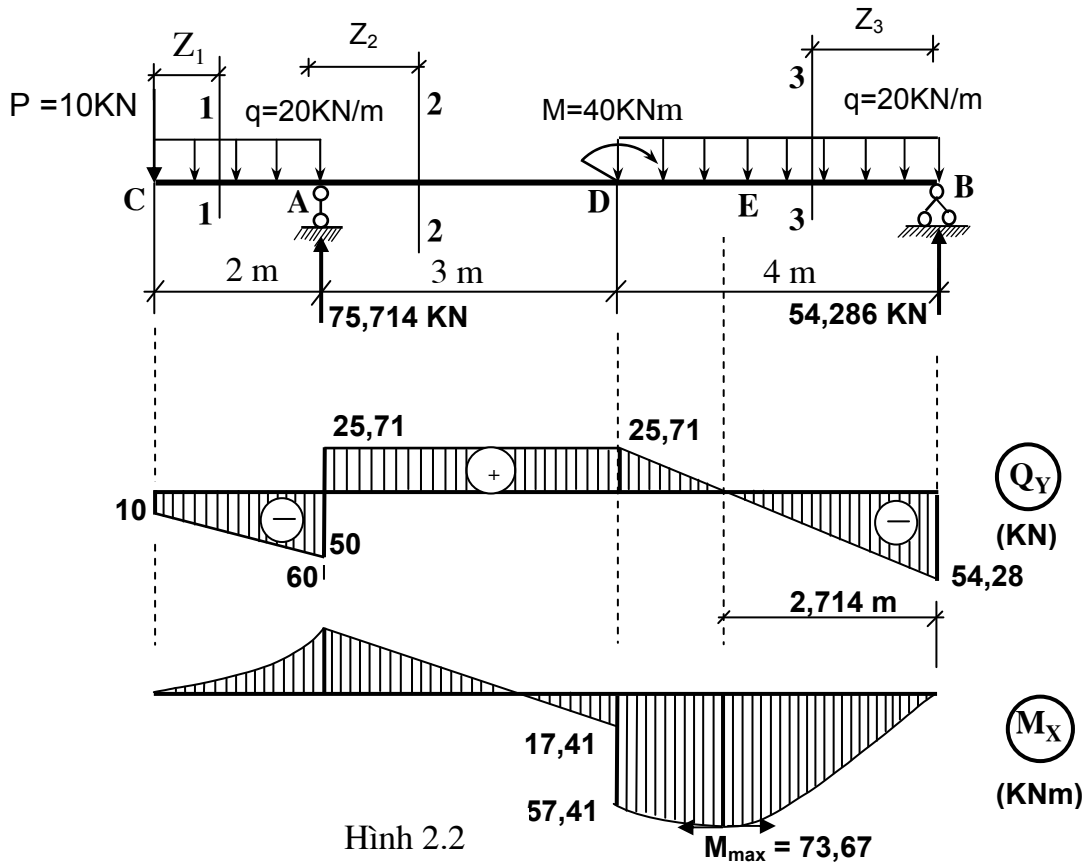
Tính giá trị M_{max} :

$$M_{max} = 54,286 \cdot 2,714 - 10 \cdot 2,714^2 \rightarrow M_{max} = 73,67 \text{ KNm}$$

Bảng kết quả tính toán nội lực:

Đoạn	Z (m)	Q_Y (KN)	M_X (KNm)
CA	0	- 10	0
	2	- 50	- 60
AD	0	25,714	- 60
	3	25,714	17,412
DB	4	25,714	57,412
	2,714	0	73,67
	0	-54,286	0

Vẽ biểu đồ nội lực



Hình 2.2

1.4. Sơ bộ chọn mặt cắt theo điều kiện bền của ứng suất pháp:

Tại mặt cắt E trên hình vẽ có mô men lớn nhất:

$$|M_x|_{\max} = + 73,67 \text{ KNm (xem hình 2.2) nên:}$$

$$W_x \geq \frac{|M_x|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{73,67 \text{ KNm}}{210 \cdot 10^3 \text{ KN/m}^2} = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \rightarrow W_x \geq 350 \text{ cm}^3$$

Tra bảng thép chữ I, chọn I No:27 có $W_x = 371 \text{ cm}^3$ thỏa mãn điều kiện trên và có các đặc trưng sau:

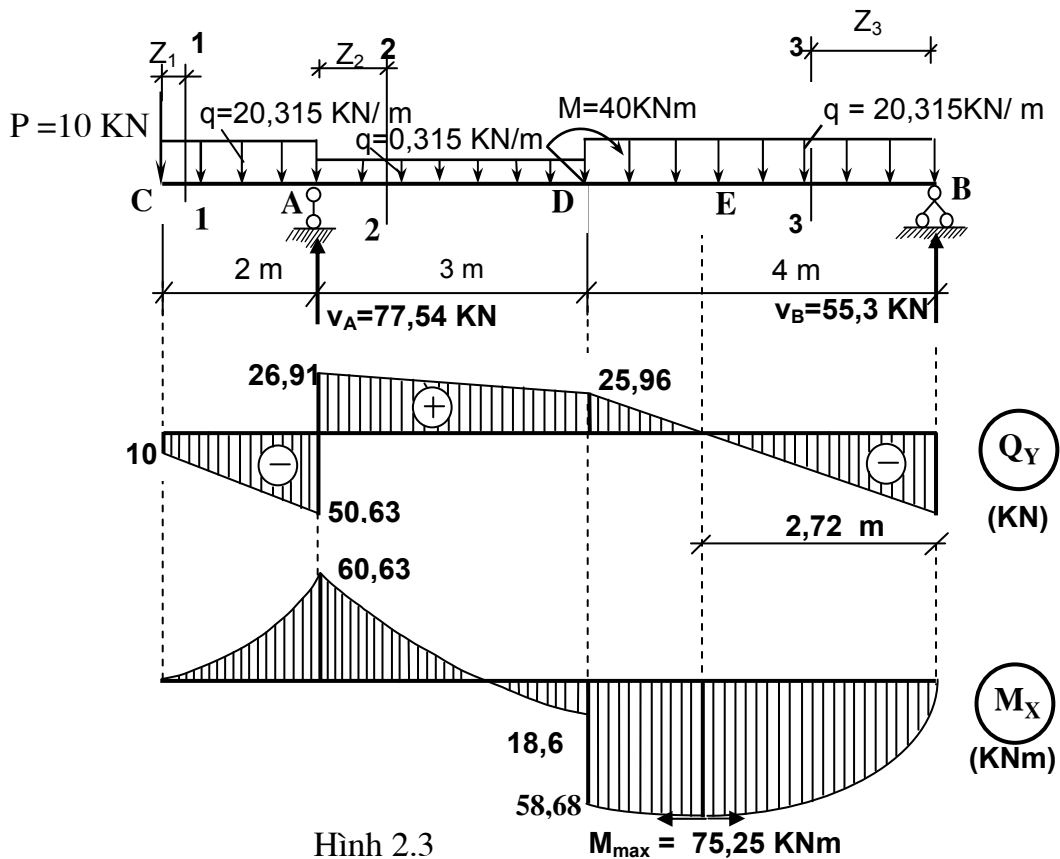
$$q_{bt} = 31,5 \text{ Kg/m} = 315 \text{ N/m} = 0,315 \text{ KN/m};$$

$$h = 27 \text{ cm}; b = 12,5 \text{ cm}; d = 0,6 \text{ cm}; t = 0,98 \text{ cm};$$

$$F = 40,2 \text{ cm}^2; W_x = 371 \text{ cm}^3; S_x = 210 \text{ cm}^3; J_x = 5010 \text{ cm}^4;$$

2. Kiểm tra lại điều kiện bền: (khi kể đến trọng lượng bản thân dầm)

Sơ đồ tính của dầm khi có kể đến trọng lượng bản thân như sau:



Hình 2.3

2.1. Xác định phản lực gối tựa: (xem hình 2.3)

$$\sum M_A = V_B \cdot 7 + P \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 + q_{bt} \cdot 2 \cdot 1 - M - q \cdot 4 \cdot 5 - q_{bt} \cdot 7 \cdot 3,5 = 0$$

$$\rightarrow V_B = 55,3 \text{ KN}$$

$$\sum M_B = -V_A \cdot 7 + P \cdot 9 + q \cdot 2 \cdot 8 - M + q \cdot 4 \cdot 2 + q_{bt} \cdot 9 \cdot 4,5 = 0$$

$$\rightarrow V_A = 77,54 \text{ KN}$$

Kiểm tra lại phản lực:

$$\sum Y = V_A + V_B - P - q \cdot 2 - q \cdot 4 - q_{bt} \cdot 9$$

$$= 77,54 + 55,3 - 10 - 20 \cdot 2 - 20 \cdot 4 - 0,315 \cdot 9 = 0$$

→ V_A và V_B đã tính đúng.

Cách khác:

- Tính trường hợp do riêng trọng lượng bản thân gây ra (xác định phản lực, vẽ biểu đồ nội lực)

- Cộng biểu đồ vừa vẽ với biểu đồ trên *hình 2.2* sẽ được biểu đồ như trên *hình 2.3*.

2.2. Viết phương trình nội lực:

Chia dầm làm 3 đoạn, chọn trục z và gốc tọa độ cho mỗi đoạn tương tự như trên:

- Đoạn CA: $0 \leq Z_1 \leq 2$ m (gốc tọa độ tại C)

$$Q_Y = -P - (q + q_{bt}) \cdot Z_1 \rightarrow Q_Y = -10 - 20,315 \cdot Z_1$$

$$M_X = -P \cdot Z_1 - (q + q_{bt}) \cdot \frac{Z_1^2}{2} \rightarrow M_X = -10 \cdot Z_1 - \frac{20,315}{2} \cdot Z_1^2$$

* Tại $Z_1 = 0$ (tại C): $Q_Y = -10$ KN; $M_X = 0$

* Tại $Z_1 = m$ (tại giữa đoạn): $Q_Y = -30,315$ KN; $M_X = -20,157$ KNm

* Tại $Z_1 = 2$ m (tại A): $Q_Y = -50,63$ KN; $M_X = -60,63$ KNm

- Đoạn AD: $0 \leq Z_2 \leq 3$ m (gốc tọa độ tại A)

$$Q_Y = -P - q \cdot 2 - q_{bt} \cdot (2 + Z_2) + V_A = -10 - 20 \cdot 2 - 0,315 \cdot (2 + Z_2) + 77,54$$

$$\rightarrow Q_Y = 26,91 - 0,315 \cdot Z_2$$

$$M_X = -P \cdot (2 + Z_2) - q \cdot 2 \cdot (1 + Z_2) + V_A \cdot Z_2 - q_{bt} \cdot \frac{(2 + Z_2)^2}{2}$$

$$\rightarrow M_X = -0,315 \cdot \frac{Z_2^2}{2} + 26,91 \cdot Z_2 - 60,63$$

* Tại $Z_2 = 0$ (tại A): $Q_Y = 26,91$ KN; $M_X = -60,63$ KNm

* Tại $Z_2 = 2$ m: $Q_Y = 26,28$ KN; $M_X = -7,43$ KNm

* Tại $Z_2 = 3$ m (tại D): $Q_Y = 25,965$ KN; $M_X = 18,68$ KNm

- Đoạn DB: $0 \leq Z_3 \leq 4$ m (gốc tọa độ tại B)

$$Q_Y = -V_B + (q + q_{bt}) \cdot Z_3 \rightarrow Q_Y = -55,3 + 20,315 \cdot Z_3$$

$$M_X = V_B \cdot Z_3 - (q + q_{bt}) \cdot \frac{Z_3^2}{2} \rightarrow M_X = 55,3 \cdot Z_3 - \frac{20,315}{2} \cdot Z_3^2$$

* Tại $Z_3 = 0$ (tại B): $Q_Y = -55,3$ KN; $M_X = 0$

* Tại $Z_3 = 2$ m (tại giữa đoạn): $Q_Y = -14,67$ KN; $M_X = 69,93$ KNm

* Tại $Z_3 = 4$ m (tại D): $Q_Y = 25,96$ KN; $M_X = 58,68$ KNm

2.3. Xác định vị trí có M_{max} :

- Cho phương trình $Q_Y = 0$ (ở đoạn DB), ta tìm được tọa độ mặt cắt có M_{max} : (mặt cắt E)

$$- 55,3 + 20,315.Z = 0 \quad \rightarrow \quad Z = \frac{55,3}{20,315} \rightarrow Z_3 = 2,72 \text{ m}$$

- Tính giá trị M_{max}

$$M_{max} = 55,3 \cdot 2,72 - 20,315 \cdot \frac{2,72^2}{2} \rightarrow M_{max} = 75,25 \text{ KNm}$$

Bảng kết quả tính toán:

Đoạn	Z (m)	Q_Y (KN)	M_X (KNm)
CA	0	- 10	0
	2	- 50,63	- 60,63
AD	0	26,91	- 60,63
	3	25,96	18,68
DB	4	25,96	58,68
	2,72	0	75,25
	0	55,3	0

Vẽ biểu đồ nội lực: Các biểu đồ nội lực M_X và Q_Y biểu diễn trên hình 2.3

2.4. Chọn mặt cắt nguy hiểm và kiểm tra bền:

- Chọn ba mặt cắt nguy hiểm sau:

◆ Mặt cắt H có $M_x = + 75,25 \text{ KNm}$ → kiểm tra điều kiện bền theo ứng suất pháp σ_{max} cho các điểm trên biên.

◆ Mặt cắt B có $Q_Y = +55,3 \text{ KN}$ → kiểm tra điều kiện bền theo ứng suất tiếp τ_{max} cho các điểm trên đường trung hoà.

◆ Mặt cắt A (trái) có $M_x = - 60,63 \text{ KNm}$ và $Q_Y = - 50,63 \text{ KN}$ → kiểm tra theo thuyết bền thế năng hoặc thuyết bền ứng suất tiếp cho các điểm tiếp giáp giữa lòng và đế.

- Kiểm tra bền:

◆ Kiểm tra cho các điểm trên biên (điểm I hoặc K) tại mặt cắt H:

$$\sigma_{max} = - \sigma_{min} = \frac{|M_x|_{max}}{W_x} \leq [\sigma] \rightarrow \sigma_{max} = \frac{75,25}{371 \cdot 10^{-6}} = 202 \text{ 900 KN/m}^2$$

$$\sigma_{\max} = 202,9 \text{ MN/m}^2 < [\sigma] = 210 \text{ MN/m}^2$$

Thoả mãn điều kiện bền tại biên trên và biên dưới của mặt cắt.

◆ Kiểm tra cho các điểm trên đường trung hoà (điểm O - có ứng suất tiếp) tại mặt cắt B theo thuyết bền thế năng:

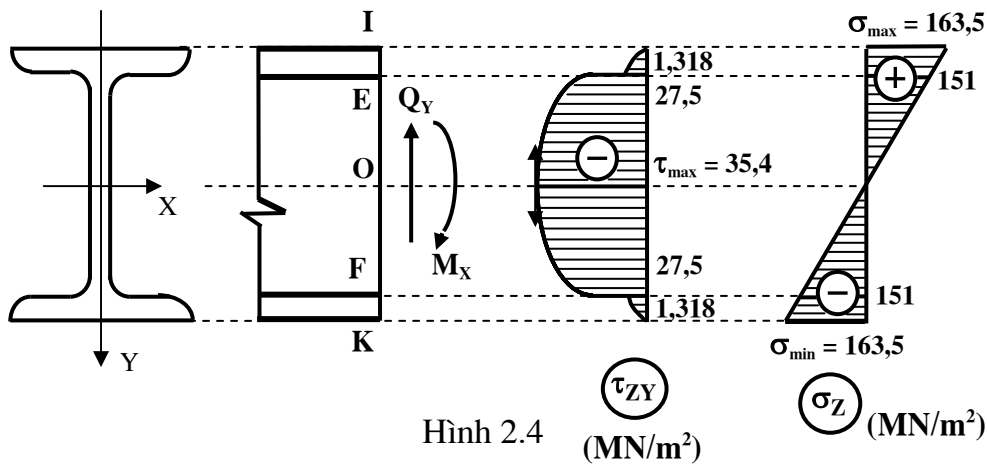
$$\tau_{\max} = \frac{|Q_Y|_{\max} \cdot |S_X^C|}{J_X \cdot b^C} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

trong công thức trên, ta lấy $b^C = d$ trong bảng, thay số ta được:

$$\rightarrow \tau_{\max} = \frac{55,3 \cdot 210 \cdot 10^{-6}}{5010 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot 10^{-2}} = 38 \text{ 600 KN/m}^2$$

$$\tau_{\max} = 38,6 \text{ MN/m}^2 < \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 121 \text{ MN/m}^2$$

Thoả mãn điều kiện bền tại các điểm trên trục trung hoà của mặt cắt. Biểu đồ ứng suất của mặt cắt A (trái)



Hình 2.4

τ_{ZY}
(MN/m²)

σ_Z
(MN/m²)

◆ Kiểm tra cho các điểm tiếp giáp giữa thân và cánh (điểm E hoặc F) tại mặt cắt A trái theo thuyết bền TNBDHD:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Ta có:

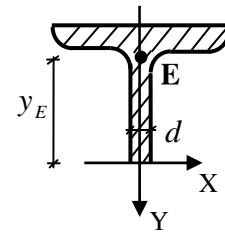
$$\sigma_E = \frac{M_X}{J_X} \cdot y_E = \frac{-60,63}{5010 \cdot 10^{-8}} \cdot \left[-\left(\frac{h}{2} - t \right) \right] = \frac{-60,63}{5010 \cdot 10^{-8}} \cdot \left[-\left(\frac{27}{2} - 0,98 \right) \right] \cdot 10^{-2}$$

$$\sigma_E = 151\,000 \text{ KN/m}^2 \rightarrow \sigma_E = 151 \text{ MN/m}^2$$

Tại điểm E có: $S_X^C = S_X - d \frac{y_E^2}{2}$ và $b^C = d$

(Xem hình 2.5)

Do đó:



Hình 2.5

$$\tau_E = - \frac{Q_Y^A \left(S_X - d \frac{y_E^2}{2} \right)}{J_X \cdot d} = \frac{-50,63 \cdot \left(210 - 0,6 \cdot \frac{12,52^2}{2} \right) \cdot 10^{-6}}{5010 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot 10^{-2}} = -27500 \text{ KN/m}^2$$

$$\rightarrow \tau_E = -27,5 \text{ MN/m}^2,$$

$$\rightarrow \sigma_{td} = \sqrt{(151)^2 + 3(-27,5)^2} = 158,33 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{td} = 158,33 \text{ MN/m}^2 < [\sigma] = 210 \text{ MN/m}^2$$

Thoả mãn theo điều kiện bền của thuyết bền TNBĐHD.

Kết luận: Chọn mặt cắt IN⁰ 27 đảm bảo điều kiện bền cho toàn dầm.

3. Xác định ứng suất chính:

Dựa vào biểu đồ ứng suất trên hình 2.4, tính các ứng suất chính và phương chính cho các điểm đặc biệt trên mặt cắt A (trái)

3.1. Bảng giải tích:

- Điểm trên bên (I và K)

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_X^A|}{W_X} = \pm \frac{60,63}{371 \cdot 10^{-6}} = \pm 163\,500 \text{ KN/m}^2 = \pm 163,5 \text{ MN/m}^2$$

Tại I có: $\sigma_1 = \sigma_{\max} = 163,5 \text{ MN/m}^2$ (phần tử kéo đơn) $\alpha_{\max}^I = 0^0$

Tại K có: $\sigma_3 = \sigma_{\min} = -163,5 \text{ MN/m}^2$ (phần tử nén đơn) $\alpha_{\max}^K = 0^0$

- Điểm tiếp giáp giữa lòng và đế (E và F): $\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$

◆ Điểm E: ở trên đã có

$$\sigma_E = -\sigma_F = 151 \text{ MN/m}^2$$

$$\tau_E = \tau_F = -27,5 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{151}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{151}{2}\right)^2 + (-27,5)^2}$$

Do đó: $\sigma_1^E = 75,5 + 80,352 \text{ MN/m}^2 = 155,852 \text{ MN/m}^2$

$$\sigma_3^E = 75,5 - 80,352 \text{ MN/m}^2 = -4,852 \text{ MN/m}^2$$

$$\text{tg} \alpha_{\max} = -\frac{\tau_E}{\sigma_E - \sigma_{\min}} = -\frac{-27,5}{151 - (-4,852)} = 0,177 \rightarrow \alpha_{\max}^E = 10^0'$$

◆ Điểm F:

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{151}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{151}{2}\right)^2 + (-27,5)^2}$$

$$\sigma_1^F = -75,5 + 80,352 \text{ MN/m}^2 = 4,852 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_3^F = -75,5 - 80,352 \text{ MN/m}^2 = -155,852 \text{ MN/m}^2$$

$$\text{tg} \alpha_{\max}^F = -\frac{\tau_F}{\sigma_F - \sigma_{\min}} = -\frac{-27,5}{-151 - (-155,852)} = 5,67 \rightarrow \alpha_{\max}^F = 80^0$$

Vậy: Tại điểm E có các ứng suất chính là:

$$\sigma_1 = 155,85 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_3 = -4,852 \text{ MN/m}^2$$

$$\alpha_{\max}^E = 10^0'$$

Tại điểm F có các ứng suất chính là:

$$\sigma_1 = 4,852 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_3 = -155,852 \text{ MN/m}^2$$

$$\alpha_{\max}^F = 80^0$$

◆ Điểm trên đường trung hoà (O):

$$\sigma_o = 0$$

$$\tau_o = \frac{Q_Y^A \cdot |S_X^C|}{J_X \cdot b^C} = \frac{-50,63 \cdot 210 \cdot 10^{-6}}{5010 \cdot 10^{-8} \cdot 0,6 \cdot 10^{-2}} = -35400 \text{ KN/m}^2 = -35,4 \text{ MN/m}^2$$

Tại đường trung hoà có: $\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \pm 35,4 \text{ MN/m}^2$

Tại điểm O có các ứng suất chính là:

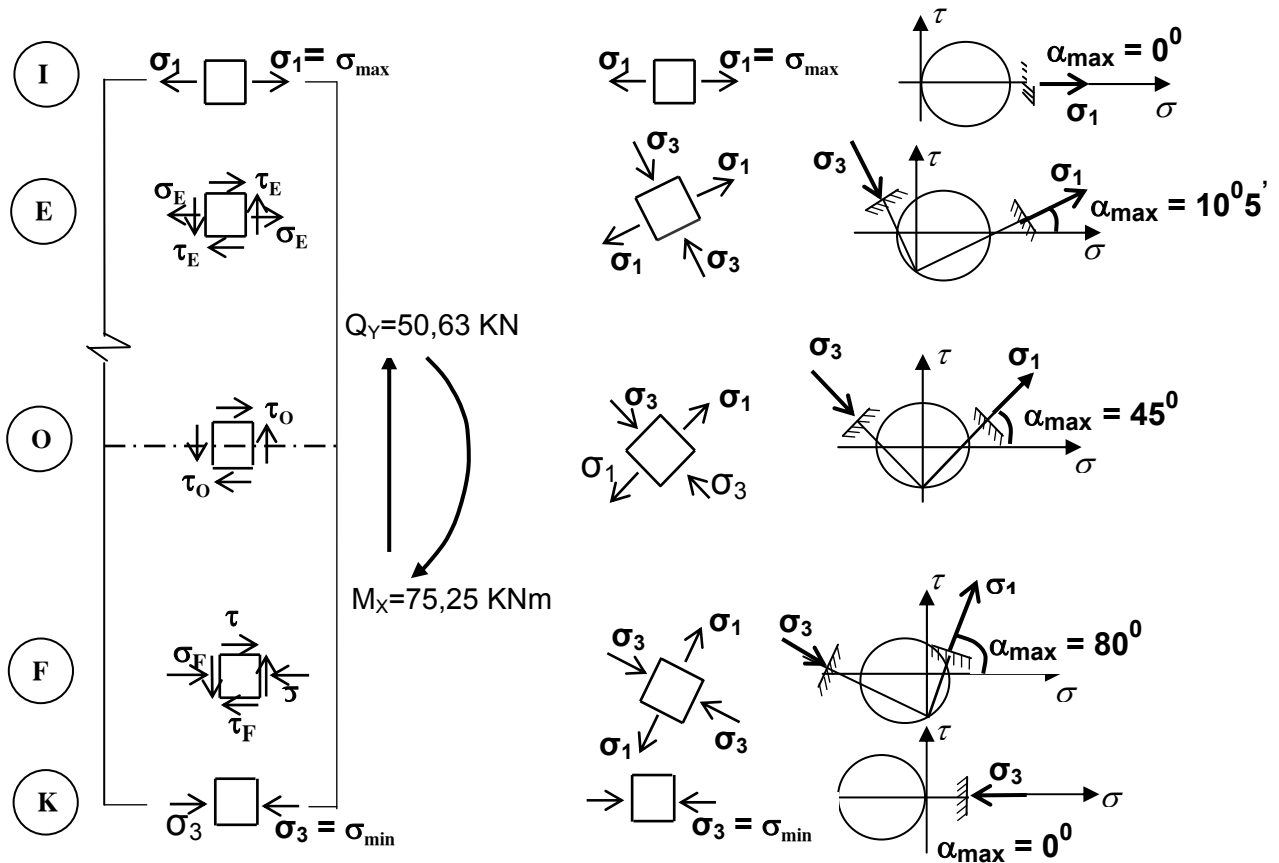
$$\sigma_1 = 35,4 \text{ MN/m}^2$$

$$\sigma_3 = -35,4 \text{ MN/m}^2$$

$$\alpha_{\max}^O = 45^0$$

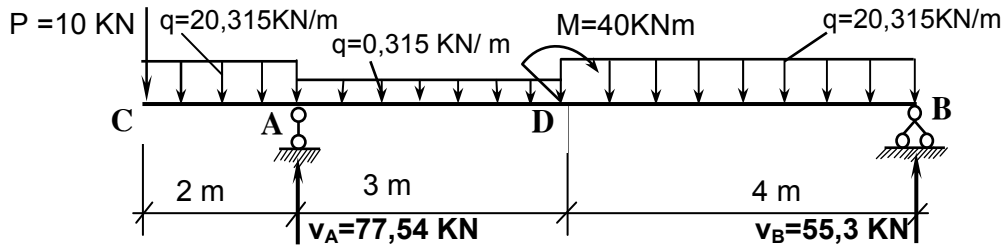
Vì phân tố tại ĐTH là phân tố trượt thuần túy.

3.2. Biểu diễn phân tố tại 5 điểm đặc biệt trên mặt cắt ngang và vẽ vòng Mo ứng suất cho 5 điểm đó:



Hình 2.6

4. Viết phương trình đường đàn hồi của trục dầm:



Hình 2.7

Bảng thông số ban đầu

Các thông số	Đoạn CA (a=0)	Đoạn AD (a=2)	Đoạn DB (a=5)
Δy	$\neq 0$	0	0
$\Delta \varphi$	$\neq 0$	0	0
ΔM	0	0	40
ΔQ	- 10	77,54	0
Δq	- 20,315	20	- 20
Δq	0	0	0

4.1. Phương trình độ võng của từng đoạn dầm: ($EJ = \text{const}$)

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_a + \Delta y'_a (Z - a) - \frac{\Delta M_a \cdot (Z - a)^2}{2!EJ} - \frac{\Delta Q_a \cdot (Z - a)^3}{3!EJ} - \frac{\Delta q_a \cdot (Z - a)^4}{4!EJ} - \frac{\Delta q'_a (Z - a)^5}{5!EJ} - \dots$$

- Thay các giá trị vào phương trình trên:

* Đoạn CA: ($0 \leq Z \leq 2$)

$$y_1(Z) = y_0 + \varphi_0 \cdot Z + \frac{10Z^3}{3!EJ} + \frac{20,315Z^4}{4!EJ}$$

$$\varphi_1(Z) = \varphi_0 + \frac{10Z^2}{2!EJ} + \frac{20,315Z^3}{3!EJ}$$

* Đoạn AD: ($2 \leq Z \leq 5$)

$$y_2(Z) = y_1(Z) - \frac{77,54(Z - 2)^3}{3!EJ} - \frac{20 \cdot (Z - 2)^4}{4!EJ}$$

$$\rightarrow y_2(Z) = y_0 + \varphi_0 \cdot Z + \frac{10Z^3}{3!EJ} + \frac{20,315Z^4}{4!EJ} - \frac{77,54(Z-2)^3}{3!EJ} - \frac{20 \cdot (Z-2)^4}{4!EJ}$$

$$\varphi_2(Z) = \varphi_1(Z) - \frac{77,54(Z-2)^2}{2!EJ} - \frac{20 \cdot (Z-2)^3}{3!EJ}$$

$$\rightarrow \varphi_2(Z) = \varphi_0 + \frac{10Z^2}{2!EJ} + \frac{20,315Z^3}{3!EJ} - \frac{77,54(Z-2)^2}{2!EJ} - \frac{20 \cdot (Z-2)^3}{3!EJ}$$

* Đoạn DB: ($5 \leq Z \leq 9$)

$$y_3(Z) = y_2(Z) - \frac{40(Z-5)^2}{2!EJ} + \frac{20 \cdot (Z-5)^4}{4!EJ}$$

$$\rightarrow y_3(Z) = y_0 + \varphi_0 \cdot Z + \frac{10Z^3}{3!EJ} + \frac{20,315Z^4}{4!EJ} - \frac{77,54(Z-2)^3}{3!EJ} - \frac{20 \cdot (Z-2)^4}{4!EJ} - \frac{40(Z-5)^2}{2!EJ} + \frac{20 \cdot (Z-5)^4}{4!EJ}$$

$$\varphi_3(Z) = \varphi_2(Z) - \frac{40(Z-5)}{EJ} + \frac{20 \cdot (Z-5)^3}{3!EJ}$$

$$\rightarrow \varphi_3(Z) = \varphi_0 + \frac{10Z^2}{2!EJ} + \frac{20,315Z^3}{3!EJ} - \frac{77,54(Z-2)^2}{2!EJ} - \frac{20 \cdot (Z-2)^3}{3!EJ} - \frac{40(Z-5)}{EJ} + \frac{20 \cdot (Z-5)^4}{4!EJ}$$

4.2. Xác định y_0 và φ_0 từ các điều kiện biên sau:

- Tại A ($Z = 2$) có $y_1 = y_2 = 0$, thay số:

$$y_2(Z) = y_0 + \varphi_0 \cdot Z + \frac{10Z^3}{3!EJ} + \frac{20,315Z^4}{4!EJ} - \frac{77,54(Z-2)^3}{3!EJ} - \frac{20 \cdot (Z-2)^4}{4!EJ} = 0$$

$$y_2(Z) = y_0 + \varphi_0 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 2^3}{3!EJ} + \frac{20,315 \cdot 2^4}{4!EJ} = 0$$

$$\rightarrow y_0 + \varphi_0 \cdot 2 + \frac{26,87}{EJ} = 0$$

- Tại D ($Z = 9$) có $y_3 = 0$

$$y_0 + \varphi_0 \cdot Z + \frac{10Z^3}{3!EJ} + \frac{20,315Z^4}{4!EJ} - \frac{77,54(Z-2)^3}{3!EJ} - \frac{20 \cdot (Z-2)^4}{4!EJ} - \frac{40(Z-5)^2}{2!EJ} + \frac{20 \cdot (Z-5)^4}{4!EJ} = 0$$

$$\begin{aligned} \rightarrow y_0 + \varphi_0 \cdot 9 + \frac{10 \cdot 9^3}{3!EJ} + \frac{20,315 \cdot 9^4}{4!EJ} - \frac{77,54(9-2)^3}{3!EJ} - \frac{20 \cdot (9-2)^4}{4!EJ} - \frac{40(9-5)^2}{2!EJ} \\ + \frac{20 \cdot (9-5)^4}{4!EJ} = 0 \\ y_0 + \varphi_0 \cdot 9 + \frac{1215}{EJ} + \frac{5553,613}{EJ} - \frac{4432,703}{EJ} - \frac{2000,833}{EJ} - \frac{320}{EJ} + \frac{213,333}{EJ} = 0 \\ \rightarrow y_0 + \varphi_0 \cdot 9 + \frac{228,41}{EJ} = 0 \end{aligned}$$

Ta có hệ hai phương trình sau:

$$\begin{cases} y_0 + \varphi_0 \cdot 2 + \frac{26,87}{EJ} = 0 \\ y_0 + \varphi_0 \cdot 9 + \frac{228,41}{EJ} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_0 = -\frac{28,791}{EJ} \\ y_0 = \frac{30,713}{EJ} \end{cases}$$

4.3. Phương trình độ võng và góc xoay toàn dầm:

$$\begin{aligned} y_1(Z) &= \frac{30,713}{EJ} - \frac{28,791}{EJ} Z + \frac{10Z^3}{3!EJ} + \frac{20,315Z^4}{4!EJ} \\ \varphi_1(Z) &= -\frac{28,791}{EJ} + \frac{10Z^2}{2!EJ} + \frac{20,315Z^3}{3!EJ} \\ y_2(Z) &= \frac{30,713}{EJ} - \frac{28,719}{EJ} Z + \frac{10Z^3}{3!EJ} + \frac{20,315Z^4}{4!EJ} - \frac{77,54(Z-2)^3}{3!EJ} - \frac{20 \cdot (Z-2)^4}{4!EJ} \\ \varphi_2(Z) &= -\frac{28,719}{EJ} + \frac{10Z^2}{2!EJ} + \frac{20,315Z^3}{3!EJ} - \frac{77,54(Z-2)^2}{2!EJ} - \frac{20 \cdot (Z-2)^3}{3!EJ} \\ y_3(Z) &= \frac{30,713}{EJ} - \frac{28,719}{EJ} Z + \frac{10Z^3}{3!EJ} + \frac{20,315Z^4}{4!EJ} - \frac{77,54(Z-2)^3}{3!EJ} - \\ &\quad - \frac{20 \cdot (Z-2)^4}{4!EJ} - \frac{40(Z-5)^2}{2!EJ} + \frac{20 \cdot (Z-5)^4}{4!EJ} \\ \varphi_3(Z) &= -\frac{28,719}{EJ} + \frac{10Z^2}{2!EJ} + \frac{20,315Z^3}{3!EJ} - \frac{77,54(Z-2)^2}{2!EJ} - \\ &\quad - \frac{20 \cdot (Z-2)^3}{3!EJ} - \frac{40(Z-5)}{EJ} + \frac{20 \cdot (Z-5)^4}{4!EJ} \end{aligned}$$

4.4. Tính độ võng và góc xoay tại mặt cắt D:

Tại mặt cắt D có $Z = 5$ m (thuộc đoạn 2), do đó thay vào phương trình $\varphi_2(Z)$ và $y_2(Z)$ ta có

$$\varphi_2(Z) = -\frac{28,719}{EJ} + \frac{10.5^2}{2!EJ} + \frac{20,315.5^3}{3!EJ} - \frac{77,54(5-2)^2}{2!EJ} - \frac{20.(5-2)^3}{3!EJ}$$

$$\varphi_2(Z) = \frac{1}{EJ}(-28,719 + 125 + 423,23 - 348,93 - 90) = \frac{80,58}{EJ} \text{ (Rad)}$$

$$y_2(Z) = \frac{30,713}{EJ} - \frac{28,719}{EJ} + \frac{10.5^3}{3!EJ} + \frac{20,315.5^4}{4!EJ} - \frac{77,54(5-2)^3}{3!EJ} - \frac{20.(5-2)^4}{4!EJ}$$

$$y_2(Z) = \frac{1}{EJ}(30,713) \text{ (m)}$$

Kết quả:

$$y_D = \frac{1}{EJ}(30,713) \text{ (m)}$$

$$\varphi_D = \frac{1}{EJ}(80,58) \text{ (Rad)}$$

BÀI TẬP LỚN SỐ 3
TÍNH CỘT CHIU LỰC PHỨC TẠP

BẢNG SỐ LIỆU BÀI TẬP LỚN SỐ 3

STT	b(m)	A(m)	l(m)	P(KN)	γ (KN/m ³)	q(KN/m ²)
1	0,12	0,16	6	200	20	18
2	0,13	0,18	8	300	21	14
3	0,14	0,17	7	350	21	16
4	0,15	0,17	6	400	20	15
5	0,13	0,12	5	300	20	16
6	0,14	0,18	7	400	22	12
7	0,15	0,14	6	350	21	14
8	0,16	0,16	7	400	20	14
9	0,12	0,15	6	300	21	18
10	0,13	0,14	5	200	22	20
11	0,15	0,15	8	250	20	16

Ghi chú: Sinh viên chọn những số liệu trong bảng số liệu phù hợp với hình vẽ của mình.

YÊU CẦU VÀ THỨ TỰ THỰC HIỆN

Yêu cầu:

- Xác định nội lực tại mặt cắt đáy cột.
- Vẽ biểu đồ ứng suất pháp tại mặt cắt đáy cột
- Vẽ lõi của mặt cắt đáy cột.

Biết rằng mỗi sơ đồ cột có 3 lực dọc lệch tâm (P_i trên hình vẽ ký hiệu điểm đặt là \otimes), l là chiều cao cột, γ là trọng lượng riêng của cột, q (KN/m²) là lực phân bố đều vuông góc với mặt phẳng chứa cạnh EF.

Các bước giải:

1. Vẽ hình chiếu trục đo của cột:

☛ Từ sơ đồ hình chiếu bằng đã cho, vẽ hình chiếu trục đo của cột trên hệ trục toạ độ Đề Các.

☛ Chú ý ghi đầy đủ kích thước và tải trọng đã cho.

2. Xác định các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang:

☛ Xác định toạ độ trọng tâm của mặt cắt ngang $C(X_C, Y_C)$

☛ Xác định các mô men quán tính chính trung tâm: J_X, J_Y

☛ Xác định các bán kính quán tính chính trung tâm: i_X, i_Y .

3. Xác định nội lực và ứng suất tại mặt cắt đáy cột:

☛ Xác định tọa độ các điểm đặt lực dọc lệch tâm $P_i(X_K^i, Y_K^i)$.

☛ Tính các giá trị nội lực tại mặt cắt đáy cột, lần lượt do các tải trọng đã cho gây ra.

☛ Xác định đường trung hoà và ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất tại mặt cắt đáy cột, từ đó vẽ biểu đồ ứng suất pháp phẳng tại mặt cắt đáy cột.

☛ Xác định vị trí điểm đặt lực dọc lệch tâm $K (x_K, y_K)$ tương đương tại mặt cắt đáy cột

$$x_K = \frac{M_Y}{N_Z}; \quad y_K = \frac{M_X}{N_Z}$$

4. Xác định lõi của mặt cắt đáy cột

$$x = -\frac{i_y^2}{a}; \quad y = -\frac{i_x^2}{b}$$

5. Biểu diễn:

☛ Biểu diễn nội lực tại mặt cắt đáy cột bằng hình chiếu trực đo

☛ Biểu diễn vị trí hệ trục quán tính chính trung tâm

☛ Biểu diễn điểm đặt lực dọc lệch tâm tại mặt cắt đáy cột

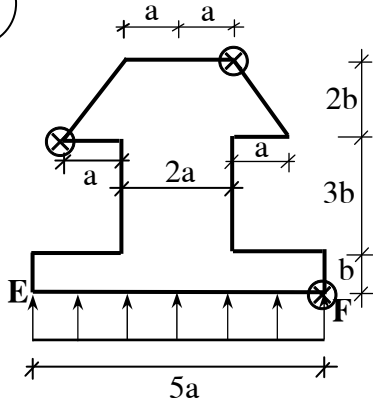
☛ Biểu diễn đường trung hoà tại mặt cắt đáy cột

☛ Vẽ biểu đồ ứng suất pháp phẳng tại mặt cắt đáy cột

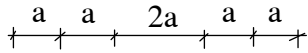
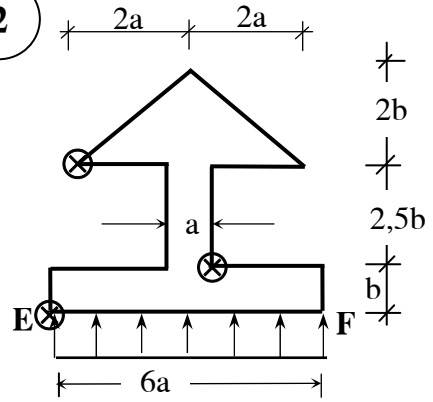
☛ Vẽ lõi của mặt cắt.

SƠ ĐỒ MẶT CẮT CỘT

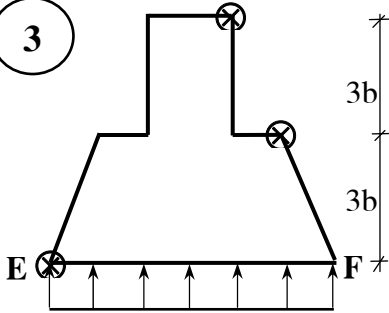
1



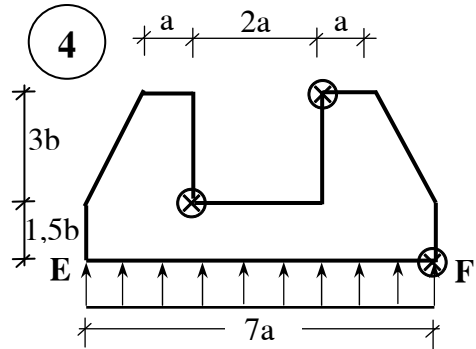
2



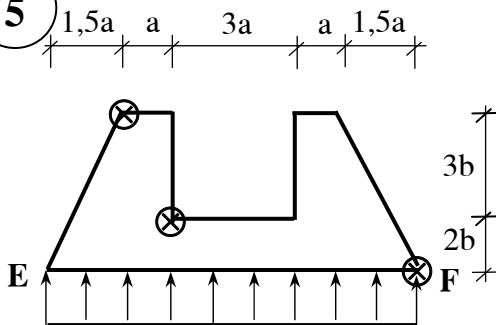
3



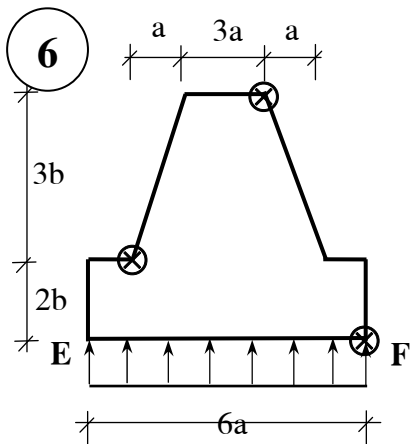
4

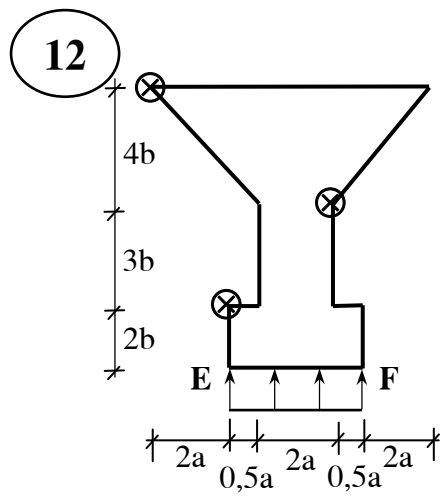
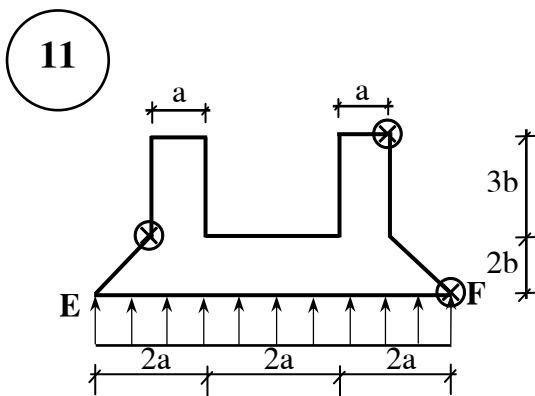
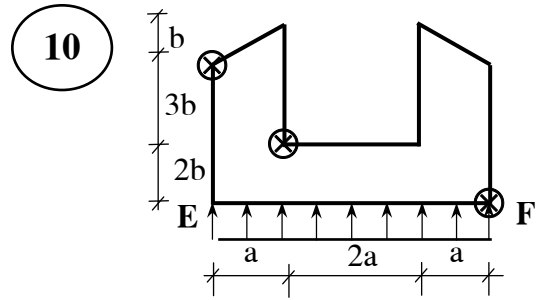
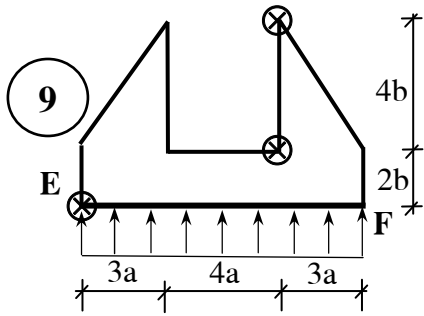
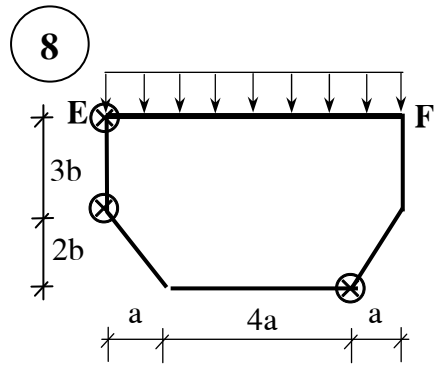
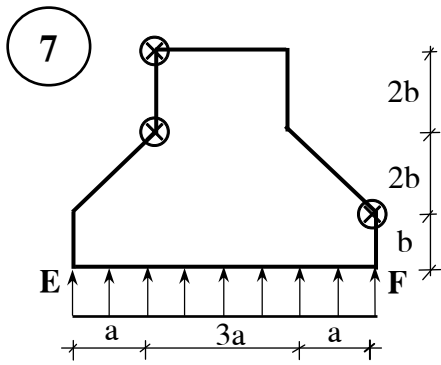


5



6





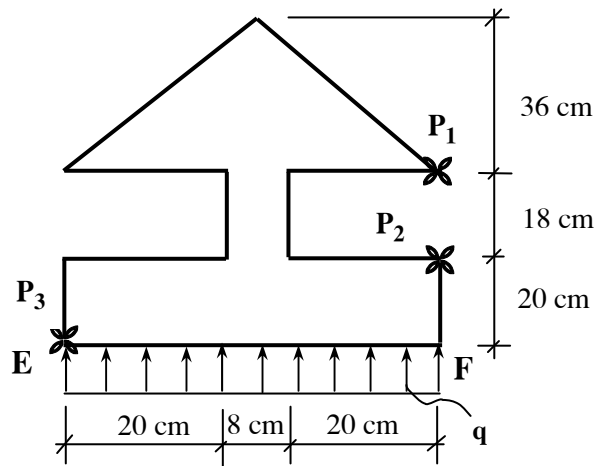
VÍ DỤ THAM KHẢO

Đề bài:

Cho mặt cắt cột chịu lực như hình vẽ, biết các lực lệch tâm $P_1=P_2=P_3=500\text{KN}$, áp lực phân bố đều trên mặt EF là $q = 15 \text{ KN/ m}^2$, trọng lượng riêng của cột là $\gamma = 20 \text{ KN/m}^3$ và cột cao $L = 4\text{m}$ (xem hình 3.1).

Yêu cầu:

- Vẽ biểu đồ ứng suất pháp tại mặt cắt đáy cột
- Vẽ lõi của mặt cắt đáy của cột



Hình 3.1

Bài làm

1. Vẽ hình chiếu trục đo của cột:

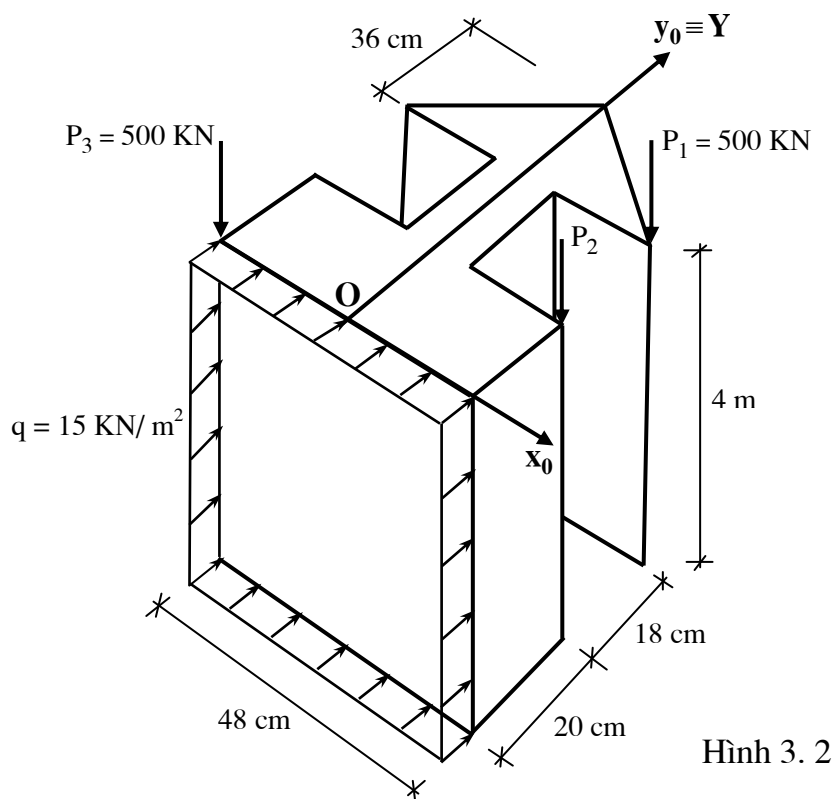
Từ mặt cắt cột đã cho trên hình 3.1, ta vẽ được hình chiếu trục đo của cột trong hệ trục tọa độ Đề Các như trên hình 3.2.

2. Xác định các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang cột:

↪ *Xác định tọa độ trọng tâm của mặt cắt đáy cột:* Chọn hệ trục tọa độ ban đầu là x_0y_0 như hình 3.2.

$$Y_C = \frac{\sum S_{x_0}}{\sum F} = \frac{48 \cdot 20 \cdot 10 + 8 \cdot 18 \cdot (20 + 9) + \frac{36 \cdot 48}{2} \cdot (20 + 18 + 12)}{48 \cdot 20 + 18 \cdot 8 + \frac{36 \cdot 48}{2}}$$

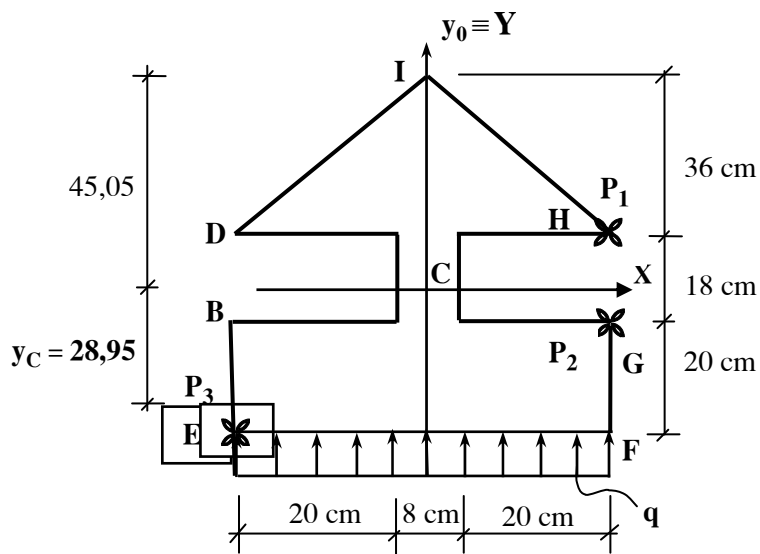
$$\rightarrow Y_C = \frac{9600 + 4176 + 43200}{960 + 144 + 864} = \frac{56976}{1968} \rightarrow Y_C = \underline{28,95 \text{ cm}}$$



Hình 3.2

☞ *Xác định các mô men quán tính chính trung tâm:*

Hệ trục XY trên hình 3.3 là hệ trục quán tính chính trung tâm. Chia mặt cắt ngang cột thành 3 hình thành phần: 2 hình chữ nhật và 1 hình tam giác.



Hình 3.3

$$J_X = \frac{48 \cdot 20^3}{12} + (28,95 - 10)^2 \cdot 48 \cdot 20 + \frac{8 \cdot 18^3}{12} + (28,95 - 29)^2 \cdot 18 \cdot 8 + \left[\frac{48 \cdot 36^3}{36} + (20 + 18 + 12 - 28,95)^2 \cdot \frac{48 \cdot 36}{2} \right]$$

$$\rightarrow J_X = 32\,000 + 344\,774,785 + 3\,888 + 0,346 + (62\,208 + 382\,804,186)$$

$$\rightarrow J_X = 825\,675,3 \text{ cm}^4$$

$$J_Y = \frac{20 \cdot 48^3}{12} + \frac{18 \cdot 8^3}{12} + 2 \cdot \left[\frac{36 \cdot 24^3}{12} \right] = 184\,320 + 768 + 2 \cdot 414\,720$$

$$\rightarrow J_Y = 268\,032 \text{ cm}^4$$

$$F = 1968 \text{ cm}^2$$

☞ *Xác định các bán kính quán tính chính trung tâm:*

$$i_X = \sqrt{\frac{J_X}{F}} = \sqrt{\frac{825675,3}{1968}} \rightarrow i_X = 20,5 \text{ cm};$$

$$i_Y = \sqrt{\frac{J_Y}{F}} = \sqrt{\frac{268032}{1968}} \rightarrow i_Y = 11,7 \text{ cm}$$

3. Xác định nội lực và ứng suất tại mặt cắt đáy cột:

☞ *Xác định tọa độ các điểm đặt lực dọc lệch tâm P_i :*

Từ hình 3 ta có:

$$P_1(24; 9,05); \quad P_2(24; -8,95); \quad P_3(-24; -28,95)$$

☞ *Xác định nội lực:*

$$M_X = \sum P_i \cdot y_K^i + qF \frac{L}{2} = (-500) \cdot 9,05 + (-500) \cdot (-8,95) + (-500) \cdot (-28,95) - 15 \cdot 48 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 200$$

$$M_X = -4\,525 + 4\,475 + 14\,475 - 288 \cdot 200 \rightarrow M_X = -43\,175 \text{ KN.cm}$$

$$M_Y = \sum P_i \cdot x_K^i = (-500) \cdot 24 + (-500) \cdot 24 + (-500) \cdot (-24) \rightarrow M_Y = -12\,000 \text{ KN.cm}$$

$$N_Z = -(\sum P_i + \gamma \cdot L \cdot \Sigma F) = 3 \cdot (-500) - 20 \cdot 4 \cdot 1968 \cdot 10^{-4} \rightarrow N_Z = -1\,515,74 \text{ KN}$$

☞ *Xác định ứng suất tại mặt cắt đáy cột:*

Tính ứng suất tại các điểm góc trên mặt cắt ngang theo công thức:

$$\sigma_z = \pm \frac{|N_z|}{F} \pm \frac{|M_x|}{J_x} \cdot |y| \pm \frac{|M_y|}{J_y} \cdot |x|$$

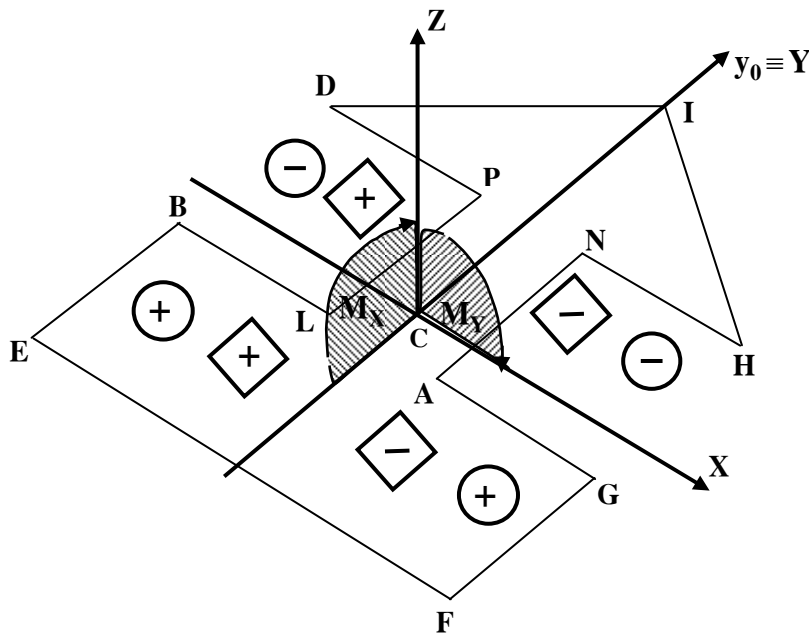
Bảng kết quả tính toán:

Điểm	xi (cm)	yi (cm)	$-\frac{ 1515,74 }{1968}$	$\pm \frac{ 43175 }{825675,3} y $	$\pm \frac{ 12000 }{268032} x $	σ_z (KN/cm ²)
E	-24	-28,951	-0,7702	1,51385	1,07450	1,81815
B	-24	-8,9510	-0,7702	0,46810	1,07450	0,77240
L	-4	-8,9510	-0,7702	0,46810	0,17910	-0,1230
A	4	-8,9510	-0,7702	0,46810	-0,1791	-0,4812
D	-24	9,0490	-0,7702	-0,4732	1,07450	-0,1689
I	0	45,049	-0,7702	-2,3556	0	-3,1258
H	24	9,0490	-0,7702	-0,4732	-1,07450	-2,3179
N	4	9,0490	-0,7702	-0,4732	-0,17910	-1,4225
P	-4	9,0490	-0,7702	-0,4732	0,17910	-1,0643
G	24	-8,9510	-0,7702	0,46810	-1,07450	-1,3766
F	24	-28,951	-0,7702	1,51385	-1,07450	-0,33085

Tại E: $\sigma_{\max} = 1,81815 \text{ KN / cm}^2$;

Tại I: $\sigma_{\min} = - 3,1258 \text{ KN / cm}^2$

Phân vùng ứng suất tại mặt cắt đáy cột do M_x và M_y gây ra:

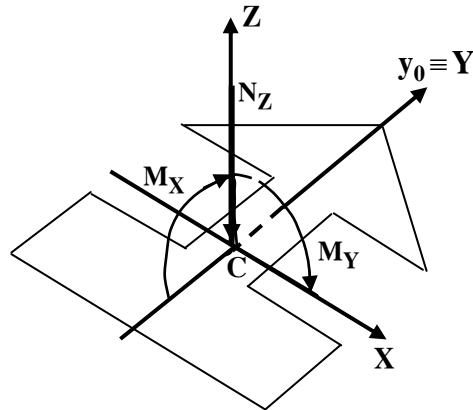


Hình 3.4

Từ hình vẽ và bảng kết quả tính toán, ta thấy ngay 2 điểm nguy hiểm là E & I

⇒ Xác định biểu đồ ứng suất pháp tại mặt cắt đáy cột:

a) Biểu diễn nội lực tại mặt cắt đáy cột:



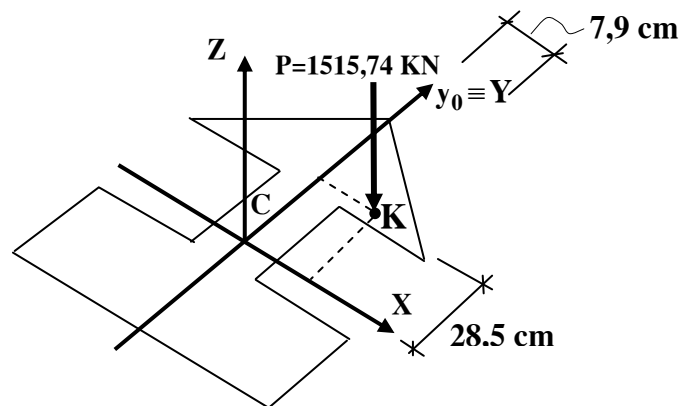
Hình 3.5

b) Xác định điểm đặt lực dọc lệch tâm $K(x_K, y_K)$

$$x_K = \frac{M_Y}{N_Z} = \frac{-12000}{-1515,74} = 7,9 \text{ cm}$$

$$y_K = \frac{M_X}{N_Z} = \frac{-43175}{-1515,74} = 28,5 \text{ cm}$$

Điểm đặt lực dọc lệch tâm biểu diễn trên hình 3.6: $K(7,9; 28,5)$



Hình 3.6

c) Xác định đường trung hoà:

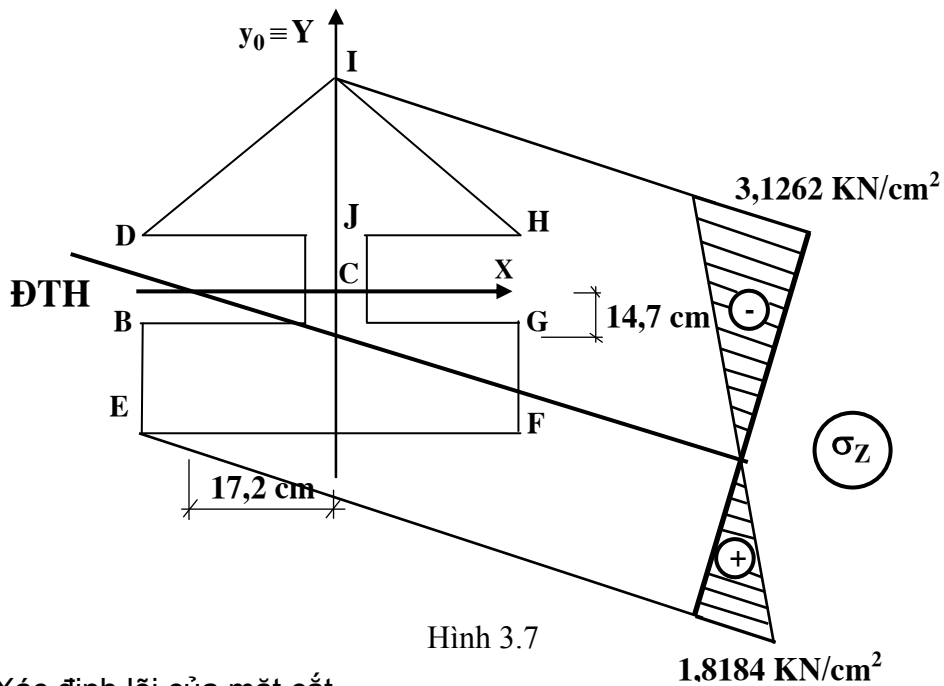
Phương trình ĐTH: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$$a = \frac{-i_Y^2}{X_K} = \frac{-11,7^2}{7,9} = -17,2021 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad a = -17,2 \text{ cm}$$

$$b = \frac{-i_X^2}{Y_K} = \frac{-20,5^2}{28,5} = -14,75 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad b = -14,7 \text{ cm}$$

Toạ độ ĐTH là: (-17,2; -14,7)cm

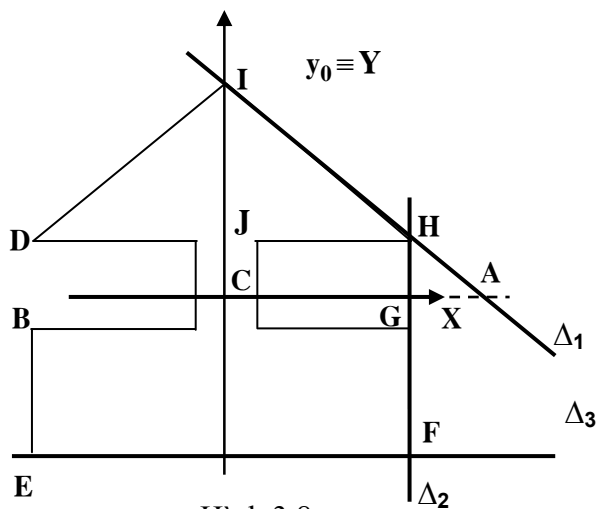
Biểu diễn biểu đồ ứng suất pháp phẳng trên hình 3.7



Hình 3.7

4 -Xác định lõi của mặt cắt

Chọn 3 đường trung hoà giả thiết: Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 như hình 3.8 dưới đây,



Hình 3.8

+ Đường Δ_1 :

Cắt trục Y tại điểm I(0; 45,05) nên có: $b_1 = 45,05$ cm

Cắt trục X tại điểm A(x_A ; 0) nên sẽ có: $a_1 = x_A$.

Tính x_A theo tính chất đồng dạng của 2 tam giác là: ACI và HJI

$$\frac{JH}{CA} = \frac{IJ}{IC} \rightarrow \frac{24}{x_A} = \frac{36}{45,049} \quad \rightarrow \quad x_A = \frac{24.45,049}{36} = 30,033 \text{ cm}$$

Vậy có: $a_1 = 30,03$ cm;

$$b_1 = 45,05 \text{ cm}$$

+ Đường Δ_2 : song song với trục Y nên có:

$$a_2 = 24 \text{ cm};$$

$$b_2 = \infty$$

+ Đường Δ_3 : song song với trục X nên có:

$$a_3 = \infty;$$

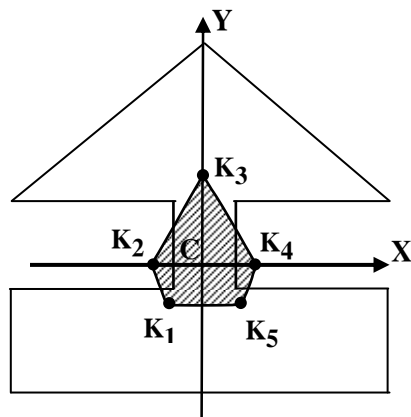
$$b_3 = -28,95 \text{ cm}$$

Dùng công thức: $X_K = -\frac{i_Y^2}{a}$, $Y_K = -\frac{i_X^2}{b}$; với: $i_X = 20,483$ cm, $i_Y = 11,67$ cm

để xác định các điểm trên lõi là 3 điểm đặt lực dọc lệch tâm tương ứng: K_1 , K_2 , K_3 . Từ hình vẽ trên, ta lập được bảng sau:

ĐTH giả thiết	a_i (cm)	b_i (cm)	Điểm	X_{K_i} (cm)	Y_{K_i} (cm)
Δ_1	30,03	45,05	K_1	- 4,54	- 9,31
Δ_2	24	∞	K_2	- 5,67	0
Δ_3	∞	- 28,95	K_3	0	14,49

Vì mặt cắt đối xứng qua trục Y, nên ta lấy thêm 2 điểm đối xứng với 2 điểm đặt lực dọc lệch tâm do đường Δ_1 và đường Δ_2 ở trên, được thêm 2 điểm K_4 và K_5 . Nối 5 điểm đó lại, ta được lõi của mặt cắt có dạng như hình vẽ 9 dưới đây..



Hình 3.9

Từ *hình 3.6* ta thấy: điểm đặt lực dọc lệch tâm K nằm ngoài lõi nên biểu đồ ứng suất pháp trên *hình 3.7* có hai dấu. Muốn biểu đồ ứng suất pháp chỉ có dấu (-) thì lực dọc lệch tâm tại mặt cắt đáy cột phải đặt vào lõi.

BÀI TẬP LỚN SỐ 4
TÍNH DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

BẢNG SỐ LIỆU BÀI TẬP LỚN SỐ 3

STT	a(m)	b(m)	c(m)	$J(m^4)$	M(KNm)	P(KN)	q(KN/m)	K(KN/m ²)
1	3	4	3	0,03516	70	150	58	60000
2	4	2	4	0,01800	40	120	36	40000
3	2	5	3	0,04267	80	170	60	40000
4	5	2	3	0,02289	60	120	44	60000
5	2	4	4	0,01800	50	80	40	50000
6	3	3	4	0,02858	30	90	48	50000
7	4	4	2	0,04267	90	160	62	60000
8	3	5	2	0,05118	90	170	70	50000
9	3	1	6	0,03652	70	140	56	40000
10	3	6	1	0,02843	50	100	45	60000
11	6	1	3	0,04016	80	160	54	40000

Ghi chú: Sinh viên chọn những số liệu trong bảng số liệu phù hợp với hình vẽ của mình.

YÊU CẦU VÀ THỨ TỰ THỰC HIỆN

Yêu cầu:

Vẽ biểu đồ nội lực (biểu đồ M và biểu đồ Q) của dầm đặt trên nền Winkler. Sơ đồ tính cho trên hình vẽ, môđun đàn hồi của dầm là $E = 10^7$ KN/m². Yêu cầu lập bảng kết quả tính toán nội lực cho các mặt cắt liên tiếp cách nhau 1 m.

Các bước giải:

1. *Tính sẵn các trị số cần sử dụng:*

Độ cứng: EJ, hệ số của dầm trên nền đàn hồi: m, m², m³, m⁴

2. *Lập bảng thông số ban đầu:*

Lập bảng với 6 thông số cho các đoạn dầm.

3. *Viết phương trình mô men uốn và lực cắt của dầm:*

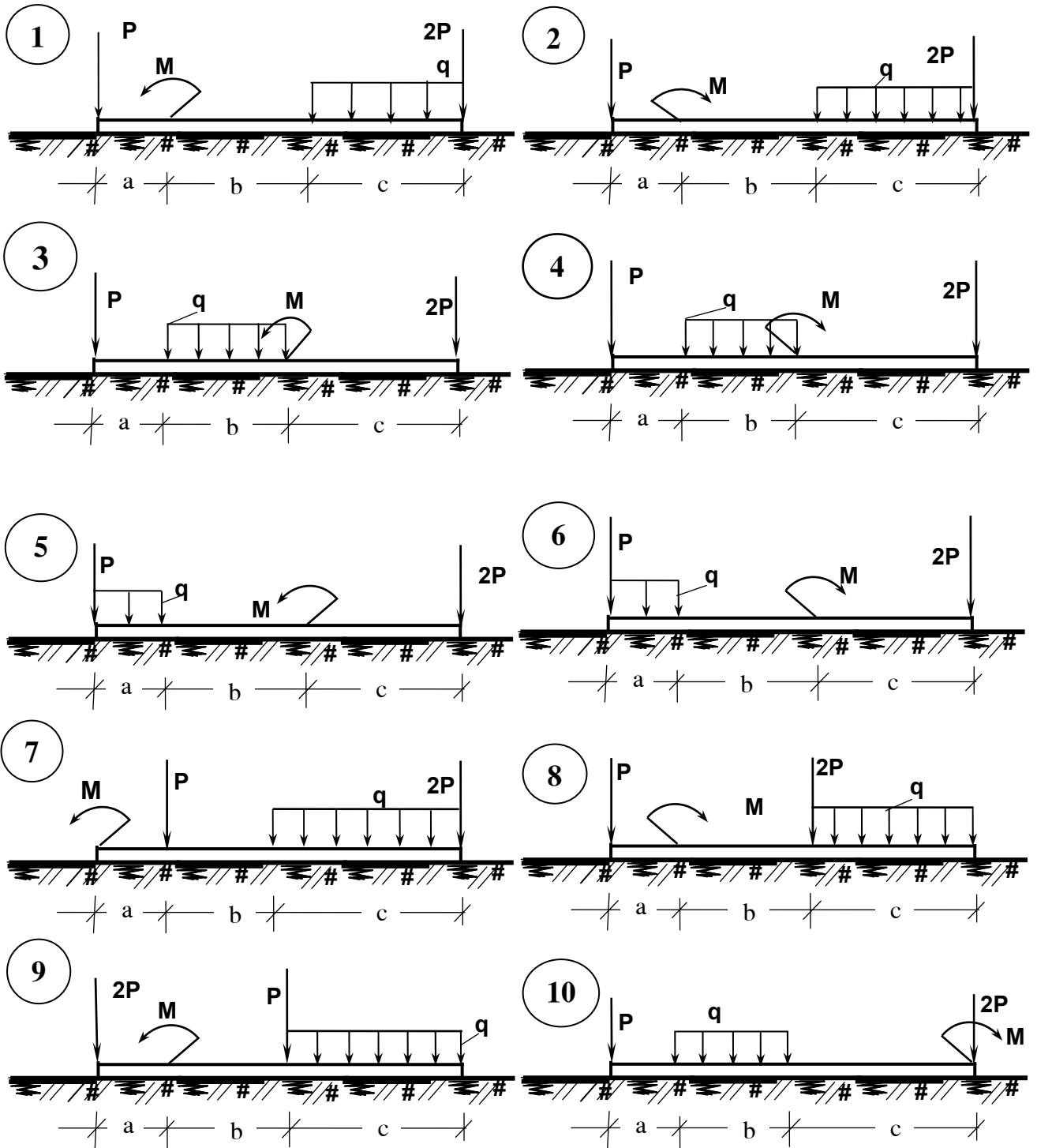
- ☛ Viết phương trình nội lực của dầm.
- ☛ Lập bảng các hệ số Crulốp tại các mặt cắt cần tính toán.
- ☛ Lập phương trình nội lực của toàn dầm dưới dạng số.

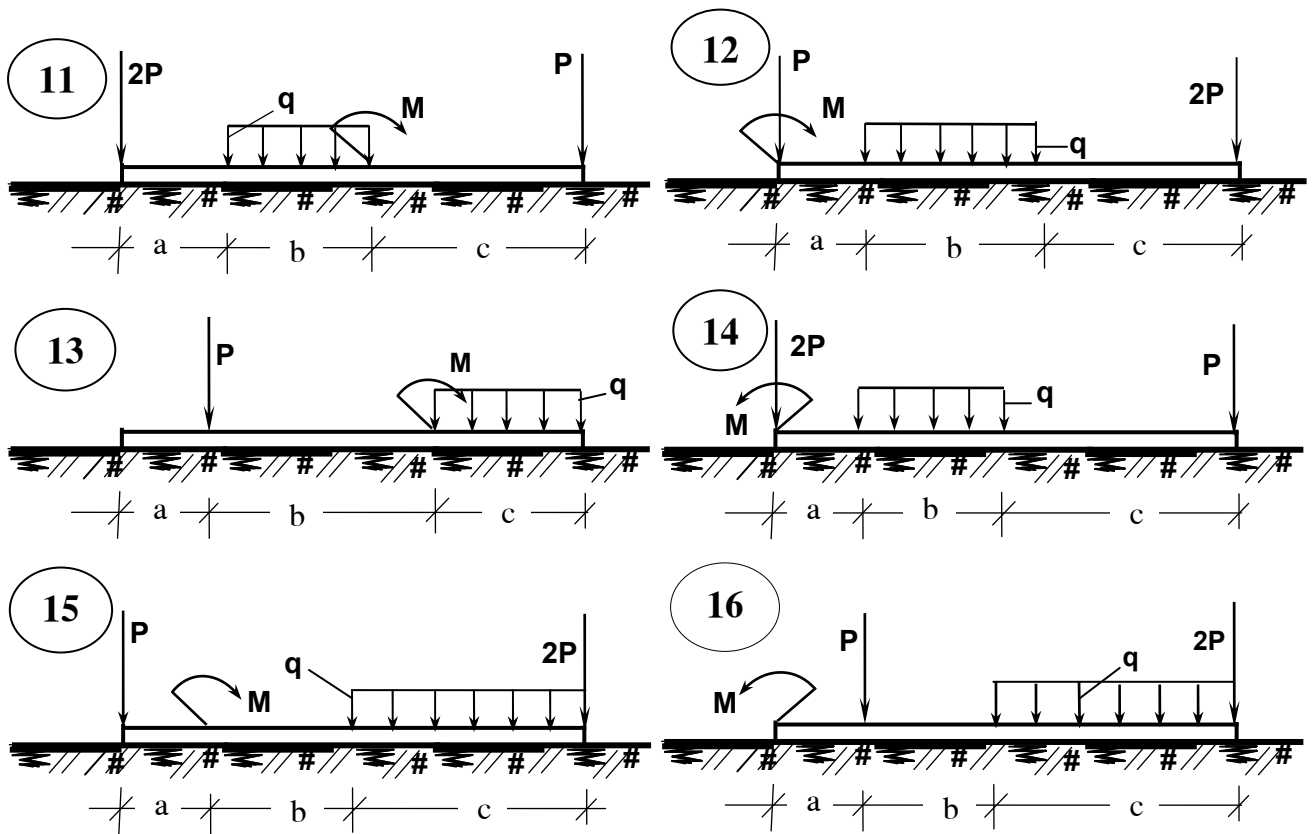
- Lập điều kiện biên và giải hệ phương trình để tìm ra các ẩn số y_0 và θ_0 .
- Lập bảng kết quả tính toán nội lực (mô men và lực cắt) tại các mặt cắt cần tính toán.

4. Vẽ biểu đồ nội lực:

Dựa vào bảng kết quả tính toán ở trên, vẽ các biểu đồ nội lực.

SƠ ĐỒ TÍNH DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI





VÍ DỤ THAM KHẢO

Đề bài:

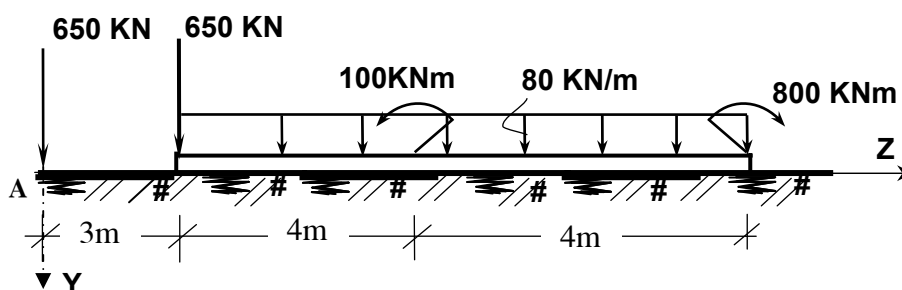
Tính giá trị nội lực trên các mặt cắt (cách nhau 1 m) và vẽ biểu đồ nội lực cho dầm đặt trên nền Winkler như sơ đồ cho trên *hình 4.1*, cho biết:

$$q = 80 \text{ KN/m } b = 1 \text{ m}$$

$$M = 800 \text{ KNm } J = 0,0426 \text{ m}^4$$

$$P = 650 \text{ KN } E = 10^7 \text{ KN/m}^2$$

$$\text{Hệ số nền } K_0 = 6 \cdot 10^4 \text{ KN/m}^3$$



Hình 4.1

Bài làm

1. Tính sẵn các trị số cần sử dụng:

$$EJ = 0,0426 \cdot 10^7 = 426 \cdot 10^3 \text{ KNm}^2$$

Tính các hệ số của dầm trên nền đàn hồi

$$m^4 = \frac{K_0 b}{4 \cdot EJ} = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 1}{4 \cdot 426 \cdot 10^3} = 0,0352$$

$$m = \sqrt[4]{0,0352} = 0,433182$$

$$m^2 = 0,18764$$

$$m^3 = 0,081285$$

Bảng thông số ban đầu:

Các thông số	Đoạn 1 Tại A (Z = 0)	Đoạn 2 Tại B (Z = 3m)	Đoạn 3 Tại C (Z = 7 m)
Δy	$\neq 0$	0	0
$\Delta \varphi$	$\neq 0$	0	0
ΔM	0	0	- 100
ΔP	- 650	- 650	0
Δq	0	-80	0
$\Delta q'$	0	0	0

2. Viết phương trình nội lực cho từng đoạn:

a. Viết phương trình mô men uốn và lực cắt của dầm dài hữu hạn dưới dạng chữ:

$$M_1 = \frac{P}{m} \cdot B_{mZ} + \frac{K \cdot y_0}{m^2} \cdot C_{mZ} + \frac{K \cdot \varphi_0}{m^3} \cdot D_{mZ}$$

$$M_2 = M_1 + \frac{P}{m} \cdot B_{m(Z-3)} + \frac{q}{m^2} \cdot C_{m(Z-3)}$$

$$M_3 = M_2 + M \cdot A_{m(Z-7)}$$

$$Q_1 = P \cdot A_{mZ} + \frac{K \cdot y_0}{m} \cdot B_{mZ} + \frac{K \cdot \varphi_0}{m^2} \cdot C_{mZ}$$

$$Q_2 = Q_1 + P \cdot A_{m(Z-3)} + \frac{q}{m} \cdot B_{m(Z-3)}$$

$$Q_3 = Q_2 - 4m \cdot M \cdot D_{m(Z-7)}$$

b. Tính sẵn các hệ số của các số hạng trong các phương trình trên:

$$-\frac{P}{m} = -\frac{650}{0,43318} = -1500,531 \quad \frac{K_0}{m} = \frac{6 \cdot 10^4}{0,43318} = 13,851 \cdot 10^4$$

$$-\frac{q}{m} = -\frac{80}{0,43318} = -184,6807 \quad \frac{K_0}{m^2} = \frac{6 \cdot 10^4}{0,43318^2} = 31,9753 \cdot 10^4$$

$$-\frac{q}{m^2} = -\frac{80}{0,43318^2} = -426,3372 \quad \frac{K_0}{m^3} = \frac{6 \cdot 10^4}{0,43318^3} = 73,8152 \cdot 10^4$$

$$4 \cdot m \cdot M = 4 \cdot 0,43318 \cdot (-100) = -173,272$$

c. Thay các giá trị tính sẵn vào phương trình nội lực của dầm:

$$(a) \begin{cases} M_1 = -1500,531 \cdot B_{mz} + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot y_0 \cdot C_{mz} + 73,8152 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 \cdot D_{mz} \\ M_2 = -1500,531 \cdot B_{mz} + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot y_0 \cdot C_{mz} + 73,8152 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 \cdot D_{mz} - \\ \quad - 1500,531 \cdot B_{m.(Z-3)} - 426,3372 \cdot C_{m.(Z-3)} \\ M_3 = -1500,531 \cdot B_{mz} + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot y_0 \cdot C_{mz} + 73,8152 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 \cdot D_{mz} - \\ \quad - 1500,531 \cdot B_{m.(Z-3)} - 426,3372 \cdot C_{m.(Z-3)} - 100 \cdot A_{m.(Z-7)} \end{cases}$$

$$(a) \begin{cases} Q_1 = -650 \cdot A_{mz} + 13,851 \cdot 10^4 \cdot y_0 \cdot B_{mz} + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 \cdot C_{mz} \\ Q_2 = -650 \cdot A_{mz} + 13,851 \cdot 10^4 \cdot y_0 \cdot B_{mz} + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 \cdot C_{mz} - 650 \cdot A_{m.(Z-3)} \\ \quad - 184,6807 \cdot B_{m.(Z-3)} \\ Q_3 = -650 \cdot A_{mz} + 13,851 \cdot 10^4 \cdot y_0 \cdot B_{mz} + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 \cdot C_{mz} - 650 \cdot A_{m.(Z-3)} \\ \quad - 184,6807 \cdot B_{m.(Z-3)} - (-173,272) \cdot D_{m.(Z-7)} \end{cases}$$

3. Viết điều kiện biên:

Tại D (Z = 11m) ta có:

$$M_3 = -800 \text{ KNm} \quad \text{và} \quad Q_3 = 0$$

4. Tính sẵn các hàm Crawlóp:

(Lập bảng tính sẵn các hàm Crawlóp cho các mặt cắt cần tính toán, cách nhau 1 m, với hệ số $m = 0,43318$)

Z	mZ	A_{mZ}	B_{mZ}	C_{mZ}	D_{mZ}
0	0	1	0	0	0
1	0,43318	0,9941	0,43267	0,0937	0,0135
2	0,86636	0,9062	0,8501	0,3729	0,1080
3	1,29954	0,5278	1,1764	0,8177	0,3608
4	1,73272	-0,4702	1,2182	1,3518	0,8299
5	2,16590	-2,4770	0,6230	1,7820	1,5179
6	2,59909	-5,7919	-1,1183	1,7265	2,3049
7	3,03227	-10,3342	-4,5760	0,5644	2,8551
8	3,46545	-15,1787	-10,1222	-2,5426	2,5134
9	3,89863	-17,9374	-17,4354	-8,4670	0,2436
10	4,33182	-14,1328	-24,7268	-17,6567	-5,2994
11	4,76501	3,0853	-27,7519	-29,2901	-15,4184

Thay điều kiện biên tại D vào phương trình nội lực (a) ở đoạn 3, ta có:

$$(b) \begin{cases} M_3 = -1500,531 \cdot B_{m.11} + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot y_0 \cdot C_{m.11} + 73,8152 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 \cdot D_{m.11} \\ \quad - 1500,531 \cdot B_{m.(11-3)} - 426,3372 \cdot C_{m(11-3)} - 100 \cdot A_{m(11-7)} = -800 \\ Q_3 = -650 \cdot A_{m.11} + 13,851 \cdot 10^4 \cdot y_0 \cdot B_{m.11} + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 \cdot C_{m.11} \\ \quad - 650 \cdot A_{m.(11-3)} - 184,6807 \cdot B_{m.(11-3)} + 173,272 \cdot D_{m(11-7)} = 0 \end{cases}$$

Thay giá trị của các hàm số Crulốp lấy từ bảng trên vào phương trình (b), ta có:

$$(c) \begin{cases} M_3 = -1500,531 \cdot (-27,7519) + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot y_0 \cdot (-29,2901) + \\ \quad + 73,8152 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 \cdot (-15,4184) - 1500,531 \cdot (-10,1222) + \\ \quad - 426,3372 \cdot (-2,5426) - 100 \cdot (-0,4702) = -800 \\ Q_3 = -650 \cdot (3,0853) + 13,851 \cdot y_0 \cdot 10^4 \cdot (-27,7519) + \\ \quad + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 \cdot (-29,2901) - 650 \cdot (-15,1787) \\ \quad - 184,6807 \cdot (-10,1222) + 173,272 \cdot 0,8229 = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 936,5597 \cdot 10^4 \cdot y_0 + 1138,1123 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 = 58762,286 \\ 384,392 \cdot 10^4 \cdot y_0 + 936,5597 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 = 9872,6705 \end{cases}$$

5. Giải hệ phương trình:

Từ phương trình thứ nhất của hệ phương trình (d) ở trên, ta có:

$$y_0 = \frac{58762,286 - 1138,1123 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0}{936,5597 \cdot 10^4}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ (d), ta có:

$$384,392 \cdot 10^4 \cdot \frac{58762,286 - 1138,1123 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0}{936,5597 \cdot 10^4} + 936,5597 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 = 9872,6705$$

$$24117,7926 - 467,1152 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 + 936,5597 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 = 9872,6705$$

$$\rightarrow 469,4445 \cdot 10^4 \cdot \varphi_0 = -14245,1221$$

$$\varphi_0 = -30,3446 \cdot 10^{-4} \text{Rad}$$

$$y_0 = \frac{58762,286 - 1138,1123 \cdot 10^4 \cdot (-30,3446 \cdot 10^{-4})}{936,5597 \cdot 10^4} = \frac{58762,286 + 34535,5625}{936,5597 \cdot 10^4}$$

$$\rightarrow y_0 = \frac{93297.8485}{936,5597.10^4} \rightarrow y_0 = 99.618 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Thay giá trị y_0 và φ_0 vào, ta có phương trình nội lực trong 3 đoạn của dầm đã cho như sau:

$$\begin{cases} M_1 = - 1500,531 \cdot B_{mZ} + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot 99,618 \cdot 10^{-4} C_{mZ} + \\ \quad + 73,8152 \cdot 10^4 \cdot (-30,3446 \cdot 10^{-4}) \cdot D_{mZ} \\ Q_1 = - 650 \cdot A_{mZ} + 13,851 \cdot 10^4 \cdot 99,618 \cdot 10^{-4} \cdot B_{mZ} + \\ \quad + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot (-30,3446 \cdot 10^{-4}) \cdot C_{mZ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 = - 1500,531 \cdot B_{mZ} + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot 99,618 \cdot 10^{-4} C_{mZ} + \\ \quad + 73,8152 \cdot 10^4 \cdot (-30,3446 \cdot 10^{-4}) \cdot D_{mZ} - 1500,531 \cdot B_{m(Z-3)} - 426,3372 \cdot C_{m(Z-3)} \\ Q_2 = - 650 \cdot A_{mZ} + 13,851 \cdot 10^4 \cdot 99,618 \cdot 10^{-4} \cdot B_{mZ} + \\ \quad 31,9753 \cdot 10^4 \cdot (-30,3446 \cdot 10^{-4}) \cdot C_{mZ} - 650 \cdot A_{m(Z-3)} - 184,6807 \cdot B_{m(Z-3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_3 = - 1500,531 \cdot B_{mZ} + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot 99,618 \cdot 10^{-4} C_{mZ} + \\ \quad + 73,8152 \cdot 10^4 \cdot (-30,3446 \cdot 10^{-4}) \cdot D_{mZ} + 1500,531 \cdot B_{m(Z-3)} \\ \quad - 426,3372 \cdot C_{m(Z-3)} - 100 \cdot A_{m(Z-7)} \\ Q_3 = - 650 \cdot A_{mZ} + 13,851 \cdot 10^4 \cdot 99,618 \cdot 10^{-4} \cdot B_{mZ} + \\ \quad + 31,9753 \cdot 10^4 \cdot (- 30,3446 \cdot 10^{-4}) C_{mZ} - \\ \quad - 650 \cdot A_{m(Z-3)} - 184,6807 \cdot B_{m(Z-3)} + 173,272 \cdot D_{m(Z-7)} \end{cases}$$

Ta có phương trình nội lực của toàn dầm như sau:

$$\begin{aligned} M_1 &= - 1500,531 \cdot B_{mZ} + 3185.315 C_{mZ} - 2239.893 \cdot D_{mZ} \\ Q_1 &= - 650 \cdot A_{mZ} + 1379,804 \cdot B_{mZ} - 970.278 \cdot C_{mZ} \\ \\ M_2 &= - 1500,531 \cdot B_{mZ} + 3185.315 C_{mZ} - 2239.893 \cdot D_{mZ} \\ &\quad - 1500,531 \cdot B_{m(Z-3)} - 426,3372 \cdot C_{m(Z-3)} \\ Q_2 &= - 650 \cdot A_{mZ} + 1379,804 \cdot B_{mZ} - 970.278 \cdot C_{mZ} \\ &\quad - 650 \cdot A_{m(Z-3)} - 184,6807 B_{m(Z-3)} \\ \\ M_3 &= - 1500,531 \cdot B_{mZ} + 3185.315 C_{mZ} - 2239.893 \cdot D_{mZ} \\ &\quad - 1500,531 \cdot B_{m(Z-3)} - 426,3372 \cdot C_{m(Z-3)} - 100 \cdot A_{m(Z-7)} \\ Q_3 &= - 650 \cdot A_{mZ} + 1379,804 \cdot B_{mZ} - 970.278 \cdot C_{mZ} \\ &\quad - 650 \cdot A_{m(Z-3)} - 184,6807 B_{m(Z-3)} + 173,272 \cdot D_{m(Z-7)} \end{aligned}$$

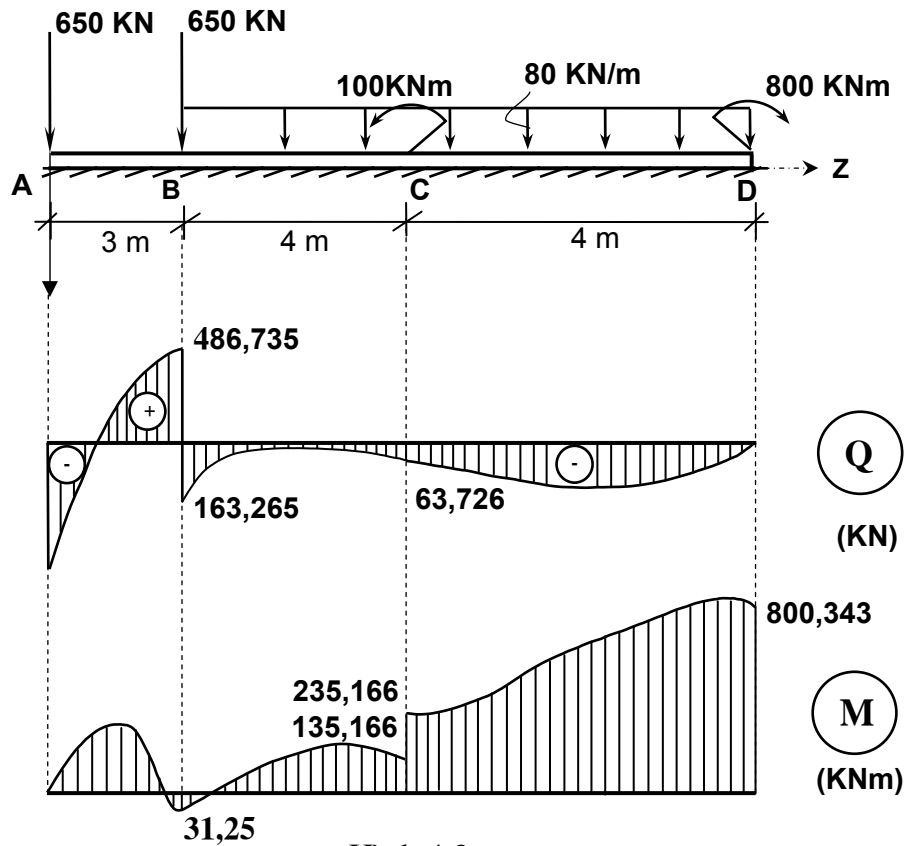
BẢNG KẾT QUẢ TÍNH LỰC CẮT TẠI CÁC MẶT CẮT YÊU CẦU

Đoạn	Z	mZ	- 650.A _{mZ}	1379,804.B _{mZ}	- 970,278.C _{mZ}	m(Z-3)	- 650A _{m(Z-3)}	-184,6807B _{m(Z-3)}	m.(Z-7)	173,272D _{m(Z-7)}	Q (KN)
I	0	0	- 650	0	0	-	-	-	-	-	- 650
	1	0,43318	- 646,165	597,000	- 90,915	-	-	-	-	-	-140.08
	2	0,86636	- 589,030	1172,971	- 361,817	-	-	-	-	-	222.124
	3	1,29954	- 343,070	1623,201	- 793,396	-	-	-	-	-	486.735
II	3	1,29954	- 343,070	1623,201	- 793,396	0	- 650	0	-	-	-163.265
	4	1,73272	305,630	1680,877	- 1311,622	0,43318	- 646,165	- 79,906	-	-	-51.186
	5	2,1659	1610,05	859,618	- 1729,035	0,86436	- 589,03	- 156,997	-	-	-5.394
	6	2.59909	3764,735	- 1543,035	- 1675,185	1,29954	- 343,07	- 217,258	-	-	-13.813
	7	3,03227	6717,230	- 6313,983	- 547,625	1,73272	305,63	- 224,978	-	-	-63.726
III	7	3,03227	6717,230	- 6313,983	- 547,625	1,73272	305,63	- 224,978	0	0	-63.726
	8	3,46545	9866,155	- 13966,652	2467,029	2,1659	1610,05	- 115,056	0,43318	2,339	-136.135
	9	3,89863	11659,31	- 24057,435	8215,344	2,59909	3764,735	206,528	0,86636	18,713	-192.805
	10	4,33182	9186,320	- 34118,138	17131,908	3,03227	6717,23	845,099	1,29954	62.517	-175.064
	11	4,76501	- 2005,444	- 38292,183	28419,540	3,46545	9866,155	1869,375	1,73272	142.586	0.029

BẢNG KẾT QUẢ TÍNH MÔ MEN TRÊN CÁC MẶT CẮT YÊU CẦU

Đoạn	Z	m Z	-1500,531B _{mZ}	3185,315C _{mZ}	- 2239,893D _{mZ}	m.(Z-3)	- 1500,531B _{m(Z-3)}	- 426,3372C _{m(Z-3)}	m.(Z-7)	- 100A _{m(Z-7)}	M(KNm)
I	0	0	0	0	0	-	-	-	-	-	0
	1	0,43318	- 649,235	298.464	- 30.239	-	-	-	-	-	- 381.01
	2	0,86636	- 1275,601	1187.804	- 241.908	-	-	-	-	-	- 329.705
	3	1,29954	- 1765,225	2604.632	- 808.153	-	-	-	-	-	31.254
II	3	1,29954	- 1765,225	2604.632	- 808.153	0	0	0	-	-	31,254
	4	1,73272	- 1827,947	4305.909	- 1858,950	0,43318	- 649,235	- 39,948	-	-	- 70.171
	5	2,16659	- 934,831	5676.231	- 3399.934	0,86636	- 1275,601	- 158,981	-	-	- 93.116
	6	2,59909	1678,044	5499.446	- 5162.729	1,29954	- 1765,225	- 348,616	-	-	- 99.08
	7	3,03227	6866,430	1797.792	- 6395.118	1,73272	- 1827,947	- 576.323	-	-	- 135.166
III	7	3,03227	6866,430	1797.792	- 6395.118	1,73272	- 1827,947	- 576.323	0	-100	- 235.166
	8	3,46545	15188,675	-8098.982	- 5629.747	2,16659	- 934,831	- 759.733	0,43218	- 99,41	- 334.028
	9	3,89863	26162,358	- 26970.062	- 545.638	2,59909	1678,044	- 736.071	0,86636	- 90,62	- 501.989
	10	4,33182	37103,33	- 56242.151	11870.089	3,03227	6866,430	- 240.625	1,29954	- 52,78	- 695.707
	11	4,76501	41642,586	- 93298.195	34535.566	3,46545	15188,675	1084.005	1,73272	47,02	- 800.343

Biểu đồ nội lực:



Hình 4.2

Biểu đồ nội lực (để tham khảo):
KẾT QUẢ TÍNH TOÁN BANG MÁY TÍNH:

M NMC Y0 Teta0

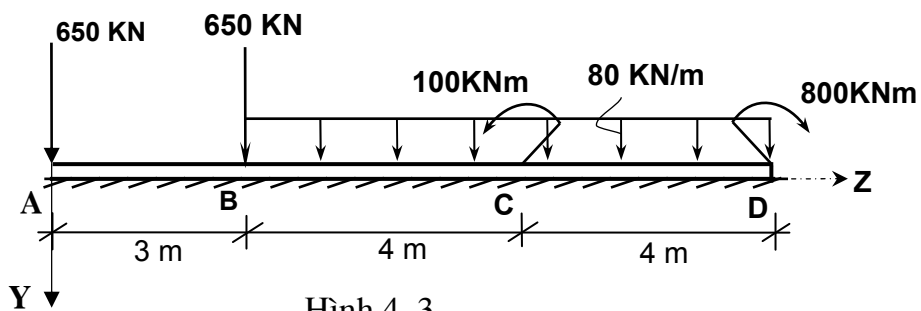
0.43318 23 0.00996 -0.00303

Z Y Teta M Q

0.0	0.0099615	-0.0030343	0.0000000	-650.0000000
1.0	0.0071266	-0.0027936	-380.8450000	-140.1870775
2.0	0.0051018	-0.0040241	-329.7900000	222.0708631
3.0	0.0037909	-0.0093300	31.1228000	486.7868019
3.0	0.0037909	-0.0093300	31.1228000	-163.2131981
4.0	0.0026245	-0.0198178	-70.1888000	-51.1123330
5.0	0.0016077	-0.0348689	-93.2355000	-5.1574182
6.0	0.0008065	-0.0516563	-98.7306000	-13.8467519
7.0	0.0002431	-0.0624000	-134.6650000	-63.6694719
7.0	0.0002431	-0.0624000	-234.6650000	-63.6694719
8.0	0.0001258	-0.0519507	-333.8200000	-135.8515721
9.0	0.0008060	0.0026625	-501.4780000	-192.7289675

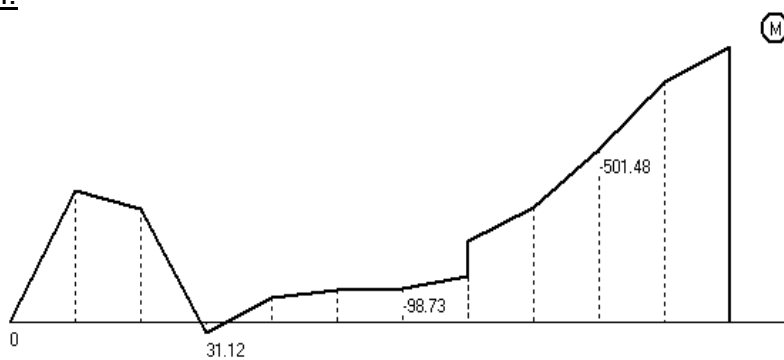
10.0 0.0026692 0.1309270 -694.8760000 -175.5120164

11.0 0.0061471 0.3602250 -800.0000000 0.0000000

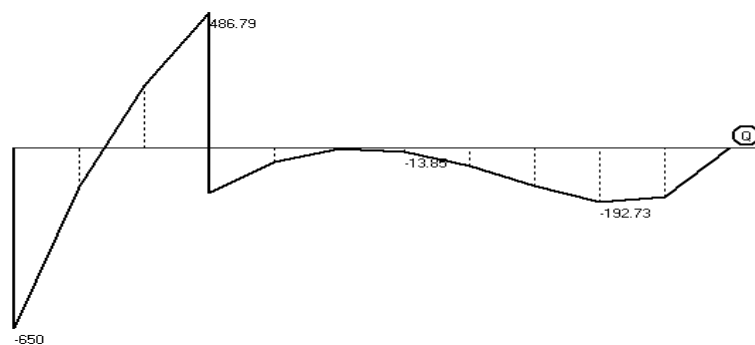


Hình 4.3

Biểu đồ M:



Biểu đồ Q:



Hình 4.4

PHẦN II

ĐỀ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI TẬP LỚN CƠ HỌC KẾT CẤU

BÀI TẬP LỚN SỐ 1

TÍNH HỆ THANH PHẪNG TÍNH ĐỊNH

BẢNG SỐ LIỆU BÀI TẬP LỚN SỐ 1

hứ tự	Kích thước hình học (m)			Tải trọng		
	L ₁	L ₂	L ₃	q(KN/m)	P (KN)	M (KNm)
1	8	12	10	30	80	150
2	10	8	12	40	100	120
3	12	10	8	50	120	100
4	8	10	12	20	100	150
5	10	12	8	40	80	150
6	12	8	10	30	120	120
7	8	8	10	50	100	150
8	10	10	8	20	80	100
9	12	12	10	40	120	150
0	10	12	12	30	100	120

Ghi chú: Sinh viên chọn những số liệu trong bảng số liệu phù hợp với hình vẽ của mình.

YÊU CẦU VÀ THỨ TỰ THỰC HIỆN

I. Xác định nội lực trong hệ ghép tĩnh định:

1.1. Xác định phản lực tại các gối tựa.

1.2. Vẽ các biểu đồ nội lực: mô men uốn M, lực cắt Q và lực dọc N.

1.3. Vẽ các đường ảnh hưởng: ∂ahR_A , ∂ahM_B , ∂ahQ_B và ∂ahQ_I khi lực thẳng đứng P = 1 di động trên hệ khi chưa có hệ thống mắt truyền lực. Dùng ∂ah để kiểm tra lại các trị số R_A , M_B , Q_B , Q_I đã tính được bằng giải tích.

1.4. Vẽ lại các đường ảnh hưởng: ∂ahR_A , ∂ahM_B , ∂ahQ_B và ∂ahQ_I khi lực thẳng đứng P = 1 di động trên hệ khi có hệ thống mắt truyền lực.

1.5. Tìm vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng gồm 4 lực tập trung di động trên hệ khi có mắt truyền lực để mô men uốn tại tiết diện K có giá trị tuyệt đối lớn nhất.

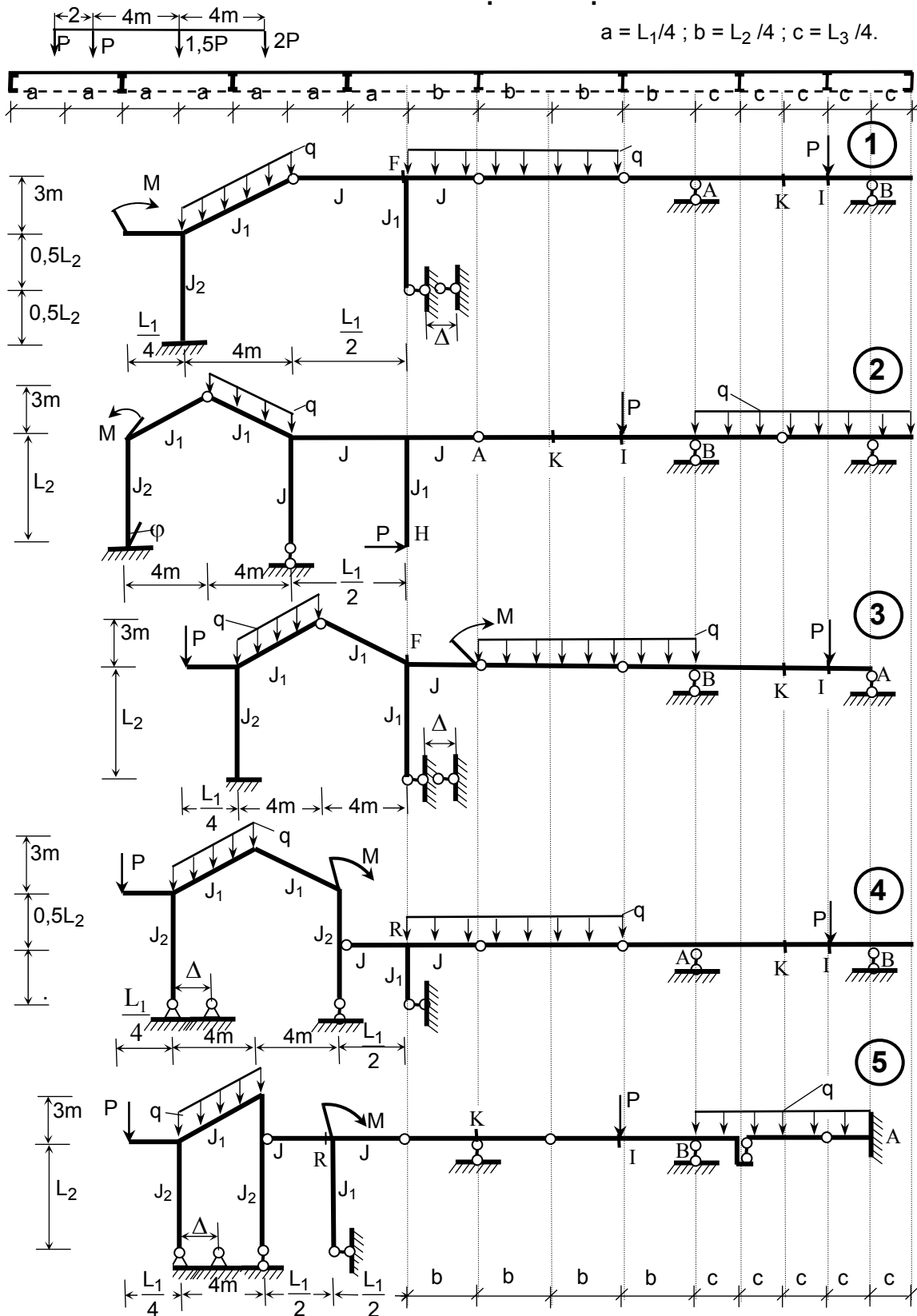
II. Xác định một trong các chuyển vị sau của hệ tĩnh định:

Chuyển vị đứng tại F, Chuyển vị ngang tại H, Chuyển vị góc xoay tại tiết diện R do tác dụng đồng thời của hai nguyên nhân tải trọng và chuyển vị cưỡng bức của gối tựa (xem hình vẽ).

Biết: $J_1 = 2J$; $J_2 = 3J$; $E = 2 \cdot 10^8 \text{ (KN/m}^2\text{)}$;

$J = 10^{-6} \cdot L_1^4 \text{ (m}^4\text{)}$; $\Delta = 0,01 \cdot L_1 \text{ (m)}$; $\varphi = \Delta/L_2$.

SƠ ĐỒ TÍNH HỆ TĨNH ĐỊNH



VÍ DỤ THAM KHẢO

Đề bài:

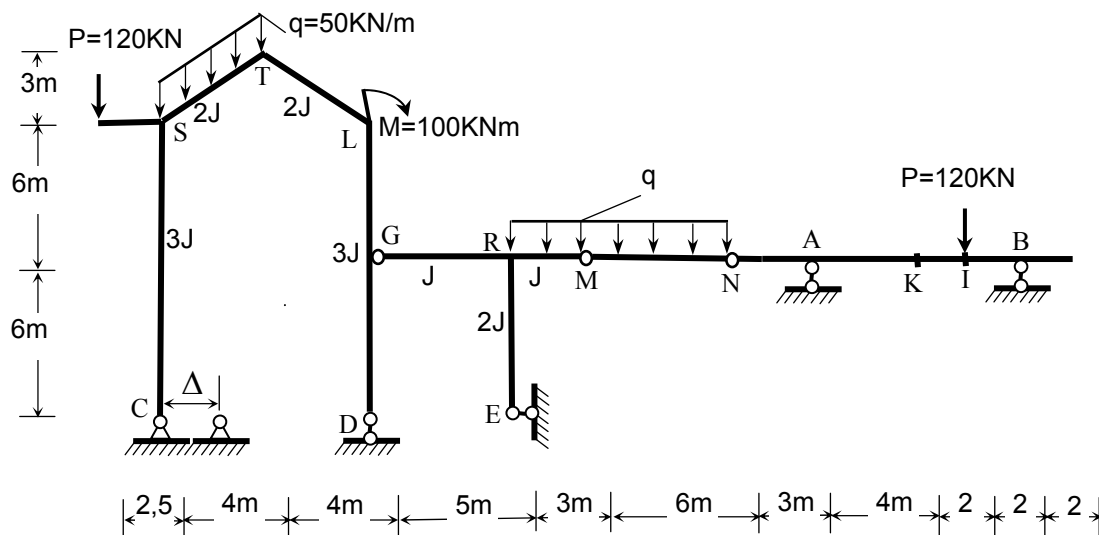
Số đề: 4. 5. 3

4 ☞ Số thứ tự của sơ đồ kết cấu

5 ☞ Số liệu về kích thước hình học (hàng thứ 5): $L_1 = 10\text{m}$; $L_2 = 12\text{m}$; $L_3 = 8\text{m}$

3 ☞ Số liệu về tải trọng (hàng thứ 3): $q = 50\text{KN/m}$; $P = 120\text{KN}$; $M = 100\text{KNm}$.

Với các số liệu đã cho, sơ đồ tính của kết cấu được vẽ lại như sau (Hình 1):



Hình 1.1

Trình tự tính toán:

1. Xác định nội lực trong hệ tĩnh định

1.1 Xác định các phản lực gối tựa:

☞ Đặt tên các gối tựa và các nút của khung (Hình 1.1).

☞ Phân tích hệ chính phụ: Lập sơ đồ tầng (Hình 1.2)

☞ Lần lượt tính toán từ hệ phụ đến hệ chính theo thứ tự sau:

1. Tính dầm MN: $Y_M = 150\text{KN} \rightarrow$ Truyền phản lực xuống khung GEM

$Y_N = 150\text{KN} \rightarrow$ Truyền phản lực xuống dầm AB

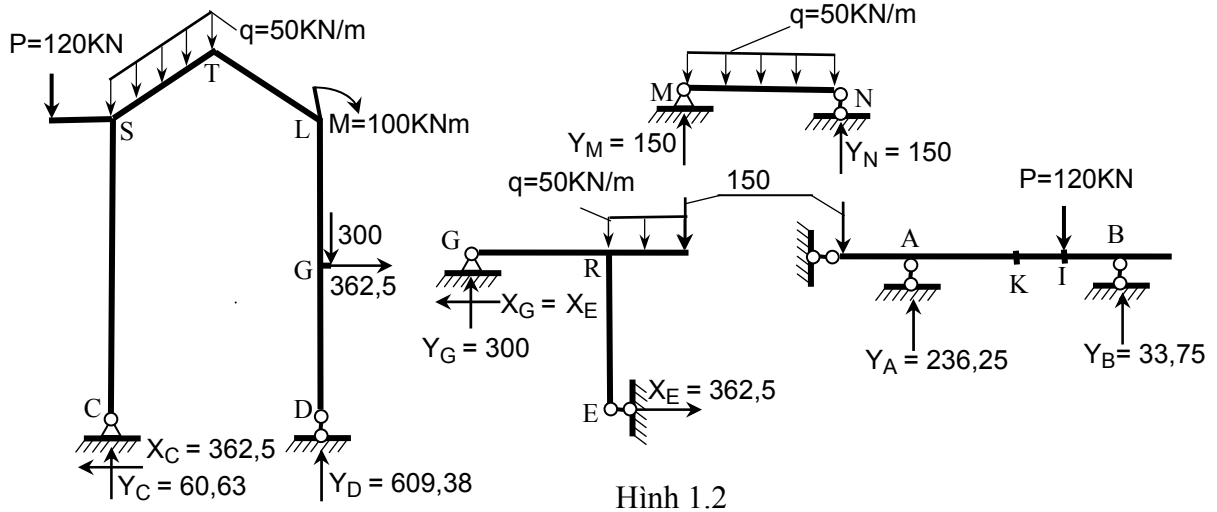
2. Tính dầm AB:

$$\sum M_A = -Y_B \cdot 8 + P \cdot 6 - Y_N \cdot 3 = -Y_B \cdot 8 + 120 \cdot 6 - 150 \cdot 3 = 0 \rightarrow Y_B = 33,75\text{KN}$$

$$\sum M_B = Y_A \cdot 8 - P \cdot 2 - Y_N \cdot 11 = Y_A \cdot 8 - 120 \cdot 2 - 150 \cdot 11 = 0 \rightarrow Y_A = 236,25 \text{ KN}$$

Kiểm tra lại kết quả tính Y_A và Y_B bằng phương trình $\sum Y = 0 \rightarrow$ Cho ta kết quả đúng.

3. Tính khung GEM:



$$\sum M_G = -X_E \cdot 6 + q \cdot 3 \cdot 6,5 + Y_M \cdot 8 = -X_E \cdot 8 + 50 \cdot 3 \cdot 6,5 + 150 \cdot 8 = 0$$

$$\rightarrow X_E = 362,5 \text{ KN}$$

$$\sum X = 0 \rightarrow X_G = 362,5 \text{ KN}$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow Y_G = 300 \text{ KN}$$

Truyền phản lực X_G và Y_G sang khung chính CD (lưu ý đổi chiều của phản lực)

4. Tính khung CD:

$$\sum M_C = -Y_D \cdot 8 - P \cdot 2,5 + q \cdot 5 \cdot 2 + M + Y_G \cdot 8 + X_G \cdot 6 = 0$$

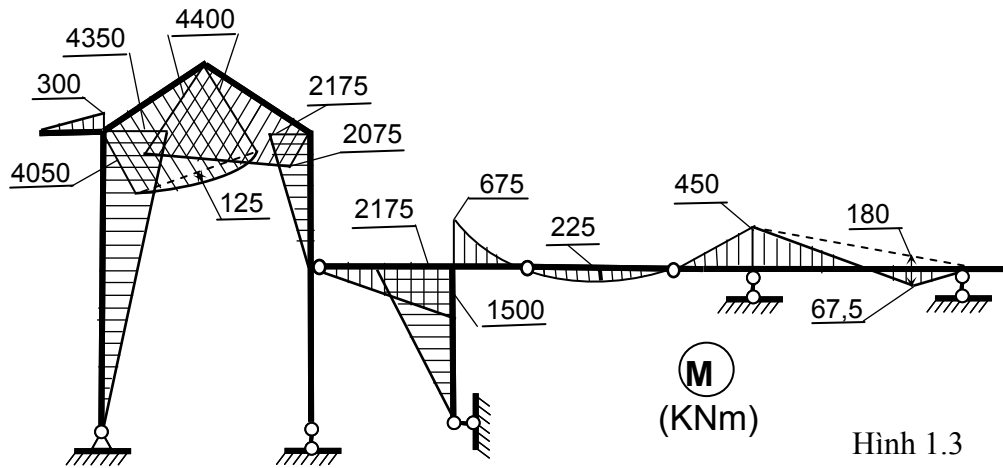
$$\rightarrow Y_D = 609,375 \text{ KN}$$

$$\sum X = 0 \rightarrow X_C = 362,5 \text{ KN}$$

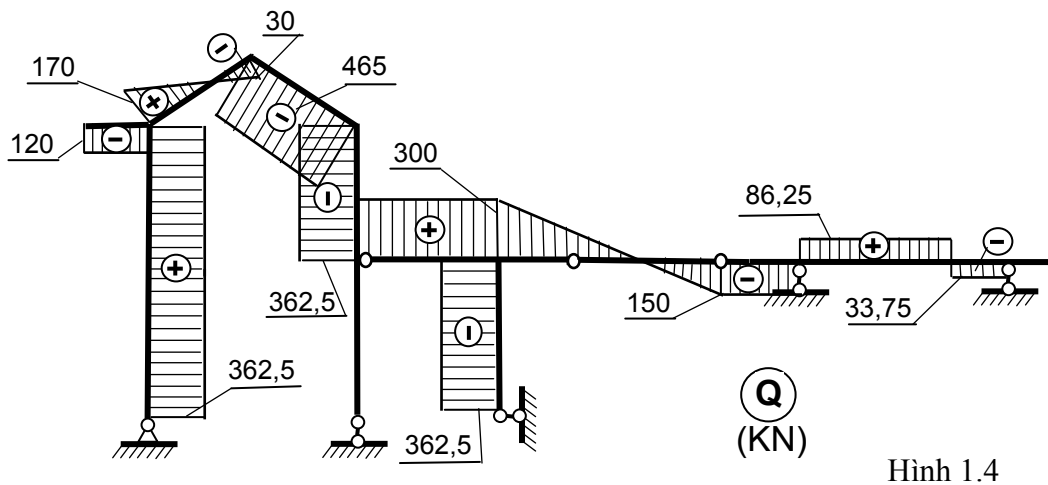
$$\sum Y = 0 \rightarrow Y_C = 60,625 \text{ KN}$$

1.2. Dùng phương pháp mặt cắt xác định nội lực trong hệ:

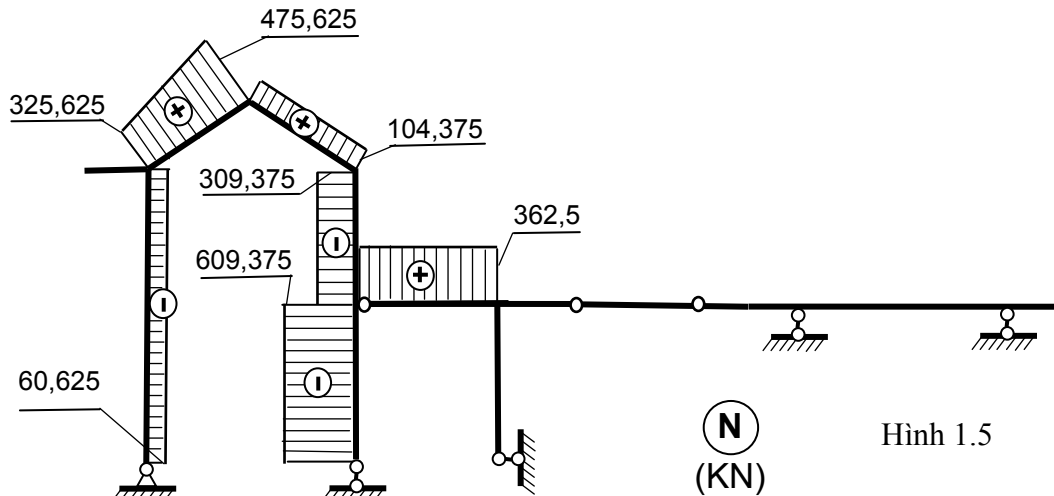
1.2.1. Vẽ biểu đồ mô men M (Hình 1.3).



1.2.2. Vẽ biểu đồ lực cắt Q: Dựa vào các liên hệ vi phân giữa mô men M và lực cắt Q, dùng công thức: $Q_{AB} = Q_{AB}^0 \pm \frac{|\Delta M|}{L}$ biểu đồ lực cắt Q (Hình 1.4) được suy từ biểu đồ mô men M.



3. Vẽ biểu đồ lực dọc N: Biểu đồ lực dọc N (Hình 1.5) được suy từ biểu đồ lực cắt Q bằng cách tách các nút và xét cân bằng về lực.



Hình 1.5

4. Kiểm tra cân bằng các nút: S; T; L; G; R của khung CD khung GEM.

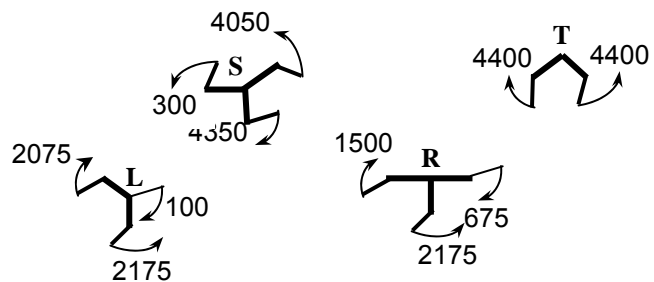
♦ Về mô men: Nút G không cần kiểm tra vì có các mô men nội lực, ngoại lực bằng 0.

$$\sum M_S = 4350 - 300 - 4050 = 0$$

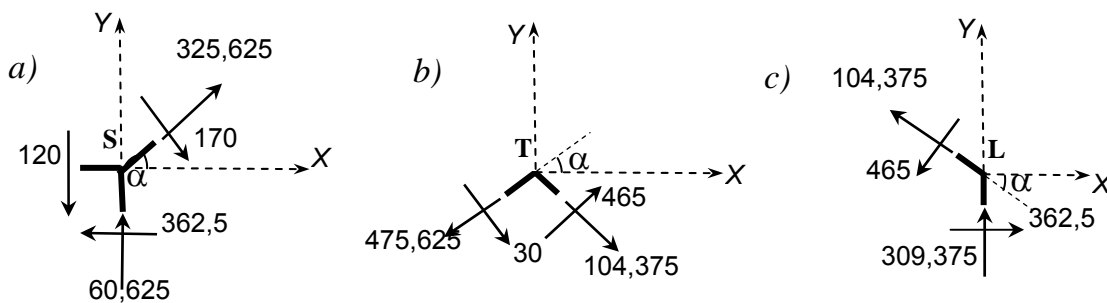
$$\sum M_T = 4400 - 4400 = 0$$

$$\sum M_L = 2075 + 100 - 2175 = 0$$

$$\sum M_R = 1500 + 675 - 2175 = 0$$



♦ Về lực: Từ kích thước hình học của khung ta có: $\sin \alpha = 0,6$; $\cos \alpha = 0,8$



Hình 1.6

• Kiểm tra nút S: (Hình 1.6a)

$$\sum X = 325,625 \cdot 0,8 - 362,5 + 170 \cdot 0,6 = 0$$

$$\sum Y = 60,625 - 120 - 170 \cdot 0,8 + 325,625 \cdot 0,6 = 0$$

• Kiểm tra nút T: (Hình 1.6b)

$$\sum X = 30 \cdot 0,6 - 475,625 \cdot 0,8 + 104,375 \cdot 0,8 + 465 \cdot 0,6 = 0$$

$$\Sigma Y = 465 \cdot 0,8 - 30 \cdot 0,8 - 104,375 \cdot 0,6 - 475,625 \cdot 0,6 = 0$$

- Kiểm tra nút L (Hình 1.6c):

$$\Sigma X = 362,5 - 104,375 \cdot 0,8 - 465 \cdot 0,6 = 0$$

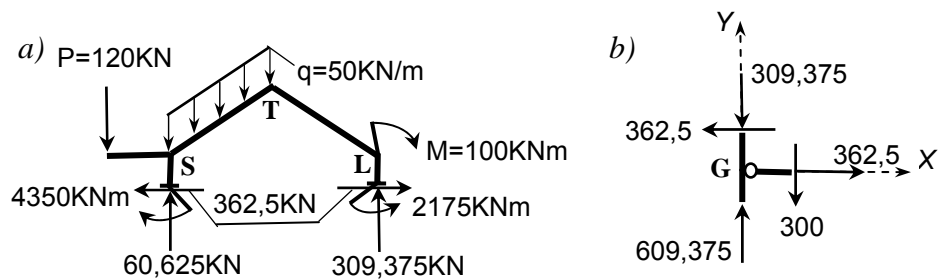
$$\Sigma Y = 309,375 + 104,375 \cdot 0,6 - 465 \cdot 0,8 = 0$$

- Kiểm tra nút G (Hình 1.7b):

$$\Sigma X = 362,5 - 362,5 = 0$$

$$\Sigma Y = -309,375 - 300 + 609,375 = 0$$

- ◆ Kiểm tra tổng hợp một phần của khung (Hình 1.7a):



Hình 1.7

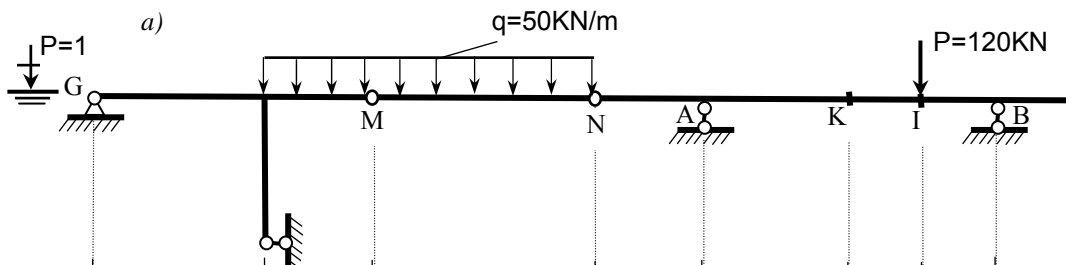
$$\Sigma X = 362,5 - 362,5 = 0$$

$$\Sigma Y = 60,625 + 309,375 - 120 - 50 \cdot 5 = 0$$

$$\Sigma M_S = 4350 - 120 \cdot 2,5 + 50 \cdot 5 \cdot 2 + 100 - 2175 - 309,375 \cdot 8 = 0$$

1.3. Vẽ các đường ảnh hưởng (đah) R_A , M_B , Q_B , Q_i : Khi lực thẳng đứng $P = 1$ di động trên hệ khi chưa có mắt truyền lực (Hình 1.8) ta nhận thấy các tiết diện cần vẽ đah đều thuộc hệ phụ của CD nên khi $P = 1$ di động trên khung chính CD thì đah sẽ trùng với đường chuẩn do đó ta chỉ quan tâm và vẽ đah thuộc hệ MN và AB.

1. Vẽ các đah R_A , đah M_B , đah Q_B^T , đah Q_B^F và đah Q_i khi lực thẳng đứng $P = 1$ di động trên hệ khi chưa có mắt truyền lực (Hình 1.8b,c,d,e,f):



2. Dùng *đah* để kiểm tra lại các trị số R_A , M_B , Q_B và Q_I đã tính bằng giải tích:

$$R_A = 50 \cdot \frac{1,375 \cdot 6}{2} + 120 \cdot 0,25 = 236,25 \text{ KN}; \quad M_B = 0$$

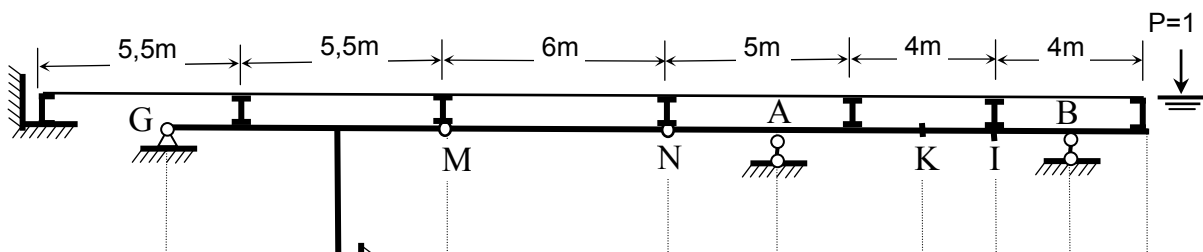
$$Q_B^T = 50 \cdot \frac{0,375 \cdot 6}{2} - 120 \cdot 0,75 = -33,75 \text{ KN}; \quad Q_B^F = 0$$

$$Q_I^T = 50 \cdot \frac{0,375 \cdot 6}{2} - 120 \cdot 0,25 = 86,25 \text{ KN};$$

$$Q_I^F = 50 \cdot \frac{0,375 \cdot 6}{2} - 120 \cdot 0,75 = -33,75 \text{ KN};$$

So sánh với kết quả tính theo giải tích cho ta thấy kết quả tính theo hai cách là bằng nhau.

3. Vẽ lại các *đah* R_A , M_B , Q_B^T , Q_B^F , Q_I và M_K khi lực thẳng đứng $P = 1$ di động trên hệ khi có mắt truyền lực (Hình 1.9):



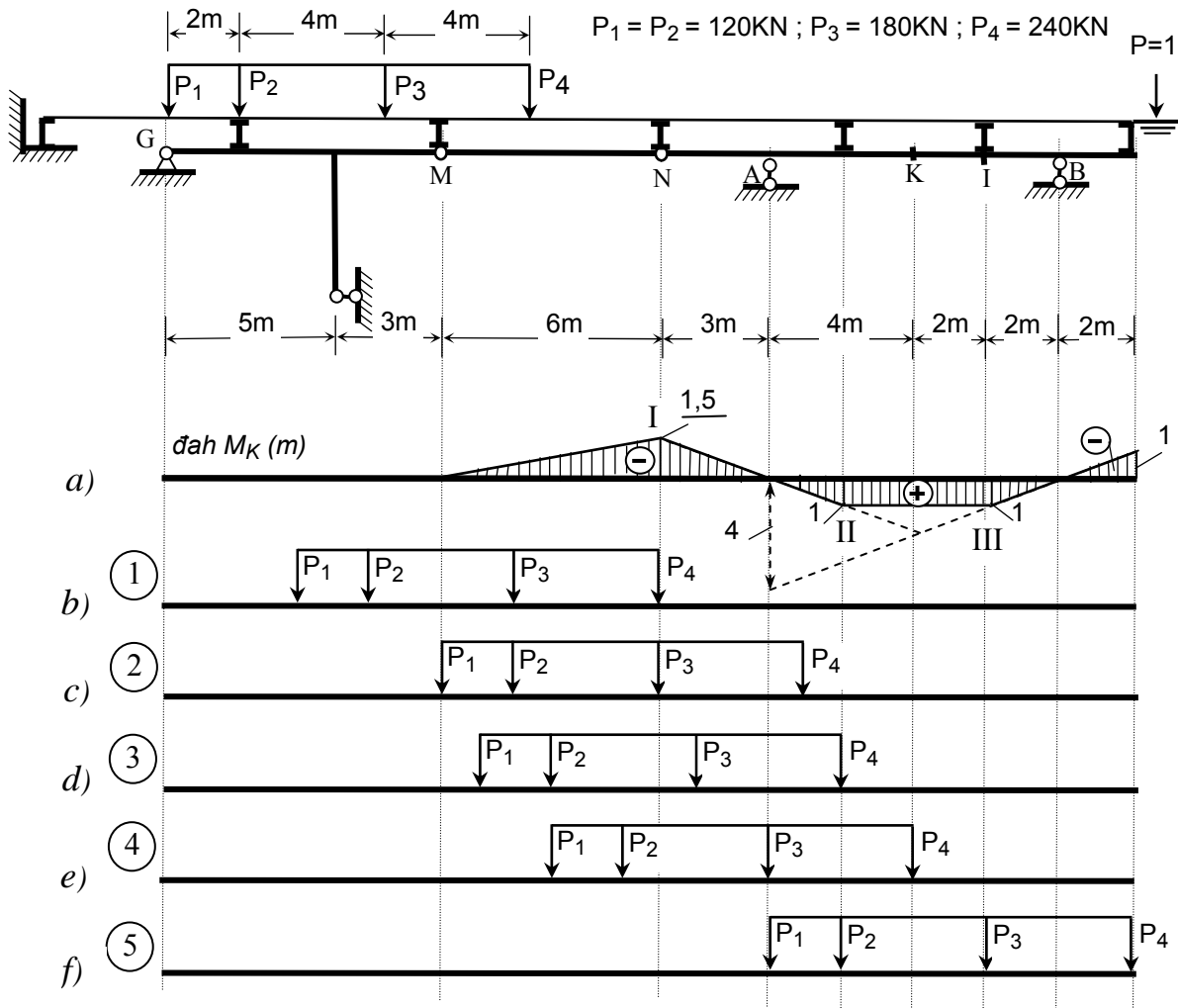
4. Tìm vị trí bất lợi nhất của hệ 4 lực tập trung $P_1; P_2; P_3; P_4$ di động trên hệ khi có mắt truyền lực để M_K có giá trị tuyệt đối lớn nhất.

Ta nhận thấy $\text{đ}ahM_K$ (Hình 1.10a) gồm 4 đoạn thẳng \rightarrow tính các trị số $tg\alpha_j$ ứng với các đoạn thẳng lần lượt từ trái qua phải:

$$tg\alpha_1 = - 0,25; tg\alpha_2 = 0,5; tg\alpha_3 = 0; tg\alpha_4 = - 0,5.$$

Lần lượt cho đoàn tải trọng di động từ trái qua phải sao cho các lực tập trung lần lượt đặt vào các đỉnh I, II, III của $\text{đah}M_K$ (theo 5 sơ đồ trong hình 1.10b.c.d.e.f).

Tìm vị trí có đạo hàm $\left[\frac{dM_K}{dz} \right]$ đổi dấu để xác định lực P_{th} .



Hình 1.10

♣ Thử lần 1: Cho P_4 đặt vào đỉnh I của $\text{đah}M_K$ (sơ đồ 1)

+ Khi P_4 đặt ở bên trái đỉnh I ta có:

$$\left[\frac{dM_K}{dz} \right]^T = (P_3 + P_4) \cdot \text{tg} \alpha_1 = - (180 + 240) \cdot 0,25 = - 105 < 0$$

+ Khi P_4 đặt ở bên phải đỉnh I ta có:

$$\left[\frac{dM_K}{dz} \right]^F = P_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + P_4 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = -180 \cdot 0,25 + 240 \cdot 0,5 = 75 > 0$$

Ta nhận thấy đạo hàm đổi dấu nên P_4 đặt ở đỉnh I là P_{th} . Tính M_K ứng với sơ đồ 1:

$$M_K = -180 \cdot 0,5 - 240 \cdot 1,5 = -450 \text{ KNm}$$

♣ Thử lần 2: Cho P_3 đặt vào đỉnh I của $\text{đah}M_K$ (sơ đồ 2)

+ Khi P_3 đặt ở bên trái đỉnh I ta có:

$$\left[\frac{dM_K}{dz} \right]^T = (P_2 + P_3) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + P_4 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = (120 + 180) \cdot 0,25 + 240 \cdot 0,5 = 45 >$$

0

+ Khi P_3 đặt ở bên phải đỉnh I ta có:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dM_K}{dz} \right]^F &= (P_1 + P_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + (P_3 + P_4) \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 \\ &= -(120 + 120) \cdot 0,25 + (180 + 240) \cdot 0,5 = 150 > 0 \end{aligned}$$

Ta nhận thấy đạo hàm không đổi dấu nên không cho giá trị M_K cực trị. Tiếp tục dịch chuyển đoàn tải trọng sang bên phải.

♣ Thử lần 3: Cho P_4 đặt vào đỉnh II của $\text{đah}M_K$ (sơ đồ 3)

+ Khi P_4 đặt ở bên trái đỉnh II ta có:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dM_K}{dz} \right]^T &= (P_1 + P_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + (P_3 + P_4) \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 \\ &= -(120 + 120) \cdot 0,25 + (180 + 240) \cdot 0,5 = 150 > 0 \end{aligned}$$

+ Khi P_4 đặt ở bên phải đỉnh II ta có:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dM_K}{dz} \right]^F &= (P_1 + P_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + P_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 + P_4 \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 \\ &= -(120 + 120) \cdot 0,25 + 180 \cdot 0,5 + 240 \cdot 0 = 30 > 0 \end{aligned}$$

Ta nhận thấy đạo hàm không đổi dấu nên không cho giá trị M_K cực trị. Tiếp tục dịch chuyển đoàn tải trọng sang bên phải.

♣ Thử lần 4: Cho P_3 đặt vào đỉnh II của $\text{đah}M_K$ (sơ đồ 4)

+ Khi P_3 đặt ở bên trái đỉnh II ta có:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dM_k}{dz} \right]^T &= P_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + (P_2 + P_3) \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 + P_4 \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 \\ &= -120 \cdot 0,25 + (120 + 180) \cdot 0,5 + 240 \cdot 0 = 120 > 0 \end{aligned}$$

+ Khi P_3 đặt ở bên phải đỉnh II ta có:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dM_k}{dz} \right]^F &= P_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + P_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 + P_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 + P_4 \cdot \operatorname{tg} \alpha_4 \\ &= -120 \cdot 0,25 + 120 \cdot 0,5 + 180 \cdot 0 - 240 \cdot 0,5 = -90 < 0 \end{aligned}$$

Ta nhận thấy đạo hàm đổi dấu nên P_3 đặt ở đỉnh II là P_{th} . Tính M_k ứng với sơ đồ 4 ta có:

$$M_k = -120 \cdot 1,25 - 120 \cdot 1 + 180 \cdot 1 + 240 \cdot 1 = 150 \text{ KNm}$$

♣ Thử lần 5: Cho P_3 đặt vào đỉnh III của *đah* M_k (sơ đồ 5)

+ Khi P_3 đặt ở bên trái đỉnh III ta có:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dM_k}{dz} \right]^T &= (P_1 + P_2) \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 + P_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 + P_4 \cdot \operatorname{tg} \alpha_4 \\ &= (120 + 120) \cdot 0,5 + 180 \cdot 0 - 240 \cdot 0,5 = 0 \end{aligned}$$

+ Khi P_3 đặt ở bên phải đỉnh III ta có:

$$\begin{aligned} \left[\frac{dM_k}{dz} \right]^F &= P_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 + P_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 + P_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha_4 \\ &= 120 \cdot 0,5 + 120 \cdot 0 + 180 \cdot 0,5 = -30 < 0 \end{aligned}$$

Ta nhận thấy đạo hàm đổi từ 0 sang dương nên P_3 đặt ở đỉnh III là P_{th} . Tính M_k ứng với sơ đồ 5 ta có:

$$M_k = 0 + 120 \cdot 1 + 180 \cdot 1 - 240 \cdot 1 = 60 \text{ KNm}$$

Nếu dịch chuyển tiếp, đoàn tải trọng sẽ ra ngoài *đah* M_k , quá trình thử có thể dừng lại được.

So sánh hai trị số: $M_k^{\min} = -450 \text{ KNm}$

$$M_k^{\max} = 150 \text{ KNm}$$

Ta có thể kết luận: Vị trí bất lợi nhất của hệ lực tập trung di động trên hệ khi có mất truyền lực để mô men uốn tại tiết diện K có giá trị tuyệt đối lớn nhất là vị trí đặt tải theo sơ đồ 1. Ứng với sơ đồ này ta có:

$$\max |M_k| = 450 \text{ KNm.}$$

2. Tính chuyển vị trong hệ tĩnh định

Theo yêu cầu của đề bài ta phải xác định chuyển vị góc xoay tại tiết diện R do hai nguyên nhân là tải trọng và gối tựa C dịch chuyển sang phải một đoạn là Δ .

Với: $J_1 = 2J; \quad J_2 = 3J; \quad E = 2 \cdot 10^8 \text{ (KN/m}^2\text{)}$;

$$J = 10^{-6} \cdot L_1^4 \text{ (m}^4\text{)} = 10^{-6} \cdot 10^4 = 10^{-2} \text{ (m}^4\text{)}$$

$$\Delta = 0,01 \cdot L_1 \text{ (m)} = 0,01 \cdot 10 = 0,1 \text{ (m)}.$$

2.1. Lập trạng thái phụ "k":

1. Đặt một mô men tập trung $M_k = 1$ vào tiết diện R cần xác định chuyển vị góc xoay.

2. Tính hệ ở trạng thái "k": Ta có nhận xét $M_k = 1$ được đặt vào hệ khung GEM nên nó chỉ ảnh hưởng đến nội lực của khung GEM và khung chính CD của nó chứ không ảnh hưởng đến nội lực trong các hệ phụ MNAB của nó, vì vậy khi tính hệ ở trạng thái "k" ta chỉ cần quan tâm đến nội lực ở phần khung CDGEM.

+ Xác định các phản lực: $X_E = X_C = \frac{1}{6}; \quad Y_C = Y_D = \frac{1}{8}$ (chiều của phản lực xem hình 10).

+ Vẽ biểu đồ (\bar{M}_k): (Hình 1.11).

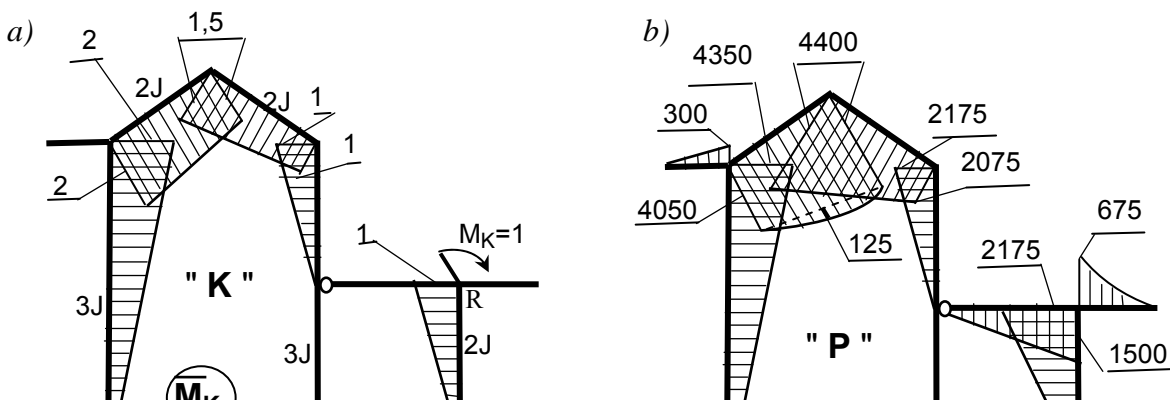
2.2. Tính hệ ở trạng thái "p":

Dùng kết quả đã tính ở phần trên, để dễ theo dõi trong quá trình nhân biểu đồ ta vẽ lại phần biểu đồ (M_p) trong khung CDGEM (Hình 1.11).

2.3. Dùng công thức Măcxoen-Mo tính chuyển vị cần tìm:

1. Tính chuyển vị góc xoay tại R do tải trọng gây ra: $\varphi_{R(P)}$:

Vận dụng công thức nhân biểu đồ tính chuyển vị góc xoay tại nút R do tải trọng gây ra với lưu ý trong hệ dầm khung có thể bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.



$$\begin{aligned}
\varphi_{R(P)} &= (M_P) \cdot (\bar{M}_k) = \frac{1}{3EJ} \left(\frac{4350 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) \\
&+ \frac{1}{2EJ} \left[4050 \cdot 5 \cdot \frac{2+1,5}{2} + \frac{350 \cdot 5}{2} \left(1,5 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \frac{2}{3} \cdot 125 \cdot 5 \cdot \frac{3,5}{2} \right] \\
&+ \frac{1}{2EJ} \left[2075 \cdot 5 \cdot \frac{2,5}{2} + \frac{2325 \cdot 5}{2} \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) \right] + \frac{1}{3EJ} \frac{2175 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{2175 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \\
&= \frac{1}{EJ} (12400 + 17718,75 + 729,167 + 364,583 + 6484,375 + 3875 + 1450 + 2175) \\
&= \frac{45196,875}{2 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4} = 0,023 \text{ rad.}
\end{aligned}$$

2. Tính chuyển vị góc xoay tại R do gối tựa C dịch chuyển sang phải: $\varphi_{R(\Delta)}$

$$\varphi_{R(\Delta)} = - \sum_1^n \bar{R}_k^i \cdot \Delta_m^i = - \left(-\frac{1}{6} \Delta \right) = 0,017 \text{ (rad)}$$

3. Tính chuyển vị góc xoay tại R do cả hai nguyên nhân đồng thời tác dụng:

$$\varphi_R = \varphi_{R(P)} + \varphi_{R(\Delta)} = 0,023 + 0,017 = 0,04 \text{ (rad)}.$$

Kết quả mang dấu dương cho ta kết luận tiết diện R dưới tác dụng của hai nguyên nhân trên sẽ bị xoay đi 1 góc 0,04 (rad) thuận chiều kim đồng hồ (cùng chiều với $M_k = 1$ đã giả thiết).

BÀI TẬP LỚN CƠ HỌC KẾT CẤU SỐ 2

TÍNH KHUNG SIÊU TĨNH THEO PHƯƠNG PHÁP LỰC

BẢNG SỐ LIỆU CHUNG VỀ KÍCH THƯỚC VÀ TẢI TRỌNG

Thứ tự	Kích thước hình học (m)		Tải trọng		
	L_1	L_2	q (KN/m)	P (KN)	M (KNm)
1	8	12	30	80	150
2	10	8	40	100	120
3	12	10	50	120	100
4	8	10	20	100	150
5	10	12	40	80	150
6	12	8	30	120	120
7	8	8	50	100	150
8	10	10	20	80	100
9	12	12	40	120	150
10	10	12	30	100	120

YÊU CẦU VÀ THỨ TỰ THỰC HIỆN

1. Tính hệ siêu tĩnh do tải trọng tác dụng:

1.1. *Vẽ các biểu đồ nội lực:* Mô men uốn M_p , lực cắt Q_p , lực dọc N_p trên hệ siêu tĩnh đã cho. Biết $F = 10J/L_1^2$ (m^2).

1. Xác định bậc siêu tĩnh và chọn hệ cơ bản (HCB).
2. Thành lập hệ phương trình chính tắc dạng chữ.
3. Xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc, kiểm tra các kết quả đã tính được.
4. Giải hệ phương trình chính tắc.
5. Vẽ biểu đồ mô men trên hệ siêu tĩnh đã cho do tải trọng tác dụng M_p . Kiểm tra cân bằng các nút và kiểm tra theo điều kiện chuyển vị.

6. Vẽ biểu đồ lực cắt Q_p và lực dọc N_p trên hệ siêu tĩnh đã cho.

1.2. Xác định chuyển vị ngang của điểm I hoặc góc xoay của tiết diện K.

Biết: $E = 2 \cdot 10^8 \text{ (KN/m}^2\text{)}$; $J = 10^{-6} \cdot L_1^4 \text{ (m}^4\text{)}$.

2. Tính hệ siêu tĩnh chịu tác dụng đồng thời của ba nguyên nhân (tải trọng, nhiệt độ thay đổi và gối tựa dời chỗ).

2.1. Viết hệ phương trình chính tắc dạng số.

2.2. Trình bày:

1. Cách vẽ biểu đồ mô men uốn M^{cc} do 3 nguyên nhân đồng thời tác dụng trên hệ siêu tĩnh đã cho và cách kiểm tra.

2. Cách tính các chuyển vị đã nêu ở mục trên.

Biết:

☞ Nhiệt độ thay đổi trong thanh xiên:

+ Ở thớ trên là $T_{tr} = +36^\circ$

+ Ở thớ dưới là $T_d = +28^\circ$.

☞ Thanh xiên có chiều cao tiết diện $h = 0,1 \text{ m}$.

☞ Hệ số dẫn nở dài vì nhiệt độ $\alpha = 10^{-5}$.

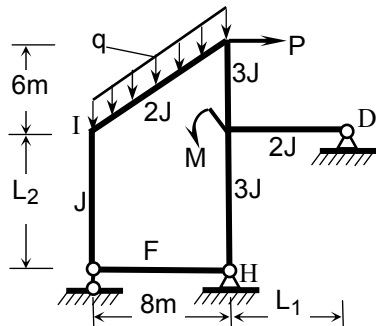
☞ Chuyển vị gối tựa:

+ Gối D dịch chuyển sang phải một đoạn $\Delta_1 = 0,001 \cdot L_1 \text{ (m)}$.

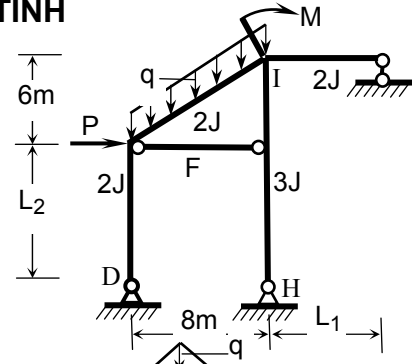
+ Gối H bị lún xuống một đoạn $\Delta_2 = 0,001 \cdot L_2 \text{ (m)}$.

SƠ ĐỒ TÍNH KHUNG SIÊU TÍNH

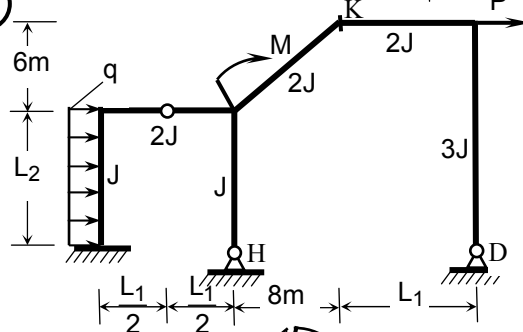
1



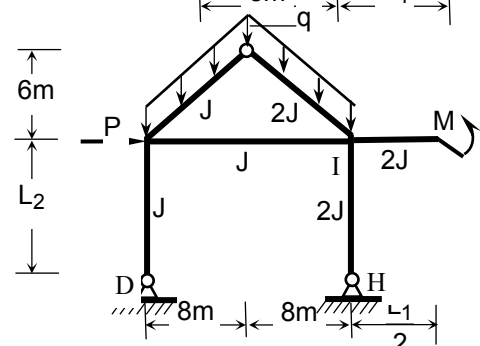
2



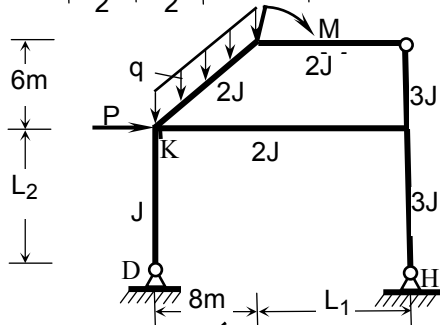
3



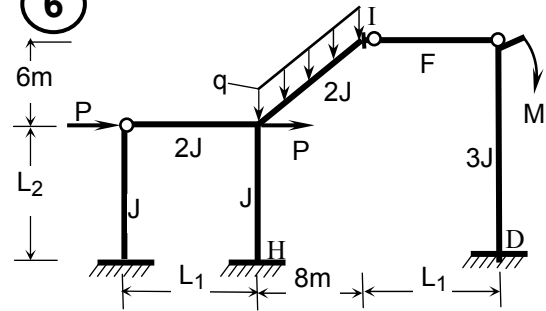
4



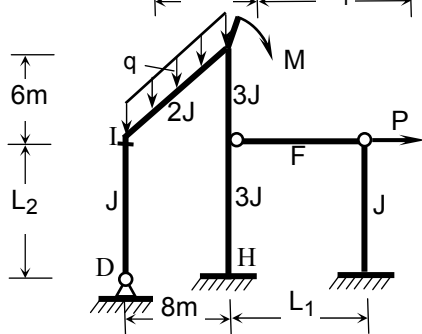
5



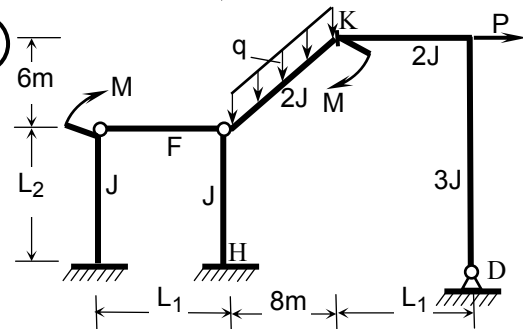
6



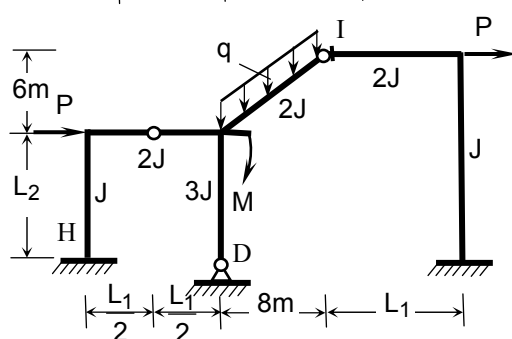
7



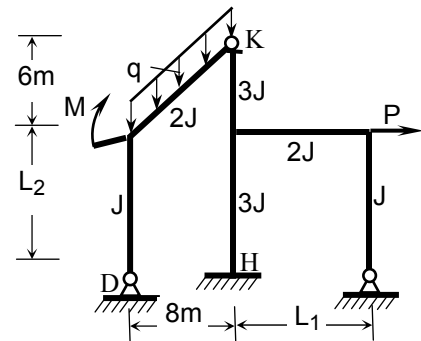
8



9



10



VÍ DỤ THAM KHẢO

Đề bài:

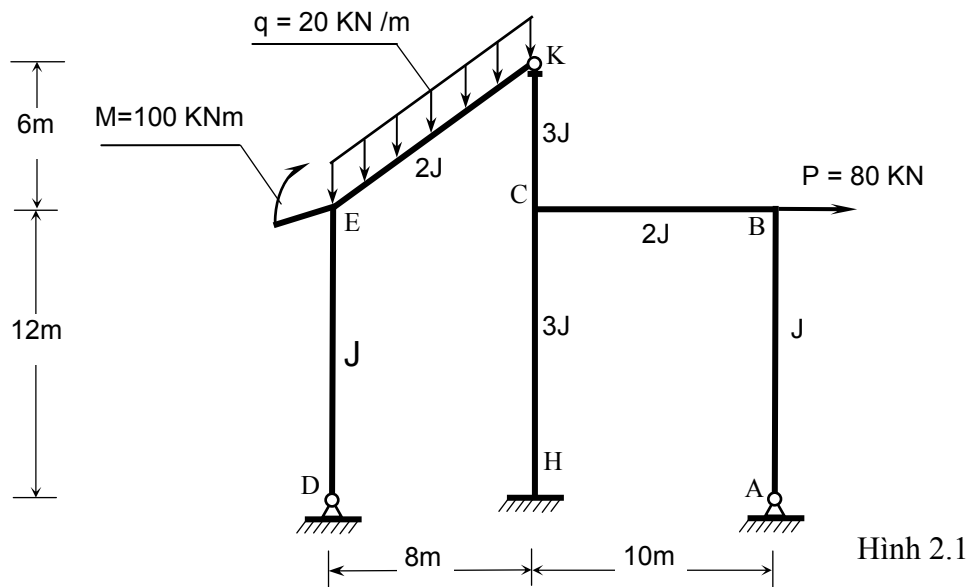
Số Đề: 10.5.8

10 ☞ Số thứ tự của sơ đồ kết cấu

5 ☞ Số liệu về kích thước hình học (hàng thứ 5): $L_1 = 10 \text{ m}$; $L_2 = 12 \text{ m}$.

8 ☞ Số liệu về tải trọng (hàng thứ 8): $q = 20 \text{ KN/m}$; $P = 80 \text{ KN}$; $M = 100 \text{ KNm}$.

Với các số liệu đã cho, sơ đồ tính của kết cấu được vẽ lại như sau: (Hình 2.1).



Trình tự tính toán:

1. Tính hệ siêu tĩnh chịu tác dụng của tải trọng

1.1. Vẽ các biểu đồ nội lực: mô men uốn M_p , lực cắt Q_p và lực dọc N_p .

1. Xác định bậc siêu tĩnh: $n = 3V - K = 3 \cdot 2 - 3 = 3$.

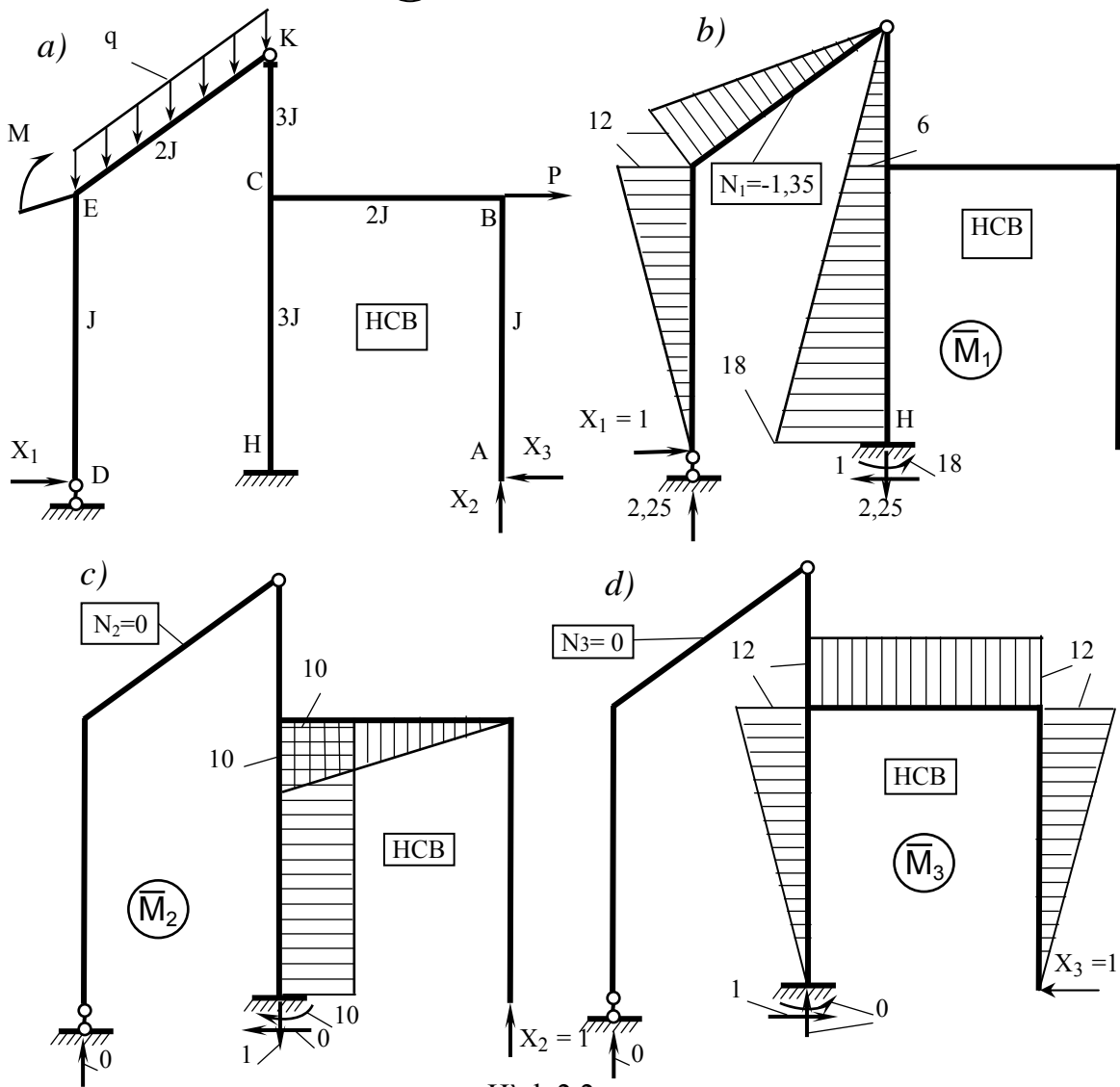
2. Chọn hệ cơ bản (HCB): Là hệ tĩnh định (Hình 2.2a) được suy từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bỏ bớt 3 liên kết thừa (2 liên kết tại A; 1 liên kết ngăn cản chuyển vị ngang tại D), sau đó thêm vào D và A ba ẩn lực X_1 ; X_2 ; X_3 .

3. Lập hệ phương trình chính tắc dạng chữ:

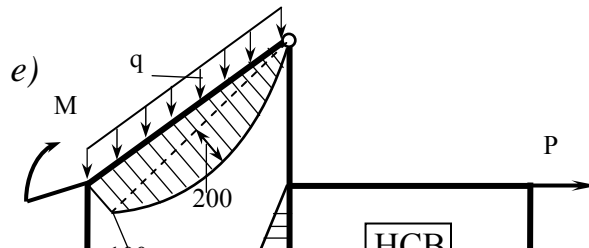
$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2p} = 0 \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} = 0 \end{cases}$$

4. Xác định các hệ số δ_{km} và các số hạng tự do Δ_{kp} của hệ phương trình:

- Vẽ các biểu đồ mô men đơn vị: (\bar{M}_1) , (\bar{M}_2) và (\bar{M}_3) do lần lượt các ảnh lực $X_1 = 1$ (Hình 2.2b), $X_2 = 1$ (Hình 2.2c) và $X_3 = 1$ (Hình 2.2d) tác dụng trên HCB.
- Vẽ biểu đồ mô men (M_p^o) do tải trọng tác dụng trên HCB (Hình 2.2e).



Hình 2.2



♣ Dùng công thức Măcxoen- Mo và phép nhân biểu đồ để tính các hệ số và các số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11} = \overline{M}_1 \times \overline{M}_1 = \frac{1}{EJ} \left[\frac{12 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \right] + \frac{1}{2EJ} \left[\frac{12 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \right] + \frac{1}{3EJ} \left[\frac{18 \cdot 18}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 18 \right] = \frac{1464}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \overline{M}_1 \times \overline{M}_2 = -\frac{1}{3EJ} \left[\frac{18+6}{2} \cdot 12 \cdot 10 \right] = -\frac{480}{EJ}$$

$$\delta_{22} = \overline{M}_2 \times \overline{M}_2 = \frac{1}{3EJ} (10 \cdot 12 \cdot 10) + \frac{1}{2EJ} \left[\frac{10 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 \right] = \frac{1700}{3EJ} = \frac{566,67}{EJ}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \overline{M}_2 \times \overline{M}_3 = -\frac{1}{3EJ} \left[\frac{12 \cdot 12}{2} \cdot 10 \right] - \frac{1}{2EJ} \left[\frac{10 \cdot 10}{2} \cdot 12 \right] = -\frac{540}{EJ}$$

$$\delta_{33} = \overline{M}_3 \times \overline{M}_3 = \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{2EJ} (12 \cdot 10 \cdot 12) = \frac{1488}{EJ}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \overline{M}_1 \times \overline{M}_3 = \frac{1}{3EJ} \left[\frac{12 \cdot 12}{2} \left(6 + \frac{1}{3} \cdot 12 \right) \right] = \frac{240}{EJ}$$

$$\Delta_{1p} = \overline{M}_p^o \times \overline{M}_1 =$$

$$= \frac{1}{2EJ} \left[-\frac{100 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 - \frac{2}{3} \cdot 200 \cdot 10 \cdot 6 \right] + \frac{1}{3EJ} \left[\frac{960 \cdot 12}{2} \cdot \left(6 + \frac{2}{3} \cdot 12 \right) \right] = \frac{20880}{EJ}$$

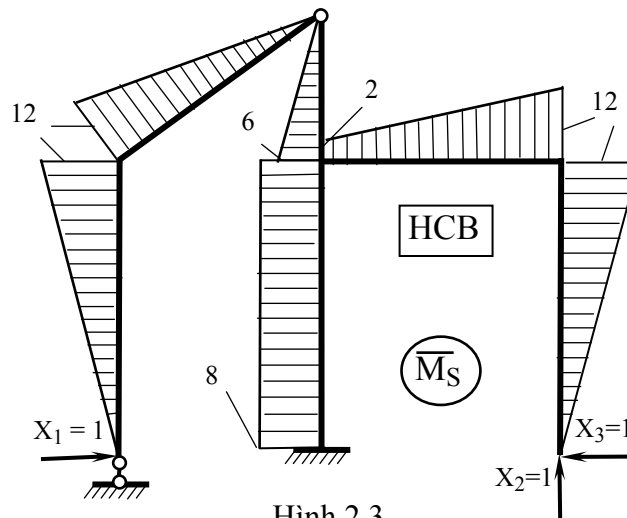
$$\Delta_{2p} = \overline{M}_P^o \times \overline{M}_2 = -\frac{1}{3EJ} \cdot \frac{960 \cdot 12}{2} \cdot 10 = -\frac{19200}{EJ}$$

$$\Delta_{3p} = \overline{M}_P^o \times \overline{M}_3 = \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{960 \cdot 12}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 12 = \frac{7680}{EJ}$$

♣ Kiểm tra kết quả tính các hệ số δ_{km} của hệ phương trình chính tắc:

► Vẽ biểu đồ mô men đơn vị tổng cộng (Hình 2.3):

$$\overline{M}_s = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3$$



Hình 2.3

► Kiểm tra các hệ số thuộc hàng thứ nhất của hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \Sigma \delta_{1m} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} &= \overline{M}_1 \times \overline{M}_s = \frac{1}{EJ} \left[\frac{12 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \right] + \\ &+ \frac{1}{2EJ} \left[\frac{12 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \right] + \frac{1}{3EJ} \left[\frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \left(\frac{6+18}{2} \cdot 12 \cdot 8 \right) \right] = \frac{1224}{EJ} \end{aligned}$$

► Kiểm tra các hệ số thuộc hàng thứ hai của hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \Sigma \delta_{2m} = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} &= \overline{M}_2 \times \overline{M}_s = \\ &= -\frac{1}{3EJ} \cdot 10 \cdot 12 \cdot 8 - \frac{1}{2EJ} \left[\frac{10 \cdot 10}{2} \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 10 \right) \right] = -\frac{453,33}{EJ} \end{aligned}$$

► Kiểm tra các hệ số thuộc hàng thứ ba của hệ phương trình:

$$\Sigma \delta_{3m} = \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} = \overline{M}_3 \times \overline{M}_s =$$

$$\frac{1}{3EJ} \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{2+12}{2} \cdot 10 \cdot 12 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = \frac{1188}{EJ}$$

► Kiểm tra tất cả các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^3 \delta_{km} = \frac{1958,7}{EJ} = \overline{M}_s \times \overline{M}_s =$$

$$\frac{1}{EJ} \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{12 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{1}{3EJ} \left(\frac{6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + 8 \cdot 12 \cdot 8 \right) + \frac{1}{2EJ} \left[2 \cdot 10 \cdot \frac{2+12}{2} + \frac{10 \cdot 10}{2} \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 10 \right) \right] + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{12 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 = \frac{1958,75}{EJ}$$

► Kiểm tra các số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc:

$$\sum \Delta_{kp} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \Delta_{3p} = \overline{M}_p^0 \times \overline{M}_s =$$

$$\frac{1}{2EJ} \left[-\frac{100 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 - \frac{2}{3} \cdot 200 \cdot 10 \cdot 6 \right] + \frac{1}{3EJ} \cdot \frac{960 \cdot 12}{2} \cdot 8 = \frac{9360}{EJ}$$

5. Giải hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} 1464X_1 - 480X_2 + 240X_3 + 20880 = 0 \\ -480X_1 + 566,67X_2 - 540X_3 - 19200 = 0 \\ 240X_1 - 540X_2 + 1488X_3 + 7680 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = -2,225 \text{ KN} \\ X_2 = 41,914 \text{ KN} \\ X_3 = 10,4 \text{ KN} \end{cases}$$

6. Vẽ biểu đồ mô men trên hệ siêu tĩnh đã cho do tải trọng tác dụng:

$$\overline{M}_p = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \overline{M}_3 X_3 + \overline{M}_p^0$$

Khi cộng các biểu đồ ta cần phải có sự thống nhất chung về dấu của các nội lực giữa các biểu đồ. Để đỡ nhầm lẫn ta có thể tự qui ước $M > 0$ khi căng dưới với các thanh ngang; căng phải với các thanh đứng và ngược lại. Ở đây chúng tôi lập bảng tính các mô men tại các đầu thanh với qui ước: người quan sát đứng ở trong khung HCBA; $M > 0$ căng về phía người quan sát; $M < 0$ căng về phía ngược lại.

Đầu thanh	$\overline{M}_1 \cdot X_1$	$\overline{M}_2 \cdot X_2$	$\overline{M}_3 \cdot X_3$	M_p^0	$M_p(\text{KNm})$
M_{ED}	26,7	0	0	0	26,7
M_{EK}	26,7	0	0	100	126,7

M_{CK}	13,35	0	0	0	13,35
M_{CH}	13,35	419,14	- 124,8	0	307,69
M_{HC}	40,05	419,14	0	- 960	-500,81
M_{CB}	0	419,14	- 124,8	0	294,34
M_{BC}	0	0	- 124,8	0	- 124,8
M_{BA}	0	0	- 124,8	0	- 124,8

* Kiểm tra cân bằng nút E về mô men:

$$\Sigma M_E = 100 + 26,7 - 126,7 = 0$$

* Kiểm tra cân bằng nút B về mô men:

$$\Sigma M_B = 124,8 - 124,8 = 0$$

* Kiểm tra cân bằng nút C về mô men:

$$\Sigma M_C = 307,69 - 13,35 - 294,34 = 0$$

* Kiểm tra theo điều kiện chuyển vị:

$$-\frac{1}{EJ} \cdot \frac{26,7 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 - \frac{1}{2EJ} \left[\frac{126,7 \cdot 10}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 + \frac{2}{3} \cdot 200 \cdot 10 \cdot 6 \right]$$

$$+ \frac{1}{3EJ} \left[-\frac{13,35 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{307,69 \cdot 12}{2} \cdot 8 + \frac{500,81 \cdot 12}{2} \cdot 8 \right] + \frac{1}{EJ} \left[\frac{124,8 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \right]$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \left[\frac{124,8 \cdot 10}{2} \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 10 \right) - \frac{294,34 \cdot 10}{2} \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 10 \right) \right] =$$

$$\frac{1}{EJ} (2705,04 - 3922,08) = -\frac{1217,04}{EJ} = -\frac{1217,04}{2 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4} \text{ (m)}$$

$$= -0,61 \text{ (mm)}.$$

Tính sai số theo biểu thức: $\delta = \frac{|A+B|}{A} (\%)$

ta có $\delta = \frac{|2705,04 - 3922,08|}{2705,04} = 0,45 < 5\%$ là sai số trong giới hạn cho phép

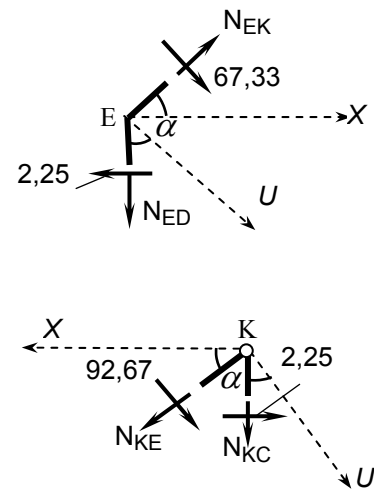
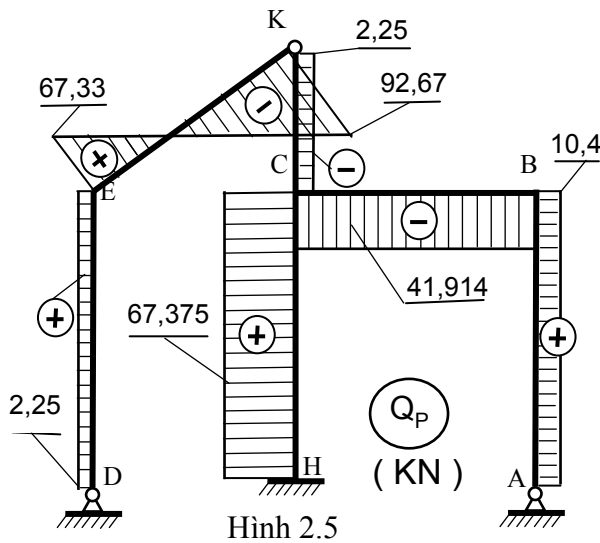
ta có thể coi chuyển vị đã tính là bằng 0, điều đó chứng tỏ biểu đồ M_p đã vẽ đúng.

7. Vẽ biểu đồ lực cắt Q_p và biểu đồ lực dọc N_p :

♣ Biểu đồ lực cắt Q_p (Hình 2.5) được suy ra từ biểu đồ M_p dựa vào mối liên hệ vi phân giữa M và Q : Dùng công thức $Q_{AB} = Q_{AB}^0 \pm \frac{|\Delta M|}{L}$ để lập bảng tính lực cắt tại các đầu thanh với $\sin \alpha = 0,6$; $\cos \alpha = 0,8$.

Đầu thanh	(m)	Q_{AB}^0	$\pm \left \frac{\Delta M}{L} \right $	Q_p (KN)
$Q_{DE} =$ Q_{ED}	2	0	$(26,7 - 0)/12$	2,2 25
$Q_{CK} =$ Q_{KC}		0	$-(13,35 - 0)/6$	- 2,225
Q_{EK}	0	$(20 \cdot 10 \cdot 0,8)/2$	$126,7/10$	67, 33
Q_{KE}	0	$-(20 \cdot 10 \cdot 0,8)/2$	$126,7/10$	- 92,67
$Q_{CH} =$ Q_{HC}	2	0	$(500,81 + 307,69)/12$	67, 375

$Q_{CH} =$ Q_{HC}	2	0	$(500,81 + 307,69)/12$	67,375
$Q_{CB} =$ Q_{BC}	0	0	$-(294,34 + 124,8)/10$	-41,914
$Q_{BA} =$ Q_{AB}	2	0	$124,8/12$	10,4



♣ Biểu đồ lực dọc N_p (Hình 2.6) được suy từ biểu đồ lực cắt Q_p bằng cách xét cân bằng hình chiếu các ngoại lực và nội lực tại các nút E, K, C và B với $\sin\alpha = 0,6$; $\cos\alpha = 0,8$.

♣ Xét cân bằng nút E:

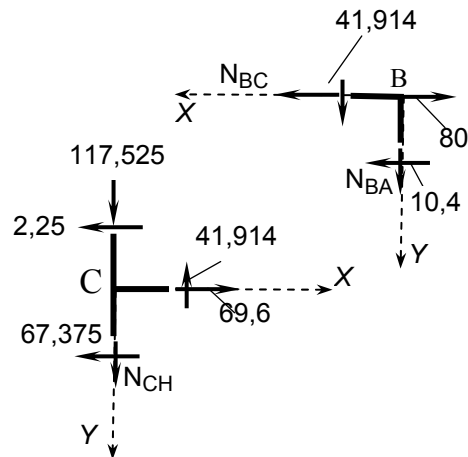
$$\sum X = N_{EK} \cdot 0,8 + 67,33 \cdot 0,6 - 2,25 = 0$$

$$N_{EK} = -47,685 \text{ KN}$$

$$\sum U = N_{ED} \cdot 0,8 + 67,33 - 2,25 \cdot 0,6 = 0$$

$$N_{ED} = -82,475 \text{ KN}$$

♣ Xét cân bằng nút K:



$$\Sigma X = N_{KE} \cdot 0,8 - 92,67 \cdot 0,6 - 2,25 = 0$$

$$\rightarrow N_{KE} = 72,315 \text{ KN}$$

$$\Sigma U = N_{KC} \cdot 0,8 + 2,25 \cdot 0,6 + 92,67 = 0 \quad \rightarrow \quad N_{KC} = - 117,525 \text{ KN}$$

♣ Xét cân bằng nút B:

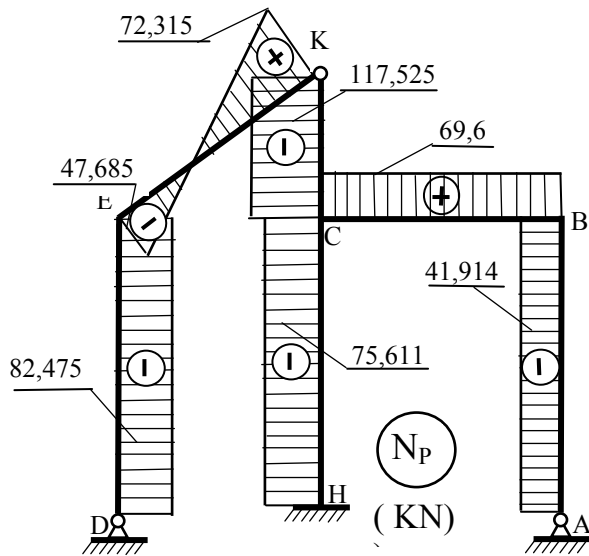
$$\Sigma X = N_{BC} - 80 + 10,4 = 0 \quad \rightarrow \quad N_{BC} = 69,6 \text{ KN}$$

$$\Sigma Y = N_{BA} + 41,914 = 0 \quad \rightarrow \quad N_{BA} = - 41,914 \text{ KN}$$

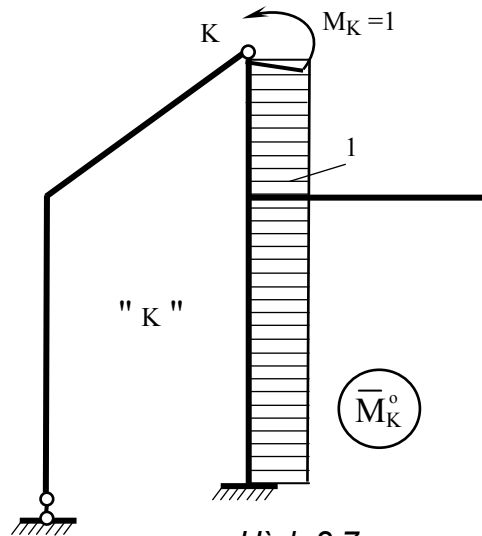
♣ Xét cân bằng nút C:

$$\Sigma X = 69,6 - 67,375 - 2,25 = 0$$

$$\Sigma Y = N_{CH} + 117,525 - 41,914 = 0 \quad \rightarrow \quad N_{CH} = - 75,611 \text{ KN}$$



Hình 2.6



Hình 2.7

1.2. Tính chuyển vị góc xoay tại K:

$$\text{Với } E = 2 \cdot 10^8 \text{ KN/m}^2; J = 10^{-6} \cdot L_1^4 \text{ (m}^4\text{)} = 10^{-6} \cdot 10^4 = 10^{-2} \text{ (m}^4\text{)}$$

1. Lập trạng thái phụ "k" trên hệ tĩnh định được suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bỏ 3 liên kết thừa. Ở đây chúng tôi chọn giống HCB (Hình 2.2).

2. Vẽ biểu đồ mô men ở trạng thái phụ "k" (Hình 2.7).

3. Dùng công thức nhân biểu đồ tính φ_K :

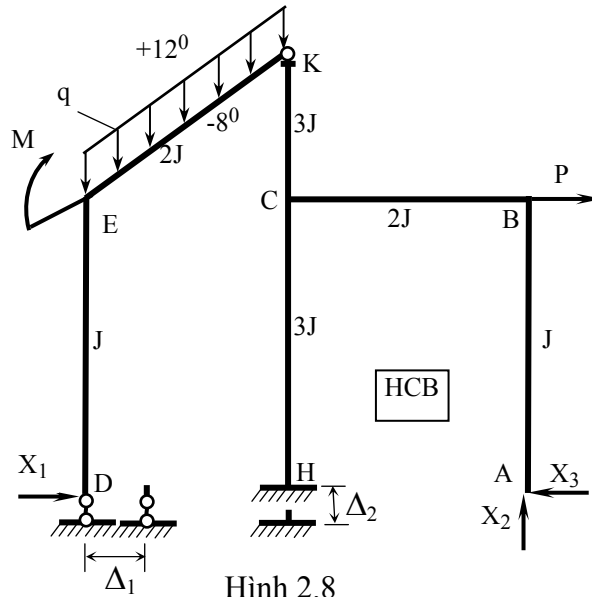
$$\begin{aligned} \varphi_K(P) &= \frac{1}{3EJ} \left(\frac{13,35 \cdot 6}{2} \cdot 1 + \frac{307,69 \cdot 12}{2} - \frac{500,81 \cdot 12}{2} \cdot 1 \right) \\ &= \frac{1}{EJ} (13,35 + 615,38 - 1001,62) = - \frac{372,89}{EJ} \\ &= - \frac{372,89}{2 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4} = - 0,00019 \text{ rad} \end{aligned}$$

Vậy tiết diện K bị xoay một góc 0,00019 rad thuận chiều kim đồng hồ.

2. Tính hệ siêu tĩnh chịu tác dụng đồng thời của ba nguyên nhân (tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ và gối tựa dời chỗ):

2.1. Viết hệ phương trình chính tắc dạng số:

1. Chọn hệ cơ bản giống như trên (Hình 2.8).



Hình 2.8

2. Lập hệ phương trình chính tắc dạng chữ:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{1p} + \Delta_{1t} + \Delta_{1\Delta} = \Delta_1 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \Delta_{2p} + \Delta_{2t} + \Delta_{2\Delta} = 0 \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \Delta_{3p} + \Delta_{3t} + \Delta_{3\Delta} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các số hạng tự do Δ_{kt} và $\Delta_{k\Delta}$:

$$\Delta_{k\Delta} = - \sum \overline{R}_k^i \cdot \Delta_m^i$$

$$\Delta_{kt} = \sum \alpha \cdot t_c \cdot \Omega \overline{N}_K + \sum \pm \alpha \cdot \frac{|\Delta_t|}{h} \cdot \left| \Omega \overline{M}_K \right|$$

Với $\Delta_1 = 0,001 \cdot L_1 = 0,001 \cdot 10 = 0,01 \text{ (m)}$

$\Delta_2 = 0,001 \cdot L_2 = 0,001 \cdot 12 = 0,012 \text{ (m)}$

$t_c = (36 + 28)/2 = 32^0$; $|\Delta_t| = 8^0$; $\alpha = 10^{-5}$; $h = 0,1 \text{ (m)}$

Sử dụng các kết quả tính nội lực đơn vị của thanh xiên EK đã tính ở trên ta

có: $\overline{N}_1 = -1,35 \text{ KN}$; $\overline{N}_2 = \overline{N}_3 = 0$

$$\Delta_{1t} = 10^{-5} \cdot 32(-1,35 \cdot 10) + \frac{10^{-5} \cdot 8}{0,1} \left(\frac{12 \cdot 10}{2} \right) = 4368 \cdot 10^{-5} = 0,044$$

$$\Delta_{2t} = \Delta_{3t} = 0$$

Phản lực đứng tại liên kết H được ghi trong các (Hình 2.3), (Hình 2.4) và (Hình 2.5).

$$\Delta_{1\Delta} = -2,25 \cdot \Delta_2 = -2,25 \cdot 0,012 = -0,027$$

$$\Delta_{2\Delta} = -1 \cdot \Delta_2 = -0,012$$

$$\Delta_{3\Delta} = 0$$

4. Lập hệ phương trình chính tắc dạng số:

$$\begin{cases} 1464 X_1 - 480 X_2 + 240 X_3 + 20880 + (0,044 - 0,027)EJ = 0,01EJ \\ -480 X_1 + 566,67 X_2 - 540 X_3 - 19200 + 0 - 0,012EJ = 0 \\ 240 X_1 - 540 X_2 + 1488 X_3 + 7680 + 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1464 X_1 - 480 X_2 + 240 X_3 + 34880 = 0 \\ 480 X_1 + 566,67 X_2 - 540 X_3 - 43200 = 0 \\ 240 X_1 - 540 X_2 + 1488 X_3 + 7680 = 0 \end{cases} \quad (**)$$

2.2. Trình bày cách tính:

1. Mô men uốn M^{CC} trên hệ siêu tĩnh đã cho do tác dụng đồng thời của 3 nguyên nhân: tải trọng, sự thay đổi nhiệt độ trong thanh xiên EK và sự dãn nở của gối tựa D và H.

♦ Giải hệ phương trình (**) ta được các nghiệm X_1, X_2, X_3

$$\diamond \quad \overline{M}^{CC} = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + \overline{M}_3 X_3 + \overline{M}_p^0$$

♦ Kiểm tra theo điều kiện chuyển vị ta dùng biểu thức:

$$\begin{aligned} \overline{M}^{CC} \times \overline{M}_s &= - \sum_{k=1}^3 \Delta_{kt} - \sum_{k=1}^3 \Delta_{k\Delta} + \text{vế phải của hệ phương trình} \\ &= - \Delta_{1t} - \Delta_{1\Delta} - \Delta_{2\Delta} + \Delta_1 = 0,005 \end{aligned}$$

→ Nếu kết quả nhân biểu đồ thỏa mãn biểu thức trên thì biểu đồ M^{CC} được xem là đúng.

2. Cách tính chuyển vị góc xoay tại K:

◆ Lập trạng thái phụ "k" như trên (*Hình 2.7*)

◆ Tính hệ tĩnh định đã chọn ở trạng thái "k": Xác định phản lực tại D, H; vẽ biểu đồ mô men và xác định lực dọc trong thanh xiên EK.

$$\diamond \varphi_{K(P; t^0; \Delta)} = \overline{M}^{cc} \times \overline{M}_k^0 + \Delta_{kt}^0 + \Delta_{k\Delta}^0$$

Ở đây với trạng thái "k" đã chọn để tính góc xoay tại K ta có phản lực tại gối tựa D; phản lực đứng tại H; và nội lực mô men, lực dọc trong thanh xiên EK bằng 0 nên $\Delta_{kt}^0 = \Delta_{k\Delta}^0 = 0$.

BÀI TẬP LỚN CƠ HỌC KẾT CẤU SỐ 3

TÍNH KHUNG SIÊU TĨNH THEO PHƯƠNG PHÁP
CHUYỂN VỊ VÀ PHƯƠNG PHÁP PHÂN PHỐI MÔ MEN.

BẢNG SỐ LIỆU CHUNG VỀ KÍCH THƯỚC VÀ TẢI TRỌNG

Thứ tự	Kích thước hình học (m)		Tải trọng		
	L ₁	L ₂	q (KN/m)	P (KN)	M (KNm)
1	8	12	30	80	150
2	10	8	40	100	120
3	12	10	50	120	100
4	8	10	20	100	150
5	10	12	40	80	150
6	12	8	30	120	120
7	8	8	50	100	150
8	10	10	20	80	100
9	12	12	40	120	150
10	10	12	30	100	120

YÊU CẦU VÀ THỨ TỰ THỰC HIỆN:

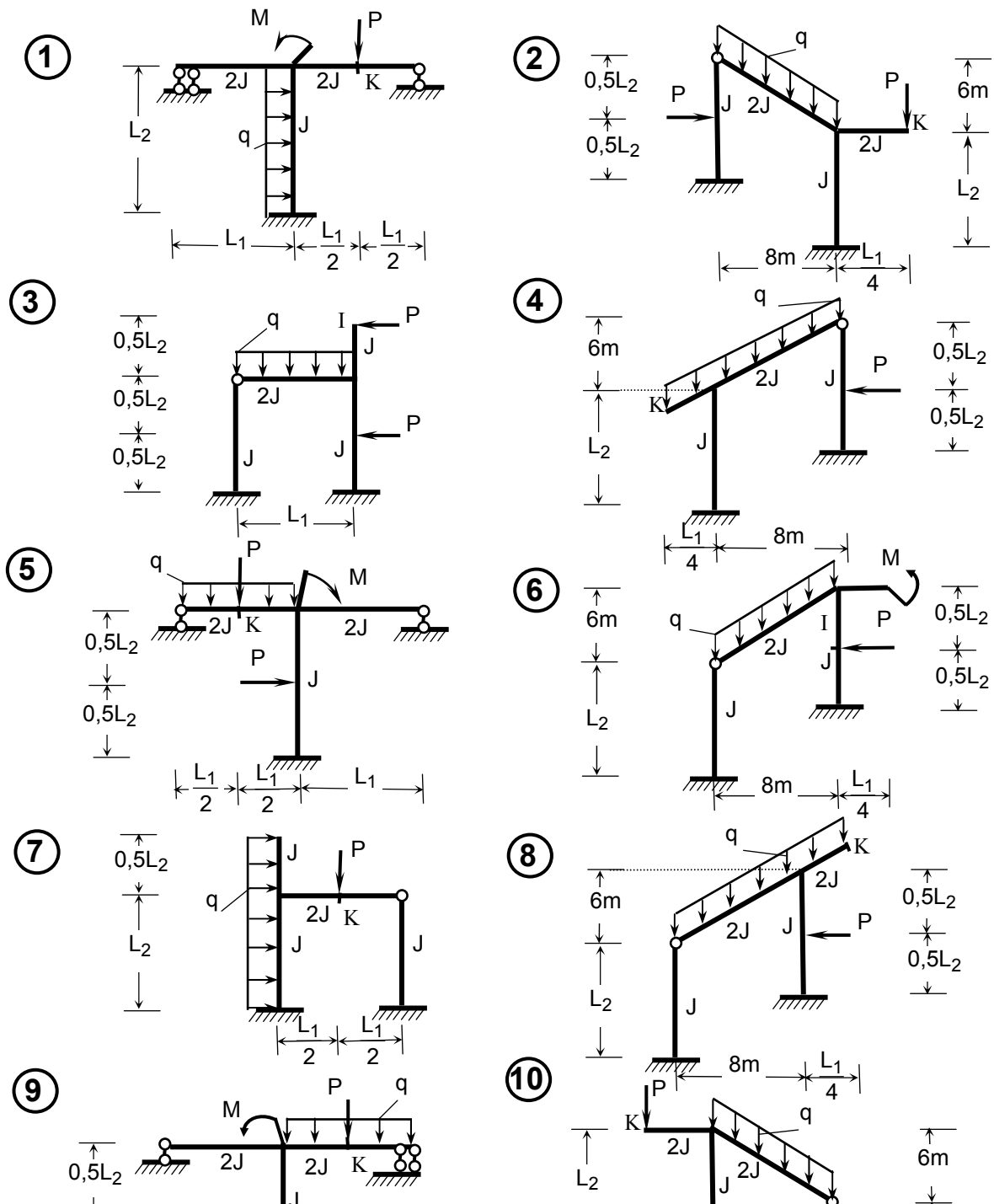
1. Vẽ biểu đồ mô men uốn M_p của khung siêu tĩnh đã cho theo phương pháp chuyển vị.
2. Vẽ biểu đồ mô men uốn M_p của khung siêu tĩnh đã cho theo phương pháp phân phối mô men.
3. Vẽ biểu đồ lực cắt Q_p , lực dọc N_p trên hệ siêu tĩnh đã cho.
4. Xác định chuyển vị ngang của điểm I hoặc góc xoay của tiết diện K.

Biết: $E = 2 \cdot 10^8 \text{ (KN/m}^2\text{)}$; $J = 10^{-6} \cdot L_1^4 \text{ (m}^4\text{)}$.

Chú ý:

1. Vẽ xong biểu đồ mô men uốn M_p cần kiểm tra cân bằng các nút và cân bằng hình chiếu cho các biểu đồ lực cắt Q_p , lực dọc N_p .
2. Cần so sánh kết quả tính nội lực giữa hai phương pháp.
3. Cần hiểu rõ ý nghĩa của công thức tính chuyển vị và cách lập trạng thái phụ "k" để tính chuyển vị.

SƠ ĐỒ TÍNH KHUNG SIÊU TĨNH
(Bài tập lớn số 3)



VÍ DỤ THAM KHẢO

Đề bài:

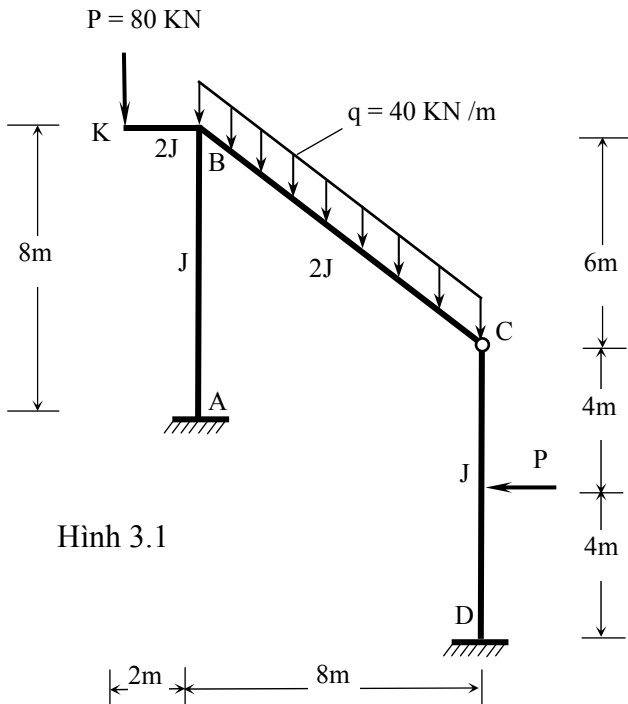
Số đề: 10. 7. 5

10 ☞ Số thứ tự của sơ đồ kết cấu

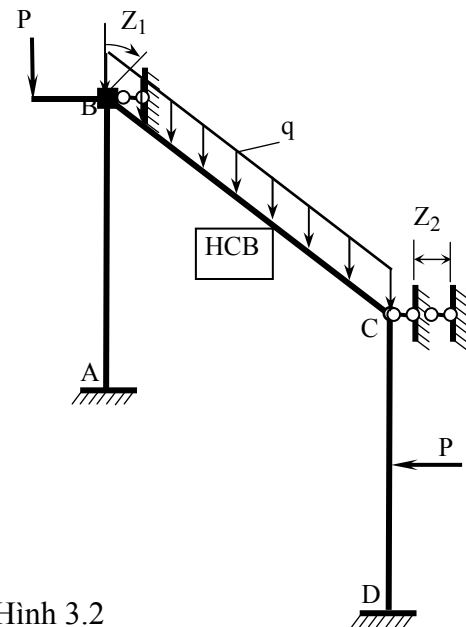
7 ☞ Số liệu về kích thước hình học (hàng thứ 7): $L_1 = 8 \text{ m}$; $L_2 = 8 \text{ m}$.

5 ☞ Số liệu về tải trọng (hàng thứ 5): $q = 40 \text{ KN/m}$; $P = 80 \text{ KN}$.

Với các số liệu đã cho, sơ đồ tính của kết cấu được vẽ lại như sau (Hình 3.1):



Hình 3.1



Hình 3.2

Trình tự tính toán:

1. Dùng phương pháp chuyển vị vẽ biểu đồ mô men uốn M_p do tải trọng tác dụng trên hệ siêu tĩnh đã cho:

1.1. Xác định số ẩn số:

$$n = n_g + n_t = 1 + 1 = 2.$$

1.2. Lập hệ cơ bản (HCB):

Thêm vào nút B một liên kết mô men và một liên kết lực, tương ứng với chúng là các ẩn chuyển vị Z_1 và Z_2 (Hình 3.2).

1.3. Lập hệ phương trình chính tắc:

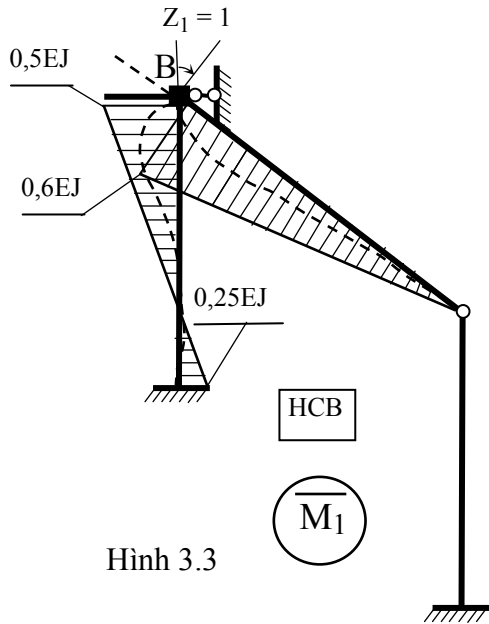
$$\begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + R_{1p} = 0 \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2p} = 0 \end{cases}$$

1.4. Dùng bảng tra vẽ các biểu đồ đơn vị: \overline{M}_1 , \overline{M}_2 và \overline{M}_p^0 lần lượt các ẩn $Z_1 = 1$ (Hình 3.3), $Z_2 = 1$ (Hình 3.4) và tải trọng (Hình 3.5) gây ra trên HCB.

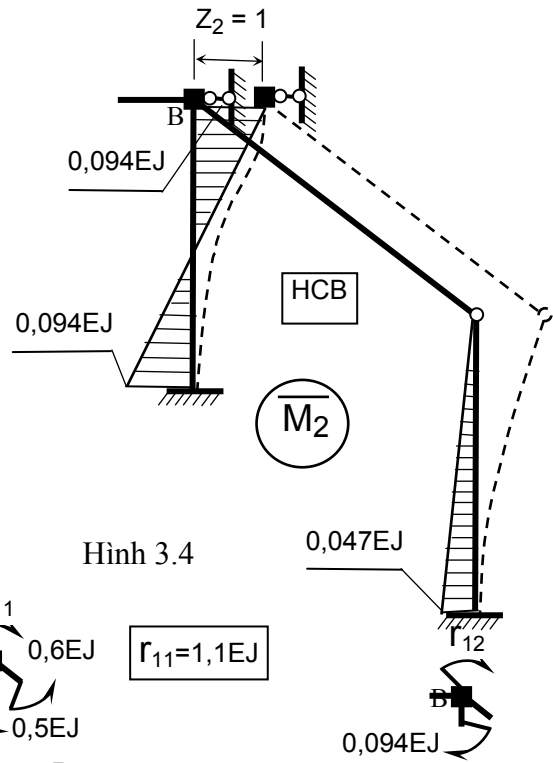
1.5. Tính các hệ số: r_{11} ; r_{12} ; r_{22} và các số hạng tự do R_{1p} ; R_{2p} :

+ Tách nút B ở các biểu đồ, \overline{M}_1 , \overline{M}_2 và \overline{M}_p^0 xét cân bằng về mô men để xác định các phản lực mô men r_{11} , r_{12} và R_{1p} trong liên kết mô men được thêm vào B trên HCB.

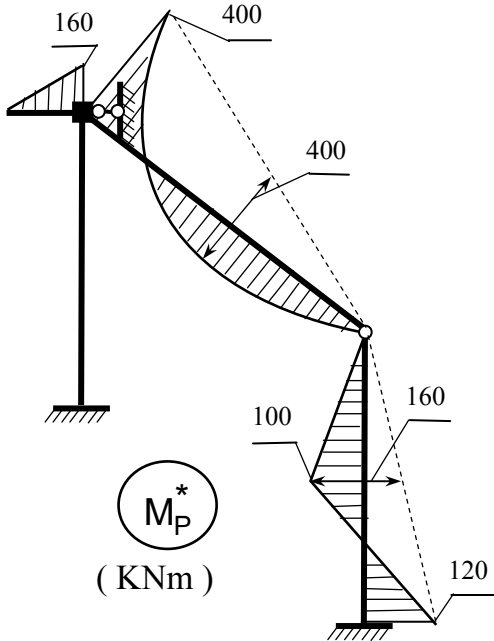
+ Xét cân bằng về lực của thanh BC ở biểu đồ \overline{M}_2 và \overline{M}_p^0 để xác định các phản lực thẳng r_{22} và R_{2p} trong liên kết lực được thêm vào B trên HCB.



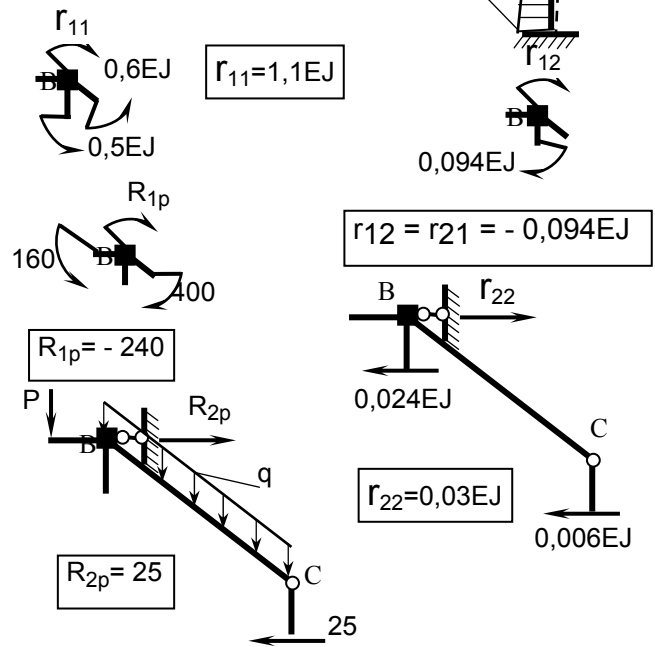
Hinh 3.3



Hinh 3.4



Hinh 3.5



1.6. Giải hệ phương trình chính tắc:

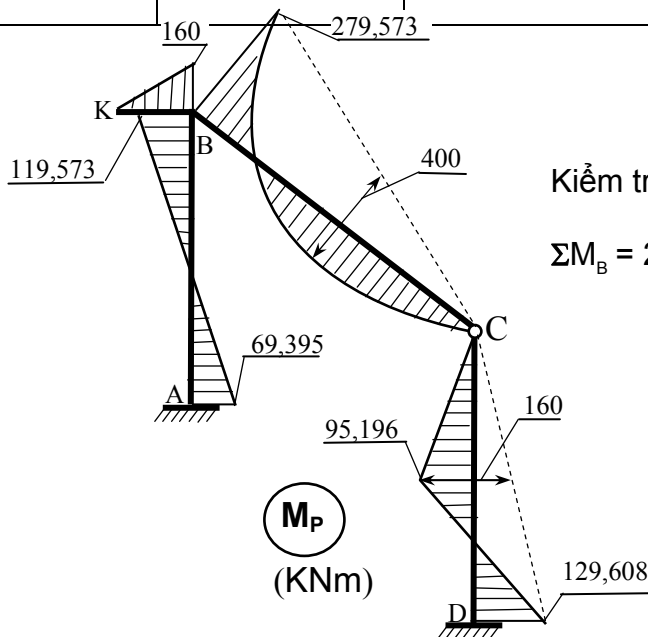
$$\begin{cases} 1,1EJ Z_1 - 0,094EJ Z_2 - 240 = 0 \\ - 0,094EJ Z_1 + 0,03EJ Z_2 + 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = 200,712/EJ \\ Z_2 = - 204,436/EJ \end{cases}$$

1.7. Vẽ biểu đồ mô men trên hệ siêu tĩnh đã cho (Hình 3.6):

$$M_p = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + M_p^o$$

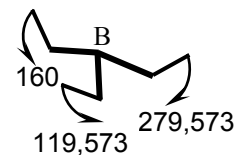
Khi cộng các biểu đồ ta cần phải có sự thống nhất chung về dấu của các nội lực giữa các biểu đồ. Để đỡ nhầm lẫn ta có thể tự qui ước $M > 0$ khi căng dưới với các thanh ngang; căng phải với các thanh đứng và ngược lại. Ở đây chúng tôi lập bảng tính mô men tại các đầu thanh với qui ước: người quan sát đứng ở trong khung khi đó $M > 0$ căng về phía người quan sát và $M < 0$ căng về phía ngược lại.

Đầu thanh	$\bar{M}_1 \cdot Z_1$	$\bar{M}_2 \cdot Z_2$	M_p	M_p
MBK	0	0	- 160	- 160
MBA	- 100,356	- 19,217	0	- 119,573
MBC	120,427	0	- 400	- 279,573
MAB	50,178	19,217	0	69,395
MDC	0	- 9,608	-120	- 129,608



Kiểm tra cân bằng nút B về mô men:

$$\Sigma M_B = 279,573 - 119,573 - 160 = 0$$



Hình 3.6

2. Dùng phương pháp phân phối mô men (PPMM) vẽ biểu đồ mô men uốn M_p :

Hệ siêu tĩnh đã cho có một nút cứng B có chuyển vị thẳng, trình tự tính như sau:

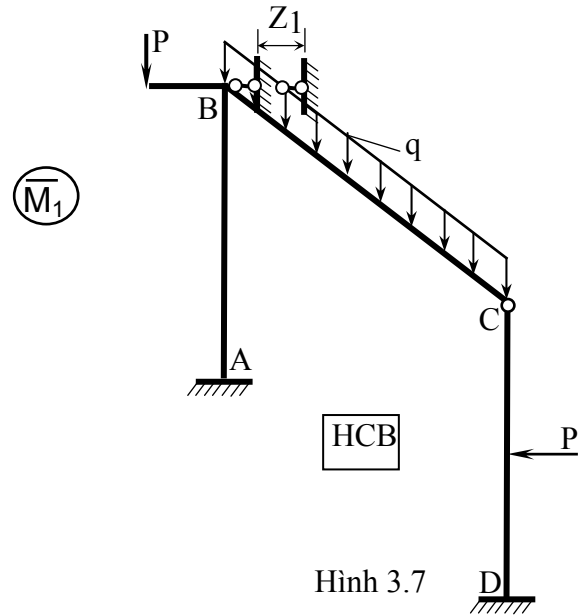
2.1. Xác định số ẩn số: $n = n_t = 1$.

2.2. Lập hệ cơ bản (HCB) (Hình 3.7).

2.3. hệ phương trình chính tắc:

$$r_{11} Z_1 + R_{1p} = 0$$

2.4. biểu đồ đơn vị \overline{M}_1 do $Z_1 = 1$ gây ra trên HCB (Hình 3.8). Khác với phương pháp chuyển vị ở đây mô men tại nút B đã cân bằng sau khi thực hiện sơ đồ PPMM (Hình 3.8).



♣ Xác định độ cứng đơn vị qui ước ρ_{kj} :

$$\rho_{BA} = i_{BA} = 0,125EJ;$$

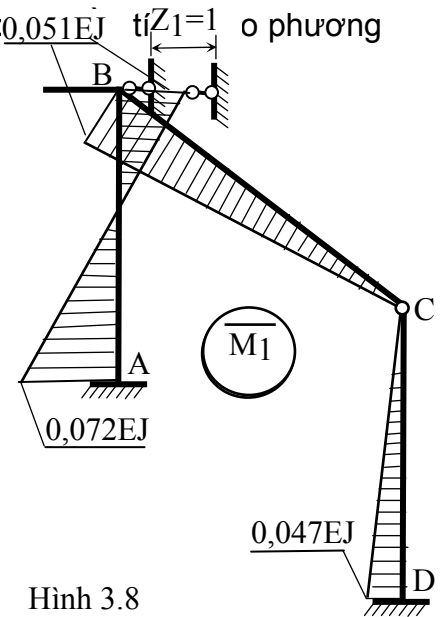
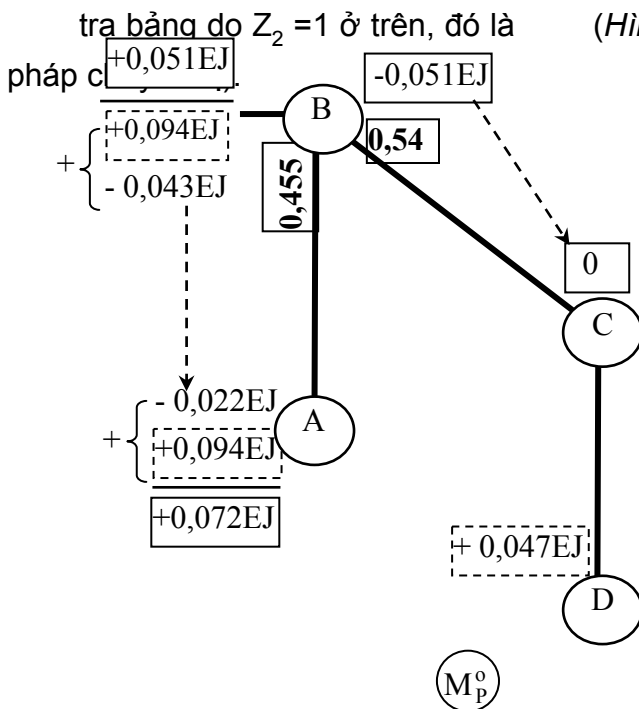
$$\rho_{BC} = \frac{3}{4} i_{BC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2EJ}{10} = 0,15EJ$$

♣ Xác định các hệ số phân phối mô men μ_{kj} :

$$\mu_{BA} = \frac{0,125EJ}{0,125EJ + 0,15EJ} = 0,455; \quad \mu_{BC} = \frac{0,15EJ}{0,125EJ + 0,15EJ} = 0,545$$

♣ Kiểm tra các hệ số PPMM: $\sum \mu_{Bj} = \mu_{BA} + \mu_{BC} = 0,455 + 0,545 = 1$

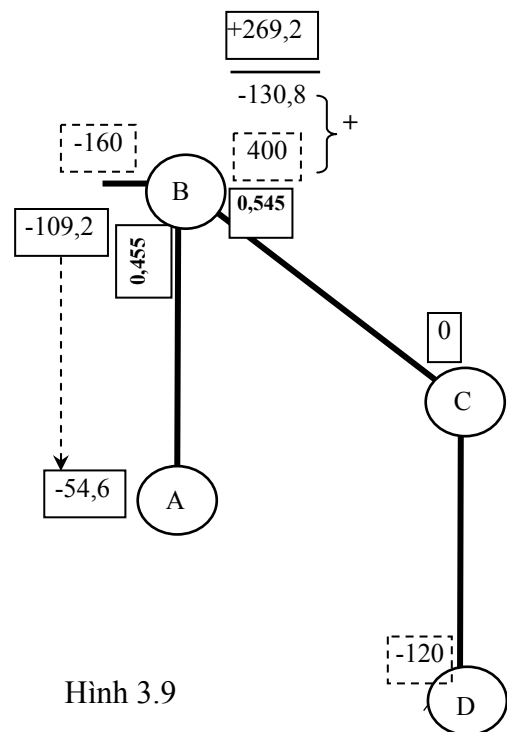
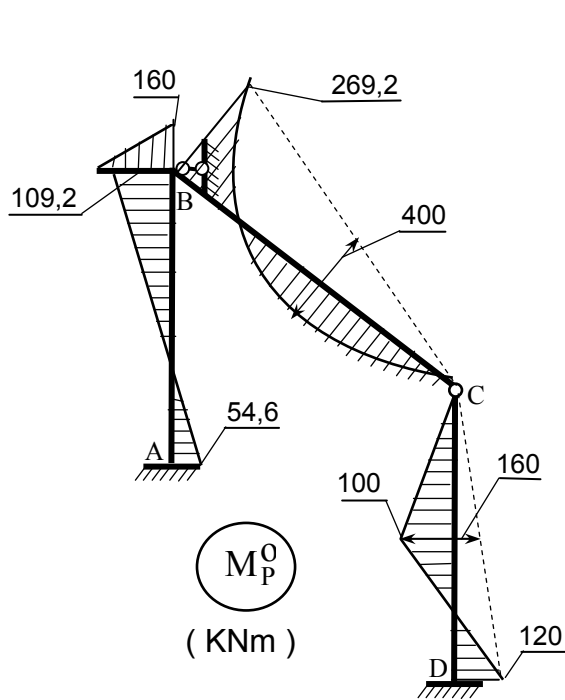
♣ Lập sơ đồ PPMM để vẽ (Hình 3.8): Ở đây chúng tôi sử dụng kết quả biểu đồ tra bảng do $Z_2 = 1$ ở trên, đó là (Hình 3.4) trục $Z_1 = 1$ ở phương



Hình 3.8

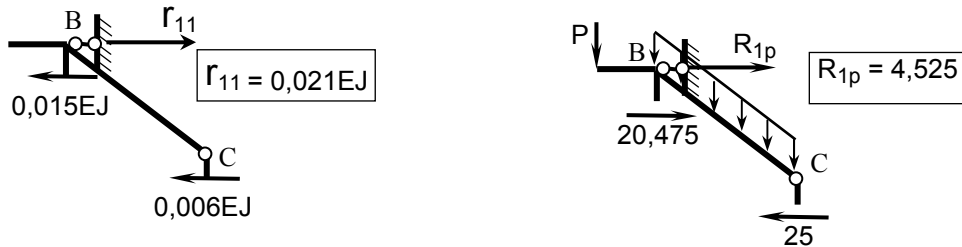
♣ Lập sơ đồ PPMM để vẽ (Hình 3.9)

Sử dụng kết quả biểu đồ tra bảng do tải trọng tác dụng ở trên, đó là M_p^0 (Hình 3.5) trong phần tính theo phương pháp chuyển vị.



Hình 3.9

2.5. Xác định các hệ số của phương trình chính tắc:



2.6. Giải phương trình chính tắc:

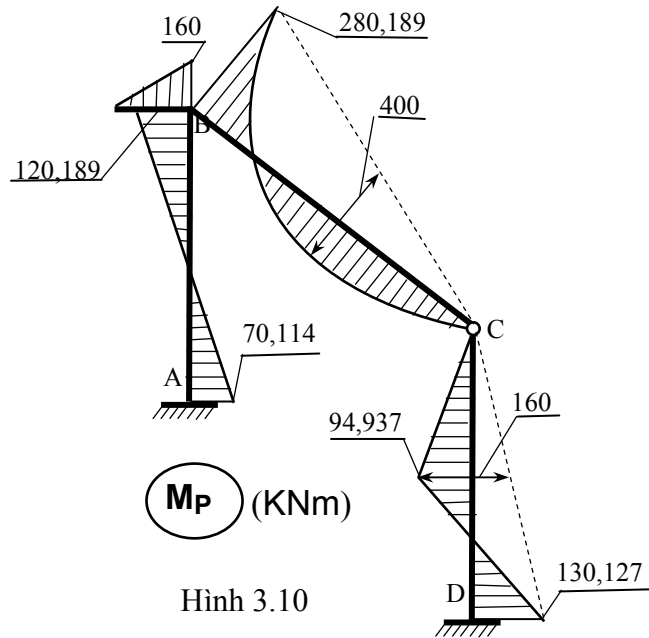
$$0,021EJ \cdot Z_1 + 4,525 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Z_1 = - 215,476/EJ$$

2.7. Vẽ biểu đồ mô men trên hệ siêu tĩnh: (Hình 3.10).

$$\textcircled{M_p} = \textcircled{\bar{M}_1} \cdot Z_1 + \textcircled{M_p^0}$$

Lập bảng tính các mô men tại các đầu thanh với qui ước: người quan sát đứng ở trong khung; $M > 0$ căng về phía người quan sát; $M < 0$ căng về phía ngược lại. Sau đó so sánh kết quả tính M_p giữa phương pháp chuyển vị và phương pháp phân phối mô men (sai số kết quả tính giữa 2 phương pháp được ghi trong bảng).

Đầu thanh	$\bar{M}_1 \cdot Z_1$	M_p^0	M_p	Sai số giữa hai PP
M_{BK}	0	- 160	- 160	0%
M_{BA}	- 10,989	- 109,2	- 120,189	0,5%
M_{BC}	- 10,989	- 269,2	- 280,189	0,22%
M_{AB}	15,514	54,6	70,114	0,1%
M_{DC}	- 10,127	-120	- 130,127	0,4%



Hình 3.10

3. Vẽ biểu đồ lực cắt Q_p và biểu đồ lực dọc N_p :

3.1 Biểu đồ lực cắt Q_p (Hình 3.11) được suy ra từ biểu đồ M_p . Ở đây chúng tôi dùng kết quả tính M_p theo phương pháp chuyển vị (Hình 3.6) để tính lực cắt tại các đầu thanh dựa vào mối liên hệ vi phân giữa M và Q :

3.2. Dùng công thức:

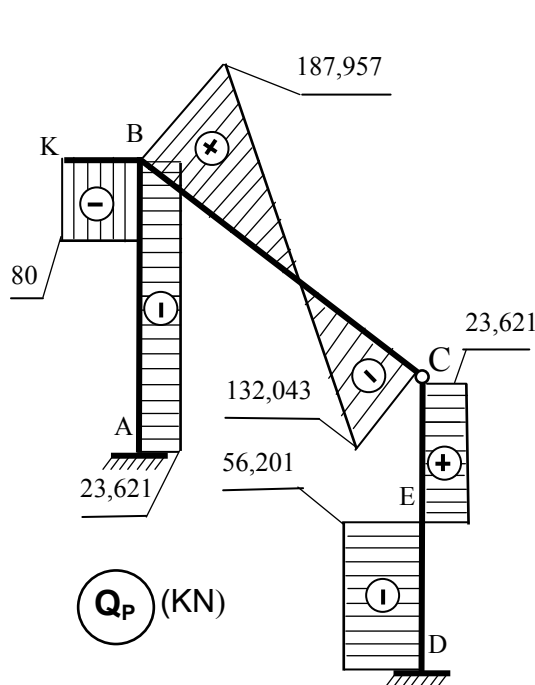
$$Q_{AB} = Q_{AB}^0 \pm \frac{|\Delta M|}{L} \qquad Q_{BA} = Q_{BA}^0 \pm \frac{|\Delta M|}{L}$$

Kết quả tính lực cắt tại các đầu thanh được ghi trong bảng sau:

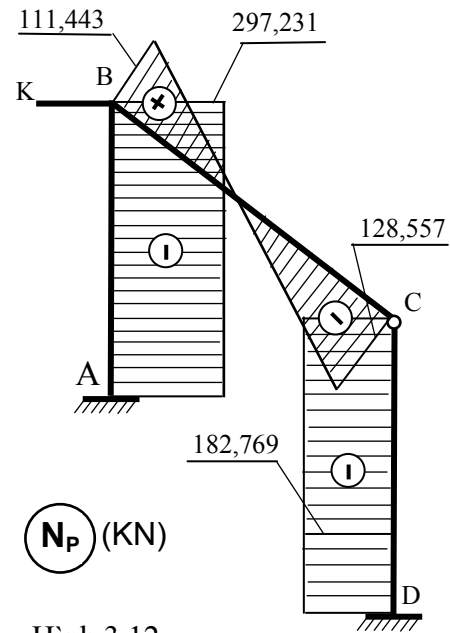
Đầu thanh	L(m)	Q_{AB}^0	$\pm \frac{ \Delta M }{L}$	Q_p
Q_{BK} $= Q_{KB}$	2	0	$-(160 - 0)/2$	- 80
Q_{AB} $= Q_{BA}$	8	0	$-(69,395+119,573)/8$	- 23,621

Q_{BC}	10	$(40 \cdot 10 \cdot 0,8)/2$	$279,573/10$	187,957
Q_{CB}	10	$-(40 \cdot 10 \cdot 0,8)/2$	$279,573/10$	-132,043
Q_{CE} $= Q_{EC}$	4	0	$95,196/4$	23,799
Q_{ED} $= Q_{DE}$	4	0	$-(129,608 + 95,196)/4$	-56,201

3.3. Biểu đồ lực dọc N_p (Hình 3.12) được suy từ biểu đồ lực cắt Q_p bằng cách xét cân bằng hình chiếu các nội lực và ngoại lực tại các nút B và C với $\sin \alpha = 0,6$; $\cos \alpha = 0,8$.



Hình 3.11



Hình 3.12

♣ Xét cân bằng nút B:

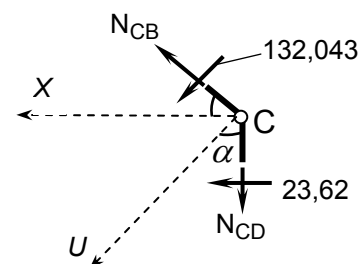
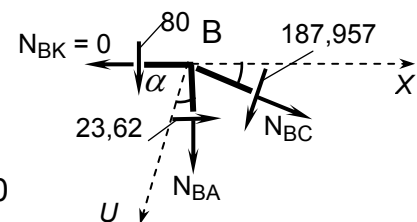
$$\sum X = N_{BC} \cdot 0,8 - 187,957 \cdot 0,6 + 23,62 = 0$$

$$N_{BC} = 111,443 \text{ KN}$$

$$\sum U = N_{BA} \cdot 0,8 + 187,957 + 80 \cdot 0,8 - 23,62 \cdot 0,6 = 0$$

$$\rightarrow N_{BA} = -297,183 \text{ KN}$$

♣ Xét cân bằng nút C:



$$\sum X = N_{CB} \cdot 0,8 + 132,043 \cdot 0,6 + 23,62 = 0$$

$$N_{CB} = -128,557 \text{ KN}$$

$$\sum U = N_{CD} \cdot 0,8 + 23,62 \cdot 0,6 + 132,043 = 0$$

$$N_{CD} = -182,769 \text{ KN}$$

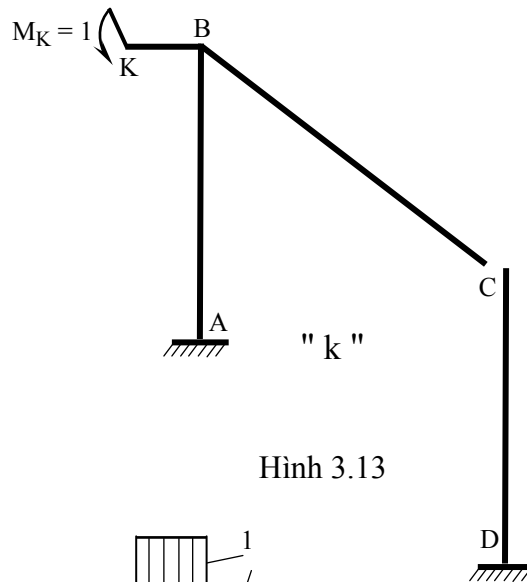
4. Tính chuyển vị góc xoay tại K:

Với $E = 2 \cdot 10^8 \text{ KN/m}^2$;

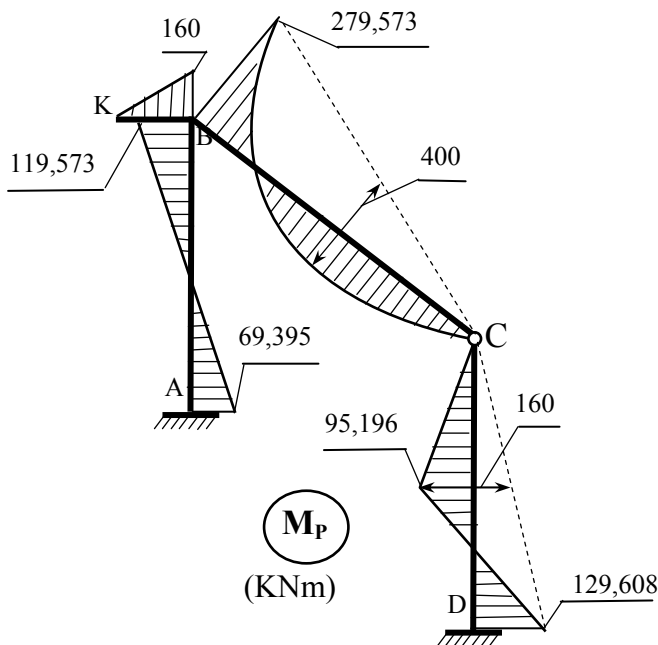
$$J = 10^{-6} \cdot L_1^4 \text{ (m}^4\text{)} = 4096 \cdot 10^{-6} \text{ (m}^4\text{)}$$

4.1. Lập trạng thái phụ "k" trên hệ tĩnh định được suy ra từ hệ siêu tĩnh đã cho bằng cách loại bỏ liên kết khớp tại C (Hình 3.13).

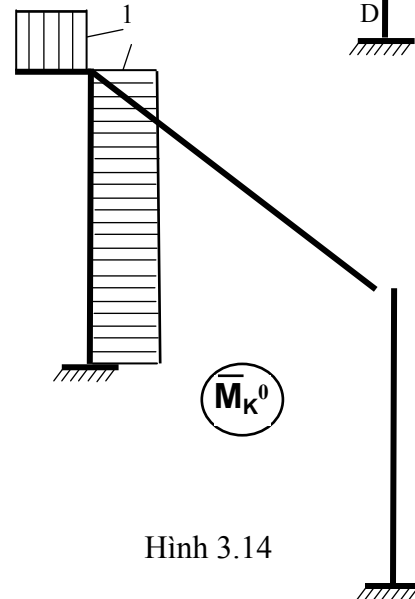
4.2. Vẽ biểu đồ mô men ở trạng thái phụ "k" (Hình 3.14).



Hình 3.13



Hình 3.6



Hình 3.14

4.3. Dùng công thức nhân biểu đồ tính φ_K :

$$\varphi_{K(P)} = \textcircled{M_P} \times \textcircled{\overline{M}_K} = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{160 \cdot 2}{2} \cdot 1 \right) + \frac{1}{EJ} \left[\frac{69,395 \cdot 8}{2} \cdot 1 - \frac{19,573 \cdot 8}{2} \cdot 1 \right]$$

$$\varphi_{K(P)} = - 0,00015 \text{ rad}$$

Vậy tiết diện K sẽ bị xoay một góc 0,00015 rad thuận chiều kim đồng hồ.

Phụ lục: Mẫu Trang bìa

TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦY LỢI HÀ NỘI
BỘ MÔN SỨC BỀN - CƠ KẾT CẤU

BÀI TẬP LỚN
SỐ

TÍNH HỆ TÍNH ĐỊNH

Số đề : 4 . 5 . 3

Họ và tên sinh viên :
Lớp :
Người hướng dẫn :

Hà Nội -2006

MỤC LỤC

	Trang
Lời giới thiệu	3
Các yêu cầu chung	4
Phần I:	
SỨC BỀN VẬT LIỆU	
Bài tập lớn số 1:	
Đặc trưng hình học của hình phẳng	
Bảng số liệu	7
Ví dụ tham khảo	11
Bài tập lớn số 2:	
Tính dầm thép	
Bảng số liệu	18
Ví dụ tham khảo	23
Bài tập lớn số 3:	
Tính cột chịu lực phức tạp	
Bảng số liệu	37
Ví dụ tham khảo	41
Bài tập lớn số 4:	
Tính dầm trên nền đàn hồi	
Bảng số liệu	49
Ví dụ tham khảo	53
Phần II:	

CƠ HỌC KẾT CẤU

Bài tập lớn số 1:

Tính hệ thanh phẳng tĩnh định

Bảng số liệu	65
Ví dụ tham khảo	68

Bài tập lớn số 2:

Tính khung siêu tĩnh theo phương pháp lực

Bảng số liệu	81
Ví dụ tham khảo	84

Bài tập lớn số 3:

Tính khung siêu tĩnh theo phương pháp chuyển vị

Và phương pháp phân phối mô men

Bảng số liệu	96
Ví dụ tham khảo	98

Phụ lục	108
----------------	-----

Mục lục	109
----------------	-----

BÀI GIẢNG CƠ HỌC KẾT CẤU

PHẦN MỞ ĐẦU

PGS. TS. ĐỖ KIẾN QUỐC
KHOA KỸ THUẬT XÂY DỰNG

1. KHÁI NIỆM MÔN HỌC

❖ **Định nghĩa:**

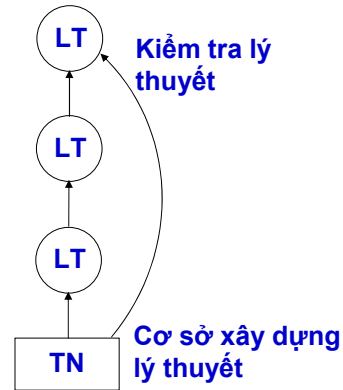
Cơ học kết cấu (CHKC) là môn khoa học Lý thuyết – Thực nghiệm trình bày các phương pháp tính toán kết cấu về độ bền, độ cứng và độ ổn định do các nguyên nhân khác nhau: tải trọng, nhiệt độ, lún, chế tạo không chính xác.

1. KHÁI NIỆM MÔN HỌC (TT)

❖ Phương pháp nghiên cứu:

Lý thuyết – Thực nghiệm:

- Lý thuyết (LT): dự báo khả năng làm việc của kết cấu.
- Thực nghiệm (TN): phát hiện tính chất vật liệu và kiểm tra lý thuyết.



1. KHÁI NIỆM MÔN HỌC (TT)

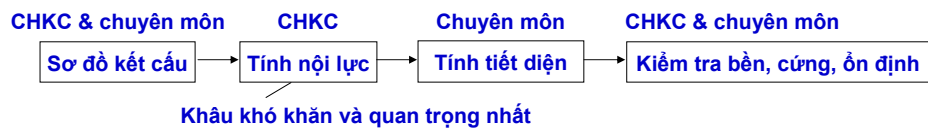
❖ Nhiệm vụ chủ yếu:

Xây dựng các phương pháp tính toán nội lực, làm cơ sở để kiểm tra các điều kiện bền, cứng và ổn định (hiện đại: tuổi thọ, độ tin cậy).

1. KHÁI NIỆM MÔN HỌC (TT)

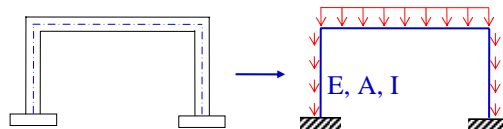
❖ Vị trí môn học:

Quá trình thiết kế công trình bao gồm:



2. SƠ ĐỒ TÍNH CỦA CÔNG TRÌNH

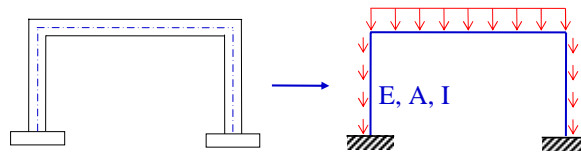
❖ **Sơ đồ tính** = Sơ đồ công trình + các giả thiết đơn giản hoá.



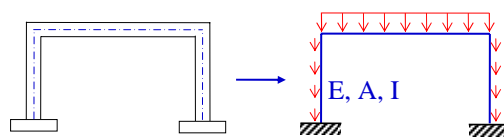
2. SƠ ĐỒ TÍNH CỦA CÔNG TRÌNH

❖ Các giả thiết gồm:

- Thay thanh bằng trục thanh; bản & vỏ bằng mặt trung gian.
- Tiết diện → E, A, I
- Liên kết → Lý tưởng (không ma sát, cứng, đàn hồi...).
- Tải trọng đưa về trục thanh.
- Thêm giả thiết phụ nếu cần (nút khớp, tường gạch, sàn bê tông...).



2. SƠ ĐỒ TÍNH CỦA CÔNG TRÌNH (TT)

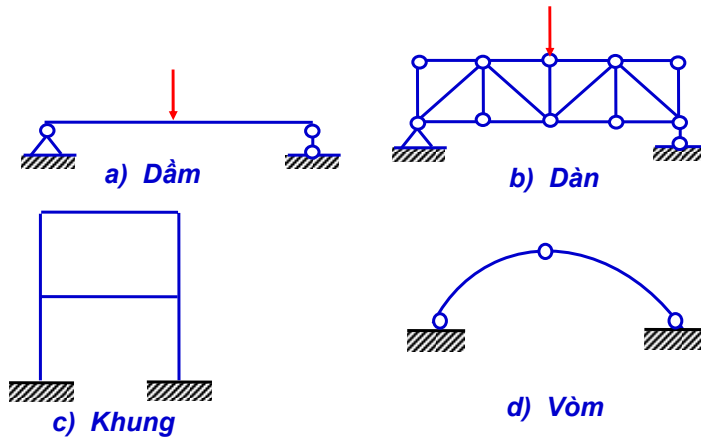


Hình 1

- ### ❖ Lưu ý: Lực chọn sơ đồ tính cần phản ánh tốt sự làm việc của công trình thật và phù hợp với khả năng tính toán.

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH

❖ Theo sơ đồ tính:



3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH (TT)

❖ Theo sơ đồ tính (tt):

▪ **Hệ phẳng**: cấu kiện và lực đều nằm trong mặt phẳng.

▪ **Hệ không gian**: Không phẳng

Trong thực tế chủ yếu là hệ không gian: dầm trục giao, dàn không gian, kết cấu tám vò ...thí dụ: nhà cao tầng, cầu, dàn khoang...Nhiều bài toán không gian khi tính toán được đưa về sơ đồ hệ phẳng.

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH (TT)

❖ Theo phương pháp tính nội lực

➤ Phương pháp lực:

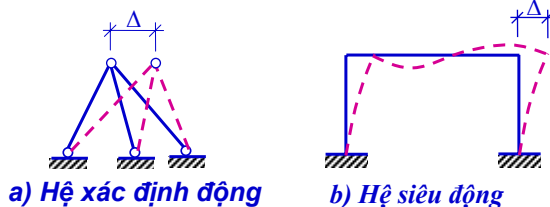
- **Hệ tĩnh định:** chỉ dùng phương trình cân bằng là đủ để tìm nội lực.
- **Hệ siêu tĩnh:** phải bổ sung điều kiện hình học (chuyển vị, biến dạng)

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH (TT)

❖ Theo phương pháp tính nội lực (tt)

➤ Phương pháp chuyển vị:

- **Hệ xác định động:** xác định được biến dạng của các phần tử thuộc hệ chỉ từ điều kiện động học khi hệ bị chuyển vị cưỡng bức.
- **Hệ siêu động:** khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ dùng điều kiện động học (hình học) thì không đủ xác định biến dạng của các phần tử.



4. CÁC NGUYÊN NHÂN GÂY NỘI LỰC VÀ CHUYỂN VỊ

❖ **Tài trọng:**

Gây ra nội lực, chuyển vị cho mọi hệ. Một số cách phân loại:

- Theo vị trí :
 - bất động
 - di động
- Theo tính chất tác dụng:
 - *tĩnh*: gia tốc nhỏ, bỏ qua lực quán tính khi xét cân bằng.
 - *động*: phải xét đến lực quán tính trong phương trình cân bằng.
- Theo khả năng nhận biết:
 - tiên định: $P = P(t)$
 - ngẫu nhiên: chỉ biết theo qui luật xác suất

4. CÁC NGUYÊN NHÂN GÂY NỘI LỰC VÀ CHUYỂN VỊ (TT)

❖ **Nhiệt độ**

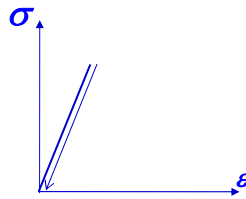
❖ **Lún**

Hai nguyên nhân này gây nội lực, chuyển vị trong hệ siêu tĩnh, nhưng chỉ gây chuyển vị trong hệ tĩnh định.

5. CÁC GIẢ THIẾT VÀ NGUYÊN LÝ CỘNG TÁC DỤNG

❖ Các giả thiết nhằm đơn giản hoá tính toán:

1- Vật liệu đàn hồi tuân theo định luật Hooke.

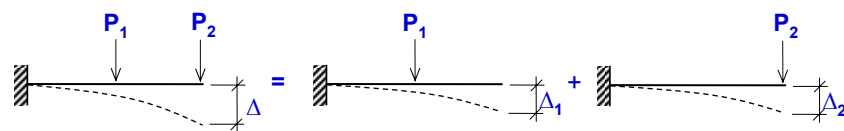


5. CÁC GIẢ THIẾT VÀ NGUYÊN LÝ CỘNG TÁC DỤNG

❖ Các giả thiết nhằm đơn giản hoá tính toán (tt):

2- Biến dạng và chuyển vị bé (được dùng như khái niệm vô cùng bé trong toán học). Cho phép dùng sơ đồ không biến dạng. Dùng được các xấp xỉ: $\sin\varphi \approx \tan\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi = 1$

Từ đó dẫn tới nguyên lý cộng tác dụng:



$$\Delta(P_1, P_2) = \Delta(P_1) + \Delta(P_2)$$

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



The prestressed concrete girders are simply supported and are used for this highway bridge.

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



FIGURE 3.15 Thomas Jenkins's U.S. Naval Academy Bridge over the Severn River.

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



MỞ ĐẦU

19

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



MỞ ĐẦU

20

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



MỞ ĐẦU

21

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



MỞ ĐẦU

22

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



Pratt

(a)



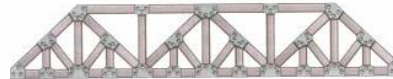
Baltimore

(e)



Howe

(b)



subdivided Warren

(f)



Warren (with verticals)

(c)



K-truss

(g)

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



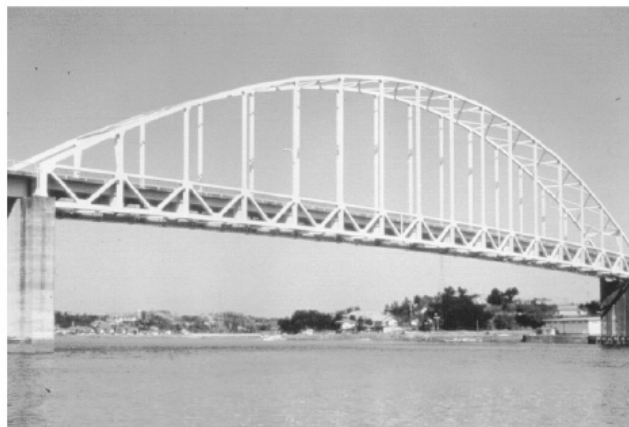
3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



MỞ ĐẦU

25

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



MỞ ĐẦU

26

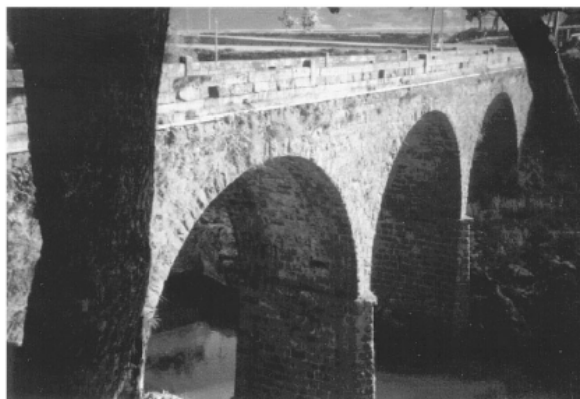
3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



MỞ ĐẦU

27

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



MỞ ĐẦU

28

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



Figure 14. Tied Arch Bridge.

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH

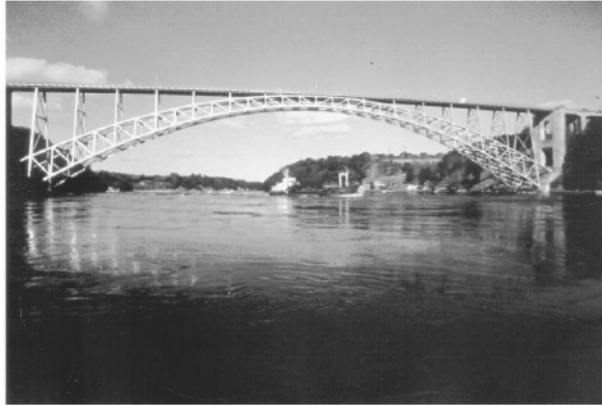


FIGURE 65.14 Sakai Bridge.

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH

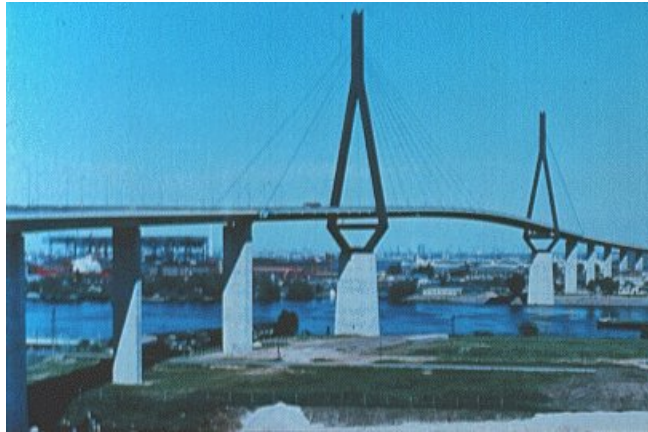


FIGURE 3.4 One of Jorg Schlaich's footbridges.

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



MỞ ĐẦU

35

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



MỞ ĐẦU

36

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



FIGURE 65.19 Kanmon Bridge.

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



FIGURE 3.5 The Sunshine Skyway.



FIGURE 3.6 Christian Meiss's Sannberg Bridge.

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



MỞ ĐẦU

39

3. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH



FIGURE 65.38 Shimotsu-Seto Bridge.

MỞ ĐẦU

40

BÀI GIẢNG CƠ HỌC KẾT CẤU

CHƯƠNG 1

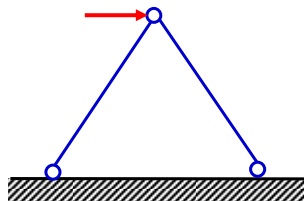
CẤU TẠO HÌNH HỌC CỦA HỆ PHẪNG

PGS. TS. ĐỖ KIẾN QUỐC
KHOA KỸ THUẬT XÂY DỰNG

1.1 CÁC KHÁI NIỆM

1. Hệ bất biến hình (BBH)

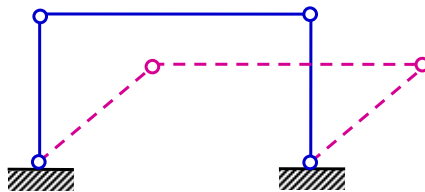
- **Định nghĩa:** Hệ BBH là hệ khi chịu tải trọng bất kì vẫn giữ được hình dáng ban đầu nếu bỏ qua biến dạng đàn hồi.
- **Tính chất:** có khả năng chịu lực trên hình dáng ban đầu đáp ứng được yêu cầu sử dụng.



1.1 CÁC KHÁI NIỆM (TT)

2. Hệ biến hình (BH)

- **Định nghĩa:** là hệ khi chịu tải trọng *bất kì* sẽ thay đổi hình dáng hữu hạn nếu coi các phần tử cứng tuyệt đối.
- **Tính chất:** Không có khả năng chịu lực bất kì trên hình dạng ban đầu → không dùng được như là 1 kết cấu.



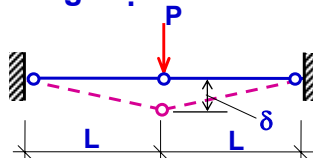
1.1 CÁC KHÁI NIỆM (TT)

3. Hệ biến hình tức thời (BH TT)

- **Định nghĩa:** là hệ thay đổi hình dáng hình học vô cùng bé nếu coi các phần tử cứng tuyệt đối (chính xác hơn: bỏ qua lượng thay đổi vô cùng bé bậc cao).

Thí dụ: với hình bên ta có độ dãn dài $\Delta L = \frac{\delta^2}{2L}$
= VCB bậc cao ≈ 0 .

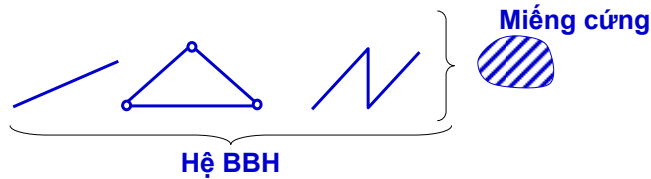
- **Tính chất:** kết cấu mềm, nội lực rất lớn, nên không dùng trong thực tế.



1.1 CÁC KHÁI NIỆM (TT)

4. Miếng cứng (MC)

- Định nghĩa: MC là hệ phẳng BBH.
- Thí dụ:



- Ý nghĩa: giúp khảo sát tính chất hình học của 1 hệ phẳng dễ dàng hơn (chỉ quan tâm tính chất cứng, không quan tâm cấu tạo chi tiết).

1.1 CÁC KHÁI NIỆM (TT)

5. Bậc tự do (BTD)

- Bậc tự do của 1 hệ là số thông số độc lập đủ xác định vị trí 1 hệ so với mốc cố định.
- Bậc tự do của 1 hệ là số chuyển vị khả dĩ độc lập so với mốc cố định.

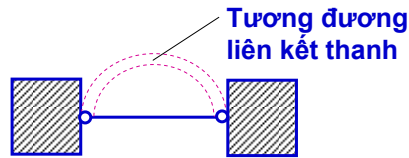
Trong mặt phẳng, 1 điểm có 2 BTD (2 chuyển vị thẳng), 1 m/c có 3 BTD (2 chuyển vị thẳng, 1 góc xoay).

Hệ BBH là hệ có BTD bằng 0, hệ BH có BTD khác 0. Vì vậy, khái niệm BTD có thể dùng để k/s cấu tạo hình học.

1.2 CÁC LOẠI LIÊN KẾT (TT)

1. Liên kết đơn giản

➤ Liên kết thanh: là thanh có khớp 2 đầu.



Tính chất: khử 1 bậc tự do, phát sinh 1 phản lực (nổi 2 khớp).

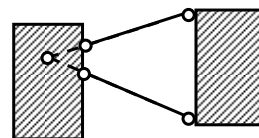
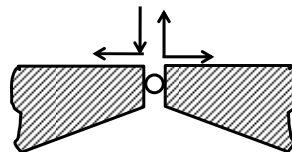
1 m/c có 2 khớp thì tương đương 1 liên kết thanh

1.2 CÁC LOẠI LIÊN KẾT

1. Liên kết đơn giản (tt)

➤ Liên kết khớp:

- **Tính chất:** khử 2 BTD, phát sinh 2 thành phần phản lực theo 2 phương xác định.
- Về mặt động học, 1 khớp tương đương với 2 liên kết thanh.
- Giao của 2 thanh tương đương với khớp giả tạo. Vị trí của khớp giả tạo K thay đổi khi B dịch chuyển so với A → khớp tức thời.



1.2 CÁC LOẠI LIÊN KẾT

1. Liên kết đơn giản (tt)

➤ Liên kết hàn:

- Nối cứng 2 miếng cứng với nhau thành 1 miếng cứng lớn. Để đơn giản việc khảo sát cấu tạo hình học, nên gom lại ít số miếng cứng nhất và chỉ nên quan niệm liên kết chỉ gồm thanh và khớp. Vì vậy phần sau sẽ không bàn đến liên kết hàn nữa vì chỉ làm phức tạp.

1.2 CÁC LOẠI LIÊN KẾT

2. Khớp phức tạp

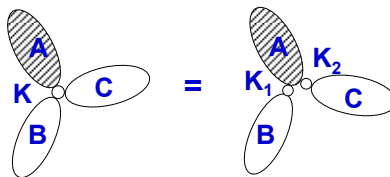
- Là khớp nối nhiều miếng cứng với nhau.
- Độ phức tạp của khớp phức tạp là số khớp đơn giản tương đương về mặt liên kết.

$$p = D - 1$$

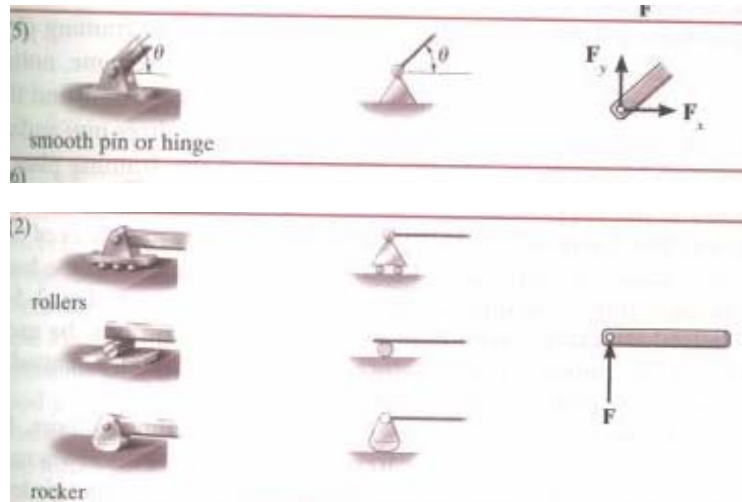
p – độ phức tạp của khớp tương đương số khớp đơn giản

D – số miếng cứng nối vào khớp K .

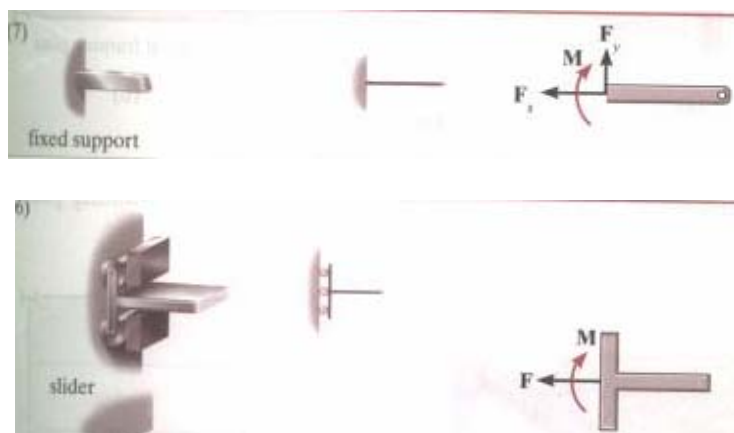
- *Mục đích:* qui đổi tất cả liên kết đã dùng trong hệ thành thành số liên kết thanh tương đương.



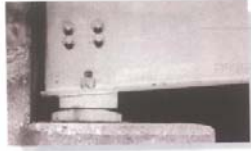
1.2 CÁC LOẠI LIÊN KẾT



1.2 CÁC LOẠI LIÊN KẾT



1.2 CÁC LOẠI LIÊN KẾT



A typical rocker support used for a bridge girder.



Rollers and associated bearing pads are used to support the prestressed concrete girders of a highway bridge.



The short link is used to connect the two girders of the highway bridge and allow for thermal expansion of the deck.



Typical pin used to support the no girder of a railroad bridge.

1.2 CÁC LOẠI LIÊN KẾT



A typical rocker support used for a bridge girder.



Rollers and associated bearing pads are used to support the prestressed concrete girders of a highway bridge.



The short link is used to connect the two girders of the highway bridge and allow for thermal expansion of the deck.



Typical pin used to support the no girder of a railroad bridge.

1.2 CÁC LOẠI LIÊN KẾT

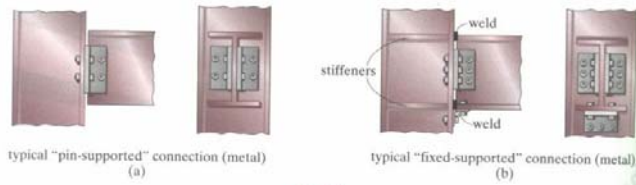
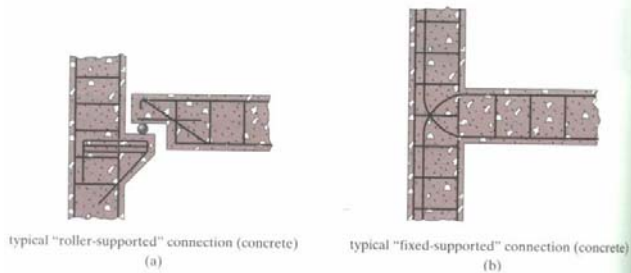


Fig. 2-1



1.2 CÁC LOẠI LIÊN KẾT

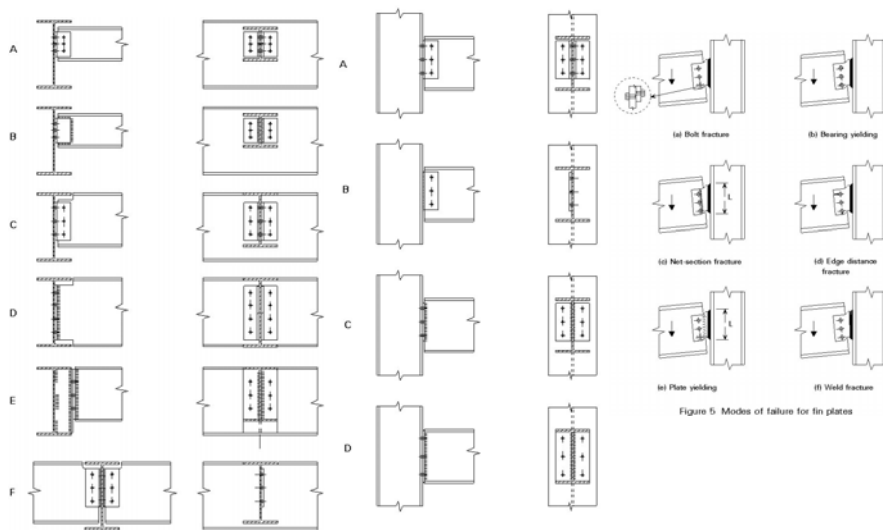
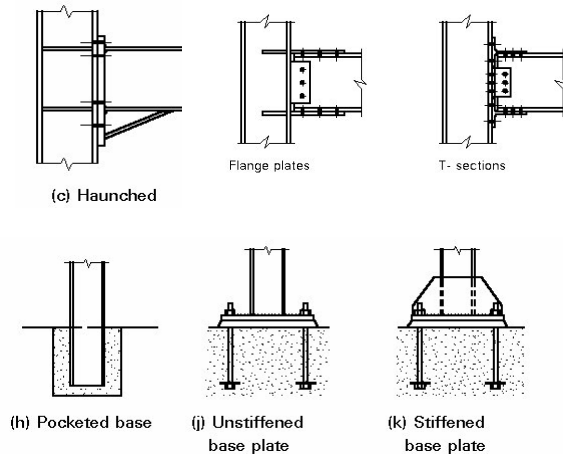


Figure 2 Beam-to-beam connections

Figure 3 Beam-to-column connections

Figure 5 Modes of failure for fin plates

1.2 CÁC LOẠI LIÊN KẾT



1.3 NỐI CÁC MIẾNG CỨNG THÀNH HỆ BBH

1. Điều kiện cần:

Là điều kiện về số lượng liên kết để nối các miếng cứng thành 1 hệ BBH.

a) Hệ bất kì

Hệ gồm D miếng cứng, nối với nhau bằng T thanh và K khớp đơn giản.

- Số bậc tự do: Coi 1 miếng cứng là cố định thì cần khử đi $3(D-1) = \text{BTD}$ bậc tự do.
- Số liên kết thanh qui đổi: $T + 2K = \text{LK}$

Lập hiệu số:

$$n = \text{LK} - \text{BTD} = T + 2K - 3(D-1)$$

$n < 0$: không đủ liên kết \rightarrow BH

$n = 0$: đủ liên kết

$n > 0$: dư liên kết

} Phải xét thêm điều kiện đủ để kết luận.

1.3 NỐI CÁC MIẾNG CỨNG THÀNH HỆ BBH (TT)

1. Điều kiện cần (tt):

b) Hệ nối đất

Hệ có D miếng cứng nối với đất bằng C thanh (qui đổi).

- Số BTĐ = 3D

- Số liên kết qui đổi: $LK = T + 2K + C$

Hiệu số:

$$n = T + 2K + C - 3D$$

$n < 0$: không đủ liên kết → BH

$n = 0$: đủ liên kết } Phải xét thêm điều kiện đủ để kết luận.

$n > 0$: dư liên kết }

Qui đổi liên kết thanh :



1.3 NỐI CÁC MIẾNG CỨNG THÀNH HỆ BBH (TT)

1. Điều kiện cần (tt):

c) Hệ dàn

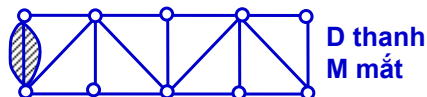
➤ Gồm các thanh thẳng, nối khớp 2 đầu.

➤ Giả sử dàn có D thanh và M mắt. Coi 1 thanh là miếng cứng cố định thì chỉ còn lại $D - 1$ liên kết thanh, khử được $2(M - 2)$ bậc tự do. Như vậy:

$$n = D - 1 - 2(M - 2) = D + 3 - 2M \quad \left. \begin{array}{l} < 0 : \text{BH} \\ \geq 0 : \text{Xét điều kiện đủ} \end{array} \right\}$$

➤ Nếu hệ nối đất thì :

$$n = D + C - 2M \quad \left. \begin{array}{l} < 0 : \text{BH} \\ \geq 0 : \text{Xét điều kiện đủ} \end{array} \right\}$$



1.3 NỐI CÁC MIÉNG CỨNG THÀNH HỆ BBH (TT)

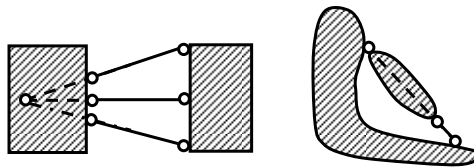
2. Điều kiện đủ:

a) Hệ gồm 2 miếng cứng

➤ **Cần** : dùng số liên kết qui đổi tối thiểu tương đương 3 thanh.

➤ **Đủ** : + 3 thanh không đồng qui hoặc song song.

+ 1 thanh không đi qua khớp.



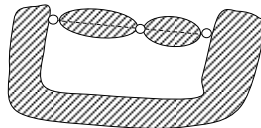
1.3 NỐI CÁC MIÉNG CỨNG THÀNH HỆ BBH (TT)

2. Điều kiện đủ (tt):

b) Hệ gồm 3 miếng cứng

➤ **Cần** : dùng số liên kết qui đổi tối thiểu tương đương 6 thanh

➤ **Đủ** : 3 khớp thực hoặc giả tạo không thẳng hàng.



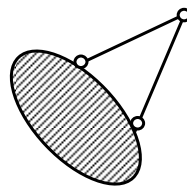
1.3 NỐI CÁC MIẾNG CỨNG THÀNH HỆ BBH (TT)

2. Điều kiện đủ (tt):

c) Bộ đôi

➤ **Định nghĩa** : bộ đôi là 2 liên kết thanh không thẳng hàng, nối 1 điểm vào 1 hệ đã cho.

➤ **Tính chất** : thêm hoặc bớt bộ đôi không làm thay đổi tính chất hình học của hệ. Do đó, để khảo sát tính chất hình học có thể dùng phương pháp *phát triển* bộ đôi hoặc *loại trừ* bộ đôi..



1.3 NỐI CÁC MIẾNG CỨNG THÀNH HỆ BBH (TT)

2. Điều kiện đủ (tt):

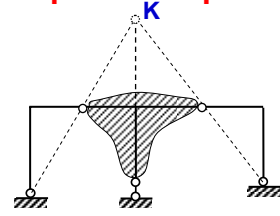
d) Cách khảo sát tính chất hình học của 1 hệ

➤ **Cố gắng** gom về ít miếng cứng nhất (2 hoặc 3) và dùng điều kiện cần và đủ để kết luận. Với hệ đơn giản, có thể dùng ngay điều kiện đủ, cố gắng lợi dụng tính chất của bộ đôi.

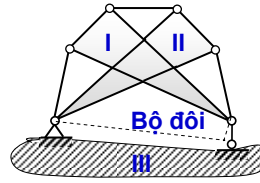
➤ **Nếu số miếng cứng** nhiều hơn 3 thì phải dùng phương pháp tổng quát (và cũng phức tạp hơn) như tải trọng bằng 0, động học, thay thế liên kết.

1.3 NỐI CÁC MIẾNG CỨNG THÀNH HỆ BBH (TT)

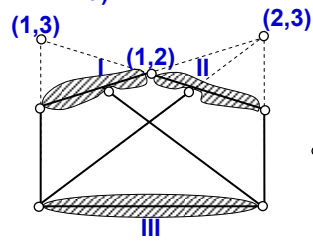
3. Một số thí dụ



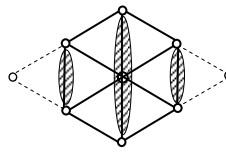
a) BHTT



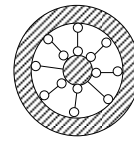
b) BBH



c) BHTT (gần BHTT: không tốt)



e) BHTT



f) BHTT

BÀI GIẢNG CƠ HỌC KẾT CẤU

CHƯƠNG 2

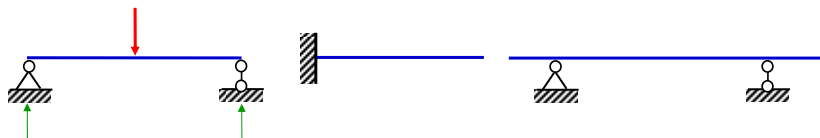
**XÁC ĐỊNH NỘI LỰC DO
TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG**

**PGS. TS. ĐỖ KIẾN QUỐC
KHOA KỸ THUẬT XÂY DỰNG**

**2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA
HỆ KẾT CẤU**

1. Hệ đơn giản

❖ **Hệ dầm:** thanh thẳng, chịu uốn là chủ yếu
(thường $N = 0$).



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU

1. Hệ đơn giản

❖ Hệ dầm:



The prestressed concrete girders are simply supported and are used for this highway bridge.

2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU

1. Hệ đơn giản

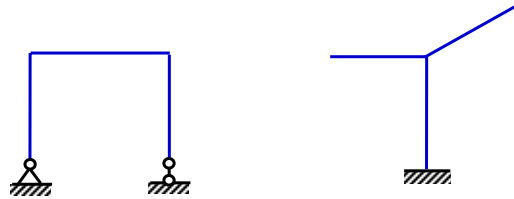
❖ Hệ dầm:



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU

1. Hệ đơn giản (tt)

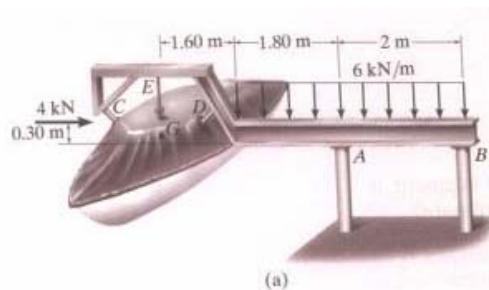
❖ Hệ khung: thanh gãy khúc, nội lực gồm M , Q , N .



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU

1. Hệ đơn giản (tt)

❖ Hệ khung:



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU

1. Hệ đơn giản (tt)

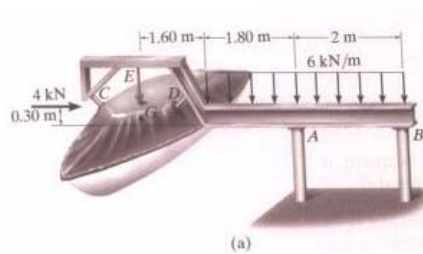
❖ Hệ khung:



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ TĨNH ĐỊNH

1. Hệ đơn giản (tt)

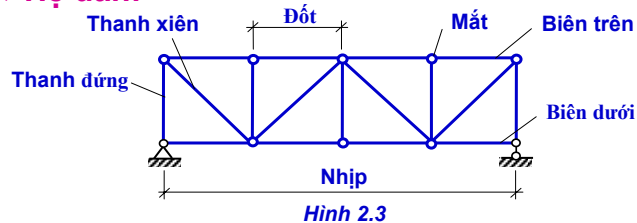
❖ Hệ khung:



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

1. Hệ đơn giản (tt)

❖ Hệ dàn:



Trong thực tế, mắt dàn là nút cứng → hệ siêu tĩnh phức tạp. Để đơn giản hoá, dùng các giả thiết sau:

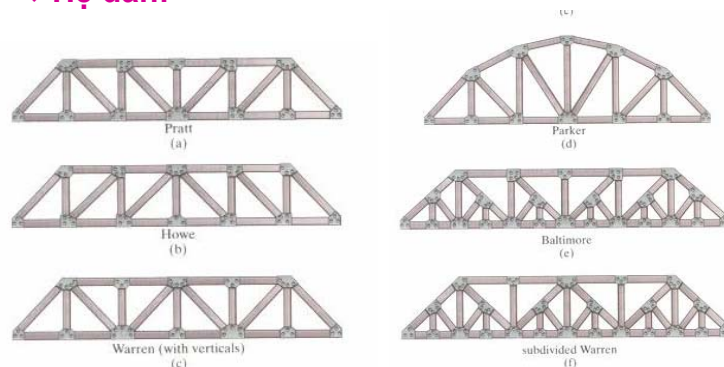
- Mắt dàn là khớp lý tưởng.
 - Tải trọng chỉ tác dụng ở mắt dàn.
 - Trọng lượng không đáng kể (bỏ qua uốn thanh).
- } Nội lực chỉ có lực dọc $N \neq 0$

Ưu điểm: tiết kiệm vật liệu → kết cấu nhẹ, vượt nhịp lớn.

2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ TĨNH ĐỊNH (TT)

1. Hệ đơn giản (tt)

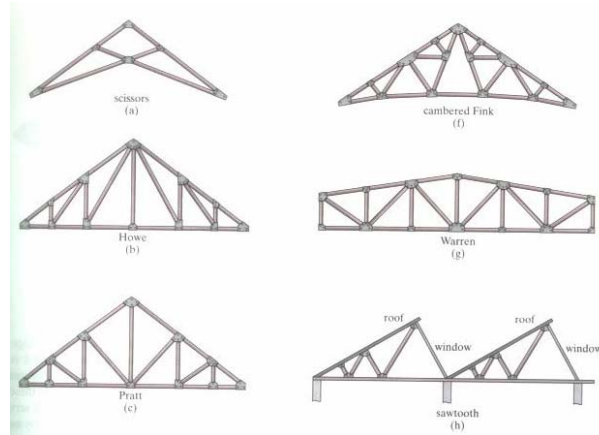
❖ Hệ dàn:



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

1. Hệ đơn giản (tt)

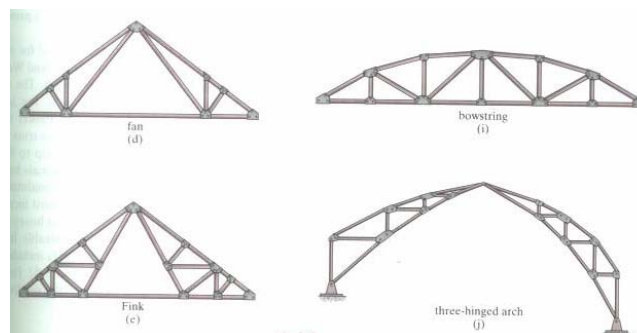
❖ Hệ dàn:



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

1. Hệ đơn giản (tt)

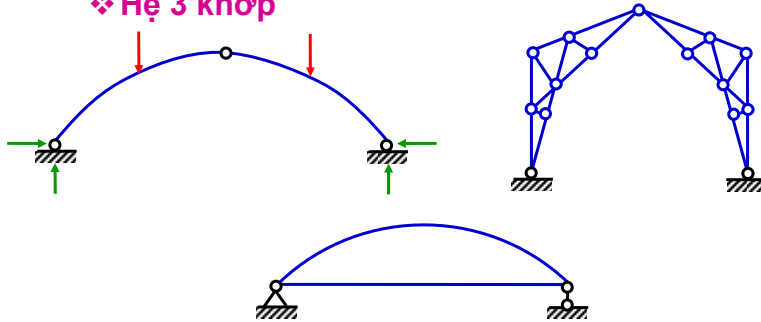
❖ Hệ dàn:



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

1. Hệ đơn giản (tt)

❖ Hệ 3 khớp

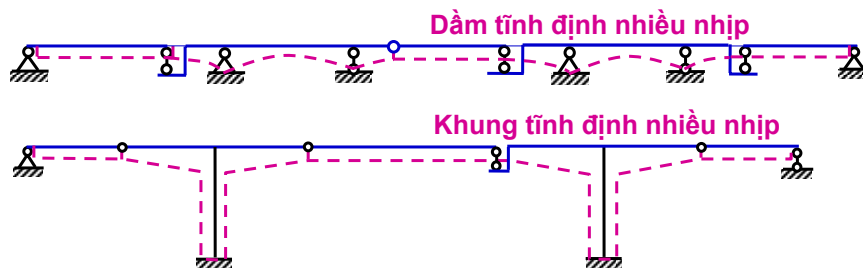


- Nội lực: M, Q, N ; Lực dọc nén: dùng vật liệu dòn.
- Phản lực: có lực xô nên kết cấu móng bất lợi hơn.

2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

2. Hệ ghép

Được nối bởi các hệ đơn giản. Thường có 2 loại trong thực tế:



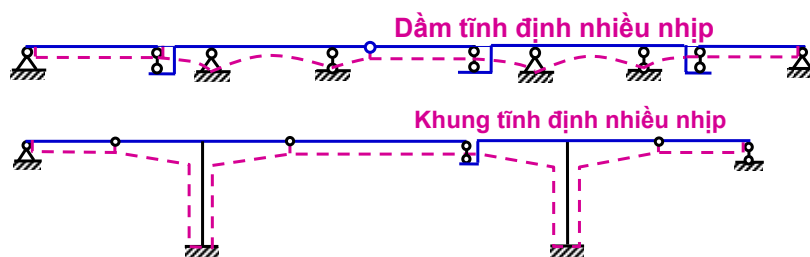
2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

2. Hệ ghép (tt)

❖ Về cấu tạo: gồm hệ chính và phụ.

▪ Chính : BBH hoặc có khả năng chịu lực khi bỏ kết cấu bên cạnh.

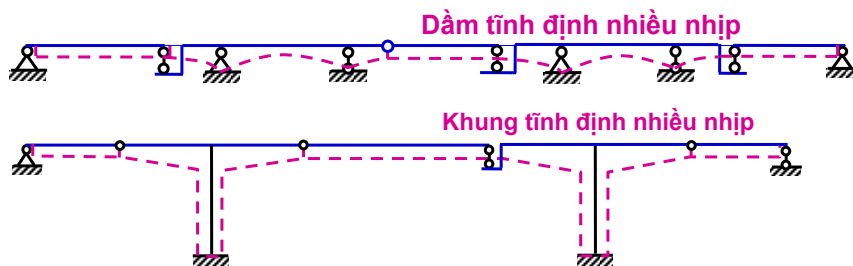
▪ Phụ : BH hoặc không có khả năng chịu lực khi bỏ qua kết cấu bên cạnh.



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

2. Hệ ghép (tt)

❖ Cách tính: từ phụ → chính; truyền lực từ phụ → sang chính.



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

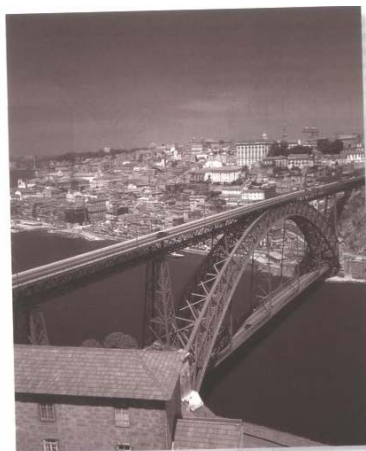
3. Hệ liên hợp (Xem sách)

Liên hợp các dạng kết cấu khác nhau như dầm – vòm, dầm – dây xích, dàn – vòm ...



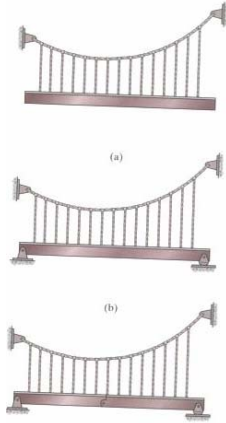
2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

3. Hệ liên hợp



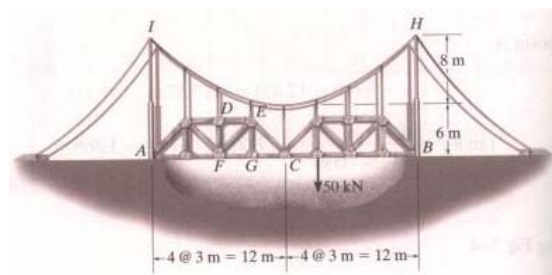
2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

3. Hệ liên hợp



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

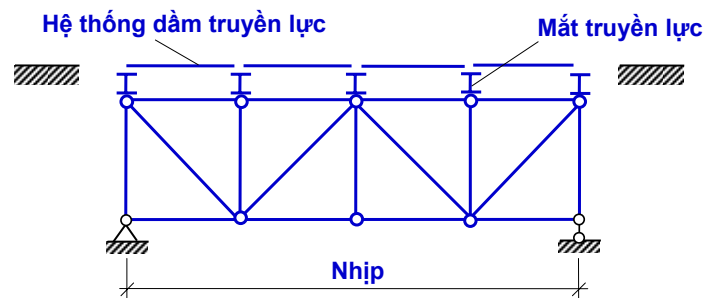
3. Hệ liên hợp



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

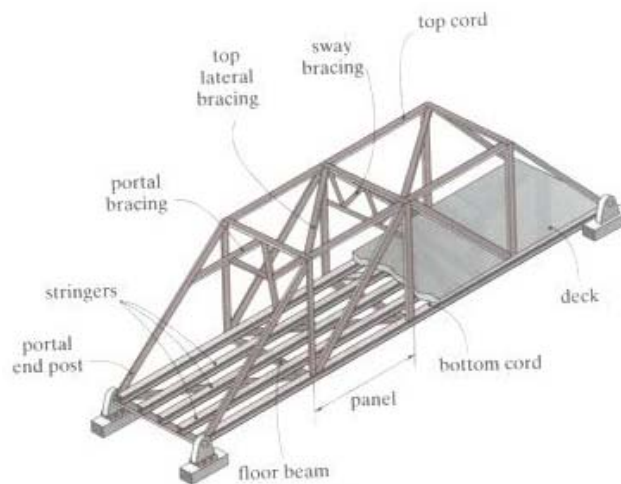
4. Hệ có mắt truyền lực

Mắt truyền lực có tác dụng cố định vị trí tải trọng tác dụng vào kết cấu chính.



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

4. Hệ có mắt truyền lực



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

4. Hệ có mắt truyền lực



2.1 PHÂN LOẠI VÀ ĐẶC ĐIỂM CHỊU LỰC CỦA HỆ KẾT CẤU(TT)

4. Hệ có mắt truyền lực

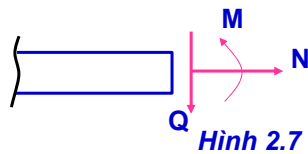


2.2 NỘI LỰC TRONG HỆ DẦM & KHUNG ĐƠN GIẢN.

1. Nội lực:

M, Q, N

- M : vẽ theo thước kẻ.
- Q & N : ghi dấu (qui ước như SBVL).



2.2 NỘI LỰC TRONG HỆ DẦM & KHUNG ĐƠN GIẢN (TT)

2. Phương pháp vẽ:

❖ Phương pháp mặt cắt :

- ✓ Tính phản lực.
- ✓ Chia đoạn (phụ thuộc q, P, trục thanh).
- ✓ Lập biểu thức từng đoạn.
- ✓ Vẽ

2.2 NỘI LỰC TRONG HỆ DẦM & KHUNG ĐƠN GIẢN (TT)

2. Phương pháp vẽ (tt):

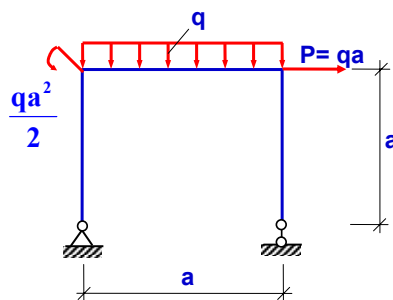
❖ Phương pháp đặc biệt :

- ✓ Tính phản lực.
- ✓ Chia đoạn.
- ✓ Nhận xét dạng biểu đồ & điểm đặc biệt.
- ✓ Tính điểm đặc biệt và vẽ biểu đồ.

2.2 NỘI LỰC TRONG HỆ DẦM & KHUNG ĐƠN GIẢN (TT)

3. Thí dụ:

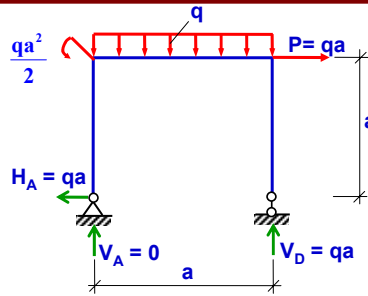
Cho hệ có liên kết và chịu lực như hình vẽ. Hãy vẽ biểu đồ M, Q, N.



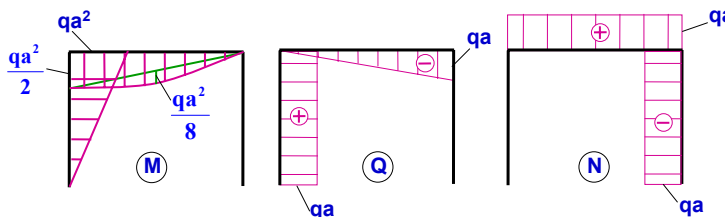
2.2 NỘI LỰC TRONG HỆ DẦM & KHUNG ĐƠN GIẢN (TT)

3. Thí dụ (tt):

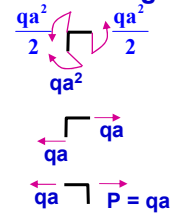
➤ Phản lực:
 $H_A = P = qa$



➤ Nội lực:



Chú ý: nút cân bằng



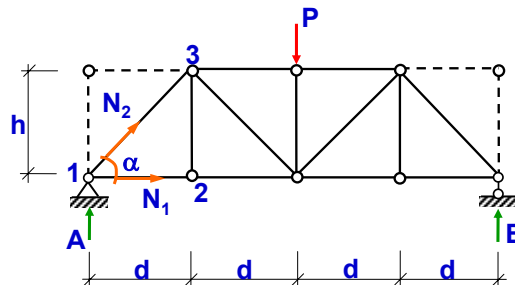
Hình 2.10

2.3 TÍNH TOÁN HỆ DÀN (TT)

1. Phương pháp tách mắt:

❖ Nội dung:

- ✓ Lần lượt tách mắt và viết phương trình cân bằng lực để thu được các phương trình đủ để tìm nội lực.

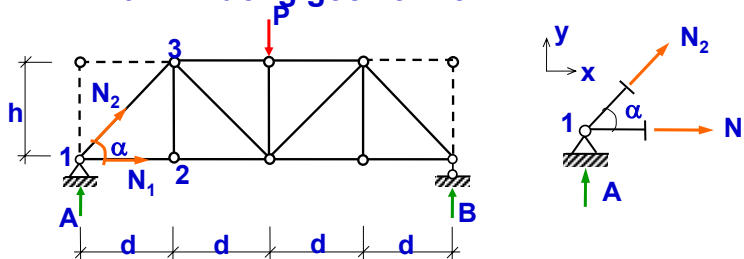


2.3 TÍNH TOÁN HỆ DÀN (TT)

1. Phương pháp tách mắt (tt):

❖ Trình tự & thủ thuật:

- ✓ **Trình tự:** tách mắt sao cho một mắt chỉ có 2 lực dọc chưa biết.
- ✓ **Thủ thuật:** lập 1 phương trình chứa 1 ẩn: loại bỏ lực kia bằng cách chiếu lên phương trình vuông góc với nó.

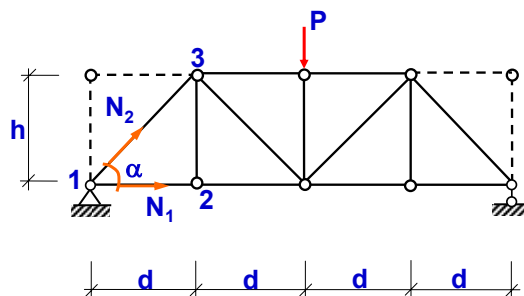


2.3 TÍNH TOÁN HỆ DÀN (TT)

1. Phương pháp tách mắt (tt):

❖ Thí dụ:

Cho hệ dàn có liên kết và chịu tải trọng như hình vẽ. Hãy xác định nội lực thanh N_1 , N_2



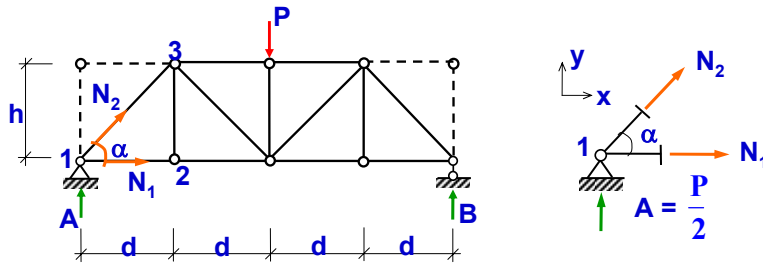
2.3 TÍNH TOÁN HỆ DÀN (TT)

1. Phương pháp tách mắt (tt):

❖ **Thí dụ (tt): Giải**

$$\sum Y = 0: N_2 \sin \alpha + A = 0 \Rightarrow N_2 = -\frac{A}{\sin \alpha} = -\frac{P}{2 \sin \alpha}$$

$$\sum X = 0: N_1 + N_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = -N_2 \cos \alpha = -\frac{P}{2} \cot \alpha$$

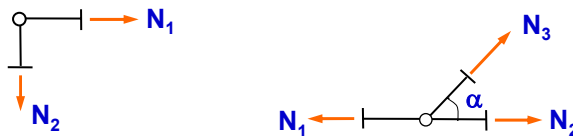


2.3 TÍNH TOÁN HỆ DÀN (TT)

1. Phương pháp tách mắt (tt):

❖ **Nhận xét:**

- ✓ **Mắt có 2 thanh, không có tải trọng: $N_1 = N_2 = 0$.**
- ✓ **Mắt có 3 thanh: $N_1 = N_2 = 0; N_3 = 0$**



❖ **Nhược điểm:**

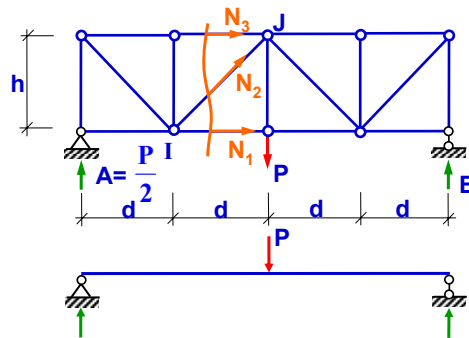
Dễ bị sai số truyền

2.3 TÍNH TOÁN HỆ DÀN (TT)

2. Phương pháp mặt cắt đơn giản

❖ Nội dung:

Cắt dàn (không nhiều hơn 3 thanh). Lập 3 phương trình cân bằng → giải 3 ẩn.



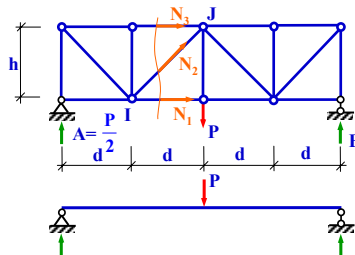
2.3 TÍNH TOÁN HỆ DÀN (TT)

2. Phương pháp mặt cắt đơn giản (tt)

❖ Thủ thuật:

Lập phương trình chứa 1 ẩn, bằng cách loại đi 2 lực chưa cần tìm.

- ✓ Nếu 2 thanh song song: chiếu lên phương vuông góc.
- ✓ Nếu 2 thanh cắt nhau: lấy mômen với điểm cắt.

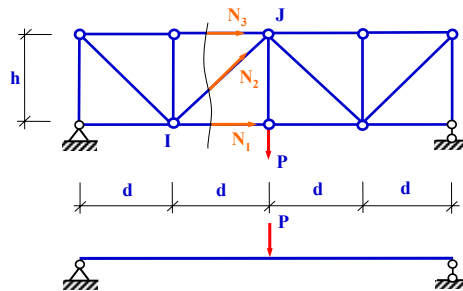


2.3 TÍNH TOÁN HỆ DÀN (TT)

2. Phương pháp mặt cắt đơn giản (tt)

❖ **Thí dụ:**

Cho hệ dàn có liên kết và chịu tải trọng như hình vẽ. Hãy xác định nội lực trong thanh N_1 , N_2 , N_3 .



2.3 TÍNH TOÁN HỆ DÀN (TT)

2. Phương pháp mặt cắt đơn giản (tt)

❖ **Thí dụ: (Giải)**

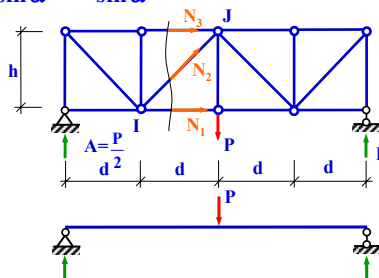
$$\sum M_I = 0 \Rightarrow N_3 = -\frac{Ad}{h} = -\frac{M_I^d}{h}$$

$$\sum M_J = 0 \Rightarrow N_1 = \frac{A \cdot 2d}{h} = -\frac{M_J^d}{h}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_2 = -\frac{A}{\sin \alpha} = -\frac{Q_d}{\sin \alpha}$$

Nhận xét:

- Thanh biên : dấu và trị số $\sim \frac{M_d}{h}$
- Thanh xiên : dấu và trị số $\sim Q_d$

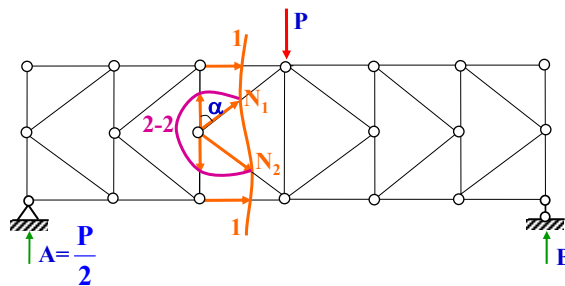


2.3 TÍNH TOÁN HỆ DÀN (TT)

3. Phương pháp mặt cắt phối hợp

❖ Nội dung:

Khi số ẩn lớn hơn 3 dùng 1 số mặt cắt phối hợp để tạo đủ số phương trình. Trong thực tế thường dùng nhiều lắm là 2 mặt cắt.

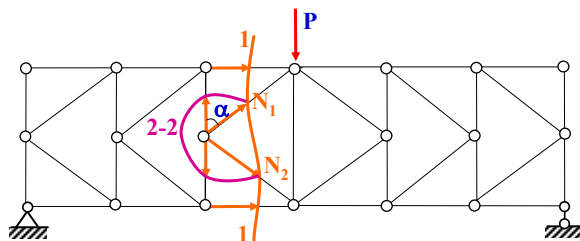


2.3 TÍNH TOÁN HỆ DÀN (TT)

3. Phương pháp mặt cắt phối hợp (tt)

❖ Thí dụ:

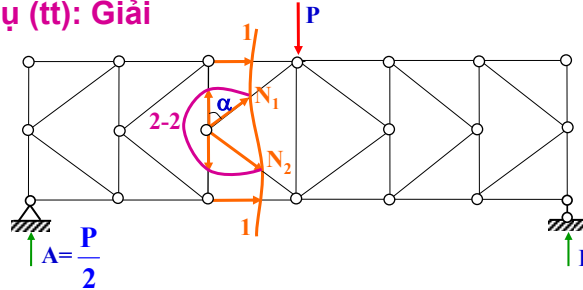
Cho hệ dàn có liên kết và chịu tải trọng như hình vẽ. Hãy xác định nội lực trong thanh N_1 , N_2 , N_3



2.3 TÍNH TOÁN HỆ DÀN (TT)

3. Phương pháp mặt cắt phối hợp (tt)

❖Thí dụ (tt): Giải



$$\left. \begin{aligned} \text{M/c 1-1: } \sum Y = 0 &\Rightarrow N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha + A = 0 \Rightarrow N_2 - N_1 = \frac{A}{\cos \alpha} = \frac{P}{2 \cos \alpha} \\ \text{M/c 2-2 (tách mắt): } \sum X = 0 &\Rightarrow N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha = 0 \Rightarrow N_1 = -N_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\rightarrow N_1 = -\frac{P}{4 \cos \alpha} \quad N_2 = \frac{P}{4 \cos \alpha}$$

2.4 TÍNH TOÁN HỆ 3 KHỚP

1. Tính phản lực

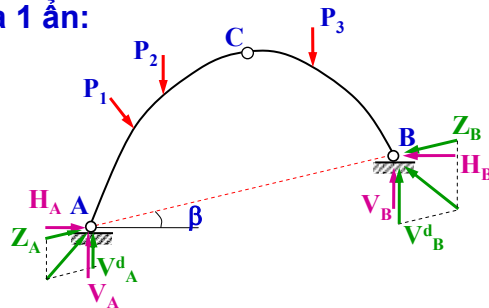
Phân tích phản lực như hình vẽ. Mỗi phương trình cân bằng chỉ chứa 1 ẩn:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A^d$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B^d$$

$$\sum M_C^{\text{Trai}} = 0 \Rightarrow Z_A$$

$$\sum M_C^{\text{Phai}} = 0 \Rightarrow Z_A$$



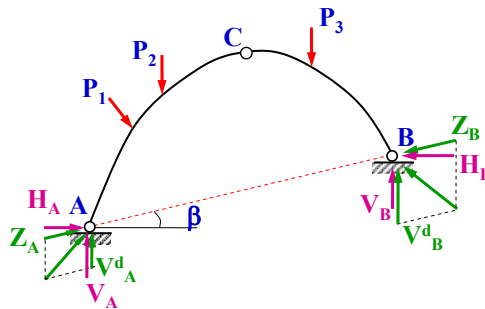
Sau đó, có thể phân tích phản lực theo phương đứng và ngang. Nếu tải trọng thẳng đứng thì:
 $HA = HB = H$ – Lực xô của hệ 3 khớp

2.4 TÍNH TOÁN HỆ 3 KHỚP (TT)

2. Tính nội lực

-Vòm 3 khớp: thiết lập biểu thức nội lực theo tọa độ z . Biểu đồ M, Q, N vẽ theo trục chuẩn nằm ngang. Riêng vòm thì qui ước $N > 0$ là nén.

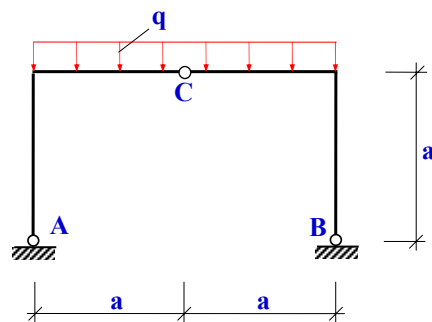
-Khung 3 khớp: vẽ biểu đồ nội lực theo điểm đặc biệt.



2.4 TÍNH TOÁN HỆ 3 KHỚP (TT)

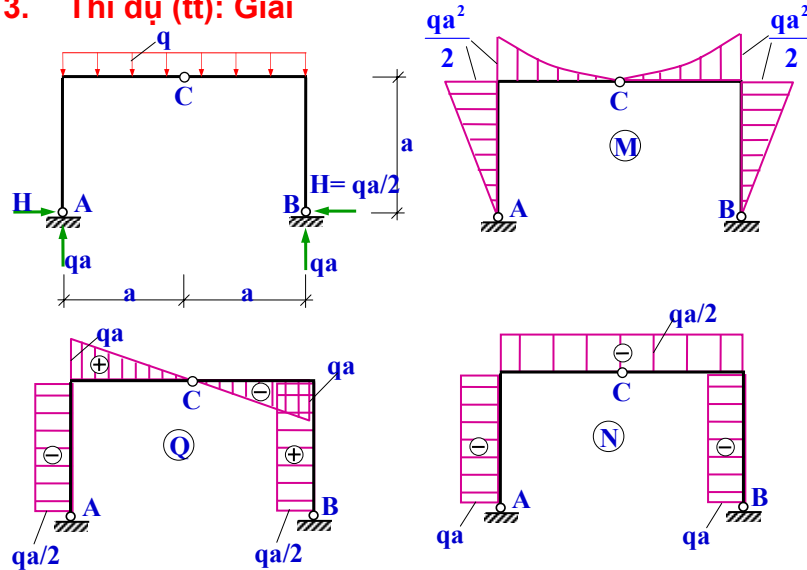
3. Thí dụ:

Cho hệ có liên kết và chịu tải trọng như hình vẽ.
Hãy vẽ biểu đồ M, Q, N



2.4 TÍNH TOÁN HỆ 3 KHỚP (TT)

3. Thí dụ (tt): Giải



2.5 TÍNH TOÁN HỆ GHEP

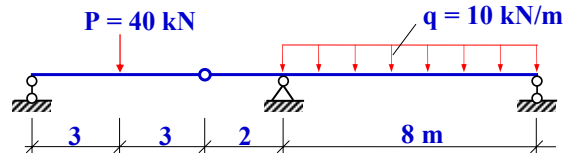
❖ Trình tự tính

- Tách hệ ghép ra các hệ đơn giản.
- Tính hệ phụ.
- Truyền lực từ hệ phụ sang chính và tính hệ chính.
- Ghép các biểu đồ lại.

2.5 TÍNH TOÁN HỆ GHÉP (TT)

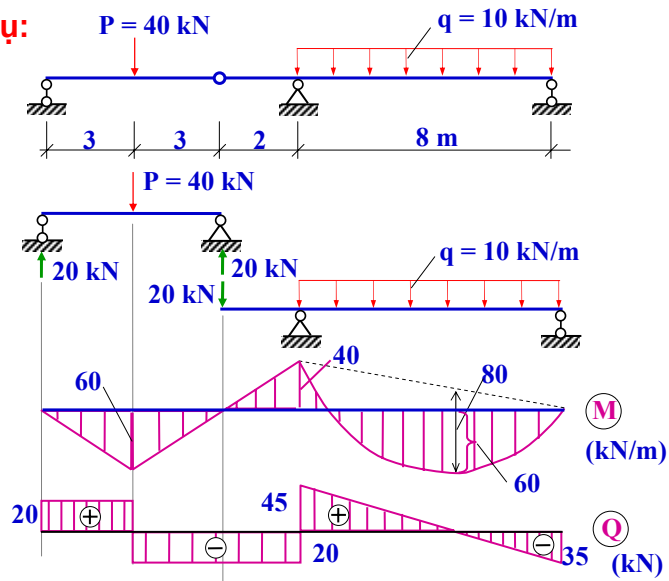
❖ Thí dụ:

Cho hệ ghép có liên kết và chịu tải trọng như hình vẽ. Hãy vẽ biểu đồ M, Q



2.5 TÍNH TOÁN HỆ GHÉP (TT)

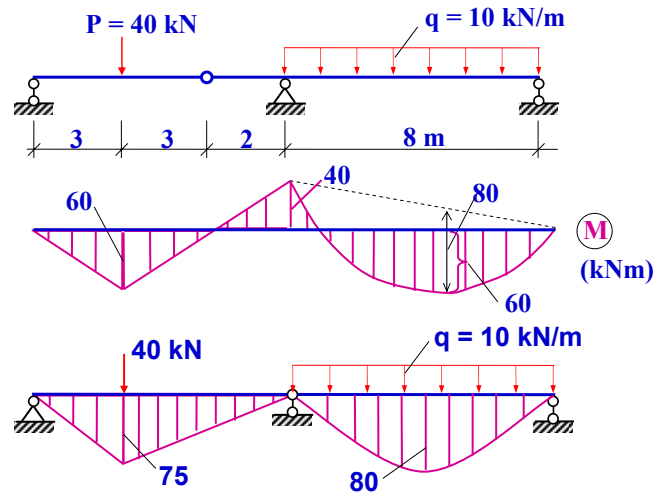
❖ Thí dụ:



2.5 TÍNH TOÁN HỆ GHÉP (TT)

❖ Thí dụ (tt)

✓ So sánh với dầm đơn giản:

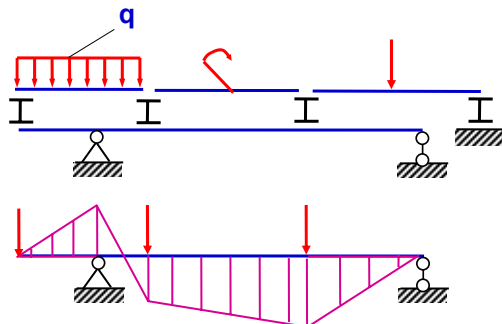


2.5 TÍNH TOÁN HỆ CÓ MẮT TRUYỀN LỰC

❖ Trình tự tính

- Truyền lực từ dầm phụ xuống dầm chính.
- Tính dầm chính.

❖ Thí dụ:



BÀI GIẢNG CƠ HỌC KẾT CẤU

CHƯƠNG 3

**XÁC ĐỊNH NỘI LỰC DO
TẢI TRỌNG DI ĐỘNG**

**PGS. TS. ĐỖ KIẾN QUỐC
KHOA KỸ THUẬT XÂY DỰNG**

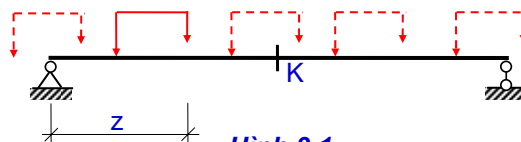
3.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG

1. Tải trọng di động và phương pháp tính

- ❖ **Tải trọng di động:** có vị trí thay đổi → gây ra nội lực thay đổi.

Thí dụ: Xe lửa, ô tô, người, dầm cầu chạy...

- ❖ **Vấn đề cần giải quyết:** Cần tìm S_{max} (nội lực, phản lực ...)



Hình 3.1

3.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG (TT)

1. Tải trọng di động và phương pháp tính (tt)

- ❖ **Các phương pháp giải quyết:**
- **Giải tích:** lập biểu thức giải tích $S(z)$ và khảo sát cực trị: phức tạp → không dùng.

Thí dụ:

$$S_k(z) = \begin{cases} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_5 \end{cases} \quad \text{ứng với 5 vị trí của tải trọng}$$

- **Đường ảnh hưởng:** dùng nguyên lí cộng tác dụng. Được dùng trong thực tế.

3.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG (TT)

2. Phương pháp đường ảnh hưởng

- ❖ **Định nghĩa:**

Đồ thị của đại lượng S theo vị trí một lực tập trung $P=1$ (không thứ nguyên) có phương chiều không đổi, di động trên công trình.

- ❖ **Kí hiệu:** đah S hoặc “S”

3.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG (TT)

2. Phương pháp đường ảnh hưởng (tt)

❖ *Trình tự vẽ "S":*

- Đặt $P=1$ tại vị trí Z ; coi như lực bất động.
- Lập biểu thức $S=S(z)$, thường gồm nhiều biểu thức khác nhau cho nhiều đoạn khác nhau.
- Cho z biến thiên và vẽ đồ thị $S=S(z)$.

3.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG (TT)

2. Phương pháp đường ảnh hưởng (tt)

❖ *Qui ước:*

- Đường chuẩn vuông góc $P=1$ (hoặc // trục thanh)
- Trung độ vuông góc đường chuẩn.
- Trung độ (+) dựng theo chiều của P .

3.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG (TT)

2. Phương pháp đường ảnh hưởng (tt)

❖ **Chú ý**

➤ Phân biệt sự khác nhau giữa đồ ảnh hưởng S và biểu đồ S.

➤ Thứ nguyên tung độ đồ ảnh hưởng = $\frac{[S]}{[P]}$

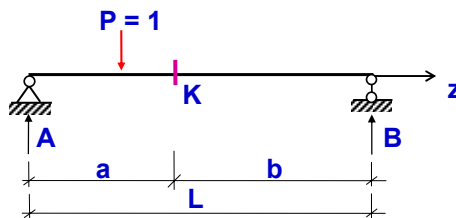
Thí dụ : $[M] = \frac{[M]}{[P]} = \frac{F \cdot L}{F} = L$

3.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG (TT)

2. Phương pháp đường ảnh hưởng (tt)

❖ **Thí dụ:**

Vẽ đường ảnh hưởng “A”, “B”, “M_k”, “Q_k”

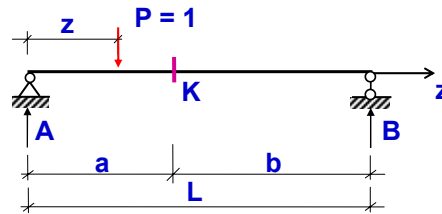


3.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG (TT)

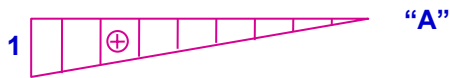
2. Phương pháp đường ảnh hưởng (tt)

❖ *Thí dụ (tt):*

➤ **Phản lực:**



$$A = \frac{L-z}{L}$$



$$B = \frac{z}{L}$$



3.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG (TT)

2. Phương pháp đường ảnh hưởng (tt)

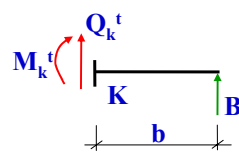
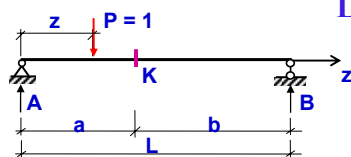
❖ *Thí dụ (tt):*

➤ **Nội lực:**

Đah gồm 2 đoạn: đường trái và đường phải.
Xét cân bằng phần ít lực để đơn giản hơn
(phần không có lực P=1).

▪ **Đường trái**

$$\left. \begin{aligned} Q_k^t &= -B = -\frac{z}{L} \\ M_k^t &= B \cdot b = \frac{b}{L}z \end{aligned} \right\} 0 \leq z \leq a$$



3.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG (TT)

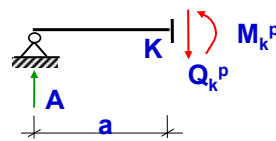
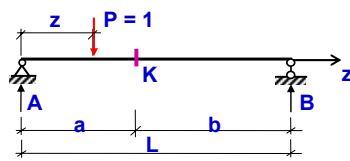
2. Phương pháp đường ảnh hưởng (tt)

❖ *Thí dụ (tt):*

➤ **Nội lực:**

▪ **Đường phải**

$$\left. \begin{aligned} Q_k^p &= A = \frac{L-z}{L} \\ M_k^p &= A \cdot a = \frac{a}{L}(L-z) \end{aligned} \right\} a \leq z \leq L$$

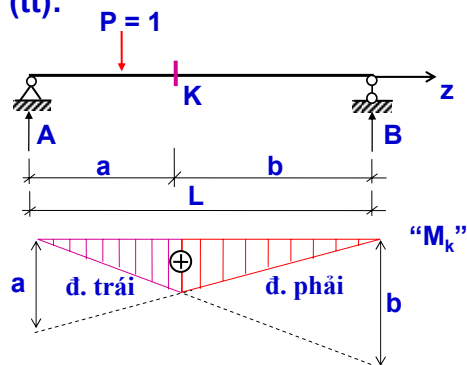


3.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG (TT)

2. Phương pháp đường ảnh hưởng (tt)

❖ *Thí dụ (tt):*

➤ **Nội lực (tt):**

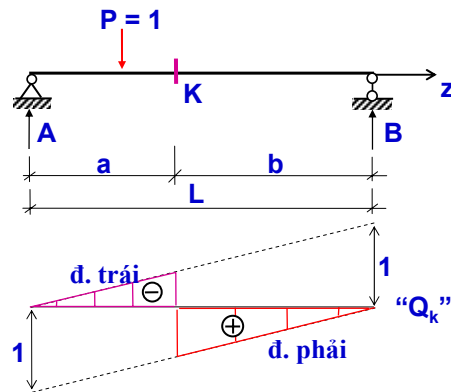


3.1 PHƯƠNG PHÁP ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG (TT)

2. Phương pháp đường ảnh hưởng (tt)

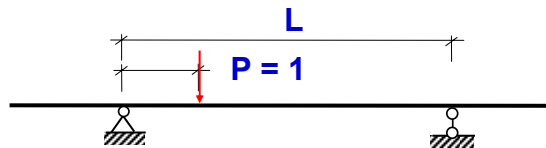
❖ *Thí dụ (tt):*

➤ Nội lực (tt) :



3.2 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG DÀM TĨNH ĐỊNH ĐƠN GIẢN

Xét dầm đơn giản có đầu thừa vì là trường hợp tổng quát của dầm đơn giản và dầm công xôn.

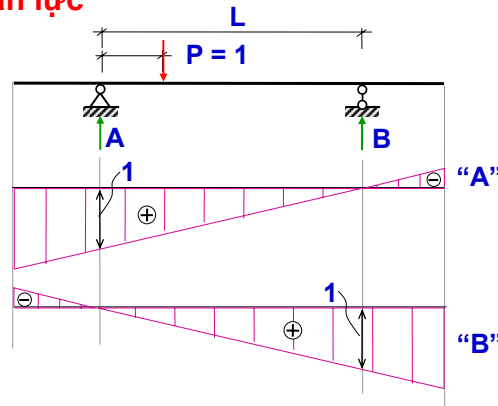


3.2 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG DẦM TĨNH ĐỊNH ĐƠN GIẢN

1. Đường ảnh hưởng phản lực

$$\left. \begin{aligned} \sum M_B = 0 : A &= \frac{L-z}{L} \\ \sum M_A = 0 : B &= \frac{z}{L} \end{aligned} \right\} \text{ bậc 1}$$

Vẽ đah với 2 tung độ tại A và B, tức là $z=0$ và $z=L$

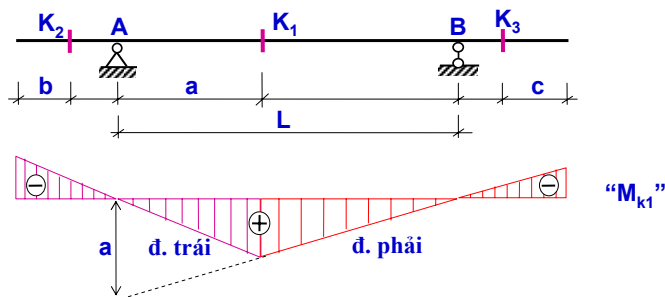


3.2 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG DẦM TĨNH ĐỊNH ĐƠN GIẢN (TT)

2. Đường ảnh hưởng nội lực (tt)

❖ Tiết diện trong nhịp:

- “ M_{k_1} ”: trái giao phải dưới $k_1 \rightarrow$ cách vẽ nhanh.

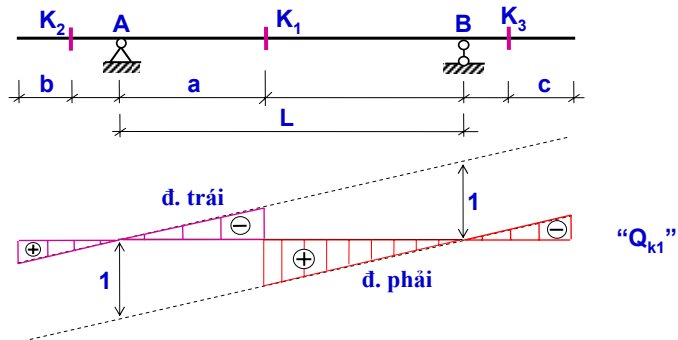


3.2 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG DẦM TĨNH ĐỊNH ĐƠN GIẢN (TT)

2. Đường ảnh hưởng nội lực (tt)

❖ Tiết diện trong nhịp (tt):

- “ Q_{k1} ”: trái song song phải \rightarrow vẽ nhanh.

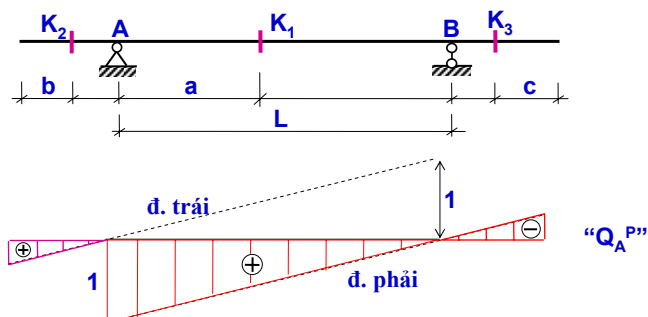


3.2 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG DẦM TĨNH ĐỊNH ĐƠN GIẢN (TT)

2. Đường ảnh hưởng nội lực (tt):

❖ Tiết diện trong nhịp (tt):

Chú ý: Q_A^p và Q_B^t

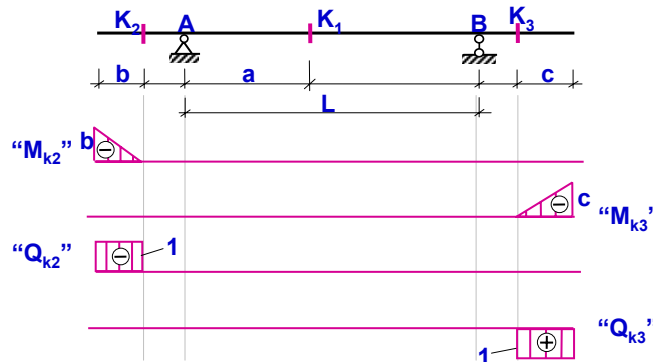


3.2 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG DẦM TĨNH ĐỊNH ĐƠN GIẢN (TT)

2. Đường ảnh hưởng nội lực (tt):

❖ Tiết diện đầu thừa:

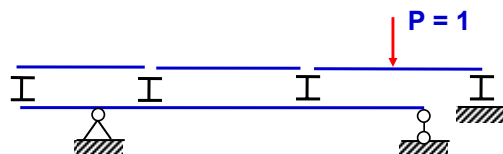
Chú ý: giống dầm công xôn.



3.3 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG CỦA HỆ CÓ MẮT TRUYỀN LỰC

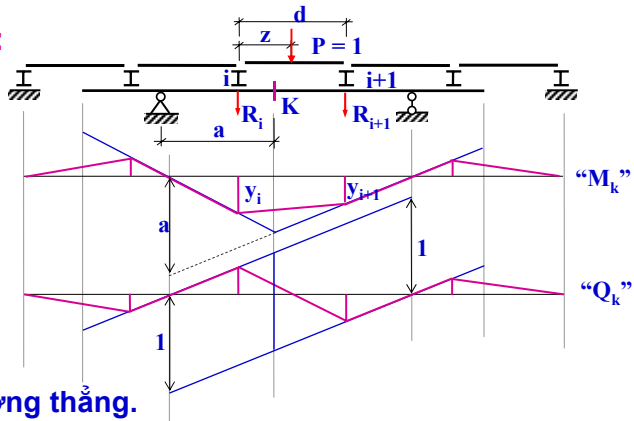
Để vẽ đồ thị ảnh hưởng hệ chính, thực hiện các bước sau:

- 1) Vẽ đồ thị ảnh hưởng của hệ chính, coi $P=1$ di động trực tiếp trên hệ chính.
- 2) Giữ lại tung độ dưới mắt truyền lực.
- 3) Nối các tung độ bằng các đoạn thẳng.



3.3 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG CỦA HỆ CÓ MẮT TRUYỀN LỰC (TT)

❖ Chứng minh:



$$R_i = \frac{d-z}{d}, R_{i+1} = \frac{z}{d}$$

$$M_k = R_i y_i + R_{i+1} y_{i+1} \\ = \text{bậc 1} \rightarrow \text{đường thẳng.}$$

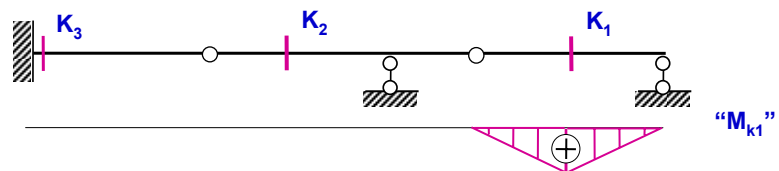
$$\text{Khi } z=0 \rightarrow M_k = y_i$$

$$z=d \rightarrow M_k = y_{i+1}$$

3.4 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG CỦA HỆ GHÉP

1. Đường ảnh hưởng thuộc hệ phụ

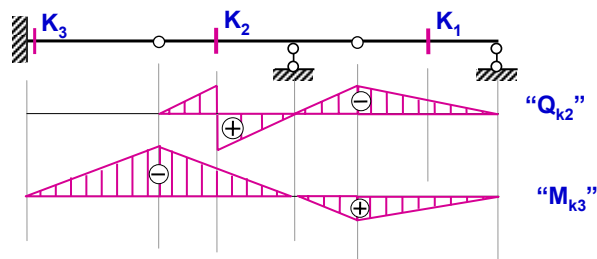
- Khi $P=1$ di động trên hệ phụ: vẽ đah như đối với hệ đơn giản.
- Khi $P=1$ trên hệ chính: đah = 0.



3.4 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG CỦA HỆ GHÉP (TT)

2. Đường ảnh hưởng thuộc hệ chính

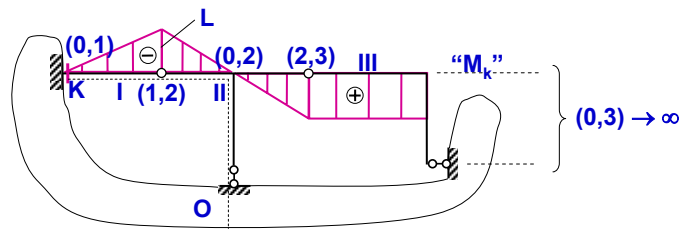
- Khi $P=1$ trên hệ chính: hệ phụ không làm việc → xét riêng hệ chính.
- Khi $P=1$ trên hệ phụ: đanh là đường thẳng đi qua tung độ ứng dưới khớp nối hệ chính với phụ, và tung độ =0 ứng dưới gối tựa đất của dầm phụ (liên kết thẳng đứng).



3.4 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG CỦA HỆ GHÉP (TT)

❖ Chú ý:

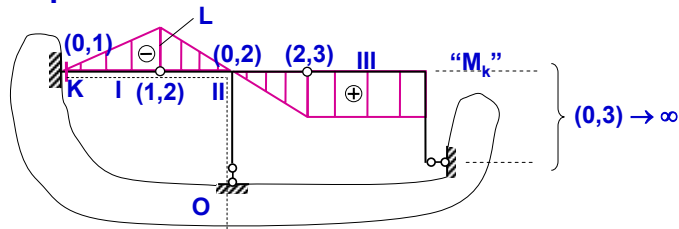
- Nếu hệ ghép phức tạp, có thể dùng phương pháp động để vẽ dạng đanh, sau đó tính 1 tung độ đặc biệt và suy ra các tung độ khác.



3.4 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG CỦA HỆ GHÉP (TT)

❖ **Chú ý:**

➤ **Thí dụ:**



Phương pháp động vẽ đah:

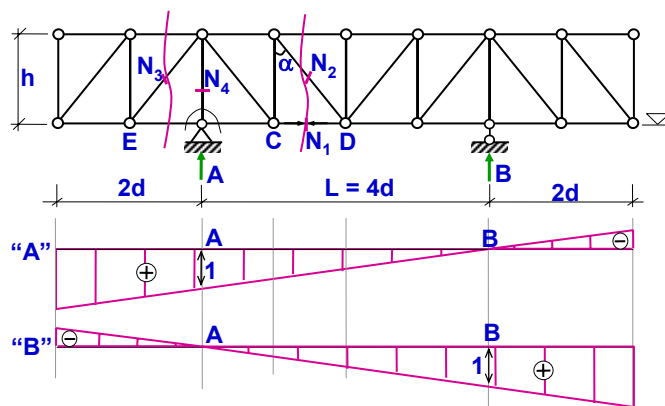
- 3 khớp tương hỗ của 3 miếng cứng của 1 hệ BH thẳng hàng: $(1,2) + (2,3) = (1,3)$.
- Tung độ ứng với khớp nối với đất thì bằng 0 (không có chuyển vị đứng)

3.5 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG DÀN DẦM

1. Đường ảnh hưởng phân lực

Phân lực được tính tương tự như trong dàn dầm.

$$\sum M_B = 0 : A = \frac{L-z}{L} \quad \sum M_A = 0 : B = \frac{z}{L}$$



3.5 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG DÀN DẦM (TT)

2. Đường ảnh hưởng nội lực bằng phương pháp mặt cắt đơn giản

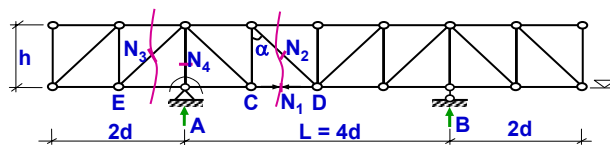
❖ M/c trong nhịp: N_1 và N_2

Cắt đốt chứa N_1 và N_2 .

1/ $P=1$ bên trái đốt bị cắt: xét cân bằng phần phải (ít lực)

2/ $P=1$ bên phải đốt bị cắt: xét phần trái.

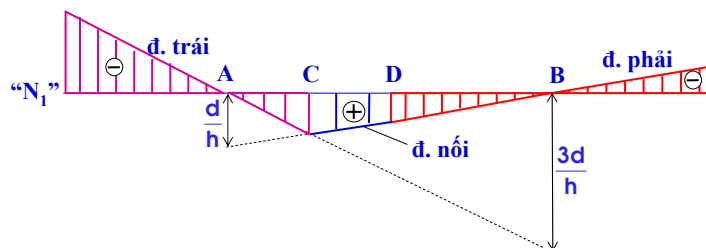
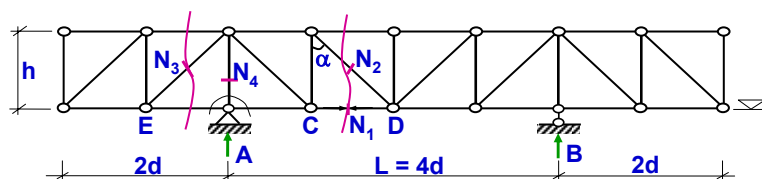
3/ $P=1$ trong đốt cắt: đường nối.



3.5 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG DÀN DẦM (TT)

2. Đường ảnh hưởng nội lực bằng phương pháp mặt cắt đơn giản (tt)

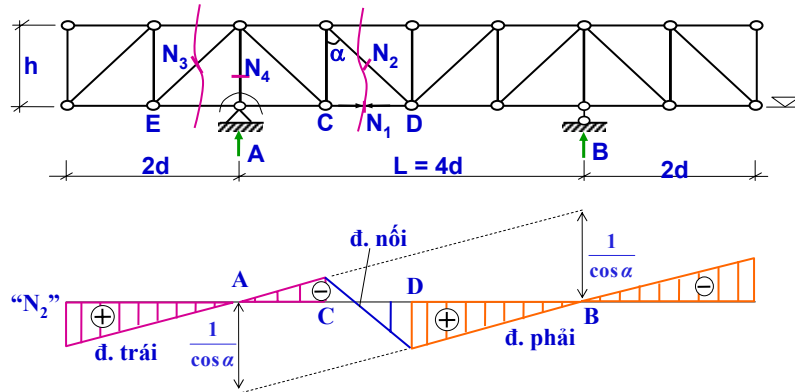
❖ M/c trong nhịp: N_1



3.5 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG DÀN DẦM (TT)

2. Đường ảnh hưởng nội lực bằng phương pháp mặt cắt đơn giản (tt)

❖ M/c trong nhịp: N_2



3.5 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG DÀN DẦM (TT)

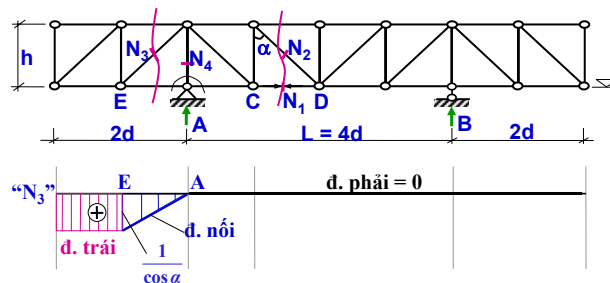
2. Đường ảnh hưởng nội lực bằng phương pháp mặt cắt đơn giản (tt)

❖ M/c đầu thừa: N_3

1/ $P=1$ bên trái đốt bị cắt

2/ $P=1$ bên phải đốt bị cắt

3/ $P=1$ trong đốt cắt: đường nối.



3.5 ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG DÀN DẦM (TT)

3. Đah nội lực bằng phương pháp tách mắt

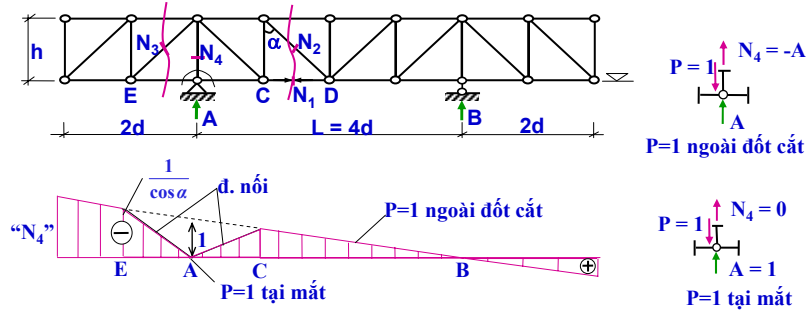
Lập biểu thức nội lực khi:

1/ $P=1$ đặt tại mắt

2/ $P=1$ ngoài đốt cắt

3/ $P=1$ trong đốt cắt: đường nối.

Minh họa N_4

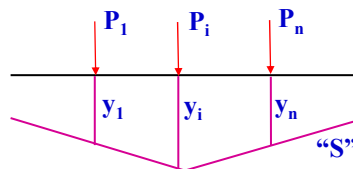


3.6 XÁC ĐỊNH ĐẠI LƯỢNG S BẰNG ĐAH

1. Tải trọng tập trung

Dùng nguyên lý cộng tác dụng

$$S = \sum_{i=1}^n P_i y_i$$



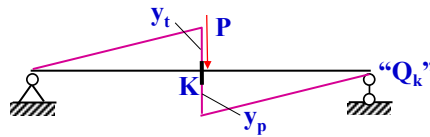
3.6 XÁC ĐỊNH ĐẠI LƯỢNG S BẰNG ĐẠH

1. Tải trọng tập trung (tt)

Chú ý: Nếu “S” có bước nhảy:

$$S_t = P \cdot y_p$$

$$S_p = P \cdot y_t$$



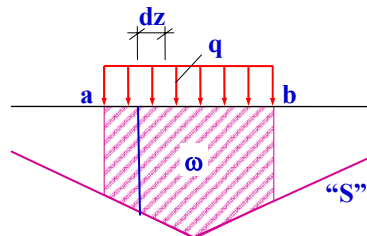
3.6 XÁC ĐỊNH ĐẠI LƯỢNG S BẰNG ĐẠH (TT)

2. Tải trọng phân bố

Trường hợp thường gặp: $q = \text{const}$

$$S = \int_a^b y q dz = q \int_a^b y dz = q\omega$$

$$S = q\omega$$



3.6 XÁC ĐỊNH ĐẠI LƯỢNG S BẰNG ĐẠH (TT)

3. Momen tập trung

Thế M bằng ngẫu lực

$$S = P(y + dy) - Py = P \cdot dy$$

$$= \frac{M}{dz} dy = M \frac{dy}{dz} = M \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

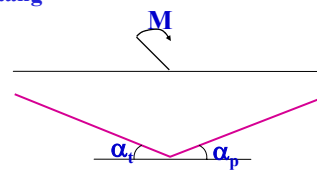
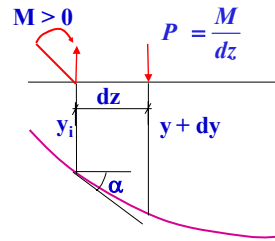
Nếu có nhiều momen

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \operatorname{tg} \alpha_i \quad \operatorname{tg} \alpha > 0 : \text{ham tang}$$

Nếu "S" bị gãy:

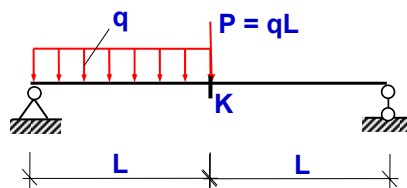
$$S_t = M \operatorname{tg} \alpha_p$$

$$S_p = M \operatorname{tg} \alpha_t$$



3.6 XÁC ĐỊNH ĐẠI LƯỢNG S BẰNG ĐẠH (TT)

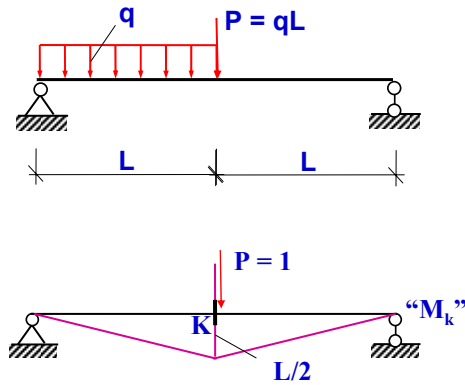
Thí dụ: Tính M_k , Q_k^t và Q_k^p bằng phương pháp đah



3.6 XÁC ĐỊNH ĐẠI LƯỢNG S BẰNG ĐẠH (TT)

Thí dụ (tt):

Tính M_k

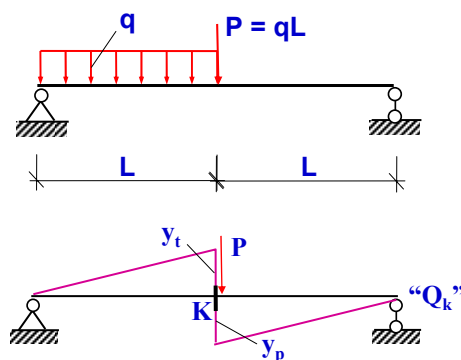


$$M_k = Py_k + q\omega = qL \times 0.5L + q \times 0.5 \times L \times 0.5 \times L = \frac{3}{4} qL^2$$

3.6 XÁC ĐỊNH ĐẠI LƯỢNG S BẰNG ĐẠH (TT)

Thí dụ (tt):

Tính Q_k^t Q_k^p



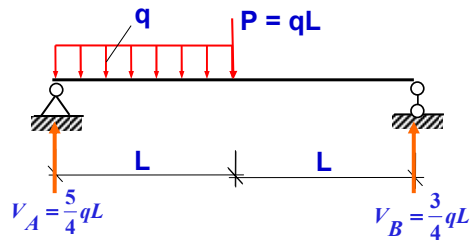
Hình 3.11

$$Q_k^t = Py_R + q\omega = qL \times 0.5 + q \times 0.5 \times L \times (-0.5) = \frac{1}{4} qL$$

$$Q_k^p = Py_L + q\omega = qL \times (-0.5) + q \times 0.5 \times L \times (-0.5) = -\frac{3}{4} qL$$

3.6 XÁC ĐỊNH ĐẠI LƯỢNG S BẰNG ĐẠH (TT)

Thí dụ (tt):
Kiểm tra lại

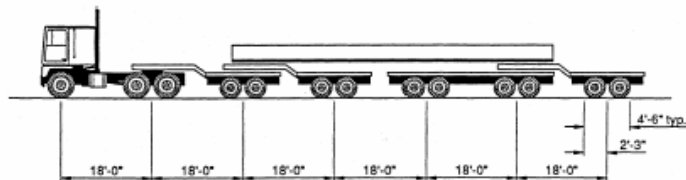
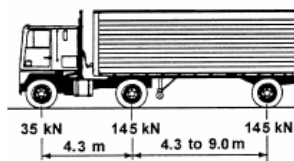


$$M_k = \frac{5}{4}qL \times L - qL \times \frac{L}{2} = \frac{3}{4}qL^2$$

$$Q_k^t = \frac{5}{4}qL - qL = \frac{1}{4}qL$$

$$Q_k^p = \frac{1}{4}qL - qL = -\frac{3}{4}qL$$

3.7 ĐẠH GỒM CÁC ĐOẠN THẲNG



3.7 ĐÀH GỒM CÁC ĐOẠN THẲNG

❖ **Tính chất:**

Có thể thay tác dụng của các tải trọng trên từng phần thẳng của đanh bằng hợp lực của chúng.

❖ **Chứng minh:**

$$S = \sum_{i=1}^n P_i y_i = \sum_{i=1}^n P_i \operatorname{tg} \alpha \cdot z_i = \operatorname{tg} \alpha \sum_{i=1}^n P_i z_i$$

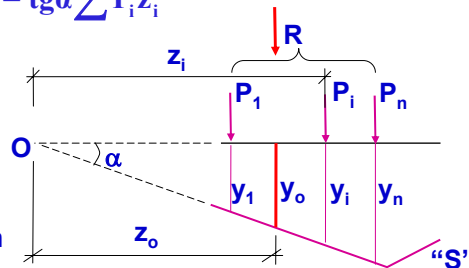
Theo định lý Varinhông

$$\sum_{i=1}^n P_i z_i = R z_0$$

và $z_0 \operatorname{tg} \alpha = y_0$

→ **S = R y₀**

Chú ý: với tải trọng phân bố cũng chứng minh tương tự.



3.8 DÙNG ĐÀH ĐỂ XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ BẤT LỢI

1. **Đoàn tải trọng tiêu chuẩn và vị trí bất lợi**

- Là đoàn tải trọng dùng để thiết kế kết cấu, tuân theo qui phạm về tải trọng, khoảng cách ...
- Vị trí bất lợi là vị trí của đoàn tải trọng gây ra cực trị $S_{\max(\min)}$

3.8 DÙNG ĐẠH ĐỂ XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ BẤT LỢI (TT)

2. Biểu hiện giải tích của vị trí bất lợi

Với đah S và đoàn tải trọng tiêu chuẩn có thể lập được biểu thức giải tích của S(z). Vị trí cho cực trị của S như sau:

❖ Nếu S(z) là hàm trơn:

$$\text{Điều kiện: } \frac{dS}{dz} = 0$$

3.8 DÙNG ĐẠH ĐỂ XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ BẤT LỢI (TT)

2. Biểu hiện giải tích của vị trí bất lợi (tt)

❖ Nếu S(z) là hàm không trơn và cực trị tại điểm gãy thì biểu hiện cực trị như hình vẽ dưới đây:

Điều kiện cần

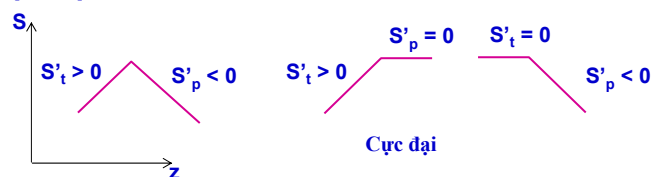
▪ Nếu có cực đại tại điểm đang xét thì:

$$\Delta S' = S'_p - S'_t < 0 \rightarrow S_{\max}$$

▪ Tương tự, nếu cực tiểu thì:

$$\Delta S' = S'_p - S'_t > 0 \rightarrow S_{\min}$$

▪ Cực trị: $\Delta S' \neq 0$



3.8 DÙNG ĐAH ĐỀ XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ BẤT LỢI (TT)

3. Đường ảnh hưởng đa giác

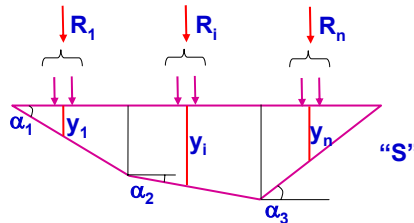
1- Cực trị của S chỉ có thể xảy ra khi có ít nhất một tải trọng tập trung đặt tại đỉnh của đường ảnh hưởng.

$$S = \sum R_i y_i(z)$$

$$S' = \sum R_i y_i'(z)$$

$$S' = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i, \quad \operatorname{tg} \alpha_i = \operatorname{const}$$

Để cho cực trị thì cần thiết phải có $S'_i \neq S'_p$, do đó R_i phải có thay đổi, tức là có ít nhất 1 lực tập trung đặt tại 1 đỉnh của đường ảnh hưởng. Lực đó gọi là lực tới hạn P_{th} .



3.8 DÙNG ĐAH ĐỀ XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ BẤT LỢI (TT)

3. Đường ảnh hưởng đa giác (tt)

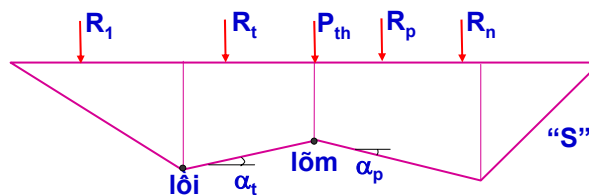
2- Nếu P_{th} đặt tại đỉnh lồi thì có thể cho S_{max} ; ngược lại, đặt tại đỉnh lõm thì có thể cho S_{min} .

$$S'_i = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i + P_{th} \operatorname{tg} \alpha_t$$

$$S'_p = \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i + P_{th} \operatorname{tg} \alpha_p$$

$$\Delta S' = P_{th} (\operatorname{tg} \alpha_p - \operatorname{tg} \alpha_t)$$

$$\Delta S' = P_{th} \Delta \operatorname{tg} \alpha \begin{cases} < 0, \text{ nếu đỉnh lồi} \rightarrow S_{max} \\ > 0, \text{ nếu đỉnh lõm} \rightarrow S_{min} \end{cases}$$



3.8 DÙNG ĐA HỀ XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ BẤT LỢI (TT)

4. Cách tìm S_{max} hoặc S_{min} trong thực tế

- Nếu đoàn tải trọng ngắt được thì chỉ đặt lên đường ảnh hưởng 1 dầm (dấu (+) để tìm S_{max} , dấu (-) để tìm S_{min}).
- Đặt tải trọng lớn lên các tung độ lớn, thường đặt P_{max} lên tung độ y_{max} (vì $S = \sum P_i y_i$).
- Nếu cần có thể thử 1 số phương án đặt tải.

3.8 DÙNG ĐA HỀ XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ BẤT LỢI (TT)

5. Khái niệm biểu đồ bao

Định nghĩa: là biểu đồ thể hiện nội lực lớn nhất và nhỏ nhất tại mỗi tiết diện, do đồng thời tĩnh tải và hoạt tải gây ra.

Thí dụ:

- Xác định các tiết diện cần tính nội lực: 0, 1,, 6.
- Vẽ biểu đồ do tĩnh tải.
- Vẽ đường ảnh hưởng các tiết diện.

Tính nội lực do hoạt tải.

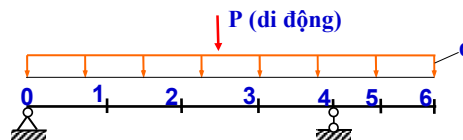
$$M_{2max}^{hoạt\ tai} = P \cdot y_{2max}$$

$$M_{2min}^{hoạt\ tai} = P \cdot y_{2min}$$

- Xác định các giá trị bao

$$M_{max}^{bao} = M_{tĩnh} + M_{max}^{hoạt\ tai}$$

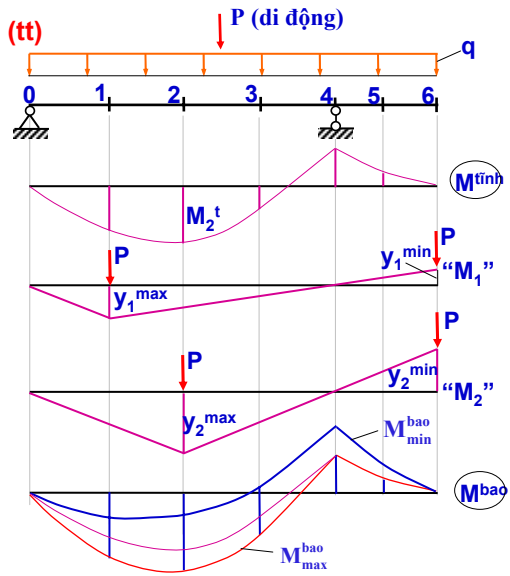
$$M_{min}^{bao} = M_{tĩnh} + M_{min}^{hoạt\ tai}$$



3.8 DÙNG ĐÀNG ĐỂ XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ BẤT LỢI (TT)

5. Khái niệm biểu đồ bao (tt)

Thí dụ (tt):



TRƯỜNG
KHOA.....



**MỘT SỐ BÀI TẬP & ĐÁP ÁN
CƠ HỌC KẾT CẤU**

MỘT SỐ BÀI TẬP & ĐÁP ÁN CƠ HỌC KẾT CẤU F1

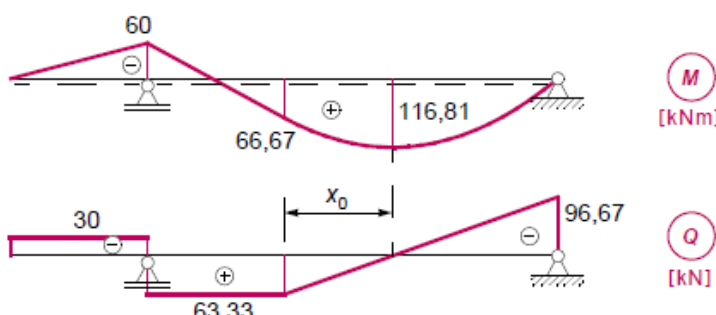
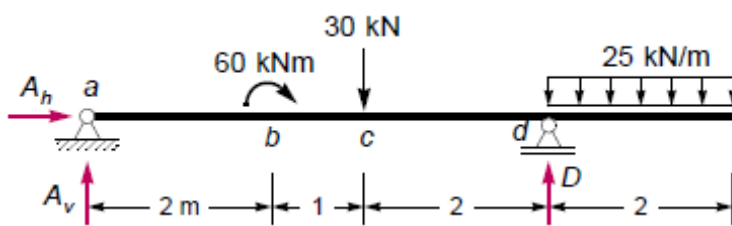
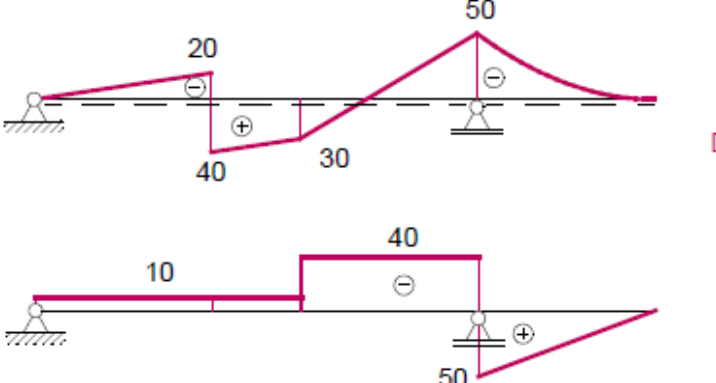
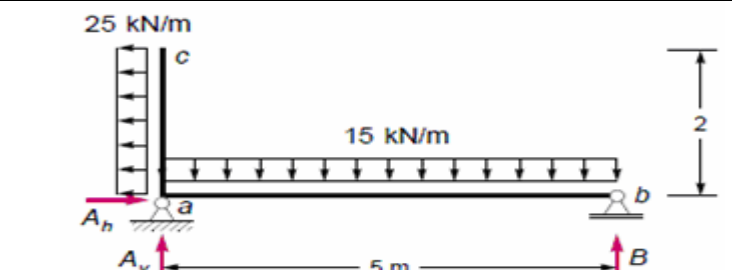
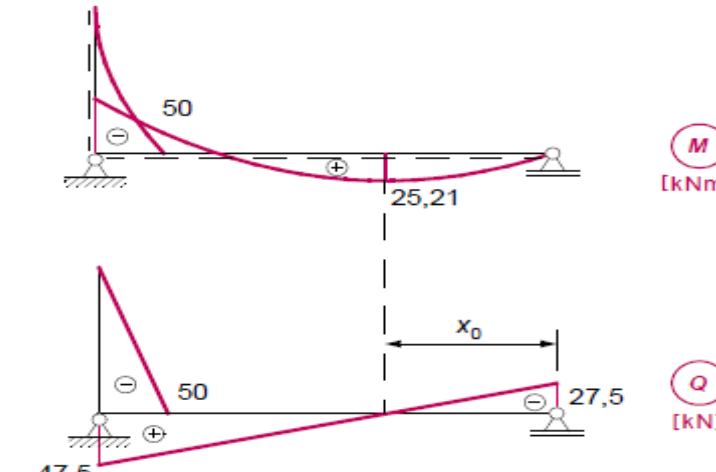
SỐ ĐỀ	ĐỀ VÀ ĐÁP ÁN	YÊU CẦU
Kết cấu dạng dầm: giản đơn, nút thừa, công xon		
1		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
2		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>

<p>3</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
<p>4</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>
	<p>$M_{\max} = \frac{102,5^2}{2 \cdot 30} = 175,1$ bei $x_0 = \frac{102,5}{30} = 3,4167$</p>	
<p>5</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>

<p>6</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>
<p>7</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>
	<p>$M_{\max} = 50 + \frac{10^2}{2 \cdot 20} = 52,5$ bei $x_0 = \frac{10}{20} = 0,5$</p>	
<p>8</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>

<p>9</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
	<p>$M_{\max} = 37,38 + \frac{37,38^2}{2 \cdot 20} = 72,31$ bei $x_0 = \frac{37,38}{20} = 1,869$</p>	
<p>10</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>

	<p style="text-align: right;"> M [kNm] </p> <p style="text-align: right;"> Q [kN] </p>	
<p>11</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>
	<p style="text-align: right;"> M [kNm] </p> <p style="text-align: right;"> Q [kN] </p>	
<p>12</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
	<p style="text-align: right;"> M [kNm] </p> <p style="text-align: right;"> Q [kN] </p> <p style="text-align: right;"> N [kN] </p>	
<p>13</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>

	$M_{\max} = 66,67 + \frac{63,33^2}{2 \cdot 40} = 116,81 \text{ bei } x_0 = \frac{63,33}{40} = 1,58$ 	
<p>14</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>
		
<p>15</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
		

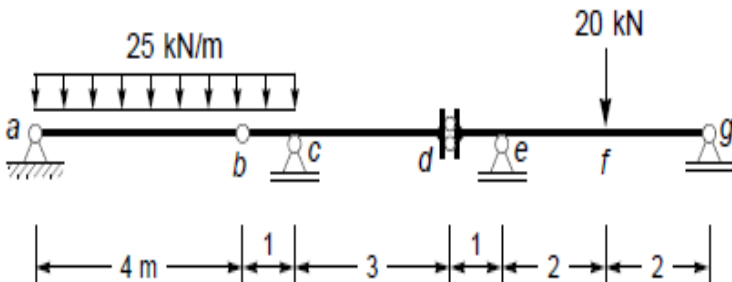
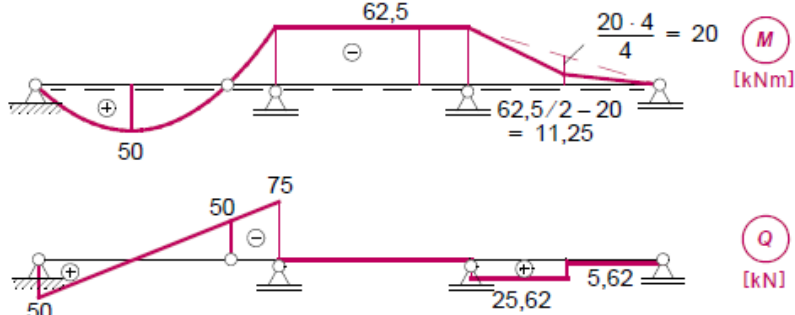
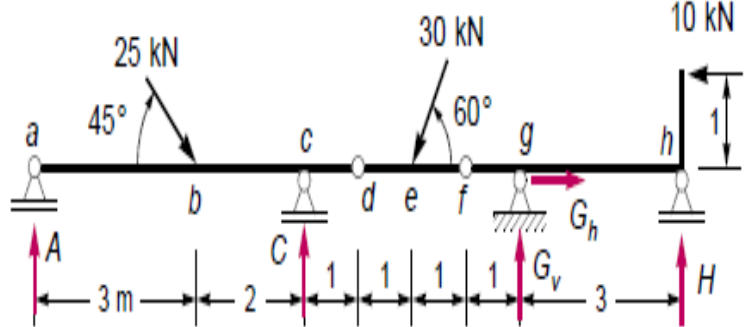

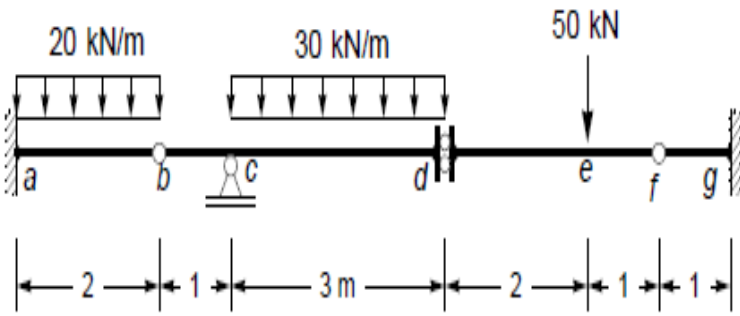
Kết cấu dạng khung		
16		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
	<p> $M_{\max} = -45 + \frac{86,67^2}{2 \cdot 40} = 48,90 \text{ bei } x_0 = \frac{86,67}{40} = 2,17$ </p>	
17		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>

<p>18</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
<p>19</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>

	$M_{\max} = \frac{29^2}{2 \cdot 12} = 35,04 \text{ bei } x_0 = \frac{29}{12} = 2,417$	
<p>20</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>

<p>21</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
	<p>M [kNm]</p> <p>Q [kN]</p> <p>N [kN]</p>	
<p>22</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
	<p>M [kNm]</p> <p>Q [kN]</p>	

Hệ dầm nhiều nhịp (Dầm ghép)		
23		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên. Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục.</p>
24		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>
25		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>

<p>26</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>
		
<p>27</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
		
<p>28</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên. Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục.</p>

<p>29</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>
<p>30</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q của kết cấu bên</p>

Hệ khung 3 khớp		
31		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
32		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>

<p>33</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>

<p>34</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
<p>35</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>

<p>36</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>

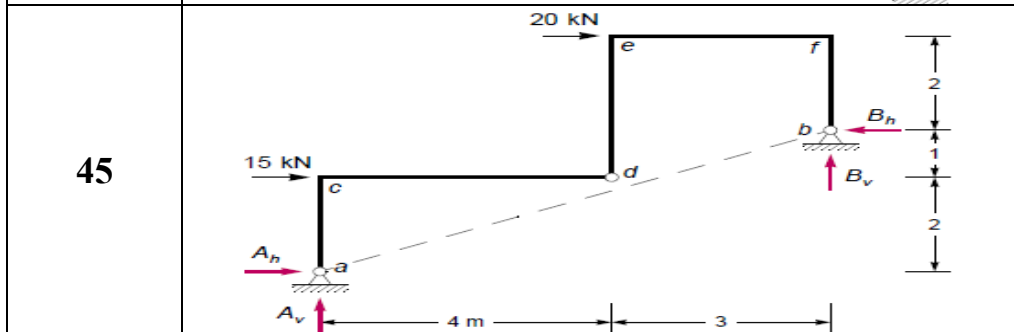
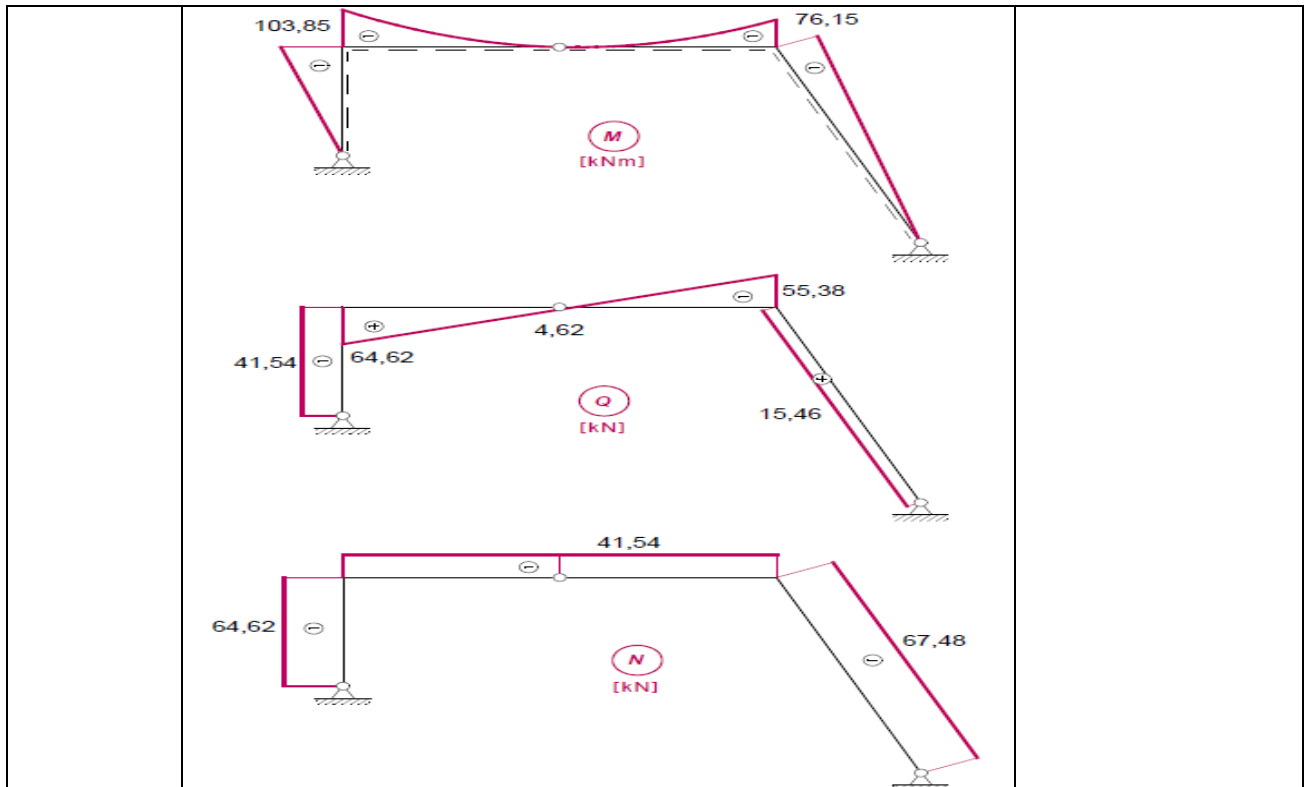
<p>37</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
<p>38</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>

<p>39</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>

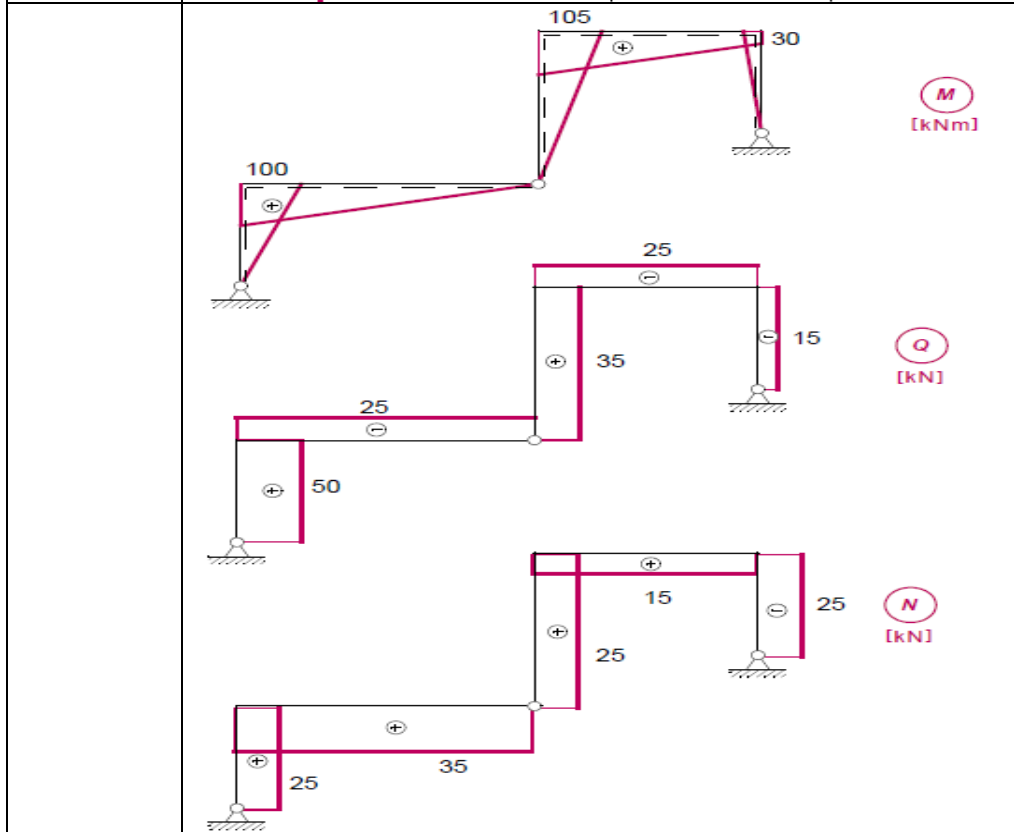
<p>40</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
<p>41</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>

<p>42</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>

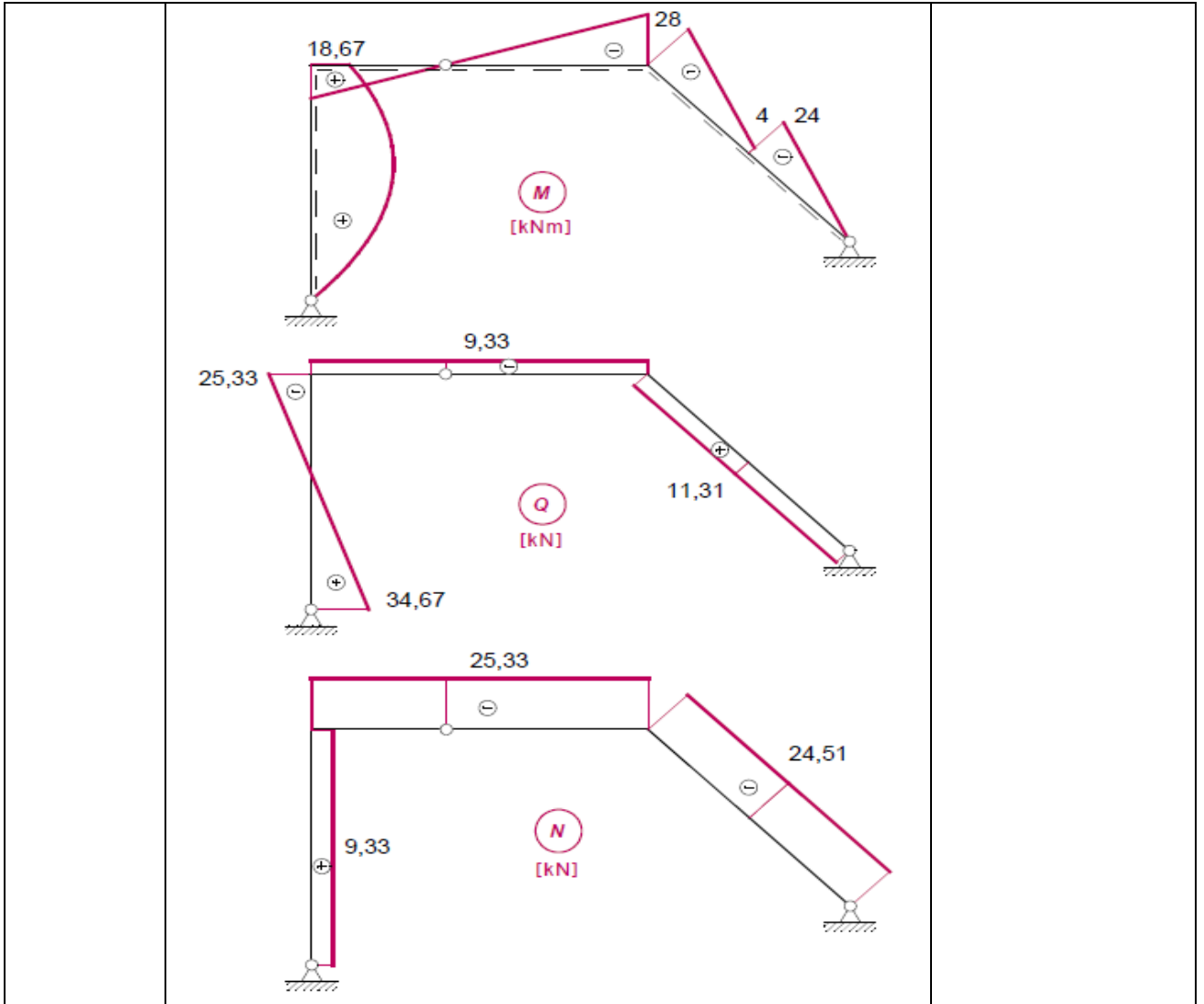
<p>43</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
<p>44</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>



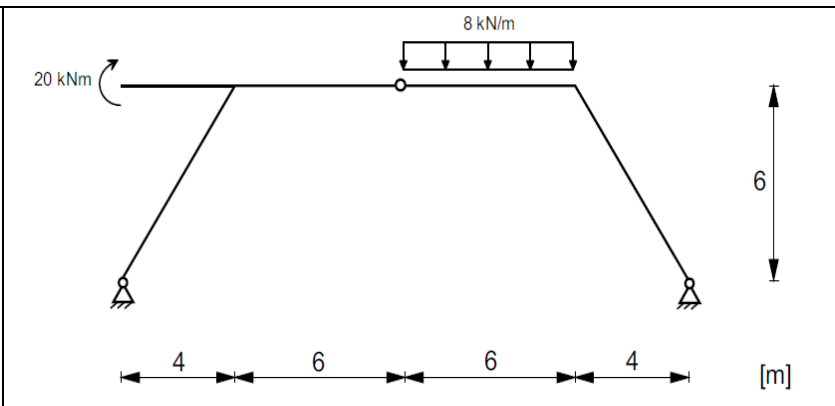
Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên



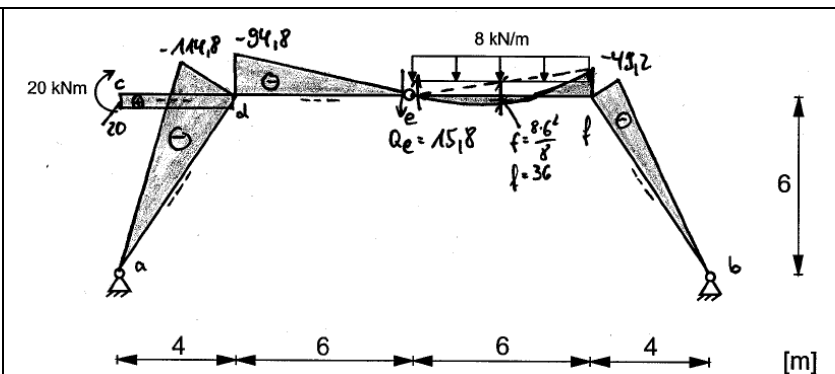
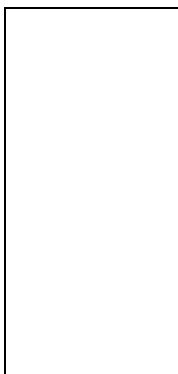
<p>46</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>
<p>47</p>		<p>Tính và vẽ biểu đồ M, Q, N của kết cấu bên</p>



48



Tính và vẽ biểu đồ mô men của kết cấu bên



**TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA XÂY DỰNG DD & CN
BỘ MÔN KẾT CẤU CÔNG TRÌNH**

**GIÁO TRÌNH
CƠ HỌC KẾT CẤU I**



ĐÀ NẴNG 6 – 2007

CHƯƠNG MỞ ĐẦU**§ 1. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU VÀ NHIỆM VỤ CỦA MÔN HỌC****I. Đối tượng nghiên cứu và nhiệm vụ của môn học:**

1. Đối tượng nghiên cứu: là vật rắn biến dạng đàn hồi, tức là có thể thay đổi hình dạng dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài.

2. Phạm vi nghiên cứu:

Phạm vi nghiên cứu của môn Cơ học kết cấu là giống môn Sức bền vật liệu nhưng gồm nhiều cấu kiện liên kết lại với nhau. Do vậy, trong kết cấu hay dùng tên gọi là hệ kết cấu.

II. Nhiệm vụ của môn học:

Nhiệm vụ chủ yếu của môn Cơ học kết cấu là đi xác định nội lực, biến dạng và chuyển vị trong công trình nhằm xây dựng công trình thỏa mãn các yêu cầu:

- *Điều kiện về độ bền:* Đảm bảo cho công trình không bị phá hoại dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài

- *Điều kiện về độ cứng:* Đảm bảo cho công trình không có chuyển vị và biến dạng vượt quá giới hạn cho phép nhằm đảm bảo sự làm việc bình thường của công trình.

- *Điều kiện về ổn định:* Đảm bảo cho công trình có khả năng bảo toàn vị trí và hình dạng ban đầu của nó dưới dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng.

Với yêu cầu về độ bền, cần đi xác định nội lực; với yêu cầu về độ cứng, cần đi xác định chuyển vị; với yêu cầu về ổn định, cần đi xác định lực tới hạn mà kết cấu có thể chịu được.

III. Các bài toán môn học giải quyết:

1. Bài toán kiểm tra: Ở bài toán này, ta đã biết trước hình dạng, kích thước cụ thể của các cấu kiện trong công trình và các nguyên nhân tác động.

Yêu cầu: kiểm tra công trình theo ba điều kiện trên (độ bền, độ cứng & ổn định) có đảm bảo hay không? Và ngoài ra còn kiểm tra công trình thiết kế có tiết kiệm nguyên vật liệu hay không?

2. Bài toán thiết kế: Ở bài toán này, ta mới chỉ biết nguyên nhân tác động bên ngoài. Yêu cầu: Xác định hình dạng, kích thước của các cấu kiện trong công trình một cách hợp lý mà vẫn đảm bảo ba điều kiện trên.

Để giải quyết bài toán này, thông thường, dựa vào kinh nghiệm hoặc dùng phương pháp thiết kế sơ bộ để giả thiết trước hình dạng, kích thước của các cấu kiện. Sau đó tiến hành giải bài toán kiểm tra như đã nói ở trên. Và trên cơ sở đó người thiết kế điều chỉnh lại giả thiết ban đầu của mình, tức là đi giải bài toán lặp.

IV. Vị trí của môn học:

Là môn học kỹ thuật cơ sở làm nền tảng cho các môn học chuyên ngành như: kết cấu bê tông, kết cấu thép & gỗ, kỹ thuật thi công...

Trang bị cho người làm công tác xây dựng những kiến thức hữu ích.

§2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

I. Sơ đồ công trình:

1. Khái niệm: Sơ đồ công trình là hình ảnh đơn giản hóa mà vẫn đảm bảo phản ánh được chính xác sự làm việc thực tế của công trình và phải dùng để tính toán được.

2. Các yếu tố ảnh hưởng đến việc chọn sơ đồ tính:

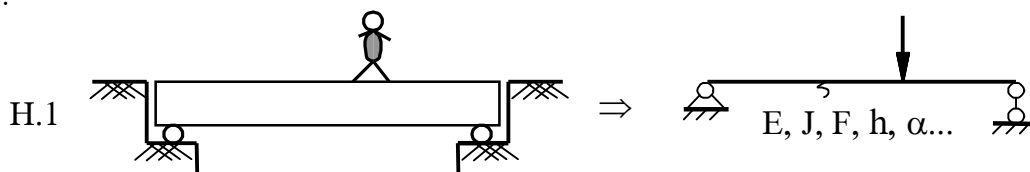
- Hình dạng, kích thước của công trình.
- Tỷ lệ độ cứng của các cấu kiện.
- Tầm quan trọng của công trình.
- Khả năng tính toán của người thiết kế.
- Tải trọng và tính chất tác dụng của nó.
- v.v.v

3. Các bước lựa chọn sơ đồ tính:

a. Bước 1: Đưa công trình thực về sơ đồ công trình:

- Thay các thanh bằng đường trục thanh.
- Thay các bản và vỏ bằng các mặt trung gian.
- Thay tiết diện, vật liệu bằng các đại lượng đặc trưng: diện tích (F), mômen quán tính (J), môđun đàn hồi (E), hệ số giãn nở vì nhiệt (α) ...
- Thay thiết bị tựa bằng các liên kết lý tưởng.
- Đưa tải trọng tác dụng lên mặt cấu kiện về trục cấu kiện.

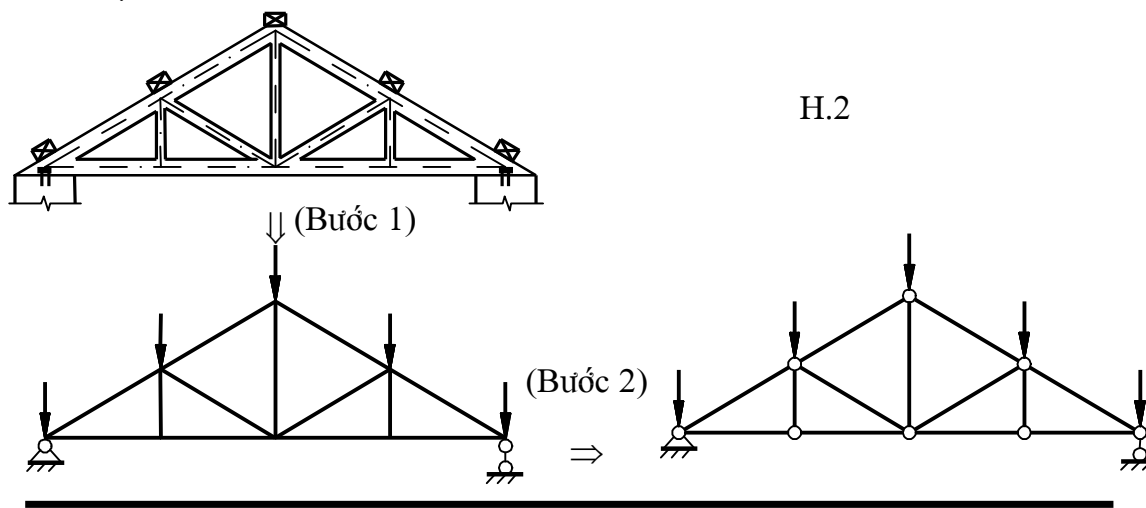
Ví dụ:



b. Bước 2: Đưa sơ đồ công trình về sơ đồ tính:

Trong một số trường hợp, sơ đồ công trình đưa về chưa phù hợp với khả năng tính toán, ta loại bỏ những yếu tố thứ yếu để đơn giản bài toán và đưa về sơ đồ tính, tính được.

Ví dụ:

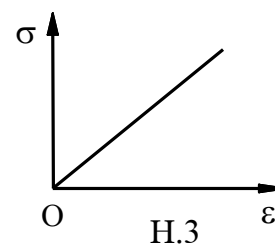


§ 3. CÁC GIẢ THIẾT ĐỂ TÍNH TOÁN VÀ NGUYÊN LÝ CỘNG TÁC DỤNG

I. Các giả thiết tính toán:

1. Điều kiện vật lý của bài toán:

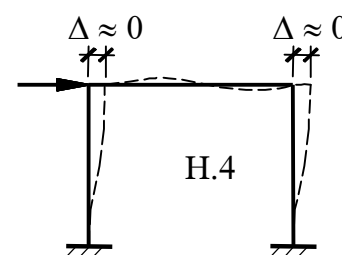
Giả thiết rằng vật liệu là đàn hồi tuyệt đối và tuân theo định luật Hook, nghĩa là quan hệ giữa nội lực và biến dạng là quan hệ tuyến tính ($\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$).



Chú ý: Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là đàn hồi tuyến tính (tuyến tính vật lý). Nếu không chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là đàn hồi phi tuyến (phi tuyến vật lý).

2. Điều kiện hình học của bài toán:

Chuyển vị và biến dạng được xem như là những đại lượng vô cùng bé. Do vậy khi tính toán, xem công trình là không có biến dạng.



Chú ý: Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là tuyến tính hình học. Nếu không chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là phi tuyến hình học.

II. Nguyên lý cộng tác dụng:

1. Phát biểu: Một đại lượng nghiên cứu S (nội lực, phản lực, chuyển vị...) do một số các nguyên nhân đồng thời tác dụng gây ra sẽ bằng tổng đại số hay tổng hình học của đại lượng S do từng nguyên nhân tác dụng riêng rẽ gây ra.

Lấy tổng đại số khi đại lượng S là đại lượng vô hướng, lấy tổng hình học khi đại lượng S là đại lượng véc tơ.

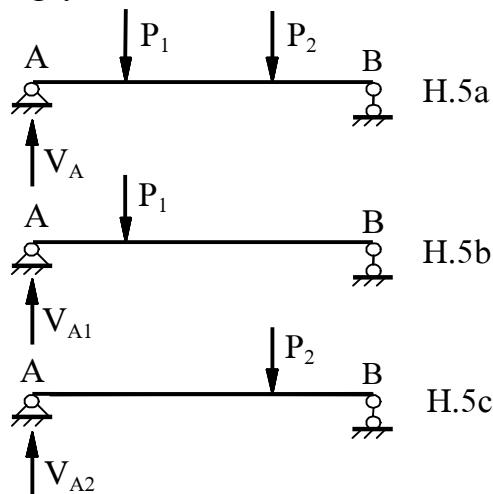
Ví dụ: Xét dầm chịu tác dụng của 2 lực P_1 & P_2 và đại lượng nghiên cứu S là phản lực V_A trên hình (H.5a)

Xét chính dầm đó nhưng chịu tác dụng riêng rẽ của 2 lực P_1, P_2 trên hình (H.5b) & (H.5c).

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{A1} + \vec{V}_{A2}.$$

Và nếu xét toàn diện, thì hệ (H.5a) bằng tổng của hai hệ (H.5b) & (H.5c).



2. Biểu thức giải tích của nguyên lý cộng tác dụng:

$$S(P_1, P_2, \dots, P_n) = S(P_1) + S(P_2) + \dots + S(P_n)$$

- $S(P_1, P_2, \dots, P_n)$: là đại lượng S do các nguyên nhân P_1, P_2, \dots, P_n đồng thời tác dụng lên hệ gây ra.

- $S(P_k)$: là đại lượng S do riêng P_k tác dụng lên hệ gây ra.

Gọi \bar{S}_k là đại lượng S do riêng $P_k = 1$ gây ra. Tức là $S(P_k) = \bar{S}_k \cdot P_k$

$$\text{Vậy } S(P_1, P_2, \dots, P_n) = \bar{S}_1 \cdot P_1 + \bar{S}_2 \cdot P_2 + \dots + \bar{S}_n \cdot P_n$$

Chú ý: Nguyên lý cộng tác dụng chỉ áp dụng cho hệ tuyến tính vật lý cũng như tuyến tính hình học.

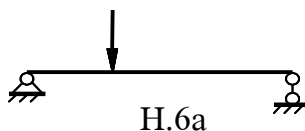
§ 4. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH

I. Phân loại theo sơ đồ tính:

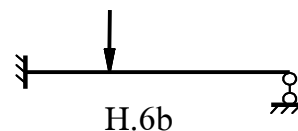
1. Hệ phẳng: khi tất cả các cấu kiện cùng thuộc một mặt phẳng và tải trọng tác dụng cũng nằm trong mặt phẳng đó.

Các loại hệ phẳng:

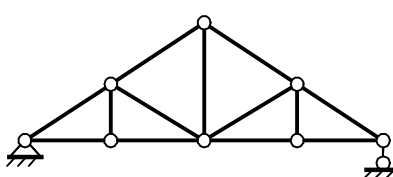
- Dầm (H.6)
- Dàn (H.7)
- Vòm (H.8)



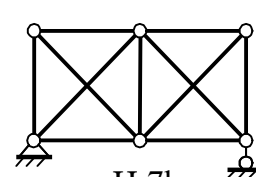
H.6a



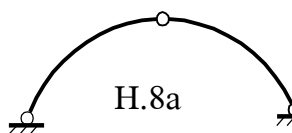
H.6b



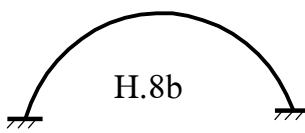
H.7a



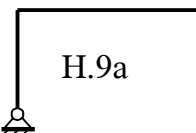
H.7b



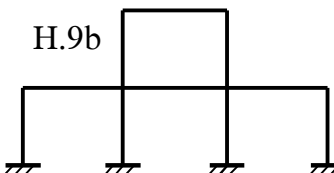
H.8a



H.8b

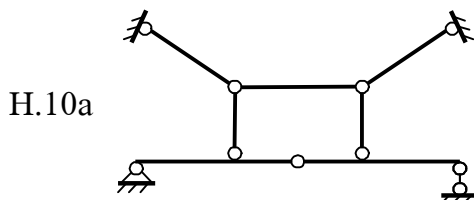


H.9a

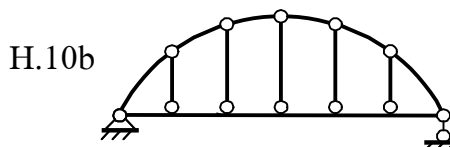


H.9b

- Khung (H.9)
- Hệ liên hợp (H.10)



H.10a

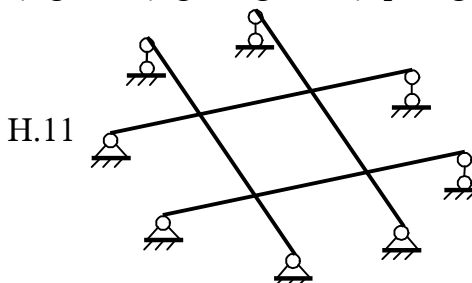


H.10b

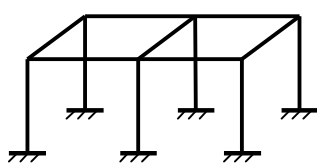
2. Hệ không gian: khi các cấu kiện không cùng nằm trong một mặt phẳng, hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng nhưng tải trọng tác dụng ra ngoài mặt phẳng đó.

Các loại hệ không gian:

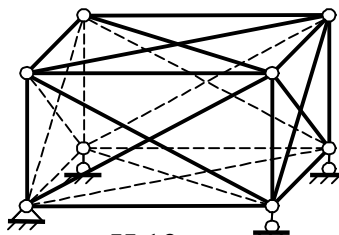
- Hệ dầm trực giao (H.11)
- Khung không gian (H.12)
- Dàn không gian (H.13)
- Bản (H.14)
- Vỏ (H.15)



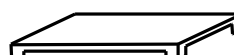
H.11



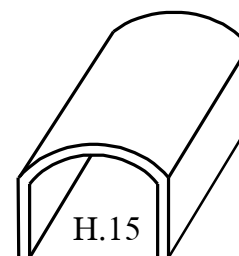
H.12



H.13



H.14



H.15

II. Phân loại theo phương pháp tính:

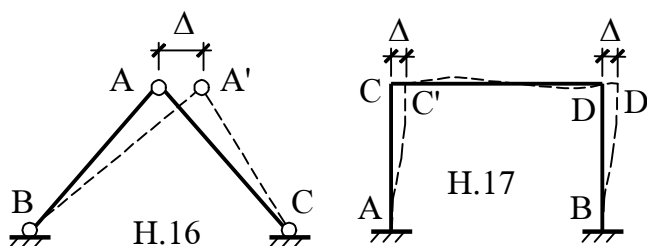
1. Dựa vào sự cần thiết hay không phải sử dụng điều kiện động học khi xác định toàn bộ các phản lực và nội lực trong hệ, người ta chia ra hai loại hệ:

a. Hệ tĩnh định: là loại hệ mà chỉ bằng các điều kiện tĩnh học có thể xác định được toàn bộ nội lực và phản lực trong hệ. Ví dụ các hệ trên hình a từ (H.6) đến (H.10).

b. Hệ siêu tĩnh: là loại hệ mà chỉ bằng các điều kiện tĩnh học thì chưa đủ để xác định toàn bộ các nội lực và phản lực mà còn phải sử dụng thêm điều kiện động học và điều kiện vật lý. Ví dụ các hệ trên hình b từ (H.6) đến (H.10).

2. Dựa vào sự cần thiết hay không phải sử dụng điều kiện cân tĩnh học khi xác định biến dạng trong hệ khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức, người ta chia ra hai loại hệ:

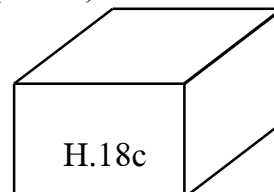
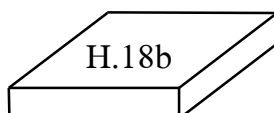
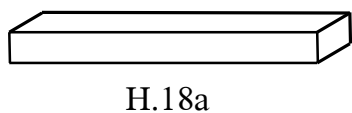
a. Hệ xác định động: là loại hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, có thể xác định biến dạng của hệ chỉ bằng các điều kiện động học (hình học). Ví dụ hệ cho trên hình (H.16).



b. Hệ siêu động: là loại hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ bằng các điều kiện động học thì chưa thể xác định được biến dạng của hệ mà cần phải sử dụng thêm điều kiện tĩnh học. Ví dụ hệ cho trên hình (H.17).

III. Phân loại theo kích thước tương đối của các cấu kiện:

- Thanh: nếu kích thước một phương khá lớn hơn hai phương còn lại (H.18a).
- Bản: nếu kích thước của hai phương khá lớn hơn phương còn lại (H.18b).
- Khối: nếu kích thước của ba phương gần bằng nhau (H.18c)



IV. Phân loại theo khả năng thay đổi hình dạng hình học:

- Hệ biến hình.
- Hệ biến hình tức thời.
- Hệ bất biến hình.

§ 5. CÁC NGUYÊN NHÂN GÂY RA NỘI LỰC, BIẾN DẠNG VÀ CHUYỂN VỊ

I. Tải trọng: gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị trong tất cả các loại hệ.

Phân loại tải trọng:

- Theo thời gian tác dụng: tải trọng lâu dài (như trọng lượng bản thân công trình...) còn được gọi là tĩnh tải và tải trọng tạm thời (như tải trọng do gió, do con người đi lại khi sử dụng..) còn được gọi là hoạt tải.

- Theo sự thay đổi vị trí tác dụng: tải trọng bất động và tải trọng di động.

- Theo tính chất tác dụng có gây ra lực quán tính hay không: tải trọng tác dụng tĩnh và tải trọng tác dụng động.

Ngoài ra, còn phân loại tải trọng theo hình thức tác dụng của tải trọng: tải trọng tập trung, tải trọng phân bố...

II. Sự thay đổi nhiệt độ: chính là sự thay đổi nhiệt độ tác dụng lên công trình khi làm việc so với lúc chế tạo ra nó.

Đối với hệ tĩnh định, tác nhân này chỉ gây ra biến dạng và chuyển vị, không gây ra nội lực, còn đối với hệ siêu tĩnh thì gây ra đồng thời cả ba yếu tố trên.

III. Chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa (lún) và do chế tạo lắp ráp không chính xác.

Đối với hệ tĩnh định, tác nhân này chỉ gây ra chuyển vị, không gây ra biến dạng và nội lực; còn đối với hệ siêu tĩnh thì gây ra đồng thời cả ba yếu tố trên.

CHƯƠNG 1

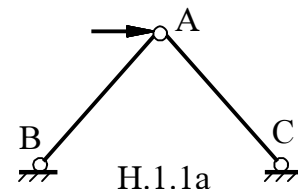
PHÂN TÍCH CẤU TẠO HÌNH HỌC CỦA HỆ PHẪNG

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM

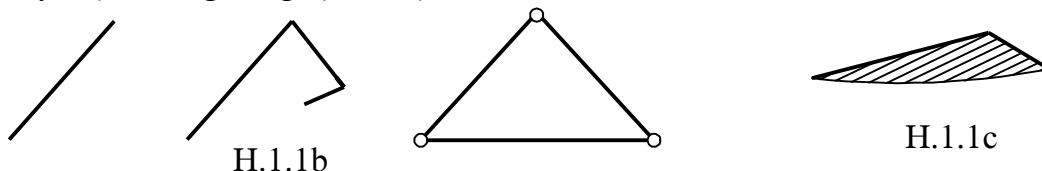
I. Hệ bất biến hình (BBH): là hệ không có sự thay đổi hình dạng hình học dưới tác dụng của tải trọng nếu xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Phân tích hệ hình vẽ (H.1.1a)

Nếu quan niệm AB, BC, trái đất là tuyệt đối cứng, tức là $l_{AB}, l_{BC}, l_{CA} = \text{const}$ thì tam giác ABC là duy nhất, nên hệ đã cho là hệ BBH.



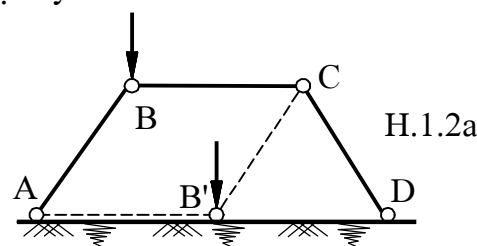
- Một hệ BBH một cách rõ rệt gọi chung là miếng cứng (tấm cứng)
- Các loại miếng cứng: (H.1.1b)
- Ký hiệu miếng cứng: (H.1.1c)



* *Chú ý:* Do hệ BBH có khả năng chịu lực tác dụng nên nó được sử dụng làm các kết cấu xây dựng và thực tế là chủ yếu sử dụng loại hệ này.

II. Hệ không bất biến hình:

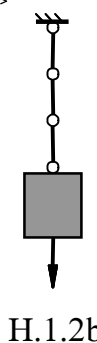
1. Hệ biến hình (BH): là hệ có sự thay đổi hình dạng hình học một lượng hữu hạn dưới tác dụng của tải trọng mặc dù xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.



Ví dụ: Hệ ABCD cho trên hình (H.1.2a) có thể đổ thành hệ AB'CD, nên hệ đã cho là hệ BH.

* *Chú ý:* Do hệ BH không có khả năng chịu tải trọng tác dụng nên các kết cấu xây dựng không sử dụng loại hệ này.

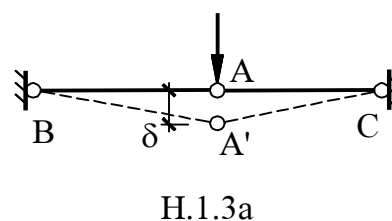
Hệ BH trên hình (H.1.2b) cho phép sử dụng vì theo phương đứng, tải trọng tác dụng lên hệ ở trạng thái cân bằng.



2. Hệ biến hình tức thời (BHTT): là hệ có sự thay đổi hình dạng hình học một lượng vô cùng bé dưới tác dụng của tải trọng mặc dù xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Hệ ABC có cấu tạo như trên hình (H.1.3a), khớp A có thể đi xuống một đoạn vô cùng bé δ , nên hệ đã cho là hệ BHTT.

* *Chú ý:* Các kết cấu xây dựng không sử dụng hệ BHTT hay hệ gần BHTT (là hệ mà chỉ cần thay đổi một lượng vô cùng bé hình dạng hình học sẽ trở thành hệ BHTT, ví dụ hệ BA'C trên hình (H.1.3a) vì nội lực



trong hệ gần BHTT rất lớn.

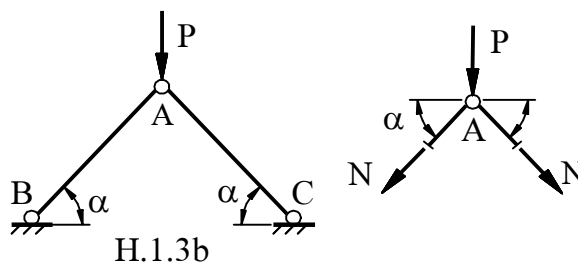
Thật vậy, xét hệ trên hình (H.1.3b).

Lực dọc trong hai thanh AB và AC là N.

$$N = -\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha}$$

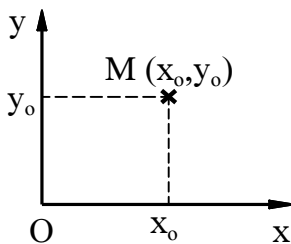
Khi $\alpha \rightarrow 0$, hệ BAC tiến đến hệ gần BHTT.

$$N = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha}\right) \rightarrow \infty$$

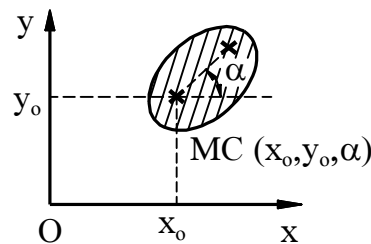


III. Bậc tự do: là số các thông số độc lập đủ để xác định vị trí của một hệ so với một hệ cố định khác.

Trong hệ phẳng, một chất điểm có bậc tự do bằng 2 (H.1.4a); một miếng cứng có bậc tự do bằng 3 (H.1.4b).



H.1.4a



H.1.4b

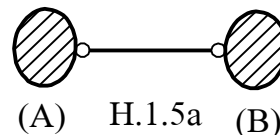
§ 2. CÁC LOẠI LIÊN KẾT VÀ TÍNH CHẤT CỦA LIÊN KẾT

I. Liên kết đơn giản: là liên kết nối hai miếng cứng với nhau.

Các loại liên kết đơn giản

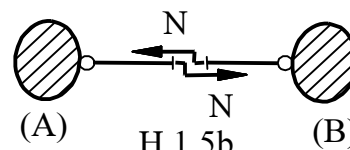
1. Liên kết thanh: (liên kết loại một)

a. Cấu tạo: Gồm một thanh thẳng không chịu tải trọng có hai khớp lý tưởng ở hai đầu. (H.1.5a)



b. Tính chất của liên kết:

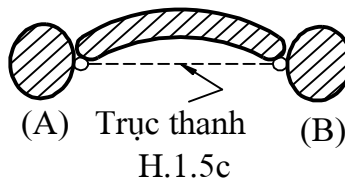
+ Về mặt động học: liên kết thanh không cho miếng cứng di chuyển theo phương dọc trục thanh, tức là khử được một bậc tự do



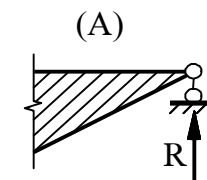
+ Về mặt tĩnh học: tại liên kết chỉ có thể phát sinh một thành phần phản lực theo phương dọc trục thanh (H.1.5b).

* **Kết luận:** liên kết thanh khử được một bậc tự do và làm phát sinh một thành phần phản lực theo phương liên kết.

* **Trường hợp đặc biệt:** một miếng cứng có hai đầu khớp và không chịu tải trọng thì có thể như một liên kết thanh, có trục thanh là đường nối hai khớp (H.1.5c).



H.1.5c



H.1.5d

* **Chú ý:** liên kết thanh là mở rộng của khái niệm gối di động nối đất (H.1.5d).

2. Liên kết khớp: (liên kết loại 2)

a. Cấu tạo: Gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp lý tưởng (H.1.6a).

b. Tính chất:

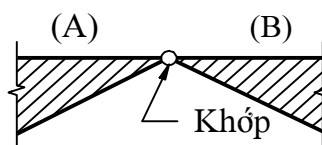
+ Về mặt động học: liên kết khớp không cho miếng cứng chuyển vị thẳng (nhưng có thể xoay), tức là khử được hai bậc tự do.

+ Về mặt tĩnh học: tại liên kết có thể phát sinh một thành phần phản lực có phương chưa biết. Phản lực này thường được phân tích thành hai thành phần theo hai phương xác định (H.1.6b).

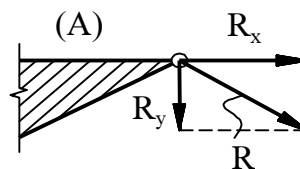
* *Kết luận:* liên kết khớp khử được hai bậc tự do và làm phát sinh hai thành phần phản lực.

* *Trường hợp đặc biệt:* hai liên kết thanh có thể xem là một liên kết khớp (khớp giả tạo), có vị trí tại giao điểm đường nối hai trục thanh (H.1.6c).

* *Chú ý:* liên kết khớp là mở rộng của khái niệm gối cố định nối đất (H.1.6d)

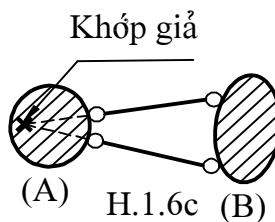


H.1.6a

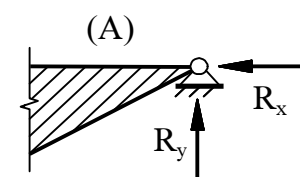


$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$

H.1.6b



H.1.6c



H.1.6d

3. Liên kết hàn: (liên kết loại 3)

a. Cấu tạo: Gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một mối hàn (H.1.7a).

b. Tính chất:

+ Về mặt động học: liên kết hàn không cho miếng cứng có chuyển vị, tức là khử được 3 bậc tự do.

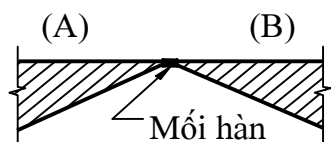
+ Về mặt tĩnh học: liên kết có thể làm phát sinh một thành phần phản lực có phương và vị trí chưa biết. Thường đưa phản lực này về tại vị trí liên kết và phân tích thành ba thành phần (M, \vec{R}_x, \vec{R}_y) (H.1.7b)

* *Kết luận:* liên kết hàn khử được ba bậc tự do và làm phát sinh ba thành phần phản lực.

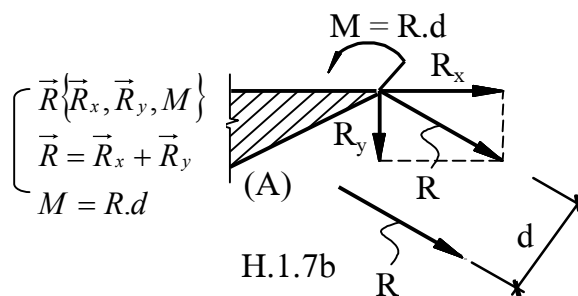
* *Chú ý:*

- Liên kết hàn tương đương với ba liên kết thanh hoặc một liên kết thanh và một liên kết khớp được sắp xếp một cách hợp lý.

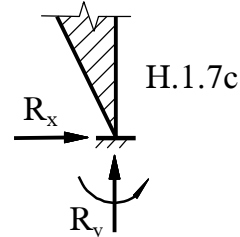
- Liên kết hàn là mở rộng của khái niệm liên kết ngàm nối đất (H.1.7c)



H.1.7a

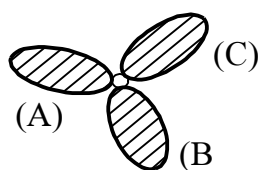


H.1.7b

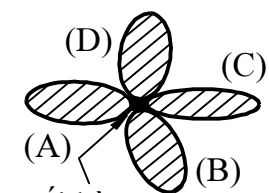


H.1.7c

II. Liên kết phức tạp: là liên kết nối nhiều miếng cứng với nhau, số miếng cứng lớn hơn hai.



H.1.8a



H.1.8b

Về mặt cấu tạo, chỉ có liên kết khớp phức tạp (H.1.8a) và hàn phức tạp (H.1.8b).

* **Độ phức tạp của liên kết:** là số liên kết đơn giản cùng loại, tương đương với liên kết đã cho. Ký hiệu p.

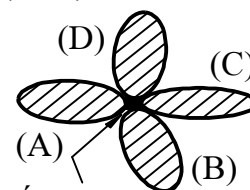
* **Công thức xác định độ phức tạp:**

$$p = D - 1$$

(1 - 1)

D: số miếng cứng quy tụ vào liên kết.

* *Ví dụ:* Xác định độ phức tạp của liên kết hàn trên hình (H.1.8c)



$$p = D - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Có nghĩa là liên kết hàn phức tạp đã cho tương đương với ba liên kết hàn đơn giản.

Mỗi hàn
H.1.8c

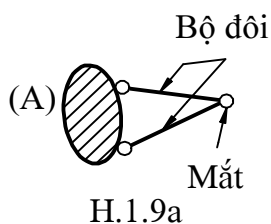
§.3 CÁCH NỐI CÁC MIÉNG CỨNG THÀNH HỆ BẤT BIẾN HÌNH

I. Nối một điểm (mắt) vào một miếng cứng:

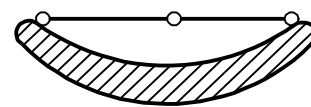
a. **Điều kiện cần:** để nối một điểm vào miếng cứng cần phải khử hai bậc tự do của nó. Nghĩa là cần dùng hai liên kết thanh (H.1.9a).

b. **Điều kiện đủ:** hai liên kết thanh không được thẳng hàng.

Hai liên kết thanh không thẳng hàng nối một điểm vào miếng cứng gọi là bộ đôi (H.1.9a).



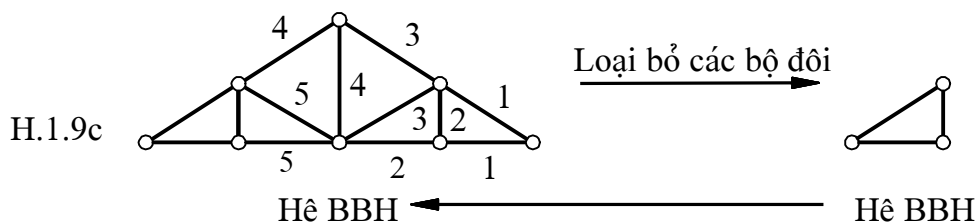
H.1.9a



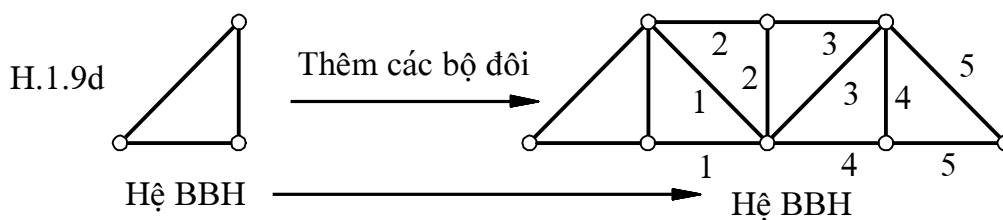
Hệ BHTT
H.1.9b

* *Tính chất của bộ đôi:* khi thêm hay bớt lần lượt các bộ đôi thì tính chất động học của hệ không thay đổi. Tính chất này được sử dụng để phân tích cấu tạo hình học của hệ, và phân tích theo hai hướng sau:

+ Phương pháp thu hẹp miếng cứng: từ hệ ban đầu, lần lượt loại bỏ dần các bộ đôi để đưa về hệ đơn giản cuối cùng. Nếu hệ thu được là BBH hay BH thì hệ ban đầu cũng BBH hay BH. Ví dụ hệ trên hình (H.1.9c)



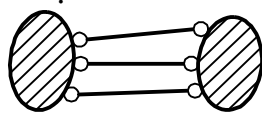
+ Phương pháp phát triển miếng cứng: từ miếng cứng ban đầu, thêm lần lượt các bộ đôi thì cuối cùng thu được miếng cứng. Ví dụ hệ trên hình (H.1.9d)



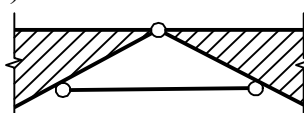
II. Cách nối hai miếng cứng:

1. Điều kiện cần: Xem một miếng cứng là cố định. Để nối miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định cần khử ba bậc tự do của nó, nghĩa là cần sử dụng tổ hợp các liên kết:

- + Ba liên kết thanh (H.1.10a).
- + Một liên kết thanh cộng một liên kết khớp (H.1.10b).
- + Một liên kết hàn (H.1.10c).



(A) H.1.10a (B)



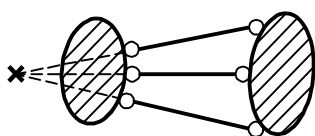
(A) H.1.10b (B)



(A) H.1.10c (B)

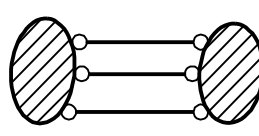
2. Điều kiện đủ:

a. Nếu sử dụng ba liên kết thanh: yêu cầu ba thanh không được đồng quy hoặc song song (H.1.10d, H.1.10e & H.1.10f).



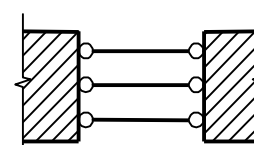
(A) (BHTT) (B)

H.1.10d



(A) (BHTT) (B)

H.1.10e

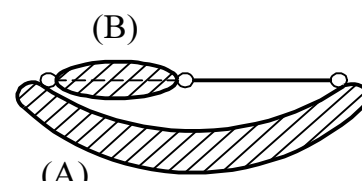


(A) (BH) (B)

H.1.10f

b. Nếu sử dụng một liên kết thanh cộng một liên kết khớp: yêu cầu khớp không được nằm trên đường trục thanh (H.1.10g).

c. Nếu sử dụng liên kết hàn: thì đó cũng là điều kiện đủ.



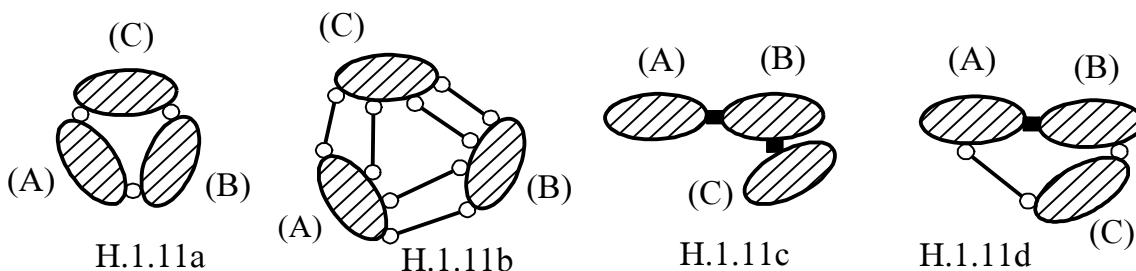
(A) Hệ BHTT

H.1.10g

III. Cách nối ba miếng cứng:

1. Điều kiện cần: xem một miếng cứng là cố định. Để nối hai miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định cần phải khử sáu bậc tự do, nghĩa là cần phải sử dụng tổ hợp các liên kết:

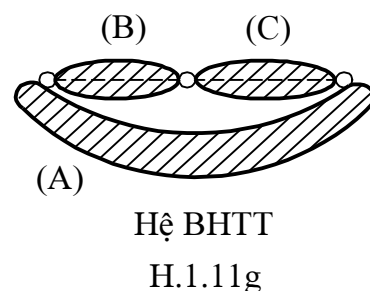
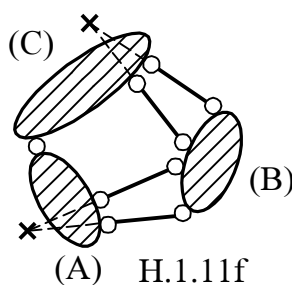
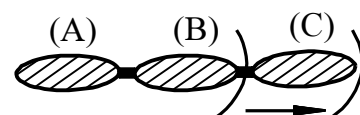
- + Ba liên kết khớp (H.1.11a).
- + Sáu liên kết thanh (H.1.11b).
- + Hai liên kết hàn (H.1.11c).
- + Một liên kết thanh cộng một liên kết khớp cộng một liên kết hàn (H.1.11d).
- + v.v.v.



2. Điều kiện đủ:

+ Nếu các miếng cứng nối lần lượt với nhau: trở về lại bài toán nối hai miếng cứng. Ví dụ (H.1.11e).

+ Nếu các miếng cứng nối đồng thời với nhau (nếu loại bỏ một miếng cứng bất kỳ, hệ còn lại bị biến hình): lúc này hệ cần sử dụng ba liên kết khớp (thực hoặc giả tạo) tương hỗ (H.1.11f). Và yêu cầu các liên kết khớp không cùng nằm trên một đường thẳng (H.1.11g).



IV. Cách nối nhiều miếng cứng:

1. Điều kiện cần:

a. Trường hợp hệ bất kỳ không nối đất:

Xét một hệ không nối đất gồm D miếng cứng. Các liên kết giữa các miếng cứng là: T liên kết thanh, K liên kết khớp đã quy về khớp đơn giản và H liên kết hàn đã quy về hàn đơn giản.

Xem một miếng cứng là cố định. Nối (D - 1) miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định, nghĩa là cần phải khử 3.(D-1) bậc tự do. Đó là yêu cầu.

Về khả năng: T, K, H khử được T + 2.K + 3.H bậc tự do.

Như vậy, điều kiện cần để hệ BBH là

$$n = T + 2.K + 3.H - 3.(D - 1) \geq 0 \quad (1 - 2)$$

* Các trường hợp của n:

+ n = 0 và hệ đã cho là hệ BBH thì hệ là hệ tĩnh.

+ n > 0 và hệ đã cho là hệ BBH thì hệ là hệ siêu tĩnh.

+ n < 0 thì hệ là hệ BH.

b. Trường hợp hệ bất kỳ có nối đất:

Xét một hệ nối đất gồm D miếng cứng. Các liên kết giữa các miếng cứng là: T liên kết thanh, K liên kết khớp đã quy về khớp đơn giản và H liên kết hàn đã quy về hàn đơn giản. Liên kết giữa hệ và trái đất gồm C liên kết đã quy về liên kết loại một.

Xem trái đất là cố định. Nối D miếng cứng còn lại vào trái đất, nghĩa là phải khử 3.D bậc tự do. Đó là yêu cầu.

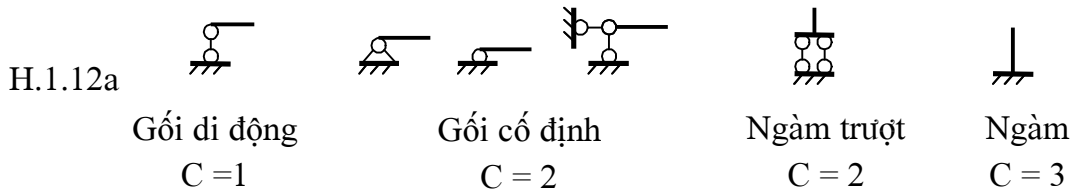
Về khả năng: T, K, H, C khử được T + 2.K + 3.H + C bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D \geq 0 \quad (1 - 3)$$

* Các trường hợp của n: tương tự như trên

* Các loại liên kết nối đất (H.1.12a):



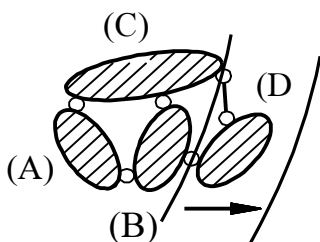
2. Điều kiện đủ:

Thường sử dụng tính chất của bộ đôi, cách nối hai hoặc ba miếng cứng nhằm thu hẹp hoặc phát triển hệ đến mức tối đa cho phép. Nếu kết quả thu được:

+ Một miếng cứng: hệ đã cho là BBH.

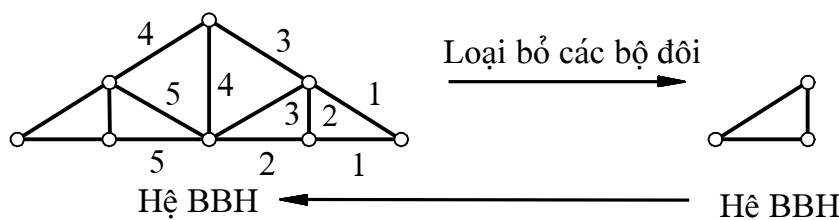
+ Hai hoặc ba miếng cứng: sử dụng điều kiện đủ của bài toán nối hai, ba miếng cứng đã biết để phân tích tiếp.

Ví dụ:



(Phát triển miếng cứng)

H.1.12b



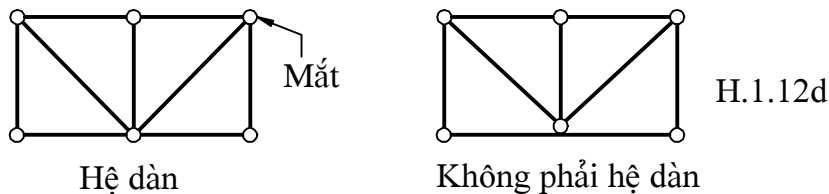
(Thu hẹp miếng cứng)

H.1.12c

* Ngoài ra còn sử dụng phương pháp tải trọng bằng không hoặc phương pháp động học để khảo sát. Xem giáo trình môn Cơ học kết cấu - Lê Thọ Trình.

V. Trường hợp đặc biệt: Hệ dàn.

Hệ dàn là hệ gồm những thanh thẳng liên kết với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh.



* Đối với hệ dàn cũng cho phép áp dụng công thức (1 - 2) hoặc (1 - 3) để khảo sát điều kiện cần. Tuy nhiên, trong hệ dàn, các liên kết khớp thường là khớp phức tạp cần quy đổi về khớp đơn giản. Cách làm như vậy thường dễ nhầm lẫn. Dưới đây sẽ trình bày một cách khác thuận lợi hơn mà không phải quan tâm đến độ phức tạp của các liên kết khớp.

1. Trường hợp hệ dàn không nối đất:

Xét hệ dàn không nối đất gồm D thanh dàn và M mắt.

Xem một thanh dàn là miếng cứng cố định, còn lại (D - 1) thanh. Và đi nối (M - 2) mắt còn lại vào miếng cứng cố định, nghĩa là cần phải khử 2.(M - 2) bậc tự do.

Xem các thanh dàn là các liên kết thanh. Như vậy, (D - 1) thanh còn lại có khả năng khử được (D - 1) bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là:

$$n = (D - 1) - 2.(M - 2) = D - 2.M + 3 \geq 0 \quad (1 - 4)$$

2. Trường hợp hệ dàn nối đất:

Xét hệ dàn gồm D thanh dàn và M mắt. Ngoài ra hệ dàn còn nối đất bằng số liên kết tương đương C liên kết loại một. Nối M mắt vào miếng cứng cố định. Nghĩa là cần khử 2.M bậc tự do.

Xem các thanh dàn là các liên kết thanh. Như vậy, D thanh dàn có khả năng khử được D bậc tự do. Ngoài ra các liên kết nối đất khử được C bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là:

$$n = D - 2M + C \quad (1 - 5)$$

* *Chú ý:* - Các trường hợp của n và điều kiện đủ vẫn như trường hợp tổng quát.

CÁC VÍ DỤ

**Ví dụ 1: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình H.1.13a*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất nên điều kiện cần sử dụng biểu thức (1 - 3). Có thể giải bài toán theo nhiều quan niệm khác nhau:

a. Quan niệm mỗi đoạn thanh thẳng là một miếng cứng:

Lúc này D = 5, T = 0, K = 1, H = 3, C = 4. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 0 + 2.1 + 3.3 + 4 - 3.5 = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

b. Quan niệm mỗi thanh gãy khúc là một miếng cứng (quan niệm số miếng cứng tối thiểu):

Lúc này D = 2 (ab, bce), T = 0, K = 1, H = 0, C = 4. Thay vào (1 - 3)

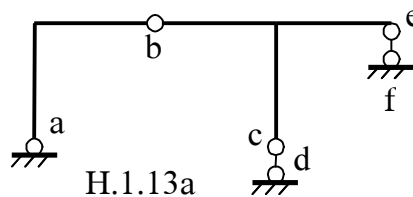
$$n = 0 + 2.1 + 3.0 + 4 - 3.2 = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

c. Quan niệm trái đất là một miếng cứng:

Lúc này xem hệ là không nối đất nên điều kiện cần sử dụng biểu thức (1 - 2).

Lúc này D = 3 (ab, bce và trái đất), T = 2, K = 2, H = 0. Thay vào (1 - 2)



H.1.13a

$$N = 2 + 2.2 + 3.0 - 3.(3 - 1) = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

* Nhận xét: - Có nhiều cách quan niệm miếng cứng khác nhau, và có ảnh hưởng đến số lượng miếng cứng và các liên kết.

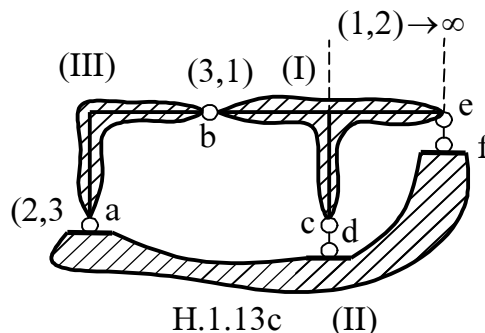
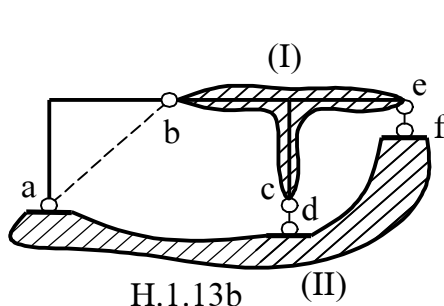
- Nên quan niệm số miếng cứng tối thiểu vì số lượng D, T, K, H sẽ ít nhất.

2. Điều kiện đủ: Có nhiều cách quan niệm.

a. Đưa hệ về thành bài toán nối hai miếng cứng: trái đất (II) và bce (I). Hai miếng cứng này nối với nhau bằng ba thanh ab, cd, ef (H.1.13b). Ba thanh này không đồng quy hay song song nên hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

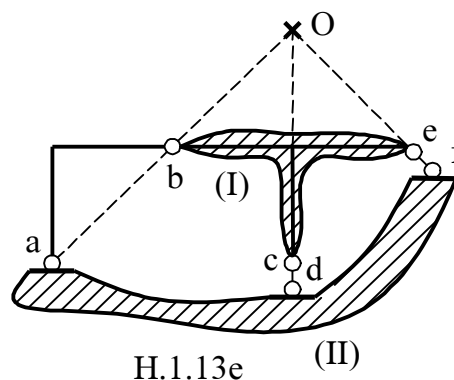
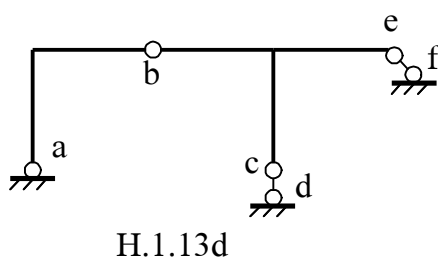
b. Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng:

Trái đất (II), bce (I) và ab (III). Ba miếng cứng này nối nhau bằng ba khớp (1,2 ở xa vô cùng), (2,3), (3,1). Ba khớp này không thẳng hàng nên hệ đã cho là hệ BBH (H.1.13c).



* Lưu ý: Khi khảo sát điều cần và đủ cho một hệ, chỉ cần sử dụng một quan niệm là đủ.

* Ví dụ 2: Nội dung giống ví dụ 1 nhưng thanh e-f nghiêng đi 45° (hình H.1.13d).



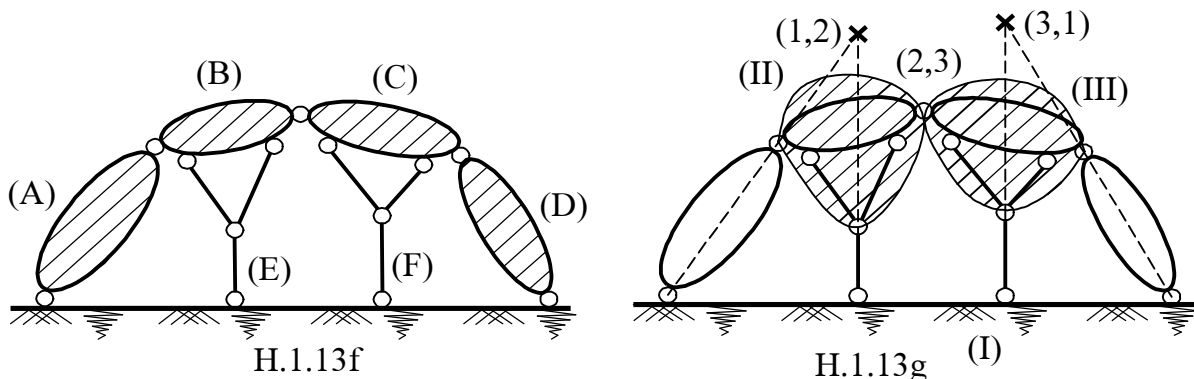
1. Điều kiện cần: không thay đổi so với ví dụ 1.

2. Điều kiện đủ: Đưa hệ về thành bài toán nối hai miếng cứng:

Đó là trái đất (II) và bce (I). Hai miếng cứng này nối với nhau bằng ba thanh ab, cd, ef (H.1.13e). Ba thanh này đồng quy tại O nên hệ đã cho là hệ BHTT.

* Ví dụ 3: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình H.1.13f.

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1 - 3) để khảo sát điều kiện cần.



Quan niệm hệ gồm các miếng cứng: (A), (B), (C), (D), (E), (F).

Vậy $D = 6, T = 4, K = 3, C = 8, H = 0$. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 4 + 2.3 + 3.0 + 8 - 3.6 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ: Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng (I), (II) & (III) như trên hình (H.1.13g). Ba miếng cứng này nối với nhau bằng ba khớp (1,2), (2,3) & (3,1) không thẳng hàng nên hệ đã cho là BBH (tĩnh định).

**Ví dụ 4: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13h).*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1-3) để khảo sát điều kiện cần.

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng (A), (B), (C).

Vậy $D = 3, T = 2, K = 1, H = 0, C = 5$.

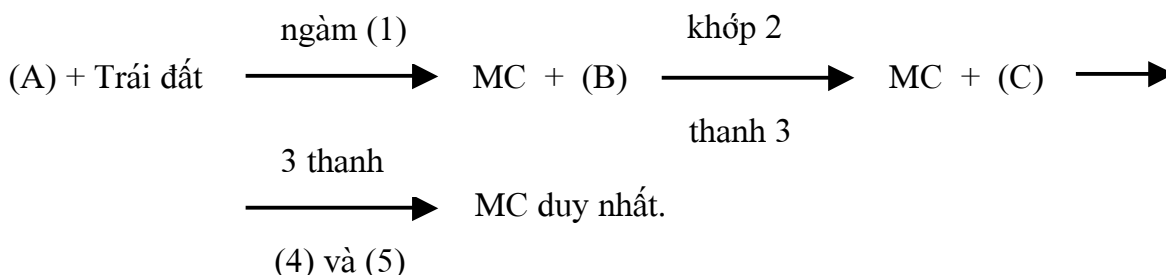
Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 2 + 2.1 + 3.0 + 5 - 3.3 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng:



Vậy hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

** Ví dụ 5: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13i).*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1-3) để khảo sát điều kiện cần.

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng (af), (eb), (bg), (fh), (hc).

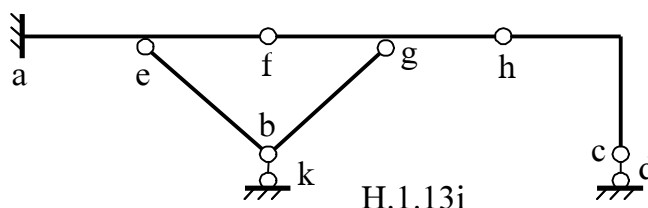
Vậy $D = 5, T = 0, K = 5, H = 0,$

$C = 5$. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D$$

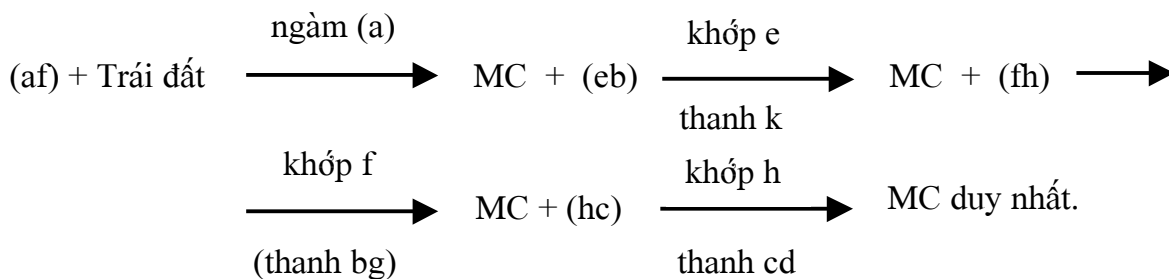
$$= 0 + 2.5 + 3.0 + 5 - 3.5 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.



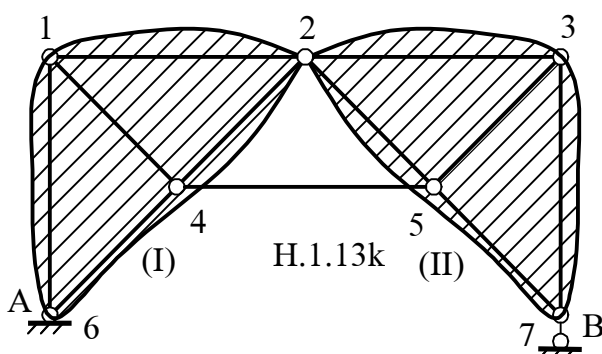
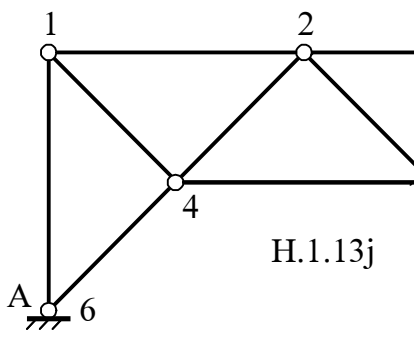
2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng:



Vậy hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

* Ví dụ 6: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13j).



1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ dàn nổi đất. Sử dụng biểu thức (1 - 5) để khảo sát điều kiện cần.

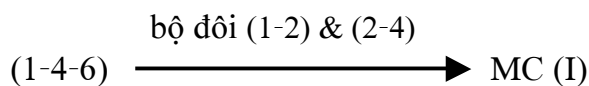
Vậy $D = 11, M = 7, C = 3$. Thay vào (1 - 5)

$$n = D - 2.M + C = 11 - 2.7 + 3 = 0$$

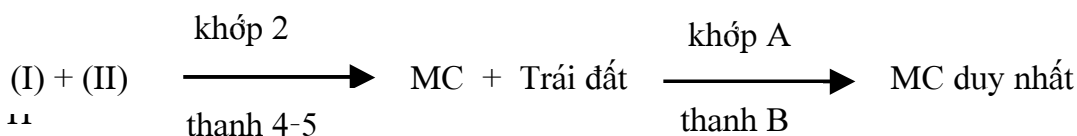
Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng (H.1.13k).



Tương tự, (2-3-7-5) là miếng cứng (II)



đã cho là hệ BHTT (hệ tĩnh định).

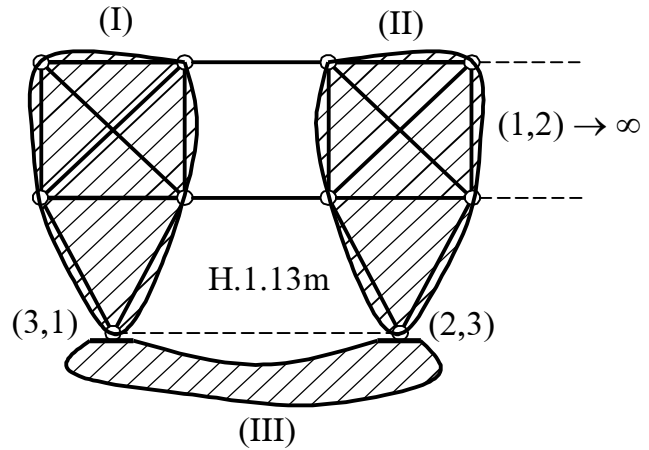
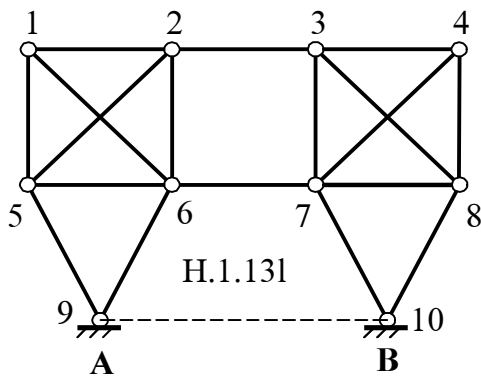
* Ví dụ 7: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13l)

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ dàn nối đất. Sử dụng biểu thức (1 - 5) để khảo sát điều kiện cần.

Vậy $T = 18, M = 10, C = 4$. Thay vào (1-5)

$$n = D - 2.M + C = 18 - 2.10 + 4 = 2 > 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH và thừa liên kết.



2. Điều kiện đủ:

Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng.

+ Trái đất: (I).

+ (1, 2, 5, 6, 9): (II). Dễ thấy (II) thừa một liên kết thanh.

+ Tương tự (3, 4, 7, 8, 10) là miếng cứng (III) cũng thừa một liên kết thanh.

Ba miếng cứng này nối với nhau bằng ba khớp (1,2 ở xa vô cùng), (2,3), (3,1). Ba khớp này thẳng hàng (H.1.13m).

Vậy hệ đã cho là BHTT.

CHƯƠNG MỞ ĐẦU**§ 1. ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU VÀ NHIỆM VỤ CỦA MÔN HỌC****I. Đối tượng nghiên cứu và nhiệm vụ của môn học:**

1. Đối tượng nghiên cứu: là vật rắn biến dạng đàn hồi, tức là có thể thay đổi hình dạng dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài.

2. Phạm vi nghiên cứu:

Phạm vi nghiên cứu của môn Cơ học kết cấu là giống môn Sức bền vật liệu nhưng gồm nhiều cấu kiện liên kết lại với nhau. Do vậy, trong kết cấu hay dùng tên gọi là hệ kết cấu.

II. Nhiệm vụ của môn học:

Nhiệm vụ chủ yếu của môn Cơ học kết cấu là đi xác định nội lực, biến dạng và chuyển vị trong công trình nhằm xây dựng công trình thỏa mãn các yêu cầu:

- *Điều kiện về độ bền:* Đảm bảo cho công trình không bị phá hoại dưới tác dụng của các nguyên nhân bên ngoài

- *Điều kiện về độ cứng:* Đảm bảo cho công trình không có chuyển vị và biến dạng vượt quá giới hạn cho phép nhằm đảm bảo sự làm việc bình thường của công trình.

- *Điều kiện về ổn định:* Đảm bảo cho công trình có khả năng bảo toàn vị trí và hình dạng ban đầu của nó dưới dạng cân bằng trong trạng thái biến dạng.

Với yêu cầu về độ bền, cần đi xác định nội lực; với yêu cầu về độ cứng, cần đi xác định chuyển vị; với yêu cầu về ổn định, cần đi xác định lực tới hạn mà kết cấu có thể chịu được.

III. Các bài toán môn học giải quyết:

1. Bài toán kiểm tra: Ở bài toán này, ta đã biết trước hình dạng, kích thước cụ thể của các cấu kiện trong công trình và các nguyên nhân tác động.

Yêu cầu: kiểm tra công trình theo ba điều kiện trên (độ bền, độ cứng & ổn định) có đảm bảo hay không? Và ngoài ra còn kiểm tra công trình thiết kế có tiết kiệm nguyên vật liệu hay không?

2. Bài toán thiết kế: Ở bài toán này, ta mới chỉ biết nguyên nhân tác động bên ngoài. Yêu cầu: Xác định hình dạng, kích thước của các cấu kiện trong công trình một cách hợp lý mà vẫn đảm bảo ba điều kiện trên.

Để giải quyết bài toán này, thông thường, dựa vào kinh nghiệm hoặc dùng phương pháp thiết kế sơ bộ để giả thiết trước hình dạng, kích thước của các cấu kiện. Sau đó tiến hành giải bài toán kiểm tra như đã nói ở trên. Và trên cơ sở đó người thiết kế điều chỉnh lại giả thiết ban đầu của mình, tức là đi giải bài toán lặp.

IV. Vị trí của môn học:

Là môn học kỹ thuật cơ sở làm nền tảng cho các môn học chuyên ngành như: kết cấu bê tông, kết cấu thép & gỗ, kỹ thuật thi công...

Trang bị cho người làm công tác xây dựng những kiến thức hữu ích.

§2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

I. Sơ đồ công trình:

1. Khái niệm: Sơ đồ công trình là hình ảnh đơn giản hóa mà vẫn đảm bảo phản ánh được chính xác sự làm việc thực tế của công trình và phải dùng để tính toán được.

2. Các yếu tố ảnh hưởng đến việc chọn sơ đồ tính:

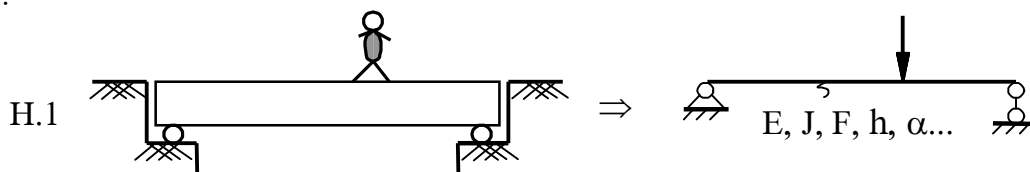
- Hình dạng, kích thước của công trình.
- Tỷ lệ độ cứng của các cấu kiện.
- Tầm quan trọng của công trình.
- Khả năng tính toán của người thiết kế.
- Tải trọng và tính chất tác dụng của nó.
- v.v.v

3. Các bước lựa chọn sơ đồ tính:

a. Bước 1: Đưa công trình thực về sơ đồ công trình:

- Thay các thanh bằng đường trục thanh.
- Thay các bản và vỏ bằng các mặt trung gian.
- Thay tiết diện, vật liệu bằng các đại lượng đặc trưng: diện tích (F), mômen quán tính (J), môđun đàn hồi (E), hệ số giãn nở vì nhiệt (α) ...
- Thay thiết bị tựa bằng các liên kết lý tưởng.
- Đưa tải trọng tác dụng lên mặt cấu kiện về trục cấu kiện.

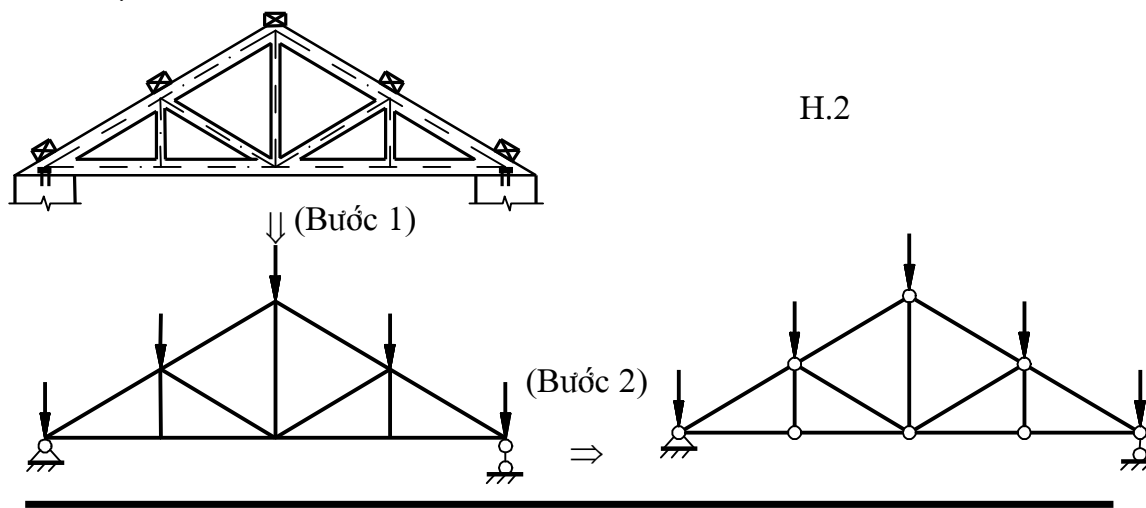
Ví dụ:



b. Bước 2: Đưa sơ đồ công trình về sơ đồ tính:

Trong một số trường hợp, sơ đồ công trình đưa về chưa phù hợp với khả năng tính toán, ta loại bỏ những yếu tố thứ yếu để đơn giản bài toán và đưa về sơ đồ tính, tính được.

Ví dụ:

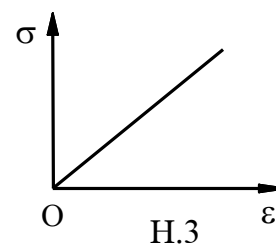


§ 3. CÁC GIẢ THIẾT ĐỂ TÍNH TOÁN VÀ NGUYÊN LÝ CỘNG TÁC DỤNG

I. Các giả thiết tính toán:

1. Điều kiện vật lý của bài toán:

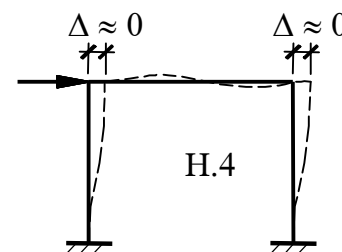
Giả thiết rằng vật liệu là đàn hồi tuyệt đối và tuân theo định luật Hook, nghĩa là quan hệ giữa nội lực và biến dạng là quan hệ tuyến tính ($\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$).



Chú ý: Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là đàn hồi tuyến tính (tuyến tính vật lý). Nếu không chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là đàn hồi phi tuyến (phi tuyến vật lý).

2. Điều kiện hình học của bài toán:

Chuyển vị và biến dạng được xem như là những đại lượng vô cùng bé. Do vậy khi tính toán, xem công trình là không có biến dạng.



Chú ý: Nếu chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là tuyến tính hình học. Nếu không chấp nhận giả thiết này thì bài toán gọi là phi tuyến hình học.

II. Nguyên lý cộng tác dụng:

1. Phát biểu: Một đại lượng nghiên cứu S (nội lực, phản lực, chuyển vị...) do một số các nguyên nhân đồng thời tác dụng gây ra sẽ bằng tổng đại số hay tổng hình học của đại lượng S do từng nguyên nhân tác dụng riêng rẽ gây ra.

Lấy tổng đại số khi đại lượng S là đại lượng vô hướng, lấy tổng hình học khi đại lượng S là đại lượng véc tơ.

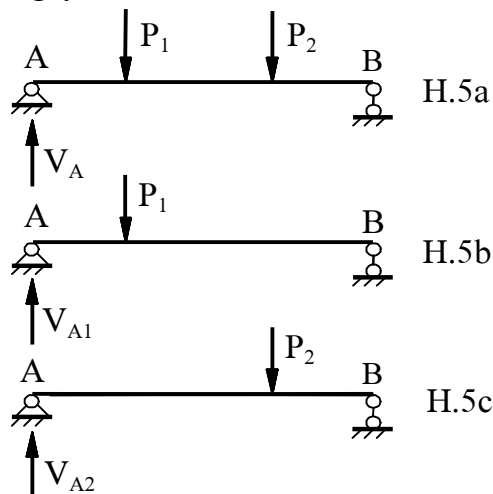
Ví dụ: Xét dầm chịu tác dụng của 2 lực P_1 & P_2 và đại lượng nghiên cứu S là phản lực V_A trên hình (H.5a)

Xét chính dầm đó nhưng chịu tác dụng riêng rẽ của 2 lực P_1, P_2 trên hình (H.5b) & (H.5c).

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{A1} + \vec{V}_{A2}.$$

Và nếu xét toàn diện, thì hệ (H.5a) bằng tổng của hai hệ (H.5b) & (H.5c).



2. Biểu thức giải tích của nguyên lý cộng tác dụng:

$$S(P_1, P_2, \dots, P_n) = S(P_1) + S(P_2) + \dots + S(P_n)$$

- $S(P_1, P_2, \dots, P_n)$: là đại lượng S do các nguyên nhân P_1, P_2, \dots, P_n đồng thời tác dụng lên hệ gây ra.

- $S(P_k)$: là đại lượng S do riêng P_k tác dụng lên hệ gây ra.

Gọi \bar{S}_k là đại lượng S do riêng $P_k = 1$ gây ra. Tức là $S(P_k) = \bar{S}_k \cdot P_k$

$$\text{Vậy } S(P_1, P_2, \dots, P_n) = \bar{S}_1 \cdot P_1 + \bar{S}_2 \cdot P_2 + \dots + \bar{S}_n \cdot P_n$$

Chú ý: Nguyên lý cộng tác dụng chỉ áp dụng cho hệ tuyến tính vật lý cũng như tuyến tính hình học.

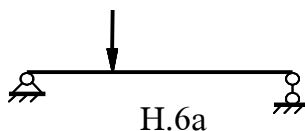
§ 4. PHÂN LOẠI CÔNG TRÌNH

I. Phân loại theo sơ đồ tính:

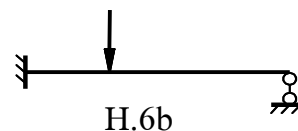
1. Hệ phẳng: khi tất cả các cấu kiện cùng thuộc một mặt phẳng và tải trọng tác dụng cũng nằm trong mặt phẳng đó.

Các loại hệ phẳng:

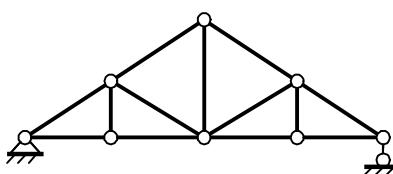
- Dầm (H.6)
- Dàn (H.7)
- Vòm (H.8)



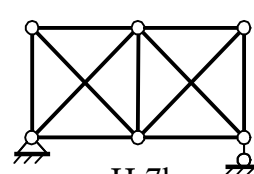
H.6a



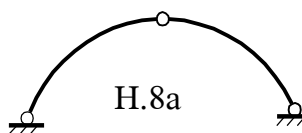
H.6b



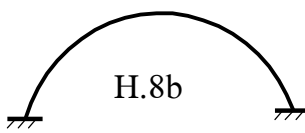
H.7a



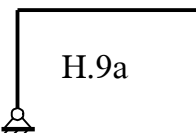
H.7b



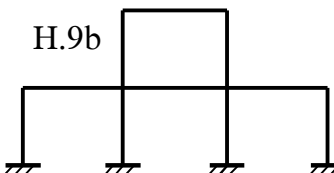
H.8a



H.8b

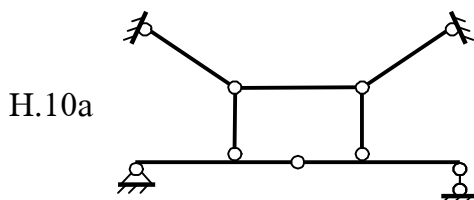


H.9a

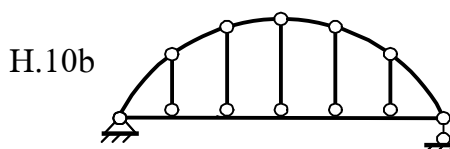


H.9b

- Khung (H.9)
- Hệ liên hợp (H.10)



H.10a

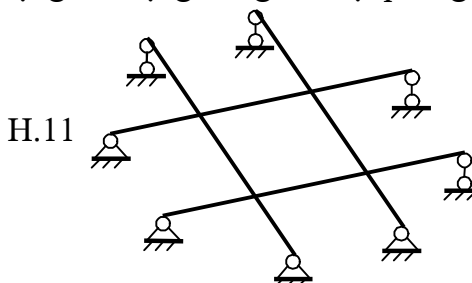


H.10b

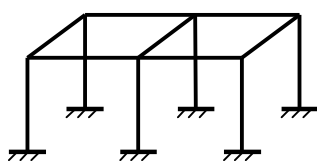
2. Hệ không gian: khi các cấu kiện không cùng nằm trong một mặt phẳng, hoặc cùng nằm trong một mặt phẳng nhưng tải trọng tác dụng ra ngoài mặt phẳng đó.

Các loại hệ không gian:

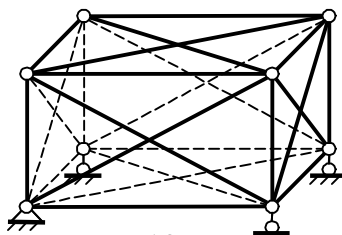
- Hệ dầm trực giao (H.11)
- Khung không gian (H.12)
- Dàn không gian (H.13)
- Bản (H.14)
- Vỏ (H.15)



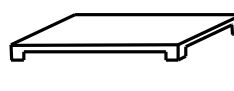
H.11



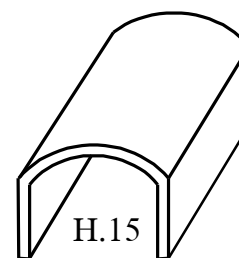
H.12



H.13



H.14



H.15

II. Phân loại theo phương pháp tính:

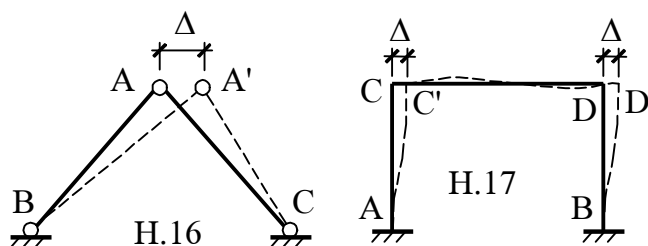
1. Dựa vào sự cần thiết hay không phải sử dụng điều kiện động học khi xác định toàn bộ các phản lực và nội lực trong hệ, người ta chia ra hai loại hệ:

a. Hệ tĩnh định: là loại hệ mà chỉ bằng các điều kiện tĩnh học có thể xác định được toàn bộ nội lực và phản lực trong hệ. Ví dụ các hệ trên hình a từ (H.6) đến (H.10).

b. Hệ siêu tĩnh: là loại hệ mà chỉ bằng các điều kiện tĩnh học thì chưa đủ để xác định toàn bộ các nội lực và phản lực mà còn phải sử dụng thêm điều kiện động học và điều kiện vật lý. Ví dụ các hệ trên hình b từ (H.6) đến (H.10).

2. Dựa vào sự cần thiết hay không phải sử dụng điều kiện cân tĩnh học khi xác định biến dạng trong hệ khi hệ chịu chuyển vị cưỡng bức, người ta chia ra hai loại hệ:

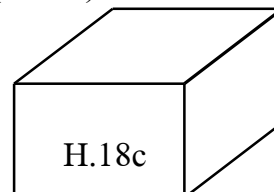
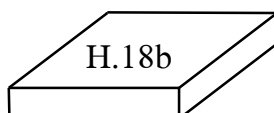
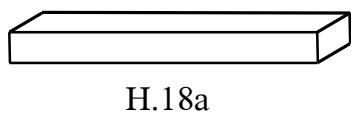
a. Hệ xác định động: là loại hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, có thể xác định biến dạng của hệ chỉ bằng các điều kiện động học (hình học). Ví dụ hệ cho trên hình (H.16).



b. Hệ siêu động: là loại hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, nếu chỉ bằng các điều kiện động học thì chưa thể xác định được biến dạng của hệ mà cần phải sử dụng thêm điều kiện tĩnh học. Ví dụ hệ cho trên hình (H.17).

III. Phân loại theo kích thước tương đối của các cấu kiện:

- Thanh: nếu kích thước một phương khá lớn hơn hai phương còn lại (H.18a).
- Bản: nếu kích thước của hai phương khá lớn hơn phương còn lại (H.18b).
- Khối: nếu kích thước của ba phương gần bằng nhau (H.18c)



IV. Phân loại theo khả năng thay đổi hình dạng hình học:

- Hệ biến hình.
- Hệ biến hình tức thời.
- Hệ bất biến hình.

§ 5. CÁC NGUYÊN NHÂN GÂY RA NỘI LỰC, BIẾN DẠNG VÀ CHUYỂN VỊ

I. Tải trọng: gây ra nội lực, biến dạng và chuyển vị trong tất cả các loại hệ.

Phân loại tải trọng:

- Theo thời gian tác dụng: tải trọng lâu dài (như trọng lượng bản thân công trình...) còn được gọi là tĩnh tải và tải trọng tạm thời (như tải trọng do gió, do con người đi lại khi sử dụng..) còn được gọi là hoạt tải.

- Theo sự thay đổi vị trí tác dụng: tải trọng bất động và tải trọng di động.

- Theo tính chất tác dụng có gây ra lực quán tính hay không: tải trọng tác dụng tĩnh và tải trọng tác dụng động.

Ngoài ra, còn phân loại tải trọng theo hình thức tác dụng của tải trọng: tải trọng tập trung, tải trọng phân bố...

II. Sự thay đổi nhiệt độ: chính là sự thay đổi nhiệt độ tác dụng lên công trình khi làm việc so với lúc chế tạo ra nó.

Đối với hệ tĩnh định, tác nhân này chỉ gây ra biến dạng và chuyển vị, không gây ra nội lực, còn đối với hệ siêu tĩnh thì gây ra đồng thời cả ba yếu tố trên.

III. Chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa (lún) và do chế tạo lắp ráp không chính xác.

Đối với hệ tĩnh định, tác nhân này chỉ gây ra chuyển vị, không gây ra biến dạng và nội lực; còn đối với hệ siêu tĩnh thì gây ra đồng thời cả ba yếu tố trên.

CHƯƠNG 1

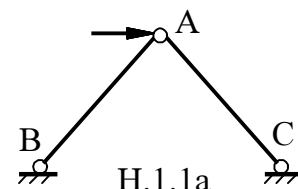
PHÂN TÍCH CẤU TẠO HÌNH HỌC CỦA HỆ PHẪNG

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM

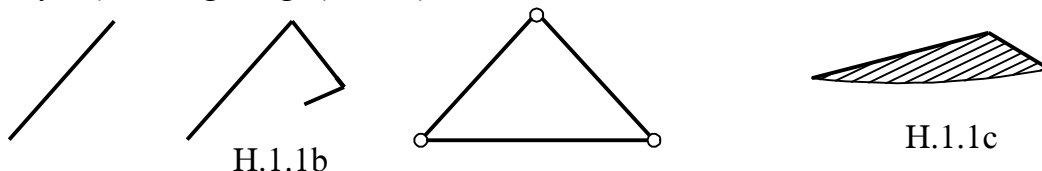
I. Hệ bất biến hình (BBH): là hệ không có sự thay đổi hình dạng hình học dưới tác dụng của tải trọng nếu xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Phân tích hệ hình vẽ (H.1.1a)

Nếu quan niệm AB, BC, trái đất là tuyệt đối cứng, tức là $l_{AB}, l_{BC}, l_{CA} = \text{const}$ thì tam giác ABC là duy nhất, nên hệ đã cho là hệ BBH.



- Một hệ BBH một cách rõ rệt gọi chung là miếng cứng (tấm cứng)
- Các loại miếng cứng: (H.1.1b)
- Ký hiệu miếng cứng: (H.1.1c)



* *Chú ý:* Do hệ BBH có khả năng chịu lực tác dụng nên nó được sử dụng làm các kết cấu xây dựng và thực tế là chủ yếu sử dụng loại hệ này.

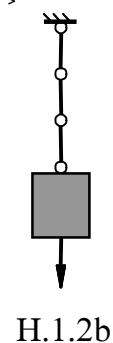
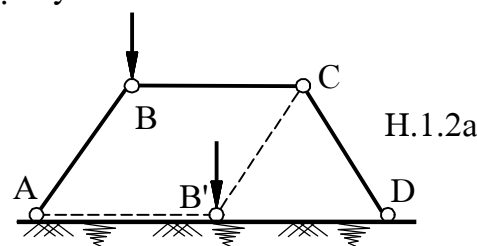
II. Hệ không bất biến hình:

1. Hệ biến hình (BH): là hệ có sự thay đổi hình dạng hình học một lượng hữu hạn dưới tác dụng của tải trọng mặc dù xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Hệ ABCD cho trên hình (H.1.2a) có thể đổ thành hệ AB'CD, nên hệ đã cho là hệ BH.

* *Chú ý:* Do hệ BH không có khả năng chịu tải trọng tác dụng nên các kết cấu xây dựng không sử dụng loại hệ này.

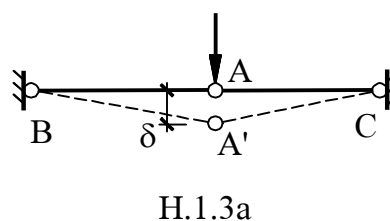
Hệ BH trên hình (H.1.2b) cho phép sử dụng vì theo phương đứng, tải trọng tác dụng lên hệ ở trạng thái cân bằng.



2. Hệ biến hình tức thời (BHTT): là hệ có sự thay đổi hình dạng hình học một lượng vô cùng bé dưới tác dụng của tải trọng mặc dù xem các cấu kiện của hệ là tuyệt đối cứng.

Ví dụ: Hệ ABC có cấu tạo như trên hình (H.1.3a), khớp A có thể đi xuống một đoạn vô cùng bé δ , nên hệ đã cho là hệ BHTT.

* *Chú ý:* Các kết cấu xây dựng không sử dụng hệ BHTT hay hệ gần BHTT (là hệ mà chỉ cần thay đổi một lượng vô cùng bé hình dạng hình học sẽ trở thành hệ BHTT, ví dụ hệ BA'C trên hình (H.1.3a) vì nội lực



trong hệ gần BHTT rất lớn.

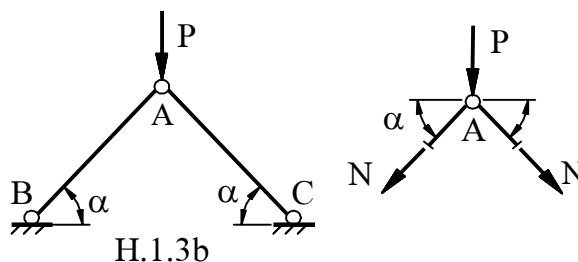
Thật vậy, xét hệ trên hình (H.1.3b).

Lực dọc trong hai thanh AB và AC là N.

$$N = -\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha}$$

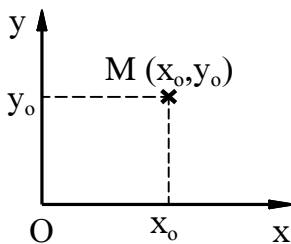
Khi $\alpha \rightarrow 0$, hệ BAC tiến đến hệ gần BHTT.

$$N = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{P}{2 \cdot \sin \alpha}\right) \rightarrow \infty$$

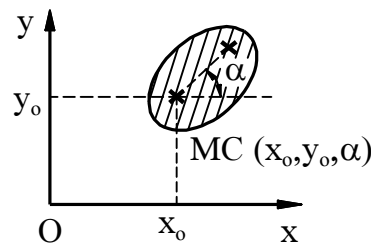


III. Bậc tự do: là số các thông số độc lập đủ để xác định vị trí của một hệ so với một hệ cố định khác.

Trong hệ phẳng, một chất điểm có bậc tự do bằng 2 (H.1.4a); một miếng cứng có bậc tự do bằng 3 (H.1.4b).



H.1.4a



H.1.4b

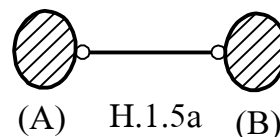
§ 2. CÁC LOẠI LIÊN KẾT VÀ TÍNH CHẤT CỦA LIÊN KẾT

I. Liên kết đơn giản: là liên kết nối hai miếng cứng với nhau.

Các loại liên kết đơn giản

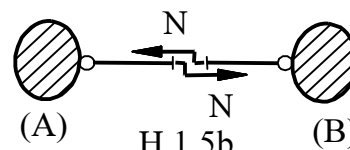
1. Liên kết thanh: (liên kết loại một)

a. Cấu tạo: Gồm một thanh thẳng không chịu tải trọng có hai khớp lý tưởng ở hai đầu. (H.1.5a)



b. Tính chất của liên kết:

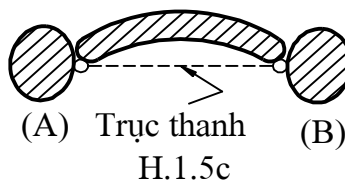
+ Về mặt động học: liên kết thanh không cho miếng cứng di chuyển theo phương dọc trục thanh, tức là khử được một bậc tự do



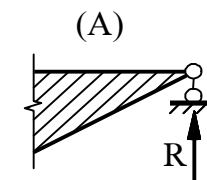
+ Về mặt tĩnh học: tại liên kết chỉ có thể phát sinh một thành phần phản lực theo phương dọc trục thanh (H.1.5b).

* **Kết luận:** liên kết thanh khử được một bậc tự do và làm phát sinh một thành phần phản lực theo phương liên kết.

* **Trường hợp đặc biệt:** một miếng cứng có hai đầu khớp và không chịu tải trọng thì có thể như một liên kết thanh, có trục thanh là đường nối hai khớp (H.1.5c).



H.1.5c



H.1.5d

* **Chú ý:** liên kết thanh là mở rộng của khái niệm gối di động nối đất (H.1.5d).

2. Liên kết khớp: (liên kết loại 2)

a. Cấu tạo: Gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp lý tưởng (H.1.6a).

b. Tính chất:

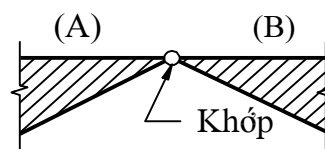
+ Về mặt động học: liên kết khớp không cho miếng cứng chuyển vị thẳng (nhưng có thể xoay), tức là khử được hai bậc tự do.

+ Về mặt tĩnh học: tại liên kết có thể phát sinh một thành phần phản lực có phương chưa biết. Phản lực này thường được phân tích thành hai thành phần theo hai phương xác định (H.1.6b).

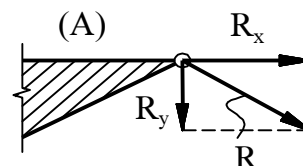
* *Kết luận:* liên kết khớp khử được hai bậc tự do và làm phát sinh hai thành phần phản lực.

* *Trường hợp đặc biệt:* hai liên kết thanh có thể xem là một liên kết khớp (khớp giả tạo), có vị trí tại giao điểm đường nối hai trục thanh (H.1.6c).

* *Chú ý:* liên kết khớp là mở rộng của khái niệm gối cố định nối đất (H.1.6d)

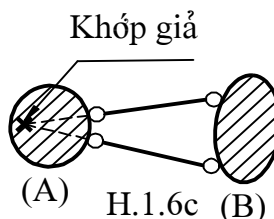


H.1.6a

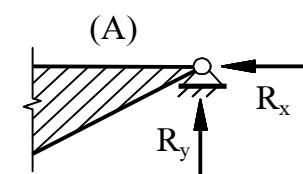


$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$

H.1.6b



H.1.6c



H.1.6d

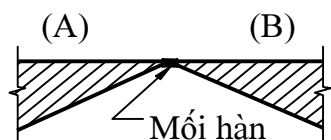
3. Liên kết hàn: (liên kết loại 3)

a. Cấu tạo: Gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một mối hàn (H.1.7a).

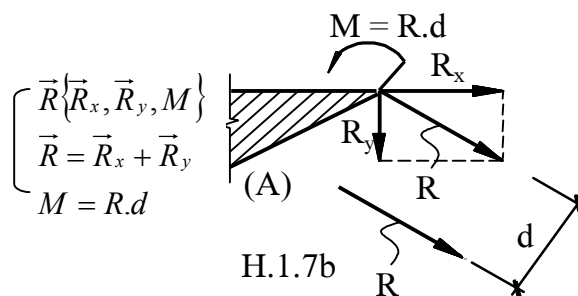
b. Tính chất:

+ Về mặt động học: liên kết hàn không cho miếng cứng có chuyển vị, tức là khử được 3 bậc tự do.

+ Về mặt tĩnh học: liên kết có thể làm phát sinh một thành phần phản lực có phương và vị trí chưa biết. Thường đưa phản lực này về tại vị trí liên kết và phân tích thành ba thành phần (M, \vec{R}_x, \vec{R}_y) (H.1.7b)



H.1.7a



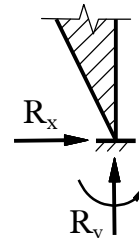
H.1.7b

* *Kết luận:* liên kết hàn khử được ba bậc tự do và làm phát sinh ba thành phần phản lực.

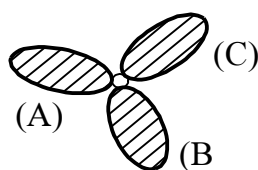
* *Chú ý:*

- Liên kết hàn tương đương với ba liên kết thanh hoặc một liên kết thanh và một liên kết khớp được sắp xếp một cách hợp lý.

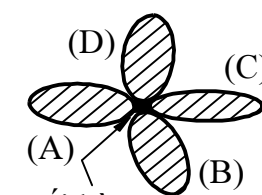
- Liên kết hàn là mở rộng của khái niệm liên kết ngàm nối đất (H.1.7c)



II. Liên kết phức tạp: là liên kết nối nhiều miếng cứng với nhau, số miếng cứng lớn hơn hai.



H.1.8a



H.1.8b

Về mặt cấu tạo, chỉ có liên kết khớp phức tạp (H.1.8a) và hàn phức tạp (H.1.8b).

* **Độ phức tạp của liên kết:** là số liên kết đơn giản cùng loại, tương đương với liên kết đã cho. Ký hiệu p.

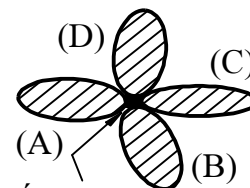
* **Công thức xác định độ phức tạp:**

$$p = D - 1$$

(1 - 1)

D: số miếng cứng quy tụ vào liên kết.

* *Ví dụ:* Xác định độ phức tạp của liên kết hàn trên hình (H.1.8c)



$$p = D - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Có nghĩa là liên kết hàn phức tạp đã cho tương đương với ba liên kết hàn đơn giản.

Mỗi hàn
H.1.8c

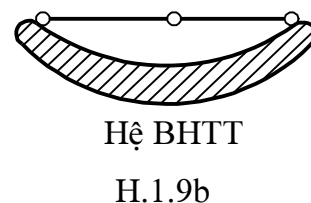
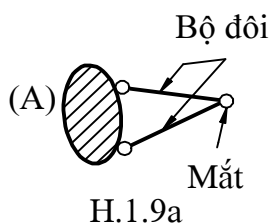
§.3 CÁCH NỐI CÁC MIÉNG CỨNG THÀNH HỆ BẤT BIẾN HÌNH

I. Nối một điểm (mắt) vào một miếng cứng:

a. **Điều kiện cần:** để nối một điểm vào miếng cứng cần phải khử hai bậc tự do của nó. Nghĩa là cần dùng hai liên kết thanh (H.1.9a).

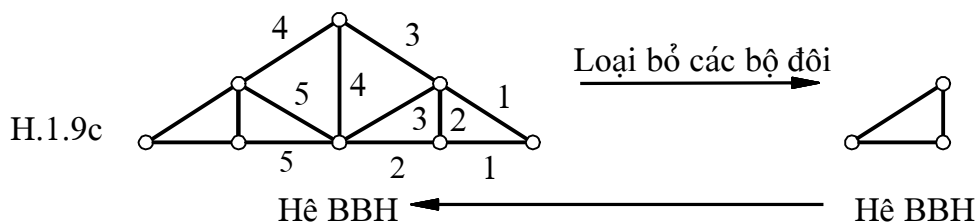
b. **Điều kiện đủ:** hai liên kết thanh không được thẳng hàng.

Hai liên kết thanh không thẳng hàng nối một điểm vào miếng cứng gọi là bộ đôi (H.1.9a).

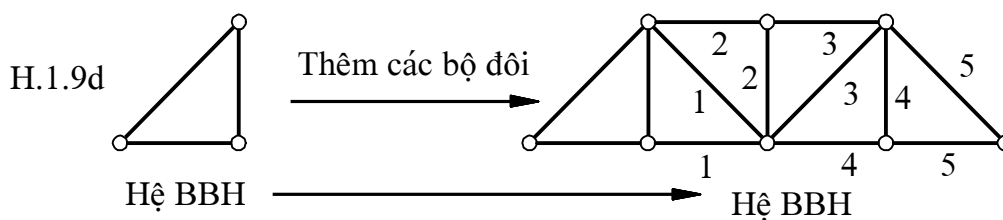


* *Tính chất của bộ đôi:* khi thêm hay bớt lần lượt các bộ đôi thì tính chất động học của hệ không thay đổi. Tính chất này được sử dụng để phân tích cấu tạo hình học của hệ, và phân tích theo hai hướng sau:

+ Phương pháp thu hẹp miếng cứng: từ hệ ban đầu, lần lượt loại bỏ dần các bộ đôi để đưa về hệ đơn giản cuối cùng. Nếu hệ thu được là BBH hay BH thì hệ ban đầu cũng BBH hay BH. Ví dụ hệ trên hình (H.1.9c)



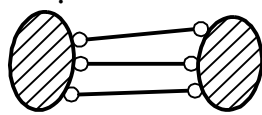
+ Phương pháp phát triển miếng cứng: từ miếng cứng ban đầu, thêm lần lượt các bộ đôi thì cuối cùng thu được miếng cứng. Ví dụ hệ trên hình (H.1.9d)



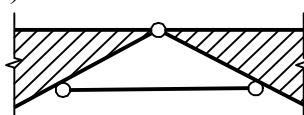
II. Cách nối hai miếng cứng:

1. Điều kiện cần: Xem một miếng cứng là cố định. Để nối miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định cần khử ba bậc tự do của nó, nghĩa là cần sử dụng tổ hợp các liên kết:

- + Ba liên kết thanh (H.1.10a).
- + Một liên kết thanh cộng một liên kết khớp (H.1.10b).
- + Một liên kết hàn (H.1.10c).



(A) H.1.10a (B)



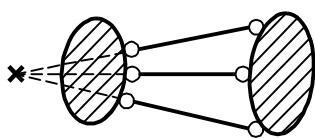
(A) H.1.10b (B)



(A) H.1.10c (B)

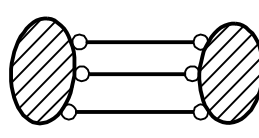
2. Điều kiện đủ:

a. Nếu sử dụng ba liên kết thanh: yêu cầu ba thanh không được đồng quy hoặc song song (H.1.10d, H.1.10e & H.1.10f).



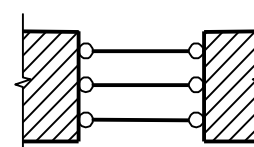
(A) (BHTT) (B)

H.1.10d



(A) (BHTT) (B)

H.1.10e

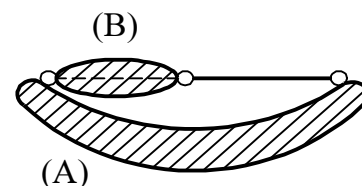


(A) (BH) (B)

H.1.10f

b. Nếu sử dụng một liên kết thanh cộng một liên kết khớp: yêu cầu khớp không được nằm trên đường trục thanh (H.1.10g).

c. Nếu sử dụng liên kết hàn: thì đó cũng là điều kiện đủ.

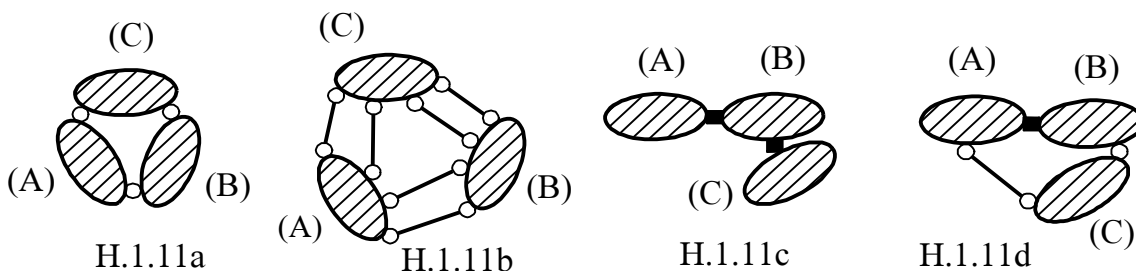


(A) Hệ BHTT
H.1.10g

III. Cách nối ba miếng cứng:

1. Điều kiện cần: xem một miếng cứng là cố định. Để nối hai miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định cần phải khử sáu bậc tự do, nghĩa là cần phải sử dụng tổ hợp các liên kết:

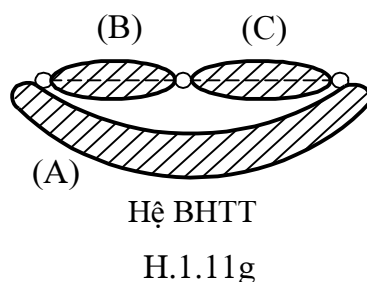
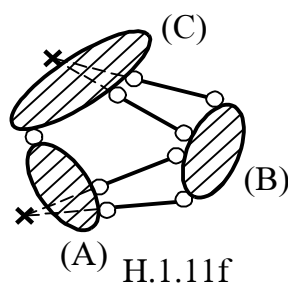
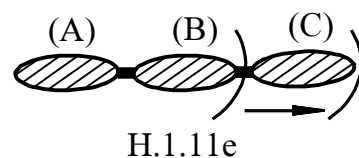
- + Ba liên kết khớp (H.1.11a).
- + Sáu liên kết thanh (H.1.11b).
- + Hai liên kết hàn (H.1.11c).
- + Một liên kết thanh cộng một liên kết khớp cộng một liên kết hàn (H.1.11d).
- + v.v.v.



2. Điều kiện đủ:

+ Nếu các miếng cứng nối lần lượt với nhau: trở về lại bài toán nối hai miếng cứng. Ví dụ (H.1.11e).

+ Nếu các miếng cứng nối đồng thời với nhau (nếu loại bỏ một miếng cứng bất kỳ, hệ còn lại bị biến hình): lúc này hệ cần sử dụng ba liên kết khớp (thực hoặc giả tạo) tương hỗ (H.1.11f). Và yêu cầu các liên kết khớp không cùng nằm trên một đường thẳng (H.1.11g).



IV. Cách nối nhiều miếng cứng:

cứng:

1. Điều kiện cần:

a. Trường hợp hệ bất kỳ không nối đất:

Xét một hệ không nối đất gồm D miếng cứng. Các liên kết giữa các miếng cứng là: T liên kết thanh, K liên kết khớp đã quy về khớp đơn giản và H liên kết hàn đã quy về hàn đơn giản.

Xem một miếng cứng là cố định. Nối (D - 1) miếng cứng còn lại vào miếng cứng cố định, nghĩa là cần phải khử 3.(D-1) bậc tự do. Đó là yêu cầu.

Về khả năng: T, K, H khử được T + 2.K + 3.H bậc tự do.

Như vậy, điều kiện cần để hệ BBH là

$$n = T + 2.K + 3.H - 3.(D - 1) \geq 0 \quad (1 - 2)$$

* Các trường hợp của n:

+ n = 0 và hệ đã cho là hệ BBH thì hệ là hệ tĩnh.

+ n > 0 và hệ đã cho là hệ BBH thì hệ là hệ siêu tĩnh.

+ n < 0 thì hệ là hệ BH.

b. Trường hợp hệ bất kỳ có nối đất:

Xét một hệ nối đất gồm D miếng cứng. Các liên kết giữa các miếng cứng là: T liên kết thanh, K liên kết khớp đã quy về khớp đơn giản và H liên kết hàn đã quy về hàn đơn giản. Liên kết giữa hệ và trái đất gồm C liên kết đã quy về liên kết loại một.

Xem trái đất là cố định. Nối D miếng cứng còn lại vào trái đất, nghĩa là phải khử 3.D bậc tự do. Đó là yêu cầu.

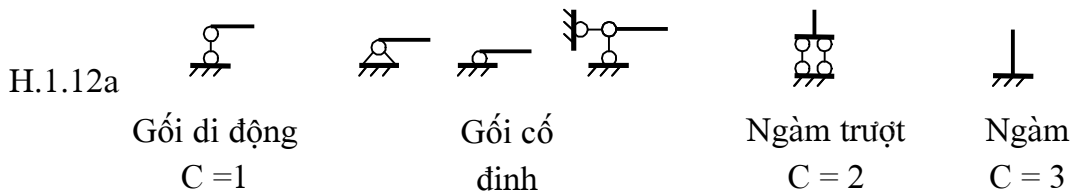
Về khả năng: T, K, H, C khử được T + 2.K + 3.H + C bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D \geq 0 \quad (1 - 3)$$

* Các trường hợp của n: tương tự như trên

* Các loại liên kết nối đất (H.1.12a):



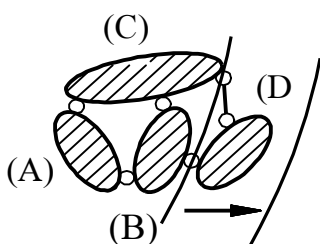
2. Điều kiện đủ:

Thường sử dụng tính chất của bộ đôi, cách nối hai hoặc ba miếng cứng nhằm thu hẹp hoặc phát triển hệ đến mức tối đa cho phép. Nếu kết quả thu được:

+ Một miếng cứng: hệ đã cho là BBH.

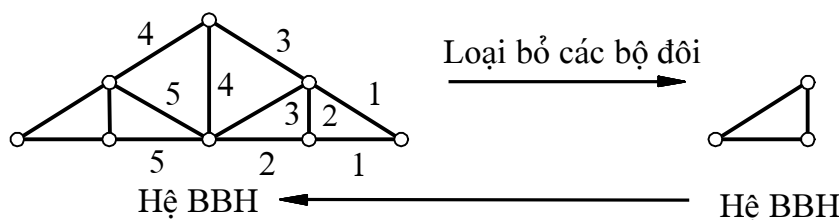
+ Hai hoặc ba miếng cứng: sử dụng điều kiện đủ của bài toán nối hai, ba miếng cứng đã biết để phân tích tiếp.

Ví dụ:



(Phát triển miếng cứng)

H.1.12b



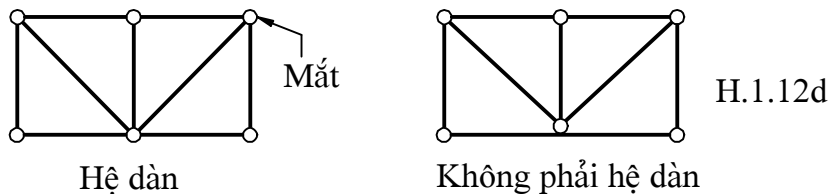
(Thu hẹp miếng cứng)

H.1.12c

* Ngoài ra còn sử dụng phương pháp tải trọng bằng không hoặc phương pháp động học để khảo sát. Xem giáo trình môn Cơ học kết cấu - Lê Thọ Trình.

V. Trường hợp đặc biệt: Hệ dàn.

Hệ dàn là hệ gồm những thanh thẳng liên kết với nhau chỉ bằng các khớp ở hai đầu mỗi thanh.



* Đối với hệ dàn cũng cho phép áp dụng công thức (1 - 2) hoặc (1 - 3) để khảo sát điều kiện cần. Tuy nhiên, trong hệ dàn, các liên kết khớp thường là khớp phức tạp cần quy đổi về khớp đơn giản. Cách làm như vậy thường dễ nhầm lẫn. Dưới đây sẽ trình bày một cách khác thuận lợi hơn mà không phải quan tâm đến độ phức tạp của các liên kết khớp.

1. Trường hợp hệ dàn không nối đất:

Xét hệ dàn không nối đất gồm D thanh dàn và M mắt.

Xem một thanh dàn là miếng cứng cố định, còn lại (D - 1) thanh. Và đi nối (M - 2) mắt còn lại vào miếng cứng cố định, nghĩa là cần phải khử 2.(M - 2) bậc tự do.

Xem các thanh dàn là các liên kết thanh. Như vậy, (D - 1) thanh còn lại có khả năng khử được (D - 1) bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là:

$$n = (D - 1) - 2.(M - 2) = D - 2.M + 3 \geq 0 \quad (1 - 4)$$

2. Trường hợp hệ dàn nối đất:

Xét hệ dàn gồm D thanh dàn và M mắt. Ngoài ra hệ dàn còn nối đất bằng số liên kết tương đương C liên kết loại một. Nối M mắt vào miếng cứng cố định. Nghĩa là cần khử 2.M bậc tự do.

Xem các thanh dàn là các liên kết thanh. Như vậy, D thanh dàn có khả năng khử được D bậc tự do. Ngoài ra các liên kết nối đất khử được C bậc tự do.

Vậy điều kiện cần để hệ BBH là:

$$\boxed{} \quad (1 - 5)$$

* *Chú ý:* - Các trường hợp của n và điều kiện đủ vẫn như trường hợp tổng quát.

CÁC VÍ DỤ

**Ví dụ 1: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình H.1.13a*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất nên điều kiện cần sử dụng biểu thức (1 - 3). Có thể giải bài toán theo nhiều quan niệm khác nhau:

a. Quan niệm mỗi đoạn thanh thẳng là một miếng cứng:

Lúc này D = 5, T = 0, K = 1, H = 3, C = 4. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 0 + 2.1 + 3.3 + 4 - 3.5 = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

b. Quan niệm mỗi thanh gãy khúc là một miếng cứng (quan niệm số miếng cứng tối thiểu):

Lúc này D = 2 (ab, bce), T = 0, K = 1, H = 0, C = 4. Thay vào (1 - 3)

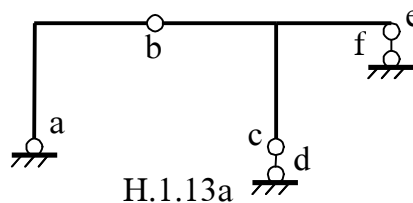
$$n = 0 + 2.1 + 3.0 + 4 - 3.2 = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

c. Quan niệm trái đất là một miếng cứng:

Lúc này xem hệ là không nối đất nên điều kiện cần sử dụng biểu thức (1 - 2).

Lúc này D = 3 (ab, bce và trái đất), T = 2, K = 2, H = 0. Thay vào (1 - 2)



$$N = 2 + 2.2 + 3.0 - 3.(3 - 1) = 0$$

⇒ Hệ đã cho có khả năng BBH.

* Nhận xét: - Có nhiều cách quan niệm miếng cứng khác nhau, và có ảnh hưởng đến số lượng miếng cứng và các liên kết.

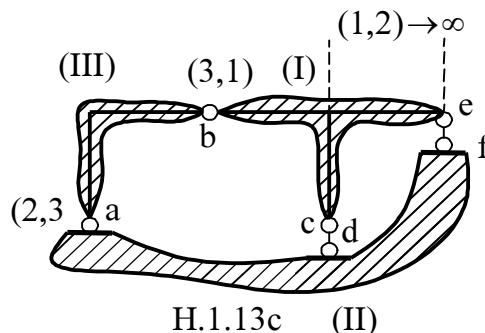
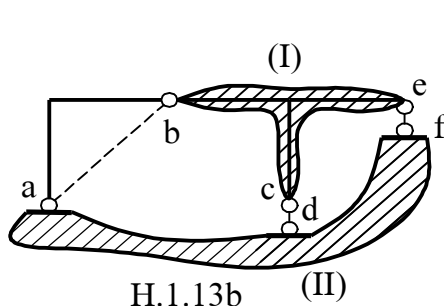
- Nên quan niệm số miếng cứng tối thiểu vì số lượng D, T, K, H sẽ ít nhất.

2. Điều kiện đủ: Có nhiều cách quan niệm.

a. Đưa hệ về thành bài toán nối hai miếng cứng: trái đất (II) và bce (I). Hai miếng cứng này nối với nhau bằng ba thanh ab, cd, ef (H.1.13b). Ba thanh này không đồng quy hay song song nên hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

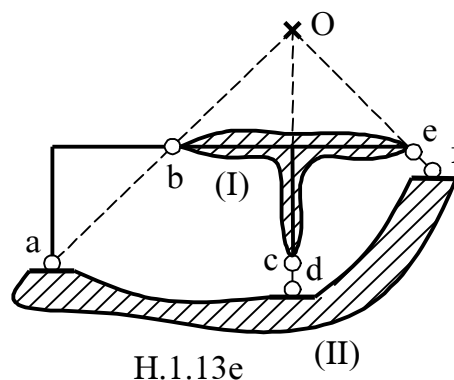
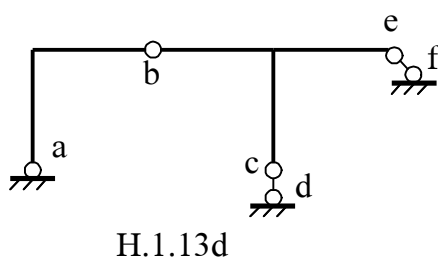
b. Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng:

Trái đất (II), bce (I) và ab (III). Ba miếng cứng này nối nhau bằng ba khớp (1,2 ở xa vô cùng), (2,3), (3,1). Ba khớp này không thẳng hàng nên hệ đã cho là hệ BBH (H.1.13c).



* Lưu ý: Khi khảo sát điều cần và đủ cho một hệ, chỉ cần sử dụng một quan niệm là đủ.

* Ví dụ 2: Nội dung giống ví dụ 1 nhưng thanh e-f nghiêng đi 45° (hình H.1.13d).



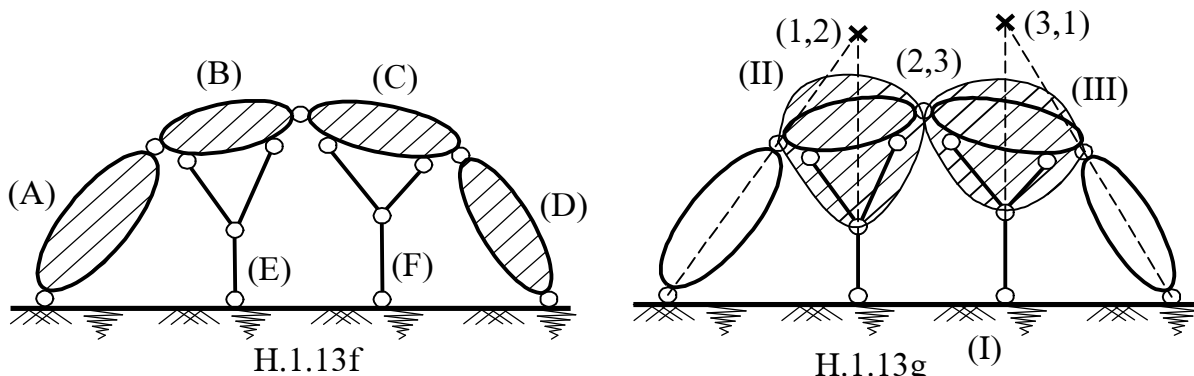
1. Điều kiện cần: không thay đổi so với ví dụ 1.

2. Điều kiện đủ: Đưa hệ về thành bài toán nối hai miếng cứng:

Đó là trái đất (II) và bce (I). Hai miếng cứng này nối với nhau bằng ba thanh ab, cd, ef (H.1.13e). Ba thanh này đồng quy tại O nên hệ đã cho là hệ BHTT.

* Ví dụ 3: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình H.1.13f.

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1 - 3) để khảo sát điều kiện cần.



Quan niệm hệ gồm các miếng cứng: (A), (B), (C), (D), (E), (F).

Vậy $D = 6, T = 4, K = 3, C = 8, H = 0$. Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 4 + 2.3 + 3.0 + 8 - 3.6 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ: Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng (I), (II) & (III) như trên hình (H.1.13g). Ba miếng cứng này nối với nhau bằng ba khớp (1,2), (2,3) & (3,1) không thẳng hàng nên hệ đã cho là BBH (tĩnh định).

**Ví dụ 4: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13h).*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1-3) để khảo sát điều kiện cần.

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng (A), (B), (C).

Vậy $D = 3, T = 2, K = 1, H = 0, C = 5$.

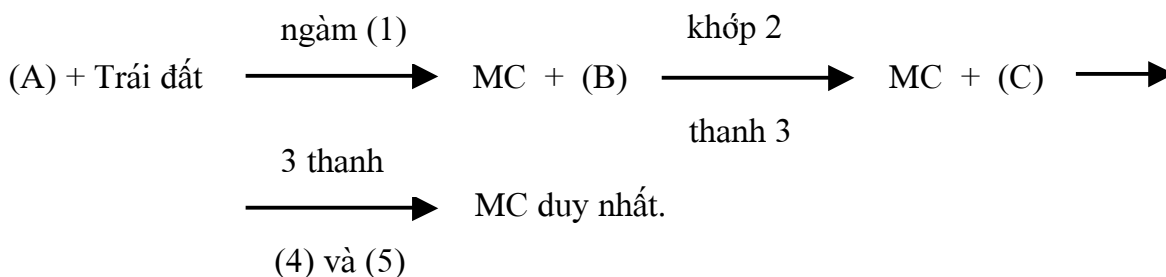
Thay vào (1 - 3)

$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D = 2 + 2.1 + 3.0 + 5 - 3.3 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng:



Vậy hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

** Ví dụ 5: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13i).*

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ bất kỳ nối đất. Sử dụng biểu thức (1-3) để khảo sát điều kiện cần.

Quan niệm hệ gồm các miếng cứng (af), (eb), (bg), (fh), (hc).

Vậy $D = 5, T = 0, K = 5, H = 0,$

$C = 5$. Thay vào (1 - 3)

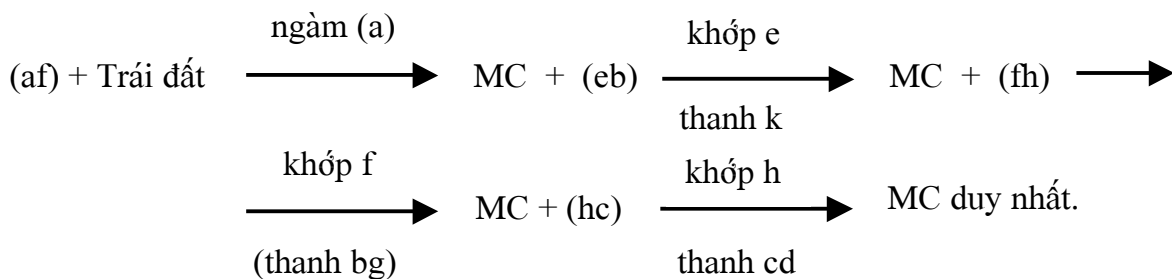
$$n = T + 2.K + 3.H + C - 3.D$$

$$= 0 + 2.5 + 3.0 + 5 - 3.5 = 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH.

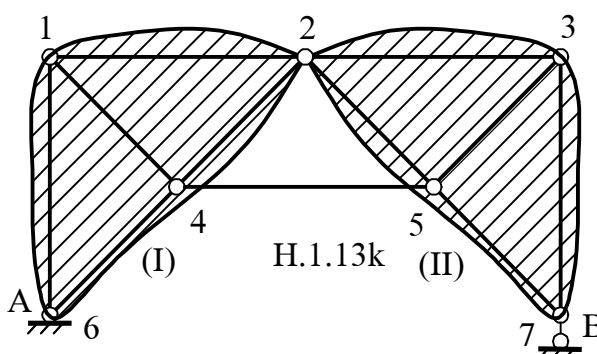
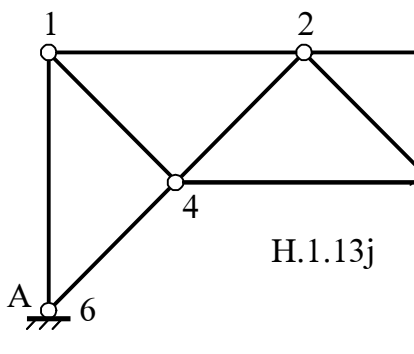
2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng:



Vậy hệ đã cho là hệ BBH (hệ tĩnh định).

* Ví dụ 6: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13j).



1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ dàn nổi đất. Sử dụng biểu thức (1 - 5) để khảo sát điều kiện cần.

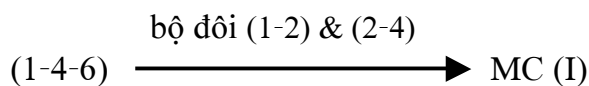
Vậy $D = 11, M = 7, C = 3$. Thay vào (1 - 5)

$$n = D - 2.M + C = 11 - 2.7 + 3 = 0$$

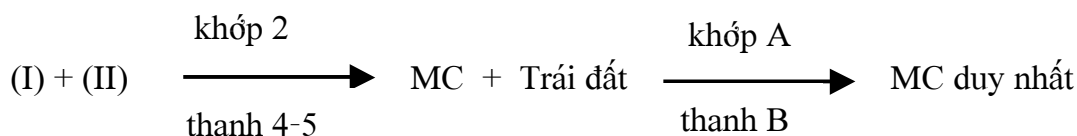
Hệ đã cho có khả năng BBH.

2. Điều kiện đủ:

Dùng phương pháp phát triển miếng cứng (H.1.13k).



Tương tự, (2-3-7-5) là miếng cứng (II)



Hệ đã cho là hệ BHTT (hệ tĩnh định).

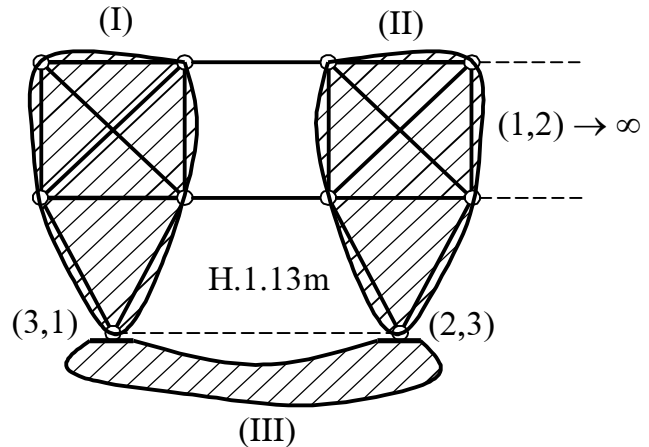
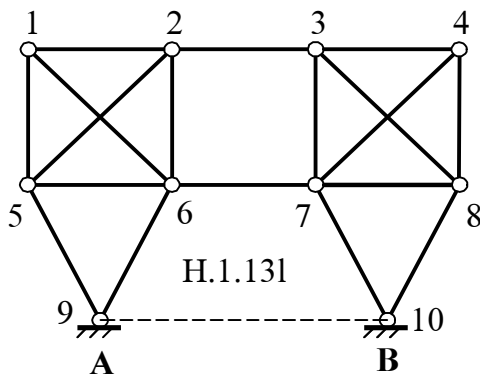
* Ví dụ 7: Phân tích cấu tạo hình học của hệ cho trên hình (H.1.13l)

1. Điều kiện cần: Hệ đã cho thuộc hệ dàn nối đất. Sử dụng biểu thức (1 - 5) để khảo sát điều kiện cần.

Vậy $T = 18, M = 10, C = 4$. Thay vào (1-5)

$$n = D - 2.M + C = 18 - 2.10 + 4 = 2 > 0.$$

Hệ đã cho có khả năng BBH và thừa liên kết.



2. Điều kiện đủ:

Đưa hệ về thành bài toán nối ba miếng cứng.

+ Trái đất: (I).

+ (1, 2, 5, 6, 9): (II). Dễ thấy (II) thừa một liên kết thanh.

+ Tương tự (3, 4, 7, 8, 10) là miếng cứng (III) cũng thừa một liên kết thanh.

Ba miếng cứng này nối với nhau bằng ba khớp (1,2 ở xa vô cùng), (2,3), (3,1). Ba khớp này thẳng hàng (H.1.13m).

Vậy hệ đã cho là BHTT.

CHƯƠNG 2

XÁC ĐỊNH NỘI LỰC TRONG HỆ PHẪNG TĨNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG BẤT ĐỘNG

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM.

I. Nội lực:

1. Khái niệm: Nội lực là độ biến thiên lực liên kết của các phần tử bên trong cấu kiện khi cấu kiện chịu tác dụng của ngoại lực và các nguyên nhân khác.

* *Chú ý:* Khái niệm về nội lực và phản lực là có thể đồng nhất với nhau nếu quan niệm tiết diện là một liên kết hàn hoặc liên kết tương đương nối hai miếng cứng ở hai bên tiết diện. Vì vậy, sau này ta có thể đồng nhất việc xác định nội lực với việc xác định phản lực trong các liên kết.

2. Các thành phần nội lực: Môn Cơ học kết cấu chủ yếu xác định 3 thành phần nội lực:

- Mômen uốn. Ký hiệu M .

- Lực cắt. Ký hiệu Q .

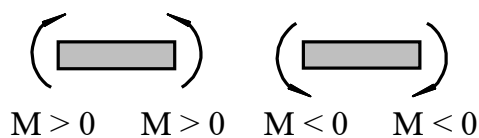
- Lực dọc. Ký hiệu N .

3. Quy ước dấu các thành phần nội lực:

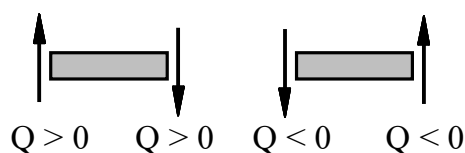
- Mômen uốn quy ước xem là dương khi nó làm căng thớ dưới và ngược lại (H.1a).

- Lực cắt quy ước xem là dương khi nó làm cho phần hệ xoay thuận chiều kim đồng hồ và ngược lại (H.1b).

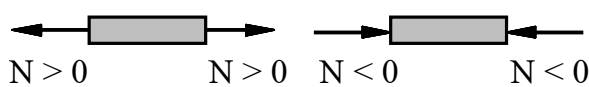
- Lực dọc quy ước xem là dương khi nó gây kéo và ngược lại (H.1c).



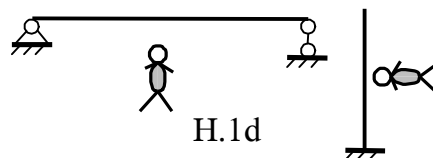
H.1a



H.1b



H.1c



H.1d

*

Chú ý:

- Cách quy ước dấu nội lực là giống môn Sức bền vật liệu.
- Quy ước chọn vị trí người đứng quan sát có hướng nhìn từ dưới lên đối với thanh ngang; từ phải sang trái đối với thanh đứng và thanh xiên khi xét dấu nội lực (H.1d).

4. Cách xác định nội lực (phản lực):

Nội lực (phản lực) được xác định bằng phương pháp mặt cắt. Các bước tiến hành như sau:

* *Bước 1:* Thực hiện một mặt cắt qua tiết diện cần xác định nội lực (qua liên kết cần xác định phản lực). Mặt cắt phải chia hệ thành hai phần độc lập. Giữ lại một phần bất kỳ.

* *Bước 2:* Thay thế tác dụng của phần hệ bị loại bỏ bằng các thành phần nội lực (phản lực) tương ứng. Các thành phần này có chiều chưa biết, có thể giả thiết có chiều dương, và chúng cũng là các đại lượng cần tìm.

* *Bước 3:* Thiết lập các điều kiện cân bằng dưới dạng các biểu thức giải tích. Xem bảng các điều kiện cân bằng.

Dạng điều kiện cân bằng	Dạng hệ lực		
	Hệ lực đồng quy tại O	Hệ lực song song	Hệ lực bất kỳ
Dạng I	$\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0.$ Yêu cầu: Trục X không được song song với trục Y		$\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0; \Sigma M_A = 0.$ Yêu cầu: Trục X không được song song với trục Y
Dạng II	$\Sigma X = 0; \Sigma M_A = 0.$ Yêu cầu: Trục X không được vuông góc với OA.	$\Sigma X = 0; \Sigma M_A = 0.$ Yêu cầu: Trục X không được vuông góc với phương các lực	$\Sigma X = 0; \Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0;$ Yêu cầu: Trục X không được vuông góc với AB.
Dạng III	$\Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0.$ Yêu cầu: A, B, O không được thẳng hàng	$\Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0.$ Yêu cầu: A, B không được song song với phương các lực	$\Sigma M_A = 0; \Sigma M_B = 0; \Sigma M_C = 0.$ Yêu cầu: A, B, C không được thẳng hàng

Bảng 1. Bảng các điều kiện cân bằng.

* *Bước 4:* Giải hệ phương trình các điều kiện cân bằng sẽ xác định được các thành phần nội lực (phản lực). Nếu kết quả mang dấu dương thì chiều của nội lực (phản lực) đúng chiều đã giả định và ngược lại.

* *Ví dụ:* Xác định các thành phần phản lực và nội lực tại tiết diện k (H.2a).

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_C\}$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A + P = 0 \Rightarrow H_A = -P = -2(T) < 0.$$

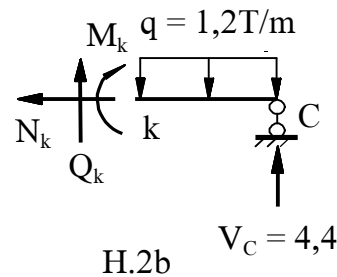
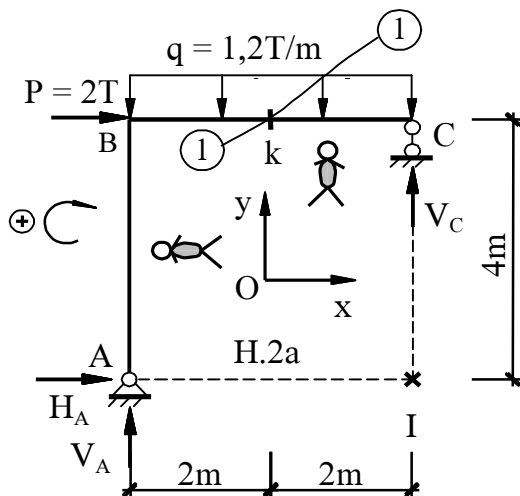
$$\Sigma M_I = 0 \Rightarrow 4.V_A + 4.P - 4.q.2 = 0.$$

$$\Rightarrow 4.V_A + 4.2 - 4.1,2.2 = 0 \Rightarrow V_A = 0,4(T) > 0.$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -4.V_C + 4.P + 4.q.2 = 0$$

$$\Rightarrow -4.V_C + 4.2 + 4.1,2.2 = 0 \Rightarrow V_C = 4,4(T) > 0$$

* Kiểm tra: $\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A + V_C - 4.q = 0 \Leftrightarrow 0,4 + 4,4 - 4.1,2 = 0$ (đúng)



2. Xác định nội lực tại tiết diện k: $\{M_k, Q_k, N_k\}$

Thực hiện mặt cắt (1-1), giữ lại và xét cân bằng phần bên phải (H.2b).

$$\begin{aligned} \Sigma M_k = 0 &\Rightarrow M_k + 2.q.1 - 2.V_C = 0 \\ &\Rightarrow M_k = 2.V_C - 2.q.1 = 2.4,4 - 2.1,2.1 = 6,4(T.m) > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma Y = 0 &\Rightarrow Q_k - 2.q + V_C = 0 \\ &\Rightarrow Q_k = 2.q - V_C = 2.1,2 - 4,4 = -2(T) < 0. \end{aligned}$$

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow N_k = 0(T)$$

II. Biểu đồ nội lực:

1. Khái niệm: Biểu đồ nội lực là đồ thị biểu diễn quy luật biến thiên của nội lực dọc theo chiều dài cấu kiện.

2. Các thành phần của biểu đồ nội lực:

- Đường chuẩn: là hệ trục dùng để dựng các tung độ.
- Tung độ: tung độ của biểu đồ nội lực tại một vị trí nào đó là biểu thị cho nội lực tại tiết diện tương ứng.
- Đường biểu đồ: là đường nối các tung độ.

3. Các quy ước khi vẽ biểu đồ nội lực:

- Đường chuẩn: thường chọn là đường trục thanh.
- Tung độ phải dựng vuông góc với đường chuẩn.
- Biểu đồ mômen: tung độ dương dựng về phía dưới, tung độ âm dựng lên trên đường chuẩn. Điều này có nghĩa là tung độ dựng về phía thó căng.
- Biểu đồ lực cắt: tung độ dương dựng lên trên đường chuẩn và ngược lại.
- Biểu đồ lực dọc: tung độ dương thường dựng lên trên đường chuẩn và ngược lại.
- Ghi ký hiệu \oplus , \ominus vào miềm dương (âm) của biểu đồ lực cắt và lực dọc.
- Ghi tên và đơn vị trên các biểu đồ đã vẽ được.

4. Cách vẽ biểu đồ nội lực:

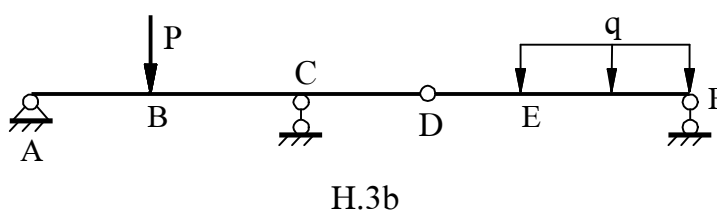
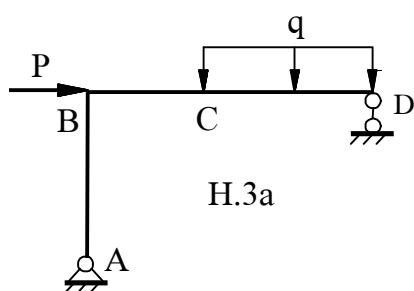
Theo môn Cơ học kết cấu, vẽ biểu đồ nội lực tiến hành theo các bước sau:

* *Bước 1:* Xác định các thành phần phản lực (nếu cần).

* *Bước 2:* Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng.

- Tiết diện đặc trưng: là những tiết diện chia hệ thành những đoạn thanh thẳng sao cho trên đoạn thanh đó hoặc là không chịu tải trọng hoặc là chỉ chịu tải trọng phân bố liên tục.

Như vậy, vị trí các tiết diện đặc trưng thường là: ở nút (nơi giao nhau các thanh), ở vị trí lực tập trung, ở hai đầu tải trọng phân bố, tại vị trí các gối tựa.... Ví dụ, với hệ cho trên hình (H.3a & H.3b), vị trí các tiết diện đặc trưng là nơi ghi ký hiệu bằng các chữ hoa A, B, C, E, F.



- Xác định nội lực: tiến hành theo nguyên tắc đã trình bày. Tuy nhiên, sau khi phân tích các điều kiện cân bằng, ta thấy có thể xác định như sau:

+ Mômen uốn tại tiết diện k (M_k): có giá trị được xác định bằng tổng mômen của tải trọng tác dụng lên phần hệ giữ lại lấy đối với trọng tâm tiết diện k.

+ Lực cắt tại tiết diện k (Q_k): có giá trị được xác định bằng tổng hình chiếu của các tải trọng tác dụng lên phần hệ được giữ lại lên phương vuông góc với tiếp tuyến trục thanh tại tiết diện k (phương của Q_k).

+ Lực dọc tại tiết diện k (N_k): có giá trị được xác định bằng tổng hình chiếu của các tải trọng tác dụng lên phần hệ được giữ lại lên phương tiếp tuyến với trục thanh tại tiết diện k (phương của N_k).

- Dấu của các đại lượng trong biểu thức xác định nội lực:

+ Tải trọng gây căng thớ dưới tại tiết diện k sẽ cho M_k mang dấu dương và ngược lại.

+ Tải trọng tác dụng lên phần bên trái có chiều hướng lên hay phần bên phải có chiều hướng xuống sẽ cho Q_k mang dấu dương và ngược lại.

+ Tải trọng gây kéo tại tiết diện k sẽ cho N_k mang dấu dương và ngược lại.

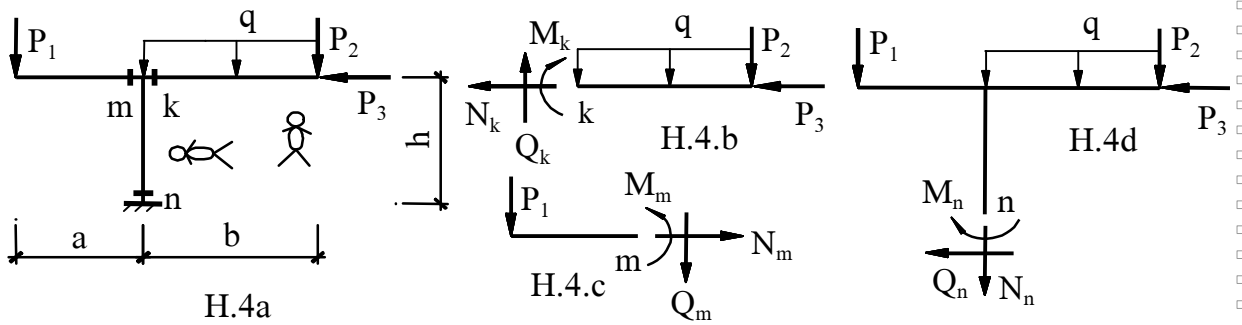
* *Bước 3:* Vẽ biểu đồ nội lực.

Sử dụng các liên hệ vi phân để vẽ. Chi tiết sẽ được trình bày sau bước 4.

* *Bước 4:* Kiểm tra lại kết quả.

Giống môn học Sức bền vật liệu.

* *Ví dụ:* Xác định nội lực tại các tiết diện k, m, n của hệ cho trên hình (H.4a).



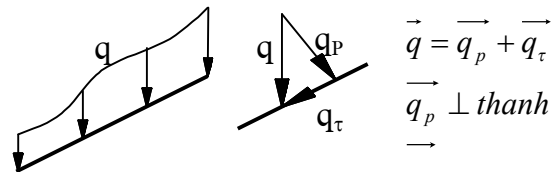
$$\begin{aligned}
 M_m &= -P_1 \cdot a & M_n &= P_1 \cdot a - P_2 \cdot b + P_3 \cdot h - q \cdot b \cdot \frac{b}{2} \\
 Q_m &= -P_1 & Q_n &= -P_3 \\
 N &= 0 & N_n &= -P_1 - P_2 - a \cdot b
 \end{aligned}$$

Sử dụng các liên hệ vi phân để vẽ biểu đồ nội lực:

1. Mối liên hệ giữa nội lực và tải trọng:

$$q_p = -\frac{dQ}{ds}; q_\tau = \frac{dN}{ds}; Q = \frac{dM}{ds}$$

Mối liên hệ vi phân cho ta thấy tải trọng q kém Q & N một bậc về mặt toán học; kém M hai bậc về mặt toán học.

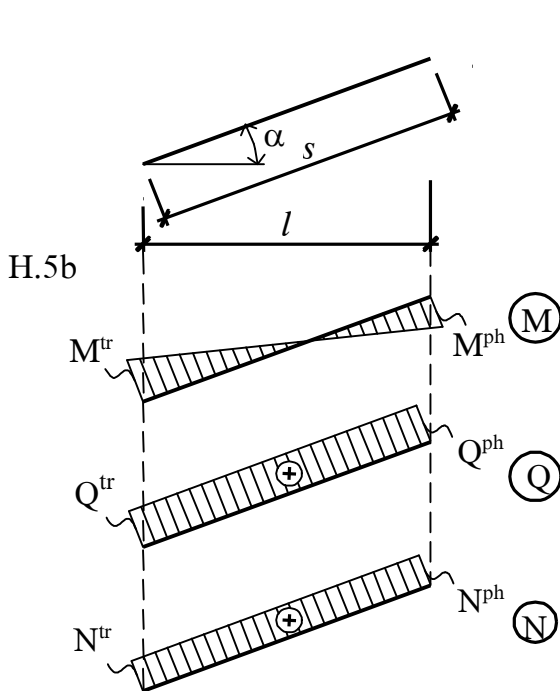


H.5a

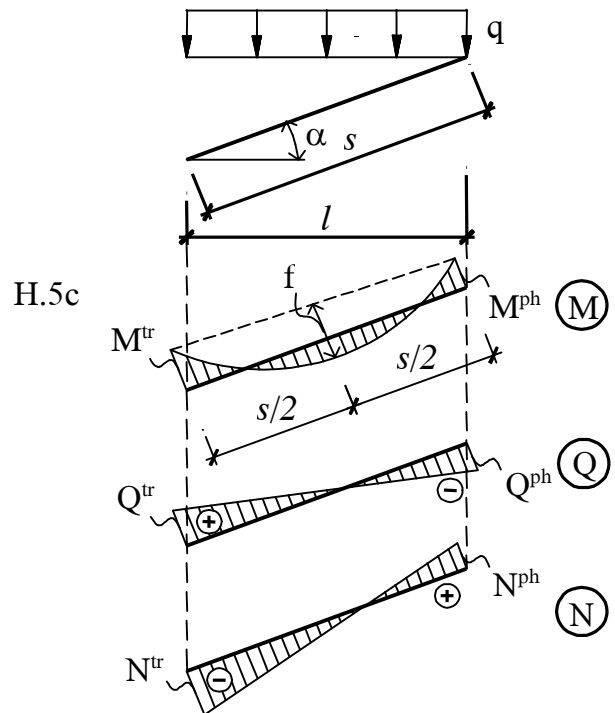
Mặc khác, với một hệ đã cho thì bậc của tải trọng trên mỗi đoạn thanh là hoàn toàn xác định, nghĩa là dạng đường biểu đồ (M), (Q), (N) cũng hoàn toàn xác định.

2. Trường hợp trên đoạn thanh không chịu tải trọng tác dụng: (H.5b)

Tức là $q = 0$. Như vậy, (Q) & (N) trên đoạn này sẽ song song với đường chuẩn;



H.5b



H.5c

(M) sẽ là đoạn đường thẳng được vẽ qua hai điểm.

Mối quan hệ nội lực ở 2 đầu đoạn thanh: $Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s}$; $N^{ph} = N^{tr}$

3. Trường hợp trên đoạn thanh chịu tải phân bố đều: (H.5c)

Tức là $q = \text{const}$. Như vậy, (Q) & (N) trên đoạn này sẽ là đoạn đường thẳng được vẽ qua hai điểm; (M) sẽ là đường parabol được vẽ qua ba điểm.

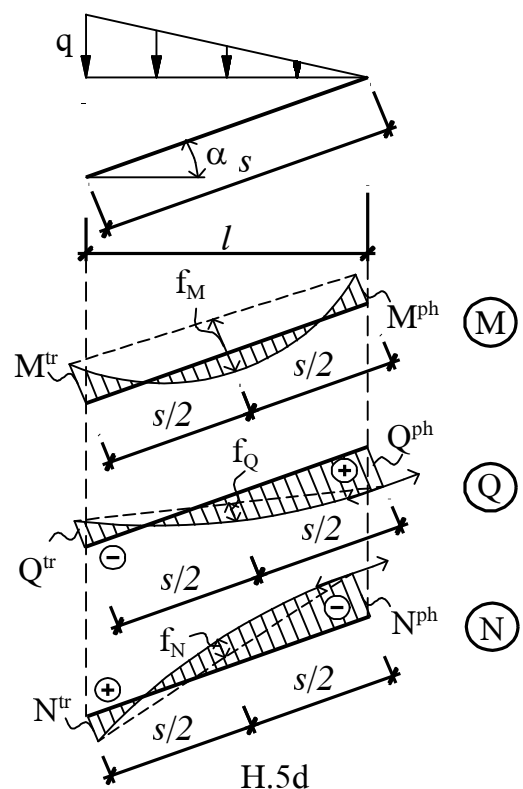
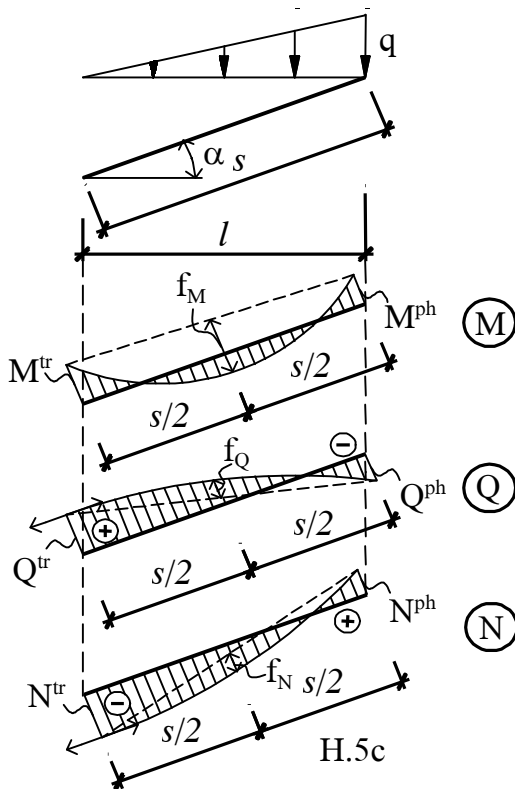
$f = \frac{q.l^2}{8}$ (gọi là tung độ treo); f treo vuông góc với đường chuẩn và theo chiều q.

Mối quan hệ giữa mômen và lực cắt tại hai đầu thanh:

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} + \frac{1}{2}.q.l.\cos\alpha; Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} - \frac{1}{2}.q.l.\cos\alpha$$

4. Trường hợp trên đoạn thanh chịu tải trọng phân bố hình tam giác: (H.5c & H.5d)

Tức là q có dạng bậc nhất. Như vậy, (Q) & (N) trên đoạn này sẽ là đoạn đường parabol được vẽ qua ba điểm; (M) sẽ là đường bậc ba, cho phép vẽ qua ba điểm.



- $f_M = \frac{q.l^2}{16}$; f_M treo vuông góc với đường chuẩn và treo theo chiều q.

- $f_Q = \frac{q.l}{8}.\cos\alpha$, f_Q treo vuông góc với đường chuẩn và có chiều sao cho tại vị trí

$q = 0$, tiếp tuyến với đường biểu đồ song song với đường chuẩn.

- $f_N = \frac{q.l}{8}.\sin\alpha$, f_N treo vuông góc với đường chuẩn và có chiều sao cho tại vị trí

$q = 0$, tiếp tuyến với đường biểu đồ song song với đường chuẩn.

* Mối quan hệ giữa mômen và lực cắt tại hai đầu thanh:

- Khi tải phân bố tam giác có đáy bên phải (H.5c):

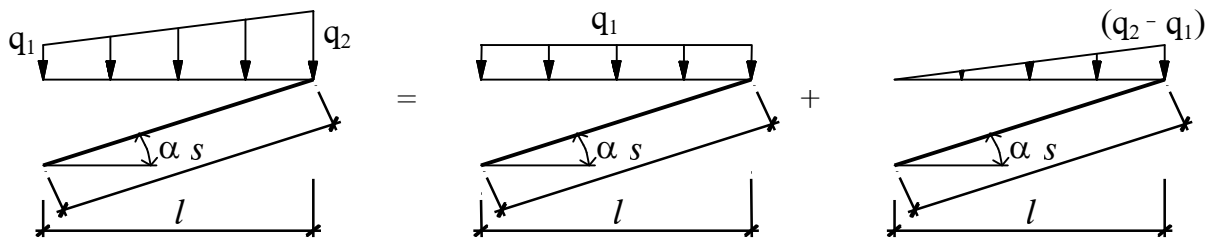
$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} + \frac{1}{6}q.l.\cos\alpha; Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} - \frac{1}{3}q.l.\cos\alpha;$$

- Khi tải phân bố tam giác có đáy bên trái (H.5d):

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} + \frac{1}{3}q.l.\cos\alpha; Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{s} - \frac{1}{6}q.l.\cos\alpha;$$

5. Trường hợp trên đoạn thanh chịu tải trong phân bố hình thang:

Dạng đường của các biểu đồ không thay đổi so với trường hợp tải phân bố hình tam giác. Có thể đưa về thành tổng của hai bài toán đã biết (H.5e).

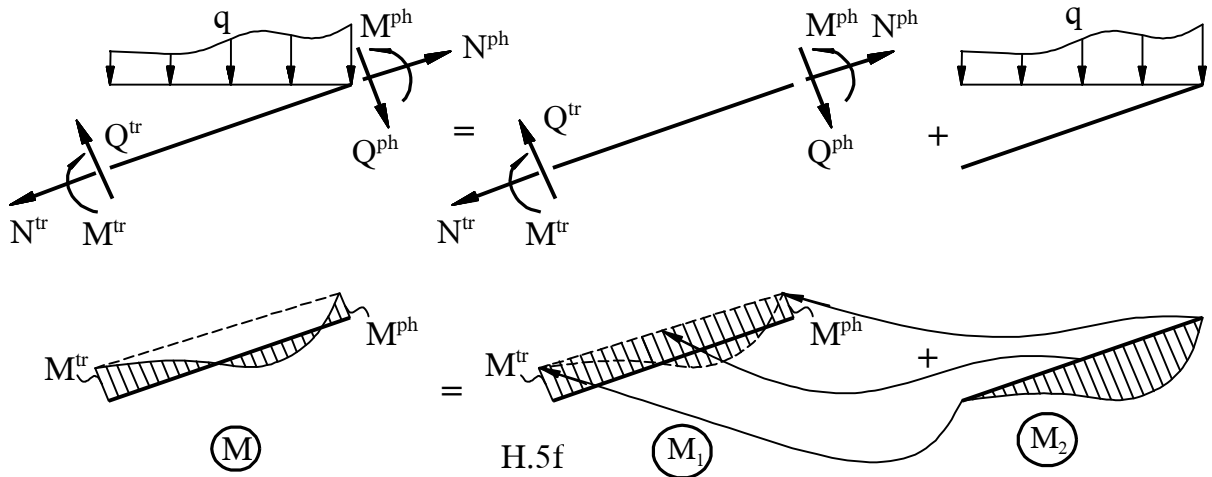


H.5e

6. Trường hợp trên đoạn thanh chịu tải trọng phân bố quy luật bất kỳ:

Dùng cách treo biểu đồ (H.5f).

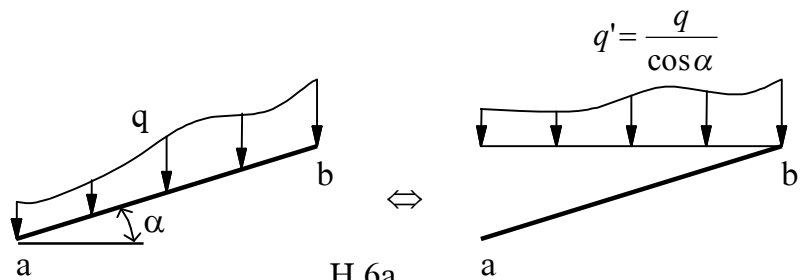
- Đối với (Q), (N), cách thực hiện tương tự.



H.5f

* Các chú ý:

- Trường hợp tải trọng phân bố theo chiều dài xiên của trục thanh, có thể đưa về theo phương ngang bằng cách chia tải trọng đó cho $\cos\alpha$ (H.6a).

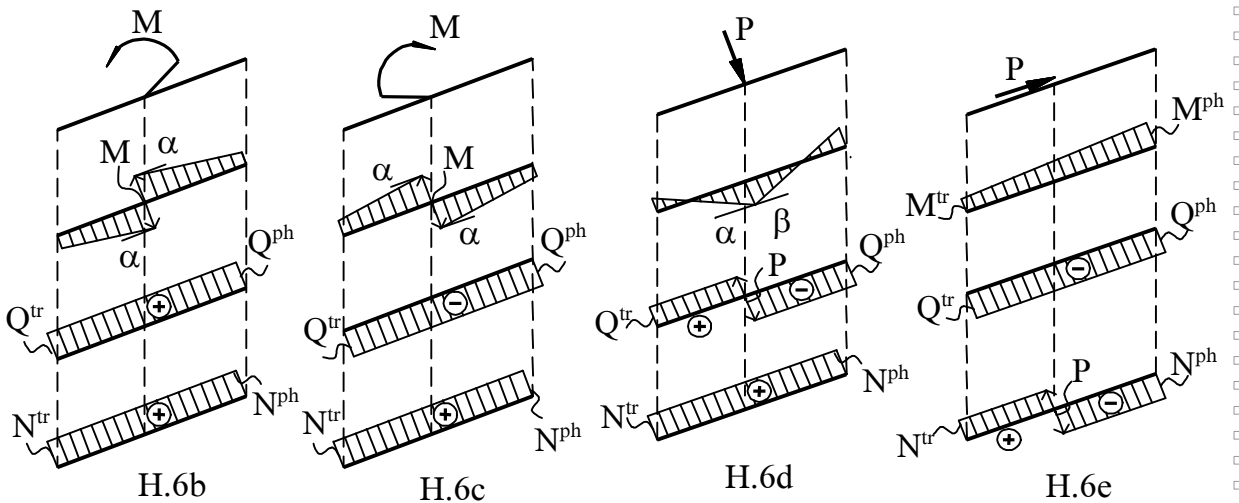


H.6a

- Tại vị trí chịu tải trọng tập trung, nội lực có sự thay đổi:

+ Mômen tập trung (H.6b & H.6c)

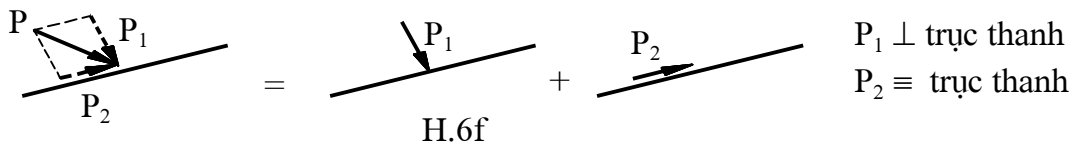
+ Lực tập trung có phương vuông góc với trục thanh (H.6d).



$$Q^{tr} = Q^{ph} = \operatorname{tg}\alpha; N^{tr} = N^{ph}$$

+ Lực tập trung có phương trùng trục thanh (H.6e).

+ Lực tập trung có phương bất kỳ: có thể đưa về tổng của hai bài toán (H.6f).



§ 2. DẦM, KHUNG ĐƠN GIẢN.

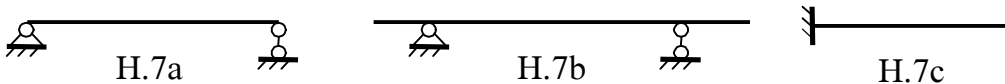
I. Dầm đơn giản:

1. Phân tích cấu tạo hệ:

a. **Định Nghĩa:** Dầm đơn giản là hệ gồm một thanh thẳng nối với trái đất bằng số liên kết tương đương với ba liên kết loại một để tạo thành hệ BBH.

b. Phân loại:

- Dầm đơn giản hai đầu khớp. (H.7a)
- Dầm đơn giản có đầu thừa. (H.7b)
- Dầm công xôn. (H.7c)



2. Xác định các thành phần phản lực:

Trong hệ dầm đơn giản, tồn tại ba thành phần phản lực. Cách xác định đã được trình bày trong phần xác định phản lực. Tuy nhiên, để tránh việc giải hệ phương trình toán học, nên thiết lập sao cho trong mỗi phương trình chỉ có một ẩn số. Cách thực hiện như sau:

- Nếu hai ẩn còn lại đồng quy tại một điểm I, phương trình cần thiết lập là tổng mômen toàn hệ đối với điểm I bằng không. ($\sum M_I = 0$)

- Nếu hai ẩn còn lại song song nhau, phương trình cần thiết lập là tổng hình chiếu toàn hệ lên phương vuông góc phương hai ẩn song song bằng không. ($\sum Z = 0$, Z có phương vuông góc với phương hai ẩn song song)

- Nếu hai ẩn còn lại là một lực và một mômen, phương trình cần thiết lập là tổng hình chiếu lên phương vuông góc của ẩn lực bằng không. ($\sum Z = 0$, Z có phương vuông góc với phương ẩn lực)

* Minh họa:

1. Xác định phản lực của hệ cho trên

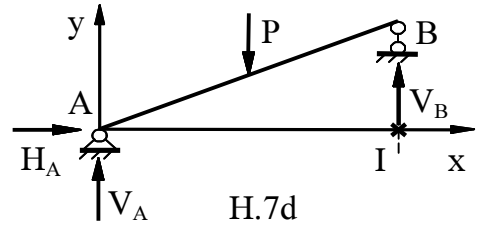
hình (H.7d):

Các thành phần phản lực gồm $\{V_A, H_A, V_B\}$

- $H_A: \sum X = 0 \Rightarrow f_1(H_A) = 0 \Rightarrow H_A.$

- $V_A: \sum M_I = 0 \Rightarrow f_2(V_A) = 0 \Rightarrow V_A.$

- $V_B: \sum M_A = 0 \Rightarrow f_3(V_B) = 0 \Rightarrow V_B.$



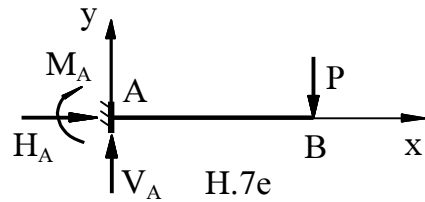
2. Xác định phản lực của hệ cho trên hình (H.7e):

Các thành phần phản lực gồm $\{V_A, H_A, M_A\}$

- $H_A: \sum X = 0 \Rightarrow f_4(H_A) = 0 \Rightarrow H_A.$

- $M_A: \sum M_A = 0 \Rightarrow f_5(M_A) = 0 \Rightarrow M_A.$

- $V_A: \sum Y = 0 \Rightarrow f_6(V_A) = 0 \Rightarrow V_A.$



3. Xác định và vẽ các biểu đồ nội lực:

- Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng: đã trình bày

- Dựng tung độ biểu đồ tại các tiết diện đặc trưng.

- Vẽ biểu đồ nội lực trên từng đoạn thanh theo các liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực.

4. Kiểm tra lại biểu đồ nội lực: đã trình bày.

CÁC VÍ DỤ VỀ DẦM ĐƠN GIẢN

* Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình (H.8a)

1. Xác định các thành

phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_B\}$

- $\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0.$

- $\sum M_A = 0$

$\Rightarrow 8.V_B - 6.30 - 10.4.2 = 0$

$\Rightarrow V_B = 32,5 (> 0)$

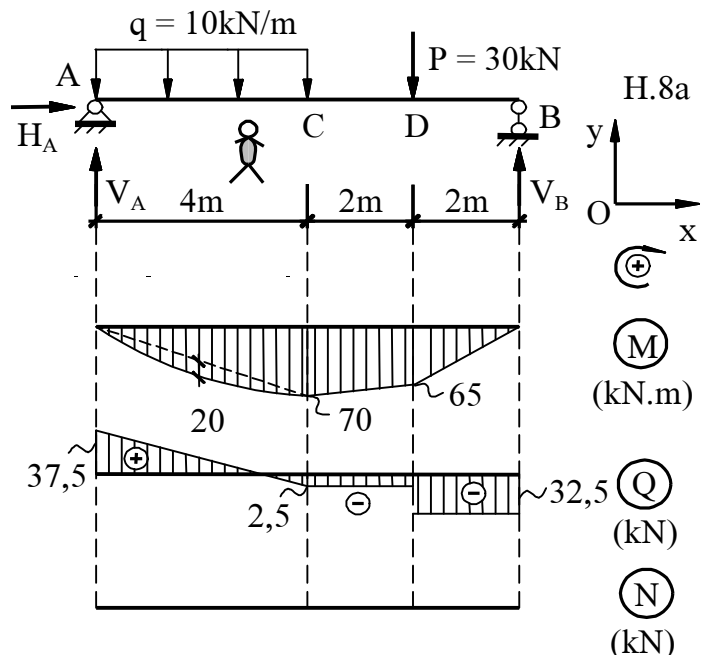
- $\sum M_B = 0$

$\Rightarrow 8.V_A - 2.30 - 10.4.6 = 0$

$\Rightarrow V_A = 37,5 (> 0)$

* Kiểm tra: $\sum Y = 0$

$\Leftrightarrow -q.4 - P + V_A + V_B = 0$



$\Leftrightarrow -4.10 - 30 + 37,5 + 32,5 = 0$ (đúng)

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = +V_A = 37,5$; $N_A = H_A = 0$.

Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = -V_B = -32,5$; $N_B = 0$.

Tại C: $M_C = V_A.4 - q.4.2 = 37,5.4 - 10.4.2 = 150 - 80 = 70$.

$Q_C = V_A - q.4 = 37,5 - 10.4 = 2,5$; $N_C = 0$.

Tại D: $M_D = +V_B.2 = 32,5.2 = 65$.

Tại D có lực tập trung nên biểu đồ (Q) có bước nhảy.

$Q_{DC} = +V_A - q.4 = -2,5$; $Q_{DB} = -V_B = 32,5$.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn AC có q phân bố đều nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{10.4^2}{8} = 20$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

* Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình (H.9a)

Quy tải trọng phân bố đều về tác dụng trên đường nằm ngang:

$$q^{td} = \frac{q}{\cos \alpha} = \frac{2}{\cos 30^\circ} = 2,309.$$

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{M_A, H_A, V_B\}$

$\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A = 0$.

$\Sigma M_I = 0$

$\Rightarrow M_A + M - 2.P - q^{td}.2.1 = 0$.

$\Rightarrow M_A + 3,5 - 2.3 - 2,309.2.1 = 0$.

$\Rightarrow M_A = +7,118 (> 0)$

$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_B - P - q^{td}.2 = 0$

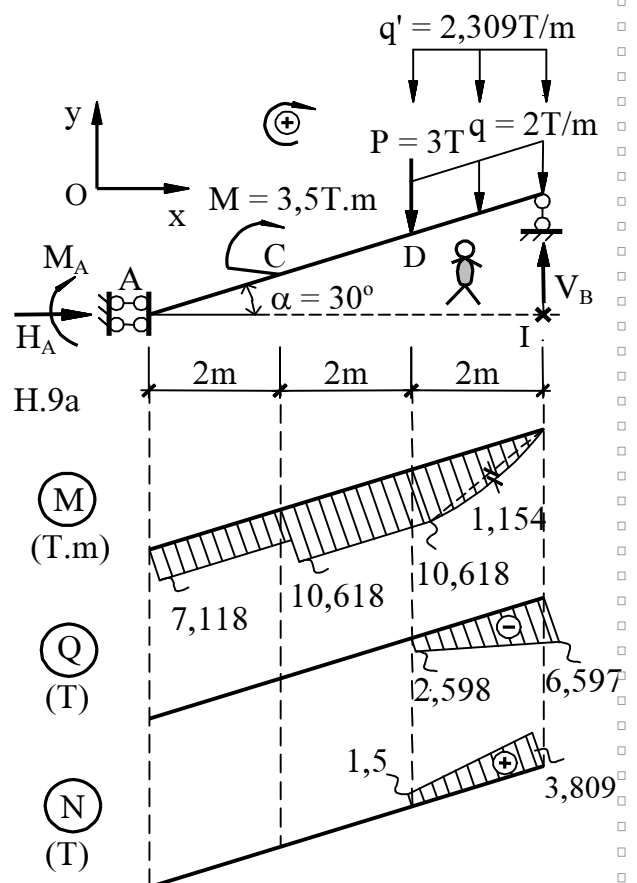
$\Rightarrow V_B - 3 - 2,309.2 = 0$

$\Rightarrow V_B = +7,618 (> 0)$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

- Tại A: $M_A = 7,118$; $Q_A = 0$;

$N_A = 0$.



- Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = -V_B \cdot \cos\alpha$
 $= -7,618 \cdot \cos 30^\circ = -6,597$.
 $N_B = V_B \cdot \sin\alpha = 7,618 \cdot \sin 30^\circ = 3,809$.
- Tại C: $M_{CA} = 7,118$; $M_{CD} = M_A + M = 7,118 + 3,5 = 10,618$.
 $Q_{CA} = Q_{CD} = 0$, $N_{CA} = N_{CD} = 0$.
- Tại D: $M_D = M_A + M = 10,618$; $Q_{DC} = 0$; $Q_{DB} = -P \cdot \cos\alpha = -3 \cdot \cos 30^\circ = -2,598$.
 $N_{CD} = 0$; $N_{DB} = P \cdot \sin\alpha = 3 \cdot \sin 30^\circ = 1,5$

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn DB có q^{td} phân bố đều nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q^{td} \cdot l^2}{8} = \frac{2,309 \cdot 2^2}{8} = 1,154$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: TỰ KIỂM TRA.

* Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình H.10

* Nhận xét rằng nếu ta giữ lại phần bên

phải khi xét cân bằng một phần hệ thì không cần quan tâm đến phản lực.

1. Xác định nội lực tại các tiết diện

đặc trưng:

Tại C: $M_C = 0$; $Q_C = P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ$

$$Q_C = 2 \cdot (1 + \sin 45^\circ) = 3,414;$$

$N_C = -P_2 \cdot \cos 45^\circ = -2 \cdot \cos 45^\circ = -1,414$.

Tại B: $M_{BC} = -(P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ) \cdot 2 =$

$$= -2 \cdot (1 + \sin 45^\circ) \cdot 2 = -6,828;$$

$M_{BA} = M_{BC} + M = -3,828$;

$Q_B = P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ = 3,414$;

$N_B = -P_2 \cdot \cos 45^\circ = -1,414$.

Tại A: $M_A = -(P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ) \cdot 4 + M +$

$$+ 2 \cdot q \cdot 1 = -(2 + 2 \cdot \sin 45^\circ) \cdot 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 =$$

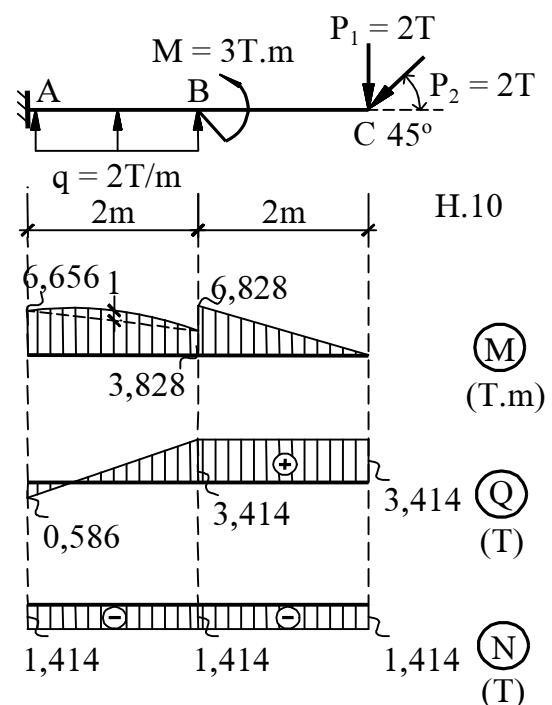
$$= -6,656;$$

$Q_A = P_1 + P_2 \cdot \sin 45^\circ - 2 \cdot q = 2 + 2 \cdot \sin 45^\circ - 2 \cdot 2 = -0,586$; $N_A = -P_2 \cdot \cos 45^\circ = -1,414$.

2. Vẽ biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen:

- Trên đoạn AB có tải trọng q phân bố đều, có tung độ treo:



$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{2.2^2}{8} = 1$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

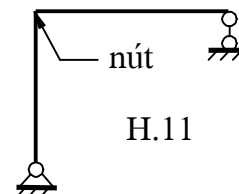
c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

II. Khung đơn giản:

1. Định nghĩa: Khung đơn giản là hệ gồm một thanh gãy khúc nối với trái đất bằng các liên kết tương đương ba liên kết loại một tạo thành hệ BBH.



2. Xác định các thành phần phản lực: Gồm ba thành phần và được xác định như trường hợp dầm đơn giản.

2. Xác định và vẽ các biểu đồ nội lực:

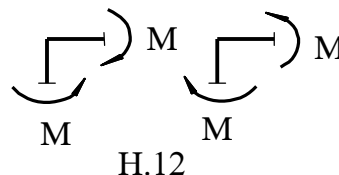
Tương tự trường hợp dầm đơn giản.

3. Kiểm tra lại các biểu đồ nội lực. (đã trình bày)

* *Chú ý:*

Nút khung có tính chất: tổng mômen ngoại lực và nội lực tại các đầu thanh quy tụ vào nút khung bằng không (cân bằng mômen nút). Thường sử dụng tính chất này để kiểm tra sự cân bằng mômen nút cho kết quả tính toán.

Trường hợp đặc biệt: một nút có hai đầu thanh quy tụ và không chịu mômen ngoại lực, mômen nội lực tại hai đầu thanh đó bằng nhau về giá trị và cùng làm căng thớ bên trong hay bên ngoài.



CÁC VÍ DỤ VỀ KHUNG ĐƠN GIẢN

* Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình H.13a

1. Xác định các thành phần phản lực:

lực: $\{V_A, H_A, V_D\}$

$$-\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

$$-\Sigma M_I = 0 \Rightarrow 4.V_A - 4.q.2 - 6.P = 0$$

$$\Rightarrow 4.V_A - 4.2.2 - 6.3 = 0.$$

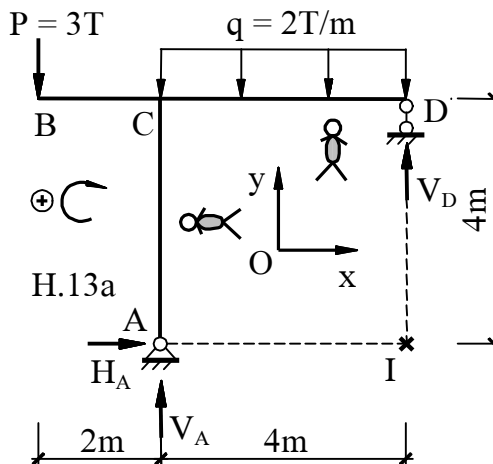
$$\Rightarrow V_A = 8,5 (> 0)$$

$$-\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -4.V_D + 4.q.2 - 2.P = 0$$

$$\Rightarrow -4.V_D + 4.2.2 - 2.3 = 0.$$

$$\Rightarrow V_D = 2,5 (> 0)$$

* Kiểm tra: $\Sigma Y = 0$



$$\Leftrightarrow -q \cdot 4 - P + V_A + V_D = 0$$

$$\Leftrightarrow -2.4 - 3 + 8,5 + 2,5 = 0 \text{ (đúng)}$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0; Q_A = -H_A = 0; N_A = -V_A = -8,5$.

Tại B: $M_B = 0; Q_B = -P = -3; N_B = 0$.

Tại C: $M_{CA} = -3.H_A = 0; M_{CB} = -2.P = -6; M_{CD} = -2.P - 3.H_A = -6;$

$Q_{CA} = -H_A = 0; Q_{CB} = -P = -3; Q_{CD} = -P + V_A = -3 + 8,5 = 5,5$.

$N_{CA} = -V_A = -8,5; N_{CB} = 0; N_{CD} = -H_A = 0$.

Kiểm tra sự cân bằng mômen nút C (H.13b).

Tại D: $M_D = 0, Q_D = -V_D = -2,5; N_D = 0$.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn CD có q phân bố đều nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{2.4^2}{8} = 4$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

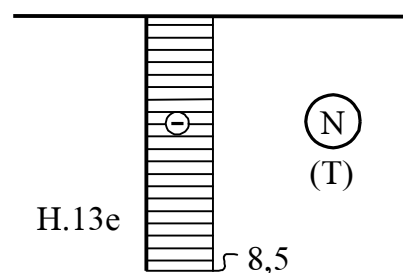
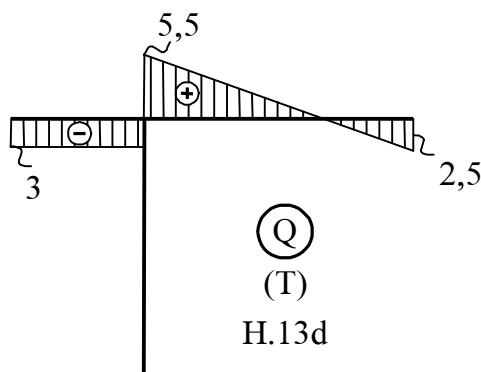
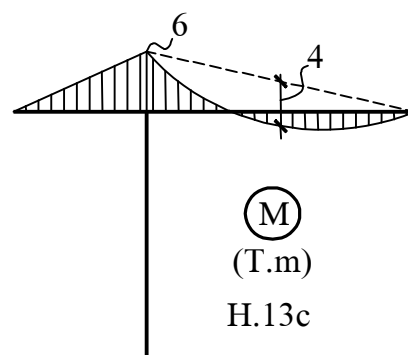
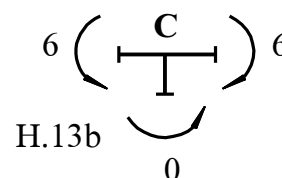
b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.



* Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình H.14a.

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, V_C, H_B\}$

$$-\Sigma X = 0 \Rightarrow H_B = -P$$

$$\Rightarrow H_B = -2 (< 0).$$

$$-\Sigma M_I = 0 \Rightarrow -8.V_C + 4.P +$$

$$+ 4.q.2 + \frac{4.q}{2} \left[\frac{4}{3} + 4 \right] = 0$$

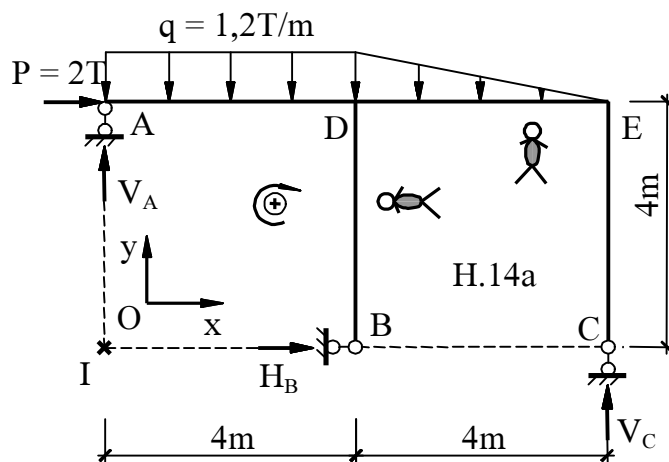
$$\Rightarrow -8.V_C + 4.2 + 4.1,2.2 + \frac{4.1,2}{2} \left[\frac{4}{3} + 4 \right] = 0$$

$$\Rightarrow V_C = 3,8 (> 0)$$

$$-\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 8.V_A + 4.P - 4.q.6 - \frac{4.q}{2} \left[\frac{2}{3}.4 \right] = 0$$

$$\Rightarrow 8.V_A + 4.2 - 4.1,2.6 - \frac{4.1,2}{2} \left[\frac{2}{3}.4 \right] = 0.$$

$$\Rightarrow V_A = 3,4 (> 0)$$



* Kiểm tra: $\Sigma Y = 0 \Leftrightarrow V_A + V_C - 4.q - \frac{4.q}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 3,4 + 3,8 - 4.1,2 - \frac{4.1,2}{2} = 0 \text{ (đúng)}$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0; Q_A = V_A = 3,4; N_A = -P = -2.$
 Tại B: $M_B = 0; Q_B = -H_B = -(-2) = 2; N_B = 0$
 Tại D: $M_{DA} = 4.V_A - 4.q.2 = 4.3,4 - 4.1,2.2 = 4.$
 $M_{DB} = -4.H_B = -4.(-2) = 8.$
 $M_{DE} = 4.V_A - 4.q.2 - 4.H_B = 4.3,4 - 4.1,2.2 - 4.(-2) = 12$

* Kiểm tra cân bằng mômen nút D: (tự kiểm tra)

$$Q_{DA} = V_A - 4.q = 3,4 - 4.1,2 = -1,4$$

$$Q_{DB} = -H_B = -(-2) = 2; Q_{DE} = V_A - 4.q = -1,4.$$

$$N_{DA} = -P = -2; N_{DB} = 0; N_{DE} = -P - H_B = 0.$$

Tại E: $M_{ED} = 0; M_{EC} = 0; Q_{ED} = -V_C = -3,8; Q_{EC} = 0.$
 $N_{ED} = 0; N_{EC} = -V_C = -3,8.$

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn AD có q phân bố đều nên có tung độ treo:

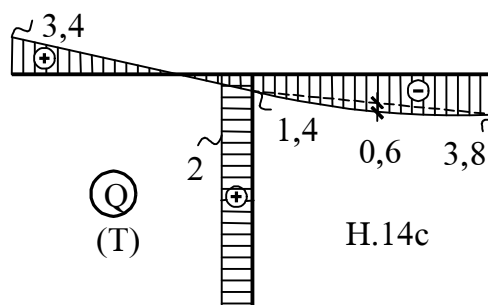
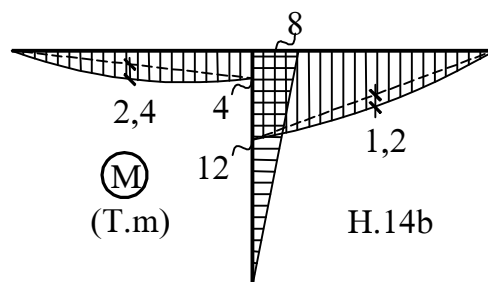
$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{1,2.4^2}{8} = 2,4$$

- Trên đoạn DE có q phân bố tam giác nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l^2}{16} = \frac{1,2.4^2}{16} = 1,2$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):



- Trên đoạn DE có q phân bố tam giác nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l}{8} \cdot \cos \alpha = \frac{1,2 \cdot 4}{8} \cdot 1 = 0,6$$

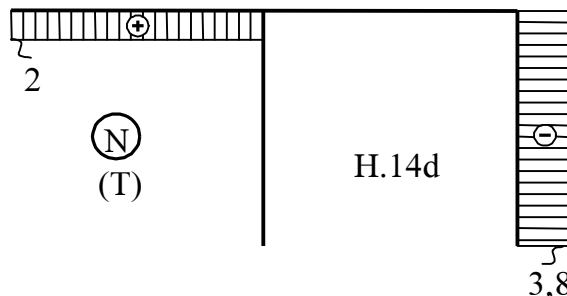
- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Trên đoạn DE có q phân bố tam giác nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l}{8} \cdot \sin \alpha = \frac{1,2 \cdot 4}{8} \cdot 0 = 0$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.



4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ:

Tự kiểm tra.

* Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực của dầm cho trên hình H.15a

Quy tải trọng phân bố đều về tác dụng trên đường nằm ngang:

$$q^{td} = \frac{q}{\cos \alpha} = \frac{1,2}{\cos 30^\circ} = 1,346.$$

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_C\}$

$$-\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

$$-\Sigma M_I = 0$$

$$\Rightarrow 6 \cdot V_A - 4 \cdot q^{td} \cdot 4 + 2 \cdot P = 0$$

$$\Rightarrow 6 \cdot V_A - 4 \cdot 1,346 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 0.$$

$$\Rightarrow V_A = 2,922 (> 0)$$

$$-\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -6 \cdot V_C + 4 \cdot q^{td} \cdot 2 + 8 \cdot P = 0 \Rightarrow -6 \cdot V_C + 4 \cdot 1,346 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = 0.$$

$$\Rightarrow V_C = 4,461 (> 0)$$

$$* \text{Kiểm tra: } \Sigma Y = 0 \Leftrightarrow -q^{td} \cdot 4 - P + V_A + V_C = 0$$

$$\Leftrightarrow -1,346 \cdot 4 - 2 + 2,922 + 4,461 = 0 \text{ (đúng)}$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = V_A \cdot \cos \alpha = 2,922 \cdot \cos 30^\circ = 2,530$; $N_A = -V_A \cdot \sin \alpha = -1,461$.

Tại B: $M_B = 2 \cdot V_C - 4 \cdot P = 2 \cdot 4,461 - 4 \cdot 2 = 0,922$.

$$Q_{BA} = V_A \cdot \cos \alpha - 4 \cdot q^{td} \cdot \cos \alpha = -2,132; Q_{BC} = P - V_C = -2,461.$$

$$N_{BA} = -V_A \cdot \sin \alpha +$$

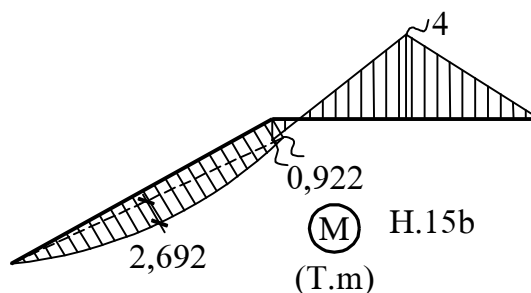
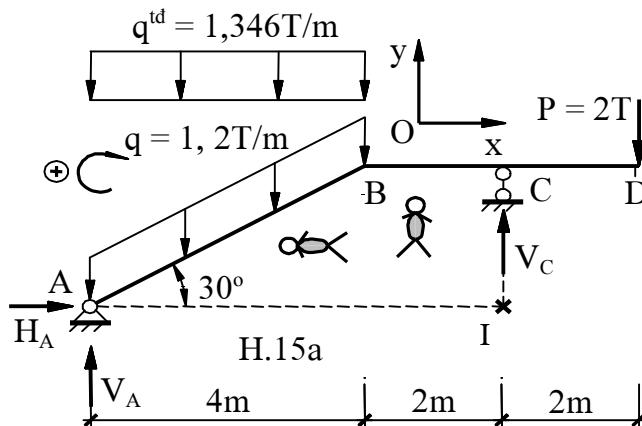
$$4 \cdot q^{td} \cdot \sin \alpha = 1,231; N_{BC} = 0.$$

Tại C: $M_C = -2 \cdot P = -2 \cdot 2 = -4$;

$$Q_{CB} = -V_C + P = -$$

$$2,461;$$

$$Q_{CD} = P = 2; N_C = 2.$$



Tại D: $M_D = 0; Q_D = P = 2; N_D = 0$.

Kiểm tra sự cân bằng mômen nút B: Tự kiểm tra

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn AB có q^{td} phân bố đều nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q^{td} \cdot l^2}{8} = \frac{1,346 \cdot 4^2}{8} = 2,692 .$$

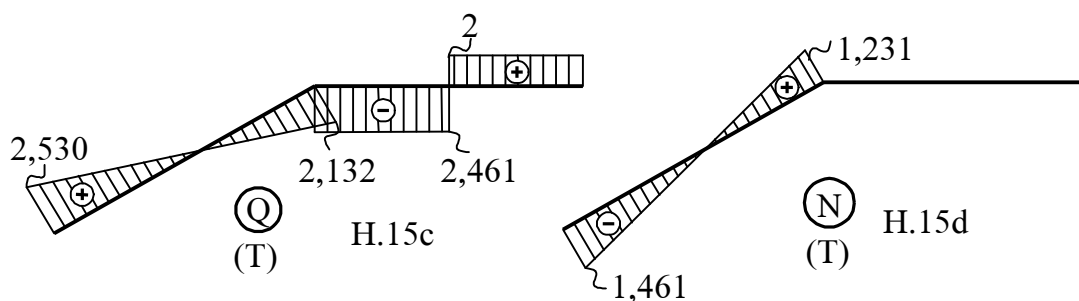
- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.

c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

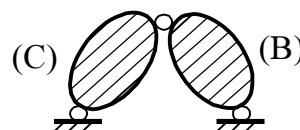


4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

§3. HỆ BA KHỚP.

I. Phân tích cấu tạo hệ:

1. Định nghĩa: Hệ ba khớp là hệ gồm hai miếng cứng nối với nhau bằng một khớp và liên kết với trái đất bằng hai khớp (gối cố định) để tạo thành hệ BBH.



H.16

2. Tính chất của hệ ba khớp:

- Trong hệ luôn tồn tại thành phần phản lực nằm ngang ngay cả khi tải trọng chỉ tác dụng theo phương thẳng đứng.

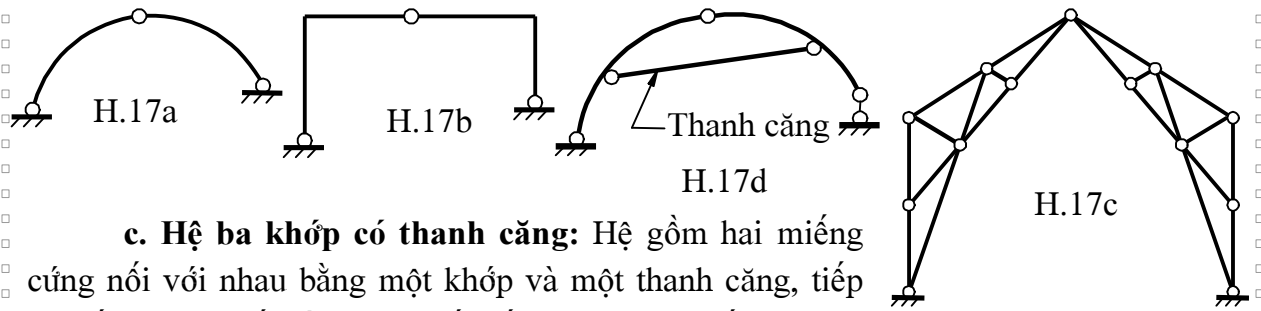
- Nội lực trong hệ ba khớp (mômen uốn và lực cắt) nói chung là nhỏ hơn trong hệ đơn giản cùng nhịp, cùng chịu tải trọng.

3. Phân loại hệ ba khớp:

a. Vòm ba khớp: Khi các miếng cứng của hệ là những thanh cong (H.17a). Trong vòm ba khớp, nói chung phát sinh đầy đủ ba thành phần nội lực.

b. Khung ba khớp: Khi các miếng cứng của hệ là các thanh gãy khúc (H.17b). Trong khung ba khớp, nói chung phát sinh đầy đủ ba thành phần nội lực.

c. Dàn ba khớp: Khi các miếng cứng của hệ là những dàn phẳng tĩnh định (H.17c). Trong dàn ba khớp, các thanh chỉ tồn tại lực dọc.



c. Hệ ba khớp có thanh căng: Hệ gồm hai miêng cứng nối với nhau bằng một khớp và một thanh căng, tiếp đó nối với trái đất bằng một gối cố định và một gối di động để tạo thành hệ BBH (H.17d). Thanh căng có tác dụng tiếp nhận lực xô ngang.

4. Ưu, nhược điểm của hệ ba khớp:

a. Ưu điểm:

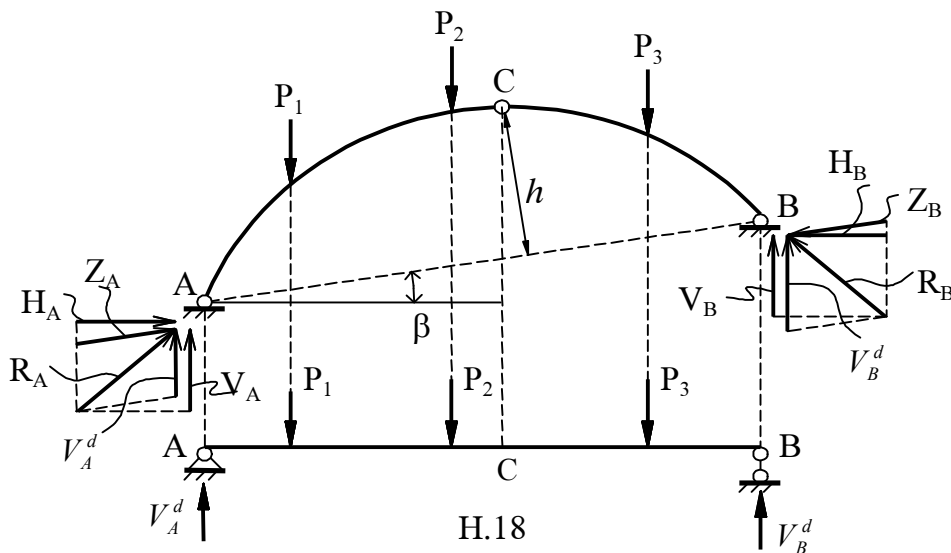
- Tiết kiệm vật liệu.
- Có thể vượt qua được những nhịp lớn.
- Hình dáng kiến trúc đẹp.

b. Nhược điểm:

- Khó thi công.
- Trong hệ luôn tồn tại thành phần lực xô ngang nên kết cấu móng phức tạp. Để khắc phục điều này, có thể sử dụng hệ ba khớp có thanh căng.

II. Xác định phản lực:

Xét hệ vòm ba khớp như trên hình vẽ (H.18). Gọi \vec{R}_A, \vec{R}_B là phản lực tại gối tựa A, B. \vec{R}_A, \vec{R}_B có phương bất kỳ, có thể phân tích chúng thành hai thành phần theo hai phương xác định.



1. Phân tích theo phương AB và phương thẳng đứng:

$$\vec{R}_A \left\{ \vec{Z}_A \ \& \ \vec{V}_A^d \right\}; \quad \vec{R}_B \left\{ \vec{Z}_B \ \& \ \vec{V}_B^d \right\}$$

a. Xác định \vec{V}_A^d & \vec{V}_B^d :

- $\sum M_B = 0 \Rightarrow f_1(V_A) = 0 \Rightarrow V_A.$
- $\sum M_A = 0 \Rightarrow f_2(V_B) = 0 \Rightarrow V_B.$

Trong trường hợp tải trọng chỉ tác dụng theo phương thẳng đứng, dễ thấy rằng các thành phần V_A^d, V_B^d giống như các phản lực trong dầm đơn giản tương ứng. Vì vậy các phản lực này gọi là phản lực dầm và được ký hiệu như ở trên.

b. Xác định \vec{Z}_A, \vec{Z}_B :

Cắt qua C, giữ lại phần bên trái và viết phương trình cân bằng mômen đối với C.

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow -Z_A \cdot h + M_C^r = 0 \Rightarrow Z_A = \frac{M_C^r}{h}.$$

Trong đó, M_C^r là tổng mômen của các lực tác dụng lên phần hệ bên trái C, không kể Z_A . Trong biểu thức xác định M_C^r , các ngoại lực làm cho phần hệ xoay thuận chiều kim đồng hồ quanh C lấy dấu dương.

Tương tự, xét cân bằng mômen cho phần hệ bên phải C $\Rightarrow Z_A = \frac{M_C^{ph}}{h} \cdot M_C^{ph}$ là tổng mômen của các lực tác dụng lên phần hệ bên phải C, không kể Z_B . Trong biểu thức xác định M_C^{ph} , các ngoại lực làm cho phần hệ xoay ngược chiều kim đồng hồ quanh C, lấy dấu dương.

- Các thành phần \vec{Z}_A, \vec{Z}_B gọi là phản lực vòm.

2. Phân tích theo phương thẳng đứng và phương ngang:

$$\vec{R}_A \{ \vec{V}_A \text{ \& } \vec{H}_A \}; \vec{R}_B \{ \vec{V}_B \text{ \& } \vec{H}_B \}$$

a. Xác định \vec{H}_A, \vec{H}_B :

Từ quan hệ hình học trên hình vẽ. $H_A = Z_A \cdot \cos\beta$; $H_B = Z_B \cdot \cos\beta$.

- H_A, H_B gọi là các lực xô.

- Trong trường hợp tải trọng tác dụng theo phương đứng, dễ thấy $H_A = H_B = H$, nên $Z_A = Z_B = Z$.

b. Xác định \vec{V}_A, \vec{V}_B :

Từ quan hệ hình học trên hình vẽ.

$$V_A = V_A^d + Z_A \cdot \sin\beta; V_B = V_B^d - Z_B \cdot \sin\beta.$$

Hay $V_A = V_A^d + H_A \cdot \tan\beta; V_B = V_B^d - H_B \cdot \tan\beta.$

3. Xác định các phản lực toàn phần \vec{R}_A, \vec{R}_B :

$$\vec{R}_A = \vec{V}_A + \vec{Z}_A = \vec{V}_A + \vec{H}_A$$

$$\vec{R}_B = \vec{V}_B + \vec{Z}_B = \vec{V}_B + \vec{H}_B$$

Về giá trị (độ lớn): $R_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2}; R_B = \sqrt{V_B^2 + H_B^2}$

* Chú ý:

- $\beta > 0$ nếu gối B cao hơn gối A và ngược lại.

- Có thể xác định được $\{ \vec{V}_A, \vec{H}_A, \vec{V}_B \text{ \& } \vec{H}_B \}$ thông qua giải hệ phương trình:

+ Viết phương trình cân bằng mômen toàn hệ đối với gối B:

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow f_1(V_A, H_A) = 0 \text{ (a)}$$

+ Tách qua C, viết phương trình cân bằng mômen của nửa hệ bên trái đối với C:

$$\Sigma M_C^r = 0 \Rightarrow f_2(V_A, H_A) = 0 \text{ (b)}$$

Giải hệ phương trình (a), (b) sẽ được $\{V_A, H_A\}$

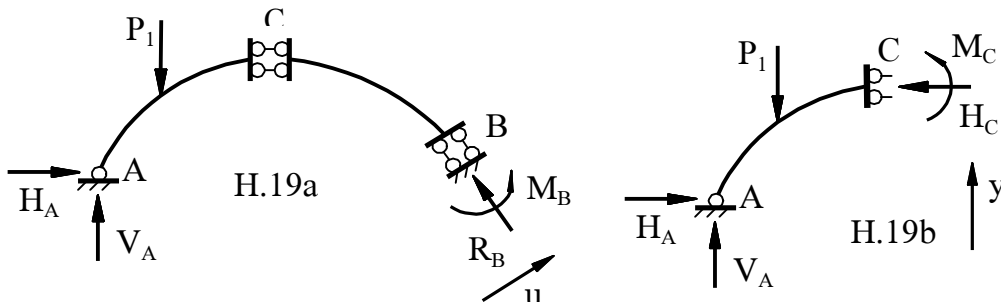
+ Tương tự

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow f_3(V_B, H_B) = 0 \text{ (c)}$$

$$\Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow f_4(V_B, H_B) = 0 \text{ (d)}$$

Giải hệ phương trình (c), (d) sẽ được $\{V_B, H_B\}$

- Nếu hệ ba khớp sử dụng các khớp giả tạo, phân tích các phản lực xuất hiện tại các liên kết để viết phương trình cân bằng hợp lý. Xem ví dụ hệ trên hình (H.19).



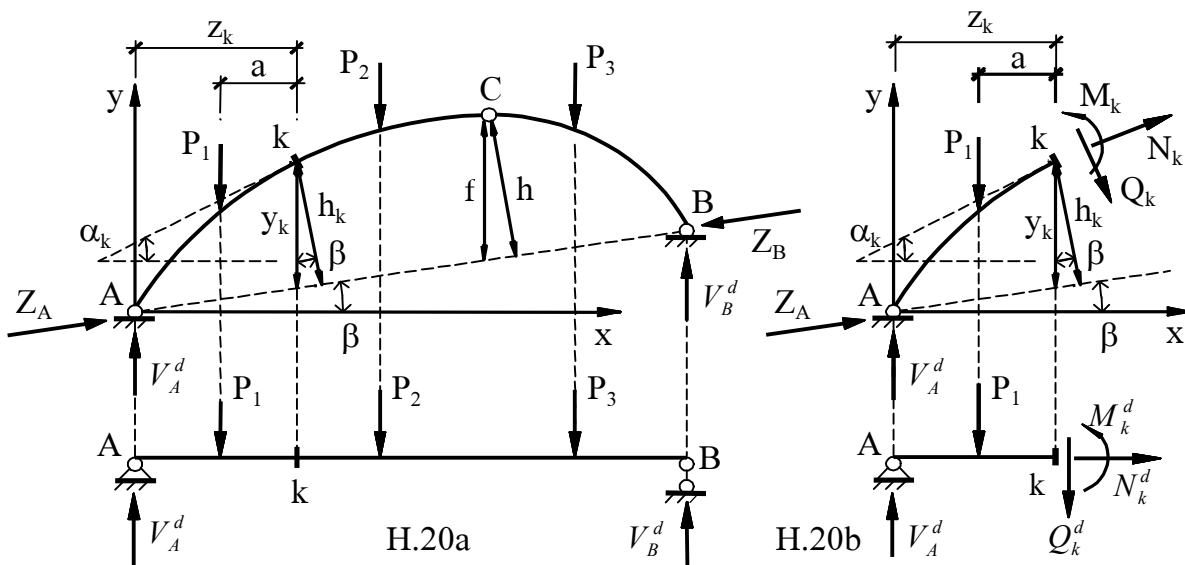
$$-\Sigma U = 0 \Rightarrow f_1(V_A, H_A) = 0 \text{ (1)}$$

$$-\Sigma Y^r = 0 \Rightarrow f_2(V_A, H_A) = 0 \text{ (2)}$$

Giải hệ (1), (2) xác định được (V_A, H_A) . Và để xác định (R_B, M_B) , phân tích phản lực để thiết lập cặp phương trình tương tự.

III. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng và vẽ biểu đồ nội lực:

Ở đây đi trình bày cho hệ vòm và khung ba khớp.



1. Biểu thức mômen uốn (M_k):

Giả sử cần xác định mômen uốn tại tiết diện k của vòm ba khớp chịu tải trọng tác dụng thẳng đứng như trên hình vẽ. (H.20a)

Dùng mặt cắt qua k, giữ lại và xét cân bằng phần bên trái.

$$M_k = V_A^d \cdot z_k - P_1 \cdot a - Z_A \cdot h_k \text{ (a)}$$

Gọi M_k^d là mômen uốn tại tiết diện k trên dầm đơn giản cùng nhịp, cùng chịu tải trọng.

Dễ thấy

$$M_k^d = V_A^d \cdot z_k - P_1 \cdot a \quad (b)$$

Ta biết: $Z_A = \frac{H_A}{\cos \beta} = \frac{H_B}{\cos \beta} = \frac{H}{\cos \beta}$; mà $y_k = \frac{h_k}{\cos \beta}$

Suy ra $Z_A \cdot h_k = H \cdot y_k \quad (c)$

Từ (a), (b), (c) suy ra: $M_k = M_k^d - H \cdot y_k$

Biểu thức chứng tỏ rằng mômen uốn trong vòm ba khớp nhỏ hơn mômen uốn trong dầm đơn giản cùng nhịp, cùng chịu tải trọng một lượng $H \cdot y_k$. Và nếu khéo chọn hình dạng của vòm (y_k) sao cho $M_k^d = H \cdot y_k$ thì mômen uốn tại mọi tiết diện đều bằng không. Lúc này trong vòm chỉ tồn tại lực dọc nên tiết kiệm vật liệu.

2. Biểu thức lực cắt (Q_k):

Tương tự như trên nhưng đi thiết lập phương trình hình chiếu lên phương Q_k (phương vuông góc với tiếp tuyến trục vòm tại tiết diện k).

$$Q_k = Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot (\sin \alpha_k - \text{tg} \beta \cdot \cos \alpha_k)$$

Trong đó

- Q_k^d : lực cắt tại tiết diện k trong dầm đơn giản tương ứng cùng nhịp, cùng chịu tải trọng.
- Q_k : lực cắt trong vòm tại tiết diện k.
- α : góc hợp bởi tiếp tuyến với trục vòm tại tiết diện k với phương ngang.

3. Biểu thức lực dọc (N_k):

Tương tự như xác định lực cắt nhưng đi thiết lập phương trình hình chiếu lên phương N_k (phương của tiếp tuyến trục vòm tại tiết diện k).

$$N_k = -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot (\cos \alpha_k + \text{tg} \beta \cdot \sin \alpha_k)$$

* Chú ý:

- $\beta > 0$ khi gờ B cao hơn gờ A và ngược lại.
- $\alpha_k > 0$ khi $y'(z_k) > 0$ và ngược lại.
- $y_k = y(z_k) - z_k \cdot \text{tg} \beta$.
- Khi $\beta = 0$ (gờ A & B cùng cao độ)

$$\begin{aligned} M_k &= M_k^d - H \cdot y_k \\ Q_k &= Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot \sin \alpha_k \\ N_k &= -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot \cos \alpha_k \end{aligned}$$

- Các biểu thức trên được thiết lập cho tải trọng tác dụng theo phương thẳng đứng.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

- Đối với khung ba khớp: Tiến hành giống hệ dầm, khung đơn giản.

- Đối với vòm ba khớp: Sau khi chọn và xác định nội lực tại các tiết diện trên kết cấu. Các tiết diện thường chọn là các tiết diện đặc trưng và một số tiết diện trung gian để tăng tính chính xác. Biểu đồ nội lực được vẽ gần đúng bằng cách nối các tung độ liên tiếp bằng các đoạn thẳng.

Quá trình tính toán có thể lập thành bảng sau: (Bảng tham khảo)

Tiết diện	z_k	y_k	$tg\alpha_k = y'(z_k)$	$\sin\alpha_k$	$\cos\alpha_k$	M_k^d	Q_k^d	M_k	Q_k	N_k
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Bảng 2. Bảng phân tích nội lực trong vòm ba khớp.

* *Chú ý:* Có thể chọn đường chuẩn là đường nằm ngang khi vẽ biểu đồ nội lực.

* *Chú thích:* Đối với hệ dàn vòm ba khớp, cách tính được thực hiện như sau:

- + Xác định phản lực tại các gối tựa theo cách đã trình bày ở trên.
- + Nội lực trong các thanh dàn chỉ là lực dọc. Xem cách xác định trong bài hệ dàn.

CÁC VÍ DỤ VỀ HỆ BA KHỚP.

* *Ví dụ 1:* Xác định nội lực tại tiết diện k của vòm ba khớp cho trên hình vẽ (H.21)

Cho biết phương trình trục vòm

là parabol $y(z) = \frac{1}{5}(l - z).z; l = 10m$

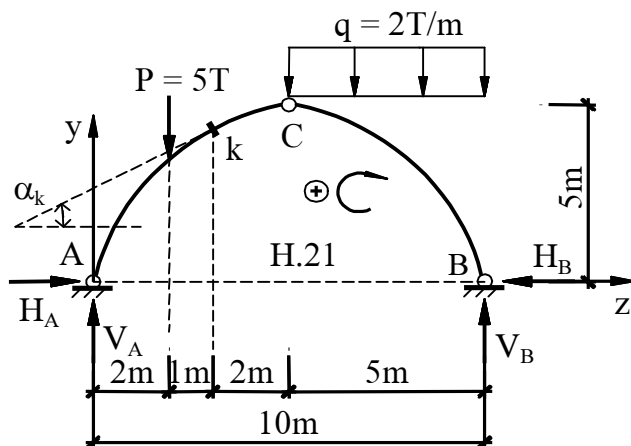
1. Các số liệu suy ra từ đề bài:

- $z_k = 3m; y_k = y(3) = 4,2m; \beta = 0.$

- $tg\alpha_k = y'(3) = \frac{1}{5}(l - 2.z)|_{z=3} = 0,8.$

$$\Rightarrow \sin\alpha_k = \frac{tg\alpha_k}{\sqrt{1+tg\alpha_k^2}} = \frac{0,8}{\sqrt{1+0,8^2}} = 0,624$$

$$\Rightarrow \cos\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{1+tg\alpha_k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+0,8^2}} = 0,780$$



2. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A^d, V_B^d, Z_A, Z_B, V_A, V_B, H_A, H_B\}$

Do $\beta = 0$ và tải trọng chỉ tác dụng theo phương thẳng đứng nên

$$V_A^d = V_A, V_B^d = V_B, Z_A = Z_B = H_A = H_B.$$

a. Xác định V_A, H_A :

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 10.V_A - 5.8 - 5.2.2,5 = 0 \Rightarrow V_A = 6,5 (> 0).$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 5.V_A - 5.H_A - 5.3 = 0 \Rightarrow 5.H_A = 5.6,5 - 5.3 \Rightarrow H_A = 3,5 (> 0).$$

b. Xác định V_B, H_B :

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -10.V_B + 5.2 + 5.2.7,5 = 0 \Rightarrow V_B = 8,5 (> 0).$$

$$\Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow -5.V_B + 5.H_B + 5.2.2,5 = 0 \Rightarrow 5.H_B = 5.8,5 - 5.2.2,5.$$

$$\Rightarrow H_B = 3,5 (> 0).$$

* Kiểm tra: $\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A - H_B = 0 \Rightarrow 3,5 - 3,5 = 0$ (đúng)

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - P - 5 \cdot q = 0 \Rightarrow 6,5 - 8,5 - 5 - 5 \cdot 2 = 0 \text{ (đúng)}$$

* Kết luận: $V_A = V_A^d = 6,5$; $V_B = V_B^d = 8,5$; $Z_A = Z_B = H_A = H_B = H = 3,5$.

3. Xác định nội lực tại các tiết k:

$$M_k = M_k = M_k^d - H \cdot y_k = 6,5 \cdot 3 - 5 \cdot 1 - 3,5 \cdot 4,2 = -0,2 \text{ (} M_k^d = 6,5 \cdot 3 - 5 \cdot 1 \text{)}.$$

$$Q_k = Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot \sin \alpha_k = (6,5 - 5) \cdot 0,780 - 3,5 \cdot 0,624 = -1,014.$$

$$N_k = -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot \cos \alpha_k = -(6,5 - 5) \cdot 0,624 - 3,5 \cdot 0,780 = -3,666.$$

* Ví dụ 2: Nội dung và hình vẽ giống ví dụ 1 nhưng P nghiêng 1 góc 45° (H.22a)

Các số liệu suy ra từ bài toán giống ví dụ trên.

1. Xác định các thành phần phản lực:

$$\{V_A^d, V_B^d, Z_A, Z_B, V_A, V_B, H_A, H_B\}$$

Do $\beta = 0$ nên

$$V_A^d = V_A, V_B^d = V_B, Z_A = H_A, Z_B = H_B$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 10 \cdot V_A - P \cdot \sin 45^\circ \cdot 8 + P \cdot \cos 45^\circ \cdot 3,2 - 5 \cdot q \cdot 2,5 = 0.$$

$$\Rightarrow 10 \cdot V_A - 5 \cdot \sin 45^\circ \cdot 8 + 5 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3,2 - 5 \cdot 2 \cdot 2,5 = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 4,197 (> 0)$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow 5 \cdot V_A - 5 \cdot H_A - P \cdot \sin 45^\circ \cdot 3 - P \cdot \cos 45^\circ \cdot (5 - 3,2) = 0.$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 4,197 - 5 \cdot H_A - 5 \cdot \sin 45^\circ \cdot 3 - 5 \cdot \cos 45^\circ \cdot (5 - 3,2) = 0$$

$$\Rightarrow H_A = 0,802.$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -10 \cdot V_B + P \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 + P \cdot \cos 45^\circ \cdot 3,2 + 5 \cdot q \cdot 7,5 = 0.$$

$$\Rightarrow 10 \cdot V_B + 5 \cdot \sin 45^\circ \cdot 2 + 5 \cdot \cos 45^\circ \cdot 3,2 + 5 \cdot 2 \cdot 7,5 = 0.$$

$$\Rightarrow V_B = 9,338 (> 0).$$

$$\Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow$$

$$-5 \cdot V_B + 5 \cdot H_B + 5 \cdot q \cdot 2,5 = 0.$$

$$\Rightarrow -5 \cdot 9,338 + 5 \cdot H_B + 5 \cdot 2 \cdot 2,5 = 0$$

$$\Rightarrow H_B = 4,338.$$

* Kiểm tra: $\Sigma X = 0$

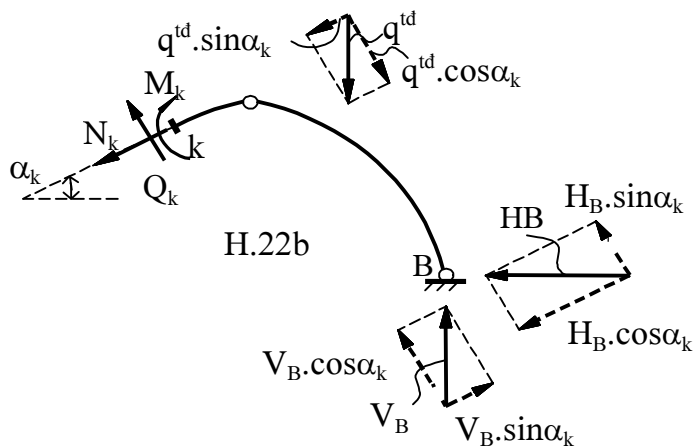
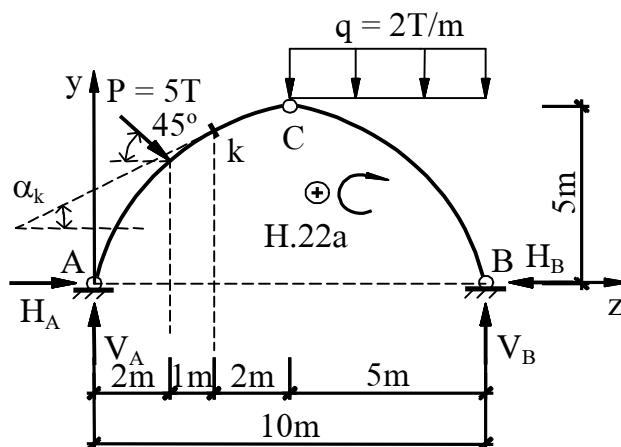
$$\Rightarrow H_A - H_B + P \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$\Rightarrow 0,802 - 4,338 - 5 \cdot \cos 45^\circ = 0$$

(đúng)

$$\Sigma Y = 0$$

$$\Rightarrow V_A + V_B - P \cdot \sin 45^\circ - 5 \cdot q = 0.$$



$$\Rightarrow 4,197 + 9,338 - 5 \cdot \sin 45^\circ - 2,5 = 0 \text{ (đúng)}$$

* Kết luận: $V_A = V_A^d = 4,197$; $V_B = V_B^d = 9,338$; $Z_A = H_A = 0,802$; $Z_B = H_B = 3,338$.

2. Xác định nội lực tại tiết diện k:

Vì có tải trọng tác dụng không theo phương thẳng đứng nên không sử dụng các biểu thức thiết lập sẵn ở trên. Ở đây, cần phải đi thiết lập các phương trình cân bằng như trong trường hợp tổng quát xác định nội lực.

$$+ M_k = 7 \cdot V_B - 4,2 \cdot H_B - 5 \cdot q \cdot 4,5 = 7 \cdot 9,338 - 4,2 \cdot 4,338 - 5 \cdot 2 \cdot 4,5 = 2,146.$$

$$+ Q_k = -V_B \cdot \cos \alpha_k + 5 \cdot q \cdot \cos \alpha_k - H_B \cdot \sin \alpha_k$$

$$= -9,338 \cdot 0,780 + 5 \cdot 2 \cdot 0,780 - 4,338 \cdot 0,624 = -2,190.$$

$$+ N_k = V_B \cdot \sin \alpha_k - 5 \cdot q \cdot \sin \alpha_k - H_B \cdot \cos \alpha_k = 9,338 \cdot 0,624 - 5 \cdot 2 \cdot 0,624 - 4,338 \cdot 0,78 =$$

$$= -3,797.$$

* Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ vòm ba khớp. Phương trình của trục vòm có dạng parabol $y(z) = \frac{4 \cdot f}{l^2} \cdot z \cdot (l - z)$; cho $f = 4m$, $l = 10m$ (H.23a)

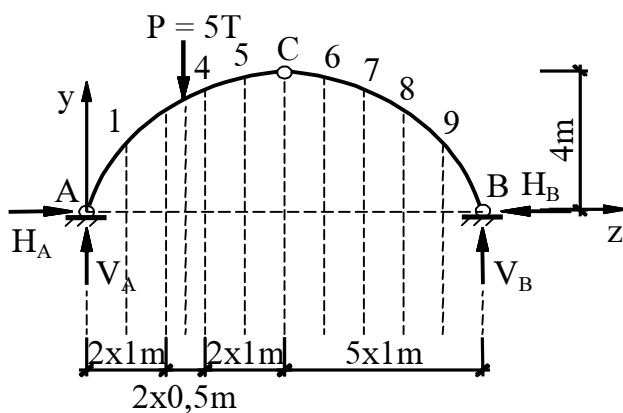
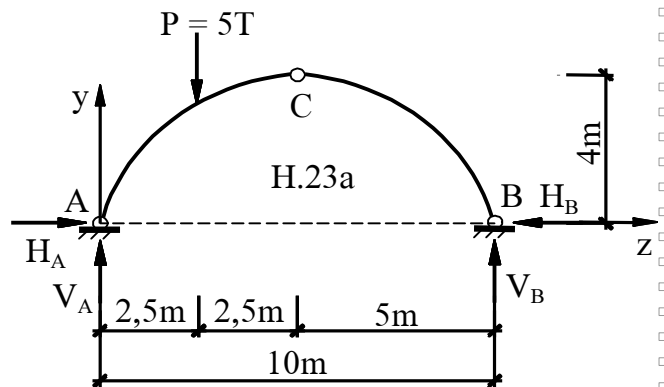
Nội lực trong hệ vòm ba khớp có hai gối A, B cùng cao độ và chịu tải trọng tác dụng theo phương thẳng đứng được xác định bằng biểu thức:

$$M_k = M_k^d - H \cdot y_k.$$

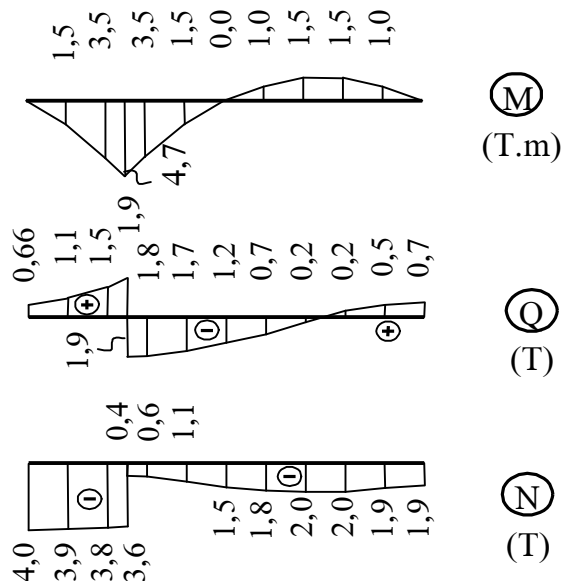
$$Q_k = Q_k^d \cdot \cos \alpha_k - H \cdot \sin \alpha_k.$$

$$N_k = -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot \cos \alpha_k.$$

Để vẽ biểu đồ nội lực, ta sẽ tính nội lực tại các tiết diện A, 1, 2, 3, 4, 5, C, 6, 7, 8, 9 và B. Kết quả tính toán thể hiện trong bảng tính (B.3). Các biểu đồ nội lực thể hiện trên hình vẽ (H.23b).



H.23b



Tiết diện	z_k (m)	y_k (m)	$\text{tg}\alpha_k = y'(z_k)$	$\sin\alpha_k$	$\cos\alpha_k$	M_k^d (T.m)	Q_k^d (T)	M_k (T.m)	Q_k (T)	N_k (T)
A	0	0	1,60	0,848	0,529	0	3,75	0	0,66	-4,01
1	1,0	1,44	1,28	0,788	0,615	3,75	3,75	1,50	1,08	-3,92
2	2,0	2,56	0,96	0,721	0,692	7,50	3,75	3,50	1,47	-3,78
3 ^{tr}	2,5	3,00	0,80	0,624	0,781	9,37	3,75	4,69	1,95	-3,56
3 ^{ph}	2,5	3,00	0,80	0,624	0,781	9,37	-1,25	4,69	-1,95	-0,44
4	3,0	3,36	0,64	0,539	0,642	8,75	-1,25	3,50	-1,88	-0,65
5	4,0	3,84	0,32	0,305	0,952	7,50	-1,25	1,50	-1,68	-1,10
C	5,0	4,00	0	0	1,000	6,25	-1,25	0	-1,25	-1,56
6	6,0	3,84	-0,32	-0,305	0,952	5,00	-1,25	-1,00	-0,71	-1,87
7	7,0	3,36	-0,64	-0,539	0,842	3,75	-1,25	-1,50	-0,81	-2,00
8	8,0	2,56	-0,96	-0,721	0,692	2,50	-1,25	-1,50	-0,25	-2,00
9	9,0	1,44	-1,28	-0,788	0,615	1,25	-1,25	-1,00	0,46	-1,95
B	10	0	-1,60	-0,848	0,529	0	-1,25	0	0,67	-1,89

B3. Bảng minh họa tính toán

* Ví dụ 4: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (H.24a).

1. Xác định các thành phần

phản lực: $\{V_A, H_A, V_B, H_B\}$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -1.H_A + 5.V_A -$$

$$- 4.q.5 - 3.P + M = 0$$

$$\Rightarrow -1.H_A + 5.V_A -$$

$$- 4.2.5 - 3.4 + 3,2 = 0$$

$$\Rightarrow -H_A + 5.V_A - 48,8 = 0 \text{ (a)}$$

$$\Sigma M_C^r = 0 \Rightarrow -4.H_A + 2.V_A -$$

$$- 4.q.2 = 0$$

$$\Rightarrow -4.H_A + 2.V_A - 4.2.2 = 0.$$

$$\Rightarrow -4.H_A + 2.V_A - 16 = 0 \text{ (b)}$$

Từ (a), (b) giải ra $V_A = 9,955$; $H_A = 0,977$.

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -1.H_B - 5.V_B + 2.P + M = 0$$

$$\Rightarrow -1.H_B - 5.V_B + 2.4 + 3,2 = 0$$

$$\Rightarrow -H_B - 5.V_B + 11,2 = 0 \text{ (c)}$$

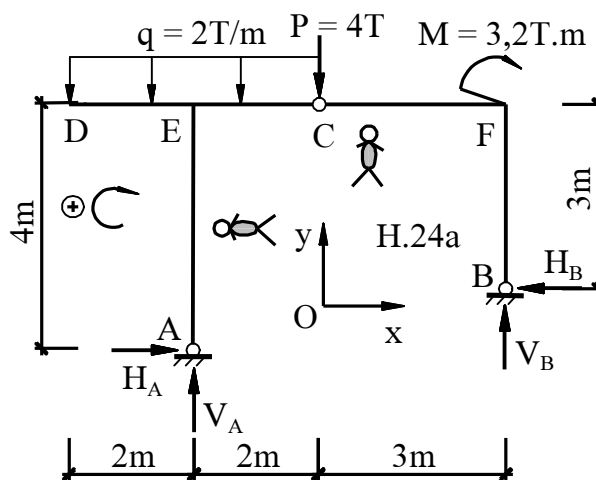
$$\Sigma M_C^{ph} = 0 \Rightarrow 3.H_B - 3.V_B + M = 0$$

$$\Rightarrow 3.H_B - 3.V_B + 3,2 = 0. \text{ (d)}$$

Từ (c), (d) giải ra $V_B = 2,044$; $H_B = 0,977$.

* Kiểm tra:

$$\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A - H_B = 0 \text{ (đúng)}$$



$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - P - 4.q = 0 \text{ (đúng)}$$

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = -H_A = -0,977$; $N_A = -V_A = -9,955$.

Tại D: $M_D = 0$; $Q_D = 0$; $N_D = 0$.

Tại E: $M_{ED} = -2.q.1 = -2.2.1 = -4$; $M_{EA} = -4.H_A = -4.0,977 = -3,911$.

$$M_{EC} = -2.q.1 - 4.H_A = -2.2.1 - 4.0,977 = -7,908.$$

$$Q_{ED} = -2.q = -2.2 = -4$$
; $Q_{EA} = -H_A = -0,977$;

$$Q_{EC} = -2.q + V_A = -2.2 + 9,955 = 5,955.$$

$$N_{ED} = 0$$
; $N_{EA} = -V_A = -9,955$; $N_{EC} = -H_A = -0,977$.

Tại C: $M_C = 0$; $Q_{CE} = V_A - 4.q = 9,955 - 2.4 = 1,955$; $Q_{CF} = -V_B = -2,044$.

$$N_C = -H_A = -0,977.$$

Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = H_B = 0,977$; $N_B = -V_B = -2,044$.

Tại F: $M_{FB} = 3.H_B = 3.0,977 = 2,91$; $M_{FC} = -3.H_B - M = -3.0,977 - 3,2 = -6,11$.

$$Q_{FB} = H_B = 0,977$$
; $Q_{FC} = -V_B = -2,044$.

$$N_{FB} = -V_B = -2,044$$
; $N_{FC} = -H_B = -0,977$.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối

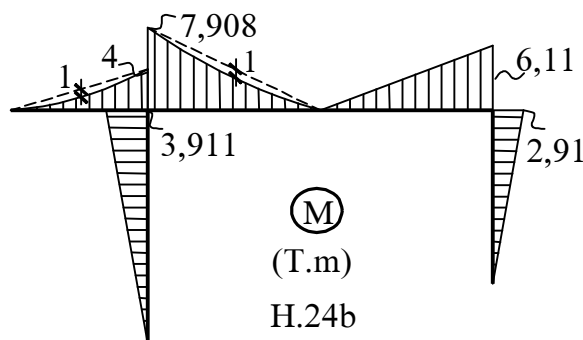
cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn DE & EC có q phân bố đều nên có tung độ treo:

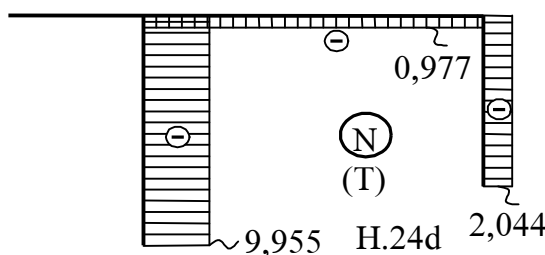
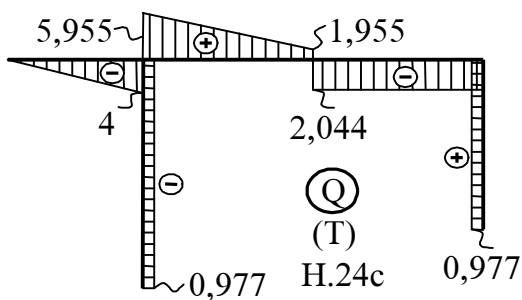
$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{2.2^2}{8} = 1$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.



b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.



c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

Phân tích trường hợp hệ ba khớp có thanh cứng:

1. Trường hợp tải trọng không tác dụng lên thanh cứng: Trong thanh cứng chỉ xuất hiện lực dọc.

a. Xác định phản lực:

- Các thành phần V_A, V_B, H_A : Xác định như trong trường hợp dầm, khung đơn giản.

- Thành phần lực dọc N_{DE} : Dùng mặt cắt qua khớp C và thanh căng. Xét cân bằng mômen của một phần bất kỳ đối với khớp C.

$$\sum M_C^{tr} = 0 \text{ hay } \sum M_C^{ph} = 0$$

**Nhận xét:*

- V_A, V_B đóng vai trò như V_A^d, V_B^d .

- N_{ED} đóng vai trò như Z_A, Z_B .

- Hệ giống hệ ba khớp A^*CB^* .

b. Xác định nội lực:

Theo nguyên tắc chung xác định nội lực đã trình bày.

**Chú ý:* Nếu thanh căng là miếng cứng gãy khúc: Lực xuất hiện trong thanh căng là lực đi qua hai khớp ở hai đầu, ngược chiều nhau, bằng nhau về giá trị.

2. Trường hợp tải trọng tác dụng lên

thanh căng: Trong thanh căng xuất hiện cả ba thành phần nội lực M, Q, N .

a. Xác định phản lực:

- Các thành phần V_A, V_B, H_A : giống như trong dầm, khung đơn giản.

- Các thành phần tại khớp D, E: được xác định qua hai bước.

+ Bước 1: Tách riêng ED ra khỏi hệ và xét cân bằng nó.

Phân tích phản lực tại D và E theo hai phương: phương DE (Z_D, Z_E) và phương đứng (V_D, V_E).

Viết các phương trình cân bằng mômen đối với D và E sẽ giải ra được V_D, V_E .

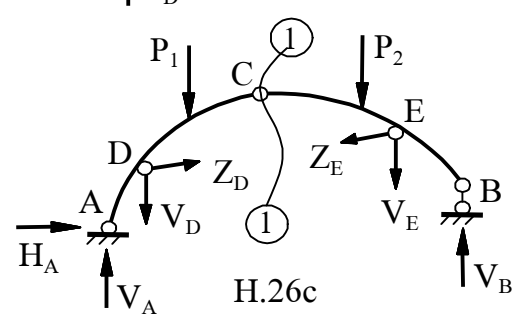
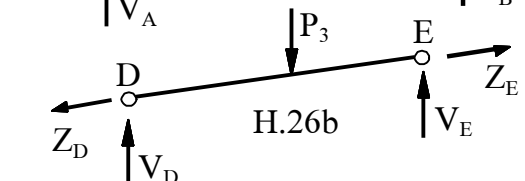
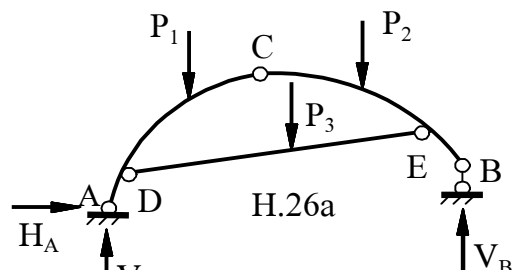
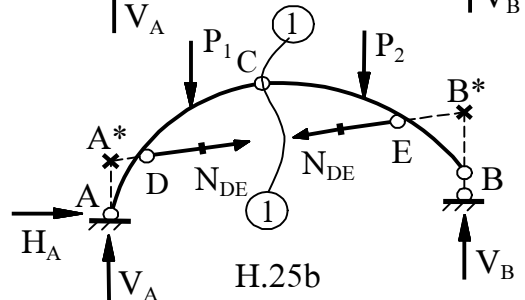
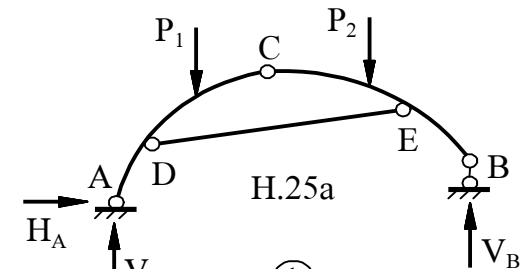
+ Bước 2: Xét cân bằng của phần hệ ABC (sau khi đã tách bỏ thanh DE).

Truyền phản lực tại D và E tại hai đầu thanh căng vào (có chiều ngược lại).

Thực hiện mặt cắt qua khớp C. Giữ lại và xét cân bằng từng phần của hệ.

$$\sum M_C^{tr} = 0 \Rightarrow Z_D \text{ và } \sum M_C^{ph} = 0 \Rightarrow Z_E.$$

b. Xác định & vẽ biểu đồ nội lực: Theo nguyên lý chung.



* Ví dụ 5: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (h.27a).

1. Xác định các thành phần phản lực: $\{V_A, H_A, V_B\}$

- $\Sigma X = 0 \Rightarrow H_A = 0.$

- $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow 8.V_A - 3.4 - 2.4.6 = 0 \Rightarrow V_A = 7,5.(> 0)$

- $\Sigma M_A = 0$

$\Rightarrow -8.V_B + 3.4 + 2.4.2 = 0$

$\Rightarrow V_B = 3,5 (> 0).$

* Kiểm tra: $\Sigma Y = 0$

$\Leftrightarrow -q.4 - P + V_A + V_B = 0$

$\Leftrightarrow -2.4 - 3 + 7,5 + 3,5 = 0$

(đúng)

* Xác định lực dọc trong

thanh DE: N_{DE}

$\Sigma M_C^{ph} = 0$

$\Rightarrow 2.N_{DE} - 4.V_B = 0$

$\Rightarrow N_{DE} = 1,75$

(> 0, gây kéo)

2. Xác định nội lực tại các

tiết diện đặc trưng:

Trong thanh DE chỉ tồn tại

lực dọc $N_{DE} = 1,75.$

Tại A: $M_A = 0; Q_A = V_A = 7,5; N_A = 0.$

Tại F: $M_{FA} = 2.V_A - 2.q.1 = 11; M_{FD} = -2.N_{DE} = -3,5.$

$M_{FC} = 2.V_A - 2.q.1 - 2.N_{ED} = 7,5.$

$Q_{FA} = V_A - 2.q = 7,5 - 2.2 = 3,5; N_{FA} = 0.$

$Q_{FD} = -N_{ED} = -1,75; N_{FD} = 0.$

$Q_{FC} = V_A - 2.q = 3,5; N_{FC} = -N_{DE} = -1,75.$

Tại C: $M_C = 0; Q_{CF} = -V_B + P = -3,5 + 3 = -0,5; Q_{CG} = -V_B = -3,5.$

$N_C = -N_{ED} = -1,75.$

Tại G: $M_{GC} = 2.V_B - 2.N_{DE} = 3,5.2 - 1,75.2 = 3,5; M_{GE} = 2.N_{ED} = 3,5.$

$M_{GB} = 2.V_B = 7.$

$Q_{GC} = -V_B = -3,5; N_{GC} = -N_{ED} = -1,75; Q_{GE} = N_{ED} = 1,75; N_{GE} = 0.$

$Q_{GB} = -V_B = -3,5; N_{GB} = 0.$

Tại D: $M_D = 0; Q_{DF} = -N_{ED} = -1,75; N_{DF} = 0.$

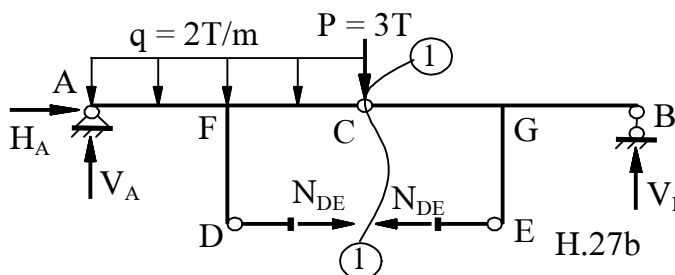
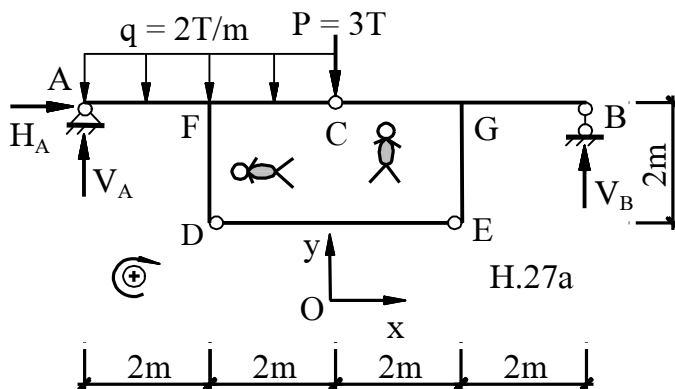
Tại E: $M_E = 0; Q_{EG} = N_{ED} = 1,75; N_{EG} = 0;$

Kiểm tra sự cân bằng mômen nút F & G: dễ thấy thỏa mãn.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn AF & FC có q phân bố đều nên có tung độ treo:

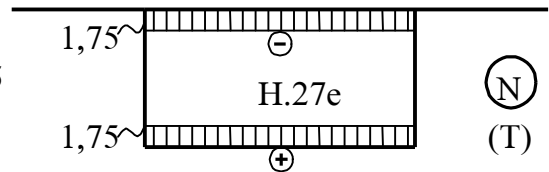
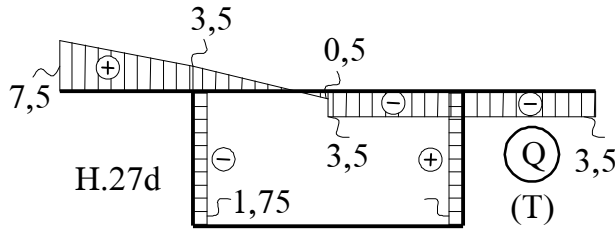
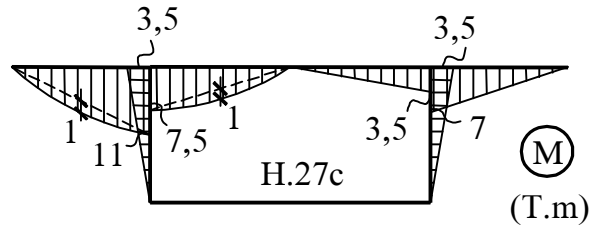


$$f = \frac{ql^2}{8} = \frac{2.2^2}{8} = 1$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.



c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

Ví dụ 5: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (H.28a)

1. Xác định các thành phần phản lực:

- Dễ thấy $V_A = V_B = 6$; $H_A = 0$.

- Xác định các phản lực tại vị trí miếng cứng nối thanh cứng.

Tách thanh cứng GH. Các thành phần phản lực gồm: (V_G, H_G, V_H, H_H).

+ Xét cân bằng thanh cứng GH:

Dễ thấy $V_G = V_H = 6$.

+ Xét cân bằng phần hệ bên dưới:

Dùng mặt cắt 1 - 1, xét cân bằng phần bên trái:

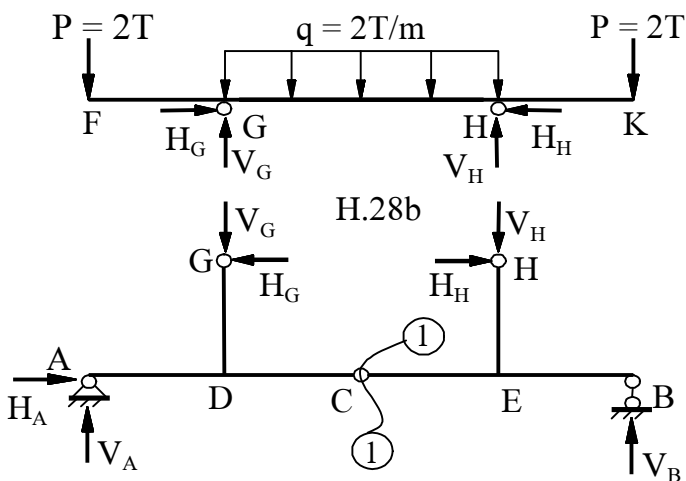
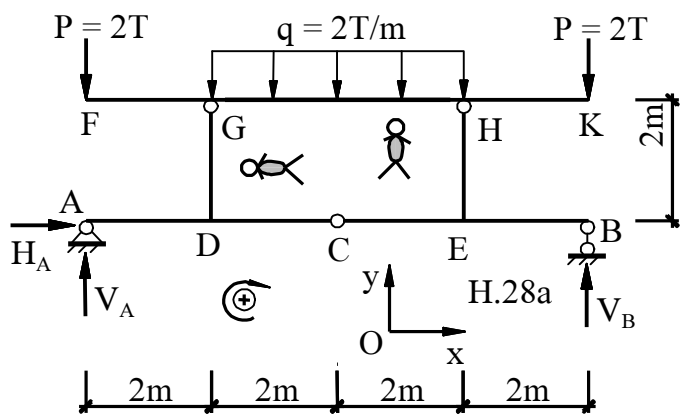
$$\sum M_C^{tr} = 0 \Rightarrow 4.V_A - 2.V_G - 2.H_G = 0 \Rightarrow H_G = 6.$$

Tương tự, xét cân bằng phần bên phải:

$$\sum M_C^{ph} = 0 \Rightarrow H_H = 6.$$

6.

2. Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:



Để thuận lợi cho việc xác định nội lực, ta tách riêng hệ ra làm hai phần độc lập như lúc xác định phản lực liên kết trong các thanh cứng.

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = V_A = 6$; $N_A = 0$.

Tại F: $M_F = 0$; $Q_F = P = -2$; $N_F = 0$.

Tại G: $M_{GF} = -2.P = -2.2 = -3$; $M_{GH} = -2.P = -4$; $M_{GD} = 0$.

$Q_{GF} = -P = -2$; $Q_{GH} = V_G - P = 6 - 2 = 4$; $Q_{GD} = -H_D = -6$.

$N_{GF} = 0$; $N_{GH} = -H_G = -6$; $N_{GD} = -V_G = -6$.

Tại D: $M_{DA} = 2.V_A = 2.6 = 12$; $M_{DH} = 2.H_G = 2.6 = 12$; $M_{DC} = 2.V_A - 2.H_G = 0$.

$Q_{DA} = V_A = 6$; $Q_{DG} = -H_G = -6$; $Q_{DC} = V_A - V_G = 0$.

$N_{DA} = 0$; $N_{DG} = -V_G = -6$; $N_{DC} = H_G = 6$.

Tại C: $M_C = 0$; $Q_C = V_A - V_G = 0$; $N_C = H_G = 6$.

Tương tự cho các tiết diện còn lại.

3. Vẽ các biểu đồ nội lực cuối

cùng:

a. Biểu đồ mômen (M):

- Trên đoạn GH có q phân bố đều

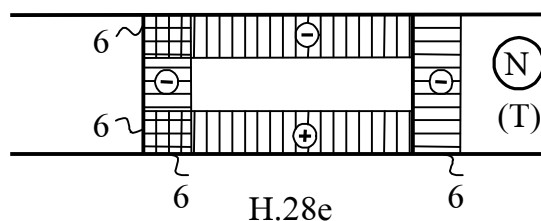
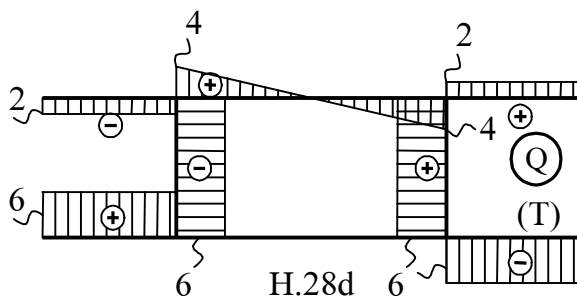
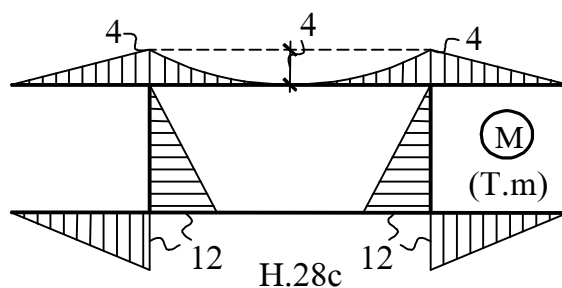
nên có tung độ treo:

$$f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{2.4^2}{8} = 4$$

- Trên các đoạn còn lại là những đoạn thẳng.

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

- Là những đoạn đường thẳng.



c. Biểu đồ lực dọc (N):

- Là những đoạn đường thẳng.

4. Kiểm tra lại các biểu đồ đã vẽ: Tự kiểm tra.

IV. Trục hợp lý của vòm ba khớp:

1. Đặt vấn đề: Mômen uốn tại tiết diện k trong vòm ba khớp được xác định bằng biểu thức:

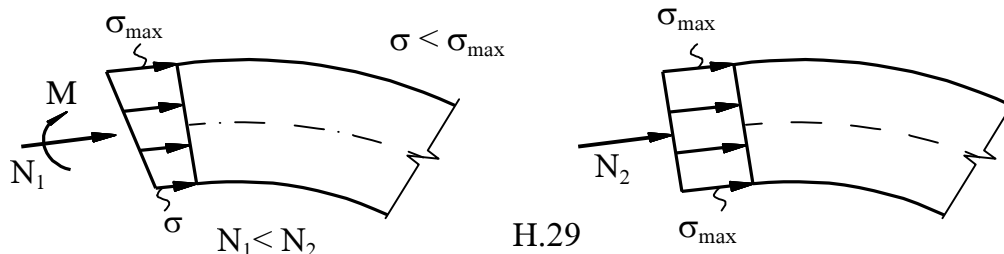
$$M_k(z) = M_k^d - H.y_k.$$

Nếu ta khéo chọn hình dạng của vòm (y_k) sao cho $H.y_k = M_k^d$ thì $M_k(z) = 0$. Và

$$Q_k(z) = 0 \text{ vì } Q_k(z) = \frac{dM_k(z)}{dz} = 0.$$

Lúc này trong vòm chỉ tồn tại lực dọc N_k nên tiết kiệm vật liệu chế tạo vòm. Thật vậy, bằng cách so sánh sự phân bố ứng suất pháp trên tiết diện vòm trong hai trường hợp.

+ Trường hợp $M = 0$, ứng suất phân bố đều. Vật liệu tại mọi tiết diện được sử dụng như nhau nên phát huy hết khả năng làm việc của vật liệu. Nghĩa là tiết kiệm vật liệu.



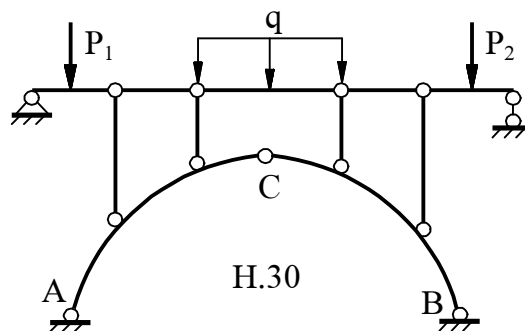
Ngoài ra, lực dọc trong vòm thường gây nén nên nếu chỉ có $N \neq 0$, ta có thể sử dụng những loại vật liệu chịu nén tốt nhưng rẽ tiền như bê tông, gạch, đá...

**Kết luận*: Trục hợp lý của vòm là trục được chọn sao cho mômen uốn tại tất cả các tiết diện của vòm đều bằng không.

2. Các dạng trục vòm hợp lý:

a. Trường hợp tải trọng thẳng đứng không phụ thuộc vào hình dạng của vòm:

Khi mà sự thay đổi của trọng lượng bản thân và các tác dụng bên ngoài khi trục vòm thay đổi là không đáng kể. Ví dụ hệ trên hình H.30, các lực P_1, P_2, q truyền qua hệ thống các thanh đứng lên vòm là không thay đổi khi trục vòm thay đổi.



Như vậy, M_k^d sẽ không thay đổi. Suy ra:

$$y_k = \frac{M_k^d}{H} \quad (a)$$

b. Trường hợp tải trọng thẳng đứng phụ thuộc dạng trục vòm:

Lúc này không thể sử dụng biểu thức (a) vì M_k^d phụ thuộc vào y_k . Do y_k thay đổi thì tải trọng thay đổi nên M_k^d sẽ thay đổi.

Lấy vi phân hai lần biểu thức (a)

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{q}{H} \quad (b)$$

Giải phương trình (b) sẽ xác định được y_k nhưng nói chung là rất phức tạp.

c. Trường hợp tải trọng tác dụng vuông góc với trục vòm: Như các công trình làm việc trong môi trường chất lỏng, chất khí.

Đi khảo sát cân bằng một đoạn vô cùng bé của trục vòm hợp lý.

Lấy tổng mômen đối với tâm O

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow N \cdot \rho - (N + dN) \cdot \rho = 0 \Rightarrow dN = 0$$

$\Rightarrow N = \text{const.}$

Lấy tổng hình chiếu lên phương U:

$$\sum U = 0 \Rightarrow N \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + N \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - q \cdot ds = 0$$

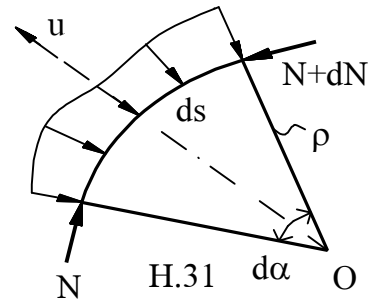
Do $d\alpha$ là VCB nên $\sin \frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$

$$\Rightarrow N \cdot d\alpha - q \cdot ds = 0.$$

Mặt khác: $ds = \rho \cdot d\alpha$. Nên $\rho = \frac{N}{q}$.

Trường hợp $q = \text{const}$ (phân bố đều)

$$\Rightarrow \rho = \text{const} \text{ (cung tròn)}$$



H.31

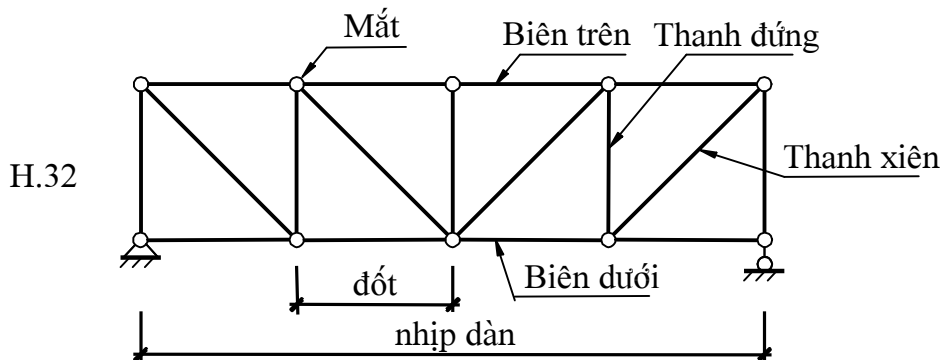
§ 4. HỆ DÀN

I. Phân tích hệ:

1. Định nghĩa: là hệ gồm các thanh thẳng liên kết với nhau chỉ bằng các khớp lý tưởng ở hai đầu mỗi thanh để tạo thành hệ BBH.

2. Cấu tạo của dàn:

- Khoảng cách giữa hai gối tựa gọi là nhịp dàn.
- Các khớp của dàn gọi là các mắt dàn.
- Các thanh dàn nằm trên đường biên dàn gọi là các thanh biên (gồm biên trên và biên dưới).
- Các thanh dàn nằm bên trong biên gọi là các thanh bụng (gồm thanh đứng và thanh xiên).
- Khoảng cách giữa hai mắt dàn thuộc cùng một đường biên gọi là đốt.



2. Các giả thiết để tính dàn:

- Mắt dàn phải nằm tại giao điểm của trục các thanh dàn và là khớp lý tưởng (có thể xoay tự do, không ma sát).
- Bỏ qua trọng lượng bản thân của các thanh dàn.
- Tải trọng chỉ tác dụng lên mắt dàn.

Vậy các thanh dàn làm việc như các liên kết thanh, nghĩa là chỉ tồn tại lực dọc.

4. Đặc điểm của hệ dàn:

- Tiết kiệm vật liệu.
- Trọng lượng bản thân bé.
- Có thể vượt qua được những nhịp lớn.
- Khó thi công, lắp dựng.

II. Xác định nội lực trong các thanh dàn:

Có nhiều phương pháp khác nhau. Ở đây chỉ trình bày phương pháp giải tích và phương pháp đồ giải.

1. Phương pháp giải tích:

a. Phương pháp tách mắt: Nội dung của phương pháp là đi khảo sát sự cân bằng của từng mắt được tách ra khỏi dàn. Thực ra, đây là trường hợp đặc biệt của phương pháp mặt cắt với hệ lực khảo sát là hệ lực đồng quy.

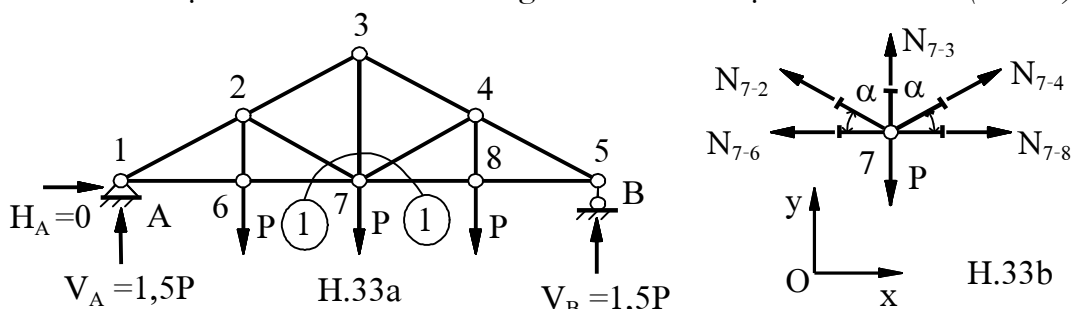
Các bước tiến hành như sau:

- Xác định các thành phần phản lực (nếu cần).
- Lần lượt tách các mắt ra khỏi dàn bằng các mặt cắt quanh mắt.
- Thay thế tác dụng của thanh dàn bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó. Lúc đầu, các lực dọc chưa biết, giả thiết có chiều dương (vẽ hướng ra ngoài mắt).
- Khảo sát sự cân bằng của từng mắt: Lực tác dụng lên mắt gồm ngoại lực tập trung (nếu có) và lực dọc trong các thanh dàn. Đây là hệ lực đồng quy nên thường sử dụng hai phương trình hình chiếu theo hai phương không song song.

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \end{cases}$$

- Khảo sát cân bằng cho tất cả các mắt, sẽ được hệ thống các phương trình. Giải hệ phương trình sẽ xác định được các lực dọc cần tìm. Nếu kết quả mang dấu dương thì lực dọc gây kéo (đúng chiều đã giả định) và ngược lại.

* Minh họa: Tách và xét cân bằng mắt số 7 của hệ dàn trên hình (H.33a).



Hai phương trình cân bằng hình chiếu theo hai phương có thể thiết lập:

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{7-8} + N_{7-4} \cdot \cos\alpha - N_{7-6} - N_{7-2} \cdot \cos\alpha = 0.$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{7-3} + N_{7-2} \cdot \sin\alpha + N_{7-4} \cdot \sin\alpha - P = 0.$$

* Để tránh giải hệ phương trình toán học, ta đi thiết lập điều kiện cân bằng sao cho trong mỗi phương trình chỉ chứa một ẩn số. Cách tiến hành như sau:

- Tách mắt theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt chỉ có tối đa hai ẩn số chưa biết.
- Để tìm lực dọc trong thanh chưa biết thứ nhất, ta thiết lập phương trình cân bằng hình chiếu lên phương vuông góc với thanh chứa lực dọc chưa biết thứ hai.

* Minh họa: Trở lại ví dụ cho trên hình

(H.33a) ta có thể tách mắt theo thứ tự: 1 → 6

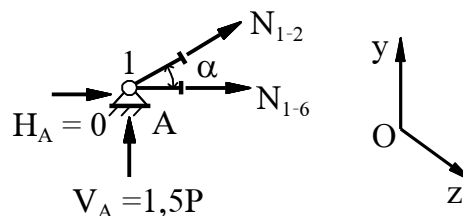
→ 2 → 3... Chặn hạn, tách mắt 1:

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{1-2} \cdot \sin\alpha + 1,5 \cdot P = 0$$

$$\Rightarrow N_{1-2} = -\frac{1,5}{\sin\alpha} (< 0, \text{ gây nén}).$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N_{1-6} \cdot \sin\alpha - 1,5 \cdot P \cdot \cos\alpha = 0$$

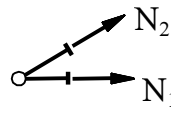
$$\Rightarrow N_{1-6} = \frac{1,5 \cdot P \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} (> 0, \text{ gây kéo}).$$



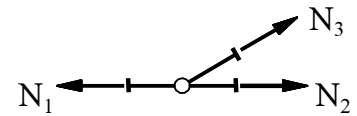
(Z ⊥ thanh 1-2) H.33c

* Các hệ quả rút ra từ phương pháp tách mắt:

+ *Hệ quả 1*: Nếu một mắt chỉ có hai thanh không thẳng hàng (bộ đôi) và không chịu tải trọng tác dụng thì lực dọc trong hai thanh đó bằng không (Cân bằng mắt trên hình H.34a, $N_1 = N_2 = 0$).



H.34a

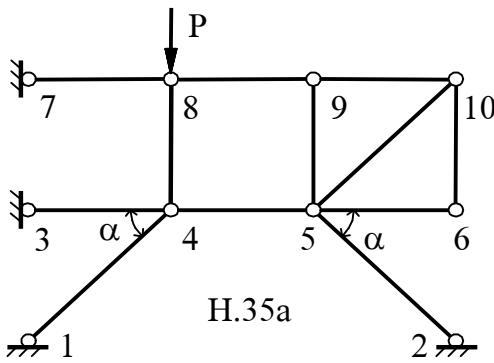


H.34b

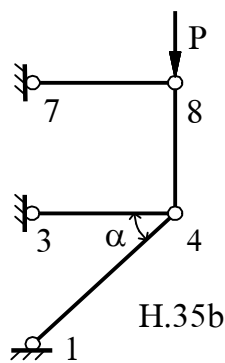
+ *Hệ quả 2*: Nếu một mắt có ba thanh, trong đó có hai thanh thẳng hàng và không chịu tải trọng tác dụng thì nội lực trong thanh không thẳng hàng bằng không; trong hai thanh thẳng hàng thì bằng nhau về giá trị và cùng gây kéo hay gây nén (Cân bằng mắt trên hình H.34b, $N_3 = 0, N_1 = N_2$).

* *Chú ý*: Khi tính dàn, nên sử dụng hai hệ quả trên để loại bỏ những thanh dàn không làm việc ngay từ đầu.

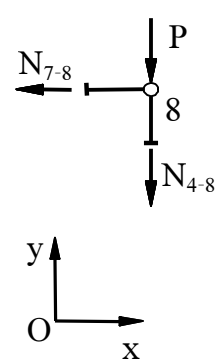
* *Ví dụ*: Xác định lực dọc của các thanh dàn trong hệ dàn trên hình (H.35a)



H.35a



H.35b



H.35c

Áp dụng hệ quả 1 & 2, loại bỏ các thanh dàn không làm việc: (6-5), (6-10), (10-9), (10-5), (9-8), (9-5), (5-4) & (5-2). Kết quả được hệ trên hình (H.35b)

- Tách mắt số 8:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \Rightarrow N_{7-8} = 0 \\ \sum Y = 0 \Rightarrow N_{4-8} = -P \end{cases}$$

- Tách mắt số 4:

$$\begin{cases} \sum Y = 0 \Rightarrow -P - N_{4-1} \cdot \sin 45^\circ = 0 \Rightarrow N_{4-1} = -\frac{P \cdot 2}{\sqrt{2}} (< 0) \\ \sum Z = 0 \Rightarrow N_{4-3} \sin 45^\circ - P \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_{4-3} = P (> 0) \end{cases}$$

**Kết luận*: $N_{7-8} = N_{8-9} = N_{9-10} = N_{5-9} = N_{5-10} = N_{6-10} = N_{4-5} = N_{5-6} = N_{5-2} = 0$.

$$N_{7-8} = 0, N_{4-8} = -P, N_{4-1} = -\frac{P \cdot 2}{\sqrt{2}}, N_{4-3} = P.$$

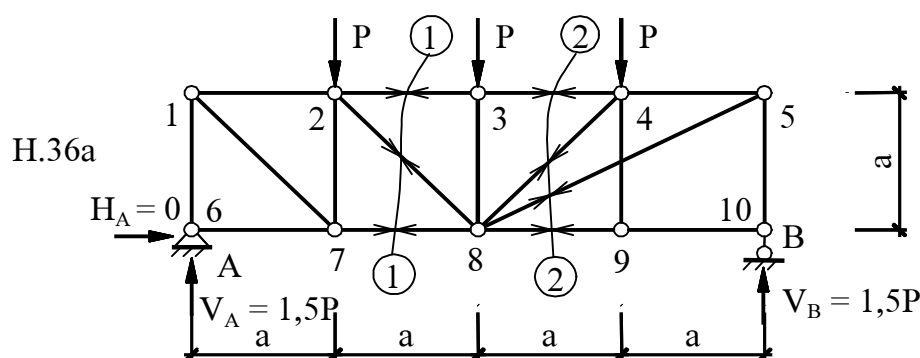
* *Ghi chú*: Phương pháp tách mắt có ưu điểm là đơn giản, dễ áp dụng, nhưng dễ mất sai lầm dặt dẹo.

b. Phương pháp mặt cắt đơn giản:

Nội dung: Đi xác định lực dọc trong các thanh dàn thuộc một mặt cắt - cắt dàn ra làm hai phần độc lập, trong đó số thành phần lực dọc chưa biết không lớn hơn ba.

Các bước tiến hành như sau:

- Xác định các thành phần phản lực (nếu cần)
- Thực hiện "mặt cắt đơn giản" qua thanh dàn cần xác định lực dọc. Yêu cầu: mặt cắt phải chia dàn ra làm hai phần độc lập. Giữ lại và xét cân bằng một phần bất kỳ.
- Thay thế tác dụng của thanh dàn bị cắt bằng lực dọc trong thanh đó. Lúc đầu, các lực dọc chưa biết, giả thiết có chiều dương.
- Thiết lập các điều kiện cân bằng: Lúc này, ta có thể thiết lập ba phương trình cân bằng.
- Giải hệ thống ba phương trình, sẽ xác định được lực dọc cần tìm. Kết quả về dấu của nội lực, tương tự phương pháp tách mắt.



* Minh họa:

- Mặt cắt 1 - 1 trên hình (H.36a) là "mặt cắt đơn giản". Các thành phần lực dọc cần xác định thuộc mặt cắt là N_{2-3} , N_{2-8} , N_{7-8} .
- Mặt cắt 2 - 2 trên hình (H.36a) cắt qua bốn thanh chưa biết lực dọc N_{3-4} , N_{8-4} , N_{8-5} , N_{8-9} , nên không phải là "mặt cắt đơn giản".

* Để tránh phải giải hệ thống phương trình, cần thiết lập sao cho trong phương trình chỉ có một ẩn số. Cách thực hiện như sau:

- Nếu lực dọc trong hai thanh chưa biết còn lại đồng quy tại một điểm, thì lấy tổng cân bằng mômen đối với điểm đồng quy đó.
- Nếu lực dọc trong hai thanh chưa biết còn lại song song nhau, thì lấy tổng hình chiếu lên phương vuông góc với phương của hai thanh song song đó.

* Ví dụ 1: Xác định lực dọc trong thanh (2-3), (2-8) của hệ dàn trên hình (H.36a).

- Xác định N_{2-3} :

$$\Sigma M_8^r = 0 \Rightarrow 2a.V_A - a.P + a.N_{2-3} = 0 \Rightarrow N_{2-3} = -2.1,5.P + P = -2.P (< 0).$$

- Xác định N_{2-8} :

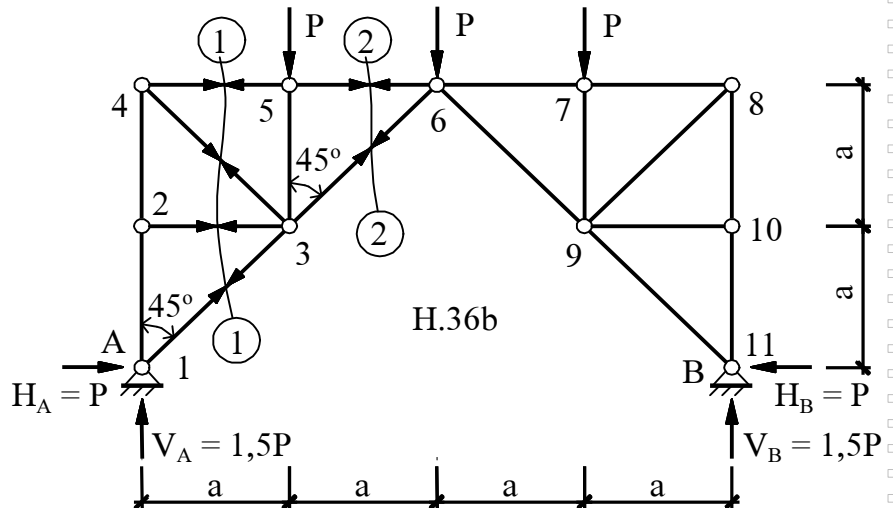
$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow V_A - P - N_{2-8}.\cos 45^\circ = 0 \Rightarrow N_{2-8} = \frac{\sqrt{2}}{2}.P (> 0)$$

Nhận xét rằng, với mặt cắt 2 - 2 trên hình (H.36a), có thể xác định N_{3-4} bằng cách viết phương trình cân bằng mômen với mắt 8.

* Ví dụ 2: Xác định lực dọc của các thanh dàn (1-3), (5-4), (3-6) trong hệ dàn trên hình (H.36b).

Đây là hệ dàn ba khớp. Các thành phần phản lực xác định theo cách của hệ ba khớp, kết quả trên hình vẽ.

Theo hệ quả hai, $N_{2-3} = 0$.



Thực hiện mặt cắt 1-1:

$$\sum M_4^r = 0 \Rightarrow -2a.H_A - N_{1-3}.a.\sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_{1-3} = -\sqrt{2}.H_A = -P.\sqrt{2} (< 0).$$

$$\begin{aligned} \sum M_3^r = 0 &\Rightarrow a.N_{5-4} + a.V_A - a.H_A = 0 \Rightarrow a.N_{5-4} + a.1,5.P - a.P = 0. \\ &\Rightarrow N_{5-4} = -0,5.P (< 0) \end{aligned}$$

Thực hiện mặt cắt 2-2:

$$\begin{aligned} \sum Y^r = 0 &\Rightarrow N_{3-6}.\cos 45^\circ - P + V_A = 0 \Rightarrow N_{3-6}.\frac{\sqrt{2}}{2} - P + 1,5.P = 0 \\ &\Rightarrow N_{3-6} = -\frac{P}{\sqrt{2}} (< 0) \end{aligned}$$

c. Phương pháp mặt cắt phối hợp:

* *Nội dung:* Tìm cách thiết lập số lượng các phương trình cân bằng chứa các ẩn số cần tìm bằng số lượng ẩn số.

Phương pháp này được xây dựng dựa trên nhận xét sau: Khi thiết lập một phương trình cân bằng cho một mặt cắt, nói chung chỉ có thể loại trừ tối đa hai lực dọc.

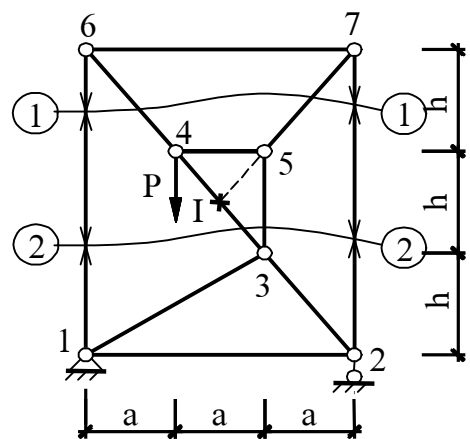
Như vậy, để tìm nội lực trong n thanh dàn, thì cần phải thiết lập n phương trình. Nghĩa là dùng n mặt cắt độc lập sao cho mỗi mặt cắt có cắt qua các thanh cần xác định lực dọc và qua tối đa thêm hai thanh khác nữa. Nội lực trong hai thanh này sẽ bị loại bỏ khi thiết lập phương trình cân bằng.

Giải hệ thống n phương trình, n ẩn số sẽ xác định được các lực dọc cần tìm.

**Ví dụ:* Xác định lực dọc trong thanh dàn (1-6) & (2-7) của hệ dàn trên hình (H.37)

- Với mặt cắt 1-1:

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow f_1(N_{1-6}, N_{2-7}) = 0$$



H.37

$$\Rightarrow N_{2-7} \cdot \frac{3.a}{2} - N_{1-6} \cdot \frac{3.a}{2} = 0 \quad (a)$$

- Với mặt cắt 2-2:

$$\sum M_3 = 0 \Rightarrow f_2(N_{1-6}, N_{2-7}) = 0$$

$$\Rightarrow N_{2-7} \cdot a - N_{1-6} \cdot 2a - P \cdot a = 0 \quad (b)$$

Giải hệ (a), (b), được $N_{1-6} = N_{2-7} = -P$ (gây nén)

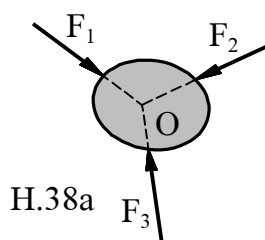
2. Phương pháp đồ giải:

Ý đồ của phương pháp: Thực hiện các phép vẽ hình học và dựa vào hình vẽ đó có thể xác định được nội lực trong các thanh dầm. Tất nhiên, mức độ chính xác của kết quả phụ thuộc vào mức độ chính xác và quy mô của hình vẽ song nói chung có thể đáp ứng được yêu cầu thực tế thiết kế.

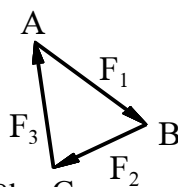
a. Cơ sở của phương pháp:

Dựa trên nguyên lý của môn Cơ học lý thuyết: Điều kiện cân và đủ để hệ lực đồng quy được cân bằng là đa giác lực của hệ lực đó phải khép kín.

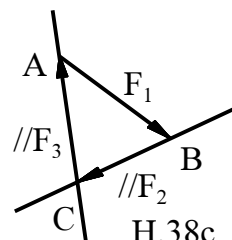
Minh họa nguyên lý:



H.38a



H.38b



H.38c

Xét một vật rắn cân bằng dưới tác dụng của hệ ba lực đồng quy $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$ (H.38a). Tức là: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$. Ta đi vẽ đa giác lực của hệ lực này.

+ \vec{F}_1 : được biểu diễn bằng véc tơ \overline{AB} (có phương, chiều của lực \vec{F}_1 và có độ lớn biểu thị trị số của lực \vec{F}_1 theo một tỷ lệ xích tự chọn).

+ Tương tự, \vec{F}_2 được biểu diễn bằng véc tơ \overline{BC} .

Theo điều kiện khép kín của đa giác lực thì véc tơ \overline{CA} chính là \vec{F}_3 .

Tức là: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$. (H.38b)

Nhận xét 1: Nếu trong hệ ba lực này có 1 lực đã biết (chẳng hạn lực \vec{F}_1), hai lực còn lại mới chỉ biết phương (\vec{F}_2, \vec{F}_3), thì theo điều kiện khép kín của đa giác lực, ta hoàn toàn có thể xác định được chúng.

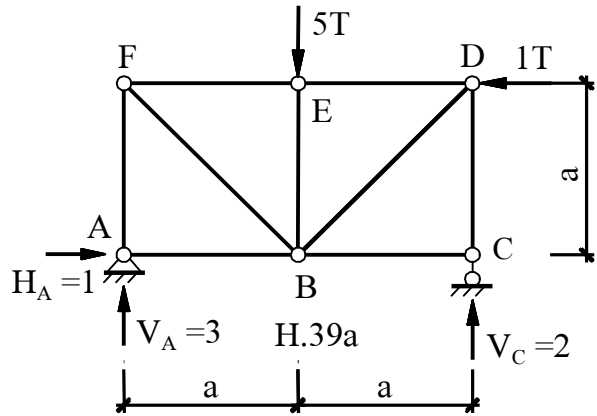
Thật vậy, dựng véc tơ \overline{AB} tương trưng cho lực \vec{F}_1 . Qua B kẻ đường thẳng song song với lực \vec{F}_2 . Qua A kẻ đường thẳng song song với lực \vec{F}_3 . Gọi C là giao điểm của hai đường này. Theo điều kiện khép kín của đa giác lực thì \overline{BC} tương trưng cho lực \vec{F}_2 , \overline{CA} tương trưng cho lực \vec{F}_3 (H.38c).

Mở rộng: Với một hệ lực đồng quy và cân bằng trong đó có hai thành phần mới chỉ biết phương, thì hoàn toàn có thể xác định được chúng theo tính chất khép kín của đa giác lực.

Nhận xét 2: Khi tách mắt dàn, hệ lực tác dụng lên mắt là hệ lực đồng quy, cân bằng và nội lực trong các thanh dàn nếu chưa biết thì cũng có phương đã biết (phương của các thanh dàn chứa nó). Vậy, nếu tại mỗi mắt của dàn chỉ có hai thành phần chưa biết thì có thể xác định được chúng.

Vận dụng nhận xét số 2 vào để xác định lực dọc của các thanh dàn trên hình vẽ (H.39a)

Tách từng mắt của dàn theo thứ tự sao cho tại mỗi mắt chỉ có tối đa hai lực dọc chưa biết. Vẽ đa giác lực sẽ xác định được chúng.



*. *Tách mắt A:*

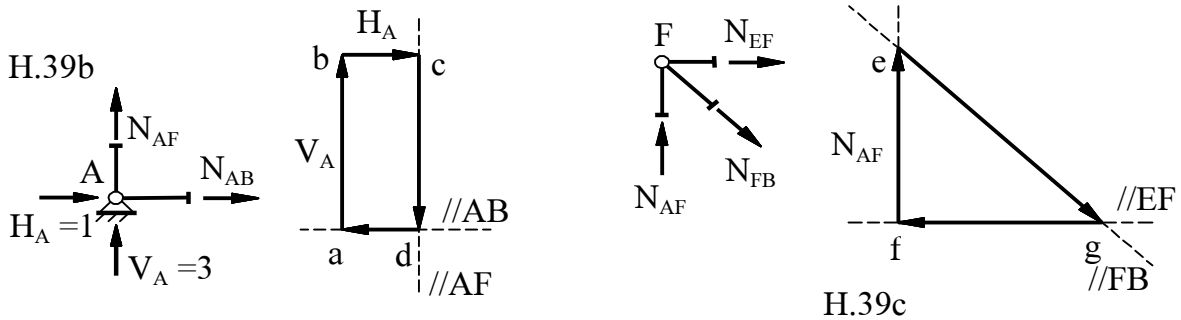
- Lực tác dụng lên mắt A:

+ \vec{H}_A, \vec{V}_A : đã biết

+ $\vec{N}_{AB}, \vec{N}_{AF}$: mới chỉ biết phương.

- Vẽ đa giác lực cho hệ lực $\{\vec{V}_A, \vec{H}_A, \vec{N}_{AB}, \vec{N}_{AF}\}$ theo tỷ lệ xích tự chọn (H.39b)

- Trị số và dấu của các lực cần xác định:



+ Đoạn c-d, d-a: biểu thị trị số của $\vec{N}_{AF}, \vec{N}_{AB}$ (theo tỷ lệ xích đã vẽ).

+ Chiều của lực: Đứng tại mắt A quan sát trên đa giác lực, các véc tơ \vec{cd}, \vec{da} hướng vào mắt dàn nên $\vec{N}_{AB}, \vec{N}_{AF}$ là lực gây nén.

*. *Tách mắt F:*

- Lực tác dụng lên mắt F gồm:

+ Lực \vec{N}_{AF} : đã biết (tính ở trên).

+ Lực $\vec{N}_{FB}, \vec{N}_{EF}$: chỉ mới biết phương.

- Vẽ đa giác lực cho hệ lực $\{\vec{N}_{FE}, \vec{N}_{AF}, \vec{N}_{FB}\}$. Xem hình vẽ (H.39c).

- Trị số và dấu của các lực:

+ Đoạn e-g, g-f: biểu thị trị số của lực $\vec{N}_{FB}, \vec{N}_{EF}$ (theo tỷ lệ xích đã vẽ).

+ Chiều của lực: véc tơ \vec{gf} hướng vào mắt F nên \vec{N}_{FE} gây nén, véc tơ \vec{eg} hướng ra khỏi mắt F nên \vec{N}_{FB} gây kéo.

Tiến hành tương tự cho các mắt khác theo nguyên tắc trên, ta sẽ xác định được nội lực trên toàn dàn.

Nhận xét 3: Với mỗi mắt của dàn cần phải vẽ một đa giác lực. Các đa giác này lại rời rạc nhau nên có nhiều lực phải vẽ đến hai lần, gây tốn công sức và điều quan trọng là làm giảm độ chính xác (do mắc sai số cộng dồn). Để khắc phục nhược điểm này, người ta vẽ gộp các đa giác lực trên một hình vẽ. Hình vẽ này gọi là giản đồ nội lực hay còn gọi là giản đồ Maxwell - Crêmona.

b. Giản đồ Maxwell - Cremona:

Để vẽ giản đồ nội lực, cần thống nhất một số quy ước và tiến hành theo các bước sau:

* *Bước 1:* Xác định phản lực tại các gối tựa: Thường tiến hành theo phương pháp giải tích đã biết.

* *Bước 2:* Phân miền bên ngoài và bên trong dàn.

- Miền bên ngoài dàn: là những miền nằm bên ngoài chu vi dàn và được giới hạn bởi các ngoại lực. Miền bên ngoài dàn được đánh bằng các chữ cái a, b, c...thuận chiều kim đồng hồ quanh chu vi dàn.

- Miền bên trong dàn: là những miền được giới hạn bằng các thanh dàn. Miền bên trong dàn được đánh bằng các chữ số liên tục 1, 2, 3...

- Cách đọc tên ngoại lực: tên của ngoại lực được đọc bằng hai chỉ số biểu thị hai miền hai bên ngoại lực và đọc thuận chiều kim đồng hồ quanh chu vi dàn.

Ví dụ: Lực V_A đọc là a-b.

- Cách đọc tên nội lực: tên của nội lực được đọc bằng hai chỉ số biểu thị hai miền hai bên thanh. Muốn đọc nội lực trong một thanh, đứng tại mắt có chứa thanh đó và đọc tên của hai miền hai bên thanh thuận theo chiều kim đồng hồ quanh mắt đang đứng.

Ví dụ: lực dọc trong thanh FB nếu đứng tại F đọc là 2-1; nếu đứng tại B đọc là 1-2.

Chú ý: - tên nội lực phụ thuộc vào vị trí đứng

- mỗi miền sau này chính là một đỉnh của đa giác lực trên giản đồ.

* *Bước 3:* Vẽ đa giác lực của ngoại lực theo tỷ lệ xích tự chọn. Khi vẽ, không dùng dấu véc tơ (mũi tên) để biểu diễn lực mà ghi trên đó hai chỉ số tương ứng với cách đọc tên ngoại lực. Chỉ số đầu biểu thị góc, chỉ số sau biểu thị ngọn.

Chú ý: đa giác lực phải tự khép kín.

* *Bước 4:* Vẽ đa giác lực của nội lực.

Nguyên tắc chung: để xác định một đỉnh (của 1 miền) nào đó trên đa giác lực ta cần biết trước hai đỉnh (của hai miền lân cận) trên đa giác. Từ hai đỉnh đã biết, kẻ hai đường thẳng song song với hai thanh dàn giới hạn bởi miền đã biết và miền cần tìm. Giao điểm chính là đỉnh (của 1 miền) cần tìm.

Ví dụ: Xác định đỉnh 1 (miền 1) trên đa giác.

Hai miền lân cận đã biết trên đa giác là a, c. Qua a, kẻ đường song song với AB, qua c kẻ đường song song với AF. Giao điểm chính là 1.

* *Bước 5:* Xác định giá trị và chiều của nội lực trong các thanh dầm.

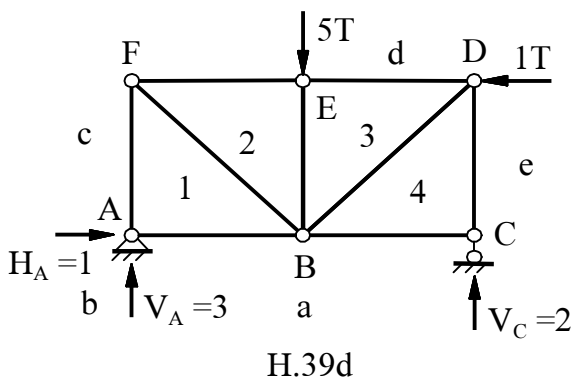
- Muốn xác định nội lực trong thanh i-k, ta chỉ việc đo chiều dài của đoạn i-k tương ứng trên giản đồ theo tỷ lệ xích vừa vẽ.

- Muốn xác định dấu của nội lực trong thanh i-k, ta chỉ việc đứng tại mắt có chứa thanh i-k và đọc tên của nội lực trong thanh thuận theo chiều kim đồng hồ quanh mắt đang đứng. Quan sát trên giản đồ, nếu nó có chiều hướng vào mắt là lực gây nén và ngược lại.

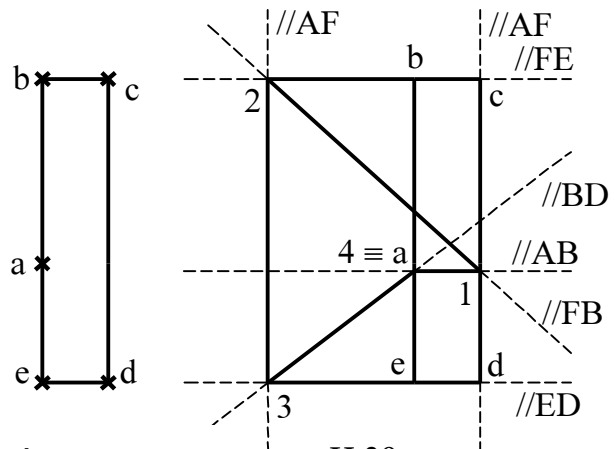
Ví dụ: lực dọc trong thanh FB.

+ Giá trị chính là đoạn 1-2 trên giản đồ.

+ Dấu: Nếu đứng tại F thì sẽ đọc là 2-1 và quan sát trên giản đồ thấy hướng ra xa mắt F nên là lực gây kéo.



H.39d

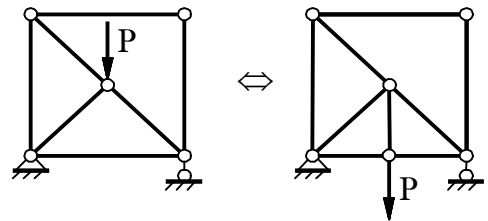


Đa giác ngoại lực

H.39e

**Chú ý:*

- Đối với những dầm mà không thể thực hiện tách mắt để vẽ (do có không đảm bảo việc tách mắt sao cho số ẩn không vượt quá 2), ta có thể sử dụng các phương pháp giải tích để xác định trước lực dọc trong một số các thanh dầm trước khi vẽ.



H.39f

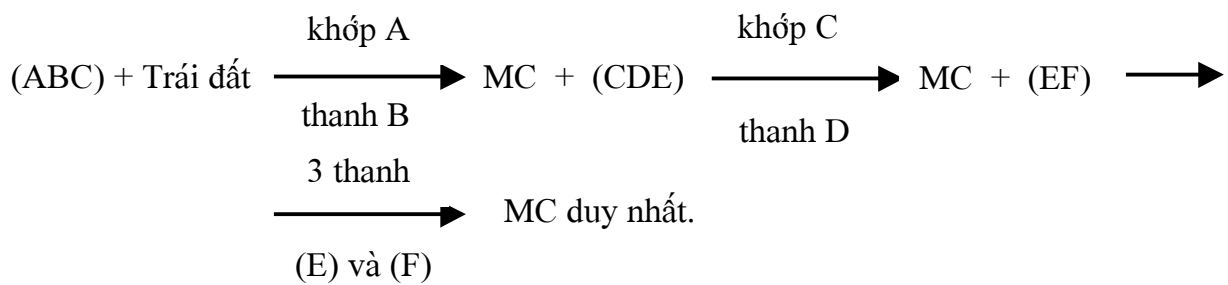
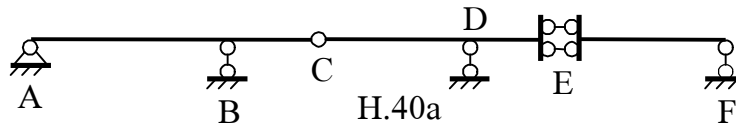
- Nếu ngoại lực nằm bên trong dầm, tìm cách đưa ra ngoài chu vi dầm trước khi thực hiện. Ví dụ hệ trên hình (H.39f).

§ 5. HỆ GHÉP

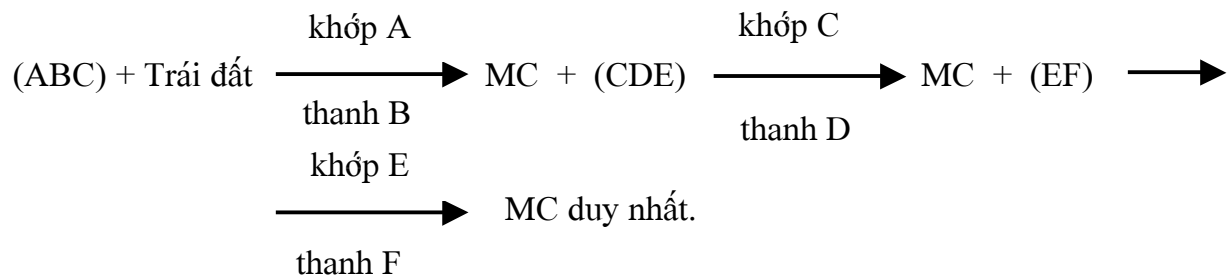
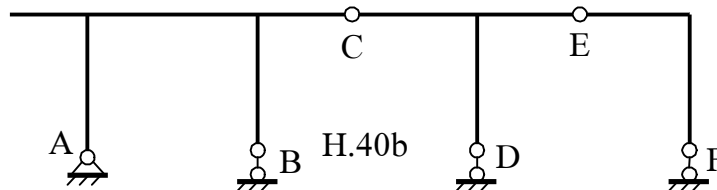
I. Phân tích hệ:

1. Định nghĩa: là hệ gồm nhiều hệ liên kết với nhau bằng các liên kết với nhau bằng các liên kết khớp hoặc thanh rời nối với trái đất bằng các gối tựa để tạo thành hệ BBH.

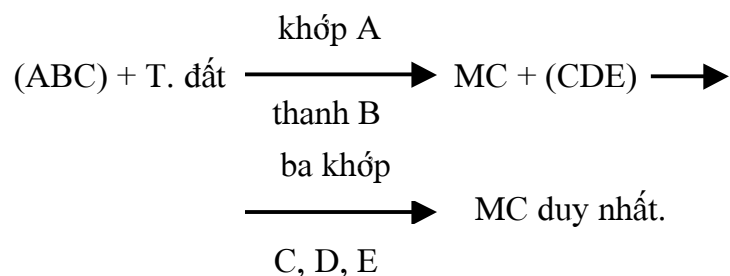
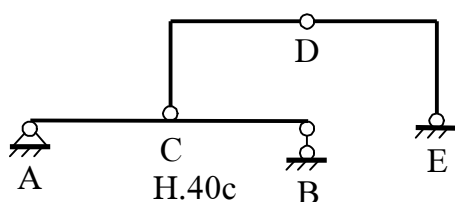
2. Ví dụ:



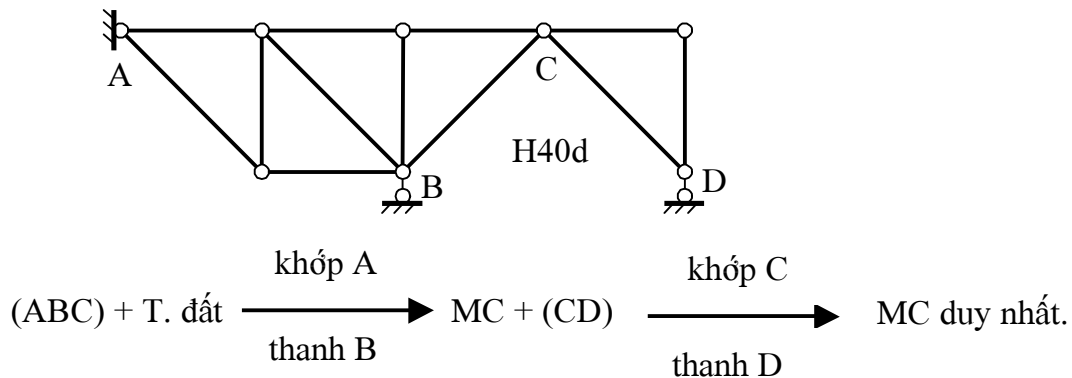
Như vậy, có thể xem hệ đã cho gồm các hệ ABC, CDE, EF là những hệ dầm đơn giản.



Như vậy, có thể xem hệ đã cho gồm các hệ ABC, CDE, EF là những hệ khung đơn giản.



Như vậy, có thể xem hệ đã cho gồm các hệ ABC (dầm đơn giản), CDE (hệ ba khớp).



Như vậy, có thể xem hệ đã cho gồm các hệ ABC, CD là những hệ dàn.

* Nhận xét:

- Có thể xây dựng hệ ghép bằng cách phát triển miếng cứng.
- Theo chiều phát triển miếng cứng, ta loại bỏ miếng cứng trước thì hệ còn lại sẽ bị BH.

3. Cấu tạo của hệ ghép:

- Hệ chính: là hệ mà nếu loại bỏ những hệ lân cận nó vẫn BBH.

Ví dụ: Các hệ đầu tiên trong sơ đồ phát triển hệ của các hệ ở trên.

- Hệ phụ: là hệ mà nếu loại bỏ các hệ lân cận thì nó bị BH.

Ví dụ: Các hệ trừ hệ đầu tiên trong sơ đồ phát triển hệ của các hệ ở trên.

- * Hệ trung gian: là hệ phụ nhưng là hệ chính của hệ khác.

Ví dụ: Hệ CDE trong hệ trên hình (H.40a & H.40b).

II. Nguyên tắc làm việc của hệ ghép:

- Tải trọng tác dụng lên hệ chính chỉ gây ra nội lực trong hệ chính, không gây ra nội lực trong hệ phụ. Lúc này, do hệ quả biến dạng của hệ chính, hệ phụ chỉ bị nghiêng đi mà không biến dạng nên không xuất hiện nội lực.

- Tải trọng tác dụng lên hệ phụ thì gây ra nội lực trong cả hệ phụ và hệ chính. Tải trọng sẽ truyền áp lực từ hệ phụ lên hệ chính thông qua liên kết nối giữa hệ phụ và hệ chính.

III. Tính toán hệ ghép:

Các bước tiến hành như sau:

* Bước 1: Phân tích cấu tạo hệ, xác định hệ chính, hệ phụ, hệ trung gian.

* Bước 2: Tách hệ ghép ra thành nhiều hệ tách biệt, sắp xếp theo thứ tự: hệ phụ trước, hệ chính sau. Đối với hệ phụ, thay thế liên kết đối với hệ chính của nó bằng liên kết tương đương nối đất.

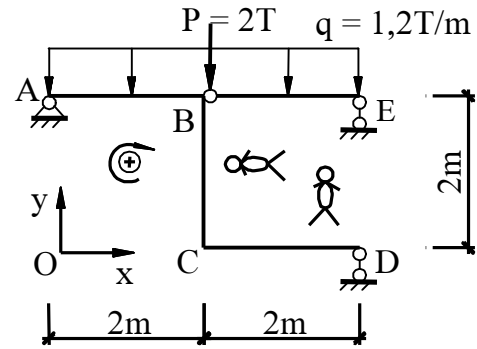
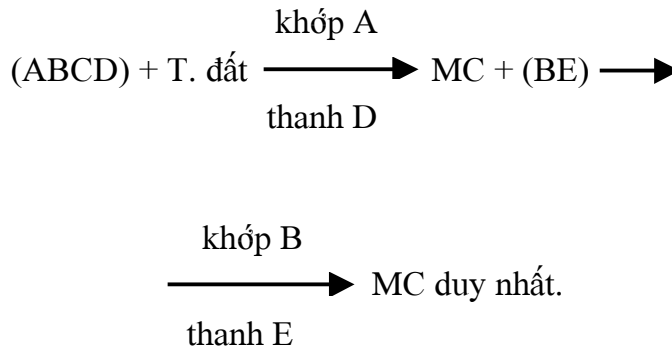
* Bước 3: Giải lần lượt các hệ theo thứ tự: hệ phụ trước, hệ chính sau. Khi tính hệ chính, phải truyền phản lực từ hệ phụ (của nó) vào. Truyền tại vị trí liên kết giữa hệ phụ với hệ chính, có giá trị bằng phản lực khi tính cho hệ phụ và có chiều ngược lại.

Sau khi giải cho tất cả các hệ thành phần, ghép các biểu đồ nội lực lại với nhau, sẽ được kết quả cần tìm.

CÁC VÍ DỤ VỀ HỆ GHÉP

* Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.41a)

1. Phân tích hệ:



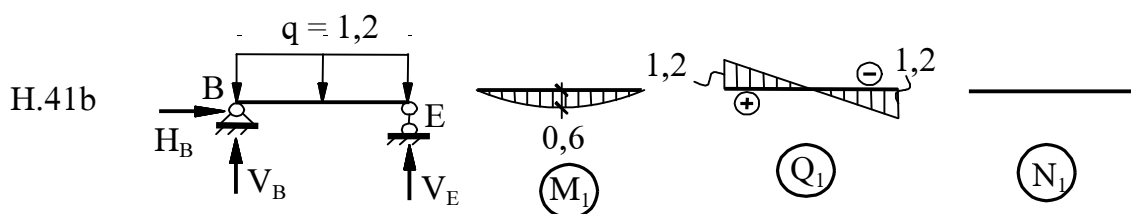
H.41a

Hệ đã cho là hệ ghép, hệ chính ABCD (hệ khung đơn giản) & hệ phụ BE (hệ dầm đơn giản).

2. Giải lần lượt các hệ đơn giản:

a. Hệ phụ BE (H.41b):

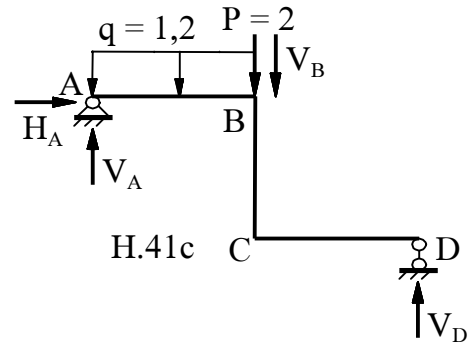
- Xác định phản lực $\{V_B, H_B, V_E\}$: Dễ thấy $H_B = 0$; $V_B = V_E = \frac{q \cdot 2}{2} = 1,2$.
- Xác định nội lực tại các tiết diện đặc trưng:
 Tại B: $M_B = 0$; $Q_B = V_B = 1,2$; $N_B = 0$.
 Tại E: $M_E = 0$; $Q_E = -V_E = -1,2$; $N_E = 0$.
- Vẽ các biểu đồ nội lực (M_1), (Q_1), (N_1):
 + Biểu đồ mômen: tung độ treo $f = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{1,2 \cdot 2^2}{8} = 0,6$.
 + Biểu đồ lực cắt: là đoạn đường thẳng.
 + Biểu đồ lực dọc: là đoạn đường thẳng.



b. Hệ chính ABCD (H.41c):

- Xác định phản lực $\{V_A, H_A, V_D\}$:
 $\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0$.
 $\sum M_D = 0 \Rightarrow 4 \cdot V_A - 2 \cdot q \cdot 3 - 2 \cdot P - 2 \cdot V_B = 0$.
 $\Rightarrow 4 \cdot V_A - 2 \cdot 1,2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 1,2 \cdot 2 = 0$
 $\Rightarrow V_A = 3,4 (>0)$.

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow -4.V_D + 2.q.1 + 2.P + 2.V_B &= 0. \\ \Rightarrow -4.V_D + 2.1,2.1 + 2.2 + 2.1,2 &= 0. \\ \Rightarrow V_D = 2,2 (>0) \end{aligned}$$



Kiểm tra: Dễ thấy thỏa phương trình $\sum Y = 0$.

- Xác định nội lực tại các tiết diện đặc

trung:

Tại A: $M_A = 0$; $Q_A = V_A = 3,4$;
 $N_A = 0$.

Tại B: $M_{BA} = 2.V_A - 2.q.1 = 2.3,1 - 1,2.2.1 = 4,4$.
 $M_{BC} = -2.V_D = -2.2,2 = -4,4$
 $Q_{BA} = V_A - 2.q = 3,4 - 2.1,2 = 1$; $N_{BA} = 0$.
 $Q_{BC} = 0$; $N_{BC} = -V_D = -2,2$.

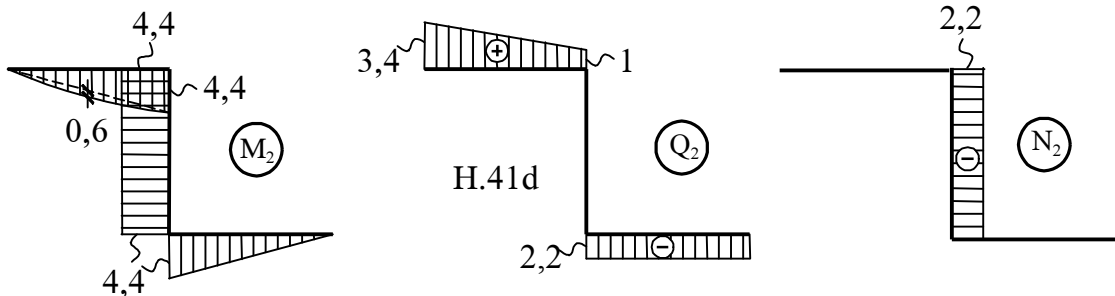
Tại C: $M_{CB} = -2.V_D = -2.2,2 = -4,4$; $Q_{CB} = 0$; $N_{CB} = -V_D = -2,2$.
 $M_{CD} = 2.V_D = 2.2,2 = 4,4$; $Q_{CD} = -V_D = -2,2$; $N_{CD} = 0$.

Tại D: $M_D = 0$; $Q_D = -V_D = -2,2$; $N_D = 0$.

- Vẽ các biểu đồ nội lực (M_2), (Q_2), (N_2) (H.41d):

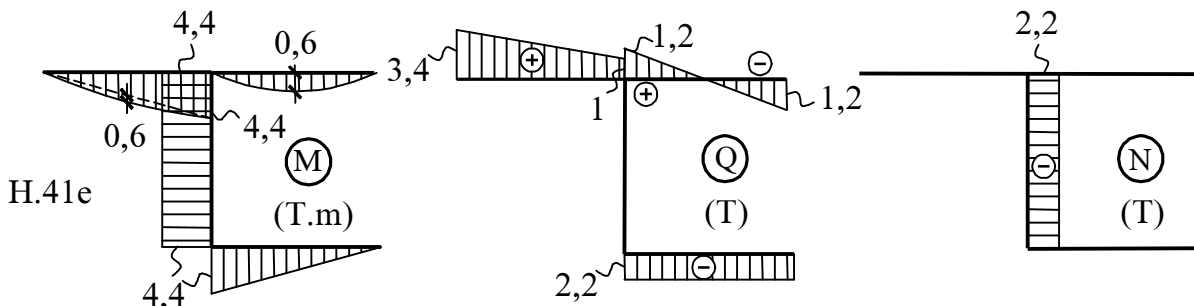
+ Biểu đồ mômen: Trên AB có tung độ treo $f = \frac{q.l^2}{8} = \frac{1,2.2^2}{8} = 0,6$.

+ Biểu đồ lực cắt là những đoạn thẳng.



+ Biểu đồ lực cắt là những đoạn thẳng.

3. Vẽ gộp các biểu đồ nội lực (H.41e):



* Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.42a)

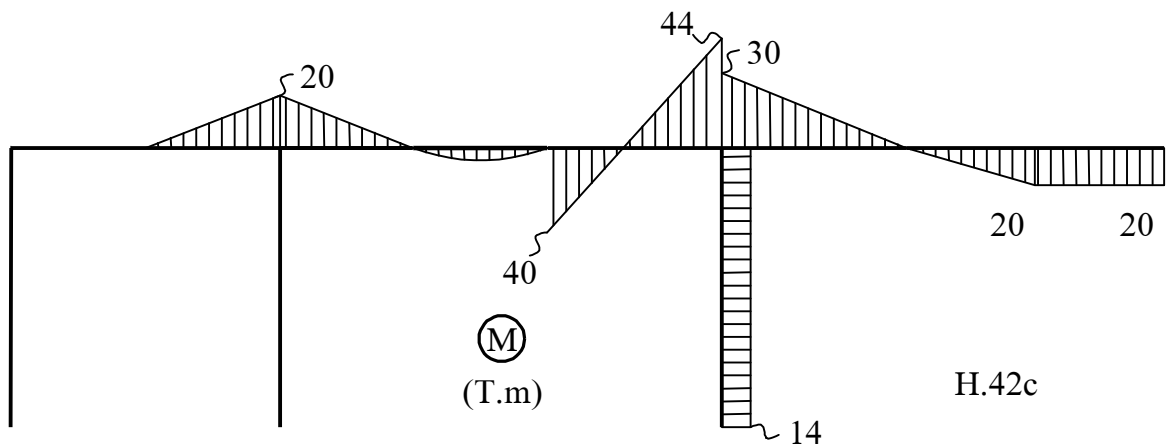
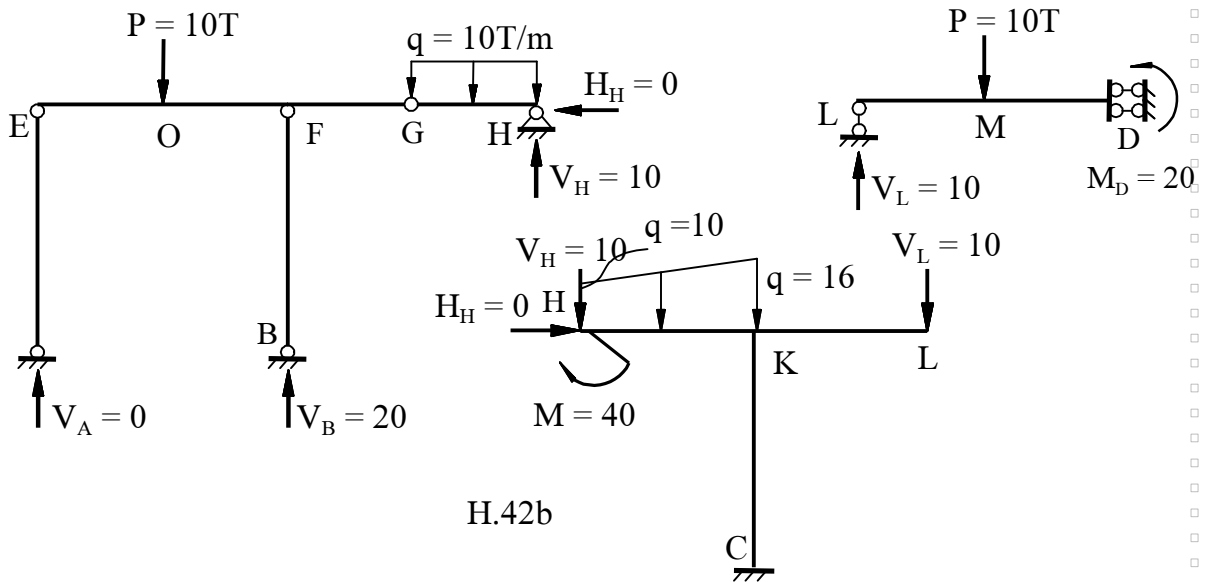
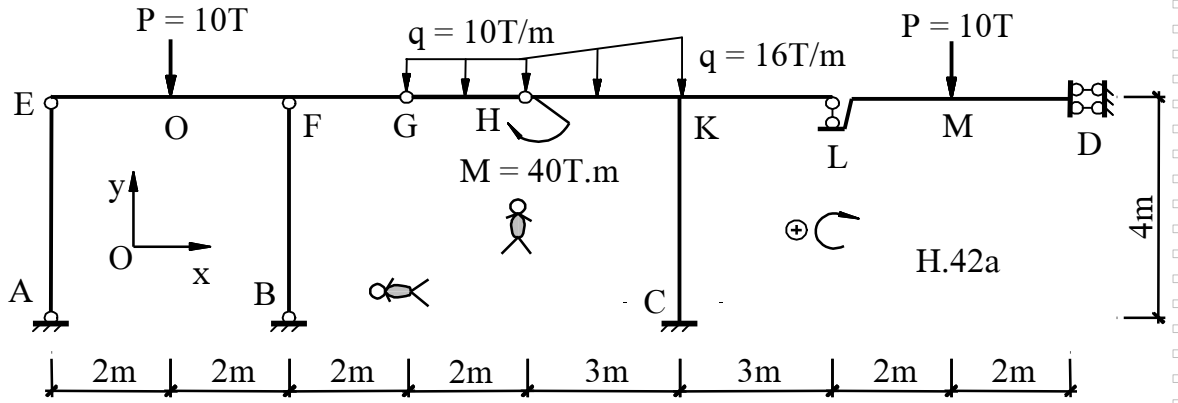
Hệ đã là hệ ghép của 3 hệ :

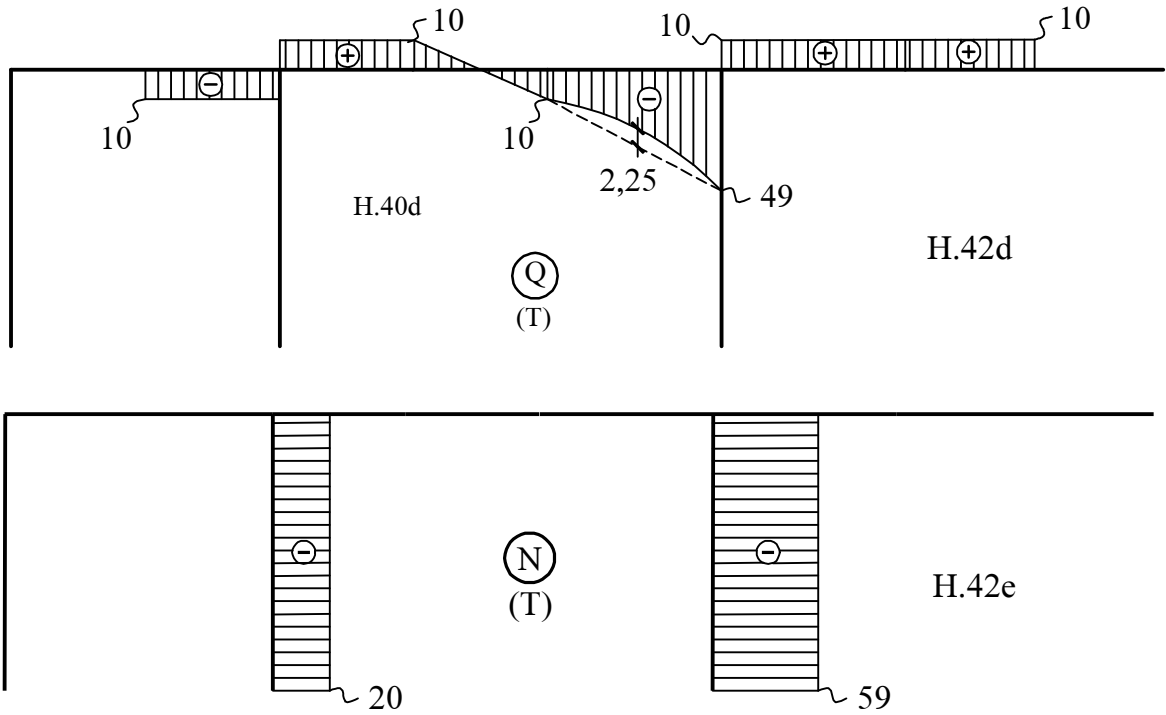
- Hệ 3 khớp ABEFGH, các khớp là H, G và khớp giả tạo bởi hai thanh AE & BF. Đây là hệ phụ.

- Hệ dầm LMD, là hệ phụ.
- Hệ khung CHKL, là hệ chính.

Quá trình tính toán trình bày trên hình (H.42b).

Kết quả biểu đồ nội lực trên toàn hệ trên hình (H.42c, d, e).





* Ví dụ 3: Xác định lực dọc trong thanh dầm (3-8), (1-7) của hệ dầm cho trên hình (H.43a)

Hệ dầm đã cho có thể xem như hệ ghép và phân tích thành hệ chính và phụ như trên hình vẽ.

- Dùng mặt cắt 1-1 tách mắt 3

$$\sum Y = 0$$

$$\Rightarrow -N_{3-8} \cdot \sin 45^\circ + V_3 = 0$$

$$\Rightarrow N_{3-8} = 0,5 \cdot P \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{P}{\sqrt{2}} (> 0)$$

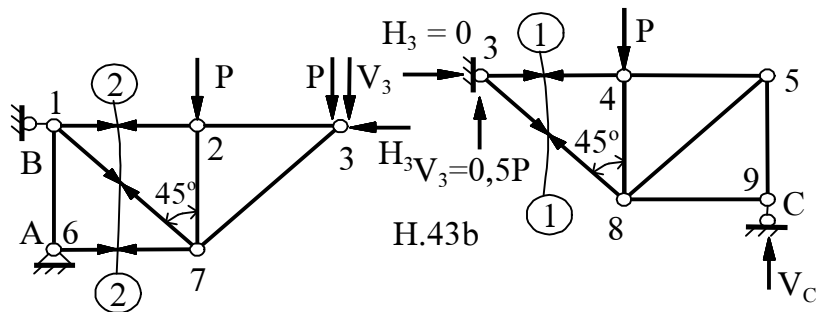
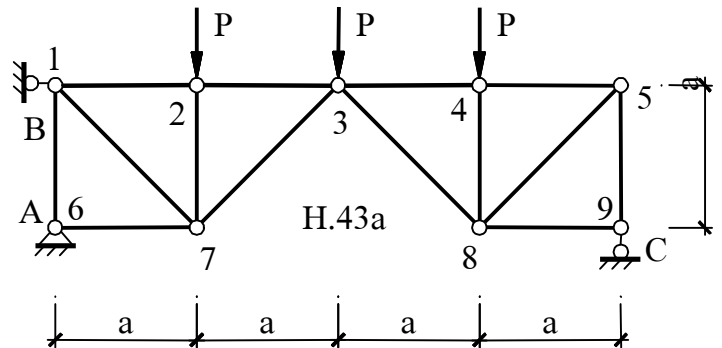
- Dùng mặt cắt "đơn giản" 2-2 trên hệ chính

$$\sum Y^{ph} = 0$$

$$\Rightarrow N_{1-7} \cdot \cos 45^\circ - P - P - 0,5 \cdot P = 0$$

$$\Rightarrow N_{1-7} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,5 \cdot P$$

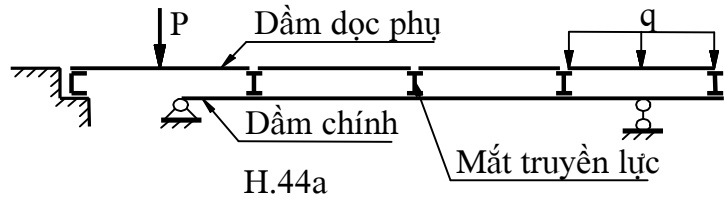
$$\Rightarrow N_{1-7} = \frac{5 \cdot P}{\sqrt{2}} (> 0)$$



§6. HỆ CÓ HỆ THỐNG TRUYỀN LỰC

I. Phân tích cấu tạo hệ:

1. Định nghĩa: là những hệ mà tải trọng không tác dụng trực tiếp lên kết cấu chịu lực chính mà phải thông qua một hệ thống truyền lực.



2. Đặc điểm của hệ có hệ thống truyền lực:

- Cố định được vị trí đặt lực.
- Giảm nhẹ trọng lượng của các kết cấu chịu lực chính.
- Bảo vệ các kết cấu chịu lực chính tránh bị hư hỏng trong quá trình chịu tải.

Chú ý: Các kết cấu hệ có hệ thống truyền lực thường gặp sàn nhà, mái nhà, kết cấu mặt cầu....

II. Tính hệ có hệ thống truyền lực:

- Phân dầm dọc phụ: làm việc như những dầm đơn giản kê lên các gối tựa tại vị trí các mắt truyền lực.
- Phần kết cấu chịu lực chính: chịu áp lực từ dầm dọc phụ thông qua các mắt truyền lực.

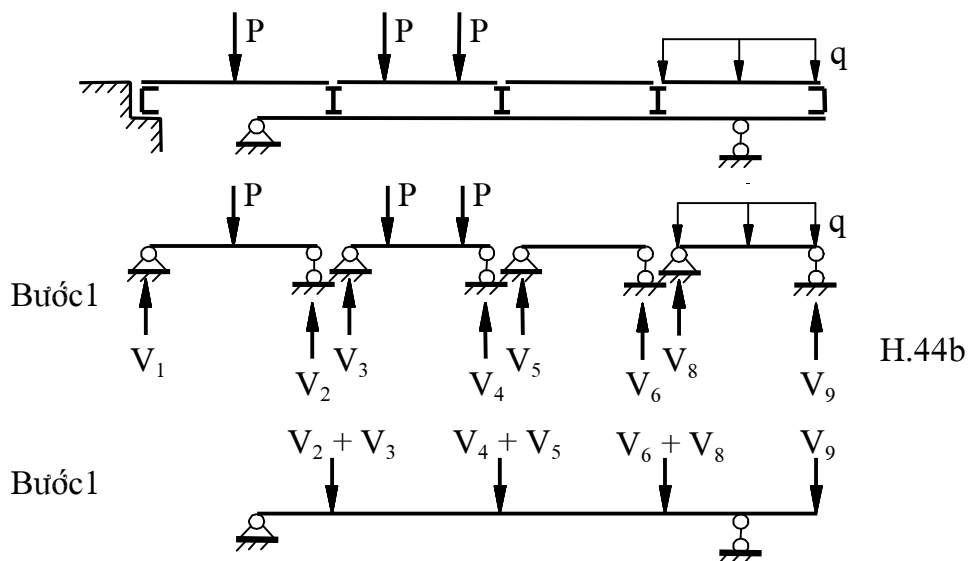
Các bước tính toán như sau:

* *Bước 1:* Xem các dầm dọc phụ như những dầm đơn giản kê lên các gối tựa tại các mắt truyền lực và chịu tải trọng tương ứng. Hệ này đã biết cách tính.

* *Bước 2:* Tính kết cấu chịu lực chính.

- Truyền phản lực từ dầm dọc phụ vào (giống hệ ghép).
- Tính kết cấu chịu lực chính như những hệ thông thường đã biết.

Minh họa:

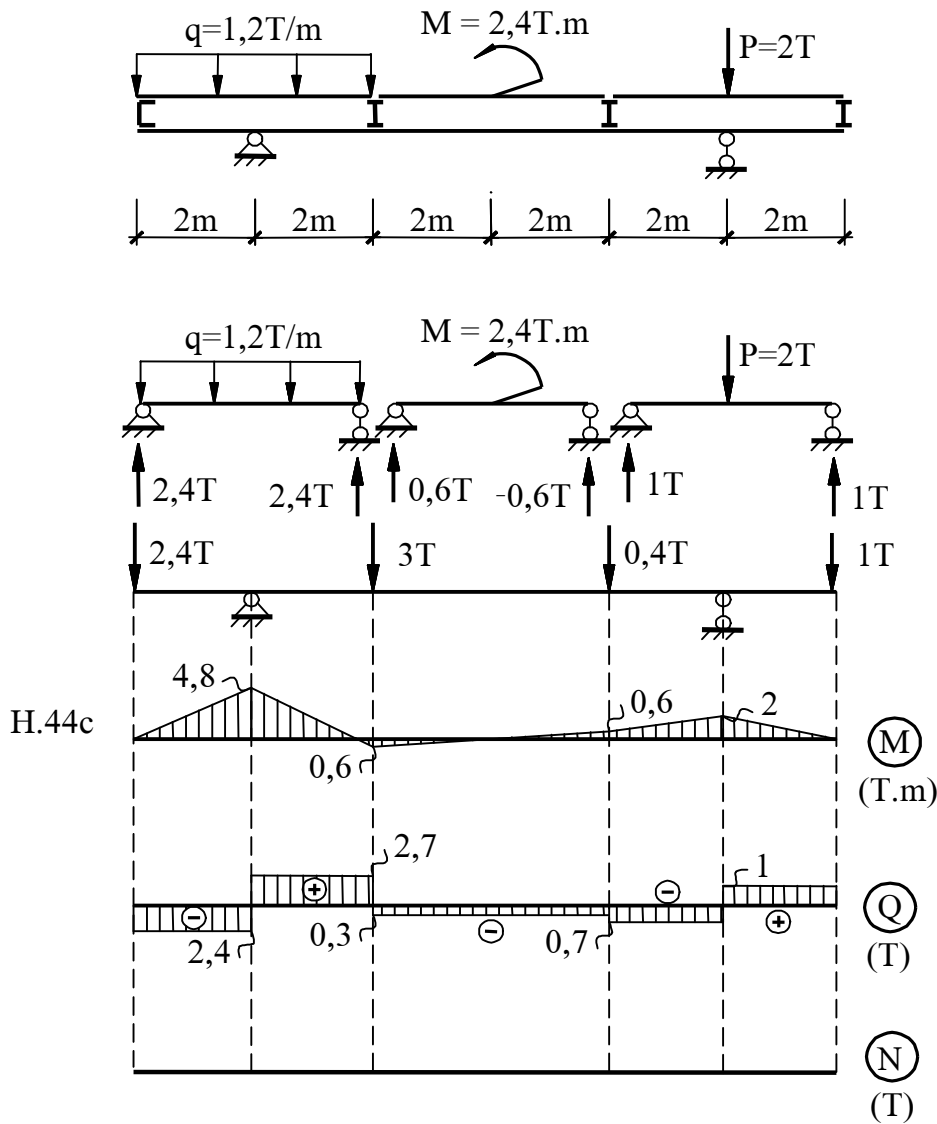


* *Nhận xét:* Do tải trọng truyền vào kết cấu chịu lực chính những lực tập trung, nên biểu đồ mômen trong kết cấu chịu lực chính có dạng đa giác còn biểu đồ lực cắt có dạng hình thang.

* *Ví dụ:* Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ có hệ thống truyền lực (H.44c).

1. Tính các dầm dọc phụ: là những dầm đơn giản, tính được dễ dàng. Ở đây chỉ xác định phản lực của nó.

2. Tính kết cấu chịu lực chính: là dầm đơn giản chịu tải trọng là áp lực từ các dầm dọc phụ truyền vào. Kết quả thể hiện trên hình vẽ.



CHƯƠNG 3

XÁC ĐỊNH NỘI LỰC TRONG HỆ PHẪNG TÍNH ĐỊNH CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG.

§ 1. CÁC KHÁI NIỆM.

I. Tải trọng di động và nguyên tắc tính hệ chịu tải trọng di động:

1. Tải trọng di động: là tải trọng có vị trí thay đổi tác dụng lên công trình như tải trọng của đoàn xe, đoàn người di chuyển trên cầu...

Khi tải trọng di động trên hệ, đại lượng nghiên cứu S (nội lực, phản lực, chuyển vị...) sẽ thay đổi. Do đó, khi nghiên cứu hệ chịu tải trọng di động, ta phải giải quyết hai nhiệm vụ:

- Xác định vị trí bất lợi hay còn gọi là vị trí để tính của tải trọng di động trên công trình là vị trí của tải trọng để sao cho ứng với vị trí đó, đại lượng nghiên cứu S có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất.

- Xác định trị số để tính hay còn gọi là giá trị để tính là trị số lớn nhất về trị tuyệt đối của đại lượng nghiên cứu S ứng với vị trí để tính của tải trọng di động.

2. Nguyên tắc chung để tìm vị trí bất lợi và giá trị để tính:

- Giả thiết khoảng cách giữa các tải trọng di động trên công trình là không đổi và vị trí của chúng được xác định theo một tọa độ chạy z .

- Thiết lập biểu thức của đại lượng nghiên cứu S theo vị trí của tải trọng di động (theo tọa độ z) bằng các nguyên tắc như đã biết trong phần hệ chịu tải trọng bất độn. S là hàm số theo z $S(z)$.

- Tìm cực trị của hàm $S(z)$. Giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của các cực trị là giá trị để tính. Vị trí z_0 tương ứng của đoàn tải trọng là vị trí để tính.

Hàm $S(z)$ thường là hàm nhiều đoạn và không liên tục về giá trị cũng như đạo hàm của nó nên việc tìm các cực trị khó khăn. Người ta sử dụng phương pháp đường ảnh hưởng để nghiên cứu.

II. Định nghĩa đường ảnh hưởng:

Đường ảnh hưởng của đại lượng nghiên cứu S là đồ thị biểu diễn quy luật biến thiên của đại lượng S tại một vị trí xác định trên công trình theo vị trí của một lực tập trung bằng đơn vị, không thứ nguyên, có phương và chiều không đổi di động trên công trình gây ra. Ký hiệu đ.a.h.S

III. Các quy ước khi vẽ đường ảnh hưởng:

- Đường chuẩn thường chọn có phương vuông góc với lực $P = 1$ di động (hoặc trục các cầu kiện).

- Các tung độ dựng vuông góc với đường chuẩn.

- Các tung độ dương dựng theo chiều của tải trọng di động và ngược lại.

- Ghi các ký hiệu (\oplus) , (\ominus) vào miền dương, âm của đ.a.h.S.

IV. Nguyên tắc vẽ đường ảnh hưởng:

Các bước tiến hành như sau:

**Bước 1:* Cho một lực $P = 1$ di động trên công trình. Vị trí của nó cách gốc hệ trục tọa độ chọn tùy ý một đoạn z .

**Bước 2:* Xác định biểu thức của đại lượng nghiên cứu S tương ứng với vị trí của lực P có tọa độ z bằng các phương pháp tính với tải trọng bất động đã quen biết, được $S(z)$. $S(z)$ gọi là phương trình đường ảnh hưởng.

**Bước 3:* Vẽ đồ thị của hàm số $S(z)$ sẽ được đ.a.h.S

**Ví dụ:* Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k (H.3.1a)

1. Xác định $M_k(z)$:

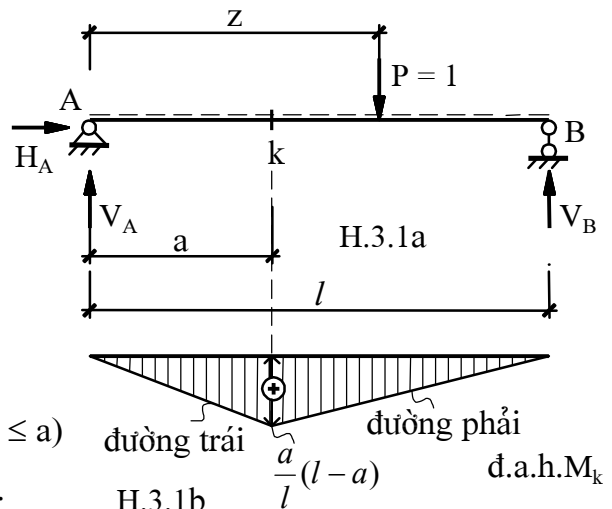
a. Xác định phản lực:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot l - P \cdot (l - z) = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{(l - z)}{l}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot l - P \cdot z = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{z}{l}$$



b. Xác định $M_k(z)$:

- Khi $P = 1$ di động bên trái k ($0 \leq z \leq a$)

$$M_k(z) = V_B \cdot (l - a) = \frac{z}{l} \cdot (l - a)$$

- Khi $P = 1$ di động bên phải tiết diện k ($a \leq z \leq l$)

$$M_k(z) = V_A \cdot z = \frac{(l - z)}{l} \cdot a$$

2. Vẽ đ.a.h. M_k :

- Khi $P = 1$ di động bên trái k ($0 \leq z \leq a$)

$$M_k(z) = \frac{z}{l} \cdot (l - a) \text{ có dạng bậc nhất, được vẽ qua 2 điểm:}$$

$$+ z = 0 \Rightarrow M_k(0) = 0.$$

$$+ z = a \Rightarrow M_k(a) = \frac{a}{l} \cdot (l - a) (> 0)$$

- Khi $P = 1$ di động bên phải tiết diện k ($a \leq z \leq l$)

$$M_k(z) = \frac{(l - z)}{l} \cdot a \text{ có dạng bậc nhất được vẽ qua 2 điểm:}$$

$$+ z = a \Rightarrow M_k(a) = \frac{a}{l} \cdot (l - a) (> 0)$$

$$+ z = l \Rightarrow M_k(l) = 0.$$

Kết quả trên hình (H.3.1b)

IV. Ý nghĩa và thủ nguyên của tung độ đường ảnh hưởng:

1. Ý nghĩa của tung độ đường ảnh hưởng của đại lượng S :

Tung độ đường ảnh hưởng đại lượng S tại một tiết diện nào đó biểu thị giá trị của đại lượng S do lực $P = 1$ đặt ngay tại tiết diện đó gây ra.

2. So sánh ý nghĩa của tung độ đường ảnh hưởng của đại lượng S với biểu đồ nội lực:

Trong chương 2, ta biết rằng: tung độ biểu đồ nội lực tại một tiết diện biểu thị giá trị của nội lực tại ngay tiết diện đó do các tải trọng có vị trí không đổi tác dụng trên toàn hệ gây ra.

Như vậy, biểu đồ nội lực cho thấy quy luật phân bố của nội lực trên tất cả các tiết diện của hệ; còn đường ảnh hưởng của đại lượng S cho thấy quy luật biến thiên của đại lượng nghiên cứu S tại một vị trí xác định nào đó do lực tập trung $P = 1$ di động trên công trình gây ra.

3. Thứ nguyên tung độ đường ảnh hưởng:

$$\text{Thứ nguyên tung độ đường ảnh hưởng} = \frac{\text{Thứ nguyên đại lượng } S}{\text{Thứ nguyên lực } P}$$

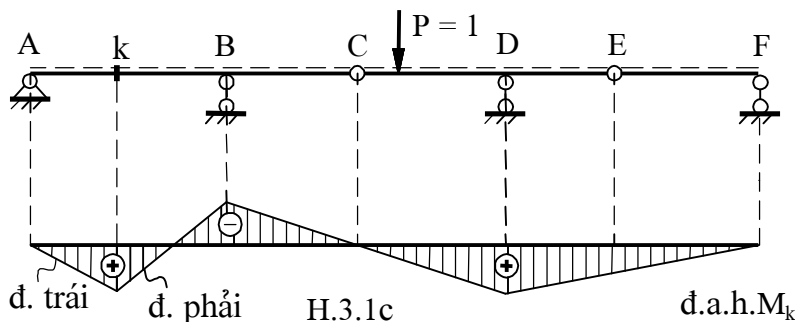
Vậy, nếu thứ nguyên của lực là kN , của chiều dài là m thì tung độ đường ảnh hưởng phản lực có thứ nguyên $\frac{kN}{kN}$ (tức là hữ số), mômen uốn là $\frac{kN.m}{kN} = m$.

V. Dạng đường ảnh hưởng:

Trong hệ tĩnh định, đường ảnh hưởng phản lực và nội lực là những đoạn thẳng tương ứng với mỗi miếng cứng thành phần của hệ nếu miếng cứng đó không chứa đại lượng nghiên cứu S .

Nếu miếng cứng thành phần chứa đại lượng nghiên cứu S thì đường ảnh hưởng thuộc miếng cứng này gồm hai đoạn thẳng giới hạn tại vị trí tương ứng dưới tiết diện chứa đại lượng S . Lúc này, đoạn đường bên trái gọi là đường trái và đoạn còn lại gọi là đường phải.

Ví dụ cho trên H.3.1c, ABC là miếng cứng thành phần có chứa đại lượng S ; CDE, EF là miếng cứng thành phần không chứa đại lượng S



§2. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ DẦM, KHUNG ĐƠN GIẢN.

I. Dầm công xơn:

1. Phân tích:

a. Khi đầu thừa bên phải: (H.3.2a)

- Xác định $M_k(z)$, $Q_k(z)$, $N_k(z)$:

+ Khi $P = 1$ di động bên trái tiết diện k ($b \leq z \leq l$):

$$M_k(z) = 0, Q_k(z) = 0, N_k(z) = 0.$$

+ Khi $P = 1$ di động bên phải tiết diện k ($0 \leq z \leq b$):

$$M_k(z) = -P.(b - z) = -(b - z)$$

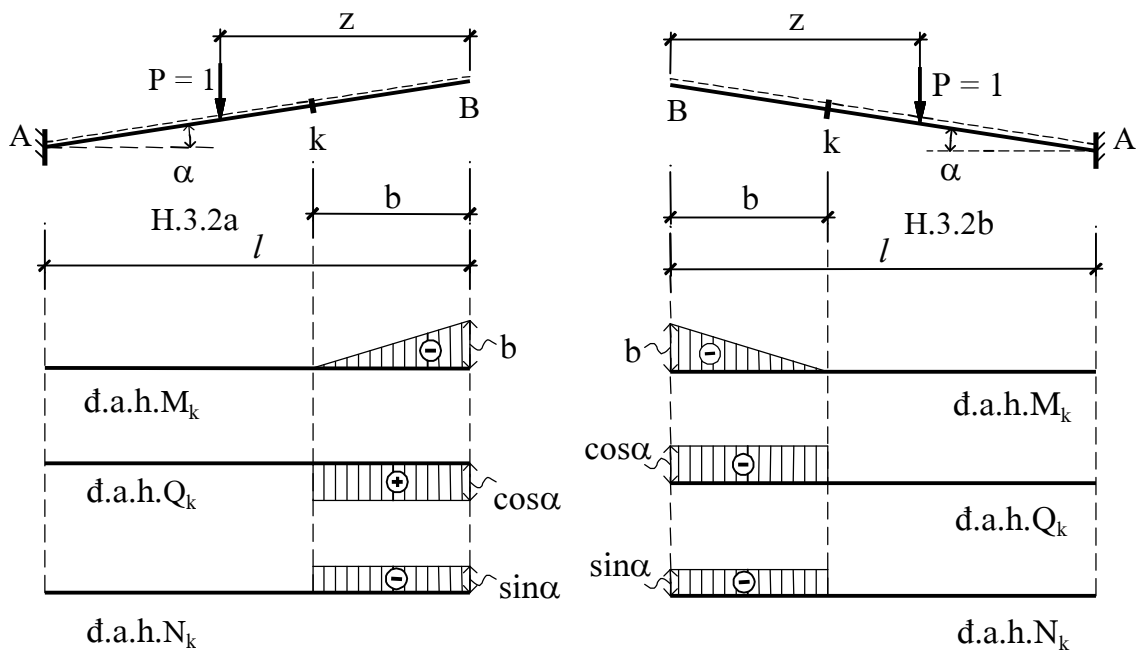
$$Q_k(z) = +P.\cos\alpha = \cos\alpha.$$

$$N_k(z) = -P.\sin\alpha = -\sin\alpha.$$

- Vẽ đ.a.h. M_k , đ.a.h. Q_k , đ.a.h. N_k : Cho z biến thiên và vẽ. (H.3.2a)

b. Khi đầu thừa bên trái:

Tương tự, kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.3.2b)



2. Nhận xét và cách vẽ nhanh đường ảnh hưởng:

a. Đ.a.h. M_k :

* Nhận xét: đ.a.h M_k có dạng hình tam giác.

- Tại nút thừa $M_k = -b$ (b là khoảng cách từ nút thừa đến đến tiết diện k theo phương ngang).

- Tại tiết diện k : $M_k = 0$.

- Đ.a.h. M_k luôn mang dấu âm.

- Trên đoạn từ k đến đầu ngàm, đ.a.h. M_k trùng với đường chuẩn.

* Cách vẽ nhanh:

- Tại nút thừa dựng tung độ $y = -b$.

- Tại k dựng tung độ $y = 0$.

- Nối hai tung độ này bằng đoạn đường thẳng sẽ được đ.a.h. M_k trên đoạn từ nút thừa đến tiết diện k .

- Trên đoạn còn lại, đ.a.h. M_k vẽ trùng đường chuẩn.

b. Đ.a.h.Q_k:

* Nhận xét: đ.a.h.Q_k có dạng hình chữ nhật.

- Tung độ $y = +\cos\alpha$ khi đầu thừa bên phải.
- Tung độ $y = -\cos\alpha$ khi đầu thừa bên trái.
- Trên đoạn từ k đến đầu ngàm, đ.a.h.Q_k trùng với đường chuẩn.

* Cách vẽ nhanh:

- Trên đoạn từ mút thừa đến tiết diện k, dựng đoạn đường thẳng song song đường chuẩn có tung độ $y = +\cos\alpha$ khi đầu thừa bên phải; $y = -\cos\alpha$ khi đầu thừa bên trái.

- Trên đoạn còn lại, đ.a.h.Q_k vẽ trùng đường chuẩn.

c. Đ.a.h.N_k:

* Nhận xét: đ.a.h.N_k có dạng hình chữ nhật.

- Tung độ $y = -\sin\alpha$.
- Trên đoạn từ k đến đầu ngàm, đ.a.h.N_k trùng với đường chuẩn.

* Cách vẽ nhanh:

- Trên đoạn từ mút thừa đến tiết diện k, dựng đoạn đường thẳng song song đường chuẩn có tung độ $y = -\sin\alpha$.

- Trên đoạn còn lại, đ.a.h.N_k vẽ trùng đường chuẩn.

*Chú ý: α lấy > 0 khi đầu B cao

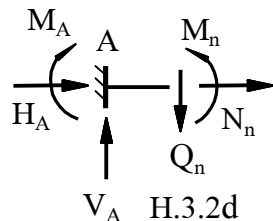
hơn đầu A và ngược lại.

Ví dụ: Vẽ đ.a.h nội lực tại tiết diện k và đ.a.h phản lực gối tựa A của hệ cho trên H.3.2c

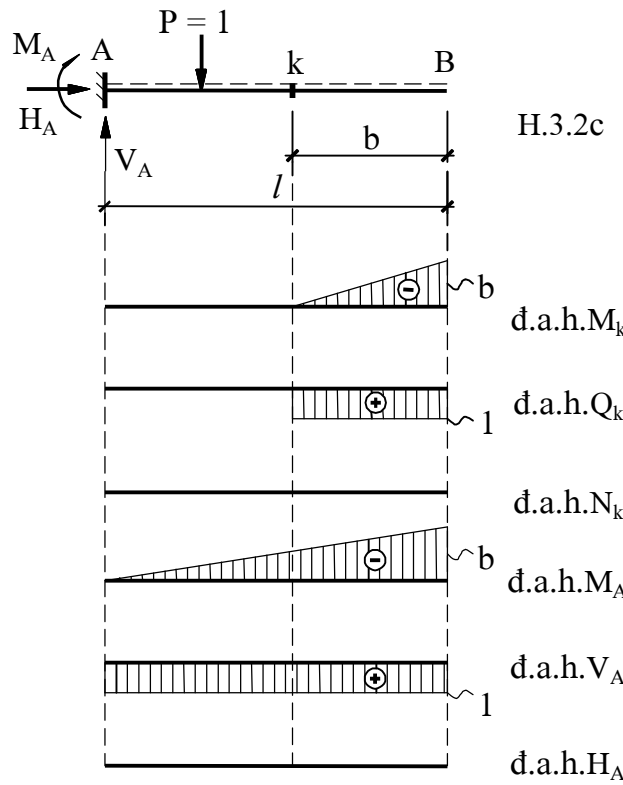
- đ.a.h nội lực tại tiết diện k vẽ theo cách vẽ nhanh.

- đ.a.h phản lực tại gối A được vẽ theo đ.a.h nội lực tiết diện tại ngàm:

- + đ.a.h.V_A ≡ đ.a.h.Q_n
- + đ.a.h.M_A ≡ đ.a.h.M_n
- + đ.a.h.H_A ≡ (-1)đ.a.h.N_n



H.3.2d



II. Đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản có đầu thừa: (H.3.3)

1. Đường ảnh hưởng phản lực:

a. Phân tích:

- Xác định V_A, H_A, V_B :

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot l - P \cdot (l - z) = 0 \Rightarrow V_A = \frac{(l - z)}{l}.$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot l - P \cdot z = 0 \Rightarrow V_B = \frac{z}{l}.$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

- Vẽ đ.a.h phản lực: Cho z biến thiên và vẽ (H.3.3)

b. Nhận xét và cách vẽ nhanh:

* Nhận xét:

- Đ.a.h. $V_A, \text{đ.a.h. } V_B$ là một đoạn thẳng duy nhất, có tung độ $y = +1$ tại gối tựa chứa đại lượng nghiên cứu, tung độ $y = 0$ tại gối tựa còn lại.

- Đ.a.h. H_A trùng với đường chuẩn.

* Cách vẽ nhanh:

- Đ.a.h. $V_A, \text{đ.a.h. } V_B$:

+ Dựng tung độ $y = +1$ tại gối tựa chứa đại lượng vẽ đ.a.h.

+ Dựng tung độ $y = 0$ tại gối tựa còn lại.

+ Nối hai tung độ này bằng một đoạn đường thẳng sẽ được đ.a.h cần vẽ.

- Đ.a.h. H_A : vẽ trùng đường chuẩn.

2. Đường ảnh hưởng nội lực:

a. Trường hợp tiết diện nằm bên trong nhịp:

a1. Phân tích:

- Xác định nội lực tại tiết diện k :

+ Khi $P = 1$ di động bên trái tiết diện k ($-l_1 \leq z \leq a$):

$$M_k = V_B \cdot (l - a) = \frac{z}{l} \cdot (l - a).$$

$$Q_k = -V_B \cdot \cos \alpha = -\frac{z}{l} \cdot \cos \alpha.$$

$$N_k = V_B \cdot \sin \alpha = \frac{z}{l} \cdot \sin \alpha.$$

+ Khi $P = 1$ di động bên phải tiết diện k ($a \leq z \leq l + l_2$):

$$M_k = V_A \cdot a = \frac{a \cdot (l - z)}{l}.$$

$$Q_k = V_A \cdot \cos \alpha = \frac{(l - z)}{l} \cdot \cos \alpha.$$

$$N_k = -V_A \cdot \sin \alpha = -\frac{(l - z)}{l} \cdot \sin \alpha.$$

- Vẽ đ.a.h nội lực: Cho z biến thiên và vẽ (H.3.3)

a2. Nhận xét và cách vẽ nhanh:

* Đ.a.h. M_k :

- Nhận xét:

+ Đường trái và đường phải cắt nhau tại vị trí tương ứng dưới tiết diện k .

+ Nếu kéo dài đường phải đến gối tựa A, có tung độ $y = +a$ (a là khoảng cách từ k đến gối tựa A theo phương ngang)

+ Nếu kéo dài đường trái đến gối tựa B, có tung độ $y = -(l - a)$.

+ Tại vị trí gối tựa, có tung độ $y = 0$.

+ Đ.a.h. M_k không phụ thuộc góc α .

- Cách vẽ nhanh:

+ Dùng tung độ $y = 0$ tại vị trí các gối tựa (các tung độ này gọi là các điểm không).

+ Tại gối tựa A, dựng tung độ $y = +a$. Nối tung độ này với điểm không tại B bằng đường thẳng, được đường phải.

+ Qua k, dựng đường thẳng đứng cắt đường phải, xác định được phần thích dụng của đường phải và điểm chung của đường phải với đường trái.

+ Nối điểm chung vừa xác định với điểm không tại A, sẽ xác định được phần thích dụng của đường trái.

* Đ.a.h. Q_k :

- Nhận xét:

+ Đường trái và đường phải song song nhau.

+ Tại vị trí gối tựa, có tung độ $y = 0$.

+ Tại vị trí tiết diện k, có bước nhảy bằng $\cos\alpha$.

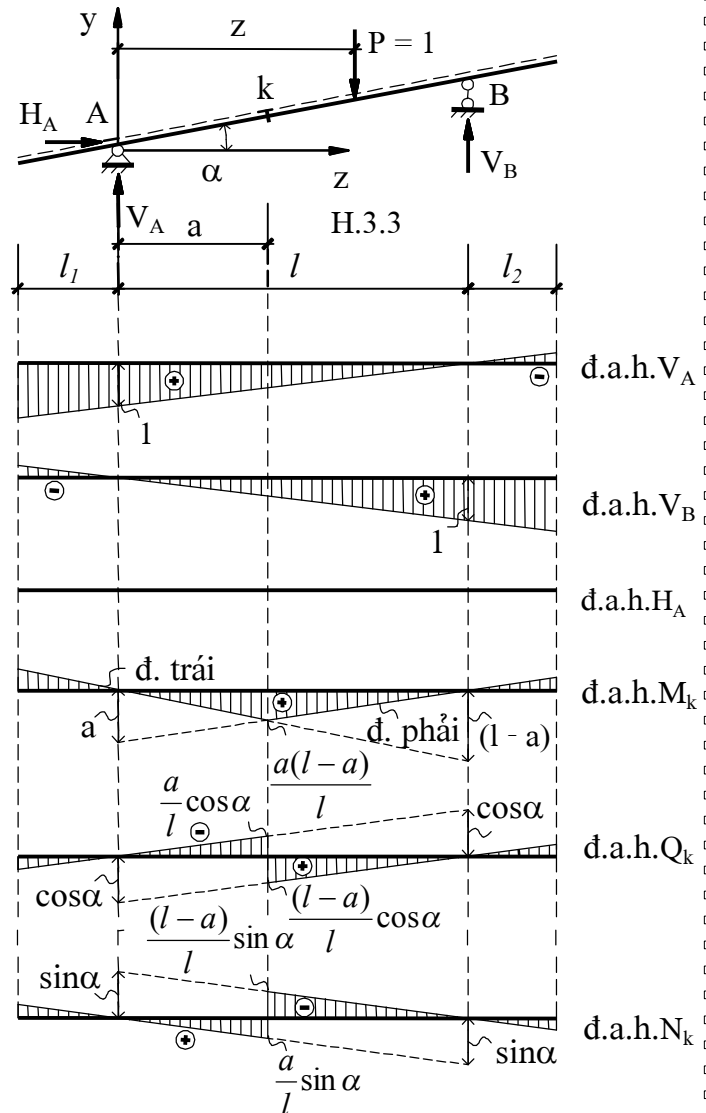
- Cách vẽ nhanh:

+ Dùng tung độ $y = 0$ tại vị trí các gối tựa (các tung độ này gọi là các điểm không).

+ Tại A, dựng tung độ $y = +\cos\alpha$. Nối tung độ này với điểm không tại B bằng đường thẳng, sẽ được đường phải.

+ Tại B, dựng tung độ $y = -\cos\alpha$. Nối tung độ này với điểm không tại A bằng đường thẳng, sẽ được đường trái.

+ Qua k, dựng đường thẳng đứng đứng cắt đường phải và đường trái, sẽ xác định được phần thích dụng của chúng.



* Đ.a.h.N_k:

- Nhận xét:

+ Đường trái và đường phải song song nhau.

+ Tại vị trí gối tựa, có tung độ y = 0.

+ Tại vị trí tiết diện k, có bước nhảy bằng sinα.

- Cách vẽ nhanh:

+ Dựng tung độ y = 0 tại vị trí các gối tựa (các tung độ này gọi là các điểm không).

+ Tại A, dựng tung độ y = - sinα. Nối tung độ này với điểm không tại B bằng đường thẳng, sẽ được đường phải.

+ Tại B, dựng tung độ y = +sinα. Nối tung độ này với điểm không tại A bằng đường thẳng, sẽ được đường trái.

+ Qua k, dựng đường thẳng đứng cắt đường phải và đường trái, sẽ xác định được phân thịch dụng của chúng.

Lưu ý rằng với những nhận xét trên, còn có những cách khác để vẽ nhanh đường phải, đường trái đường ảnh hưởng nội lực.

b. Trường hợp tiết diện thuộc đầu thừa: giống dầm công xôn.

* Chú ý: Góc α lấy > 0 khi gối tựa A cao hơn gối tựa B và ngược lại.

Ví dụ 1: Vẽ đ.a.h mômen, lực cắt tại tiết diện k, m & A của hệ trên hình (H.3.4a).

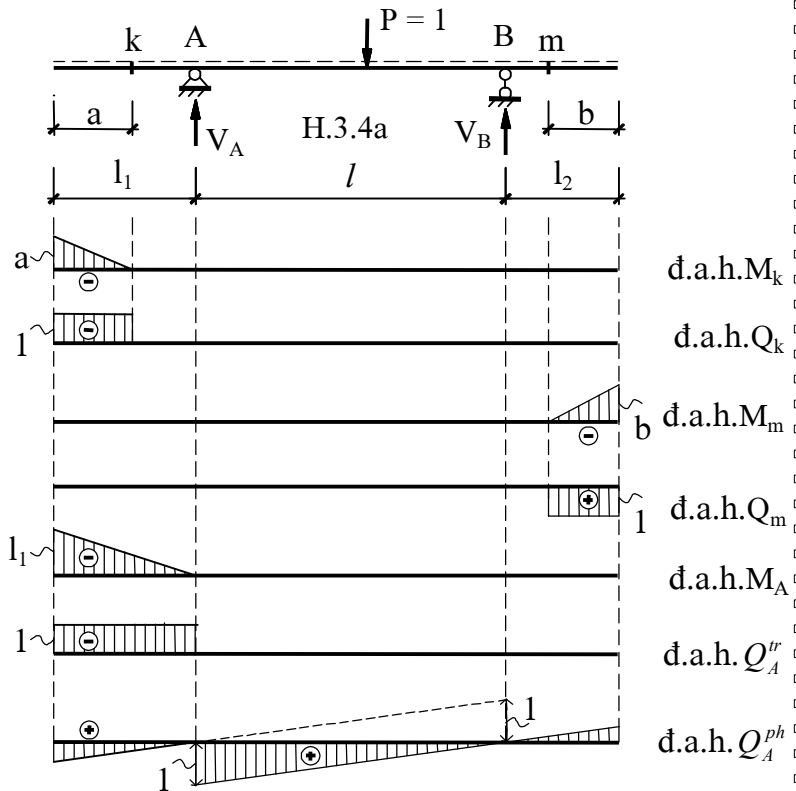
Tiết diện k & m thuộc đầu thừa nên vẽ theo đ.a.h trong dầm công xôn.

Ví dụ 2: Vẽ đ.a.h nội lực tại tiết diện k của hệ trên hình (H.3.4b)

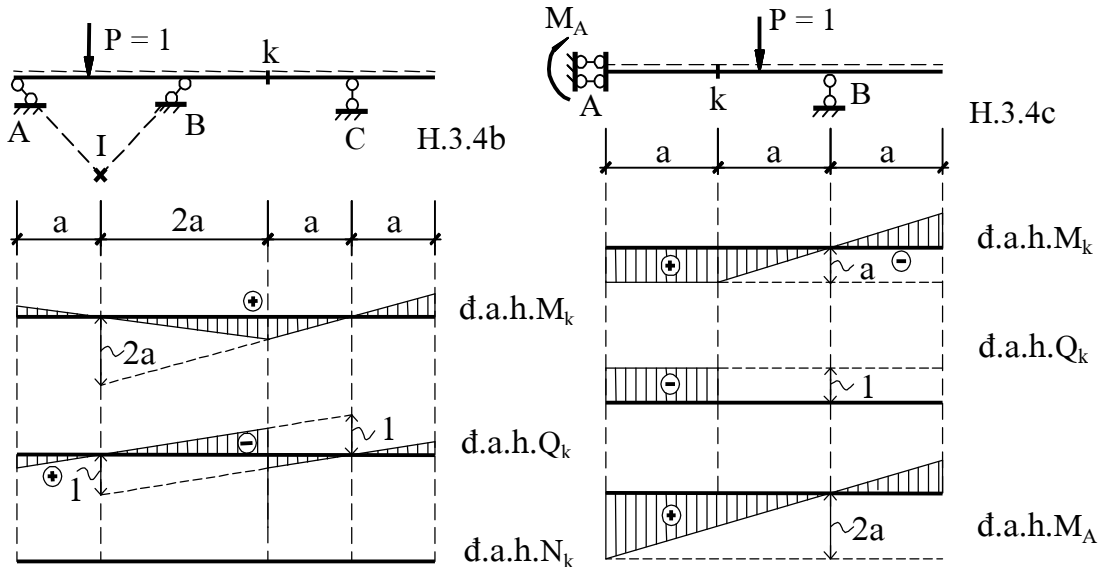
Đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện k của hệ có thể vẽ theo đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện trong nhịp của dầm đơn giản nhịp 3a

Ví dụ 3: Vẽ đ.a.h mômen uốn, lực cắt tại tiết diện k và mômen uốn phản lực gối tựa A của hệ trên hình (H.3.4c)

- Đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện k của hệ có thể vẽ theo đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện trong nhịp của dầm đơn giản có gối trái ở xa vô cùng và gối B



- Đường ảnh hưởng mômen uốn của gối A có thể vẽ theo đường ảnh hưởng nội lực tại tiết diện sát gối A.



III. Đường ảnh hưởng trong hệ khung đơn giản:

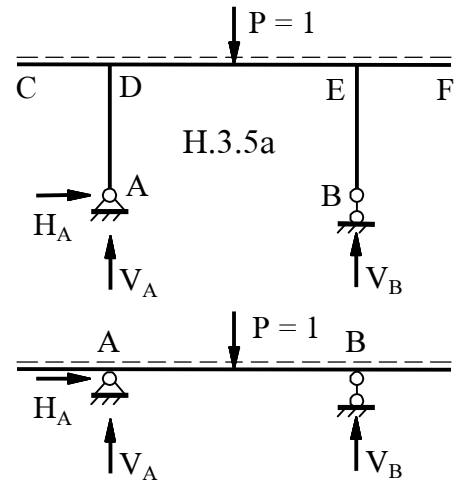
Xét một khung và dầm đơn giản tương ứng.

* Nhận xét:

- Đ.a.h phản lực và nội lực trong thanh CDEF vẽ theo đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản tương ứng.

- Đ.a.h nội lực trong thanh AD & BE vẽ dựa vào liên hệ giữa nội lực trong thanh đó với V_A, V_B .

- Nếu khung ở những dạng khác, tìm cách thiết lập phương trình đường ảnh hưởng hoặc quy về những hệ tương đương đã biết cách vẽ để vẽ.



Ví dụ 1: Vẽ đ.a.h nội lực tại tiết diện k, m, n của hệ trên hình (H.3.5b)

- đ.a.h nội lực tại tiết diện k vẽ theo đ.a.h nội lực tại tiết diện đầu thừa.

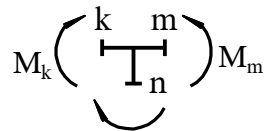
- đ.a.h nội lực tại tiết diện m vẽ theo đ.a.h nội lực tại tiết diện trong nhịp dầm đơn giản tương ứng.

- đ.a.h nội lực tại tiết diện n vẽ theo đ.a.h phản lực tại gối tựa A:

+ đ.a.h. $M_n \equiv (h) \cdot \text{đ.a.h.} H_A \equiv$ đường chuẩn.

+ đ.a.h. $Q_n \equiv (-1) \cdot \text{đ.a.h.} H_A \equiv$ đường chuẩn.

+ đ.a.h. $N_n \equiv (-1) \cdot \text{đ.a.h.} V_A$.



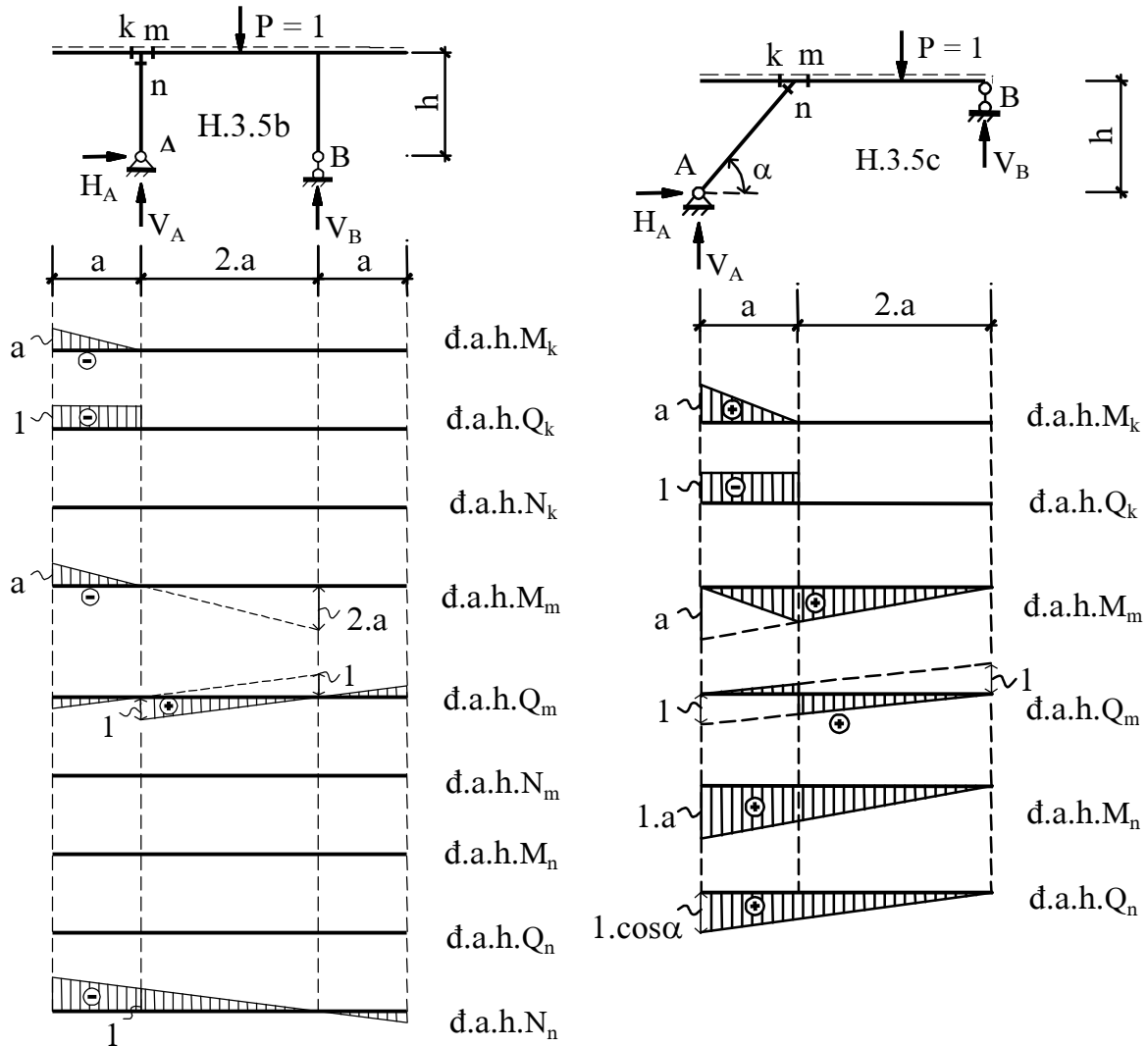
Chú ý: từ sự cân bằng mômen nút khung ta luôn có: M_n

$$\text{đ.a.h.} M_n + \text{đ.a.h.} M_k \equiv \text{đ.a.h.} M_m$$

Ví dụ 2: Vẽ đ.a.h mômen uốn và lực cắt tại tiết diện k, m, n của hệ trên hình (H.3.5c)

- Tiết diện k thuộc đầu thừa.

- Tiết diện m vẽ theo đ.a.h tiết diện trong nhịp dầm đơn giản nhịp 3a.
- Tiết diện n vẽ theo đ.a.h. V_A (đ.a.h. $H_A \equiv$ đường chuẩn).



§3. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ BA KHỚP.

I. Đường ảnh hưởng phản lực: (H.3.6a)

1. Đường ảnh hưởng V_A^d, V_B^d : là đường ảnh hưởng phản lực trong dầm đơn giản tương ứng cùng nhịp.

2. Đường ảnh hưởng của lực xô H:

Xuất phát từ biểu thức: $M_k(z) = M_k^d - H \cdot y_k$

$$\text{Cho } k \equiv C \Rightarrow M_C = 0 \Rightarrow M_C^d - H \cdot y_C = 0 \Rightarrow H = \frac{M_C^d}{y_C} = \frac{M_C^d}{f}.$$

$$\text{Hay } \text{đ.a.h. } H \equiv \frac{1}{f} \cdot \text{đ.a.h. } M_C^d.$$

3. Đường ảnh hưởng phản lực vòm Z:

Ta có $H = Z \cdot \cos\beta \Rightarrow Z = \frac{H}{\cos\beta}$.

Hay đ.a.h. $Z = \frac{1}{\cos\beta} \cdot \text{đ.a.h.H}$

4. Đường ảnh hưởng phản lực đứng V_A, V_B :

Ta có $V_A = V_A^d + H \cdot \text{tg}\beta$;

$V_B = V_B^d - H \cdot \text{tg}\beta$

Hay đ.a.h. $V_A \equiv \text{đ.a.h. } V_A^d + \text{tg}\beta \cdot \text{đ.a.h.H}$.

đ.a.h. $V_B \equiv \text{đ.a.h. } V_B^d - \text{tg}\beta \cdot \text{đ.a.h.H}$

II. Đường ảnh hưởng nội lực:

1. Đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k: (H.3.6b)

a. Phân tích:

Xuất phát từ biểu thức:

$M_k = M_k^d - H \cdot y_k$. Suy ra:

đ.a.h. $M_k \equiv \text{đ.a.h. } M_k^d - (\text{đ.a.h.H}) \cdot y_k$

b. Nhận xét và cách vẽ nhanh:

nhanh:

* Nhận xét:

- Tại gối tựa, tung độ đường ảnh hưởng bằng không.

- Nếu biết được đường phải có thể vẽ được đường ảnh hưởng M_k .

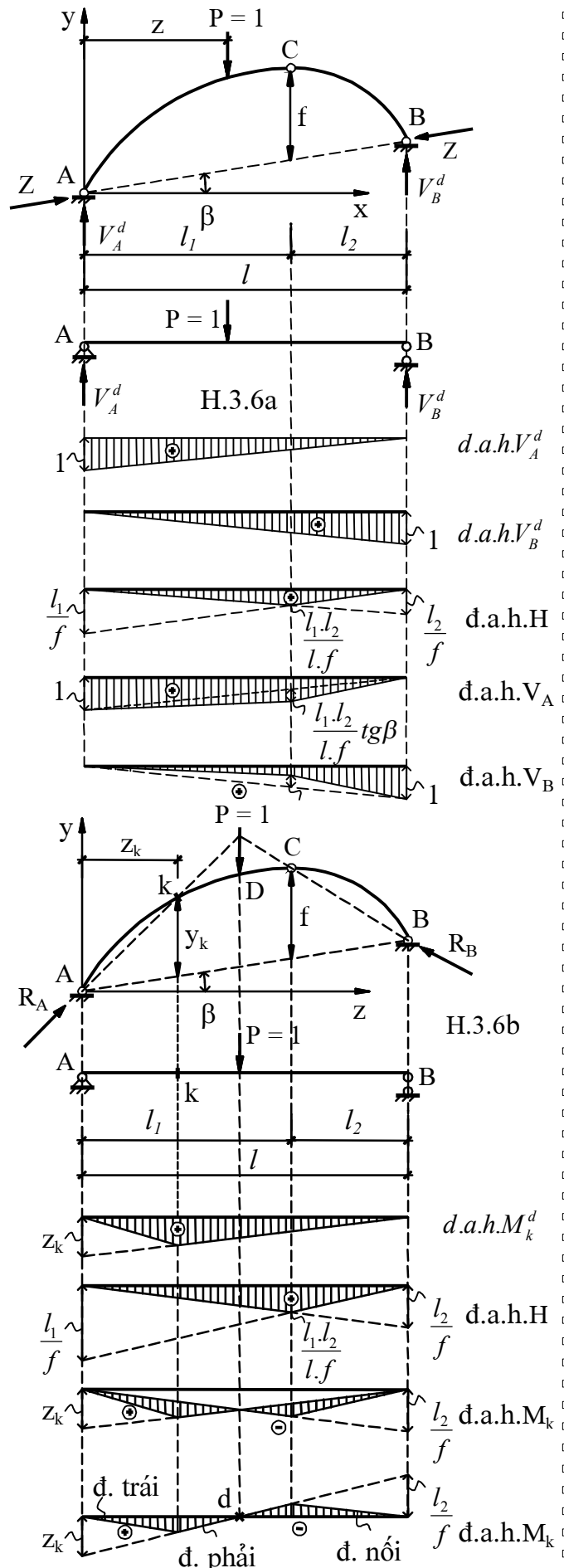
- Đường phải đi qua ba điểm:

+ Tại A, đường phải có tung độ $y = z_k$ (z_k là khoảng cách từ k đến gối A theo phương ngang).

+ Tại B, đường phải có tung độ $y = -\frac{l_2}{f} \cdot y_k$.

+ Điểm không d (là giao điểm của đường phải với đường chuẩn) là điểm ứng dưới điểm D (là giao điểm của Ak với BC).

* Cách vẽ nhanh:



- Vẽ đường phải trước bằng cách xác định hai điểm thuộc đường phải. Điểm tại A và điểm không d thường sử dụng để xác định đường phải.

- Sau khi xác định được phần thích dụng của đường phải, vẽ đường trái và đường nối như sau:

+ Đường nối là đoạn thẳng kẻ tiếp tung độ bằng không tại B.

+ Đường trái vẽ qua tung độ bằng không tại A và điểm chung với đường phải tại k

2. Đường ảnh hưởng lực cắt tại tiết diện k: (H.3.6c)

a. Phân tích:

Ta đã biết rằng:

$$Q_k = Q_k^d \cdot \cos \alpha_k -$$

$$- H \cdot (\sin \alpha_k - \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha_k)$$

Ta suy ra

$$\text{đ.a.h. } Q_k \equiv \cos \alpha_k \cdot (\text{đ.a.h. } Q_k^d) -$$

$$- m \cdot \text{đ.a.h. } H.$$

$$\text{Với } m = \sin \alpha_k - \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha_k$$

b. Nhận xét và cách vẽ

nhanh đường ảnh hưởng Q_k :

* Nhận xét:

- Tung độ bằng không tại các gối tựa.

- Đường trái và đường phải song song nhau.

- Nếu biết được đường phải, có thể vẽ được đường ảnh hưởng Q_k .

- Đường phải đi qua ba điểm:

+ Tại A, có tung độ $y =$

$$+ \cos \alpha_k.$$

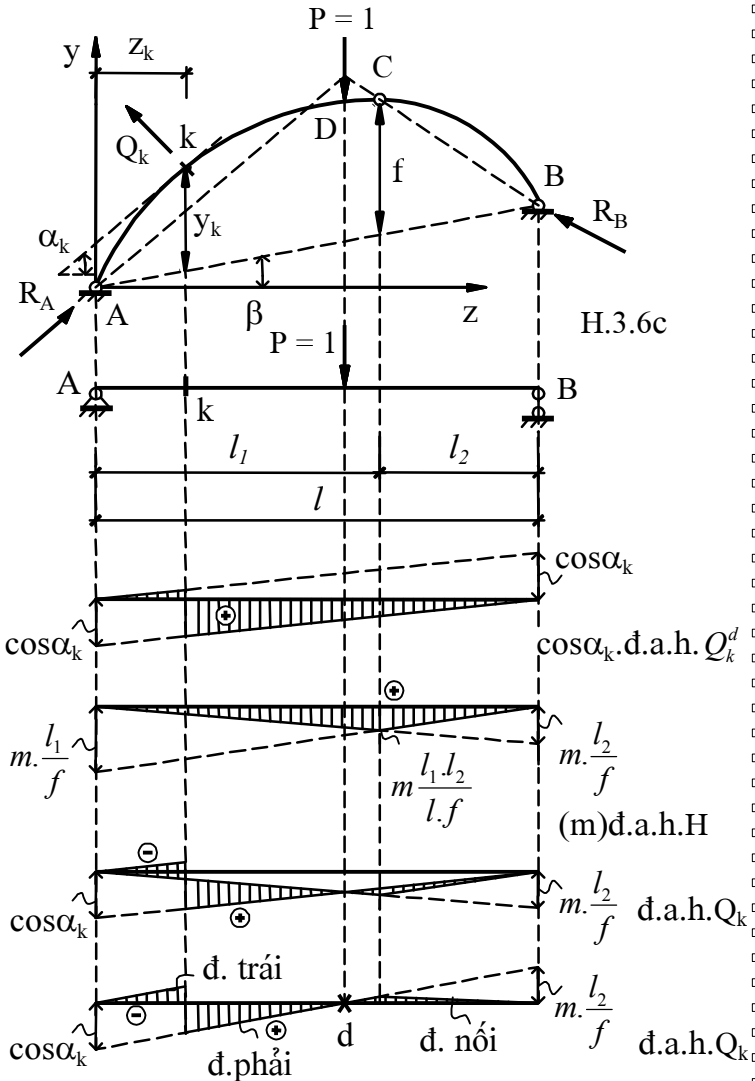
+ Tại B, có tung độ $y =$

$$- \frac{l_2}{f} \cdot m.$$

+ Điểm không d (là giao điểm của đường phải với đường chuẩn) là điểm tương ứng dưới điểm D (là giao điểm của BC với đường thẳng qua A và song song với tiếp tuyến trục vòm tại k).

* Cách vẽ nhanh:

- Vẽ đường phải trước bằng cách xác định hai điểm thuộc đường phải. Điểm tại A và điểm không d thường sử dụng để xác định đường phải.



H.3.6c

- Sau khi xác định được phần thích dụng của đường phải, vẽ đường trái và đường nối như sau:

- + Đường nối là đoạn thẳng kẻ tiếp tung độ bằng không tại B.
- + Đường trái vẽ song song với đường phải và đi qua tung độ bằng không tại A.

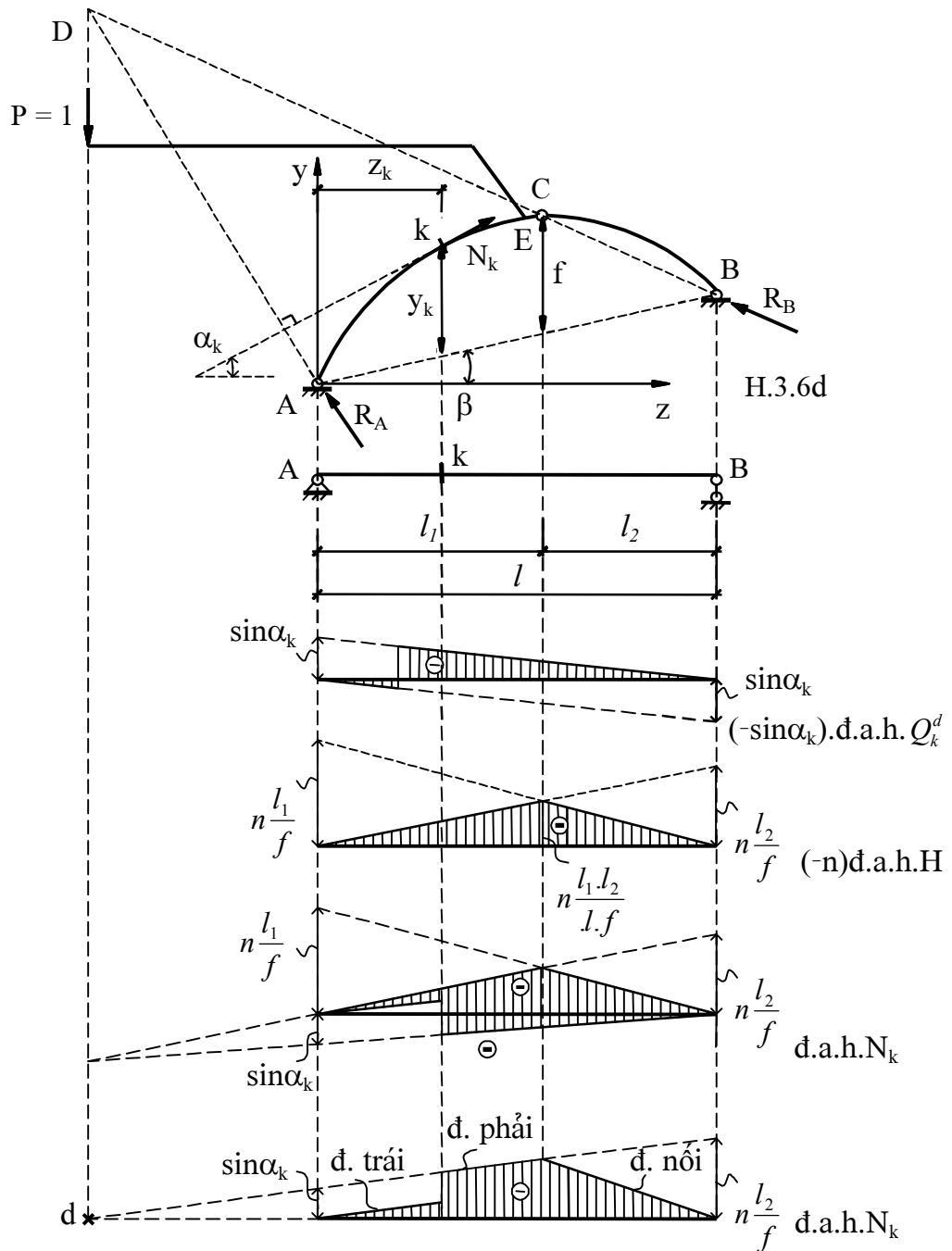
3. Đường ảnh hưởng lực dọc tại tiết diện k: (H.3.6d)

a. Phân tích:

Ta đã biết rằng: $N_k = -Q_k^d \cdot \sin \alpha_k - H \cdot (\cos \alpha_k + \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha_k)$. Ta suy ra

$$\text{đ.a.h.} N_k = -\sin \alpha_k \cdot (\text{đ.a.h.} Q_k^d) - n \cdot \text{đ.a.h.} H$$

$$\text{Với } m = \cos \alpha_k + \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha_k$$



b. Nhận xét và cách vẽ nhanh đường ảnh hưởng N_k :

* Nhận xét:

- Tung độ bằng không tại các gối tựa.
- Đường trái và đường phải song song nhau.
- Nếu biết được đường phải, có thể vẽ được đường ảnh hưởng Q_k .
- Đường phải đi qua ba điểm:
 - + Tại A, có tung độ $y = -\sin\alpha_k$.
 - + Tại B, có tung độ $y = -\frac{l_2}{f}.n$.

+ Điểm không d (là giao điểm của đường phải với đường chuẩn) là điểm tương ứng dưới điểm D (là giao điểm của BC với đường thẳng qua A và vuông góc với tiếp tuyến trục vòm tại k).

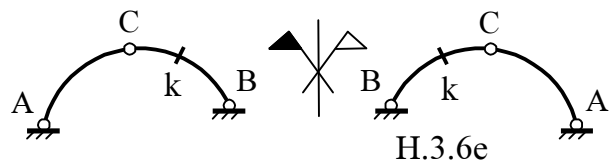
* Cách vẽ nhanh:

- Vẽ đường phải trước bằng cách xác định hai điểm thuộc đường phải. Điểm tại A và điểm không d thường sử dụng để xác định đường phải.
- Sau khi xác định được phần thích dụng của đường phải, vẽ đường trái và đường nối như sau:

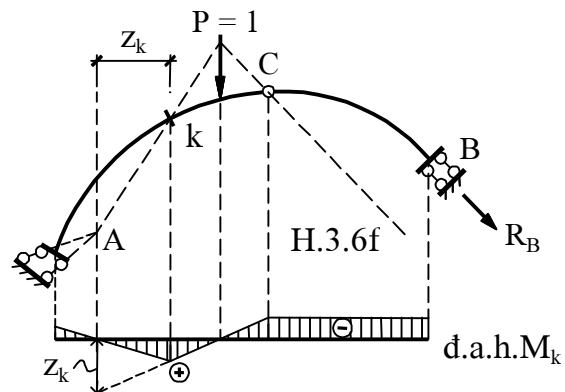
- + Đường nối là đoạn thẳng kẻ tiếp tung độ bằng không tại B.
- + Đường trái vẽ song song với đường phải và đi qua tung độ bằng không tại A.

* Các chú ý:

- Góc β lấy dấu dương khi gối B cao hơn gối A và ngược lại.
- Trường hợp đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc miêng cứng BC (H.3.6e): Nếu lấy đối xứng qua trục thẳng đứng sẽ trở lại bài toán ban đầu. Sau đó, suy ra kết quả trên hệ ban đầu bằng cách lấy đối xứng ngược trở lại. Tuy nhiên, với đường ảnh hưởng lực cắt cần nhân thêm với hệ số -1 (đối chiều tòn độ).

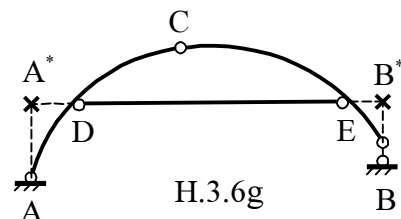


- Có thể mở rộng cho những hệ có cấu tạo tương tự hệ ba khớp với các khớp có thể là khớp thực hay khớp giả tạo (H.3.6f).



- Trường hợp hệ ba khớp có thanh căng (H.3.6g):

- + Nếu đại lượng nghiên cứu nằm ngoài phạm vi thanh căng (AD, BE), vẽ theo đường ảnh hưởng trong dầm đơn giản.



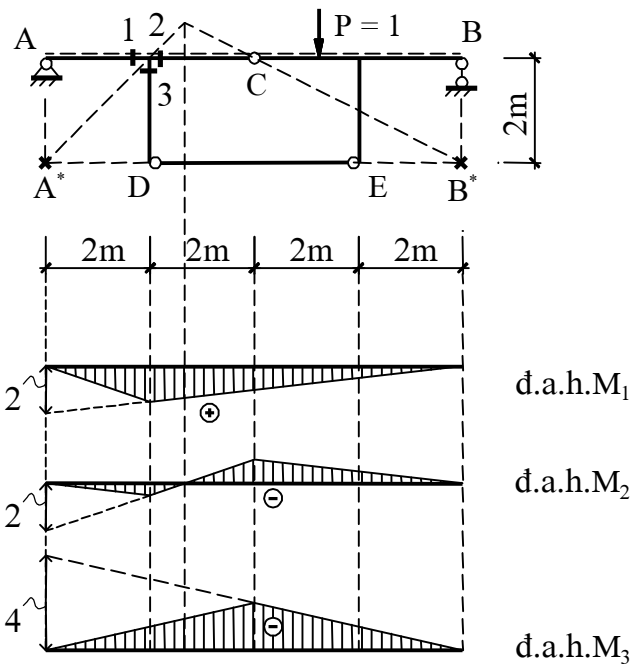
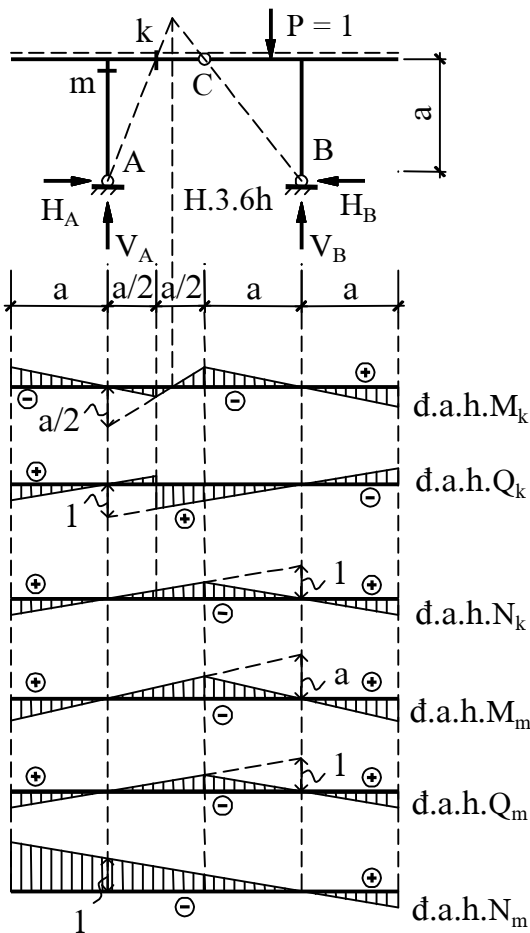
+ Nếu đại lượng nghiên cứu thuộc phạm vi thanh cứng (CEF), vẽ theo đường ảnh hưởng trong hệ ba khớp A*CB*.

+ Nếu lực di động $P = 1$ di động trên thanh cứng, đường ảnh hưởng là đoạn thẳng được vẽ qua hai tung độ tại hai đầu thanh cứng. Đó cũng chính là tung độ của đường ảnh hưởng khi P di động trên miêng cứng. Như vậy, trong trường hợp này, ta đi vẽ đường ảnh hưởng khi cho lực $P = 1$ di động trên miêng cứng, sau đó giữ lại hai tung độ tại hai đầu thanh cứng, rồi nối hai tung độ đó bằng 1 đoạn đường thẳng sẽ xác định được đường ảnh hưởng cần vẽ.

*Ví dụ 1: Vẽ đ.a.h nội lực tại tiết diện k & m của hệ trên hình (H.3.6h)

- Tiết diện k được vẽ theo đ.a.h nội lực trong hệ 3 khớp

- Tiết diện m có thể được vẽ theo đ.a.h phản lực V_A & H_A



H.3.6k

*Ví dụ 2: Vẽ đ.a.h mômen uốn tại tiết diện 1, 2 & 3 của hệ trên hình (H.3.6k)

- Đây là hệ 3 khớp có thanh cứng DE với $P = 1$ di động trên các miêng cứng.

- Các đ.a.h. M_1, M_2, M_3 tuân theo điều kiện cân bằng mômen nút khung.

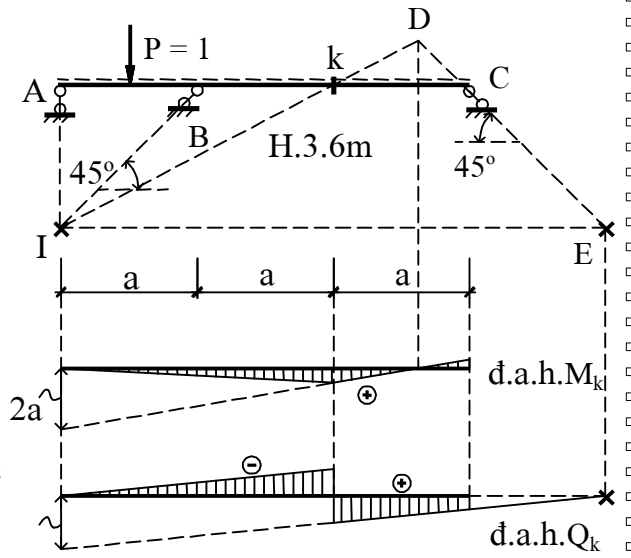
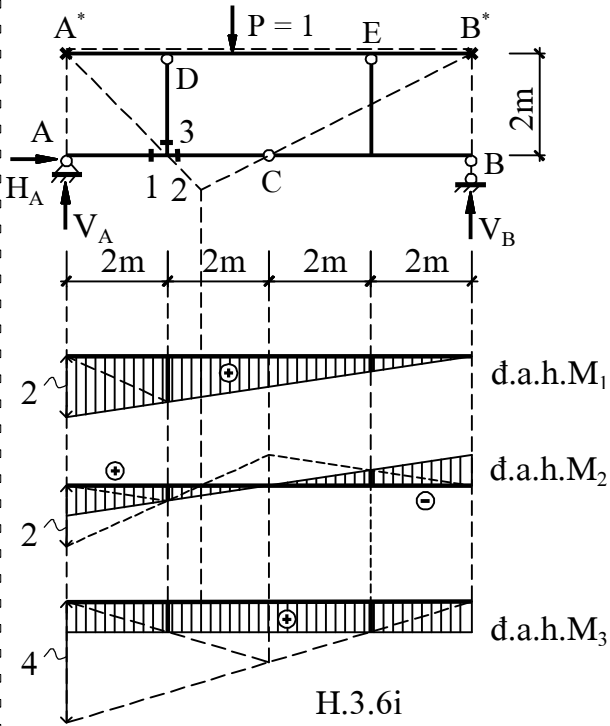
*Ví dụ 3: Vẽ đ.a.h mômen uốn tại tiết diện 1, 2 & 3 của hệ trên hình (H.3.6i)

- Đây là hệ 3 khớp có thanh cứng DE với $P = 1$ di động trên thanh cứng.

- Các đ.a.h. M_1, M_2, M_3 tuân theo điều kiện cân bằng mômen nút khung.

*Ví dụ 4: Vẽ đ.a.h mômen uốn và lực cắt tại tiết diện k của hệ trên hình (H.3.6m)

- đ.a.h. M_k, Q_k có thể được vẽ theo đường ảnh hưởng trong hệ 3 khớp: 1 khớp tại I và 2 khớp tại gối di động C.



§ 4. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ DÀN

Ở đây chỉ trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng trong hệ dàn dầm.

I. Đường ảnh hưởng phản lực:

Cách xác định và vẽ giống như trong hệ dầm đơn giản. Xem minh họa cho hệ dàn dầm trên hình (H.3.7a) & (H.3.7e).

II. Đường ảnh hưởng lực dọc trong các thanh dàn:

1. Phương pháp tách mắt:

* *Nội dung:* Tách mắt có chứa thanh cần vẽ đường ảnh hưởng lực dọc và đi thiết lập phương trình đường ảnh hưởng của nó ứng với các trường hợp của lực tập trung $P = 1$ di động trên dàn: đứng ngay tại mắt đang xét, di động ngoài phạm vi các chốt bị cắt và di động trên các chốt bị cắt.

Xét hệ dàn trên hình (H.3.7a).

Ta trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng lực dọc trong các thanh 2 - 11, 4 - 9 & 2 - 12.

a. đ.a.h. N_{11-2} :

Tách mắt 11 và thiết lập phương trình đường ảnh hưởng ứng với các trường hợp của lực $P = 1$ di động:

- $P = 1$ đặt ngay tại mắt bị cắt

($z = 0$) (H.3.7b):

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{11-2} + V_A - P = 0$$

Lúc này $V_A = 1$

$$\text{Suy ra } N_{11-2} = P - V_A = 0.$$

- Khi $P = 1$ di động ngoài phạm vi các chốt bị cắt ($z = -d$ hoặc $d \leq z \leq 4d$) (H.3.7c):

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{11-2} + V_A = 0$$

$$\Rightarrow N_{11-2} = -V_A.$$

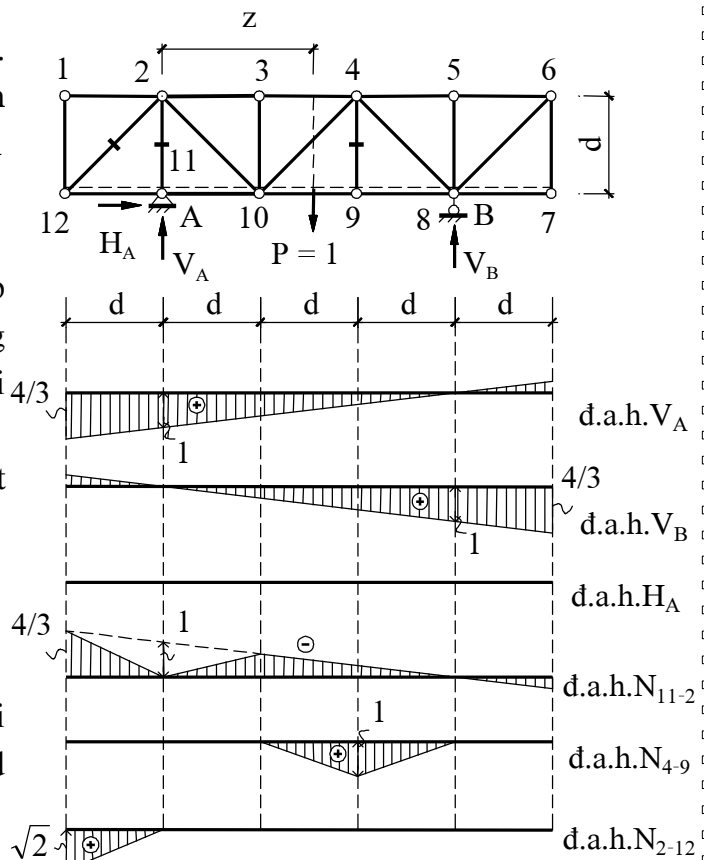
$$\Rightarrow \text{đ.a.h. } N_{11-2} \equiv (-1) \cdot \text{đ.a.h. } V_A.$$

- Khi $P = 1$ di động trên các chốt bị cắt ($-d \leq z \leq d$): đường ảnh hưởng trên các chốt này là những đoạn đường thẳng nối liền các tung độ ứng dưới mỗi mắt của chốt bị cắt.

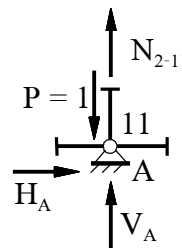
b. đ.a.h. N_{4-9} :

Tương tự, tách mắt 9:

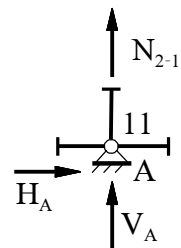
- $P = 1$ đặt ngay tại mắt 9 ($z = 2d$) (H.3.7d):



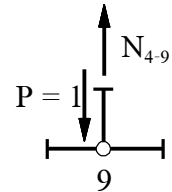
H.3.7a



H.3.7b



H.3.7c



H.3.7d

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{4-9} - P = 0 \Rightarrow N_{4-9} = P = 1.$$

- P = 1 di động ngoài phạm vi các đốt bị cắt ($-d \leq z \leq d$ hoặc $3d \leq z \leq 4d$):

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{4-9} = 0. \text{ (Hệ quả 2)}$$

Có nghĩa là đ.a.h. N_{4-9} trên đoạn này trùng với đường chuẩn.

- Khi P = 1 di động trên các đốt bị cắt ($2d \leq z \leq 4d$): đường ảnh hưởng trên các đốt này là những đoạn đường thẳng nối liền các tung độ ứng dưới mỗi mắt của đốt bị cắt.

c. đ.a.h. N_{2-12} :

Tương tự, dễ thấy khi P = 1 đặt tại mắt 12 thì $N_{2-12} = \sqrt{2}$; khi P = 1 di động bên ngoài đốt bị cắt thì $N_{2-12} = 0$.

2. Phương pháp mặt cắt đơn giản:

* *Nội dung*: Thực hiện "mặt cắt đơn giản" qua thanh cần vẽ đường ảnh hưởng và đi thiết lập phương trình đường ảnh hưởng của nó ứng với các trường hợp của lực P = 1 di động trên dàn: bên trái đốt bị cắt, bên phải đốt bị cắt và trên đốt bị cắt.

Xét hệ dàn trên hình (H.3.7e). Ta trình bày cách vẽ đường ảnh hưởng lực dọc trong các thanh 2 - 3, 11 - 10 & 4-10.

a. đ.a.h. N_{2-3} :

Thực hiện mặt cắt (1 - 1) qua thanh 2 - 3 và thiết lập phương trình đường ảnh hưởng N_{2-3} ứng với các trường hợp của lực P = 1 di động:

- P = 1 di động bên trái đốt bị cắt ($0 \leq z \leq d$):

$$\sum M_{12}'' = 0 \Rightarrow N_{2-3} \cdot h - P \cdot (2d - z) = 0$$

$$\Rightarrow N_{2-3} = \frac{(2d - z)}{h}$$

Cho z biến thiên, vẽ được đ.a.h. N_{2-3} .

- P = 1 di động bên phải đốt bị cắt ($2d \leq z \leq 6d$):

$$\sum M_{12}'' = 0 \Rightarrow N_{2-3} \cdot h = 0 \Rightarrow N_{2-3} = 0.$$

Như vậy, trên đoạn này, đ.a.h. N_{2-3} vẽ trùng với đường chuẩn.

- P = 1 di động trên đốt bị cắt ($d \leq z \leq 2d$): đường ảnh hưởng trên đốt này là đoạn đường thẳng nối liền các tung độ ứng dưới mỗi mắt của đốt bị cắt.

b. đ.a.h. N_{10-11} :

Thực hiện mặt cắt (2 - 2) qua thanh 11 - 10 và thiết lập phương trình đường ảnh hưởng N_{10-11} ứng với các trường hợp của lực P = 1 di động:

- P = 1 di động bên trái đốt bị cắt ($0 \leq z \leq 3d$):

$$\sum M_4^{ph} = 0 \Rightarrow N_{10-11} \cdot h - V_B \cdot 2d = 0$$

$$\Rightarrow N_{2-3} = \frac{V_B \cdot 2d}{h}$$

$$\Rightarrow \text{đ.a.h. } N_{10-11} \equiv \left(\frac{2d}{h} \right) \cdot \text{đ.a.h. } V_B$$

- P = 1 di động bên phải đốt bị cắt ($4d \leq z \leq 6d$):

$$\sum M_4^r = 0 \Rightarrow -N_{10-11} \cdot h + V_A \cdot d = 0$$

$$\Rightarrow N_{10-11} = \frac{V_A \cdot d}{h}$$

$$\Rightarrow \text{đ.a.h.} N_{10-11} \equiv \left(\frac{d}{h}\right) \cdot \text{đ.a.h.} V_A$$

- $P = 1$ di động trên dốt bị cắt
 (3d ≤ z ≤ 4d): đường ảnh hưởng trên dốt này là đoạn đường thẳng nối liền các tung độ ứng dưới mỗi mắt của dốt bị cắt.

c. đ.a.h. N_{4-10} :

Tương tự như trường hợp đ.a.h. N_{10-11} và phương trình đường cần thiết lập cho mỗi trường hợp của $P = 1$ di động lúc này là $\sum Y = 0$.

** Chú thích:*

- Trong phương pháp mặt cắt đơn giản, điểm lấy mômen khi viết phương trình cân bằng gọi là tâm mômen. Đường trái và đường phải cắt nhau tại tâm mômen

- Trong trường hợp không thể dùng được phương pháp tách mắt hay mặt cắt đơn giản để vẽ, có thể sử dụng phương pháp mặt cắt phối hợp hoặc vẽ trước một số đường ảnh hưởng có liên quan, rồi từ những mối liên hệ về nội lực suy ra đường ảnh hưởng cần vẽ.

- Trong một số bài toán phức tạp, có thể vẽ đường ảnh hưởng bằng cách: Đặt $P = 1$ lần lượt trên các mắt và đi xác định tung độ đường ảnh hưởng cần vẽ tương ứng. Sau đó, nối các tung độ này bằng các đoạn đường thẳng trong phạm vi mỗi dốt sẽ được đường ảnh hưởng cần vẽ.

- Khi sử dụng phương pháp mặt cắt đơn giản để vẽ đường ảnh hưởng lực dọc, có thể sử dụng cách vẽ đường ảnh hưởng của nội lực trong dầm đơn giản. Cách tiến hành như sau:

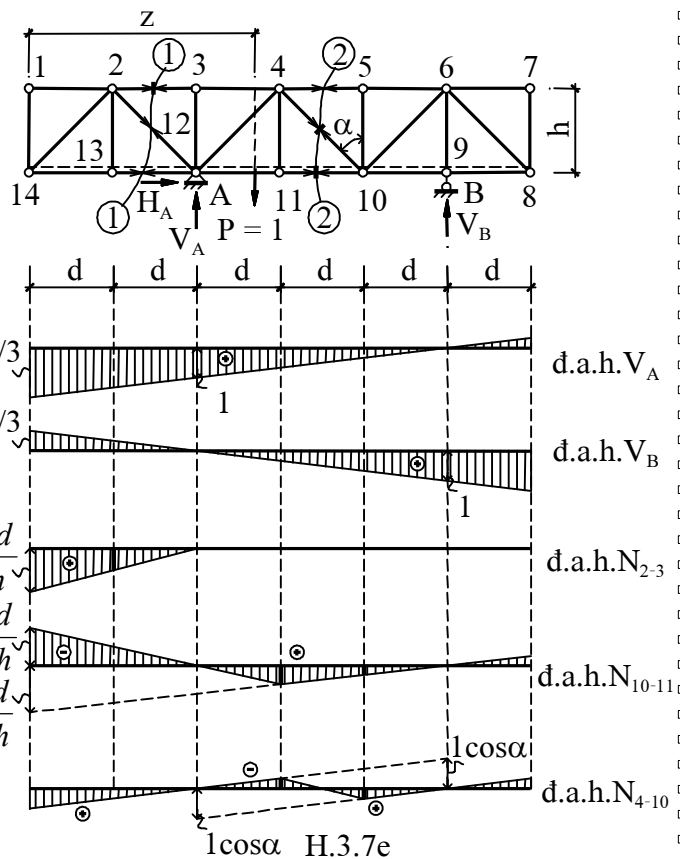
a. Nếu hai thanh còn lại của mặt cắt giao nhau tại tâm mômen I:

Biểu thức xác định lực dọc có thể viết dưới dạng: $N = \pm \frac{M_I}{r}$.

+ M_I là mômen uốn trong dầm đơn giản tương ứng tại I' (I' là vị trí tương ứng dưới tâm mômen I).

+ r là khoảng cách từ tâm mômen I đến phương của lực dọc N.

+ Biểu thức lấy dấu (+) khi lực dọc N dương tác dụng lên phần hệ bên trái quay ngược chiều kim đồng hồ quanh I và ngược lại. Từ đây suy ra cách vẽ nhanh đ.a.h.N:



vẽ đ.a.h. M_T trong dầm đơn giản phụ trợ rồi nhân với một lượng $\pm \frac{1}{r}$. Phần thích dụng của đường trái, đường phải là thuộc đường xe chạy và nằm bên trái và bên phải đôt bị cắt; trong phạm vi đôt bị cắt dùng đường nối.

b. Nếu hai thanh còn lại của mặt cắt song song nhau:

Biểu thức xác định lực dọc có thể viết dưới dạng: $N = \pm \frac{Q}{\sin \gamma}$.

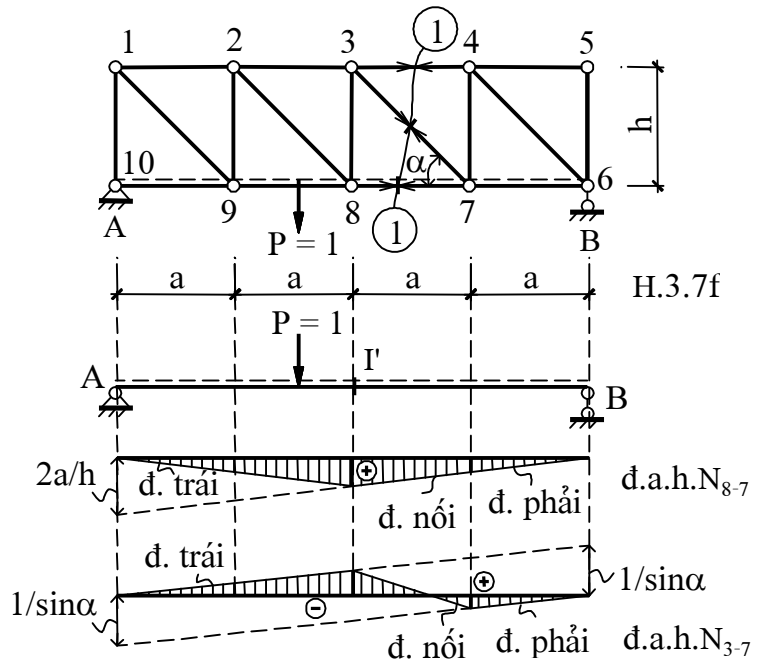
+ Q là lực cắt trong dầm đơn giản tương ứng cùng phương với hai thanh song song và lấy tại vị trí bất kỳ ứng dưới đôt bị cắt thuộc đường xe chạy.

+ γ là góc nghiêng của thanh cần vẽ đường ảnh hưởng so với phương của hai thanh song song.

+ Biểu thức lấy dấu (+) khi lực dọc N dương tác dụng lên phần bên trái hướng xuống dưới so với hai thanh song song.

Từ đây suy ra cách vẽ nhanh đ.a.h.N: vẽ đ.a.h.Q trong dầm đơn giản phụ trợ (lấy tại tiết diện bất kỳ ứng dưới đôt bị cắt thuộc đường xe chạy) rồi nhân với một lượng $\pm \frac{1}{\sin \lambda}$. Phần thích dụng của đường trái, đường phải là thuộc đường xe chạy và nằm bên trái và bên phải đôt bị cắt. Trong phạm vi đôt bị cắt dùng đường nối.

Ví dụ: Vẽ đ.a.h. N_{8-7} & đ.a.h. N_{3-7} (H.3.7f)



§ 5. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ GHÉP

I. Nguyên tắc chung:

- Phân tích cấu tạo hình học của hệ, xác định đâu là hệ phụ, hệ chính, hệ trung gian.

- Phân chia hệ thành những hệ đơn giản, hệ phụ tựa lên hệ chính.

II. Cách vẽ đường ảnh hưởng:

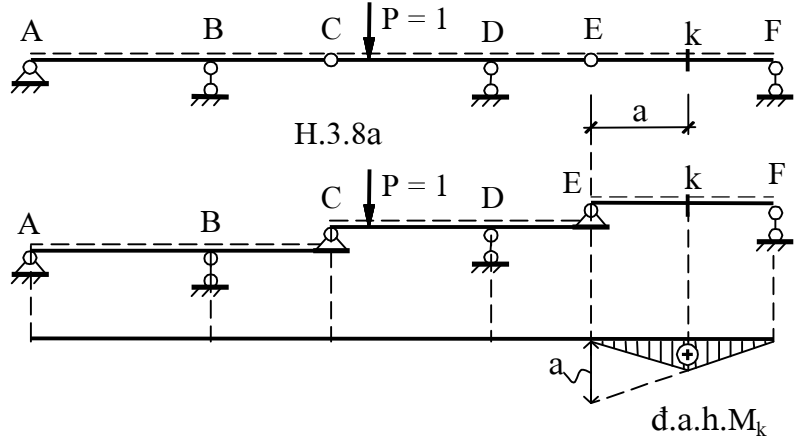
1. Đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc hệ phụ:

a. Phân tích:

Xét hệ ghép trên hình vẽ (H.3.8a), vẽ đ.a.h. M_k .

- Khi $P = 1$ di động trên hệ phụ EF: có thể xem EF như dầm đơn giản độc lập và dễ dàng vẽ được đ.a.h. M_k .

- Khi $P = 1$ di động trên các phần hệ còn lại: theo tính chất của hệ ghép (hệ chính không gây ra áp lực lên hệ phụ), nên đ.a.h. M_k vẽ trùng với đường chuẩn.



b. Quy tắc vẽ:

- Khi $P = 1$ di động trên hệ phụ có chứa đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng: ta xem hệ phụ như một hệ đơn giản làm việc độc lập và vẽ đường ảnh hưởng theo cách đã biết.

- Khi $P = 1$ di động trên hệ chính và các hệ không liên quan: đường ảnh hưởng tương ứng vẽ trùng đường chuẩn.

2. Đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng thuộc hệ chính hoặc hệ trung gian:

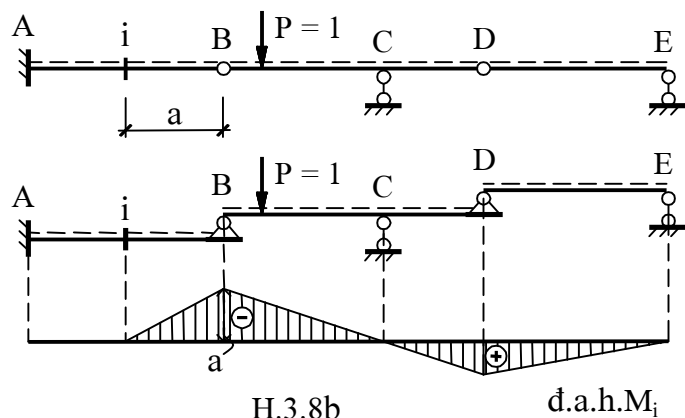
a. Phân tích:

Xét hệ ghép trên hình vẽ (H.3.8b), vẽ đ.a.h. M_i .

- Khi $P = 1$ di động trên hệ chính AB: lúc này, các hệ phụ không làm việc, có thể loại bỏ chúng, xem AB như dầm côngxôn và vẽ được đ.a.h. M_i .

- Khi $P = 1$ di động trên hệ BCD: đường ảnh hưởng M_i là đoạn đường thẳng vẽ qua hai điểm: tung độ bằng không dưới gối tựa C và tung độ chung với hệ chính AB tại nút B.

- Khi $P = 1$ di động trên hệ DE: tương tự như trên hệ BCD.



b. Quy tắc vẽ:

- Khi $P = 1$ di động trên hệ có chứa đại lượng cần vẽ đường ảnh hưởng: cô lập hệ đó và vẽ đường ảnh hưởng.

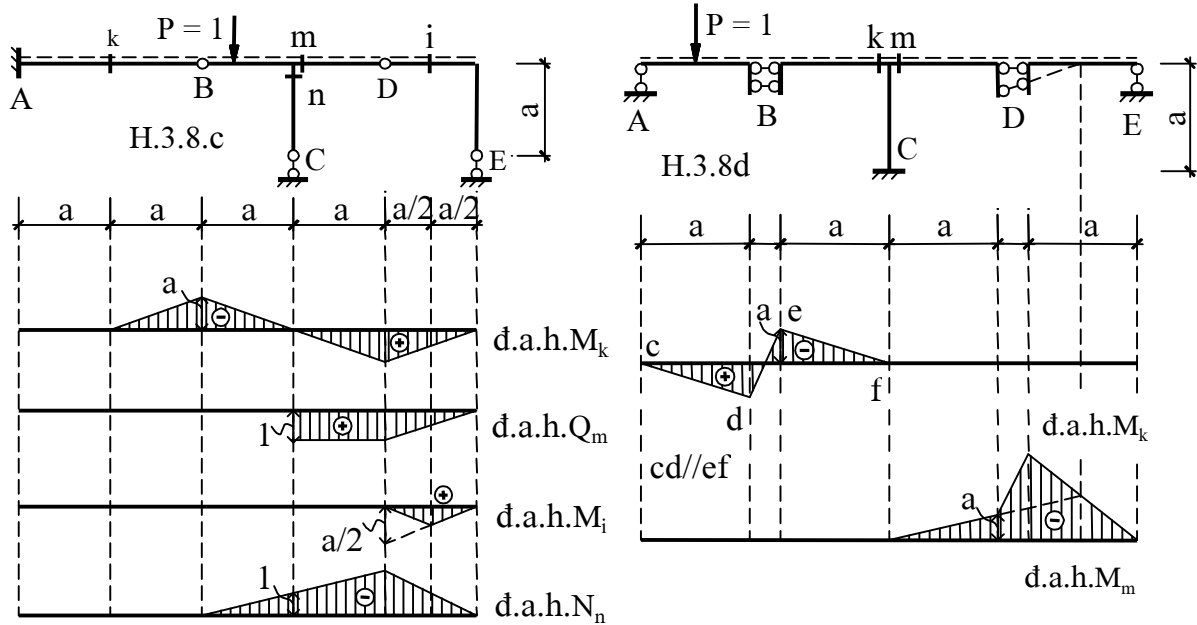
- Khi $P = 1$ di động trên những hệ kế tiếp:

+ Nếu hệ kế tiếp là hệ chính so với hệ đang xét: đường ảnh hưởng vẽ trùng với đường chuẩn.

+ Nếu hệ kế tiếp là hệ phụ so với hệ đang xét: đường ảnh hưởng sẽ là đoạn thẳng kế tiếp và đi qua tung độ bằng không tại vị trí gối tựa nối đất thẳng đứng hoặc khớp đầu tiên thuộc một hệ chính khác.

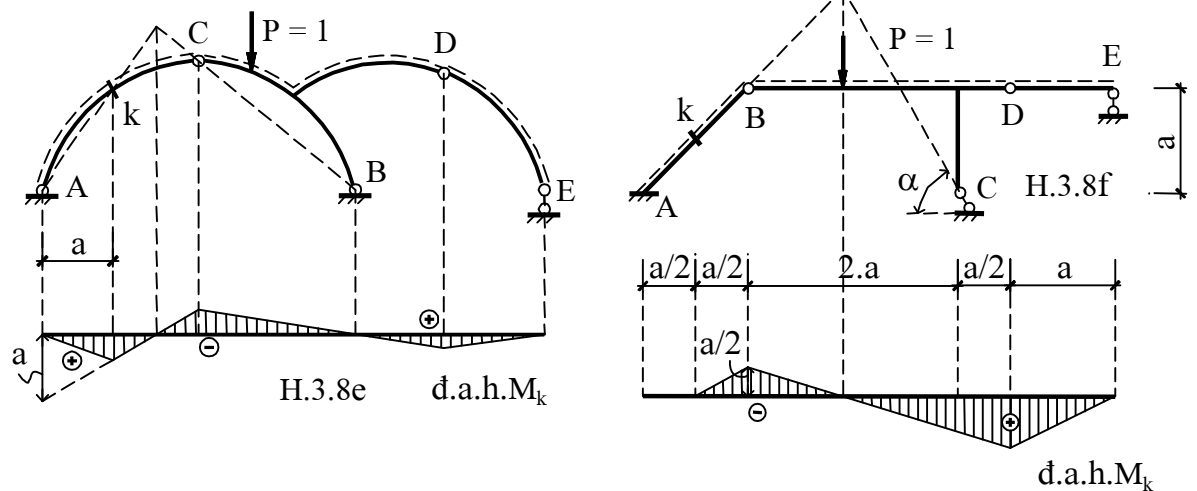
Ví dụ 1: Vẽ đ.a.h. M_k , đ.a.h. Q_m , đ.a.h. M_p , đ.a.h. N_n (H.3.8c)

Ví dụ 2: Vẽ đ.a.h. M_k , đ.a.h. M_m (H.3.8d)



Ví dụ 3: Vẽ đ.a.h. M_k (H.3.8e)

Ví dụ 4: Vẽ đ.a.h. M_k (H.3.8f)



§ 6. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG TRONG HỆ CÓ HỆ THỐNG TRUYỀN LỰC

Ở đây chỉ quan tâm vẽ đường ảnh hưởng đại lượng S thuộc kết cấu chịu lực chính. Nguyên tắc vẽ là đi phân tích và so sánh sự làm việc của hệ không có hệ thống truyền lực với hệ có hệ thống truyền lực chịu tải trọng $P = 1$ di động:

- Đường ảnh hưởng gồm các đoạn đường thẳng, mỗi đoạn tương ứng với từng dầm dọc phụ.

- Khi $P = 1$ đặt trên các mắt truyền lực gây ra ảnh hưởng như khi đứng trực tiếp trên kết cấu chịu lực chính

Các bước tiến hành như sau:

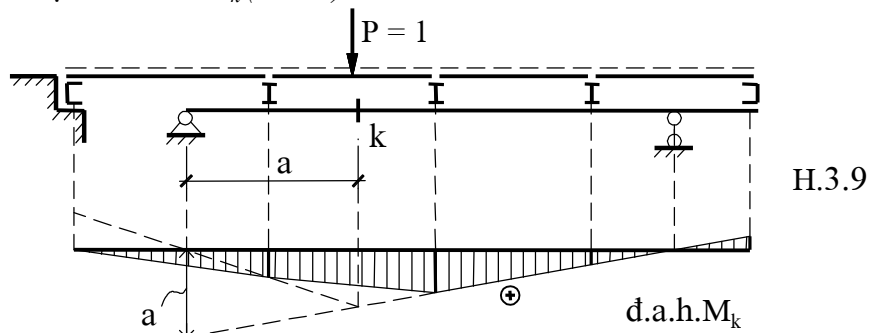
* *Bước 1:* Vẽ đ.a.h.S với giả thiết $P = 1$ di động trực tiếp trên kết cấu chịu lực chính.

* *Bước 2:* Giữ lại các tung độ của đ.a.h.S vừa vẽ tại những vị trí dưới các mắt truyền lực. Các tung độ này cũng chính là các tung độ đ.a.h.S khi $P = 1$ di động trên hệ thống truyền lực.

* *Bước 3:* Lần lượt nối các tung độ vừa giữ lại ở trên trong phạm vi từng dốt bằng các đoạn thẳng, sẽ được đ.a.h.S cần vẽ.

* *Chú ý:* Khi $P = 1$ đặt tại mắt tựa trên trái đất, tung độ đ.a.h.S tại vị trí này bằng không.

Ví dụ: Vẽ đ.a.h. M_k (H.3.9)

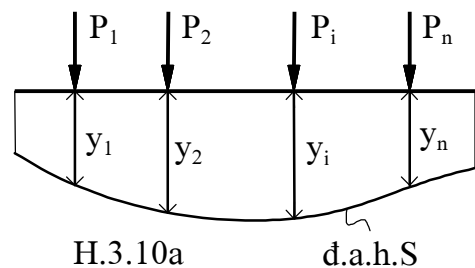


§ 6. XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA ĐẠI LƯỢNG NGHIÊN CỨU ỨNG VỚI CÁC DẠNG TẢI TRỌNG KHÁC NHAU BẰNG ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG CỦA NÓ.

I. Tải trọng tập trung:

Giả sử trên công trình chịu các lực tập trung P_1, P_2, \dots, P_n cùng phương tác dụng. Gọi y_1, y_2, \dots, y_n là các tung độ tương ứng dưới các tải trọng tập trung của đường ảnh hưởng của đại lượng nghiên cứu S trên công trình do lực tập trung $P = 1$ cùng phương với các lực tập trung P_1, P_2, \dots, P_n di động trên công trình gây ra (H.3.10a).

Yêu cầu: Xác định giá trị của đại lượng S do các lực tập trung gây ra bằng đường ảnh hưởng của nó.



Theo ý nghĩa tung độ đường ảnh hưởng, giá trị của đại lượng S do riêng P_i gây ra:

$$S_i = P_i \cdot y_i.$$

Theo nguyên lý cộng tác dụng, suy ra:

$$S = \sum S_i = \sum_{i=1}^n P_i \cdot y_i$$

* *Chú thích:*

- $P_i > 0$ khi cùng chiều với $P = 1$ dùng để vẽ đ.a.h.S và ngược lại.

- Dấu của y_i lấy theo dấu của đường ảnh hưởng.

- Trường hợp đ.a.h.S có bước nhảy tại vị trí tương ứng lực P_i (H.3.10b) thì đại lượng S do riêng P_i gây ra sẽ có hai giá trị tương ứng với bên trái và bên phải tiết diện có bước nhảy:

$$S_i^{tr} = P_i \cdot y_i^{ph} \text{ và } S_i^{ph} = P_i \cdot y_i^{tr}$$

**Ví dụ:* Cho hệ có sơ đồ tính như trên hình vẽ (H.3.10c). Yêu cầu: Tính mômen và lực cắt tại tiết diện k theo hai cách:

- Sử dụng biểu đồ (M) và (Q).

- Sử dụng đ.a.h. M_k và đ.a.h. Q_k .

a. Sử dụng biểu đồ nội lực:

Các biểu đồ (M), (Q) được vẽ trên hình (H.3.10c). Từ đó, suy ra:

$$M_k = 11,2(\text{T.m}), Q_k^{tr} = 1,8(\text{T}),$$

$$Q_k^{ph} = -1,2(\text{T})$$

b. Sử dụng đ.a.h. M_k , đ.a.h. Q_k :

- Các đ.a.h. M_k , đ.a.h. Q_k được vẽ trên hình

- Xác định M_k :

$$M_k = \sum_{i=1}^3 P_i \cdot y_i = P_1 \cdot 1,2 + P_2 \cdot 2,4 + P_3 \cdot 0,8 = 2 \cdot 1,2 + 3 \cdot 2,4 + 2 \cdot 0,8 = 11,2(\text{T.m})$$

- Xác định Q_k : Do đ.a.h. Q_k có bước nhảy tại vị trí lực tập trung P_2 nên Q_k do P_2 gây ra sẽ có 2 giá trị.

$$Q_k^{tr} = P_1 \cdot (-0,2) + P_2 \cdot 0,6 + P_3 \cdot 0,2 = 2 \cdot (-0,2) + 3 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,2 = 1,8(\text{T.m})$$

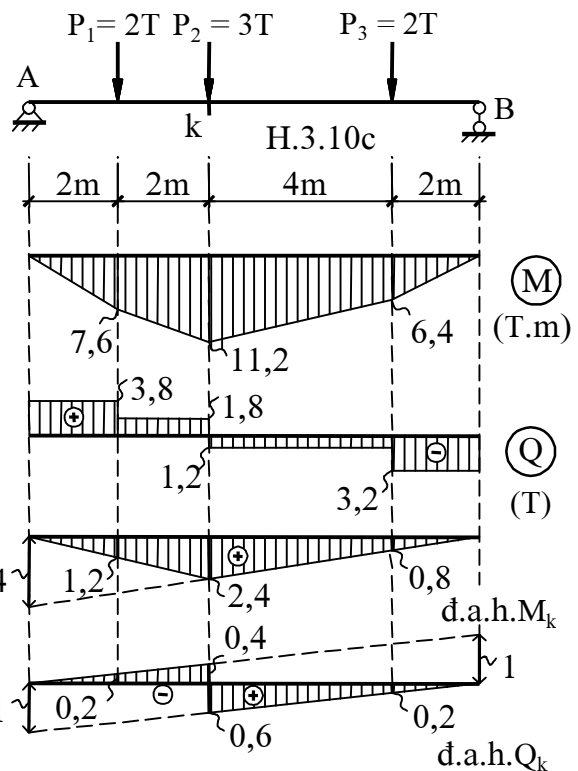
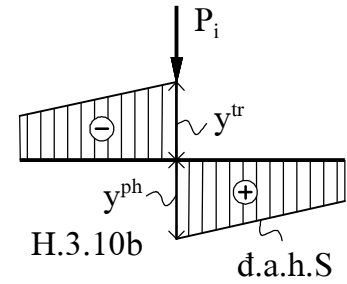
$$Q_k^{ph} = P_1 \cdot (-0,2) + P_2 \cdot (-0,4) + P_3 \cdot 0,2 = 2 \cdot (-0,2) + 3 \cdot (-0,4) + 2 \cdot 0,2 = -1,2(\text{T.m})$$

* *Nhận xét:* Kết quả của hai cách tính là như nhau.

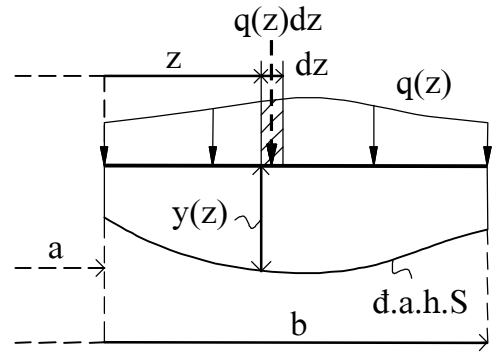
II. Tải trọng phân bố:

Giả sử trên công trình chịu tải trọng phân bố có cường độ $q(z)$. Đường ảnh hưởng đại lượng S do $P = 1$ cùng phương với lực phân bố $q(z)$ di động trên công trình có phương trình $y = y(z)$ (H.3.10d).

Yêu cầu: Xác định giá trị của đại lượng S do $q(z)$ gây ra bằng đường ảnh hưởng của nó.



Xét ảnh hưởng của một phân tố tải trọng có chiều dài dz . Xem phân tố này như một lực tập trung với giá trị $q(z).dz$. Gọi y là tung độ đường ảnh hưởng tương ứng dưới phân tố tải trọng $q(z).dz$.



H.3.10d

Suy ra: $dS = q(z).dz.y(z)$

Suy ra: $S_{a-b} = \int_a^b y(z).q(z).dz$

Trường hợp tải trọng phân bố đều ($q = \text{const}$):

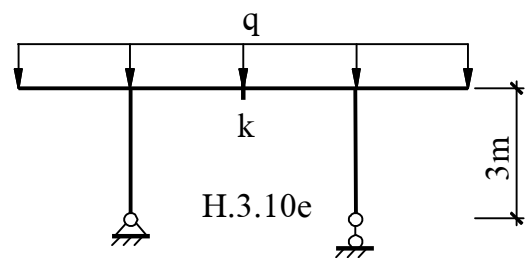
$S_{a-b} = q.\omega_a^b$

ω_a^b là diện tích phần biểu đồ đường ảnh hưởng bên dưới tải trọng phân bố đều trên đoạn $[a, b]$.

* *Chú thích:*

- q có giá trị dương khi nó cùng chiều với lực $P=1$ dùng để vẽ đ.a.h.S
- Dấu của ω_a^b lấy theo dấu của đường ảnh hưởng.

**Ví dụ:* Xác định M_k & Q_k bằng đường ảnh hưởng của nó. Hệ có sơ đồ cho trên hình (H.3.10e)



H.3.10e

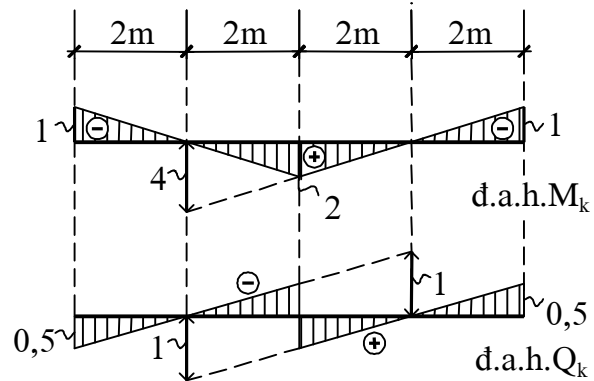
- Các đ.a.h. M_k & đ.a.h. Q_k được vẽ trên hình vẽ.

- Xác định M_k

$M_k = q.\varpi = q.\left(\frac{-1.2}{2}\right) + q.\left(\frac{1.4}{2}\right) + q.\left(\frac{-1.2}{2}\right) = 0$

- Xác định Q_k :

$Q_k = q.\left(\frac{0,5.2}{2}\right) + q.\left(\frac{-0,5.2}{2}\right) + q.\left(\frac{0,5.2}{2}\right) + q.\left(\frac{-0,5.2}{2}\right) = 0$

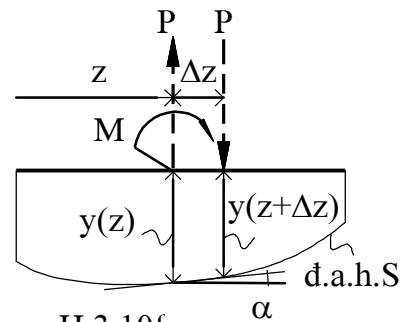


III. Mômen tập trung:

Giả sử trên công trình chịu tác dụng của mômen tập trung M và đại lượng nghiên cứu S có đường ảnh hưởng đã biết (H.3.10f).

Yêu cầu: Xác định giá trị của đại lượng S do M gây ra bằng đường ảnh hưởng của nó.

Thay thế M bằng cặp ngẫu lực $P = \frac{M}{\Delta z} (\Delta z \rightarrow 0)$



H.3.10f

Theo công thức cho trường hợp tải tập trung, ta có:

$$S = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [P \cdot y(z + \Delta z) - P \cdot y(z)] = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} M \left[\frac{y(z + \Delta z) - y(z)}{\Delta z} \right] = M \cdot y'(z)$$

$$S = M \cdot \text{tg}\alpha.$$

Trường hợp trên công trình có nhiều mômen tập trung: M_1, M_2, \dots, M_n .

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \text{tg}\alpha_i$$

* *Chú thích:*

- M lấy dấu dương khi có chiều thuận chiều kim đồng hồ.

- $\text{tg}\alpha$ có dấu dương khi đường ảnh hưởng đồng biến

khi qua điểm đặt M.

- Nếu đường ảnh hưởng có điểm gãy tương ứng tại điểm đặt mômen M (H.3.10g), đại lượng S sẽ có hai giá trị tương ứng bên trái và bên phải điểm gãy:

$$S^{\text{tr}} = M \cdot \text{tg}\alpha^{\text{ph}}; \quad S^{\text{ph}} = M \cdot \text{tg}\alpha^{\text{tr}}$$

* *Ví dụ:* Xác định M_k bằng đường ảnh hưởng của nó. Hệ có sơ đồ cho trên hình (H.3.10.h)

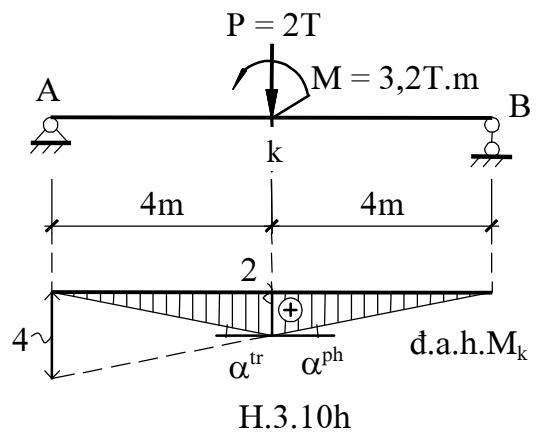
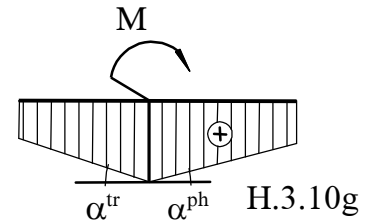
- Vẽ đ.a.h. M_k như trên hình.

- Xác định M_k :

M_k do cả lực tập trung và mômen tập trung tác dụng. Tại M, đ.a.h. M_k bị gãy khúc nên M_k sẽ có hai giá trị:

$$\begin{aligned} M_k^{\text{tr}} &= P \cdot y + M \cdot \text{tg}\alpha^{\text{ph}} = \\ &= 2 \cdot 1 + (-3,2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3,6(\text{T.m}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_k^{\text{ph}} &= P \cdot y + M \cdot \text{tg}\alpha^{\text{tr}} = \\ &= 2 \cdot 1 + (-3,2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 0,4(\text{T.m}) \end{aligned}$$



§ 7. CÁCH DÙNG ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG ĐỂ XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ BẤT LỢI CỦA ĐOÀN TẢI TRỌNG VÀ GIÁ TRỊ ĐỂ TÍNH.

Bản chất của bài toán là đi tìm cực trị của hàm $S(z)$. Giá trị lớn nhất trong số các cực đại (hay nhỏ nhất trong số các cực tiểu) là giá trị để tính. Vị trí của đoàn tải trọng tương ứng là vị trí bất lợi nhất.

I. Đường ảnh hưởng có dạng đường cong trơn tru một dấu:

Khi đó phương trình đường ảnh hưởng S và đạo hàm của nó là những hàm liên tục. Do vậy, hàm $S = f(z)$ biểu thị sự biến thiên của đại lượng S theo vị trí của tải trọng đi động và đạo hàm của nó $S'(z)$ cũng sẽ liên tục. Đối với loại bài toán này, sau khi đã

xác định đại lượng S theo vị trí của tải trọng di động S(z), việc xác định vị trí bất lợi chính là đi giải bài toán tìm cực trị của hàm số thông thường.

II. Tải trọng tập trung trên đường ảnh hưởng có dạng đa giác một dấu:

Ở đây chỉ trình bày cho trường hợp đường ảnh hưởng có dấu dương. Trường hợp đường ảnh hưởng có dấu âm, cách thực hiện tương tự.

Khi xác định vị trí bất lợi nhất của tải trọng di động đối với đường ảnh hưởng đa giác, có thể dựa vào các tính chất sau:

* *Tính chất 1:* Vị trí bất lợi nhất chỉ có thể xảy ra khi một trong số các tải trọng tập trung di động trên đường ảnh hưởng, trùng với một đỉnh lồi nào đó của đường ảnh hưởng.

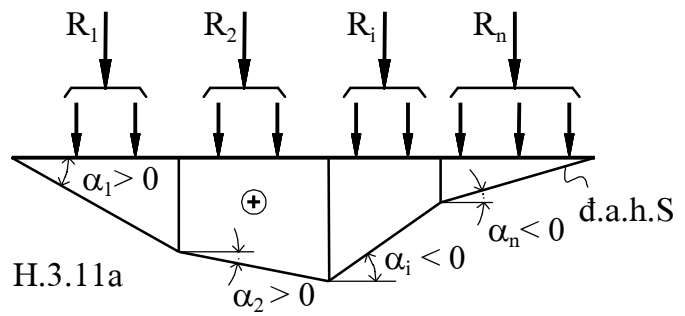
* *Tính chất 2:* Khi đã có một tải trọng tập trung tại một đỉnh lồi của đường ảnh hưởng của đại lượng S, muốn S đạt cực trị thì khi dời đoàn tải trọng sang trái một đoạn Δz và sang phải một đoạn Δz điều kiện sau phải thoả mãn:

$$\begin{array}{ccc} & > & < \\ \text{Chuyển từ} & \sum_{i=1}^n R_i \text{tg}\alpha_i > 0 & \text{sang} & \sum_{i=1}^n R_i \text{tg}\alpha_i = 0 & (*) \\ & = & & < & \\ & \text{(khi } z = z_0 - \Delta z) & & \text{(khi } z = z_0 + \Delta z) & \end{array}$$

Trong đó:

- R_i là hợp lực của các tải trọng ở đoạn thẳng thứ i của đường ảnh hưởng

- α_i là góc nghiêng của đoạn thẳng thứ i của đường ảnh hưởng; α_i lấy dấu dương khi đường ảnh hưởng đồng biến.



H.3.11a

Từ các phân tích trên, ta có trình tự xác định vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng tập trung trên đường ảnh hưởng đa giác một dấu như sau:

- Đặt một tải trọng tập trung vào đỉnh lồi nào đó của đường ảnh hưởng
- Dịch chuyển đoàn tải trọng sang trái một đoạn Δz và tính $\sum_{i=1}^n R_i \text{tg}\alpha_i$; cũng làm tương tự như vậy khi dịch chuyển đoàn tải trọng sang phải một đoạn Δz.

- Kiểm tra điều kiện (*) sau hai lần dịch chuyển. Nếu không thoả mãn thì đây không phải là vị trí bất lợi nhất, nếu thoả mãn thì đây có khả năng là vị trí bất lợi nhất, cần phải tính giá trị của đại lượng S tại vị trí này. Cách tính đã trình bày trong mục xác định đại lượng S bằng đường ảnh hưởng của nó.

- Quá trình lặp lại như vậy cho tất cả tải trọng tập trung và các đỉnh lồi của đường ảnh hưởng. Giá trị lớn nhất trong số các đại lượng S tính được là giá trị để tính. Vị trí của đoàn tải trọng tương ứng là vị trí bất lợi nhất.

* Ví dụ: Tìm giá trị để tính của đại lượng S có đ.a.h.S như trên hình (H.3.11c).
Sơ đồ tải di động cho trên hình (H.3.11b)

- Tính $tg\alpha$ của các góc nghiêng:

$$tg\alpha_1 = \frac{3}{4}; tg\alpha_2 = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}; tg\alpha_3 = -\frac{4}{9}$$

1. Tính thử lần thứ nhất:

Chọn tải $P = 9,5(T)$ đặt vào đỉnh lồi có tung độ $y = 4$ (H.3.11d)

+ Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái 1 đoạn Δz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i tg\alpha_i &= \\ &= 3,5tg\alpha_1 + 9,5tg\alpha_2 + (3 + 7)tg\alpha_3 = \\ &= 3,5 \cdot \frac{3}{4} + 9,5 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{5}{9} > 0 \end{aligned}$$

+ Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải 1 đoạn Δz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i tg\alpha_i &= 3,5tg\alpha_2 + (9,5 + 10)tg\alpha_3 \\ &= 3,5 \cdot \frac{1}{4} + 19,5 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = -\frac{70,125}{9} < 0 \end{aligned}$$

Như vậy, điều kiện (*) được thỏa mãn. Vị trí này cho ta một cực đại. Tính S_{max}

$$S_{max} = 3,5 \cdot 3 + 9,5 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{20}{9} + 7 \cdot \frac{4}{9} = 58,278$$

2. Tính thử lần thứ 2:

Đặt tải trọng $P = 3(T)$ vào đỉnh có tung độ $y = 4$ (H.3.11e).

+ Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái một đoạn Δz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i tg\alpha_i &= 9,5tg\alpha_1 + 3tg\alpha_2 + 7tg\alpha_3 = \\ &= 9,5 \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{42,875}{9} > 0 \end{aligned}$$

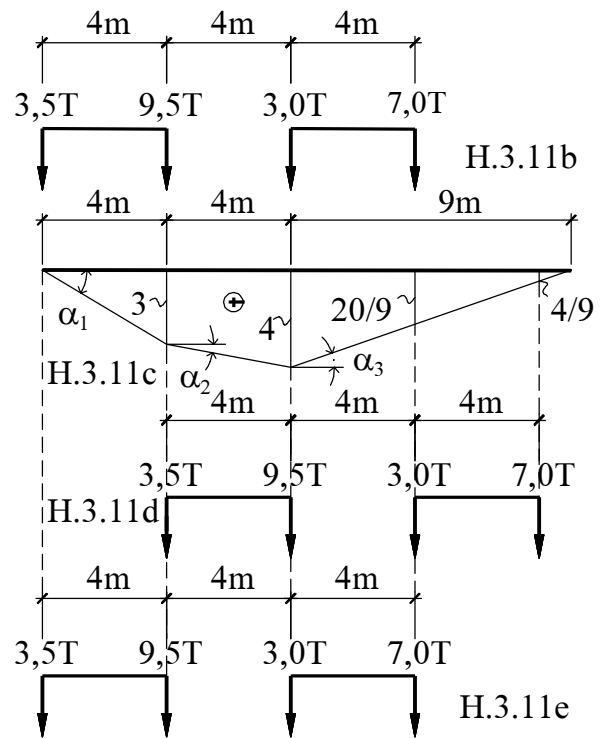
+ Cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên phải một đoạn Δz :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n R_i tg\alpha_i &= 3,5tg\alpha_1 + 9,5tg\alpha_2 + 10tg\alpha_3 = \\ &= 3,5 \cdot \frac{3}{4} + 9,5 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{5}{9} > 0 \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện (*), vị trí này không tồn tại S_{max}

Về mặt nguyên tắc, do có 4 lực và 2 đỉnh lồi nên cần thử đặt tải 8 lần. Tuy nhiên, có thể dựa vào các nhận xét sau để loại bớt những lần thử không cần thiết:

- Trong 2 lần thử trên thì lực tập trung 3,5(T) & 9,5(T) cũng đã được đặt vào đỉnh lồi có tung độ $y = 3$.



- Nếu tiếp tục dịch chuyển đoàn tải trong sang bên trái hay bên phải so với 2 lần thử ở trên thì tải trọng sẽ vượt ra ngoài đường ảnh hưởng hoặc đi vào vùng tung độ bé nên ảnh hưởng sẽ giảm xuống.

Tóm lại vị trí bất lợi của đoàn tải trong là trên hình (H.3.11d) và giá trị để tính là $S_{max} = 58,278$.

III. Tải trọng tập trung trên đường ảnh hưởng có dạng tam giác:

Giả sử đường ảnh hưởng tam giác cho như trên hình (H.3.11f). Như đã biết là vị trí bất lợi của đoàn tải trọng chỉ xảy ra khi có một lực tập trung nào đó đặt tại đỉnh lồi. Gọi lực tập trung đặt tại đỉnh tam giác là P_{th} ; hợp lực của các lực bên trái và bên phải P_{tr} là R_{tr} và R_{ph} . Lần lượt cho đoàn tải trọng dịch chuyển về bên trái và bên phải 1 đoạn Δz . Điều kiện (*) được viết lại:

$$\begin{aligned} &> &< \\ (R_{tr} + P_{th}).tg\alpha_1 + R_{ph}.tg\alpha_2 &> 0 &\text{ và } &R_{tr}.tg\alpha_1 + (R_{ph} + P_{th}).tg\alpha_2 = 0 \\ &= && &< \end{aligned}$$

Từ hình vẽ thì $tg\alpha_1 = c/a$; $tg\alpha_2 = -c/b$.

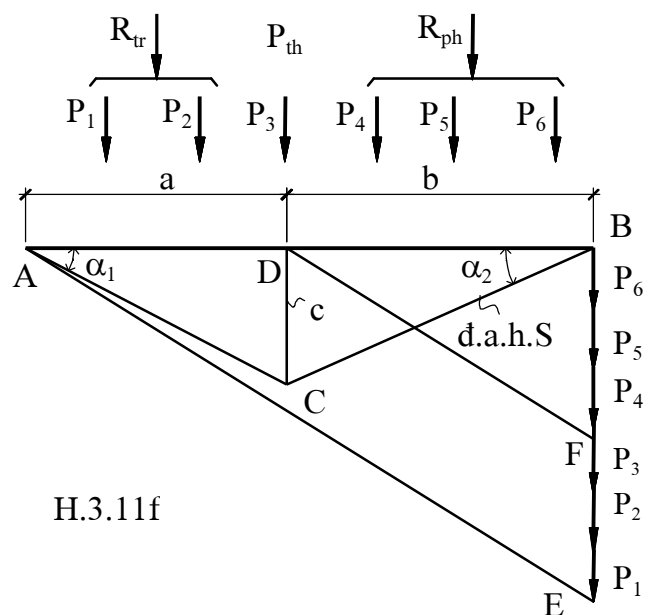
Thay vào và biến đổi, ta được điều kiện cần và đủ để xảy ra vị trí bất lợi của đoàn tải trọng:

- Khi dịch chuyển đoàn tải trọng về bên trái thì thoả mãn điều kiện (i)
- Khi dịch chuyển đoàn tải trọng về bên phải thì thoả mãn điều kiện (ii)

$$\begin{aligned} &> &< \\ \frac{R_{tr} + P_{th}}{a} &> \frac{R_{ph}}{b} &\text{ (i); } &\frac{R_{tr}}{a} = \frac{R_{ph} + P_{th}}{b} &\text{ (ii)} \\ &= && &< \end{aligned}$$

* Có thể tìm vị trí bất lợi của đoàn tải trọng bằng đồ giải như sau:

Tại điểm B trên hình (H.3.11f) lần lượt dựng các véc tơ biểu thị cho các lực $P_1, P_2 \dots P_6$ theo thứ tự từ B đến A trên một đường thẳng bất kỳ không trùng với đường chuẩn. Gọi E là mút cuối cùng. Nối AE và từ D kẻ đường thẳng song song với AE cắt BE tại F. Điểm F thuộc véc tơ biểu thị lực nào thì lực đó là P_{th} cần đặt ở đỉnh tam giác để có vị trí bất lợi.



H.3.11f

Thật vậy, từ các quan hệ tỷ lệ của các đoạn bị chắn trên hình vẽ, ta dễ dàng thấy được điều kiện (i) và (ii).

*Chú thích:

- Cách thực hiện trên chỉ đúng khi tất cả các tải trọng thuộc phạm vi đường ảnh hưởng.

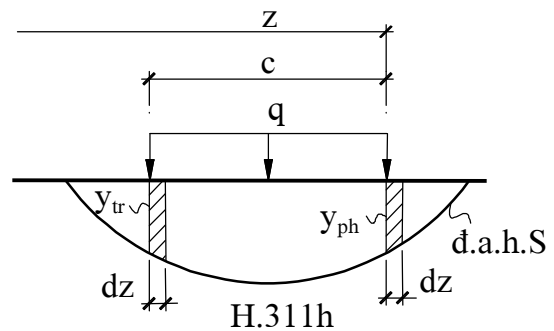
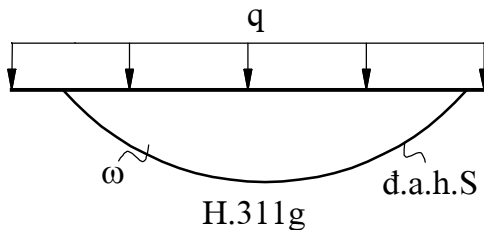
- Nếu chiều dài đoàn tải trọng vượt ra ngoài phạm vi đường ảnh hưởng thì cần phải tính thử nhiều lần với các lực P_{th} khác nhau. Lúc này có thể tồn tại nhiều P_{th} nên cũng có thể có nhiều S_{max} . Giá trị để tính là $\max S_{max}$.

- Khi sử dụng phương pháp đồ giải, nếu điểm F thuộc ranh giới của hai lực thì cả hai lực đó đều có thể là P_{th} .

IV. Tải trọng phân bố đều trên đường ảnh hưởng đơn trị bất kỳ:

1. Chiều dài tải trọng lớn hơn chiều dài đường ảnh hưởng: (H.3.11g)

$S_{max} = q \cdot \omega$; ω là diện tích toàn bộ đường ảnh hưởng.



2. Chiều dài tải trọng bé hơn chiều dài đường ảnh hưởng: (H.3.11h)

Trong trường hợp này, vị trí bất lợi nhất của đoàn tải trọng chỉ xảy ra khi tung độ đường ảnh hưởng tại đầu trái và đầu phải của đoàn tải trọng bằng nhau.

Cm: Đại lượng S tương ứng với vị trí z của đoàn tải trọng:

$$S = q \cdot \omega_{z-c}$$

Để S đạt cực trị thì $\frac{dS}{dz} = q \cdot \frac{d\omega}{dz} = 0$, tức là $\frac{d\omega}{dz} = 0$.

Theo hình vẽ (H.3.11h) thì $d\omega = y^{ph} \cdot dz - y^{tr} \cdot dz = dz \cdot (y^{ph} - y^{tr})$

Để $d\omega = 0$ thì $y^{ph} = y^{tr}$ (đccm).

* Chú ý:

Nếu đường ảnh hưởng có 2 dấu thì phải đặt riêng cho từng phần có dấu dương hoặc dấu âm để tính S_{max} , S_{min} .

Ví dụ: Tìm M_{max} , M_{min} tại mặt cắt k của dầm có mút thừa trên hình (H.3.11i). Biết tải trọng di động phân bố đều có chiều dài $d = 1,6m$ và cường độ $q = 1,2(T/m)$.

Vẽ đ.a.h. M_k

a. Tìm M_{min} : cần đặt q vào miền đ.a.h. M_k mang dấu âm. Dễ thấy miền bên trái cho M_{min} và vị trí bất lợi nhất khi q ở sát mút thừa.

$$M_{min} = q \cdot \omega_o^{1,6} = 1,2 \cdot \left(-\frac{1,25 + 0,25}{2} \cdot 1,6\right) = -1,44(T.m)$$

b. Tìm M_{max} :

Đặt q vào miền đ.a.h. M_k mang dấu dương. Cần xác định z để $y^{tr} = y^{ph}$

Từ các tam giác đồng dạng, ta có:

$$\frac{y^{tr}}{0,9375} = \frac{z}{1,5}, \frac{y^{ph}}{0,9375} = \frac{4-z-d}{2,5}$$

Thay $y^{tr} = y^{ph}$ vào, suy ra:

$$4z = 1,5(4 - d)$$

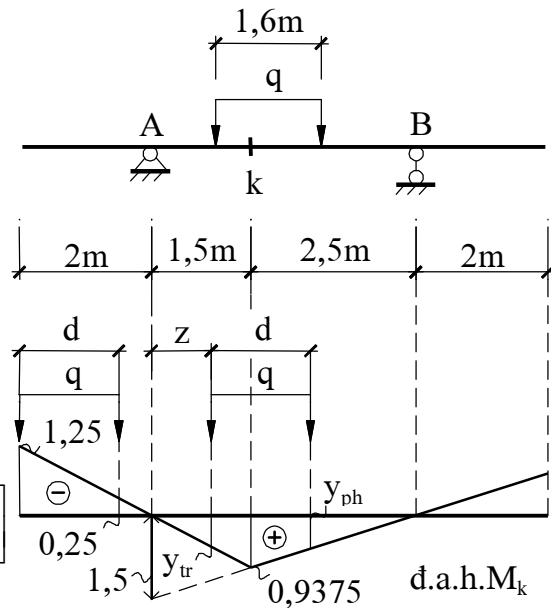
Giải ra $z = 0,9$. Suy ra:

$$y^{tr} = y^{ph} = 0,9375 \cdot \frac{z}{1,5} = 0,5625.$$

Từ đây tính được:

$$M_{max} = q \cdot \omega_{0,9}^{2,5}$$

$$= 1,2 \cdot \left[\left(\frac{0,5625 + 0,9375}{2} \right) \cdot 0,6 + \left(\frac{0,5625 + 0,9375}{2} \right) \cdot 1 \right] \\ = 1,44(\text{T.m})$$



H.3.11i

V. Khái niệm về tải trọng tương đương:

Khi thiết kế kết cấu chịu tải trọng di

động, ta thường lặp lại nhiều lần việc tìm vị trí bất lợi và giá trị để tính của một đoàn tải trọng tiêu chuẩn nào đó trên một số dạng đường ảnh hưởng có hình dạng giống nhau song chỉ khác về độ lớn. Để cho việc tính toán được thuận lợi người ta tìm cách thay thế các đoàn tải trọng tiêu chuẩn bằng tải trọng phân bố đều có chiều dài phủ kín đường ảnh hưởng, có cường độ q_{td} để sao cho đại lượng S do q_{td} gây ra đúng bằng giá trị để tính của đại lượng S do tải trọng tiêu chuẩn đặt ở vị trí bất lợi nhất. Tải trọng phân bố đều như vậy gọi là tải trọng tương đương.

Vậy tải trọng tương đương là tải trọng phân bố đều phủ kín chiều dài đặt tải của đường ảnh hưởng và sinh ra giá trị của đại lượng S chính là giá trị để tính của đại lượng S do đoàn tải trọng tiêu chuẩn được thay thế đặt ở vị trí bất lợi nhất gây ra.

Từ đây suy ra $S_{tính} = \omega \cdot q_{td}$.

Mặc khác, khi phân tích người ta nhận thấy, tải trọng tương đương chỉ phụ thuộc vào chiều dài, hình dạng của đường ảnh hưởng mà không phụ thuộc vào độ lớn tung độ đường ảnh hưởng.

Do vậy, với mỗi loại tải trọng tiêu chuẩn, với mỗi chiều dài và dạng đường ảnh hưởng, người ta đã tìm ra được một $S_{tính}$, tiếp đó tính được $q_{td} = \frac{S_{tính}}{\omega}$, và tập hợp sẵn

các q_{td} vào trong một bảng tra. Khi tính toán ta chỉ cần thực hiện:

- Căn cứ vào tải trọng và dạng đường ảnh hưởng đang xét, tìm bảng tải trọng tương đương tương ứng.
- Căn cứ vào chiều dài đường ảnh hưởng đang xét, tra tìm q_{td} .
- Tính $S_{tính} = \omega \cdot q_{td}$.

CHƯƠNG 4

XÁC ĐỊNH CUYỂN VỊ TRONG HỆ THANH PHẪNG ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH.

§ 1. KHÁI NIỆM VỀ BIẾN DẠNG & CHUYỂN VỊ.

I. Biến dạng:

1. Khái niệm: Biến dạng là sự thay đổi hình dạng của phân tố dưới tác dụng của các nguyên nhân như tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa...

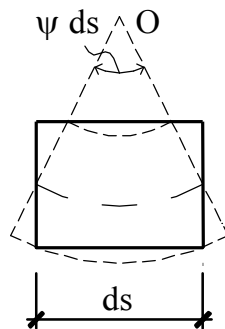
2. Các thành phần biến dạng:

Biến dạng của một phân tố thanh trong hệ thanh phẳng có chiều dài ds gồm 3 thành phần:

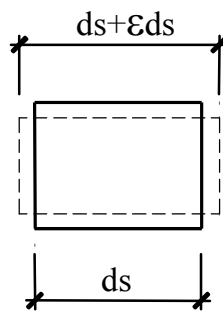
- Biến dạng góc xoay ψds : là góc xoay tương đối giữa 2 tiết diện ở 2 đầu phân tố (H.4.1.a); ψ là góc xoay tỷ đối.

- Biến dạng dọc trục ϵds : là khoảng co dãn giữa 2 tiết diện ở hai đầu phân tố theo phương dọc trục thanh (H.4.1.b); ϵ là biến dạng dọc trục tỷ đối.

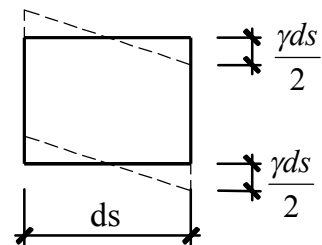
- Biến dạng trượt γds : là độ trượt tương đối giữa 2 tiết diện ở 2 đầu phân tố (H.4.1.c); γ là góc trượt tỷ đối.



H.4.1.a



H.4.1.b



H.4.1.c

* *Chú ý:* Quy ước chiều dương của biến dạng tương ứng với chiều trên hình vẽ.

II. Chuyển vị:

1. Khái niệm: Chuyển vị là sự thay đổi vị trí của tiết diện dưới tác dụng của các nguyên nhân như tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa...

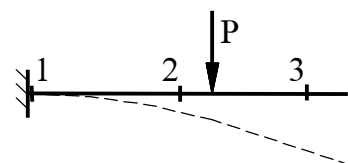
Khi hệ biến dạng, hầu hết các tiết diện đều có vị trí mới. Như vậy, có thể nói chuyển vị là hệ quả của sự biến dạng.

Tại 1 tiết diện của hệ có thể có 1 trong 3 khả năng sau:

- Có biến dạng nhưng không có chuyển vị. Ví dụ tiết diện 1 trên hình (H.4.2)

- Có biến dạng và chuyển vị. Ví dụ tiết diện 2 trên hình (H.4.2)

- Có chuyển vị nhưng không có biến dạng. Ví dụ tiết diện 3 trên hình (H.4.2)

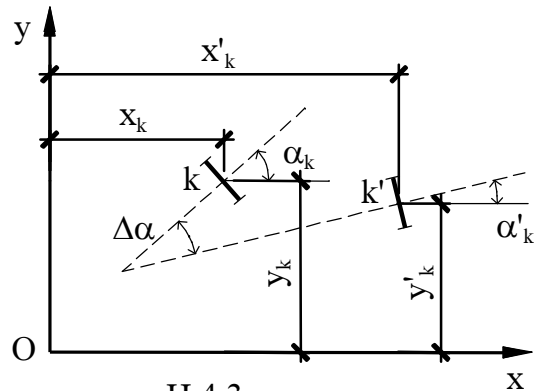


H.4.2

2. Các thành phần chuyển vị:

Tại một tiết diện bất kỳ có thể có 3 thành phần chuyển vị: 2 chuyển vị thẳng theo hai phương khác nhau và một chuyển vị góc xoay.

Thật vậy, trong hệ trục Oxy, xét 1 tiết diện k (H.4.3) được xác định bởi các tọa độ (x_k, y_k, α_k) . Sau khi hệ bị biến dạng, tiết diện k có vị trí mới là k' được xác định bởi các tọa độ (x'_k, y'_k, α'_k) .



H.4.3

Như vậy chuyển vị tại tiết diện k gồm ba thành phần:

- + Chuyển vị thẳng theo phương x: $\Delta x = x'_k - x_k$
- + Chuyển vị thẳng theo phương y: $\Delta y = y'_k - y_k$
- + Chuyển vị góc xoay: $\Delta \alpha = \alpha'_k - \alpha_k$

3. Ký hiệu chuyển vị:

Thường được ký hiệu bằng chữ Δ và kèm theo hai chỉ số: chỉ số thứ nhất chỉ vị trí và phương của chuyển vị; chỉ số thứ hai chỉ nguyên nhân gây ra chuyển vị.

Δ_{km} đọc là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương k do nguyên nhân m gây ra.

Khi nguyên nhân m gây ra chuyển vị bằng đơn vị thì gọi là chuyển vị đơn vị.

Khi đó Δ được thay bằng δ . δ_{km} đọc là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương k do nguyên nhân m bằng đơn vị gây ra.

§ 2. CÔNG CỦA NGOẠI LỰC & BIỂU THỨC CÔNG.

I. Nguyên lý bảo toàn năng lượng:

Xét 1 thanh chịu kéo đúng tâm như trên hình vẽ (H.4.4.a).

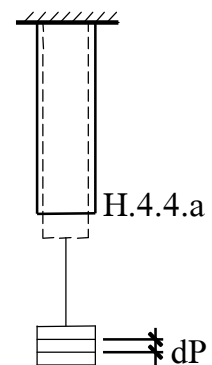
Tăng dần tải trọng gây kéo bằng cách thêm dần các tải trọng vô cùng bé dP (để không gây ra lực quán tính). Quan sát ta nhận thấy:

- Thanh bị kéo dãn ra, tức là thế năng của ngoại lực U_p giảm xuống. Và biến dạng trong hệ tăng lên, tức là thế năng biến dạng đàn hồi U trong thanh tăng lên.

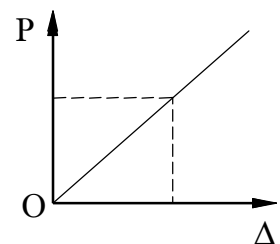
- Quan hệ giữa lực tác dụng và biến dạng là tuyến tính, tức là tuân theo giả thiết 1 (H.4.4.b).

Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, đồng thời bỏ qua ảnh hưởng của phần năng lượng do các hiện tượng từ, nhiệt, điện... thì $U_p = U$. Nghĩa là: *Thế năng của ngoại lực U_p chuyển hóa thành thế năng biến dạng U tích lũy trong hệ nếu sự biến dạng không làm phá vỡ sự cân bằng của hệ.*

Mặc khác, năng lượng được đo bằng công:



H.4.4.a



H.4.4.b

+ $U_p = T$: công của ngoại lực được sinh ra trên chuyển vị của điểm đặt ngoại lực. Công $T > 0$ vì chuyển vị cùng chiều với điểm đặt lực P .

+ $U = A^*$: công của nội lực được sinh ra trên những biến dạng đàn hồi trong hệ. $A^* < 0$ vì nội lực có xu hướng ngăn cản biến dạng trong hệ.

Từ $U_p = U$. Suy ra $T = -A^* = U$ (4 - 1)

Như vậy: về trị số, thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong hệ bằng công T của ngoại lực gây ra biến dạng hay bằng công A^* của nội lực sinh ra trên những biến dạng đàn hồi nhưng trái dấu.

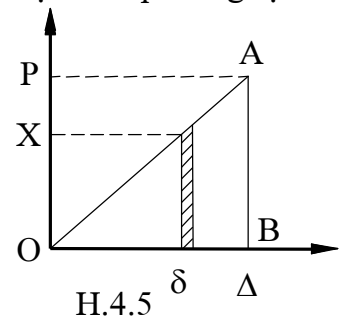
II. Công của ngoại lực (T):

Công là tích số của lực với trị số chuyển vị của điểm đặt lực theo phương lực tác dụng.

Như đã nói ở trên, quan hệ giữa lực tác dụng và chuyển vị là tuyến tính (H.4.5). Xét ở thời điểm lực tác dụng $P = X$ và chuyển vị $\Delta = \delta$, tăng thêm tải trọng tác dụng dP làm cho chuyển vị tăng thêm một lượng $d\delta$. Lực X sẽ sinh một công phân tố:

$$dT = X.d\delta$$

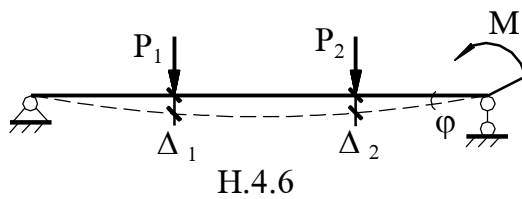
Suy ra $T = \int_0^{\Delta} X.d\delta = \frac{1}{2}.P.\Delta$ (chính là diện tích tam giác OAB)



Trong trường hợp có nhiều lực tác dụng P_1, P_2, \dots, P_n . Nếu gọi $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ là chuyển vị cuối cùng tương ứng theo phương P_1, P_2, \dots, P_n do các lực đó đồng thời tác dụng gây ra thì:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i.\Delta_i \quad (4 - 2)$$

Như vậy: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, công của các ngoại lực tập trung đồng thời tác dụng tĩnh bằng một nửa tổng các tích số của các ngoại lực với giá trị của chuyển vị cuối cùng tương ứng.



$$T = \frac{1}{2}(P_1.\Delta_1 + P_2.\Delta_2 + M.\varphi)$$

* Chú ý:

- Công tổng cộng không phụ thuộc vào thứ tự tác dụng của ngoại lực.
- Công của ngoại lực không tuân theo nguyên lý cộng tác dụng.

§ 3. CÔNG CỦA NỘI LỰC - THỂ NĂNG CỦA HỆ THANH.

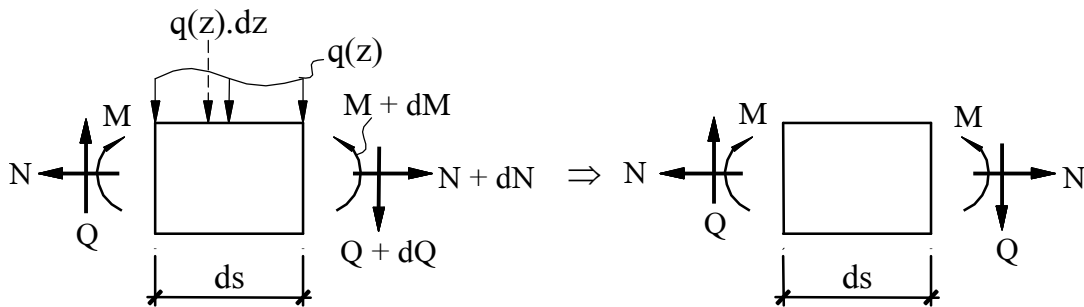
I. Công của nội lực (A^*): là công của các nội lực sinh ra trên những biến dạng đàn hồi của hệ.

Tách ra khỏi hệ một phân tố thanh có chiều dài ds (H.4.7.a). Lực tác dụng lên phân tố gồm:

+ Ngoại lực: $q(z)$ được quy về thành lực tập trung $q(z).ds$

+ Nội lực: ở đầu trái là (M, Q, N) ; ở đầu phải là $(M + dM, Q + dQ, N + dN)$.

Giả thiết chiều dương của chúng như trên hình vẽ.



H.4.7.a

H.4.7.b

* Các nhận xét:

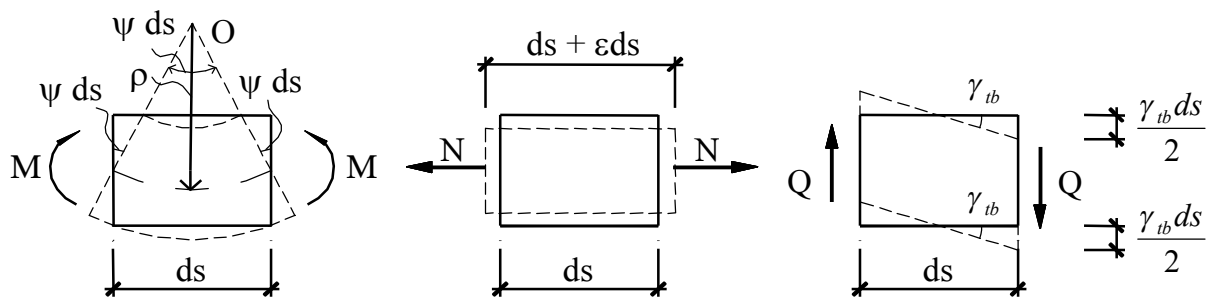
- Do xét cân bằng riêng cho phân tố nên có thể xem $M, Q, N, M + dM, Q + dQ, N + dN$ là các ngoại lực. Vì thế, có thể sử dụng biểu thức công của ngoại lực để xác định, sau đó suy ra công của nội lực theo mối quan hệ: $A^* = -T$

- Vì chỉ phân tích cho một phân tố thanh nên công được gọi là công phân tố. Khi đó ta thay $A^* = dA^*, T = dT$. Suy ra $dA^* = -dT$.

- Phân tố ds có chiều dài là rất bé nên cho phép bỏ qua các đại lượng vô cùng bé $q(z).ds, dM, dQ, dN$ khi tính công (H.4.7.b).

- Các lực M, Q, N sinh công trên những biến dạng độc lập nên cho phép tính công riêng rẽ do từng thành phần rồi cộng kết quả lại với nhau.

II. Xác định các thành phần biến dạng:



H.4.8.a

H.4.8.b

H.4.8.c

- Thành phần biến dạng góc xoay ψds (H.4.8.a):

Theo SBVL
$$\psi = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E.J}$$

- Thành phần biến dạng dọc trục εds (H.4.8.b):

Theo SBVL
$$\varepsilon = \frac{N}{E.F}$$

- Thành phần biến dạng trượt $\gamma_{tb} ds$ (H.4.8.c):

Theo SBVL
$$\gamma_{tb} = \nu \cdot \frac{Q}{G.F}$$

Với ν là hệ số kể đến sự phân bố không đều của ứng suất tiếp. Hệ số ν chỉ phụ thuộc vào hình dạng của tiết diện: tiết diện hình chữ nhật ($\nu = 1,2$), tiết diện hình tròn ($\nu = 1,18$), tiết diện hình vành khăn ($\nu = 2$)...

III. Biểu thức công của nội lực:

- Do mômen M gây ra: $dT_M = \frac{1}{2} \left(M \cdot \frac{\psi \cdot ds}{2} + M \cdot \frac{\psi \cdot ds}{2} \right) = \frac{M \cdot \psi \cdot ds}{2} = \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J}$

- Do lực dọc N gây ra: $dT_N = \frac{1}{2} \left(N \cdot \frac{\varepsilon \cdot ds}{2} + N \cdot \frac{\varepsilon \cdot ds}{2} \right) = \frac{N \cdot \varepsilon \cdot ds}{2} = \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F}$

- Do lực cắt Q gây ra: $dT_Q = \frac{1}{2} \left(Q \cdot \frac{\gamma_{tb} \cdot ds}{2} + Q \cdot \frac{\gamma_{tb} \cdot ds}{2} \right) = \frac{Q \cdot \gamma_{tb} \cdot ds}{2} = \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F}$

Suy ra
$$dT = dT_M + dT_N + dT_Q = \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F}$$

Suy ra
$$dA^* = -dT = - \left(\frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \right)$$

$$A^* = \int dA^* = - \left[\sum \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \sum \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \sum \int \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \right]$$

Ở đây dấu \sum là lấy tổng trên các đoạn thanh sao cho các biểu thức dưới dấu tích phân là liên tục về mặt toán học.

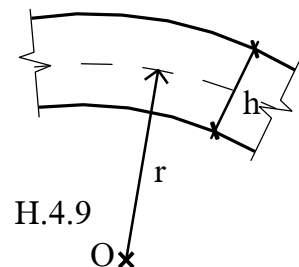
IV. Thế năng của hệ thanh:

Từ biểu thức (4 - 1), suy ra biểu thức thế năng đàn hồi của hệ thanh:

$$U = -A^* = \sum \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \sum \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \sum \int \nu \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \quad (4 - 3)$$

*Các chú ý:

- Thế năng của hệ luôn dương.
- Biểu thức thế năng (4 - 3) chỉ áp dụng cho hệ gồm những thanh thẳng hoặc cong với độ cong bé ($\frac{h}{r} \leq \frac{1}{5}$) (H.4.9).



H.4.9

§ 4. VẬN DỤNG BIỂU THỨC THỂ NĂNG ĐỂ XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ.

I. Cách tích trực tiếp từ biểu thức thể năng:

Cách này chỉ áp dụng khi trên hệ chỉ có một lực tập trung và cần tìm chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực đó.

$$\text{Từ } U = T = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \Delta. \text{ Suy ra } \Delta = \frac{2 \cdot U}{P}$$

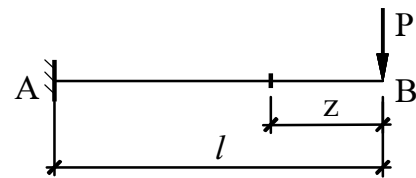
$$\text{Vậy } \Delta = \frac{2}{P} \left[\sum \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \sum \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \sum \int v \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \right] \quad (4 - 4)$$

Ví dụ: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại A. Cho biết $E \cdot J = \text{const}$. Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt. (H.4.10)

Biểu thức mômen uốn dọc trục thanh:

$$M(z) = -P \cdot z$$

$$\text{Thay vào: } \Delta = \frac{2}{P} \int_0^l \frac{(-P \cdot z)^2 \cdot dz}{2 \cdot E \cdot J} = \frac{P l^3}{3 \cdot E \cdot J}$$



H.4.10

II. Cách xác định theo định lý Castigliano:

Phát biểu định lý: Đạo hàm riêng thể năng biến dạng đàn hồi theo lực P_k nào đó sẽ bằng chuyển vị tương ứng với phương và vị trí của lực P_k đó.

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k}$$

Thay biểu thức (4-3) vào

$$\Delta_k = \frac{\partial U}{\partial P_k} \left[\sum \int \frac{M^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot J} + \sum \int \frac{N^2 \cdot ds}{2 \cdot E \cdot F} + \sum \int v \cdot \frac{Q^2 \cdot ds}{2 \cdot G \cdot F} \right]$$

$$\Delta_k = \left[\sum \int \frac{M}{E \cdot J} \frac{\partial M}{\partial P_k} \cdot ds + \sum \int \frac{N}{E \cdot F} \frac{\partial N}{\partial P_k} \cdot ds + \sum \int v \cdot \frac{Q}{G \cdot F} \frac{\partial Q}{\partial P_k} \cdot ds \right] \quad (4 - 5)$$

Xét trở lại ví dụ trên

$$\Delta_k = \int \frac{M}{E \cdot J} \frac{\partial M}{\partial P_k} \cdot ds = \int_0^l \frac{(-P \cdot z)}{E \cdot J} \cdot (-z) dz = \frac{P l^3}{3 \cdot E \cdot J} > 0$$

* Chú ý:

- Nếu $\Delta_k > 0$ thì chuyển vị cùng chiều với P_k và ngược lại
- Nếu tải trọng tác dụng là phân bố có thể thay thế bằng nhiều lực tập trung để

tính.

- Trường hợp P_k là mômen tập trung thì chuyển vị tương ứng là góc xoay.

- Nếu cần tìm chuyển vị tại vị trí và theo phương bất kỳ thì có thể đặt thêm lực

P_k tương ứng với vị trí và phương cần tìm chuyển vị. Sau khi xác định được Δ_k , cho $P_k = 0$ sẽ được kết quả cần tìm.

§ 5. CÔNG KHẢ DĨ CỦA NỘI LỰC VÀ NGOẠI LỰC - CÁC BIỂU THỨC CÔNG KHẢ DĨ

I. Công khả dĩ:

1. Định nghĩa: Công khả dĩ (còn gọi là công ảo) là công sinh ra bởi các lực trên những biến dạng và chuyển vị vô cùng bé do những nguyên nhân bất kỳ nào đó sinh ra.

Các chuyển vị và biến dạng vô cùng bé được gọi là chuyển vị khả dĩ và biến dạng khả dĩ.

2. So sánh công thực và công khả dĩ:

Công thực: Nguyên nhân gây ra chuyển vị và biến dạng chính là các lực sinh công gây ra.

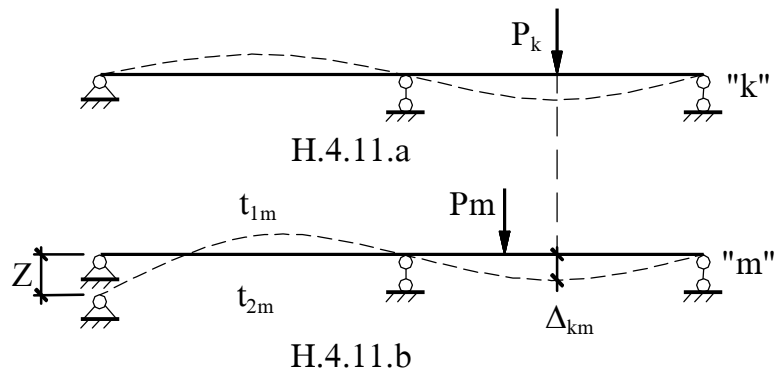
Công ảo: Nguyên nhân gây ra chuyển vị và biến dạng là bất kỳ và có thể là tải trọng hay biến thiên nhiệt độ hay chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa...

Ví dụ minh họa:

Xét một hệ đàn hồi ở hai trạng thái:

- Trạng thái thứ nhất chịu lực P_k gọi là trạng thái "k" (H.4.11.a).

- Trạng thái thứ hai chịu các nguyên nhân bất kỳ gọi là trạng thái "m" (H.4.11.b).



Gọi Δ_{km} là chuyển vị khả dĩ tương ứng với lực P_k trên hệ ở trạng thái "m".

Theo định nghĩa thì tích số $P_k \cdot \Delta_{km}$ là công khả dĩ của lực P_k trên chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m". Ký hiệu: T_{km} .

$$\text{Vậy } T_{km} = P_k \cdot \Delta_{km}$$

II. Công khả dĩ của ngoại lực (T_{km}):

Từ ví dụ minh họa ở trên, có thể định nghĩa công khả dĩ của ngoại lực như sau:

Công khả dĩ của các ngoại lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ ở trạng thái "m" bằng tổng các tích số giữa các lực tác dụng ở trạng thái "k" với những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m".

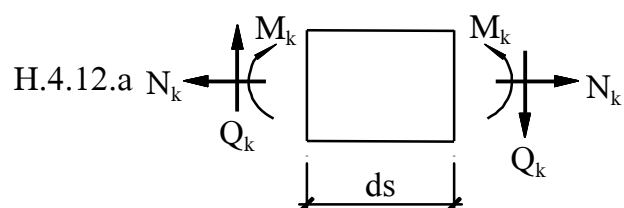
$$T_{km} = \sum_i P_{ik} \cdot \Delta_{ikm} \quad (4 - 6)$$

III. Công khả dĩ của nội lực

(A_{km}^*):

Tách riêng một phân tố thanh của hệ ở hai trạng thái "k", "m".

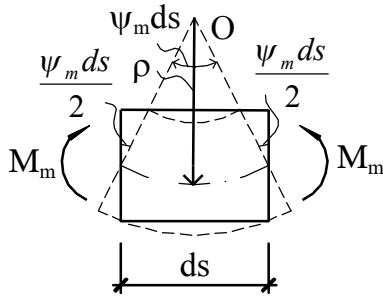
- Ở trạng thái "k": chỉ quan tâm



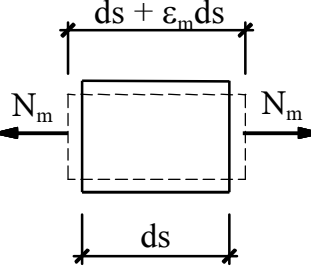
các thành phần M_k, N_k, Q_k ở hai đầu phân tố và xem là các ngoại lực như trong trường hợp công của nội lực (H.4.12.a).

- Ở trạng thái "m": Chỉ quan tâm các thành phần biến dạng như sau:

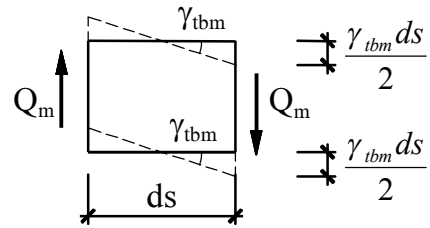
↪ Các thành phần biến dạng $\psi_m, \varepsilon_m, \gamma_{ibm}$ do các nội lực M_m, N_m, Q_m gây ra.



H.4.12.b



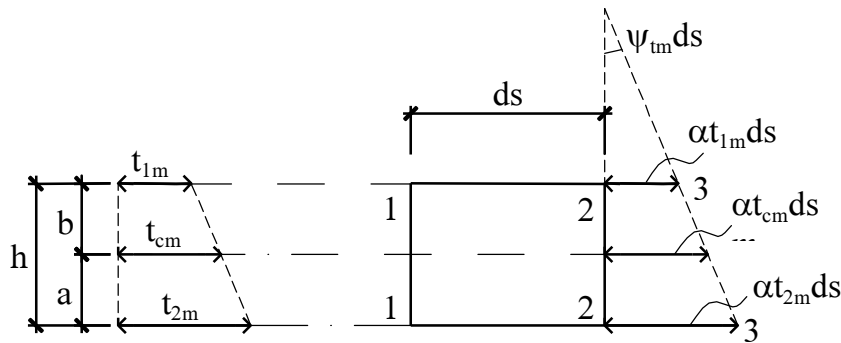
H.4.12.c



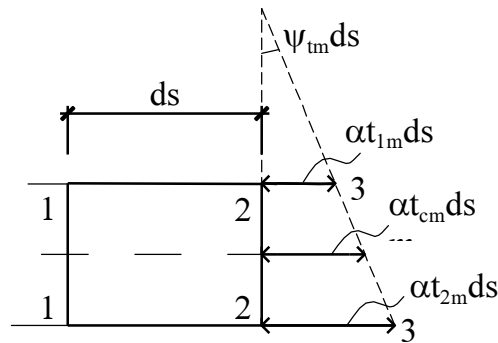
H.4.12.d

Tương tự trường hợp công của nội lực: $\psi_m = \frac{M_m}{E.J}$; $\varepsilon_m = \frac{N_m}{E.F}$; $\gamma_{mtb} = \nu \cdot \frac{Q_m}{G.F}$

↪ Các thành phần biến dạng do sự biến thiên nhiệt độ gây ra (H.4.13.a&b)



H.4.13.a



H.4.13.b

Gọi t_{2m}, t_{1m} là sự biến thiên nhiệt độ của thớ dưới và thớ trên của phân tố. Cho rằng sự biến thiên nhiệt độ dọc theo chiều cao của phân tố tuân theo quy luật đường thẳng (bậc nhất). Biến thiên nhiệt độ dọc trục thanh (H.4.13.a):

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} \cdot a + t_{2m} \cdot b}{a + b}$$

Nếu tiết diện là hình chữ nhật, tức là $a = b = \frac{h}{2}$ thì

$$t_{cm} = \frac{t_{1m} + t_{2m}}{2}$$

Giả sử $t_{2m} > t_{1m} > 0$ và tiết diện ở đầu 1-1 của phân tố là cố định. Gọi α là hệ số dẫn nở vì nhiệt. Lúc này phân tố sẽ có hai thành phần biến dạng (H.4.13.b):

+ Biến dạng dọc trục: $\varepsilon_{im} \cdot ds = \alpha \cdot t_{cm} \cdot ds$

+ Biến dạng góc xoay giữa hai tiết diện ở hai đầu phân tố:

$$\psi_{im} \cdot ds = \frac{\alpha \cdot t_{2m} \cdot ds - \alpha \cdot t_{1m} \cdot ds}{h} = \frac{\alpha}{h} \cdot (t_{2m} - t_{1m}) \cdot ds$$

Vậy công khả dĩ của nội lực của một phân tố ds ở trạng thái "k" trên các biến dạng khả dĩ ở trạng thái "m":

$$dT_{km} = \frac{1}{2} \cdot M_k \cdot \psi_m \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot M_k \cdot \psi_m \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot N_k \cdot \varepsilon_m \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot N_k \cdot \varepsilon_m \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot Q_k \cdot \gamma_{ibm} \cdot ds + \frac{1}{2} \cdot Q_k \cdot \gamma_{ibm} \cdot ds + M_k \cdot \psi_{im} \cdot ds + N_k \cdot \varepsilon_{im} \cdot ds$$

$$\text{Hay } dT_{km} = \frac{1}{2} M_k \cdot \psi_m \cdot ds + N_k \cdot \varepsilon_m \cdot ds + Q_k \cdot \gamma_{ibm} \cdot ds + M_k \cdot \psi_{im} \cdot ds + N_k \cdot \varepsilon_{im} \cdot ds$$

Thay tất cả các biến dạng đã tính được vào:

$$dT_{km} = \frac{1}{E \cdot J} \cdot M_k \cdot M_m \cdot ds + \frac{1}{E \cdot F} \cdot N_k \cdot N_m \cdot ds + \frac{\nu}{G \cdot F} \cdot Q_k \cdot Q_m \cdot ds + M_k \cdot \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \cdot ds + N_k \cdot \alpha \cdot t_{cm} \cdot ds$$

$$\text{Suy ra } dA_{km}^* = -dT_{km} = -\left[\frac{1}{E \cdot J} \cdot M_k \cdot M_m \cdot ds + \frac{1}{E \cdot F} \cdot N_k \cdot N_m \cdot ds + \frac{\nu}{G \cdot F} \cdot Q_k \cdot Q_m \cdot ds + M_k \cdot \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \cdot ds + N_k \cdot \alpha \cdot t_{cm} \cdot ds \right]$$

$$\text{Suy ra } A_{km}^* = \int dA_{km}^* = -\left[\sum \int \frac{M_k \cdot M_m}{E \cdot J} \cdot ds + \sum \int \frac{N_k \cdot N_m}{E \cdot F} \cdot ds + \sum \int \nu \frac{Q_k \cdot Q_m}{G \cdot F} \cdot ds + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) M_k \cdot ds + \sum \int \alpha \cdot t_{cm} N_k \cdot ds \right] \quad (4 - 7)$$

IV. Nguyên lý công khả dĩ áp dụng cho hệ đàn hồi (S. D. Poisson 1833):

1. Nguyên lý công khả dĩ cho vật rắn: Nếu một hệ chất điểm nào đó của vật rắn cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ của các lực trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng bằng không

$$T_{km} = 0$$

2. Nguyên lý công khả dĩ cho hệ đàn hồi:

Nếu một hệ biến dạng đàn hồi cô lập cân bằng dưới tác dụng của các lực thì tổng công khả dĩ của các ngoại lực T_{km} trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng và công khả dĩ của nội lực A_{km}^* trên những biến dạng đàn hồi khả dĩ tương ứng phải bằng không

$$T_{km} + A_{km}^* = 0$$

$$\text{Hay } \sum_i P_{ik} \cdot \Delta_{ikm} = \sum \int \frac{M_k \cdot M_m}{E \cdot J} \cdot ds + \sum \int \frac{N_k \cdot N_m}{E \cdot F} \cdot ds + \sum \int \nu \frac{Q_k \cdot Q_m}{G \cdot F} \cdot ds + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) M_k \cdot ds + \sum \int \alpha \cdot t_{cm} N_k \cdot ds \quad (4 - 8)$$

§ 6. CÁC ĐỊNH LÝ TƯƠNG HỒ TRONG HỆ ĐÀN HỒI

I. Định lý tương hỗ về công khả dĩ của ngoại lực (Định lý E.Betti 1872):

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính ở hai trạng thái:

- Trạng thái "m": chịu các lực tác dụng P_{im} ($i = 1 \dots n$)

- Trạng thái "k": chịu các lực tác dụng P_{jk} ($j = 1...p$)

Theo biểu thức (4 - 8):

- Công khả dĩ của lực ở trạng thái "m" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k":

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^n P_{im} \cdot \Delta_{imk} = \sum \int \frac{M_m \cdot M_k}{E \cdot J} ds + \sum \int \frac{N_m \cdot N_k}{E \cdot F} ds + \sum \int v \frac{Q_m \cdot Q_k}{G \cdot F} ds$$

- Công khả dĩ của hệ ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m":

$$T_{km} = \sum_{j=1}^p P_{jk} \cdot \Delta_{jkm} = \sum \int \frac{M_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds + \sum \int \frac{N_k \cdot N_m}{E \cdot F} ds + \sum \int v \frac{Q_k \cdot Q_m}{G \cdot F} ds$$

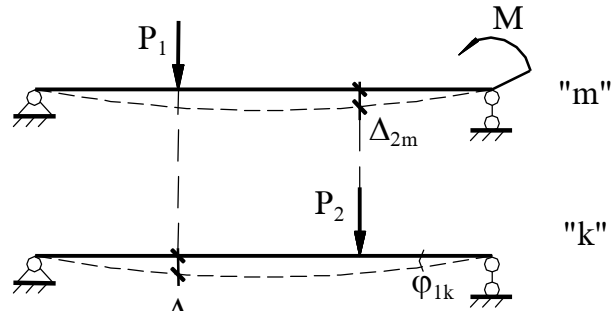
Suy ra $T_{km} = T_{mk}$ (4 - 9)

* *Phát biểu:* Trong hệ đàn hồi tuyến tính, công khả dĩ của ngoại lực ở trạng thái "k" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "m" tương hỗ bằng công khả dĩ của ngoại lực ở trạng thái "m" trên những chuyển vị khả dĩ tương ứng ở trạng thái "k".

* *Chú ý:*

- Hai trạng thái "k", "m" phải xảy ra trên cùng một hệ.

- Chuyển vị ở trạng thái này phải có vị trí và phương tương ứng với tải trọng ở trạng thái kia (H.4.14).



H.4.14

$$\sum_{i=1} P_{im} \cdot \Delta_{imk} = P_1 \cdot \Delta_{1k} + M \cdot \phi_{1k}$$

$$\sum_{j=1} P_{jk} \cdot \Delta_{jkm} = P_2 \cdot \Delta_{2m}$$

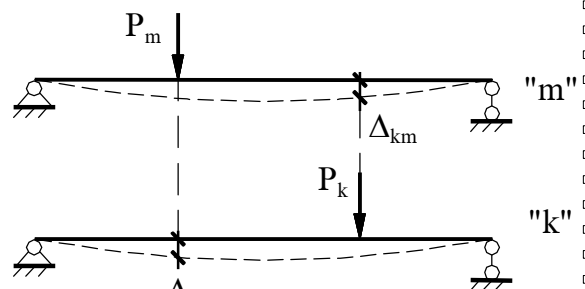
Theo định lý tương hỗ thì $P_1 \cdot \Delta_{1k} + M \cdot \phi_{1k} = P_2 \cdot \Delta_{2m}$

II. Định lý tương hỗ về các chuyển vị đơn vị (Định lý J. Maxwell 1864):

Xét một hệ đàn hồi với hai trạng thái (H.4.15):

- Trạng thái "m" chỉ chịu một lực tập trung P_m .

- Trạng thái "k" chỉ chịu một lực tập trung P_k .



H.4.15

Theo định lý E.betti thì

$$P_m \cdot \Delta_{mk} = P_k \cdot \Delta_{km}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\Delta_{mk}}{P_k} = \frac{\Delta_{km}}{P_m} \text{ (a)}$$

Gọi $\delta_{km} = \frac{\Delta_{km}}{P_m}$. Đại lượng này chính là chuyển vị đơn vị tương ứng với phương và vị trí P_k do $P_m = 1$ gây ra.

Tương tự cho $\delta_{mk} = \frac{\Delta_{mk}}{P_k}$.

Từ (a) suy ra $\delta_{km} = \delta_{mk}$ (4 - 10)

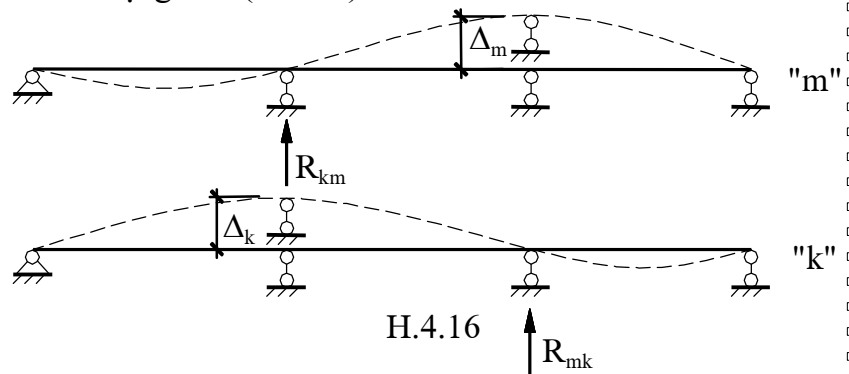
Phát biểu: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_k do lực $P_m = 1$ gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do lực $P_k = 1$ gây ra.

III. Định lý tương hỗ về các phản lực đơn vị (Định lý L. Rayleigh 1875):

Xét một hệ đàn hồi với hai trạng thái (H.4.16):

- Trạng thái "m" chỉ chịu một chuyển vị cưỡng bức Δ_m tại liên kết m.

- Trạng thái "k" chỉ chịu một chuyển vị cưỡng bức Δ_k tại liên kết k.



Gọi R_{km} là phản lực tại liên kết k do chuyển vị Δ_m gây ra và R_{mk} là phản lực tại liên kết m do chuyển vị Δ_k gây ra.

Theo định lý E.Betti thì $R_{km} \cdot \Delta_k = R_{mk} \cdot \Delta_m$

Suy ra $\frac{R_{km}}{\Delta_m} = \frac{R_{mk}}{\Delta_k}$ (b)

Gọi $r_{km} = \frac{R_{km}}{\Delta_m}$. Đây chính là phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết m gây ra.

Tương tự cho $r_{mk} = \frac{R_{mk}}{\Delta_k}$

Từ (b) suy ra $r_{km} = r_{mk}$ (4 - 11)

Phát biểu: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết k do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết m tương hỗ bằng phản lực đơn vị tại liên kết m do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết k gây ra.

IV. Định lý tương hỗ về chuyển vị đơn vị và phản lực đơn vị (Định lý A. A. Gvozdiev 1927):

Xét một hệ đàn hồi tuyến tính với hai trạng thái (H.4.17):

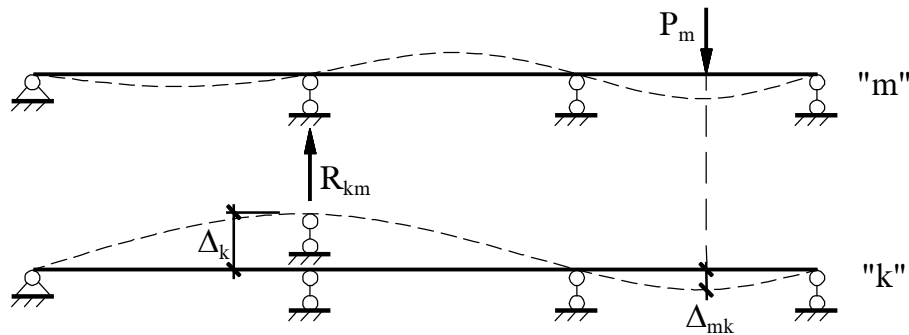
- Trạng thái "m" chỉ chịu lực P_m .
- Trạng thái "k" có một liên kết k của hệ chịu chuyển vị cưỡng bức Δ_k .

Gọi R_{km} là phản lực tại liên kết k do P_m gây ra (ở trạng thái "m") và Δ_{mk} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương của lực P_m do Δ_k gây ra (ở trạng thái "k")

Theo định lý E.Betti thì $P_m \cdot \Delta_{mk} + R_{km} \cdot \Delta_k = 0$

Suy ra $\frac{R_{km}}{P_m} = -\frac{\Delta_{mk}}{\Delta_k}$ (c)

Gọi $\dot{r}_{km} = \frac{R_{km}}{P_m}$. Đây chính là phản lực đơn vị tại liên kết k do $P_m = 1$ gây ra.



H.4.17

$\dot{\delta}_{mk} = \frac{\Delta_{mk}}{\Delta_k}$. Đây chính là chuyển vị đơn vị tại vị trí và phương của lực P_m do chuyển vị $\Delta_k = 1$ gây ra.

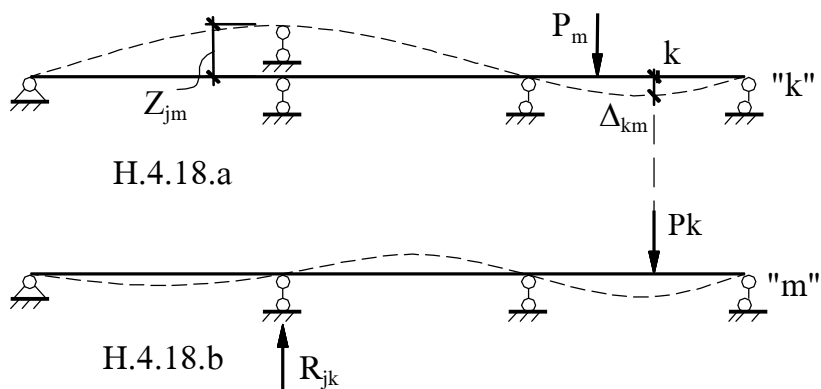
Theo (c) suy ra: $\dot{r}_{km} = -\dot{\delta}_{mk}$. (4 - 12)

Phát biểu: Trong hệ đàn hồi tuyến tính, phản lực đơn vị tại liên kết k do lực P_m bằng đơn vị gây ra tương hỗ bằng chuyển vị đơn vị tương ứng phương và vị trí lực P_m do chuyển vị cưỡng bức bằng đơn vị tại liên kết k gây ra nhưng trái dấu.

§ 7. CÔNG THỨC TỔNG QUÁT XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ CỦA HỆ THANH (Công thức Maxwell - Morh 1874)

I. Thiết lập công thức:

Xét một hệ thanh đàn hồi tuyến tính chịu tác dụng của các nguyên nhân: các tải trọng P_m , chuyển vị cưỡng bức tại các liên kết Z_m , sự biến thiên nhiệt độ t_{2m} & t_{1m} . Các tiết diện trong hệ sẽ chuyển vị. Ví dụ hệ cho trên hình (H.4.18.a). Trạng thái này của hệ gọi là trạng thái "m".



Yêu cầu: tìm chuyển vị thẳng đứng tại tiết diện k.

Cách tiến hành:

Tạo trạng thái khả dĩ "k" bằng cách trên hệ đã cho đặt lực P_k tương ứng với vị trí và phương cần tìm chuyển vị, chiều tùy ý chọn (H.4.18.b).

Áp dụng công thức công khả dĩ cho lực ở trạng thái "k" trên chuyển vị khả dĩ ở trạng thái "m":

$$P_k \cdot \Delta_{km} + \sum_j R_{jk} \cdot Z_{jm} = \sum \int \frac{M_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds + \sum \int \frac{N_k \cdot N_m}{E \cdot F} ds + \sum \int_V \frac{Q_k \cdot Q_m}{G \cdot F} ds + \\ + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) M_k ds + \sum \int \alpha \cdot t_{cm} N_k ds$$

Chia hai vế cho P_k và đồng thời ký hiệu: $\bar{M}_k = \frac{M_k}{P_k}$; $\bar{N}_k = \frac{N_k}{P_k}$; $\bar{Q}_k = \frac{Q_k}{P_k}$; $\bar{R}_{jk} = \frac{R_{jk}}{P_k}$

Nói cách khác $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k, \bar{R}_{jk}$ chính là M_k, N_k, Q_k, R_k tương ứng do $P_k = 1$ xảy ra trên hệ ở trạng thái "k".

Thay vào ta được công thức tổng quát xác định chuyển vị trong hệ thanh đàn hồi:

$$\Delta_{km} = - \sum_j \bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm} + \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k \cdot N_m}{E \cdot F} ds + \sum \int_V \frac{\bar{Q}_k \cdot Q_m}{G \cdot F} ds + \\ + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \bar{M}_k ds + \sum \int \alpha \cdot t_{cm} \bar{N}_k ds \quad (4 - 13)$$

II. Các chú ý:

+ Công thức Morh chỉ áp dụng cho hệ gồm những thanh thẳng hoặc cong với độ cong bé ($\frac{h}{r} \leq \frac{1}{5}$).

+ Khi tính hệ ở trạng thái "k" chỉ cần đặt lực $P_k = 1$.

+ Nếu cần tìm chuyển vị thẳng thì P_k là lực tập trung; nếu tìm chuyển vị góc xoay thì P_k là mômen tập trung.

+ Nếu kết quả $\Delta_{km} > 0$ thì chuyển vị là cùng chiều với lực P_k đã giả định và ngược lại.

+ Z_{jm} là chuyển vị tại liên kết j của hệ ở trạng thái "m".

+ \bar{R}_{jk} là phản lực tại liên kết j tương ứng với chuyển vị Z_{jm} do lực $P_k = 1$ gây ra ở trạng thái "k".

+ Tích $\bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm}$ lấy dấu dương khi \bar{R}_{jk} và Z_{jm} cùng chiều nhau.

+ M_m, N_m, Q_m là các biểu thức giải tích của nội lực ở trạng thái "m"

+ $\bar{M}_k, \bar{N}_k, \bar{Q}_k$ là các biểu thức giải tích của nội lực ở trạng thái "k" do $P_k = 1$ gây ra.

+ Công thức Morh cũng áp dụng được cho hệ siêu tĩnh.

§ 8. VẬN DỤNG CÔNG THỨC MORH VÀO CÁC BÀI TOÁN CHUYỂN VỊ

I. Hệ dầm và khung chịu tải trọng:

Trong hệ dầm và khung chịu, ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục và trượt là rất nhỏ so với biến dạng uốn. Và trong tính toán thường cho phép bỏ qua ảnh hưởng của chúng. Lúc này công thức (4 - 13) có dạng:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds \quad (4 - 14)$$

*Ví dụ 1: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại B. Cho biết độ cứng của thanh dầm $E \cdot J = const$.

1. Tính hệ ở trạng thái "m": (H.4.19.a)

$$M_m(z) = -P \cdot z \quad [0 \leq z \leq l]$$

2. Tạo và tính hệ với trạng thái "k":

(H.4.19.b)

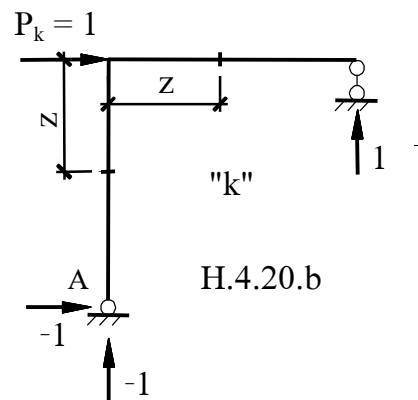
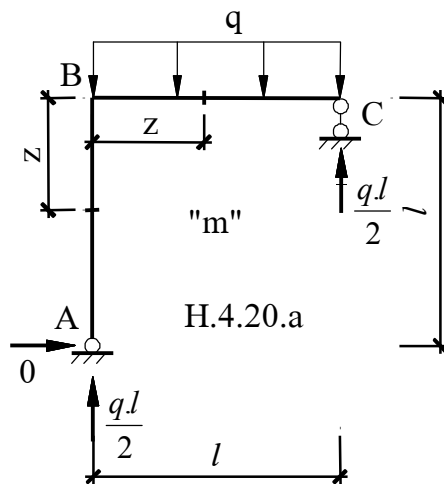
$$\bar{M}_k(z) = -P_k \cdot z = -z \quad [0 \leq z \leq l]$$

3. Xác định y_B :

$$\begin{aligned} y_B = \Delta_{km} &= \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds = \\ &= \int_0^l \frac{(-P \cdot z) \cdot (-z)}{E \cdot J} dz = \frac{P \cdot z^3}{3E \cdot J} \Big|_0^l = \frac{P \cdot l^3}{3E \cdot J} > 0 \end{aligned}$$

Kết luận: Chuyển vị cùng chiều P_k (hướng xuống).

*Ví dụ 2: Xác định chuyển vị nằm ngang tại B (H.4.20.a). Cho biết độ cứng của các thanh là như nhau và $E \cdot J = const$.



1. Tính hệ ở trạng thái "m": (H.4.20.a)

- Trong thanh BC: $M_m(z) = \frac{q \cdot l \cdot z}{2} - \frac{q \cdot z^2}{2} \quad [0 \leq z \leq l]$ (gốc tại B)

- Trong thanh AB: $M_m(z) = 0$

2. Tạo và tính hệ với trạng thái "k": (H.4.20.b)

- Trong thanh BC: $\bar{M}_k(z) = 1 \cdot (l - z) \quad [0 \leq z \leq l]$ (gốc tại B)

- Trong thanh AB: $\bar{M}_k(z) = 1 \cdot (l - z) \quad [0 \leq z \leq l]$ (gốc tại B)

3. Xác định x_B :

$$x_B = \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{E \cdot J} ds = \int_0^l \frac{(q \cdot l \cdot z - q \cdot z^2) \cdot 1 \cdot (l - z)}{2 \cdot E \cdot J} dz =$$

$$= \frac{q}{2 \cdot E \cdot J} \left[\frac{l \cdot z^2}{2} - \frac{2}{3} l \cdot z^3 + \frac{z^4}{4} \right]_0^l = \frac{q \cdot l^4}{24 E \cdot J} > 0$$

* *Kết luận*: Chuyển vị là cùng chiều với P_k (hướng sang phải)

II. Hệ dàn khớp chịu tải trọng:

Trong hệ dàn, các thanh chỉ tồn tại lực dọc. Nên công thức (4 - 13) có dạng:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{N}_k \cdot N_m}{E \cdot F} ds$$

Các đại lượng $\bar{N}_k, N_m, E \cdot F$ thường bằng const đối với từng thanh dàn. Suy ra:

$$\Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \int ds = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \cdot l_i \quad (4 - 15)$$

* *Ví dụ*: Xác định chuyển vị nằm ngang tại mắt dàn

số 5. Cho biết độ cứng trong các thanh dàn là như nhau và

$E \cdot F = const$.

1. Trạng thái "m": (H.4.21.a).

Xác định N_{im} . Kết quả thể hiện trong **Bảng 4.1**

2. Trạng thái "k": (H.4.21.b)

Xác định \bar{N}_{ik} . Kết quả thể hiện trong **Bảng 4.1**

3. Xác định x_5 :

$$x_5 = \Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \cdot l_i$$

Kết quả tính toán dọc thể hiện trong **Bảng 4.1**

Diễn tả **Bảng 4.1**:

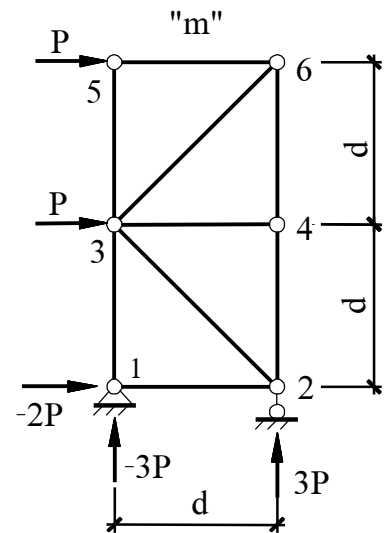
- + Cột (1) ghi các thanh dàn.
- + Cột (2) ghi chiều dài các thanh dàn.
- + Cột (3) ghi giá trị $\frac{1}{E \cdot F}$ (ở đây là như nhau cho các

thanh dàn)

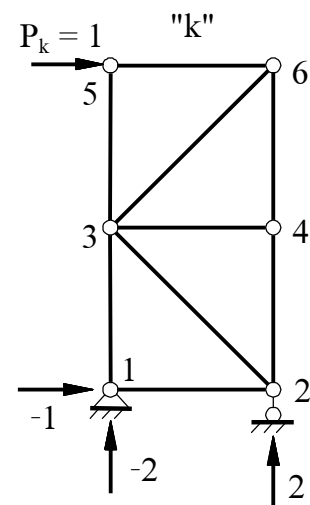
- + Cột (4) ghi lực dọc trong các thanh dàn N_{im} .
- + Cột (5) ghi lực dọc trong các thanh dàn \bar{N}_{ik}
- + Cột (6) ghi kết quả $\frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \cdot l_i$ cho từng thanh dàn.

Kết quả x_5 là tổng của các hàng trong cột (6):

$$x_5 = \Delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im}}{E \cdot F_i} \cdot l_i = \frac{P \cdot d}{E \cdot F} (11 + 6\sqrt{2}) > 0$$



H.4.21.a



H.4.21.b

Thanh	l_i	$\frac{1}{E.F}$	N_{im}	\bar{N}_{ik}	$\frac{\bar{N}_{ik} \cdot N_{im} \cdot l_i}{E.F_i}$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1 - 2	d	1/E.F	2P	1	2.P.d/E.F
1 - 3	d	1/E.F	3P	2	6.P.d/E.F
3 - 2	$d \cdot \sqrt{2}$	1/E.F	$-2P \sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$4\sqrt{2} \cdot P.d/E.F$
4 - 2	d	1/E.F	-P	-1	P.d/E.F
3 - 4	d	1/E.F	0	0	0
3 - 6	$d \cdot \sqrt{2}$	1/E.F	$P \sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2} \cdot P.d/E.F$
4 - 6	d	1/E.F	-P	-1	P.d/E.F
5 - 6	d	1/E.F	-P	-1	P.d/E.F
5 - 3	d	1/E.F	0	0	0

Bảng 4.1 Bảng tính chuyển vị của hệ dàn

III. Hệ tĩnh định chịu chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa:

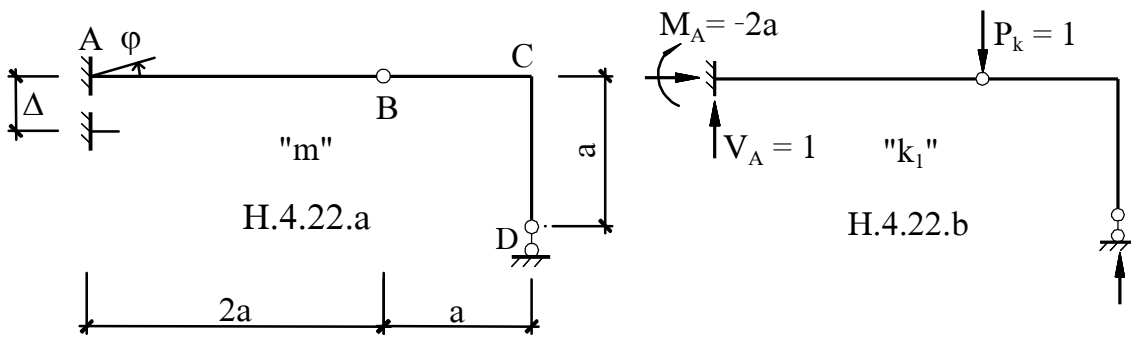
Nguyên nhân này không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định nên $N = M = Q = 0$.

Lúc này biểu thức (4 - 13) được viết lại:

$$\Delta_{km} = - \sum_j \bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm} \quad (4 - 16)$$

Các đại lượng trong biểu thức đã được giả thích trong phần các chú ý của công thức Morh.

* Ví dụ: Xác định độ võng tại B và góc xoay tại C.



1. Trạng thái "m": (H.4.22.a)

2. Trạng thái "k": (H.4.22.b) để xác định y_B và (H.4.22.c) để xác định φ_C .

3. Xác định y_B & φ_C :

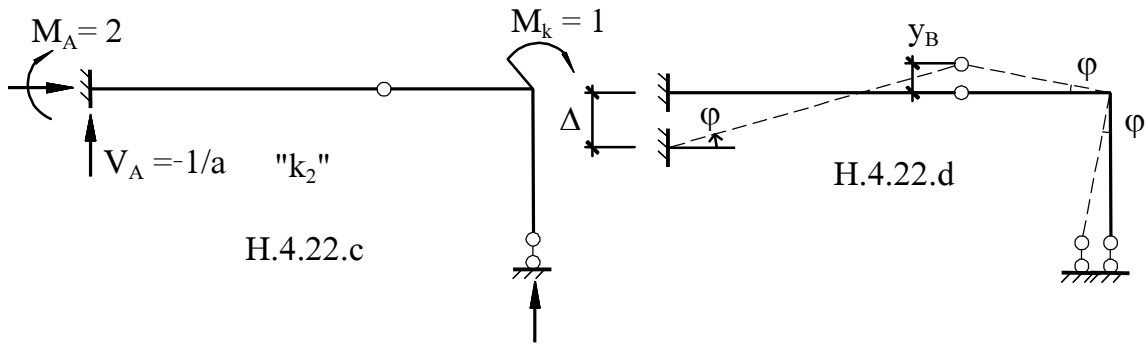
$$y_B = - \sum_j \bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm} = -[-M_A \cdot \varphi - V_A \cdot \Delta] = -[2a \cdot \varphi - 1 \cdot \Delta] = \Delta - 2a \cdot \varphi$$

$$\varphi_C = - \sum_j \bar{R}_{jk} \cdot Z_{jm} = -[-M_A \cdot \varphi - V_A \cdot \Delta] = -[-2 \cdot \varphi + \frac{1}{a} \cdot \Delta] = 2 \cdot \varphi - \frac{\Delta}{a}$$

* Nhận xét: Có thể xác định được chuyển vị bằng các điều kiện hình học (H.4.22.d).

$$y_B = \Delta - 2a \cdot \varphi$$

$$\varphi_C = -\frac{y_B}{\Delta} = 2.\varphi - \frac{\Delta}{a}$$



IV. Hệ tĩnh định chịu biến thiên nhiệt độ:

Nguyên nhân này cũng không gây ra nội lực trong hệ tĩnh định nên:

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \bar{M}_k ds + \sum \int \alpha t_{cm} \bar{N}_k ds$$

Nếu $\alpha, h, t_{2m}, t_{1m} = \text{const}$ trên từng đoạn thanh thì

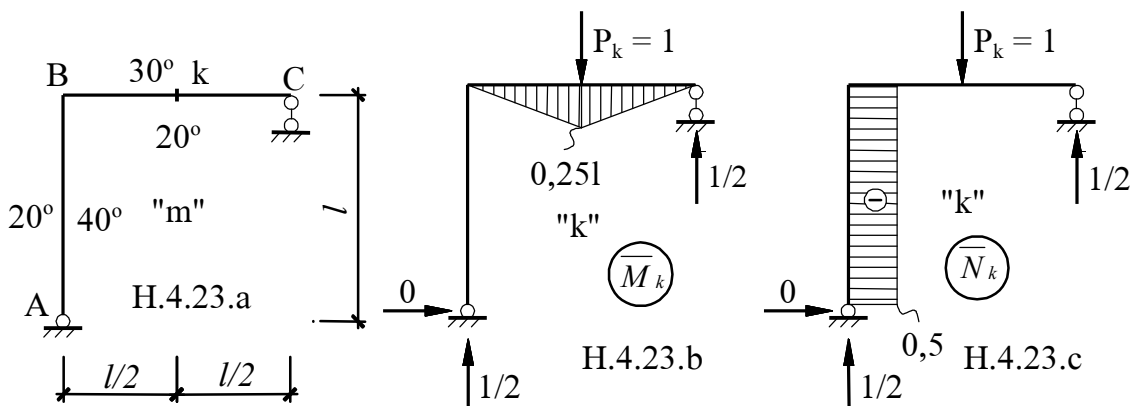
$$\Delta_{km} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_k) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_k) \quad (4 - 17)$$

Trong đó:

- + t_{2m}, t_{1m} và t_{cm} là biến thiên nhiệt độ thó dưới, thó trên và thó giữa của thanh.
- + $\Omega(\bar{M}_k)$ là diện tích của biểu đồ (\bar{M}_k) trên từng đoạn thanh.
- + $\Omega(\bar{N}_k)$ là diện tích của biểu đồ (\bar{N}_k) trên từng đoạn thanh.
- + $\Omega(\bar{M}_k), \Omega(\bar{N}_k)$ lấy dấu theo dấu của biểu đồ $(\bar{M}_k), (\bar{N}_k)$.

* Ví dụ: Xác định độ võng tại tiết diện k của hệ cho trên hình (H.4.23.a)

Cho biết $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{C}^{-1}$; $h_{AB} = 30 \text{cm}$; $h_{BC} = 20 \text{cm}$.



- Độ biến thiên nhiệt độ dọc trục các thanh:

$$t_{cAB} = \frac{40 + 20}{2} = 30^\circ \text{C}; t_{cBC} = \frac{30 + 20}{2} = 25^\circ \text{C}$$

- Trạng thái "m": (H.4.23.a) Các nội lực M_m, N_m, Q_m không tồn tại.

- Trạng thái "k": (H.4.23.b & c) Các biểu đồ (\bar{M}_k) & (\bar{N}_k) được vẽ trên (H.4.23.b & c).

- Xác định độ võng tại k:

$$y_k = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\overline{M}_k) + \sum \alpha \cdot t_{cm} \Omega(\overline{N}_k)$$

$$= \frac{\alpha}{0,2} \cdot (20 - 30) \cdot \frac{0,25l \cdot l}{2} + \alpha \cdot 30 \cdot (-0,5l) = -6,25 \cdot \alpha \cdot l^2 - 1,5 \cdot \alpha \cdot l$$

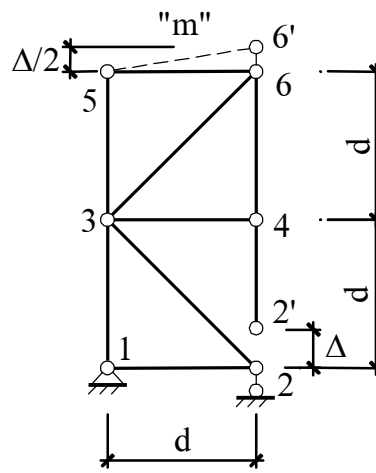
V. Hệ dàn tĩnh định có chiều dài các thanh chế tạo không chính xác:

* Nhận xét: Có thể đưa nguyên nhân này về sự biến thiên nhiệt độ dọc trục thanh. Thật vậy, để thay đổi chiều dài các thanh dàn một lượng Δ ta chỉ việc thay đổi t_c để sao cho $\Delta = \alpha \cdot l \cdot t_c$. Như vậy ta trở lại bài toán hệ chịu nguyên nhân là sự biến thiên là nhiệt độ với chú ý là $\overline{M}_k = 0$.

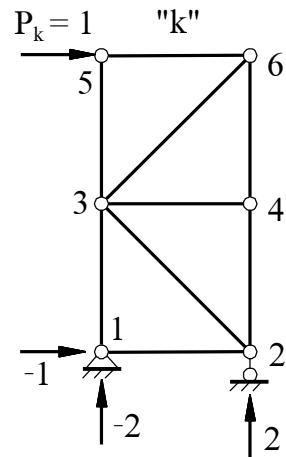
$$\Delta_{km} = \sum \alpha \cdot t_{cm} \Omega(\overline{N}_k) = \sum \alpha_i \cdot t_{ci} \cdot \overline{N}_{ik} \cdot l_i = \sum \overline{N}_{ik} \cdot \Delta_i \quad (4 - 18)$$

$\Delta_i > 0$ khi thanh dài hơn so với yêu cầu (còn gọi là độ dôi) và ngược lại (còn gọi là độ hụt).

* Ví dụ: Xác định chuyển vị nằm ngang tại mắt số 5 của hệ dàn trên hình (H.4.24.a)



H.4.24.a



H.4.24.b

Trạng thái "k" được tạo trên hình (H.4.24.b). Ở đây cần xác định \overline{N}_{ik} trong hai thanh (4 - 2) & (4 - 6).

$$\overline{N}_{4-6} = -1, \overline{N}_{4-2} = -1$$

Chuyển vị nằm ngang tại mắt số 5.

$$X_5 = \Delta_{km} = \sum \overline{N}_{ik} \cdot \Delta_i =$$

$$= \overline{N}_{4-6} \cdot \left(+\frac{\Delta}{2}\right) + \overline{N}_{4-2} \cdot (-\Delta) = -1 \cdot \left(+\frac{\Delta}{2}\right) + (-1) \cdot (-\Delta) = \frac{\Delta}{2} > 0$$

Kết luận: Chuyển vị theo chiều P_k (hướng sang phải)

§ 9. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN TRONG CÔNG THỨC CHUYỂN VỊ BẰNG PHÉP "NHÂN BIỂU ĐỒ VÊRÊSAGHIN"

I. Thiết lập công thức:

Trong công thức Morh (4 - 13) nếu xét hệ chỉ gồm những thanh thẳng chịu nguyên nhân là tải trọng và E.J, E.F, G.F = const trên từng đoạn thanh thì có thể được viết lại:

$$\Delta_{km} = \sum \frac{1}{E \cdot J} \int \overline{M}_k \cdot M_m dz + \sum \frac{1}{E \cdot F} \int \overline{N}_k \cdot N_m dz + \sum \frac{\nu}{G \cdot F} \int \overline{Q}_k \cdot Q_m dz \quad (4 - 19)$$

Lúc này, sau dấu tích phân nào cũng là tích của hai hàm số, phép " nhân biểu đồ" Vêrêxaghin cho phép thay thế việc tính tích phân của tích hai hàm số bằng cách thuận tiện hơn. Nội dung như sau:

Nếu một trong hai hàm số dưới dấu tích phân có bậc nhỏ hơn hay bằng một về mặt toán học (hàm còn lại có bậc bất kỳ) thì:

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = \Omega.y \quad (4 - 20)$$

Trong đó Ω là diện tích của biểu đồ có bậc bất kỳ lấy trên đoạn $[z_1, z_2]$.

y là tung độ trên biểu đồ có bậc nhỏ hơn hay bằng một tại vị trí tương ứng với trọng tâm diện tích Ω .

Thật vậy, trong biểu thức tích phân (4-20), giả sử $A(z)$ có bậc bất kỳ, đồ thị của $A(z)$ được vẽ như trên hình (H.4.25.a); $B(z)$ có bậc nhỏ hơn hay bằng một, đồ thị của nó được vẽ trên hình (H.4.225.b). Kéo dài đồ thị $B(z)$ đến cắt trục z tại C , gọi hoành độ của điểm C là z_0 , góc của $B(z)$ so với trục z là α . Khi đó có thể biểu thị $B(z)$ như sau:

$$B(z) = (z - z_0).tg\alpha$$

Thay vào trong dấu tích phân:

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} A(z).(z - z_0).tg\alpha dz$$

Thay $A(z)dz = d\Omega$ và đưa hằng số ra ngoài dấu tích phân

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = tg\alpha \int_{z_1}^{z_2} (z - z_0).d\Omega$$

$+ \int_{z_1}^{z_2} z.d\Omega$ chính là mômen tĩnh của diện tích Ω đối với trục tung, nó chính bằng

diện tích Ω nhân với khoảng cách z_G từ trọng tâm G của diện tích Ω đến trục tung.

$$+ \int_{z_1}^{z_2} z_0.d\Omega = z_0.\Omega$$

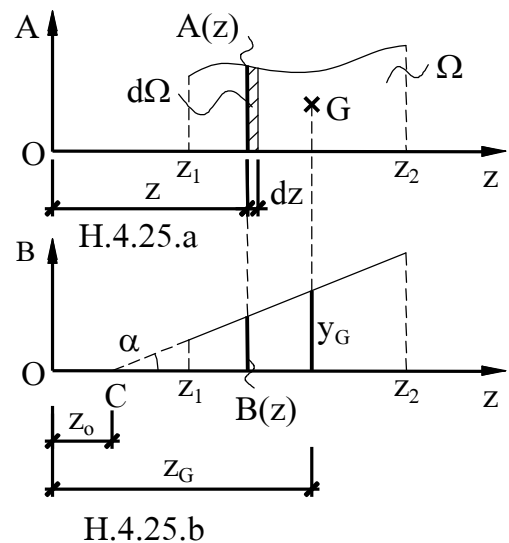
Vậy

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = tg\alpha.(z_G - z_0).\Omega$$

Mặt khác dễ thấy $(z_G - z_0).tg\alpha = y_G$: là tung độ của đồ thị $B(z)$ lấy tại vị trí tương ứng dưới trọng tâm diện tích Ω . Vậy

$$\int_{z_1}^{z_2} A(z).B(z)dz = \Omega.y_G \quad (\text{đpcm})$$

Viết lại (4 - 20) theo "phép nhân biểu đồ"



$$\Delta_{km} = (\overline{M}_k).(M_m) + (\overline{N}_k).(N_m) + (\overline{Q}_k).(Q_m)$$

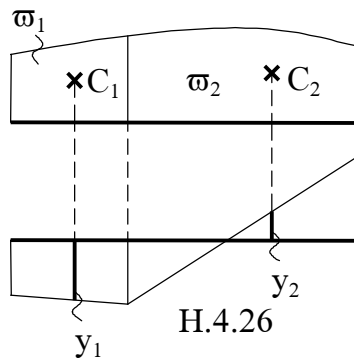
II. Các chú ý khi nhân biểu đồ:

- + Phép " nhân biểu đồ" chỉ áp dụng cho hệ gồm những thanh thẳng.
- + Tung độ y bắt buộc phải lấy trên biểu đồ có bậc ≤ 1 còn diện tích Ω được lấy trên biểu đồ có bậc bất kỳ.
- + Nếu Ω, y cùng dấu thì kết quả "nhân biểu đồ" có dấu dương và ngược lại.
- + Nếu đường biểu đồ của biểu đồ lấy tung độ bị gãy khúc thì chia thành nhiều đoạn không gãy khúc để nhân, sau đó cộng kết quả lại với nhau. (Ví dụ H.4.26)

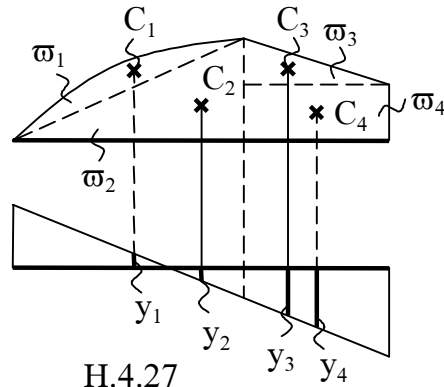
$$\Omega.y = (\omega_1.y_1) + (-\omega_2.y_2)$$

- + Khi biểu đồ lấy diện tích Ω là phức tạp (việc xác định diện tích và vị trí của trọng tâm khó khăn) thì nên chia thành nhiều hình đơn giản để tính và sau đó cộng các kết quả lại với nhau. (Ví dụ H.4.27)

$$\Omega.y = (\omega_1.y_1) + (-\omega_2.y_2) + (-\omega_3.y_3) + (-\omega_4.y_4)$$

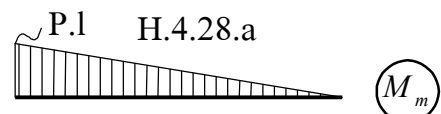
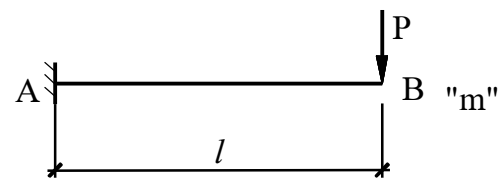


H.4.26



H.4.27

* Ví dụ 1: Xác định độ võng tại B (H.4.28.a). Chỉ xét biến dạng uốn. Cho biết $E.J = const$.



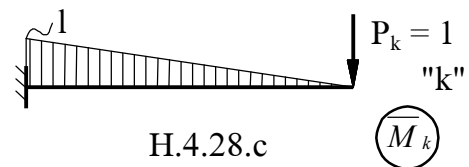
H.4.28.b

1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.28.b)

2. Trạng thái "k": Vẽ (\overline{M}_k) . Kết quả trên hình (H.4.28.c)

3. Xác định y_B :

$$y_B = (\overline{M}_k).(M_m) = \frac{1}{E.J} \cdot \frac{P.l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{1}{E.J} \cdot \frac{P.l^3}{3} > 0$$



H.4.28.c

* Ví dụ 2: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại B (H.4.29.a). Chỉ xét biến dạng uốn. Cho biết $E.J = const$.

1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.29.b)

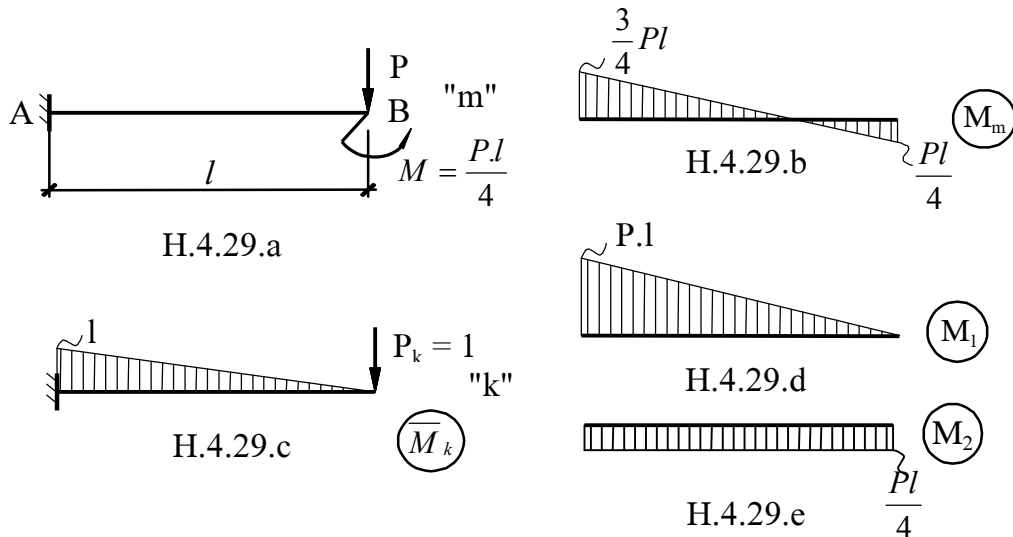
2. Trạng thái "k": Vẽ (\bar{M}_k) . Kết quả trên hình (H.4.29.c)

3. Xác định y_B :

$$y_B = (\bar{M}_k).(M_m)$$

Để dễ "nhân", ta phân tích (M_m) thành tổng của (M_1) với (M_2) như trên hình (H.4.29.d & H.4.29.e). Suy ra:

$$y_B = (\bar{M}_k).(M_m) = \frac{1}{E.J} \cdot \frac{1.l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot Pl - \frac{1}{E.J} \cdot \frac{1.l}{2} \cdot \frac{Pl}{4} = \frac{5}{24} \cdot \frac{Pl^2}{E.J} > 0$$



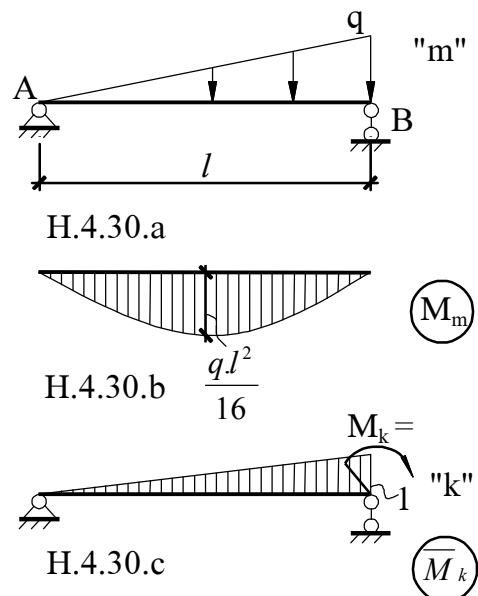
* Ví dụ 3: Xác định góc xoay tại B (H.4.30.a). Chỉ xét biến dạng uốn. Cho biết $E.J = const$.

1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.30.b)

2. Trạng thái "k": Vẽ (\bar{M}_k) . Kết quả trên hình (H.4.30.c)

3. Xác định φ_B :

$$\begin{aligned} \varphi_B &= (\bar{M}_k).(M_m) = \\ &= -\frac{1}{E.J} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{16} \cdot \frac{8}{15} \cdot 1 = -\frac{ql^3}{45.E.J} < 0 \end{aligned}$$



* Ví dụ 4: Xác định chuyển vị thẳng đứng tại k (H.4.31.a). Chỉ xét biến dạng uốn. Cho biết $E.J = const$.

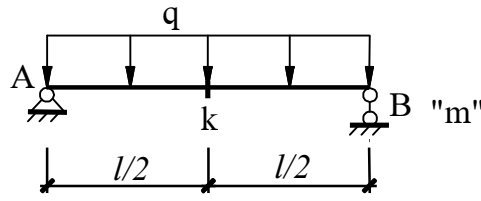
1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.31.b)

2. Trạng thái "k": Vẽ (\bar{M}_k) . Kết quả trên hình (H.4.31.c)

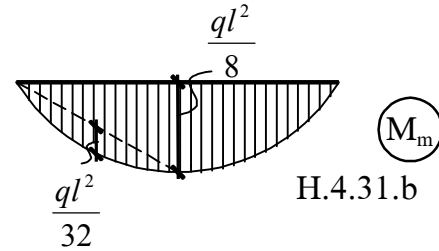
3. Xác định y_k :

$$y_k = (\bar{M}_k).(M_m) =$$

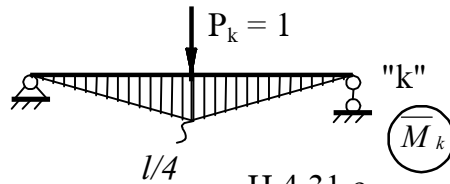
$$= \frac{2}{E.J} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{q.l^2}{32} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{q.l^2}{8} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \right] = \frac{5}{384} \cdot \frac{q.l^4}{E.J} > 0$$



H.4.31.a



H.4.31.b



H.4.31.c

§ 10. CÁCH TÍNH CHUYỂN VỊ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI TIẾT DIỆN CỦA HỆ.

Khi hệ đàn hồi chịu tác dụng của các nguyên nhân ngoài thì các tiết diện trong hệ nói chung sẽ tồn tại chuyển vị. Bài toán chuyển vị của các tiết diện trong hệ ta đã giải quyết. Các chuyển vị này còn gọi là chuyển vị tuyệt đối.

Thế thì có một vấn đề đặt ra là giữa hai tiết diện của hệ chuyển vị so với nhau như thế nào?, bằng bao nhiêu?. Chuyển vị so với nhau giữa hai tiết diện theo một phương nào đó của hệ gọi là chuyển vị tương đối. Tương tự như chuyển vị tuyệt đối, chuyển vị tương đối cũng tồn tại chuyển vị thẳng và chuyển vị góc xoay tương đối.

Như vậy, nếu cần tìm chuyển vị tương đối giữa hai tiết diện theo phương nào đó, ta chỉ cần tìm chuyển vị tuyệt đối theo phương đó cho từng tiết diện rồi lấy hiệu kết quả với nhau. Có nghĩa là trạng thái "k" cần tạo và tính hai lần. Qua phân tích ta dễ thấy thay vì vậy, có thể tạo trạng thái "k" một lần bằng cách đặt ngay một cặp lực $P_k = 1$ theo phương tìm chuyển vị, ngược chiều nhau ngay từ đầu. Và dĩ nhiên các quá trình xác định chuyển vị vẫn tiến hành như trường hợp tổng quát.

* Ví dụ: Xác định chuyển vị thẳng tương đối giữa hai tiết diện B & C theo phương nối liền hai điểm đó (H.4.32.a). Cho biết $E.J = \text{const}$ và như nhau cho tất cả các thanh. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

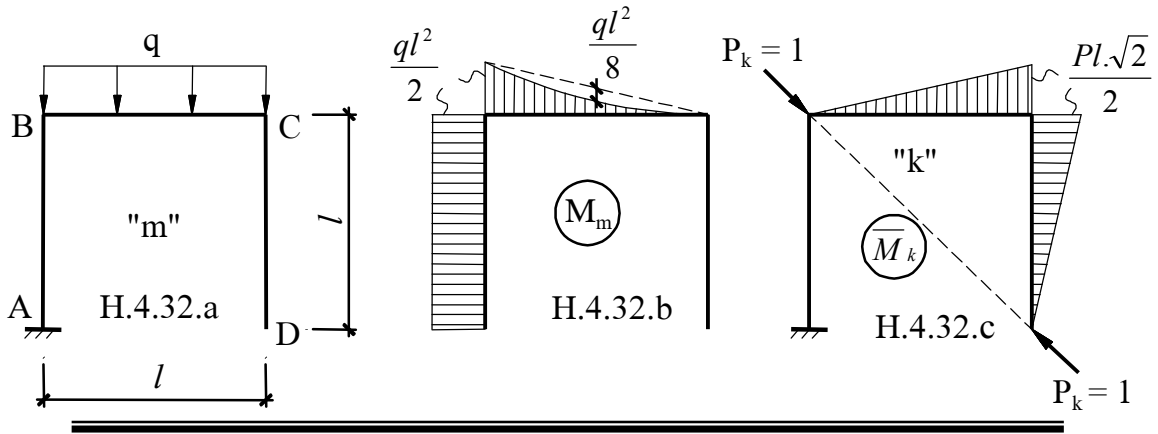
1. Trạng thái "m": Vẽ (M_m) . Kết quả trên hình (H.4.32.b)

2. Trạng thái "k": Vẽ (\bar{M}_k) . Kết quả trên hình (H.4.32.c)

3. Xác định Δ_{B-D} :

$$\Delta_{B-D} = (\bar{M}_k).(M_m) = -\frac{1}{E.J} \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cdot \frac{q.l^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{E.J} \cdot \frac{q.l^2}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{48} \cdot \frac{q.l^3}{E.J} > 0$$

Chuyển vị thẳng hướng vào nhau.



TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA XÂY DỰNG DD & CN
BỘ MÔN KẾT CẤU CÔNG TRÌNH

GIÁO TRÌNH
CƠ HỌC KẾT CẤU II



ĐÀ NẴNG 6 – 2007

CHƯƠNG 5: TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC
§1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ SIÊU TĨNH - BẬC SIÊU TĨNH

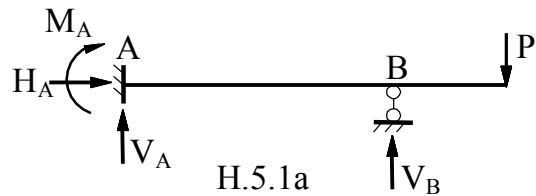
I. Hệ siêu tĩnh:

1. Định nghĩa: Hệ siêu tĩnh là những hệ mà chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học không thôi chưa đủ để xác định toàn bộ các phản lực và nội lực trong hệ. Nói cách khác, đó là hệ bất biến hình và có liên kết thừa.

2. Ví dụ: Xét hệ trên hình (H.5.1a)

- Phần hệ BC là tĩnh định vì có thể xác định được ngay nội lực bằng các phương trình cân bằng tĩnh học.

- Phần hệ AB chưa thể xác định được phản lực chỉ bằng các phương trình cân bằng tĩnh học (4 phản lực V_A, H_A, M_A, V_B nhưng chỉ có 3 phương trình) nên cũng chưa thể xác định được nội lực.



Vậy theo định nghĩa, hệ đã cho là hệ siêu tĩnh.

II. Tính chất của hệ siêu tĩnh:

1. Tính chất 1:

Nội lực, biến dạng và chuyển vị trong hệ siêu tĩnh nói chung là nhỏ hơn so với hệ có cùng kích thước và tải trọng tác dụng.

Hệ tĩnh định	Hệ siêu tĩnh
<p>H.5.1b $\frac{ql^2}{8}$</p>	<p>H.5.1c $\frac{ql^2}{8}$</p>
$ M _{\max} = \frac{ql^2}{8}, y_{\max} = y_C = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$	$ M _{\max} = \frac{ql^2}{12}, y_{\max} = y_C = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EJ}$

2. Tính chất 2: Trong hệ siêu tĩnh có xuất hiện nội lực do các nguyên nhân: biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa và do chế tạo, lắp ráp không chính xác gây ra.

a. Nguyên nhân biến thiên nhiệt độ:

Hệ tĩnh định	Hệ siêu tĩnh
<p>H.5.1d $V_A = 0, V_B = 0$</p>	<p>H.5.1e $M_A \neq 0$</p>

Các liên kết không ngăn cản biến dạng của dầm nên không làm xuất hiện phản lực và nội lực	Các liên kết tại A, B ngăn cản biến dạng của dầm nên làm xuất hiện phản lực và nội lực.
---	---

b. Nguyên nhân chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa:

Hệ tĩnh định	Hệ siêu tĩnh
<p>H.5.1f</p>	<p>H.5.1g</p>
Các liên kết không ngăn cản chuyển vị tại gối B nên dầm chỉ bị nghiêng đi mà không biến dạng nên không làm xuất hiện phản lực và nội lực	Các liên kết tại A, B có xu hướng ngăn cản chuyển vị tại gối C làm cho dầm bị uốn cong do đó làm xuất hiện phản lực và nội lực

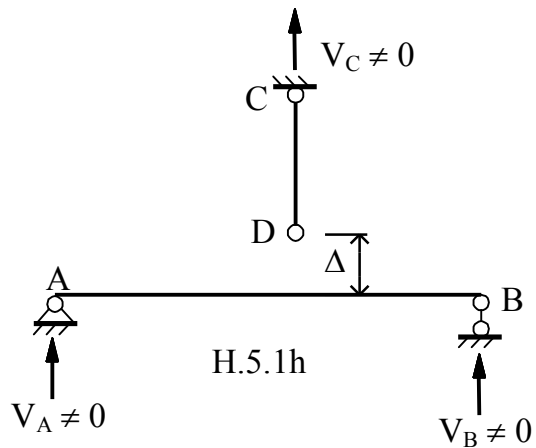
c. Nguyên nhân chế tạo, lắp ráp không chính xác:(H.5.1h)

Dầm tĩnh định AB nếu được ráp thêm thanh CD vào sẽ trở thành hệ siêu tĩnh. Nếu thanh CD do chế tạo hụt 1 đoạn Δ thì khi ráp vào, nó sẽ bị kéo dẫn ra đồng thời dầm AB sẽ bị uốn cong nên sẽ làm phát sinh phản lực và nội lực trong hệ.

3. Tính chất 3:

Nội lực trong hệ siêu tĩnh phụ thuộc vào độ cứng của các cấu kiện trong hệ (EJ, FF, GF...)

*Nhận xét: Hệ siêu tĩnh chịu lực tốt hơn hệ tĩnh định.



III. Bậc siêu tĩnh:

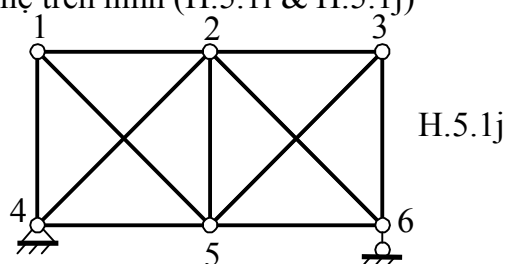
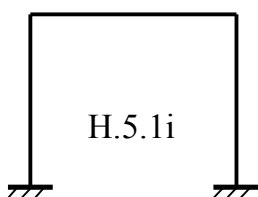
1. Định nghĩa: Bậc siêu tĩnh là số các liên kết thừa tương đương với liên kết loại 1 ngoài số liên kết cần thiết để cho hệ bất biến hình. Ký hiệu n

2. Cách xác định:

Có thể sử dụng các công thức liên hệ giữa số lượng các miếng cứng và các liên kết giữa chúng trong phần cấu tạo hình học của hệ để xác định.

- $n = T + 2K + 3H + C - 3D$ (Cho hệ bất kỳ có nối đất)
- $n = T + 2K + 3H - 3(D - 1)$ (Cho hệ bất kỳ không nối đất)
- $n = D - 2M + C$ (Cho hệ dàn có nối đất)
- $n = D - 2M + 3$ (Cho hệ dàn không nối đất)

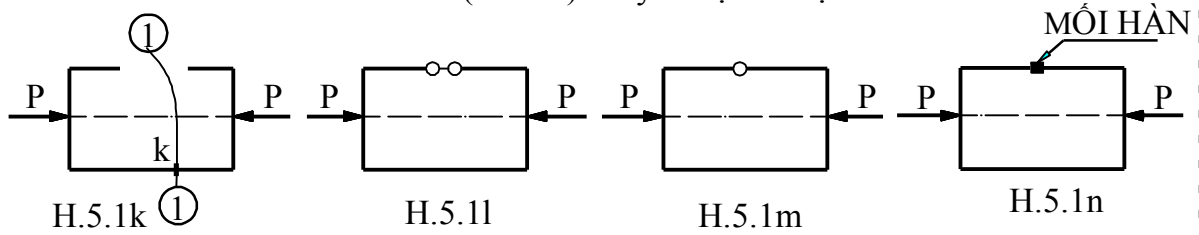
Ví dụ: Xác định bậc siêu tĩnh của hệ trên hình (H.5.1i & H.5.1j)



- Hệ trên hình (H.5.1i) có $n = 0 + 2.0 + 3.0 + 6 - 3.1 = 3$
- Hệ trên hình (H.5.1j) có $n = 11 - 2.6 + 3 = 2$.

Cách phân tích các chu vi kín của hệ:

Xét 1 chu vi hở trên hình (H.5.1k). Đây là hệ tĩnh định.

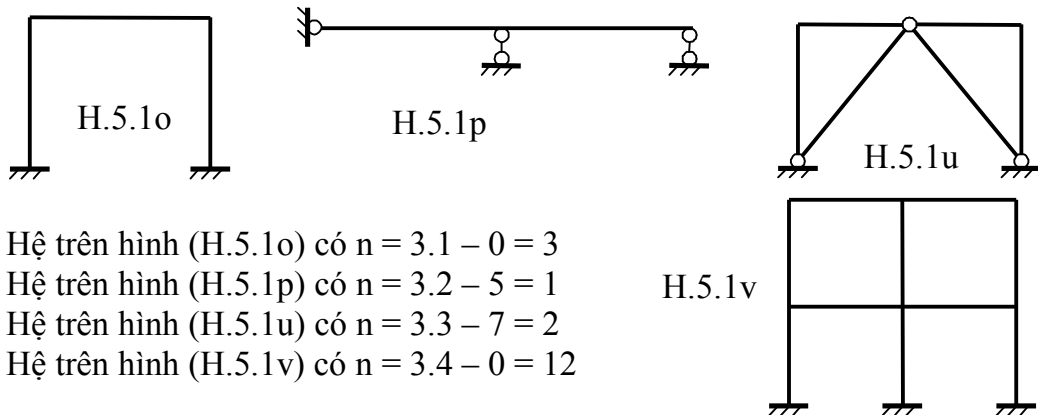


- Nếu nối chu vi đó bằng 1 liên kết thanh (H.5.1l) thì hệ thu được là hệ siêu tĩnh bậc 1 ($n = 1$).
- Nếu nối chu vi đó bằng 1 liên kết khớp (H.5.1m) thì hệ thu được là hệ siêu tĩnh bậc 2 ($n = 2$).
- Nếu nối chu vi đó bằng một liên kết hàn (H.5.1n) thì hệ thu được có bậc siêu tĩnh bằng 3 ($n = 3$). Hệ lúc này còn được gọi là chu vi kín.

Phân tích ngược lại ta thấy 1 chu vi kín có bậc siêu tĩnh bằng 3, nếu thêm vào 1 khớp đơn giản thì bậc siêu tĩnh sẽ giảm đi 1. Vậy nếu gọi V là số chu vi kín, K là số liên kết khớp đơn giản của hệ thì bậc siêu tĩnh của hệ được tính bằng công thức:

$$n = 3V - K \quad (5-1)$$

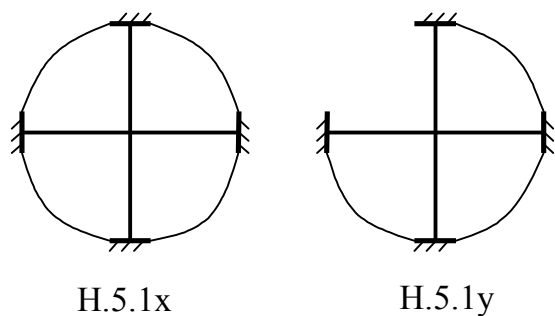
Ví dụ: Xác định bậc siêu tĩnh của các hệ cho trên hình vẽ bên dưới.



- Hệ trên hình (H.5.1o) có $n = 3.1 - 0 = 3$
- Hệ trên hình (H.5.1p) có $n = 3.2 - 5 = 1$
- Hệ trên hình (H.5.1u) có $n = 3.3 - 7 = 2$
- Hệ trên hình (H.5.1v) có $n = 3.4 - 0 = 12$

Chú ý: Cần quan niệm trái đất là 1 chu vi hở (miếng cứng tĩnh định) trong biểu thức (5 - 1)

Nếu quan niệm hệ gồm 4 chu vi kín như trên hình vẽ (H.5.1x) thì bậc siêu tĩnh của hệ $n = 12$. Đây là quan niệm sai vì trái đất tạo thành 1 chu vi kín. Quan niệm hệ gồm 3 chu vi kín như trên hình (H.5.1y) là quan niệm đúng. Và $n = 3.3 - 0 = 9$



S2. NỘI DUNG CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC

I. Hệ cơ bản của phương pháp lực:

Hệ cơ bản của phương pháp lực là hệ được suy ra từ hệ đã cho bằng cách loại bỏ một số hay tất cả các liên kết thừa.

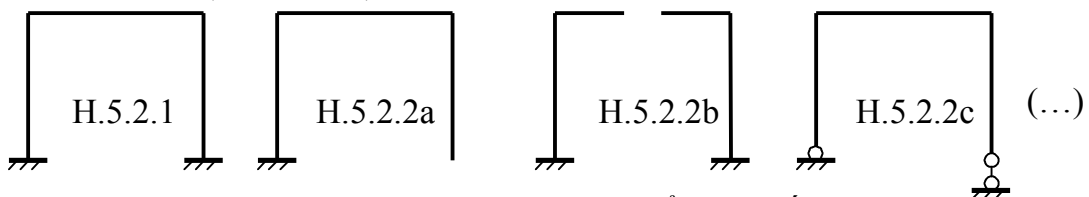
+ Nếu loại bỏ tất cả các liên kết thừa thì hệ cơ bản sẽ là hệ tĩnh định. (thường sử dụng cách này)

+ Nếu loại bỏ một số các liên kết thừa thì hệ cơ bản là hệ siêu tĩnh bậc thấp hơn.

Yêu cầu: Hệ cơ bản phải là hệ bất biến hình và nên thuận tiện cho việc tính toán.

Ví dụ: Lập hệ cơ bản phương pháp lực của hệ siêu tĩnh trên hình (H.5.2.1)

Hệ đã cho có bậc siêu tĩnh $n = 3$. Với hệ cơ bản là tĩnh định có thể được tạo như trên các hình (H.5.2.2abc)



Nhận xét: Với một hệ siêu tĩnh đã cho, có thể có vô số hệ cơ bản được tạo ra.

II. Hệ phương trình cơ bản của phương pháp lực:

Khi tính hệ siêu tĩnh, ta không tính trực tiếp trên hệ đó mà tính hệ cơ bản của nó. Tuy nhiên, hệ cơ bản và hệ ban đầu là có sự khác nhau. Để hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu của nó ta cần so sánh và bổ sung thêm các điều kiện.

Ta đi so sánh hệ siêu tĩnh (H5.2.3) và hệ cơ bản của nó (H5.2.4)

Hệ siêu tĩnh	Hệ cơ bản
<p>H.5.2.3</p>	<p>H.5.2.4</p>
-Tại D tồn tại các phản lực $\{V_D, H_D, M_D\}$. -Tại D không tồn tại chuyển vị	-Tại D không tồn tại phản lực -Tại D nói chung là tồn tại chuyển vị $\{\Delta x_D, \Delta y_D, \Delta \varphi_D\}$

Vậy để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu thì trên hệ cơ bản cần:

- + Đặt thêm vào D các lực (X_1, X_2, X_3) tương đương thay thế (H_D, V_D, M_D) .
- + Thiết lập điều kiện chuyển vị tại D do (X_1, X_2, X_3, P) gây ra bằng không:

$$\begin{cases} \Delta x_D(X_1, X_2, X_3, P) = 0 \\ \Delta y_D(X_1, X_2, X_3, P) = 0 \\ \Delta \varphi_D(X_1, X_2, X_3, P) = 0 \end{cases}$$

Tổng quát: Cho hệ siêu tĩnh chịu các nguyên nhân: tải trọng (P), biến thiên nhiệt độ (t), chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa (Z) và chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ n liên kết thừa. Để hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu tĩnh ban đầu, trên hệ cơ bản cần:

+ Đặt thêm các lực (X_1, X_2, \dots, X_n) tương ứng vị trí và phương các liên kết bị loại bỏ, có chiều tùy ý. Những lực này chưa biết và giữ vai trò ẩn số.

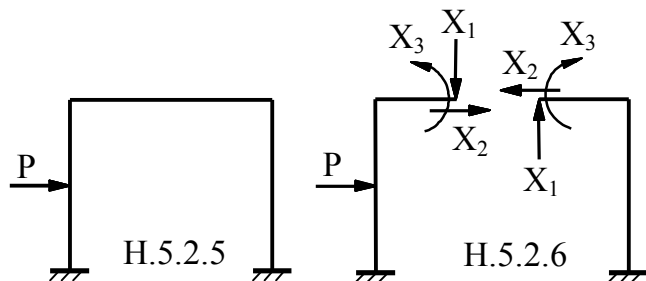
+ Thiết lập điều kiện chuyển vị tương ứng vị trí và phương các liên kết bị loại bỏ do các nguyên nhân ($X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z$) = 0 (chính xác hơn là bằng như trên hệ siêu tĩnh ban đầu). Điều kiện này có thể viết dưới dạng:

$$\begin{cases} \Delta X_1(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z) = 0 \\ \Delta X_2(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z) = 0 \\ \dots \\ \Delta X_n(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z) = 0 \end{cases} \quad (5-2)$$

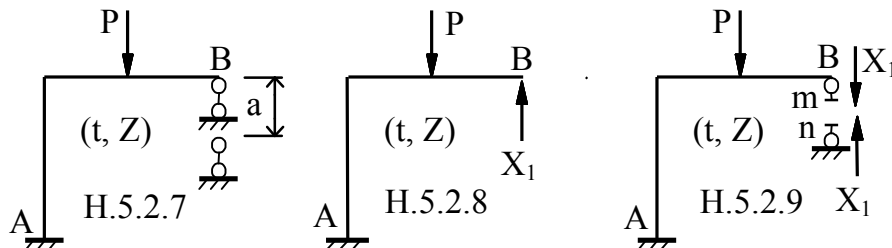
Hệ (5-2) gọi là hệ phương trình cơ bản của phương pháp lực.

**Chú ý:*

- Nếu tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết giữa miếng cứng và miếng cứng thì trên hệ cơ bản phải đặt vào những cặp lực trực đối nhau tại các liên kết bị loại bỏ và điều kiện chuyển vị chính là chuyển vị tương đối giữa 2 tiết diện 2 bên liên kết bị loại bỏ bằng không. Ví dụ hệ cơ bản (H.5.2.6) của hệ trên hình (H.5.2.5)



- Trường hợp liên kết trong hệ chịu chuyển vị cưỡng bức và khi tạo hệ cơ bản ta loại bỏ liên kết này. Ví dụ xét hệ siêu tĩnh trên hình (H.5.2.7) và hệ cơ bản của nó trên hình (H.5.2.8).



Lúc này chuyển vị tại B theo phương X_1 sẽ bằng chuyển vị cưỡng bức. Hệ phương trình cơ bản sẽ là:

$$\Delta X_1(X_1, P, t, Z) = -a.$$

Lấy dấu âm trước a khi X_1 ngược chiều chuyển vị cưỡng bức.

- Cũng trong trường hợp chuyển vị cưỡng bức nhưng nếu tạo hệ cơ bản bằng cách bỏ liên kết này, ví dụ hệ cơ bản tạo trên hình (H.5.2.9).

Có thể xem đây là trường hợp loại bỏ liên kết giữa miếng cứng và miếng cứng nên trên hệ cơ bản ta đặt thêm cặp X_1 . Dù rằng tại tiết diện bị cắt m, n có tồn tại chuyển vị do liên kết bị chuyển vị cưỡng bức nhưng chuyển vị tương đối của chúng theo phương X_1 vẫn bằng không nên hệ phương trình cơ bản:

$$\Delta X_1(X_1, P, t, Z) = 0$$

III. Hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực:

Xét phương trình thứ k của hệ phương trình cơ bản:

$$\Delta X_k(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z) = 0$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, khai triển:

$$\Delta X_k(X_1) + \Delta X_k(X_2) + \dots + \Delta X_k(X_n) + \Delta X_k(P) + \Delta X_k(t) + \Delta X_k(Z) = 0$$

Gọi δ_{km} là chuyển vị tương ứng với vị trí và phương X_k do riêng $X_m = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$$\Delta X_k(X_m) = \delta_{km} \cdot X_m$$

Gọi $\Delta_{kp}, \Delta_{kt}, \Delta_{kz}$ lần lượt là chuyển vị tương ứng vị trí và phương X_k do riêng P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$$\Delta X_k(P) = \Delta_{kp}, \Delta X_k(t) = \Delta_{kt}, \Delta X_k(Z) = \Delta_{kz}$$

Cho $m = \overline{1, n}$ và thay tất cả vào, ta được:

$$\delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots + \delta_{kn}X_n + \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{kz} = 0$$

Cho $k = \overline{1, n}$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} + \Delta_{1t} + \Delta_{1z} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} + \Delta_{2t} + \Delta_{2z} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} + \Delta_{nt} + \Delta_{nz} = 0 \end{cases} \quad (5-3)$$

Hệ phương trình (5-3) gọi là hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực với các ẩn số (X_1, X_2, \dots, X_n) .

Trong đó:

δ_{kk} gọi là hệ số chính, $\delta_{kk} > 0$

$\delta_{km} (k \neq m)$ gọi là hệ số phụ, $\delta_{km} = \delta_{mk}$

$\Delta_{kp}, \Delta_{kt}, \Delta_{kz}$ là các số hạng tự do.

IV. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Như đã nói trong phần hệ phương trình chính tắc, ý nghĩa của các hệ số và các số hạng tự do là chuyển vị trên hệ cơ bản do các nguyên nhân tương ứng gây ra. Vậy việc xác định chúng là đi thực hiện bài toán tìm chuyển vị.

1. Hệ số chính và phụ: (δ_{km})

+ Trạng thái "m": tính hệ cơ bản chịu nguyên nhân $X_m = 1$. Xác định nội lực $\overline{M}_m, \overline{N}_m, \overline{Q}_m$

+ Tạo trạng thái "k": đặt lực $P_k = 1$ tương ứng phương và vị trí của lực X_k trên hệ cơ bản. Xác định nội lực $\overline{M}_k, \overline{N}_k, \overline{Q}_k$. Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\delta_{km} = \sum \int \overline{M}_k \cdot \frac{\overline{M}_m}{EJ} ds + \sum \int \overline{N}_k \cdot \frac{\overline{N}_m}{EF} ds + \sum \int v \overline{Q}_k \cdot \frac{\overline{Q}_m}{GF} ds \quad (5-4)$$

Nếu cho phép áp dụng phép "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin:

$$\delta_{km} = (\overline{M}_m)(\overline{M}_k) + (\overline{N}_m)(\overline{N}_k) + (\overline{Q}_m)(\overline{Q}_k) \quad (5-5)$$

2. Số hạng tự do:

a. Do tải trọng: (Δ_{kp})

+ Trạng thái "m": Tính hệ cơ bản chịu tải trọng. Xác định nội lực: M_p^o, N_p^o, Q_p^o

+ Tạo trạng thái "k": tương tự lúc xác định δ_{km} .

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\Delta_{kP} = \sum \int \bar{M}_k \cdot \frac{M_P^o}{EJ} ds + \sum \int \bar{N}_k \cdot \frac{N_P^o}{EF} ds + \sum \int v \bar{Q}_k \cdot \frac{Q_P^o}{GF} ds \quad (5-6)$$

Nếu cho phép áp dụng phép "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin:

$$\Delta_{kP} = (\bar{M}_m)(M_P^o) + (\bar{N}_m)(N_P^o) + (\bar{Q}_m)(Q_P^o) \quad (5-7)$$

b. Do biến thiên nhiệt độ (Δ_{kt}):

+ Trạng thái "m": là hệ cơ bản chịu nguyên nhân biến thiên nhiệt độ. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, nguyên nhân này sẽ không gây ra nội lực. Công thức thiết lập dưới đây chỉ xét cho trường hợp này.

+ Trạng thái "k": tương tự lúc xác định δ_{km}

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\Delta_{kt} = \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \bar{M}_k ds + \sum \int \alpha t_{cm} \bar{N}_k ds \quad (5-8)$$

Trong trường hợp $\alpha, h, t_{2m}, t_{1m}, t_{cm} = \text{const}$ trên từng đoạn thanh thì:

$$\Delta_{kt} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_k) + \sum \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_k) \quad (5-9)$$

Ý nghĩa cụ thể và dấu của các đại lượng, xem trong chương chuyển vị.

c. Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa: (Δ_{kz})

- Trạng thái "m": là hệ cơ bản chịu nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định, nguyên nhân này không gây ra nội lực. Công thức thiết lập dưới đây chỉ xét cho trường hợp này.

- Trạng thái "k": tương tự khi xác định δ_{km} , nhưng chỉ xác định \bar{R}_{jk} .

Áp dụng công thức Maxwell-Morh:

$$\Delta_{kz} = - \sum \bar{R}_{jk} \cdot Z_j \quad (5-10)$$

Ý nghĩa cụ thể và dấu của các đại lượng, xem trong chương chuyển vị.

**Chú ý:* Nếu lực X_k lấy bằng 1 thì có thể lấy X_k thay thế cho $P_k = 1$ khi tạo trạng thái "k" để xác định các hệ số.

V. Cách tìm nội lực trong hệ siêu tĩnh:

a. Cách tính trực tiếp:

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc xác định các ẩn số X_k ($k = \overline{1, n}$), ta xem chúng như các ngoại lực tác dụng lên hệ cơ bản cùng với các nguyên nhân tác dụng lên hệ siêu tĩnh ban đầu. Giải hệ cơ bản chịu các nguyên nhân này sẽ tìm được các nội lực của hệ. Vì hệ cơ bản thường là hệ tĩnh định nên có thể sử dụng các phương pháp đã quen biết để tìm nội lực.

b. Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng:

Xét 1 đại lượng nghiên cứu S nào đó (nội lực, phản lực, chuyển vị, biểu đồ nội lực...). Theo cách tính trực tiếp nói trên, ta có thể thay thế việc xác định S trên hệ siêu tĩnh bằng cách xác định đại lượng S trên hệ cơ bản chịu nguyên nhân tác dụng lên hệ siêu tĩnh ban đầu và các lực X_k đồng thời tác dụng.

$$S = S(X_1, X_2, \dots, X_n, P, t, Z)$$

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng:

$$S = S(X_1) + S(X_2) + \dots + S(X_n) + S(P) + S(t) + S(Z)$$

Gọi \bar{S}_k là đại lượng S do riêng $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, ta có:

$$S(X_k) = \bar{S}_k \cdot X_k$$

Gọi S_p^o, S_t^o, S_z^o lần lượt là đại lượng S do riêng P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản, thế thì:

$$S(P) = S_p^o, S(t) = S_t^o, S(Z) = S_z^o$$

Cho $k = \overline{1, n}$ thay tất cả vào ta được:

$$S = \overline{S_1}.X_1 + \overline{S_2}.X_2 + \dots + \overline{S_n}.X_n + S_p^o + S_t^o + S_z^o \quad (5-11)$$

Chú ý:

- Đại lượng S có thể được xác định ngay nếu có sẵn $\overline{S_k}, S_p^o, S_t^o, S_z^o$
- Nếu đại lượng S là phản lực hay nội lực và hệ cơ bản là tĩnh định thì các đại lượng S_p^o, S_t^o, S_z^o sẽ không tồn tại.

Sau đây ta sẽ vận dụng biểu thức (5-11) để vẽ các biểu đồ nội lực.

a. Biểu đồ mômen uốn (M):

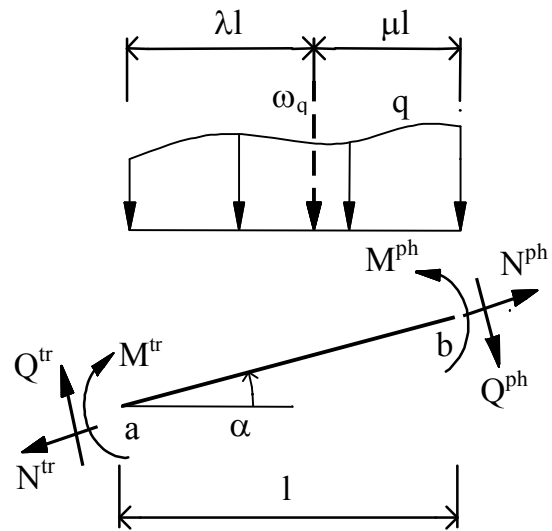
Đối với những hệ dầm và khung gồm những thanh thẳng, trong các bước tính toán trung gian, người ta thường bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đến chuyển vị. Do đó, khi xác định các hệ số người ta không vẽ các biểu đồ (Q), (N) mà chỉ vẽ biểu đồ mômen (M). Trong những trường hợp này, biểu đồ mômen của hệ được vẽ theo biểu thức (5-11) là tiện lợi nhất. Thay đại lượng S bằng biểu đồ (M) ta được:

$$(M) = (\overline{M_1}).X_1 + (\overline{M_2}).X_2 + \dots + (\overline{M_n}).X_n + (M_p^o) + (M_t^o) + (M_z^o) \quad (5-12)$$

b. Biểu đồ lực cắt (Q):

Như phân tích trên, sẽ không thuận lợi nếu vẽ biểu đồ (Q) theo biểu thức (5-11). Sau đây sẽ trình bày cách vẽ biểu đồ lực cắt theo biểu đồ (M) đã vẽ. Để tiện lợi cho việc áp dụng, ta đi thiết lập công thức tổng quát xác định lực cắt ở 2 đầu 1 đoạn thanh thẳng ab tách ra từ hệ chịu tải trọng phân bố liên tục hướng theo 1 phương bất kỳ và có qui luật bất kỳ như trên hình vẽ (H.5.2.10)

Tải trọng tác dụng được mô tả trên (H.5.2.10). Trong đó q, M^{tr} , M^{ph} đã biết, Q^{tr} , N^{tr} , Q^{ph} , N^{ph} chưa biết, giả thiết có chiều dương theo vị trí người quan sát nhìn sao cho tải trọng phân bố q hướng xuống.



H.5.2.10

Từ các điều kiện cân bằng mômen với điểm b và a, ta suy ra:

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha + \mu \cdot \omega_q \cos \alpha$$

$$Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha - \lambda \cdot \omega_q \cos \alpha \quad (5-13)$$

Trong đó:

ω_q : là hợp lực của tải phân bố q trên đoạn thanh ab.

$\lambda l, \mu l$: lần lượt là khoảng cách từ hợp lực ω_q đến đầu trái và phải của thanh ab theo phương nằm ngang.

Nếu tải trọng tác dụng lên thanh ab là phân bố đều:

$$q = \text{const thì } \omega_q = ql, \lambda = \mu = \frac{1}{2}$$

Thay vào biểu thức (5-13)

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha + \frac{1}{2} ql \cdot \cos \alpha \quad (5-14)$$

$$Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha - \frac{1}{2} ql \cos \alpha$$

Nếu trên đoạn thanh ab không chịu tải trọng: $q = 0$ thì $\omega_q = 0$. Thay vào biểu thức (5-13):

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha \quad (5-15)$$

Sau khi xác định được lực cắt từ hai đầu mỗi đoạn thanh cũng chính là tại các tiết diện đặc trưng, tiến hành vẽ biểu đồ lực cắt dựa vào dạng đường của nó như trong phần vẽ biểu đồ nội lực của hệ tĩnh định.

c. Biểu đồ lực dọc:

Cũng tương tự cho biểu đồ (Q), biểu đồ lực dọc (N) được vẽ bằng cách suy ra từ biểu đồ lực cắt. Cách thực hiện như sau:

Tách và xét cân bằng hình chiếu cho mỗi nút của hệ sao cho tại mỗi nút có không quá 2 lực dọc chưa biết. Khi khảo sát cân bằng, ngoài tải trọng tác dụng lên nút còn có nội lực tại các đầu thanh quy tụ vào nút bao gồm: mômen uốn (đã biết nhưng không cần quan tâm), lực cắt (đã biết, lấy trên biểu đồ lực cắt), lực dọc (chưa biết, giả thiết có chiều dương)

Ngoài ra, khi xác định lực dọc cũng có thể vận dụng mối quan hệ giữa lực dọc tại hai đầu thanh từ điều kiện của thanh được vẽ trên hình (H.5.2.10).

$$N^{ph} = N^{tr} + \omega_q \cdot \sin \alpha \quad (5-16)$$

Từ phương trình (5-16) cho thấy nếu trên đoạn thanh không chịu tải trọng hoặc tải trọng tác dụng vuông góc với trục thanh thì lực dọc tại 2 đầu sẽ bằng nhau và cùng gây kéo hoặc gây nén.

Sau khi xác định được lực dọc tại 2 đầu mỗi đoạn thanh, tiến hành vẽ biểu đồ lực dọc như trong phần vẽ biểu đồ nội lực của hệ tĩnh định.

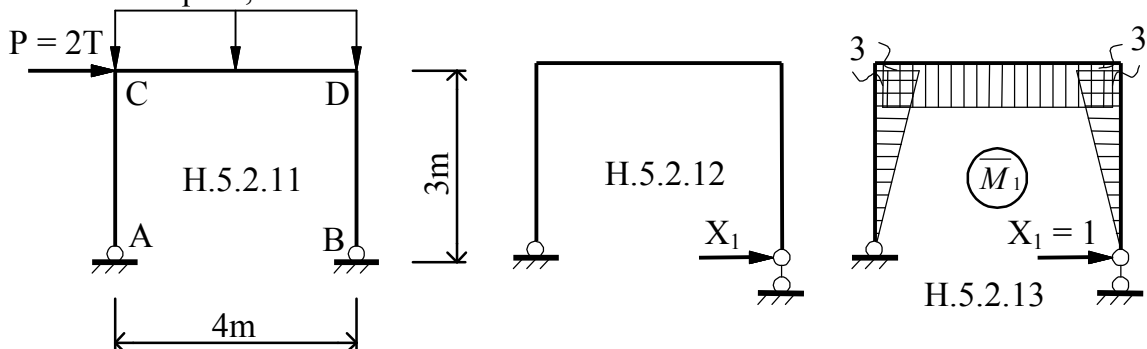
CÁC VÍ DỤ VỀ PHƯƠNG PHÁP LỰC

Ví dụ 1: Vẽ các biểu đồ nội lực trên hình (H.5.2.11). Cho biết độ cứng trong thanh đứng là EJ, trong thanh ngang là 2EJ. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

1. Bậc siêu tĩnh:

$$n = 3V - K = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

$$q = 1,2T/m$$



2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

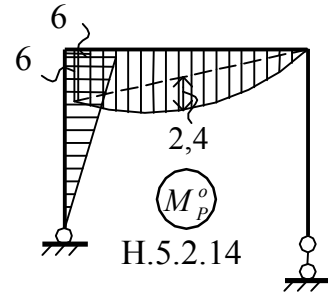
- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ (H.5.2.12)
- Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính

tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (M_p^o)$: (H.5.2.13 & 14)



$$\delta_{11} = (\bar{M}_1) \cdot (\bar{M}_1) = \left[\frac{1}{EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{36}{EJ}$$

$$\Delta_{1p} = (\bar{M}_1) \cdot (M_p^o) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2EJ} \left[\frac{6 \cdot 4}{2} + \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2,4 \right] \cdot 3 = \frac{45,6}{EJ}$$

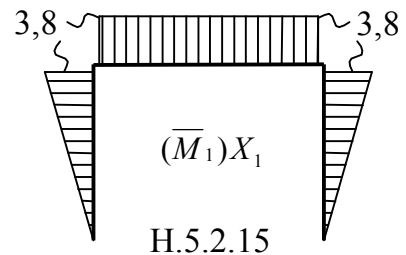
Thay vào phương trình chính tắc:

$$\frac{36}{EJ} X_1 + \frac{45,6}{EJ} = 0 \rightarrow X_1 = \frac{-45,6}{36} = -1,266 < 0$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

- a. Mômen: $(M) = (\bar{M}_1) \cdot X_1 + (M_p^o)$

$(\bar{M}_1) \cdot X_1$: lấy tung độ trên biểu đồ (\bar{M}_1) nhân với giá trị $X_1 = -1,266$. Dấu "-" có nghĩa là ta phải đổi dấu của tung độ sau khi nhân vào. Kết quả trên hình vẽ (H5.2.15). Sau đó lấy tổng đại số các tung độ trên 2 biểu đồ $(\bar{M}_1) X_1$ và (M_p^o) sẽ được biểu đồ (M) . Kết quả trên hình vẽ (H.5.2.16)



- b. Lực cắt: Được vẽ bằng cách suy ra từ (M)

- Trên đoạn AC: $q = 0$

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha = \frac{2,2 - 0}{3} \cdot 1 = 0,733$$

- Trên đoạn BD: $q = 0$

$$Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha = \frac{3,8 - 0}{3} \cdot 1 = 1,266$$

- Trên đoạn CD: $q = \text{const}$

$$Q^{tr} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha + \frac{1}{2} q l \cos \alpha = \frac{-3,8 - (2,2)}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 4 = 0,9$$

$$Q^{ph} = \frac{M^{ph} - M^{tr}}{l} \cos \alpha - \frac{1}{2} q l \cos \alpha = \frac{-3,8 - (2,2)}{4} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 4 = -3,9$$

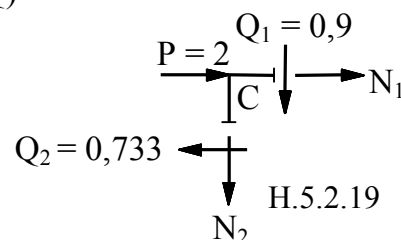
Dựng các tung độ vừa tính và vẽ biểu đồ (Q) như trên hình vẽ (H5.2.17)

- c. Lực dọc: Suy ra từ các biểu đồ lực cắt: (Q)

- Tách nút C:

$$\begin{cases} \sum X = 0 \rightarrow N_1 = Q_2 - P = -1,266 \\ \sum Y = 0 \rightarrow N_2 = -Q_1 = -0,9 \end{cases}$$

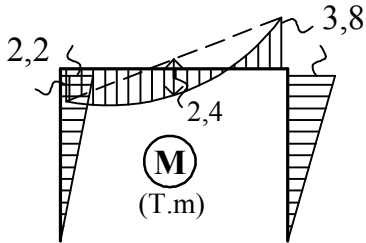
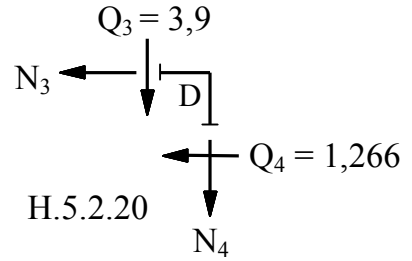
- Tách D:



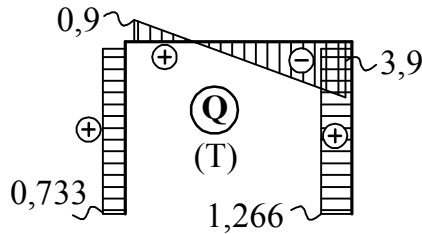
$$\begin{cases} \Sigma X = 0 \rightarrow N_3 = -Q_4 = -1,266 \\ \Sigma Y = 0 \rightarrow N_4 = -Q_3 = -3,9 \end{cases}$$

N_1 giống N_3 theo quan hệ lực dọc tại 2 đầu mỗi đoạn. Suy ra lực dọc tại A và C theo N_2 và N_4 .

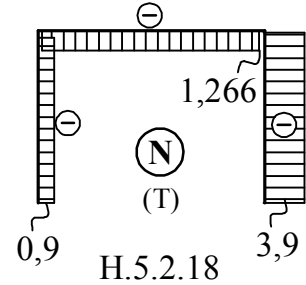
Kết quả biểu đồ (N) được vẽ trên hình vẽ (H5.2.18)



H.5.2.16

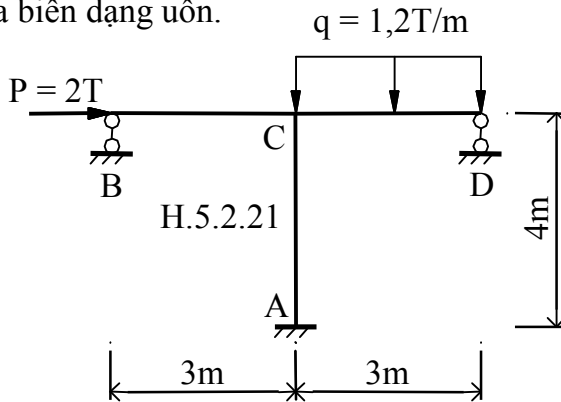


H.5.2.17

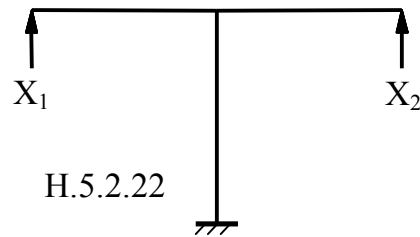


H.5.2.18

Ví dụ 2: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (H.5.2.21). Cho biết độ cứng trong thanh đứng là $2EJ$, trong các thanh ngang là EJ . Chỉ xét đến ảnh hưởng của biến dạng uốn.



H.5.2.21



H.5.2.22

1. Bậc siêu tĩnh:

$$n = 3V - K = 3.2 - 4 = 2$$

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

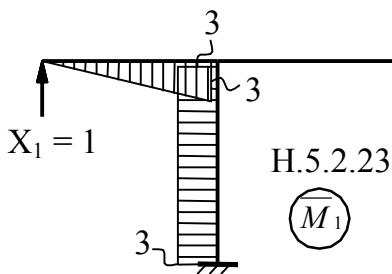
- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ.(H.5.2.22)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

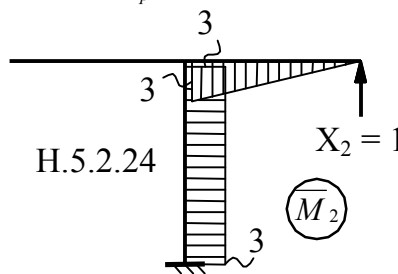
3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

-Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{M}_2), (M_p^o)$



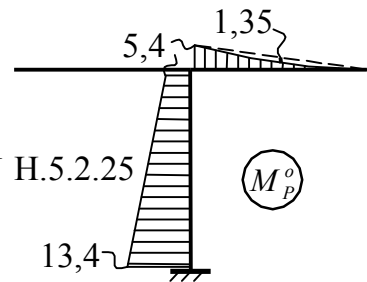
H.5.2.23

(\bar{M}_1)



H.5.2.24

(\bar{M}_2)



H.5.2.25

(M_p^o)

-Xác định các hệ số:

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3,3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{27}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = -\frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = -\frac{18}{EJ}$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) = \delta_{11} = \frac{27}{EJ}$$

$$\Delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_P^o) = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{13,4 + 5,4}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{56,4}{EJ}$$

$$\Delta_{2P} = (\bar{M}_2)(M_P^o) = -\Delta_{1P} - \frac{1}{EJ} \cdot \frac{5,4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 1,35 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{68,55}{EJ}$$

Thay vào hệ phương trình chính tắc sau khi đã bỏ đi EJ dưới mẫu số:

$$\begin{cases} 27 \cdot X_1 - 18 \cdot X_2 + 56,4 = 0 \\ -18 \cdot X_1 + 27 \cdot X_2 - 68,55 = 0 \end{cases} \text{ Giải ra được } \begin{cases} X_1 = -0,713 < 0 \\ X_2 = 2,063 > 0 \end{cases}$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\bar{M}_1) \cdot X_1 + (\bar{M}_2) \cdot X_2 + (M_P^o)$

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.2.28)

b. Lực cắt: Suy ra từ biểu đồ (M)

- Trên đoạn BC: $q = 0$

$$\rightarrow Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{-2,139 - 0}{3} \cdot 1 = -0,713$$

- Trên đoạn AC: $q = 0$

$$\rightarrow Q^{tr} = Q^{ph} = \frac{2,928 - (-5,072)}{4} \cdot 1 = 2$$

- Trên đoạn CD: $q = \text{const.}$

$$Q^{tr} = \frac{0 - 0,789}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 3 \cdot 1 = 1,537$$

$$Q^{ph} = \frac{0 - 0,789}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 3 \cdot 1 = -2,063$$

Kết quả vẽ biểu đồ lực cắt thể hiện trên hình vẽ (H.5.2.29)

c. Lực dọc (N): Suy ra từ

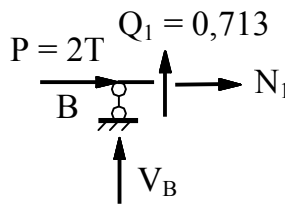
biểu đồ (Q)

* Tách và xét cân bằng

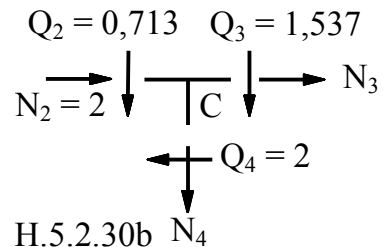
B.

* Tách và xét cân bằng

C.



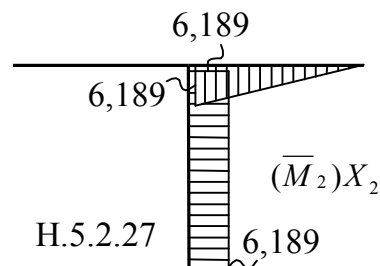
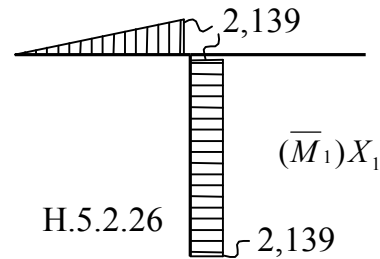
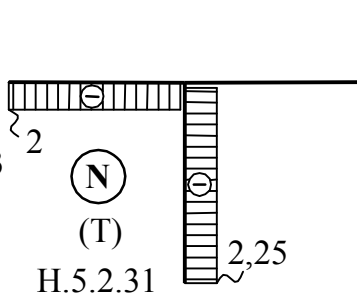
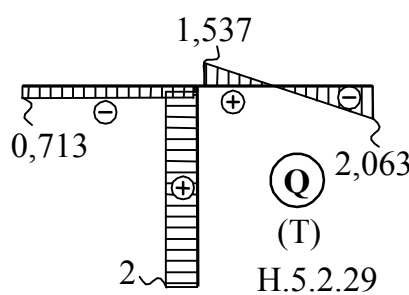
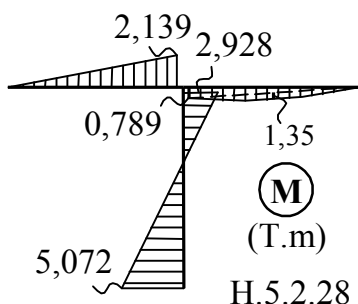
H.5.2.30a



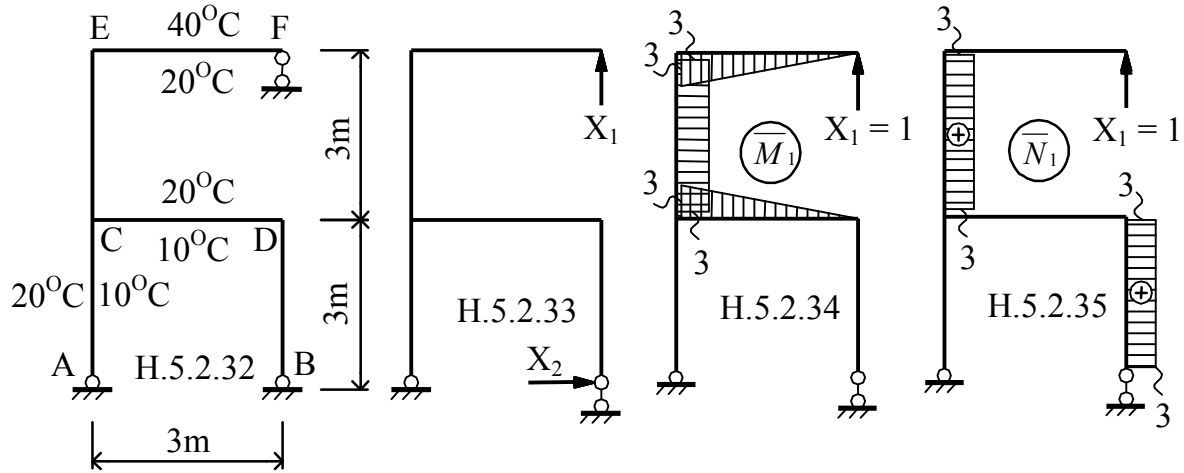
H.5.2.30b

Sau đó suy ra lực dọc tại

các đầu thanh còn lại và vẽ được biểu đồ (N) như trên hình vẽ (H.5.2.31).



Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực trên hình vẽ (H.5.2.32).
 Số liệu: $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot C^{-1}$; thanh ngang có độ cứng $2EJ$, $h = 0,4m$; thanh đứng là EJ , $h = 0,3m$; $EJ = 1080T \cdot m^2$



1. Bậc siêu tĩnh:

$$n = 3K - V = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ (H.5.2.33).

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1t} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2t} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

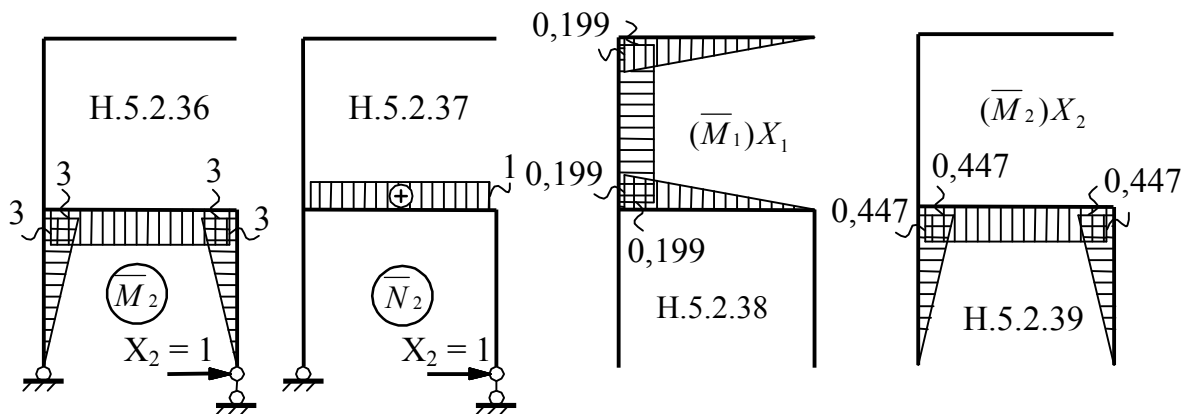
- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{N}_1), (\bar{M}_2), (\bar{N}_2)$

Kết quả thể hiện trên các hình vẽ (H.5.2.34 \rightarrow H.2.2.37)

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \left[\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] \cdot 2 + \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{36}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot 3 = -\frac{27}{4EJ} = \frac{-6,25}{EJ}$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) = \left[\frac{1}{EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] \cdot 2 + \frac{1}{2EJ} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \frac{31,5}{EJ}$$



$$\Delta_{1t} = \sum \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_1) + \sum \alpha \cdot t_c \cdot \Omega(\bar{N}_1) =$$

$$= \frac{\alpha}{0,4}(10-20)\left(-\frac{3,3}{2}\right) + \frac{\alpha}{0,4}(20-40)\left(+\frac{3,3}{2}\right) = -112,5\alpha = -0,00135$$

$$\Delta_{2t} = \sum \frac{\alpha}{h}(t_2 - t_1)\Omega(\bar{M}_2) + \sum \alpha t_c \cdot \Omega(\bar{N}_2)$$

$$= \frac{\alpha}{0,4}(10-20)(3,3) + \frac{\alpha}{0,3}(10-20)\left(\frac{3,3}{2}\right) + \alpha \cdot \frac{10+20}{2} \cdot (1,3) = -330\alpha = -0,00396$$

Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \frac{36}{EJ} \cdot X_1 - \frac{6,25}{EJ} X_2 - 0,00135 = 0 \\ -\frac{6,25}{EJ} \cdot X_1 - \frac{31,5}{EJ} X_2 - 0,00396 = 0 \end{cases} \quad \text{Thay } EJ = 1080 \text{ vào, giải ra } \begin{cases} X_1 = 0,0663 \\ X_2 = 0,148 \end{cases}$$

4. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\bar{M}_1) \cdot X_1 + (\bar{M}_2) \cdot X_2$

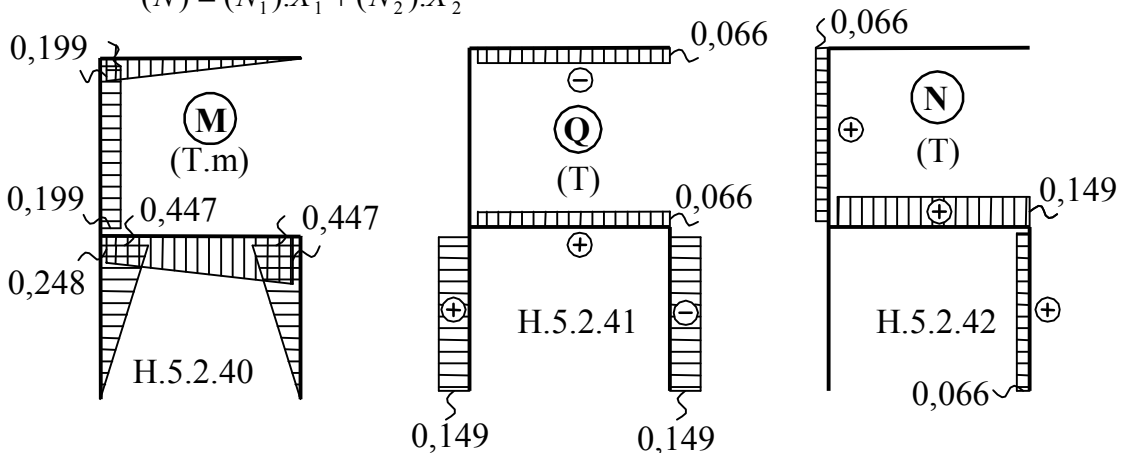
Ở đây $(M_p^o), (M_t^o), (M_z^o)$ không tồn tại

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.2.40)

b. Biểu đồ lực cắt và lực dọc: tương tự ví dụ trước. Kết quả trên hình vẽ (H.5.2.41 & H.5.2.42).

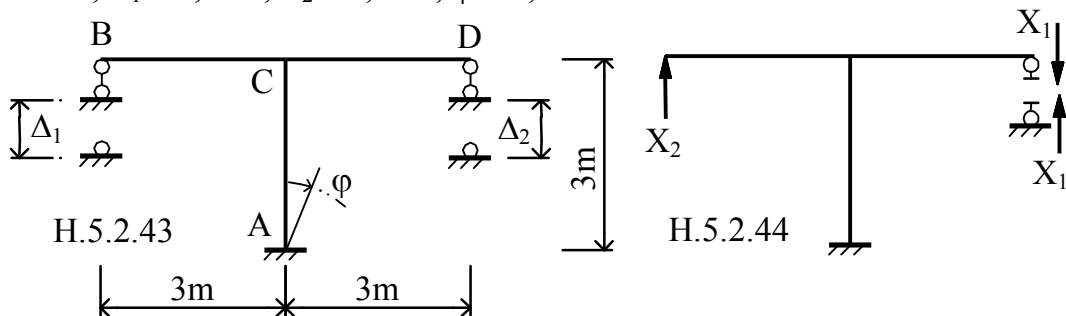
* Chú ý: Ở đây có thể vẽ ngay biểu đồ (N) bằng cách:

$$(N) = (\bar{N}_1) \cdot X_1 + (\bar{N}_2) \cdot X_2$$



Ví dụ 4: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình vẽ (H.5.2.43).

Cho biết độ cứng trong các thanh ngang là EJ, thanh đứng là 2EJ và EJ = 1080T.m², Δ₁ = 0,03m, Δ₂ = 0,02m, φ = 0,005radian

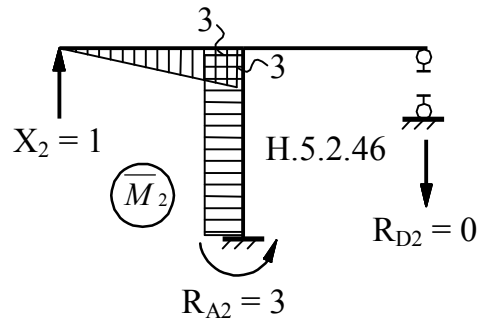
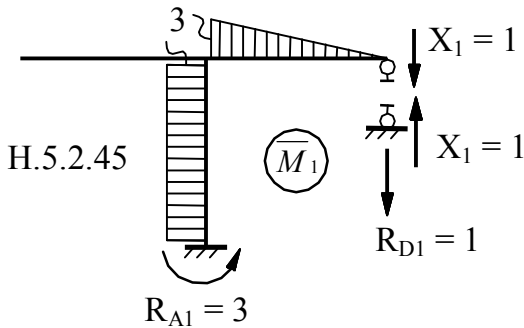


1. Bậc siêu tĩnh: $n = 3V - K = 3 \cdot 2 - 4 = 2$
2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:
 - Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ.(H5.2.44)
 - Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1Z} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2Z} = -\Delta_1 = -0,03 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

-Vẽ $(\bar{M}_1)(\bar{M}_2)$, xác định các \bar{R}_{jk} . Xem hình (H.5.2.45 & H.5.2.46).



$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3.3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2EJ} \cdot 3.3.3 = \frac{22,5}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = \frac{1}{2EJ} \cdot 3.3.3 = \frac{13,5}{EJ}$$

$$\delta_{22} = (\bar{M}_2)(\bar{M}_2) = \frac{22,5}{EJ}$$

$$\Delta_{1Z} = -\sum \bar{R}_{j1} \cdot Z_j = -[\bar{R}_{A1} \cdot \varphi + \bar{R}_{D1} \cdot \Delta_2] = -[-3.0,005 + 1.0,02] = -0,005$$

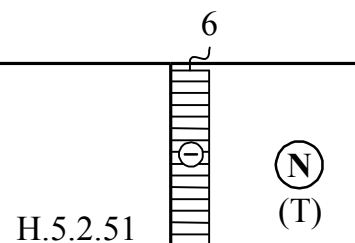
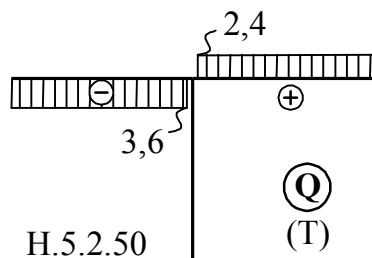
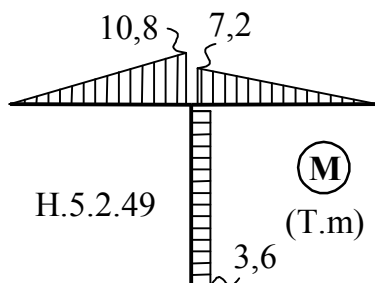
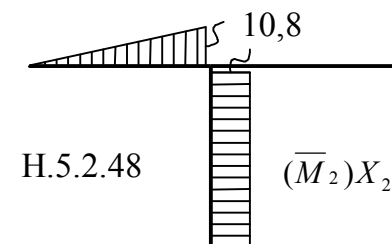
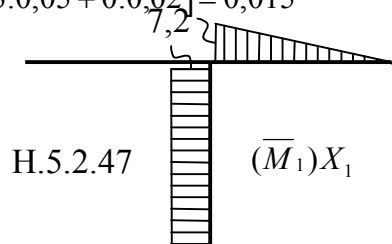
$$\Delta_{2Z} = -\sum \bar{R}_{j2} \cdot Z_j = -[\bar{R}_{A2} \cdot \varphi + \bar{R}_{D2} \cdot \Delta_2] = -[-3.0,05 + 0.0,02] = 0,015$$

Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \frac{22,5}{EJ} \cdot X_1 + \frac{13,5}{EJ} \cdot X_2 - 0,005 = 0 \\ \frac{13,5}{EJ} \cdot X_1 + \frac{22,5}{EJ} \cdot X_2 + 0,015 = -0,03 \end{cases}$$

4. Vẽ biểu đồ nội lực:

- Biểu đồ momen: $(M) = (\bar{M}_1) \cdot X_1 + (\bar{M}_2) \cdot X_2$
 - Biểu đồ lực cắt (Q) và lực dọc (N): vẽ giống các ví dụ trước. Kết quả trên hình vẽ (H.5.2.50 & H.5.2.51).



§3. XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ SIÊU TĨNH

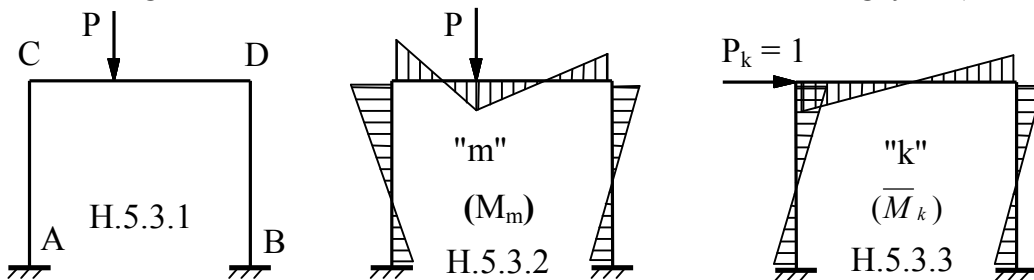
I. Nguyên tắc chung:

Công thức tính chuyển vị Maxwell-Morh là công thức tổng quát áp dụng cho cả hệ tĩnh định và hệ siêu tĩnh. Trong công thức này, ta phải tính hệ với 2 trạng thái:

- Trạng thái "m": là trạng thái ban đầu của hệ.
- Trạng thái "k": được tạo ra bằng cách đặt lực $P_k = 1$ tương ứng với vị trí và phương chuyển vị ở trên sơ đồ tính ban đầu của hệ.

Chẳng hạn, để xác định chuyển vị ngang tại C của hệ trên hình H.5.3.1

- Ở trạng thái "m" ta tính hệ siêu tĩnh ban đầu (H.5.3.2)
- Ở trạng thái "k" ta tính hệ siêu tĩnh đó 1 lần nữa do $P_k = 1$ gây ra (H.5.3.3)



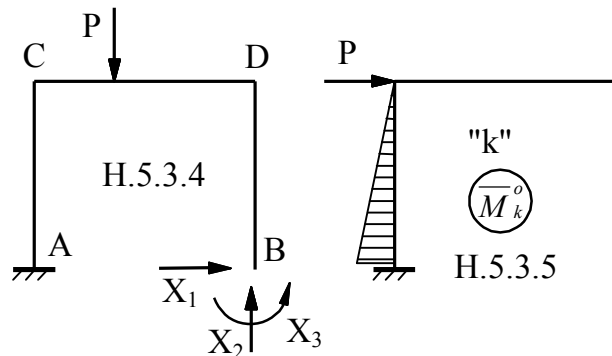
Sau khi tính giải nội lực, thực hiện công thức Morh hoặc nhân biểu đồ Vêrêxaghin sẽ được kết quả.

Nhận xét: Ta phải tính hệ siêu tĩnh 2 lần, khối lượng tính toán nặng nề.

II. Cách sử dụng hệ cơ bản:

Không mất tính tổng quát, ta phân tích cho bài toán xác định chuyển vị của hệ trên hình (H.5.3.1). Giả sử chọn hệ cơ bản của nó trên hình (H.5.3.4). (X_1, X_2, X_3) là nghiệm của hệ phương trình chính tắc.

Khi giải hệ trên hình (H.5.3.1) bằng hệ cơ bản trên hình (H.5.3.4) thì 2 hệ này là tương đương nhau. Nghĩa là nội lực, biến dạng và chuyển vị của 2 hệ là như nhau. Ta thử đi tìm chuyển vị trên hệ cơ bản. Để tìm chuyển vị trên hình (H.5.3.4), ở trạng thái "m" ta cũng cần phải giải tìm X_1, X_2, X_3 , nghĩa là tương đương với trạng thái "m" trên hình (H.5.3.2). Tuy nhiên ở trạng thái "k" được tạo ra trên (H.5.3.5) thì tính khá dễ dàng



vì là hệ tĩnh định. Lúc này, nội lực ở trạng thái "k" được ký hiệu: $\bar{M}_k^o, \bar{N}_k^o, \bar{Q}_k^o$

Vậy, khi tính chuyển vị trong hệ siêu tĩnh, ta tạo trạng thái k trên hệ cơ bản thay vì trên hệ siêu tĩnh ban đầu. Biểu thức Maxwell-Morh trong trường hợp hệ chịu các nguyên nhân (P, t, Z):

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_k^o M_m}{EJ} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k^o N_m}{EF} ds + \sum \int v \frac{\bar{Q}_k^o Q_m}{EJ} ds - \sum \bar{R}_{jk}^o Z_{jm} + \sum \int \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \bar{M}_k^o ds + \sum \int \alpha t_{cm} \bar{N}_k^o ds \quad (5-17)$$

Nếu cho phép áp dụng "nhân biểu đồ" Vêrêxaghin và các đại lượng α , h , t_{2m} , t_{1m} , $t_{cm} = \text{const}$ trên từng đoạn:

$$\Delta_{km} = (\bar{M}_k^o)(\bar{M}_m) + (\bar{N}_k^o)(\bar{N}_m) + (\bar{Q}_k^o)(\bar{Q}_m) + \Sigma \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega(\bar{M}_k^o) + \Sigma \alpha t_{cm} \Omega(\bar{N}_k^o) \quad (5-18)$$

Ý nghĩa của các đại lượng, xem ở chương chuyên vị của hệ thanh.

* Chú ý:

- Các đại lượng xác định ở trạng thái "k" có ký hiệu chỉ số không kèm theo là biểu thị cho việc tạo trên hệ cơ bản.

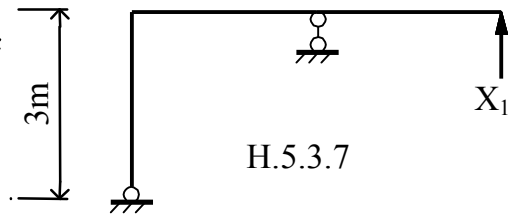
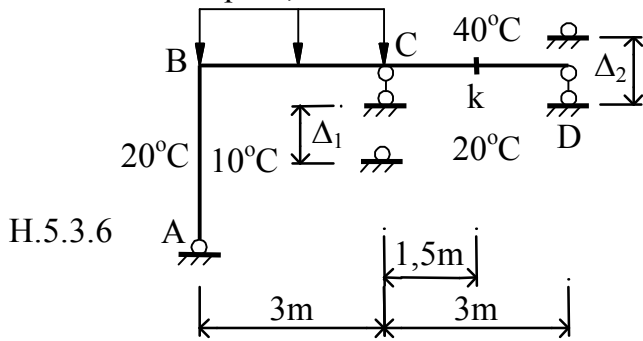
- Vì có nhiều cách tạo hệ cơ bản nên trạng thái "k" sẽ có nhiều sơ đồ tính, ta nên chọn hệ cơ bản để tạo sao cho việc tính toán và nhân biểu đồ được dễ dàng.

Ví dụ: -Vẽ các biểu đồ nội lực và xác định chuyển vị đứng tại k (H.5.3.6).

Cho $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C}^{-1})$, độ cứng chống uốn trong thanh ngang là $2EJ$, trong thanh đứng là EJ ; chiều cao thanh ngang là $h = 0,4\text{m}$; thanh đứng là $h = 0,3\text{m}$; $EJ = 1080\text{T.m}^2$; $\Delta_1 = 0,02\text{m}$; $\Delta_2 = 0,03\text{m}$. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

1. Bậc siêu tĩnh: $n = 3V - K = 3 \cdot 2 - 5 = 1$

$$q = 2,4\text{T/m}$$



H.5.3.6

H.5.3.7

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

tác:

- Hệ cơ bản: tạo trên hình vẽ.(H.5.3.7)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} + \Delta_{1t} + \Delta_{1z} = 0,03$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

-Vẽ (\bar{M}_1) , (\bar{N}_1) , (M_p^o) , xác định các \bar{R}_{j1} .

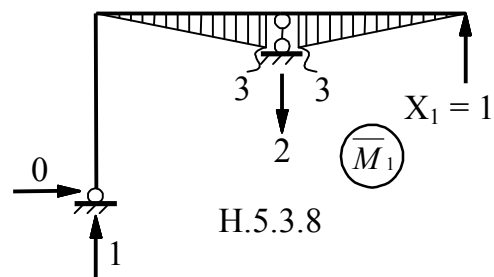
$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \left[\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] \cdot 2 = \frac{9}{EJ}$$

$$\Delta_{1p} = (\bar{M}_1)(M_p^o) = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2,7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{4,05}{EJ}$$

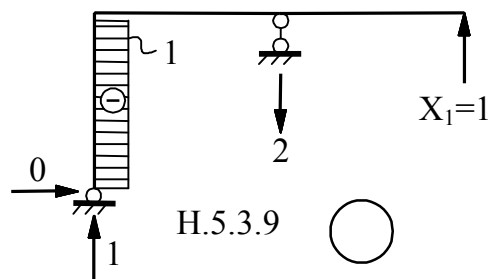
$$\Delta_{1t} = \Sigma \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_1) + \Sigma \alpha t_c \cdot \Omega(\bar{N}_1)$$

$$= \frac{\alpha}{0,4} (10 - 20) \left(-\frac{3 \cdot 3}{2} \right) + \frac{\alpha}{0,4} (20 - 40) \left(-\frac{3 \cdot 3}{2} \right)$$

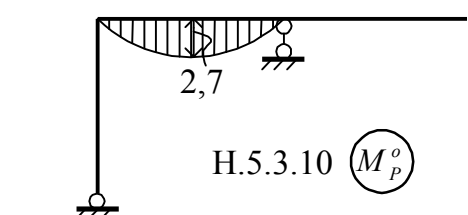
$$= -112,5\alpha = -0,00135$$



H.5.3.8



H.5.3.9



H.5.3.10

$$\Delta_{1r} = -\sum \bar{R}_{j1} \cdot Z_{jm} = -[\bar{R}_{c1} \cdot \Delta_1] = -[2.0,02] = -0,04$$

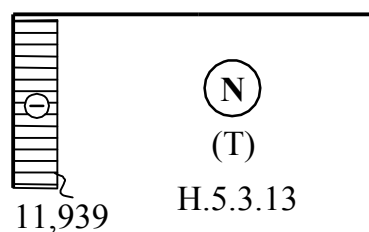
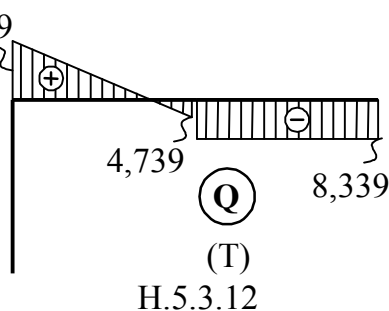
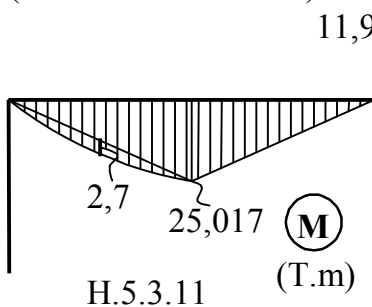
Thay vào: $\frac{9X_1}{EJ} + \frac{4,05}{EJ} = -0,00324 - 0,04 = 0,03$

Thay EJ và giải $X_1 = 8,339 > 0$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\bar{M}_1) \cdot X_1 + (M_p)$

Lực cắt và lực dọc: Tương tự các ví dụ trên. Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.3.12 & H.5.3.13).

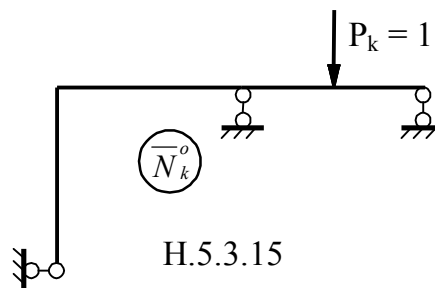
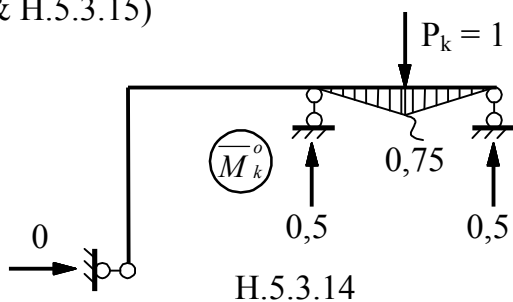


5. Xác định chuyển vị đứng tại k:

- Trạng thái "m": Biểu đồ mômen (M_m) đã vẽ ở trên.

- Trạng thái "k": vẽ $(\bar{M}_k^o), (\bar{N}_k^o)$ trên 1 hệ cơ bản chọn như trên hình (H.5.3.14

& H.5.3.15)



- Xác định chuyển vị đứng tại k:

$$y_k = (\bar{M}_k^o)(M_m) - \sum \bar{R}_{jk}^o Z_{jm} + \sum \frac{\alpha}{h} (t_{2m} - t_{1m}) \Omega (\bar{M}_k^o) + \sum \alpha t_{cm} \Omega (\bar{N}_k^o)$$

$$= \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{0,75 \cdot 3}{2} \cdot \frac{25,017}{2} - [-0,5 \cdot 0,02 + 0,05 \cdot 0,03] + \frac{\alpha}{0,4} (20 - 40) \left(\frac{0,75 \cdot 3}{2} \right)$$

$$= \frac{7,036}{EJ} - 0,005 - \frac{22,5\alpha}{0,4} = 0,839(mm) > 0$$

§4. KIỂM TRA KẾT QUẢ TÍNH TOÁN CỦA PHƯƠNG PHÁP LỰC

Do phải thực hiện nhiều phép tính trung gian khi giải hệ siêu tĩnh nên dễ mắc phải những sai số lớn hoặc sai lầm trong kết quả cuối cùng. Để tránh những sai số lớn ta phải tính chính xác các phép tính trung gian. Để tránh những sai lầm ta cần kiểm tra kết quả.

I. Kiểm tra quá trình tính toán:

1. Kiểm tra các biểu đồ đơn vị (\bar{M}_k) và biểu đồ (M_p^o):

- Sử dụng các liên hệ vi phân và điều kiện cân bằng của từng phần hệ tách ra để kiểm tra.

- Vẽ biểu đồ (\bar{M}_s) do các lực $X_1 = X_2 = \dots X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra. Kiểm tra mối quan hệ:

$$(\bar{M}_s) \equiv (\bar{M}_1) + (\bar{M}_2) + \dots + (\bar{M}_n) \quad (5-19)$$

2. Kiểm tra các hệ số: (δ_{km})

$$(\bar{M}_s)(\bar{M}_k) = \delta_{k1} + \delta_{k2} + \dots + \delta_{kn} = \sum_{i=1}^n \delta_{ki} \quad (5-20)$$

$$(\bar{M}_s)(\bar{M}_s) = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \delta_{km}$$

Chứng minh các điều kiện kiểm tra:

- Theo ý nghĩa của biểu đồ (\bar{M}_s) và các biểu đồ (\bar{M}_k) nên theo nguyên lý cộng tác dụng, điều kiện (5-19) phải thỏa mãn.

- Thay (5-19) vào 2 điều kiện bên dưới và khai triển sẽ có 2 điều kiện (5-20).

3. Kiểm tra các số hạng tự do:

a. Kiểm tra: (Δ_{kp})

Biểu thức kiểm tra:

$$(\bar{M}_s)(M_p^o) = \sum_{k=1}^n \Delta_{kp} \quad (5-21)$$

Thay (M_s) từ điều kiện (5-19) vào và triển khai ta được điều kiện (5-21).

b. Kiểm tra: (Δ_{kt})

Biểu thức kiểm tra:

$$\sum \alpha t_c \cdot \Omega(\bar{N}_s) + \sum \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_s) = \sum_{k=1}^n \Delta_{kt} \quad (5-22)$$

Trong đó $\Omega(\bar{M}_s)$, $\Omega(\bar{N}_s)$ lần lượt là diện tích biểu đồ mômen và lực dọc do $X_1 = X_2 = \dots X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra. Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$\Omega(\bar{M}_s) = \Omega(\bar{M}_1) + \Omega(\bar{M}_2) + \dots + \Omega(\bar{M}_n)$$

$$\Omega(\bar{N}_s) = \Omega(\bar{N}_1) + \Omega(\bar{N}_2) + \dots + \Omega(\bar{N}_n)$$

Thay vào ta sẽ chứng minh được điều kiện (5-23)

c. Kiểm tra: (Δ_{kz})

Biểu thức kiểm tra: $-\sum \bar{R}_{js} \cdot Z_{jm} = \sum \Delta_{kz} \quad (5-24)$

Trong đó \bar{R}_{js} là phản lực tại liên kết j do $X_1 = X_2 = \dots X_n = 1$ đồng thời tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

Chứng minh tương tự các biểu thức trên.

4. Kiểm tra việc giải hệ phương trình chính tắc:

Do việc làm tròn số khi tính toán giải hệ phương trình chính tắc nên khi thay thế ngược các lực X_k đã tìm được vào thì các phương trình thường khác không.

Người ta đánh giá sai số của mỗi phương trình dưới dạng sai số tương đối ε .

$$\varepsilon = \frac{A - B}{A} \cdot 100\% \leq [\varepsilon] \quad (5-25)$$

Trong đó: A, B là tập hợp các số liệu của mỗi phương trình cần kiểm tra dưới dạng A - B, $[\varepsilon]$ sai số tương đối cho phép.

II. Kiểm tra kết quả cuối cùng:

Biểu thức kiểm tra:
$$\begin{aligned} (M)(\bar{M}_k) &= -\Delta_{kt} - \Delta_{kz} \\ (M)(\bar{M}_s) &= -\Sigma\Delta_{kt} - \Sigma\Delta_{kz} \end{aligned} \quad (5-26)$$

Chứng minh điều kiện kiểm tra:

$$\begin{aligned} \delta_{k1}X_1 + \delta_{k2}X_2 + \dots \delta_{kn}X_n + \Delta_{kp} + \Delta_{kt} + \Delta_{kz} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\bar{M}_k)(\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_k)(\bar{M}_2)X_2 + \dots (\bar{M}_k)(\bar{M}_n)X_n + (\bar{M}_k)(M_p^o) &= -\Delta_{kt} - \Delta_{kz} \\ \Leftrightarrow (\bar{M}_k)(\bar{M}_1X_1 + \bar{M}_2X_2 + \dots \bar{M}_nX_n + (M_p^o)) &= -\Delta_{kt} - \Delta_{kz} \\ \Leftrightarrow (\bar{M}_k)(M) &= -\Delta_{kt} - \Delta_{kz} \end{aligned}$$

$(M)(\bar{M}_s) = -\Sigma\Delta_{kt} - \Sigma\Delta_{kz}$: chứng minh tương tự.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ mômen và kiểm tra lại kết quả tính của hệ trên H.5.4.1. Cho độ cứng trong tất cả các thanh là $EJ = \text{const}$.

1. Vẽ biểu đồ mômen (M):

Bậc siêu tĩnh $n = 2$

Hệ cơ bản được tạo trên hình H.5.4.2.

Các hệ số được xác định:

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2a \cdot 2a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{8a^3}{3EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_2) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2a \cdot 2a}{2} \cdot a = \frac{2a^3}{EJ}$$

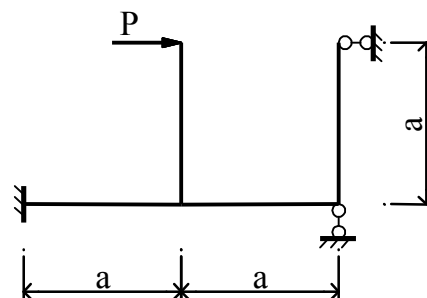
$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a + \frac{1}{EJ} \cdot a \cdot 2a \cdot a = \frac{7a^3}{3EJ}$$

$$\Delta_{1p} = (\bar{M}_1)(M_p^o) = -\frac{1}{EJ} \left(\frac{a + 2a}{2} \cdot a \cdot Pa \right) = -\frac{1,5 \cdot Pa^3}{EJ}$$

$$\Delta_{2p} = (\bar{M}_2)(M_p^o) = -\frac{1}{EJ} \cdot a \cdot a \cdot Pa = -\frac{Pa^3}{EJ}$$

Hệ phương trình chính tắc sau khi đã quy đồng và bỏ $3EJ$ dưới mẫu số:

$$\begin{cases} 8a^3 X_1 + 6a^3 X_2 - 4,5Pa^3 = 0 \\ 6a^3 X_1 + 7a^3 X_2 - 3Pa^3 = 0 \end{cases} \text{ Giải ra } \begin{cases} X_1 = 0,675P \\ X_2 = -0,15P \end{cases}$$



H.5.4.1



H.5.4.2

Vẽ biểu đồ mômen (M): $(M) = (\bar{M}_1).X_1 + (\bar{M}_2).X_2 + (M_p^o)$ Xem hình (H.5.4.6)

2. Kiểm tra kết quả:

- Kiểm tra biểu đồ: $(\bar{M}_1) + (\bar{M}_2) \equiv (\bar{M}_s)$:

thấy đúng

(\bar{M}_s) vẽ trên hình (H.5.4.7)

- Kiểm tra các hệ số:

Nhân 2 biểu đồ:

$$(\bar{M}_s)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2a \cdot 2a}{2} \cdot \left[a + \frac{2}{3} \cdot 2a \right] = \frac{14a^3}{3EJ}$$

Mặt khác: $\delta_{11} + \delta_{12} = \frac{8a^3}{3EJ} + \frac{2a^3}{EJ} = \frac{14a^3}{3EJ}$

(đúng)

Nhân 2 biểu đồ:

$$(\bar{M}_s)(\bar{M}_2) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{(3a+a)}{2} \cdot 2a \cdot a + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a = \frac{13a^3}{3EJ}$$

Mặt khác: $\delta_{21} + \delta_{22} = \frac{2a^3}{EJ} + \frac{7a^3}{3EJ} = \frac{13a^3}{3EJ}$ (đúng)

Nhân 2 biểu đồ:

$$(\bar{M}_s)(\bar{M}_s) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a + \frac{2a}{6EJ} [2 \cdot 9a^2 + 2a^2 + 2 \cdot 3a^2] = \frac{a^3}{3EJ} + \frac{26a^3}{3EJ} = \frac{27a^3}{3EJ} = \frac{9a^3}{EJ}$$

Mặt khác: $\delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{14a^3}{3EJ} + \frac{13a^3}{3EJ} = \frac{9a^3}{EJ}$ (đúng)

- Kiểm tra số hạng tự do:

Nhân 2 biểu đồ:

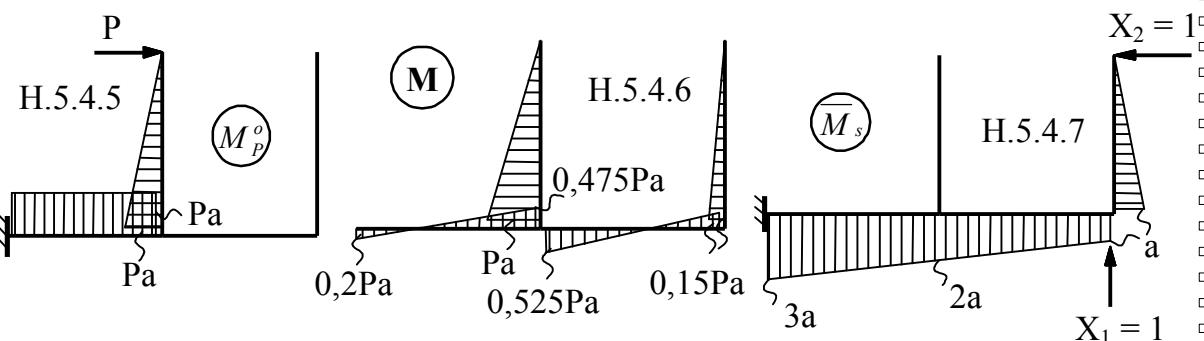
$$(\bar{M}_s)(M_p^o) = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{(3a+2a)}{2} \cdot a \cdot Pa = -\frac{2,5 \cdot Pa^3}{EJ}$$

Mặt khác:

$$\Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -\frac{1,5Pa^3}{EJ} - \frac{Pa^3}{EJ} = -\frac{2,5Pa^3}{EJ}$$
 (đúng)

- Kiểm tra kết quả cuối cùng:

Nhân 2 biểu đồ:



$$(\bar{M}_s)(M) = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{a \cdot a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,15Pa + \frac{a}{6EJ} [2 \cdot 3a \cdot 0,2Pa - 2 \cdot 2a \cdot 0,475Pa - 3a \cdot 0,475Pa + 2a \cdot 0,2Pa] \\ + \frac{a}{6EJ} [2 \cdot 2a \cdot 0,525Pa - 2 \cdot a \cdot 0,15Pa - 2a \cdot 0,15Pa + a \cdot 0,525Pa] = 0$$

*Chú ý:

- Các biểu thức điều kiện kiểm tra vẫn đúng trong trường hợp có kể đến ảnh hưởng của lực cắt và lực dọc.
- Khối lượng tính toán kiểm tra còn nhiều.
- Khi điều kiện kiểm tra thỏa mãn thì cũng chưa thể loại trừ được khả năng xảy ra sai lầm.

§5. MỘT SỐ ĐIỀU CẦN CHÚ Ý KHI TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẬC CAO

I. Các biện pháp nâng cao độ chính xác của kết quả tính toán:

- Chọn phương pháp tính cho số lượng ẩn số là ít nhất (phương pháp lực, phương pháp chuyển vị, phương pháp hỗn hợp và liên hợp...)
- Khi sử dụng phương pháp lực nên chọn hệ cơ bản để sao cho các ẩn X_k ít ảnh hưởng đến kết quả cuối cùng.
- Dùng các biện pháp nhằm giảm bậc của hệ phương trình chính tắc. (sẽ trình bày ở dưới)

II. Các biện pháp làm giảm nhẹ khối lượng tính toán:

1. Các biện pháp giảm bậc của hệ phương trình chính tắc:

- Chọn phương pháp tính cho số ẩn số là ít nhất (đã nói ở trên)
- Khi chọn hệ cơ bản của phương trình lực, ta chọn hệ cơ bản là hệ siêu tĩnh bậc thấp thay vì chọn hệ cơ bản tĩnh định.
- Nên sử dụng tính chất đối xứng của hệ nếu hệ là hệ đối xứng

2. Các biện pháp đơn giản hoá cấu trúc của hệ phương trình chính tắc:

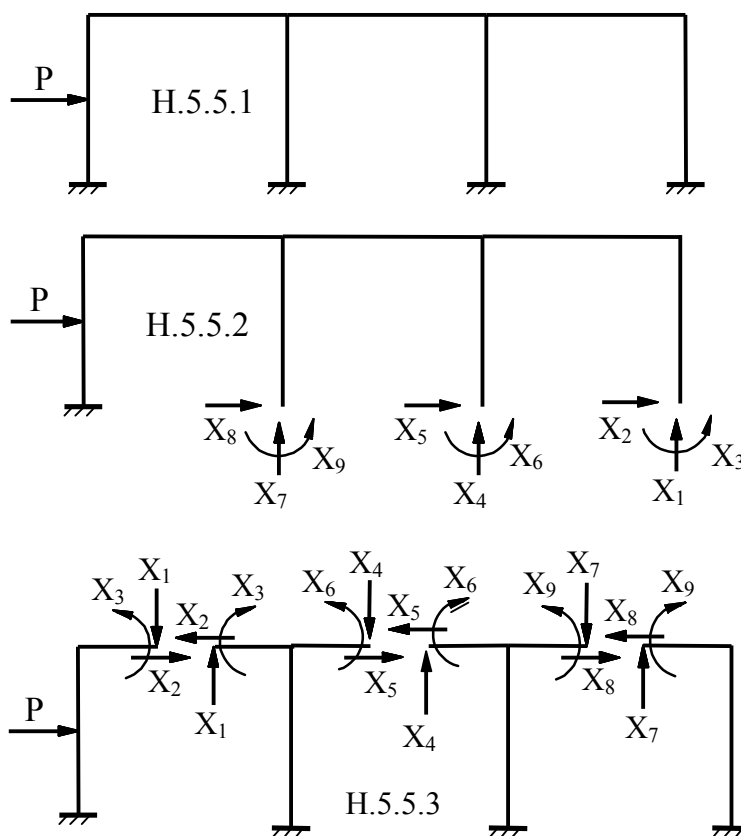
Hệ phương trình chính tắc có cấu trúc đơn giản khi chúng có nhiều hệ số phụ bằng không. Để đạt được mục đích này, ta có thể thực hiện các cách sau:

- Sử dụng tính chất đối xứng của hệ nếu hệ đối xứng.
- Chọn hệ cơ bản hợp lý bằng cách chia hệ thành nhiều bộ phận độc lập. Vì lúc này, các biểu đồ đơn vị sẽ phân bố cục bộ. Việc xác định các hệ số của phương trình chính tắc sẽ đơn giản và triển vọng có nhiều hệ số phụ bằng không. Mặc khác, việc làm này còn làm giảm nhẹ khối lượng tính toán ở các khâu: xác định nội lực, xác định các hệ số và số hạng tự do, giải hệ phương trình chính tắc.

Xét hệ siêu tĩnh trên hình (H.5.5.1), ta nêu ra 2 cách để chọn hệ cơ bản so sánh:

+ Với hệ cơ bản chọn trên hình (H.5.2.2), nội lực trên hệ này nói chung sẽ phân khối trên toàn hệ. Do đó, việc xác định các hệ số và số hạng tự do mất nhiều công sức. Các hệ số phụ đều khác không.

+ Với hệ cơ bản chọn trên hình (H.5.5.3), các biểu đồ đơn vị chỉ phân bố trên 1 hoặc 2 bộ phận lân cận của hệ. Do đó, việc vẽ biểu đồ nội lực, xác định các hệ số và số hạng tự do sẽ đơn giản, có nhiều hệ số phụ bằng không.



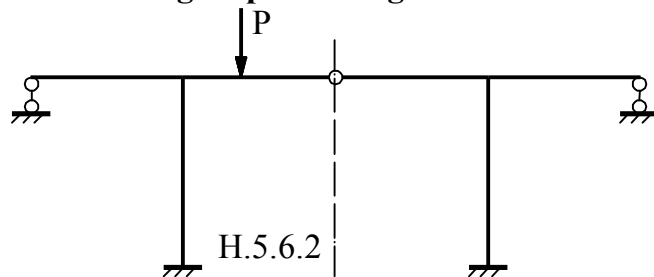
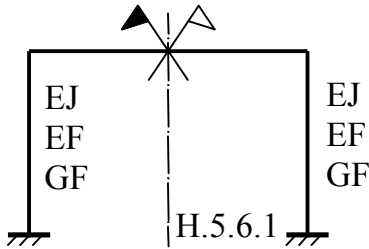
$$\delta_{17} = \delta_{71} = \delta_{18} = \delta_{81} = \delta_{19} = \delta_{91} = \delta_{27} = \delta_{72} = \delta_{29} = \delta_{92} = \delta_{37} = \delta_{73} = \\ = \delta_{38} = \delta_{83} = \delta_{39} = \delta_{93} = 0$$

- Sử dụng các thanh tuyệt đối cứng để thay đổi vị trí và phương các ẩn số (nghiên cứu ở phần sau).

S6. CÁCH VẬN DỤNG TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA HỆ ĐỐI XỨNG

Hệ đối xứng là hệ có kích thước, hình dạng hình học, độ cứng và kiên kết đối xứng qua 1 trục (H.5.6.1)

I. Biện pháp sử dụng cặp ẩn số đối xứng và phản xứng:

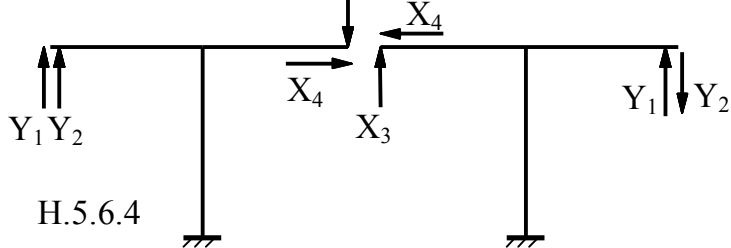
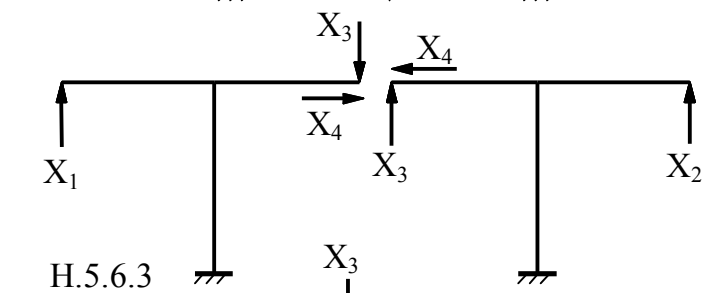


Xét hệ siêu tĩnh đối xứng chịu tải trọng tác dụng như trên hình (H.5.6.2). Chọn hệ cơ bản cũng có tính chất đối xứng như trên hình (H.5.6.3). Có 2 loại ẩn số:

- Cặp ẩn số đối xứng X_4 và phản xứng X_3 .

- Cặp ẩn số chỉ có vị trí đối xứng X_1 và X_2 .

Để triệt để sử dụng tính đối xứng của hệ, ta phân tích X_1, X_2 thành hai cặp: cặp đối xứng Y_1 và cặp phản ứng Y_2 như trên hình vẽ (H.5.6.4). Tức là:



$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 = X_1 \\ Y_1 + Y_2 = X_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \\ Y_2 = \frac{X_1 - X_2}{2} \end{cases}$$

Các ẩn số lúc này là (Y_1, Y_2, X_3, X_4)

Hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{cases} \delta_{11}Y_1 + \delta_{12}Y_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}Y_1 + \delta_{22}Y_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{31}Y_1 + \delta_{32}Y_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + \Delta_{3P} = 0 \\ \delta_{41}Y_1 + \delta_{42}Y_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0 \end{cases}$$

Mặc khác, đối với hệ đối xứng có tính chất sau:

- Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng (phản ứng) thì biểu đồ mômen sẽ đối xứng (phản ứng). Suy ra: $(\bar{M}_1), (\bar{M}_4)$ sẽ đối xứng; $(\bar{M}_2), (\bar{M}_3)$ sẽ phản ứng.

- Kết quả nhân biểu đồ phản ứng với biểu đồ đối xứng sẽ bằng không. Suy ra:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{24} = \delta_{42} = \delta_{43} = \delta_{34} = 0$$

Thay vào, ta được:

$$\begin{cases} \delta_{11}Y_1 + \delta_{14}X_4 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{41}Y_1 + \delta_{44}X_4 + \Delta_{4P} = 0 \end{cases} \quad \text{(a) (chứa cặp ẩn đối xứng)}$$

$$\begin{cases} \delta_{22}Y_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0 \\ \delta_{32}Y_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \end{cases} \quad \text{(b) (chứa cặp ẩn phản xứng)}$$

* **Kết luận:** Với hệ đối xứng có bậc siêu tĩnh bằng n, nếu áp dụng các cặp ẩn số đối xứng và phản xứng ta có thể đưa hệ phương trình chính tắc về hai hệ phương trình độc lập: 1 hệ gồm n₁ phương trình chứa ẩn đối xứng, 1 hệ gồm n₂ phương trình chứa ẩn phản xứng với n₁ + n₂ = n.

* **Các trường hợp đặc biệt:**

1. Khi nguyên nhân bên ngoài tác dụng đối xứng:

Xét lại hệ đã phân tích ở trên thì lúc này (M_P^o) sẽ đối xứng. Suy ra Δ_{2P} = Δ_{3P} = 0. Thay vào hệ (b) thì được Y₂ = X₃ = 0

Vậy 1 hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì các ẩn phản xứng = 0

2. Khi nguyên nhân bên ngoài tác dụng phản xứng:

Xét lại hệ đã phân tích ở trên thì tương tự ta sẽ có được Y₁ = X₄ = 0

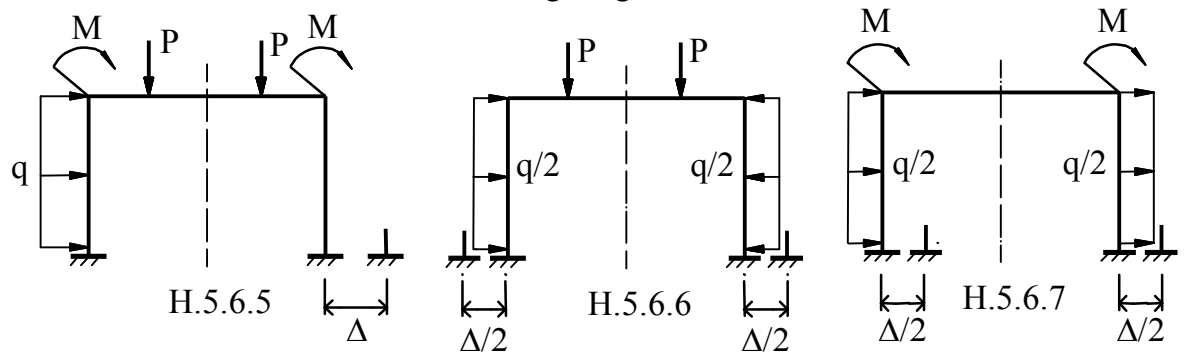
Vậy khi hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì các ẩn đối xứng = 0

II. Biện pháp biến đổi sơ đồ tính:

* **Các đặc điểm của hệ đối xứng:**

- Một hệ đối xứng chịu nguyên nhân bất kỳ bao giờ cũng có thể phân tích thành tổng của 2 hệ: hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng với hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản xứng.

Ví dụ: Hệ trên hình H.5.6.5 bằng tổng hai hệ trên hình H.5.6.6 với H.5.6.7.



- Trong hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng thì chuyển vị, mômen uốn, lực dọc sẽ đối xứng, còn lực cắt có tính phản ứng.

- Trong hệ đối xứng chịu nguyên nhân phản ứng thì chuyển vị, mômen, lực dọc sẽ phản xứng, còn lực cắt có tính đối ứng.

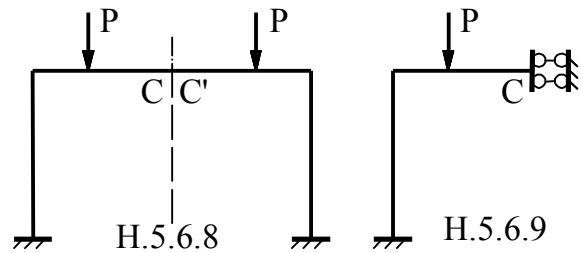
Như vậy với các đặc điểm này, nếu biết được kết quả của một nửa hệ đối xứng thì có thể suy ra kết quả trên toàn hệ. Ta đi tìm 1 nửa hệ tương đương.

1. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng:

a. Trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ :

Xét tiết diện C và C' nằm bên trái và bên phải của trục đối xứng của hệ trên hình (H.5.6.8). Do chuyển vị của hệ là đối xứng nên tại C không thể có chuyển vị

xoay và thẳng theo phương vuông góc trục đối xứng. Tuy nhiên, chuyển vị thẳng theo phương trục đối xứng có thể được. Điều này chứng tỏ C làm việc như 1 ngàm trượt.

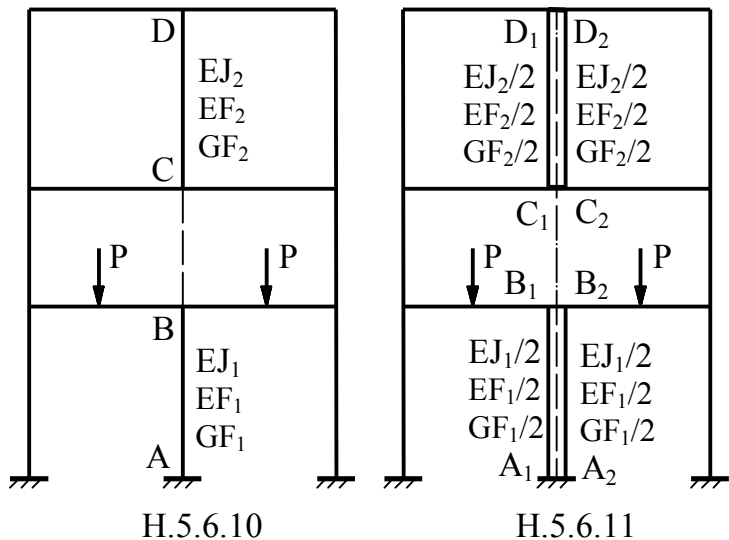


Vậy trên sơ đồ tính 1 nửa hệ tương đương ta chỉ việc đặt vào C 1 ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh có phương song song nhau và vuông góc với trục đối xứng như trên hình vẽ (H.5.6.9)

***Kết luận:** Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ, ta đặt thêm vào hệ các ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh song song và vuông góc với trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng rồi thực hiện tính toán trên một nửa hệ và suy ra kết quả trên toàn hệ.

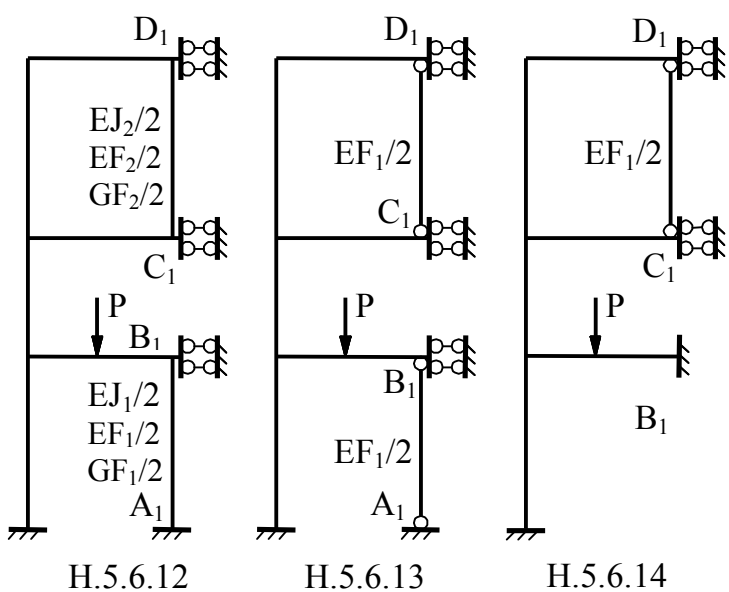
b. Trường hợp trục đối xứng trùng với 1 số trục thanh của hệ.

Xét hệ trên hình (H.5.6.10). Đưa về hệ tương đương đối xứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ bằng cách thay thế mỗi thanh AB, CD bằng 2 thanh có độ cứng giảm đi một nửa, hai đầu A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , D_1D_2 là vuông góc với trục đối xứng và có độ cứng bằng vô cùng (H.5.6.11). Đến đây ta trở lại trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh.



Một nửa hệ tương đương như trên hình

(H.5.6.12). Nhưng tại A_1 , B_1 , C_1 , D_1 không tồn tại chuyển vị góc xoay và chuyển vị thẳng theo phương vuông góc trục đối xứng mà chỉ có thể chuyển vị theo phương dọc trục thanh. Nghĩa là, các thanh A_1B_1 , C_1D_1 làm việc như 1 liên kết thanh (liên kết loại 1) (H.5.6.13).



Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng và có trục đối xứng trùng với một số trục thanh của hệ, ta cần đặt

thêm vào hệ các ngàm trượt dưới dạng 2 liên kết thanh có phương song song với

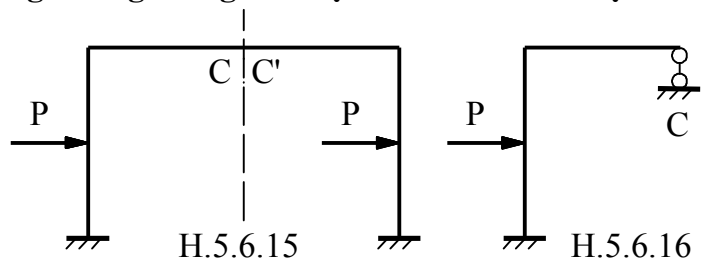
nhau và vuông góc với trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng đồng thời thay thế các thanh trùng với trục đối xứng bằng các liên kết thanh (liên kết loại 1) có độ cứng giảm đi 1 nửa rồi thực hiện tính toán trên 1 nửa hệ và sau đó suy ra kết quả trên toàn hệ. Khi suy ra kết quả nội lực trên toàn hệ, đối với thanh trùng với trục đối xứng lực dọc lấy gấp 2 lần so với khi giải 1 nửa hệ còn lực cắt và mômen lấy bằng không.

Trong trường hợp bỏ qua biến dạng dọc trục trong các thanh trùng với trục đối xứng và các thanh này bị ngăn cản chuyển vị theo phương dọc trục thanh (một đầu nối đất), ta có thể thay thế các ngàm trượt bằng ngàm (H.5.6.14)

2. Hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng:

a. Trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ:

Xét tiết diện C và C' nằm bên trái và bên phải trục đối xứng của hệ trên hình (H.5.6.15). Do chuyển vị của hệ là phản xứng nên tại C không thể có chuyển vị theo phương trục đối xứng. Tuy nhiên,



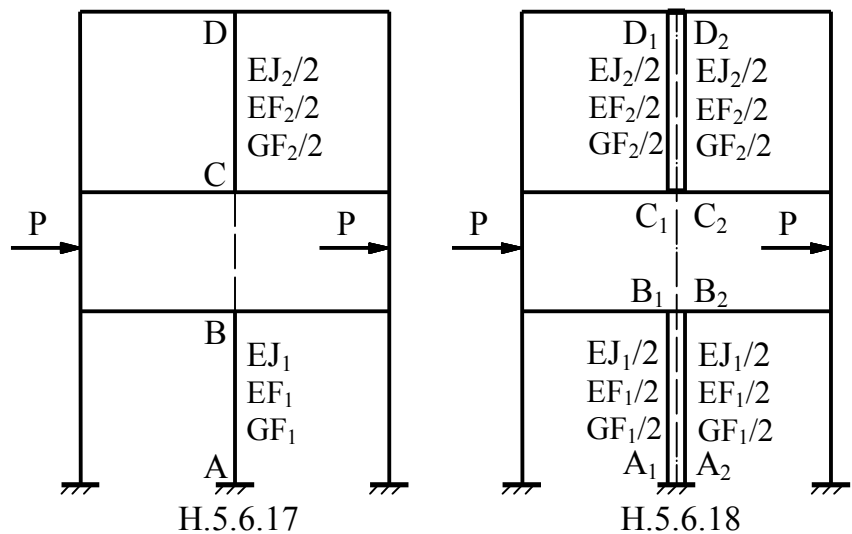
chuyển vị góc xoay và chuyển vị theo phương vuông góc với trục đối xứng có thể được. Điều này chứng tỏ C làm việc như 1 gối di động. Vậy trên sơ đồ tính một phần 2 hệ tương đương ta chỉ việc đặt vào C 1 gối di động có phương của trục đối xứng (H.5.6.16).

Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng và có trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ ta đưa về 1 nửa hệ tương đương bằng cách đặt thêm vào hệ các gối di động có phương của trục đối xứng tại những tiết diện trùng với trục đối xứng rồi thực hiện tính toán trên 1 nửa hệ và sau đó suy ra kết quả trên toàn hệ.

b. Trường hợp trục đối xứng trùng với một số trục thanh của hệ:

Cũng lý luận tương tự như trường hợp hệ chịu nguyên nhân tác dụng đối xứng ở trên, ta đưa bài toán trở về trường hợp trục đối xứng không trùng với trục thanh nào của hệ.

Với hệ cho trên hình (H.5.6.17), hệ tương đương của nó ở trên hình (H.5.6.18) và hệ trên hình (H.5.6.19) là 1 nửa hệ tương đương.

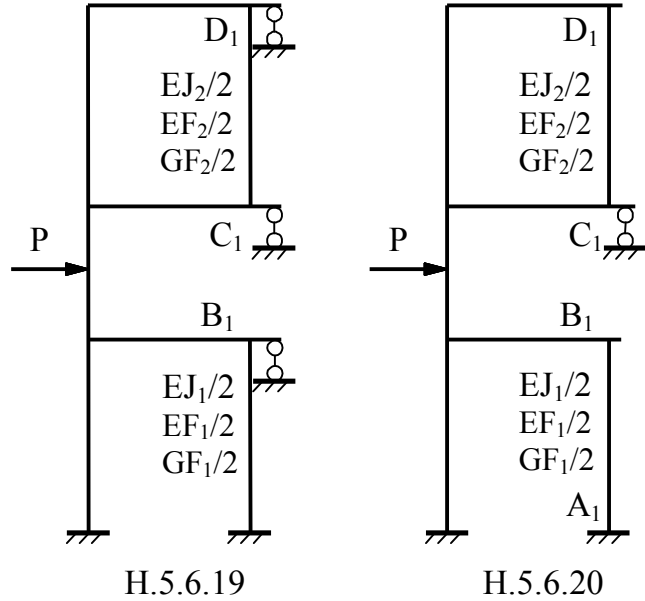


Kết luận: Khi tính hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng và có trục đối xứng trùng với trục thanh nào đó của hệ, ta đưa về 1 nửa hệ

tương đương bằng cách đặt thêm vào hệ các gối di động có phương trục đối xứng tại những tiết diện trục đối xứng bằng các thanh có độ cứng giảm đi 1 nửa rồi tính toán trên 1 phần 2 và suy ra kết quả trên toàn hệ.

Khi suy ra kết quả nội lực trên toàn hệ, đối với các thanh trùng với trục đối xứng, lực dọc lấy bằng không còn mômen và lực cắt lấy gấp 2 lần so với khi tính trên nửa hệ.

Trong trường hợp bỏ qua ảnh hưởng biến dạng dọc trục thì ta có thể bỏ bớt 1 gối di động trong 2 gối ở hai đầu thanh (H.5.6.20).



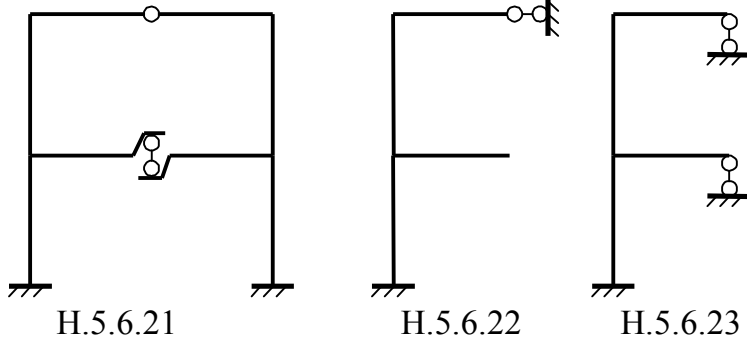
*** Chú thích:**

Trường hợp tiết diện trùng với trục đối xứng không phải là liên kết hàn, bằng cách phân tích sự làm việc tại các tiết diện này tương tự như ở trên ta có thể thay thế bằng các liên kết tương ứng khi tính trên 1 nửa hệ.

Chắn hạn, hệ trên hình (H.5.6.21)

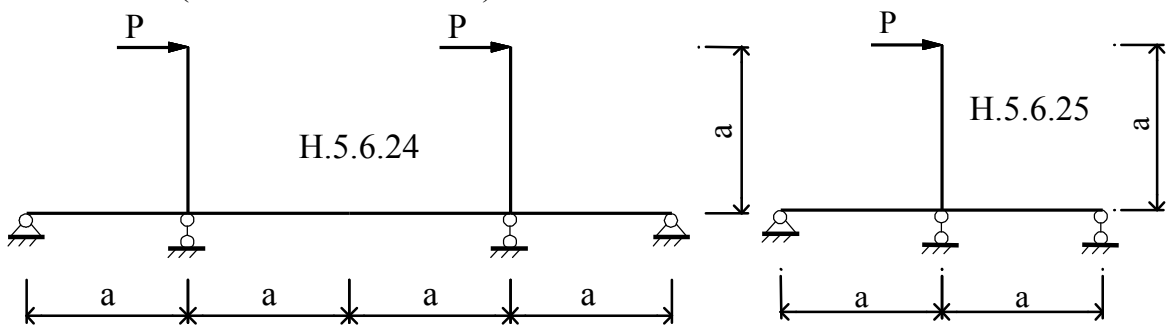
+ Nếu nguyên nhân tác dụng đối xứng thì 1 nửa hệ tương đương trên hình (H.5.6.22).

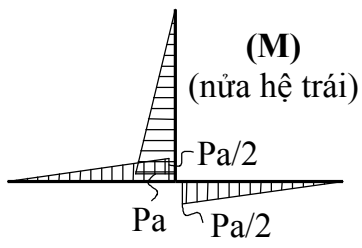
+ Nếu nguyên nhân tác dụng phản xứng thì 1 nửa hệ tương đương trên hình (H.5.6.23).



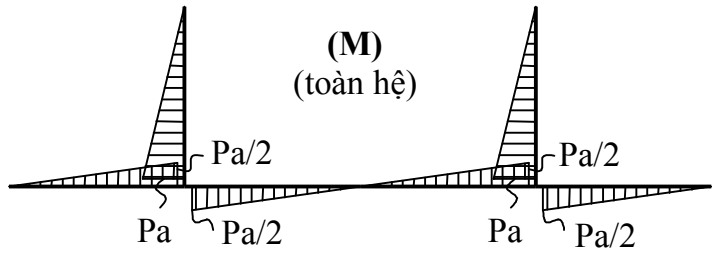
Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.5.6.24). Cho độ cứng trong tất cả các thanh là $EJ = \text{const}$. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

Hệ đã cho thuộc loại hệ đối xứng chịu nguyên nhân tác dụng phản xứng. Một nửa hệ trái tương đương của hệ đã cho được tạo ra trên hình (H.5.6.25). Đây là hệ siêu tĩnh bậc 1. Tiến hành các bước giải sẽ vẽ được biểu đồ (M), (Q), (N). Sau đó suy ra kết quả của nửa hệ phải theo các đặc điểm của hệ đối xứng. Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.6.26 → H.5.6.31)

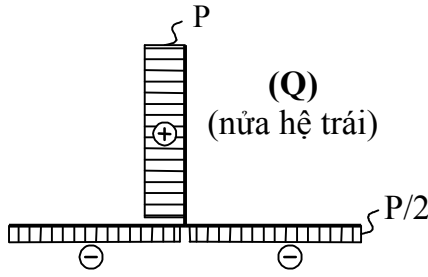




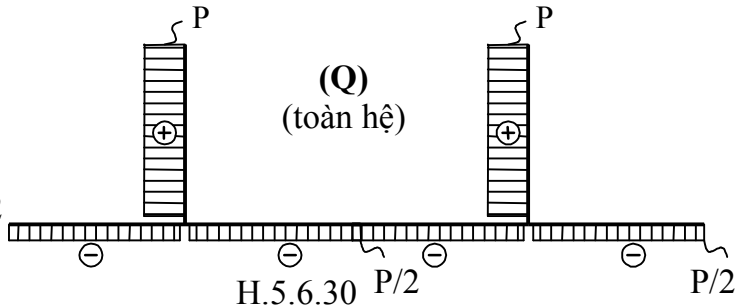
H.5.6.26



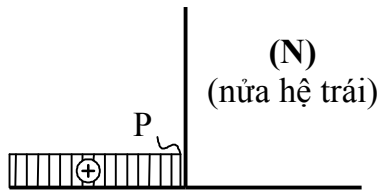
H.5.6.29



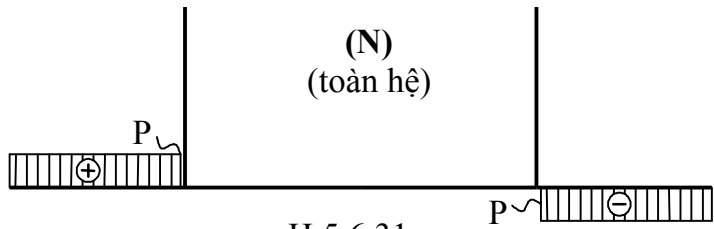
H.5.6.27



H.5.6.30



H.5.6.28



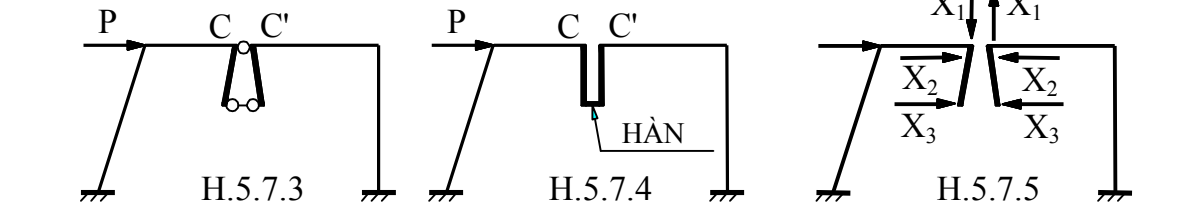
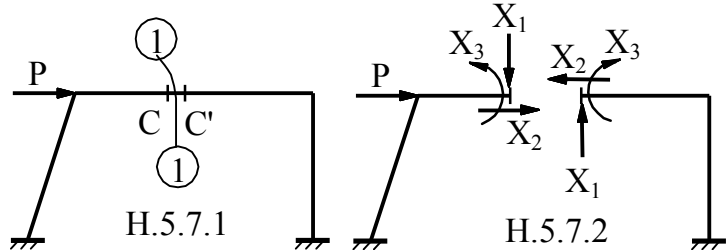
H.5.6.31

§7. SỬ DỤNG CÁC THANH TUYỆT ĐỐI CỨNG ĐỂ THAY ĐỔI VỊ TRÍ VÀ PHƯƠNG CÁC ẮN SỐ NHẪM ĐƠN GIẢN HOÁ CẤU TRÚC CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC

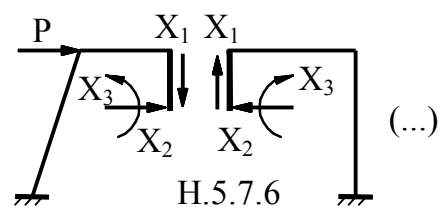
Mục đích của biện pháp là sử dụng các thanh tuyệt đối cứng nhằm thay đổi vị trí và phương của các ắn số để sao cho hệ phương trình chính tắc có nhiều hệ số phụ bằng không.

Xét hệ trên hình (H.5.7.1). Để giải hệ ta có thể chọn hệ cơ bản như trên hình (H.5.7.2)

Ta biến đổi hệ trên hình (H.5.7.1) bằng cách thực hiện mặt cắt 1-1, hàn 2 thanh tuyệt đối cứng vào 2 tiết diện C và C'. Nếu nối 2 thanh tuyệt đối cứng bằng ba liên kết loại 1 theo điều kiện nối 2 miếng cứng tạo thành hệ bất biến hình thì hệ mới sẽ tương đương với hệ ban đầu (H.5.7.3, H.5.7.4...)



Nếu ta chọn hệ cơ bản bằng cách cắt các liên kết nối giữa các thanh tuyệt đối cứng (H.5.7.5, H.5.7.6...) thì so với các hệ cơ bản trên hình (H.5.7.2), vị trí và phương của các ắn số đã thay đổi. Điều đó có nghĩa là các hệ số cũng thay đổi. Rõ ràng là có nhiều cách lập hệ tương đương nên cũng nhiều cách thay đổi vị trí và phương của các ắn số. Và ta thực hiện sao cho hệ phương trình chính tắc càng có nhiều hệ số phụ bằng không càng tốt.

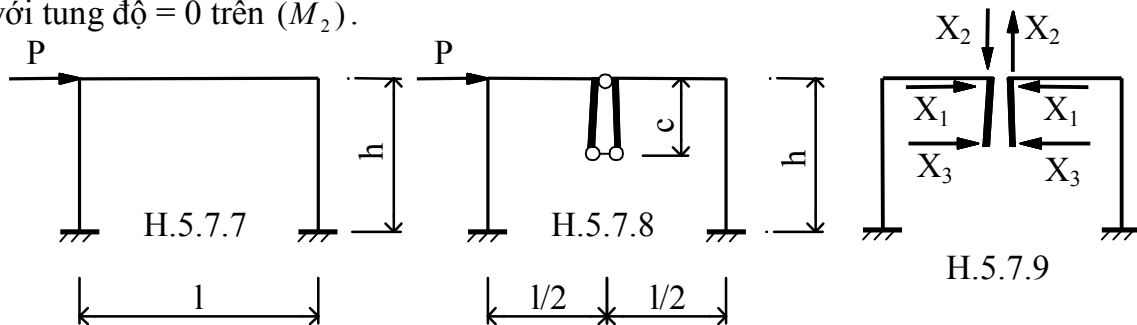


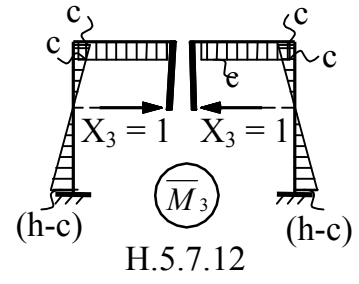
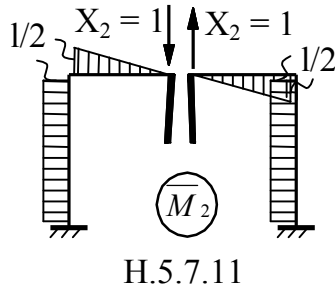
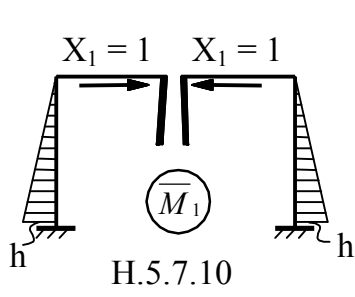
Ví dụ: Chọn hệ số cơ bản sao cho tất cả các hệ số phụ bằng không của khung trên hình (H.5.7.7). Cho độ cứng EJ là không đổi trên toàn hệ.

Hệ tương đương trên hình (H.5.7.8), hệ cơ bản tạo nên hình (H.5.7.9)

Các biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{M}_2), (\bar{M}_3)$ vẽ trên hình (H.5.7.10 → H.5.7.12). $(\bar{M}_1), (\bar{M}_3)$ là đối xứng; (\bar{M}_2) phản xứng nên $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$.

Để $\delta_{13} = \delta_{31} = (\bar{M}_3)(M_1) = 0$ thì $c = \frac{2}{3}h$ vì khi đó trọng tâm lấy trên (\bar{M}_1) ứng với tung độ = 0 trên (\bar{M}_2) .





§8. HỆ DÀN SIÊU TĨNH

I. Bậc siêu tĩnh:

$$n = D - 2M + 3 \quad (\text{Đối với hệ dàn không nối đất})$$

$$n = D - 2M + C \quad (\text{Đối với hệ dàn nối đất})$$

II. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

Như trong trường hợp tổng quát của phương pháp lực.

III. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Do trong hệ dàn chỉ tồn tại lực dọc nên các hệ số chỉ kể đến thành phần biến dạng dọc trục.

1. Các hệ số chính và phụ:

$$\delta_{km} = \Sigma \int \frac{\bar{N}_k \bar{N}_m}{EF} ds = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \bar{N}_{im}}{EF_i} l_i$$

2. Các số hạng tự do:**a. Do tải trọng:**

$$\Delta_{kP} = \Sigma \int \frac{\bar{N}_k N_p^o}{EF} ds = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{ip}^o}{EF_i} l_i$$

b. Do biến thiên nhiệt độ:

$$\Delta_{kt} = \sum_i \alpha t_{ci} \Omega(\bar{N}_{ik}) = \sum_i \alpha t_{ci} \bar{N}_{ik} l_i$$

c. Do chế tạo chiều dài thanh không chính xác:

$$\Delta_{k\Delta} = \sum_i \bar{N}_{ik} \Delta_i$$

Δ_i : độ dôi của thanh dàn thứ i. Nếu là chế tạo ngắn hơn chiều dài (còn gọi là độ hụt) thì Δ_i lấy dấu âm.

d. Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa:

$$\Delta_{kZ} = -\sum_{(j)} \bar{R}_{jk} Z_j$$

Trong các công thức trên:

$\bar{N}_{ik}, \bar{N}_{im}, N_{ip}^o$: lực dọc trong thanh dàn thứ i do $X_k = 1$ và $X_m = 1$, P gây ra trên hệ cơ bản.

EF_i, l_i : độ cứng và chiều dài thanh thứ i

α : hệ số dẫn nở vì nhiệt độ.

\bar{R}_{jk} : phản lực tại liên kết j do $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

Z_j : chuyển vị cưỡng bức tại liên kết j.

IV. Xác định lực dọc trong các thanh dàn:

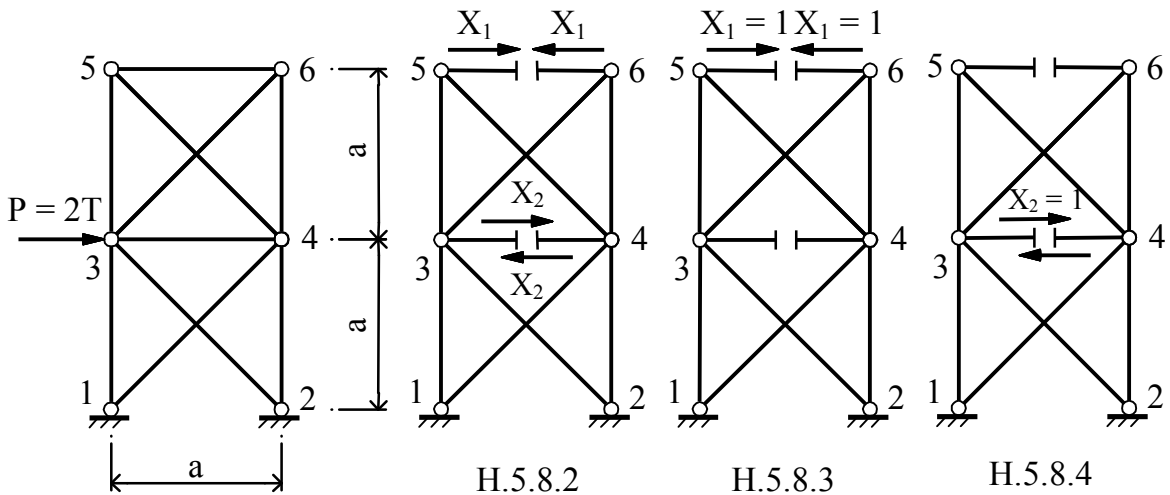
Lực dọc trong thanh dàn thứ i:

$$N_i = \bar{N}_{i1} X_1 + \bar{N}_{i2} X_2 + \dots + \bar{N}_{in} X_n + N_{ip}^o + N_{it}^o + N_{i\Delta}^o + N_{iZ}^o$$

Trong đó: $N_{ip}^o, N_{it}^o, N_{i\Delta}^o, N_{iZ}^o$ lần lượt là lực dọc trong thanh dàn thứ i do các nguyên nhân P, t, Δ , Z gây ra trên hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản là tĩnh định thì $N_{pt}^o, N_{i\Delta}^o, N_{iZ}^o = 0$.

Ví dụ: Xác định lực dọc trong các thanh dàn trên hình (H.5.8.1) cho biết độ cứng trong các thanh dàn là $EF = \text{const}$.

1. Bậc siêu tĩnh: $n = D - 2M + C = 10 - 6.2 + 4 = 2$



2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản (H.5.8.2). Ở đây ta xem các thanh 56, 34 là các liên kết thanh và cắt nó.

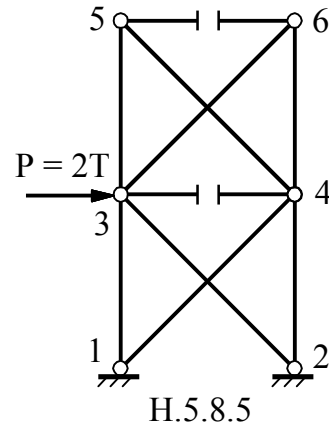
- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{km} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} \bar{N}_{im}}{EF_i} L_i \quad k, m = \bar{1}, \bar{2}$$

$$\Delta_{kP} = \sum_i \frac{\bar{N}_{ik} N_{ip}^o}{EF_i} L_i \quad i : \text{ thanh thứ } i.$$



Sơ đồ để xác định $\bar{N}_{i1}, \bar{N}_{i2}, N_{ip}^o$ được tạo trên các hình vẽ (H.5.8.3, H.5.8.4 & H.5.8.5)

Lực dọc được xác định theo các cách trong bài hệ dàn.

Kết quả tính toán được thể hiện trong bảng tính (B.5.8.1)

Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} (5 + 8\sqrt{2})a.X_1 + (2 - 4\sqrt{2})a.X_2 + (1 - 2\sqrt{2})Pa = 0 \\ (2 - 4\sqrt{2})a.X_1 + (3 + 4\sqrt{2})a.X_2 + (1 + 2\sqrt{2})Pa = 0 \end{cases}$$

Ở đây do các thanh có độ cứng bằng EF nên ta không đưa vào trong tính toán cho gọn.

Giải phương trình:

$$\begin{cases} X_1 = 0,014P \\ X_2 = -0,436P \end{cases}$$

4. Xác định lực dọc trong các thanh dàn:

$$N_i = \bar{N}_{i1}X_1 + \bar{N}_{i2}X_2 + N_{ip}^o$$

Xem kết quả trong bảng tính (B.5.8.1)

Thanh	l_i	\bar{N}_{i1}	\bar{N}_{i2}	N_{ip}^o	$\bar{N}_{i1}\bar{N}_{i1}l_i$	$\bar{N}_{i1}\bar{N}_{i2}l_i$	$\bar{N}_{i2}\bar{N}_{i2}l_i$	$\bar{N}_{i1}N_{ip}^o l_i$	$\bar{N}_{i2}N_{ip}^o l_i$	N_i
5-6	a	1	0	0	a	0	0	0	0	0,014P
6-4	a	1	0	0	a	0	0	0	0	0,014P
6-3	$a\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$	0	0	0	0	-0,019P
5-4	$a\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	$2a\sqrt{2}$	0	0	0	0	-0,019P
5-3	a	1	0	0	a	0	0	0	0	0,014P
3-4	a	0	1	0	0	0	0	0	0	-0,436P
4-2	a	1	1	0	a	a	0	0	0	-0,422P
4-1	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	$2a\sqrt{2}$	$-2a\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	0	0	0,636P
3-2	$a\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-P\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	$-2a\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	$-2aP\sqrt{2}$	$2aP\sqrt{2}$	-0,777P
3-1	a	1	1	P	a	a	a	Pa	Pa	0,578P
Tổng					$(5+8\sqrt{2})a$	$(2-4\sqrt{2})a$	$(3+4\sqrt{2})a$	$(1-2\sqrt{2})Pa$	$(1+2\sqrt{2})Pa$	

B.8.1 Bảng tính lực dọc trong các thanh dầm

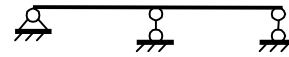
§9. DẦM LIÊN TỤC

I. phân tích hệ:

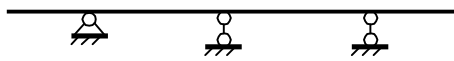
1. Khái niệm: Dầm liên tục là hệ gồm 1 thanh thẳng nối với trái đất bằng số gối tựa lớn hơn hai để tạo thành hệ bất biến hình.

2. Phân loại dầm liên tục:

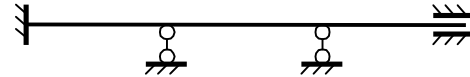
- Dầm liên tục hai đầu khớp (H.5.9.1)
- Dầm liên tục có đầu thừa (H.5.9.2)
- Dầm liên tục có đầu ngàm (H.5.9.3)



H.5.9.1



H.5.9.2



H.5.9.3

3. Bậc siêu tĩnh:

Cách 1: $n = 3V - K$

Ví dụ: Dầm liên tục trên hình (H.5.9.4)

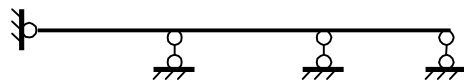
có $n = 3.3 - 7 = 2$.

Cách 2: $n = C - 3$

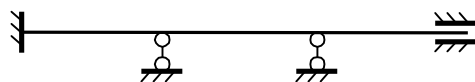
C là số liên kết nối đất tương đương quy về liên kết loại 1.

Ví dụ: Dầm liên tục trên hình (H.5.9.5)

có $n = 7 - 3 = 4$.



H.5.9.4



H.5.9.5

Trường hợp cho phép bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục và tải trọng chỉ tác dụng vuông góc với trục dầm thì gối cố định chỉ có hiệu quả như gối di động. Khi đó bậc siêu tĩnh được tính bằng biểu thức:

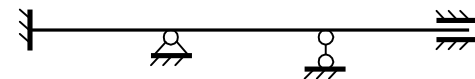
$$n = C_{tg} + N$$

C_{tg} : số gối tựa trung gian (không kể hai gối ngoài cùng), không cần phân biệt là gối cố định hay di động.

N: số liên kết ngàm, không cần phân biệt là ngàm trượt hay ngàm.

Ví dụ: Dầm liên tục trên hình (H.5.9.6)

có $n = 2 + 2 = 4$.



H.5.9.6

II. Cách tính dầm liên tục bằng phương pháp phương trình ba mômen:

Bài toán dầm liên tục là một trường hợp của hệ siêu tĩnh nên ta có thể vận dụng phương pháp lực để tính toán. Tuy nhiên, để phục vụ cho việc tính toán được nhanh chóng và đơn giản ta đi cụ thể hoá hệ phương trình chính tắc của nó.

Xét một dầm liên tục hai đầu khớp gồm $(n + 1)$ nhịp, có độ cứng EJ không đổi trên từng nhịp, chịu tác dụng của các nguyên nhân tải trọng, biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa (H.5.9.7).

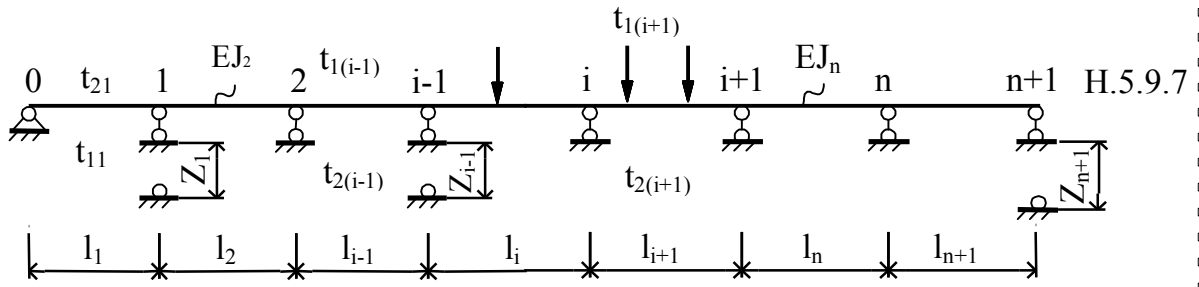
1. Hệ cơ bản:

Chọn hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết ngăn cản chuyển vị góc xoay tương đối của hai tiết diện 2 bên gối tựa trung gian (thay thế liên kết hàn bằng liên kết khớp (H.5.9.8)).

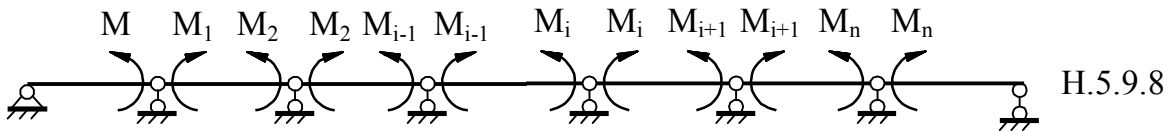
2. Hệ phương trình chính tắc:

Xét phương trình i của hệ phương trình cơ bản

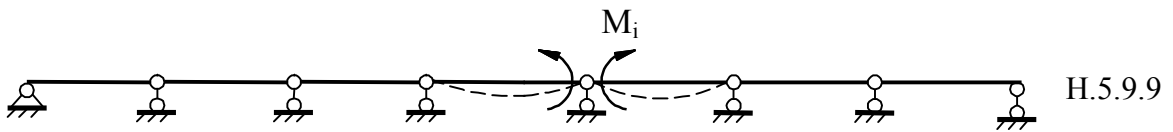
$$\delta_{i1}M_1 + \delta_{i2}M_2 + \dots + \delta_{i,i-1}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{i,i+1}M_{i+1} + \dots + \delta_{in}M_n + \Delta_{ip} + \Delta_{it} + \Delta_{iz} = 0$$



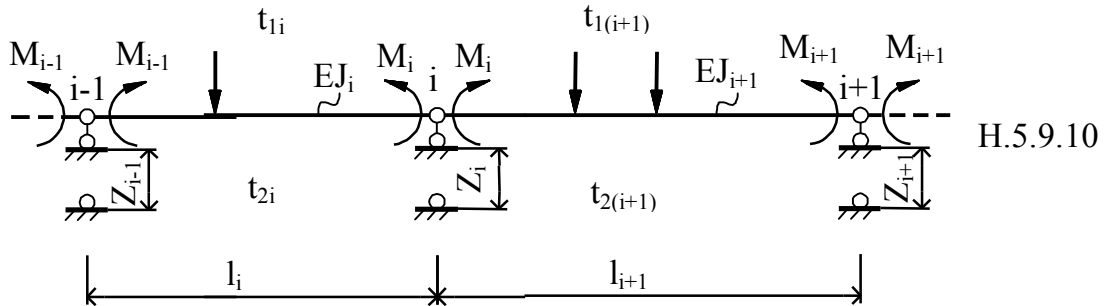
H.5.9.7



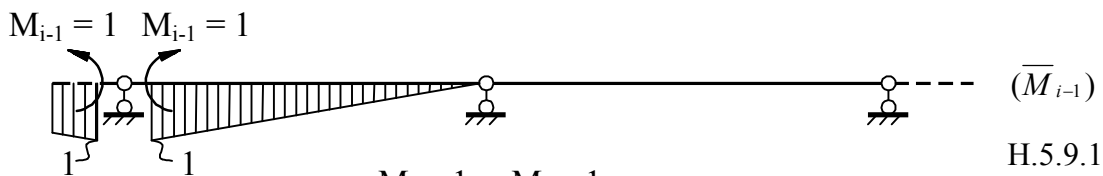
H.5.9.8



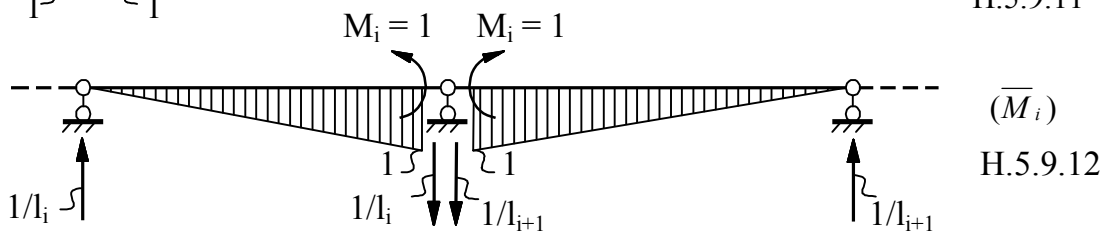
H.5.9.9



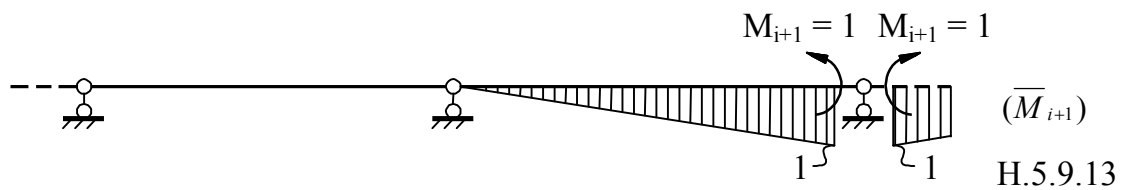
H.5.9.10



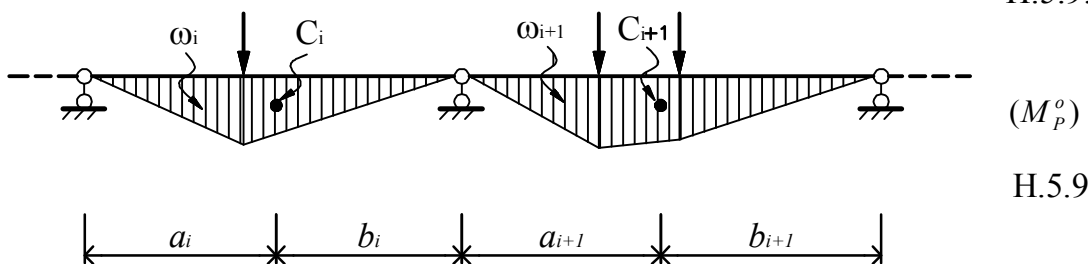
H.5.9.11



H.5.9.12



H.5.9.13



H.5.9.14

Phương trình này biểu thị điều kiện góc xoay tương đối của 2 tiết diện ở hai bên gối tựa thứ i bằng không.

Ta biết $\delta_{ik} = \delta_{ki}$, δ_{ki} ở đây là chuyển vị góc xoay tương đối của hai tiết diện hai bên gối tựa thứ k do riêng $M_i = 1$ gây ra trên hệ cơ bản. Mặt khác, M_i chỉ gây ra biến dạng trên nhịp i và (i + 1) (H.5.9.9). Điều đó có nghĩa là:

$$\delta_{(i-1)i}, \delta_{ii}, \delta_{(i+1)i} \neq 0, \text{ còn } \delta_{ki} \text{ (k } \neq (i - 1), i, (i + 1)) = 0$$

Thay vào phương trình trên:

$$\delta_{i-1} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i+1} M_{i+1} + \Delta_{iP} + \Delta_{it} + \Delta_{iZ} = 0.$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Xác định các hệ số chính và phụ:

$$\delta_{i(i-1)} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_{i-1}) = \frac{1}{EJ_i} \cdot \frac{1.l_i}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l_i}{6EJ_i}$$

$$\delta_{ii} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_i) = \frac{1}{EJ_i} \cdot \frac{1.l_i}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot \frac{1.l_{i+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}}$$

$$\delta_{i(i+1)} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_{i+1}) = \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot \frac{1.l_{i+1}}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}}$$

b. Xác định các số hạng tự do:

- Do tải trọng: (Δ_{iP})

$$\Delta_{iP} = (\bar{M}_i)(M_p^o) = \frac{1}{EJ_i} \cdot \omega_i \cdot \frac{a_i}{l_i} \cdot 1 + \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot \omega_{i+1} \cdot \frac{b_{i+1}}{l_{i+1}} \cdot 1 = \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EJ_{i+1}}$$

ω_i : diện tích của (M_p^o) trên nhịp thứ i, dấu của ω_i được lấy theo dấu của (M_p^o).

a_i, b_i : khoảng cách từ trọng tâm diện tích của biểu đồ (M_p^o) đến gối tựa trái và phải của nhịp i.

-Do biến thiên nhiệt độ: (Δ_{it})

Trên hệ cơ bản không tồn tại lực dọc nên:

$$\Delta_{it} = \Sigma \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega(\bar{M}_i) = \frac{\alpha}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) \frac{1.l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \cdot \frac{1.l_{i+1}}{2}$$

α : Hệ số dẫn nở vì nhiệt.

h_i : chiều cao thứ dầm ở nhịp thứ i.

- Do chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa: (Δ_{iZ})

$$\Delta_{iZ} = -\Sigma R_{ji} Z_j = -\left[-\frac{1}{l_i} \cdot Z_{i-1} + \frac{1}{l_i} \cdot Z_i + \frac{1}{l_{i+1}} \cdot Z_i - \frac{1}{l_{i+1}} \cdot Z_{i+1} \right] = \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}}$$

Trong đó: Z_i là độ lún của gối tựa thứ i, theo biểu thức thì Z_i lấy dấu dương khi chuyển vị đi xuống.

Thay tất cả các hệ số vào phương trình trên:

$$\frac{l_i}{6EJ_i} M_{i-1} + \left(\frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} \right) M_i + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} M_{i+1} + \frac{1}{EJ_i} \cdot \frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{\alpha}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) \cdot \frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \cdot \frac{l_i}{2} + \frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} = 0$$

Chọn 1 J_0 làm chuẩn (thường chọn J của nhiều nhịp có J giống nhau của dầm). Và đặt:

$\lambda_i = l_i \cdot \frac{J_0}{J_i}$: gọi là chiều dài quy ước của nhịp i .

Thay vào phương trình:

$$\lambda_i \cdot M_{i-1} + 2(\lambda_i + \lambda_{i+1})M_i + \lambda_{i+1}M_{i+1} + 6J_0 \left[\frac{\omega_i a_i}{l_i J_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} J_{i+1}} \right] + 6EJ_0 \left[\frac{\alpha}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) \cdot \frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \right] + 6EJ_0 \left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right] = 0$$

Trường hợp dầm có tiết không đổi trên toàn nhịp: $J_1 = J_2 = \dots J_n = J = \text{const}$.
 Lấy $J_0 = J$ và thay vào ta được:

$$l_i \cdot M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})M_i + l_{i+1}M_{i+1} + 6 \left[\frac{\omega_i a_i}{l_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1}} \right] + 6EJ \left[\frac{\alpha}{h_i} (t_{2i} - t_{1i}) \cdot \frac{l_i}{2} + \frac{\alpha}{h_{i+1}} (t_{2(i+1)} - t_{1(i+1)}) \cdot \frac{l_{i+1}}{2} \right] + 6EJ \left[\frac{Z_{i-1} - Z_i}{l_i} + \frac{Z_{i+1} - Z_i}{l_{i+1}} \right] = 0$$

Cho $i = 1, \bar{n}$ ta được hệ phương trình chính tắc

Giải hệ phương trình chính tắc sẽ xác định được (M_1, M_2, \dots, M_n) .

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

- **Với biểu đồ mô men (M)**: mỗi nhịp của dầm ta đã biết được mômen uốn tại 2 gối tựa. Nối 2 tung độ này bằng 1 đoạn thẳng và treo biểu đồ (M_p^o) của nhịp tương ứng vào.

- **Với biểu đồ lực cắt (Q), lực dọc (N)**: Vẽ như trong trường hợp tổng quát của phương pháp lực.

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.5.9.15)

1. Bậc siêu tĩnh:

$$n = C_{tg} + N = 2 + 0 = 2$$

2. Tạo hệ cơ bản, đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ mômen do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản: (H.5.9.16 & H.5.9.17)

3. Viết các phương trình ba mômen cho các gối tựa trung gian.

$$i = 1: \quad \lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)M_1 + \lambda_2 M_2 + 6J_0 \left[\frac{\omega_1 a_1}{l_1 J_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2 J_2} \right] = 0$$

$$i = 2: \quad \lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)M_2 + \lambda_3 M_3 + 6J_0 \left[\frac{\omega_2 a_2}{l_2 J_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3 J_3} \right] = 0$$

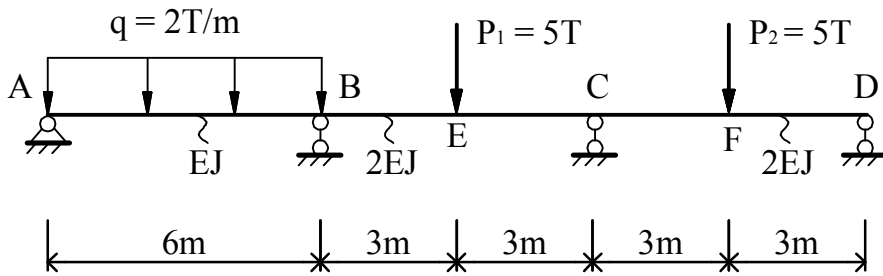
4. Xác định các đại lượng trong phương trình 3 mômen: $M_0 = M_3 = 0$

Chọn $J_0 = J$, tính $\lambda_i = l_i \frac{J_0}{J_i} \rightarrow \lambda_1 = 6m; \lambda_2 = 3m; \lambda_3 = 3m$

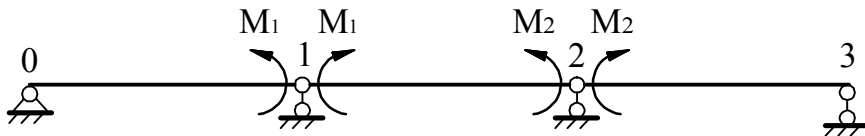
$$\omega_1 = \frac{2}{3} l_1 \cdot f = \frac{2}{3} \cdot 9.6 = 36; a_1 = b_1 = 3; \omega_2 = \frac{7.5.6}{2} = 22.5; a_2 = b_2 = 3$$

$$\omega_3 = \frac{7.5.6}{2} = 22.5; a_3 = b_3 = 3$$

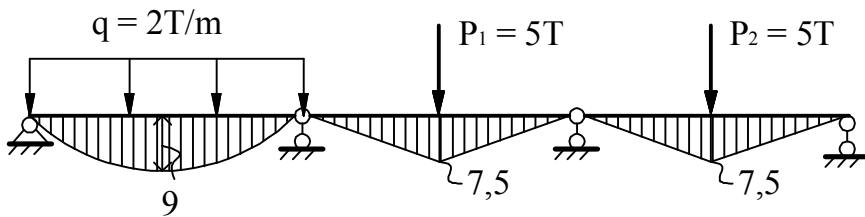
Thay vào phương trình ba mômen:



H.5.9.15

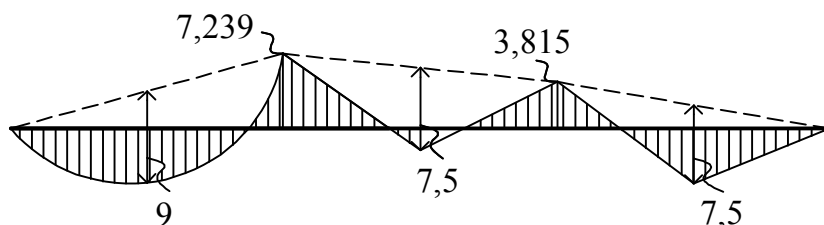


H.5.9.16



H.5.9.17

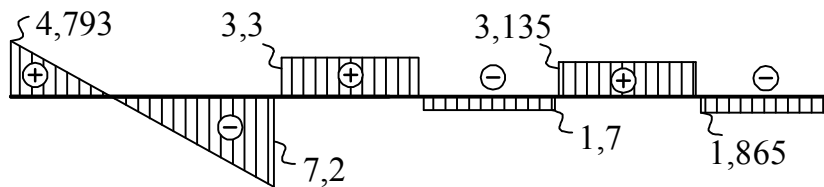
M_P^o



H.5.9.18

M

(T.m)



H.5.9.19

Q

(T)

H.5.9.20

N

$$i = 1 \quad 6.0 + 18M_1 + 3M_2 + 6J \left[\frac{36.3}{6.J} + \frac{22,5.3}{6.2J} \right] = 0$$

$$i = 2 \quad 3.M_1 + 12M_2 + 3.0 + 6J \left[\frac{22,5.3}{6.2J} + \frac{22,5.3}{6.2J} \right] = 0$$

$$\begin{cases} 6M_1 + M_2 = -47,25 \\ M_1 + 4M_2 = -22,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 = -7,239 < 0 \\ M_2 = -3,815 < 0 \end{cases}$$

5. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen: treo biểu đồ (H.5.9.18)

b. Biểu đồ lực cắt: suy ra từ biểu đồ mômen.

Trên đoạn AB: $Q^r = \frac{-7,239 - 0}{6} + \frac{1}{2} \cdot 2.6 = 4,793$

$$Q^{Ph} = \frac{-7,239 - 0}{6} - \frac{1}{2} \cdot 2.6 = -7,2$$

Trên đoạn BE: $Q^r = Q^{Ph} = \frac{1,972 - (-7,939)}{3} = 3,3$

Trên đoạn EC: $Q^r = Q^{Ph} = \frac{-3,815 - 1,972}{3} = -1,7$

Trên đoạn CF: $Q^r = Q^{Ph} = \frac{5,592 - (-3,815)}{3} = 3,135$

Trên đoạn FD: $Q^r = Q^{Ph} = \frac{0 - 5,592}{3} = -1,864$

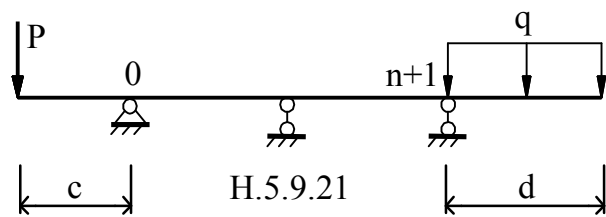
Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.5.9.19)

c. Biểu đồ lực dọc (N): trùng với đường chuẩn.

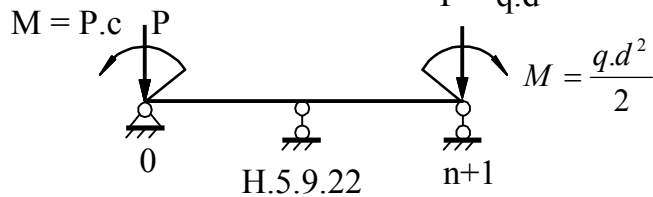
* Các trường hợp khác của dầm liên tục:

a. Dầm liên tục có thừa: (H5.9.21)

- Phần đầu thừa là tĩnh định nên có thể xác định và vẽ biểu đồ nội lực bằng các phương trình cân bằng tĩnh học.



- Thực hiện cắt bỏ đầu thừa, đưa tải trọng về thành các lực tập trung tại gối tựa biên (H.5.9.22). Có hai quan niệm về mômen gối tựa này:



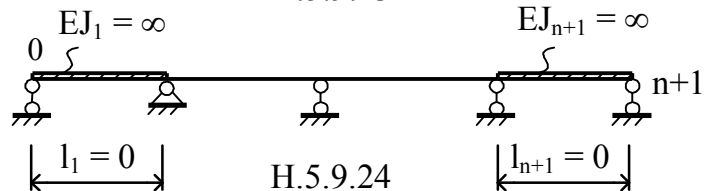
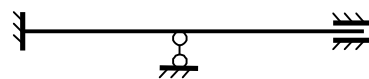
+ Xem là ngoại lực thì cần kể nó khi vẽ biểu đồ (M_p^o)

+ Xem là mômen tại các gối tựa trong phương trình 3 mômen, thì chúng là M_0 và M_{n+1} . Trong hệ trên hình (H.5.9.22) thì $M_0 = -P.c$ và $M_{n+1} = -\frac{q.d^2}{2}$.

Đến đây ta trở lại bài toán dầm liên tục 2 đầu khớp.

b. Dầm liên tục có đầu ngàm: (H.5.9.23)

Thay thế ngàm hoặc ngàm trượt bằng một nhịp có độ cứng $EJ = \infty$ có chiều dài tùy ý hoặc chiều dài bằng không và được liên kết với trái đất bằng số liên kết tương đương với ngàm hoặc ngàm trượt. (H.5.9.24)



Sau khi thực hiện như trên, ta đưa dầm về thành hai đầu khớp và trở lại bài toán đã biết.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ mômen cuốn của hệ trên hình vẽ (H.5.9.25). Cho biết $EJ = 1080T.m^2$; $\varphi = 0,005$ radian; $\Delta_1 = 0,03m$; $\Delta_2 = 0,02m$; $h_{2EJ} = 0,4m$; $h_{EJ} = 0,3m$.

Đưa hệ về hệ tương đương 2 đầu khớp như trên hình vẽ (H.5.9.26)

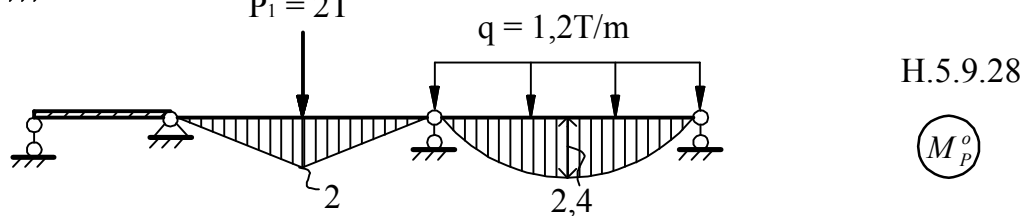
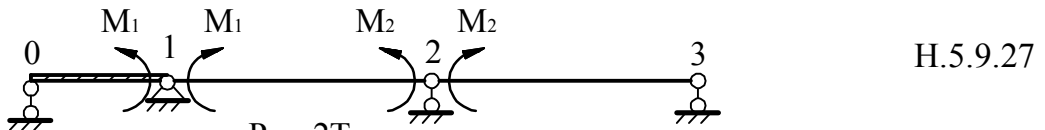
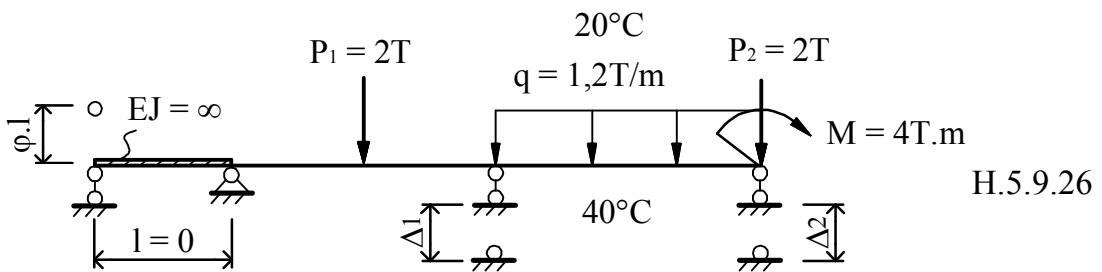
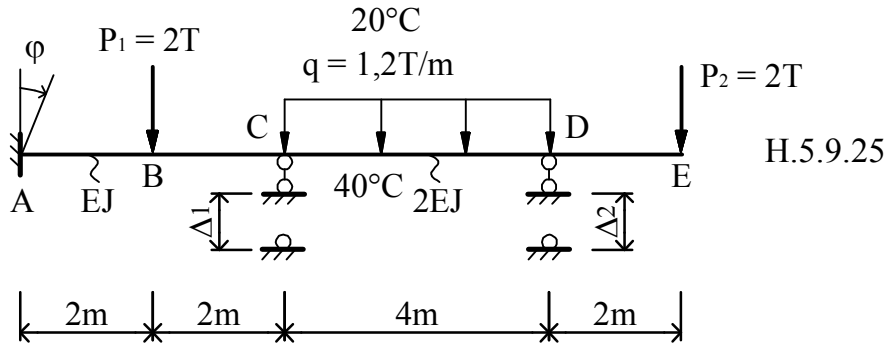
1. Bậc siêu tĩnh:

$$n = C_{tg} + N = 2 + 0 = 2 \quad (\text{tính trên hệ tương đương})$$

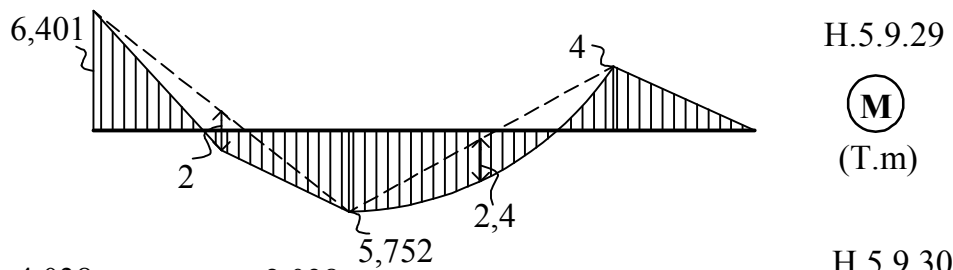
2. Tạo hệ cơ bản, đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ (M_p^o). Kết quả trên hình (H5.9.27& H5.9.28)

Ở đây ta xem $M = -P.2 = -4$ là mômen M_3 trong phương trình 3 mômen.

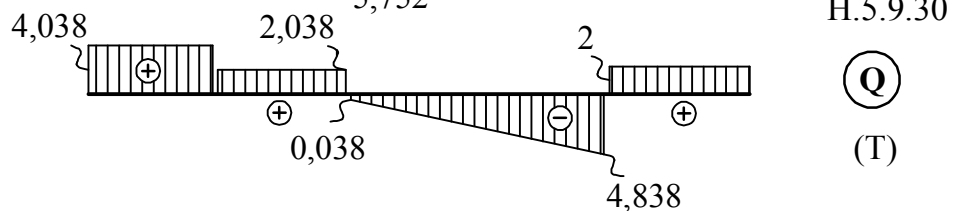
3. Viết phương trình 3 mômen cho các gối tựa trung gian:



M_p^o



M
(T.m)



Q
(T)

H.5.9.31

N

$$i = 1 \quad \lambda_1 M_0 + 2(\lambda_1 + \lambda_2)M_1 + \lambda_2 M_2 + 6J_0 \left[\frac{\omega_1 a_1}{l_1 J_1} + \frac{\omega_2 b_2}{l_2 J_2} \right] + 6EJ_0 \left[\frac{\alpha}{h_1} (t_{21} - t_{11}) \cdot \frac{l_1}{2} + \frac{\alpha}{h_2} (t_{22} - t_{12}) \cdot \frac{l_2}{2} \right] + 6EJ_0 \left[\frac{Z_0 - Z_1}{l_1} + \frac{Z_2 - Z_1}{l_2} \right] = 0$$

$$i = 2 \quad \lambda_2 M_1 + 2(\lambda_2 + \lambda_3)M_2 + \lambda_3 M_3 + 6J_0 \left[\frac{\omega_2 a_2}{l_2 J_2} + \frac{\omega_3 b_3}{l_3 J_3} \right] + 6EJ_0 \left[\frac{\alpha}{h_2} (t_{22} - t_{12}) \cdot \frac{l_2}{2} + \frac{\alpha}{h_3} (t_{23} - t_{13}) \cdot \frac{l_3}{2} \right] + 6EJ_0 \left[\frac{Z_1 - Z_2}{l_2} + \frac{Z_3 - Z_2}{l_3} \right] = 0$$

Ở đầu bài cho biết $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} ({}^0 C^{-1})$; $h_{EJ} = 0,3m$; $h_{2EJ} = 0,4m$; $EJ = 1080T \cdot m^2$

4. Xác định các đại lượng trong phương trình 3 mômen:

$$M_0 = 0; M_3 = -4; t_{23} = 40{}^0 C; t_{13} = 20{}^0 C$$

$$Z_0 = -0,005l_1; Z_2 = 0,03; Z_3 = 0,02; Z_1 = 0$$

$$\omega_1 = 0; \omega_2 = \frac{1}{2} \cdot 2,4 = 4; a_2 = b_2 = 2m; \omega_3 = \frac{2}{3} \cdot 4,2,4 = 6,4; a_3 = b_3 = 2m$$

Chọn $J_0 = J$, tính $\lambda_i = l_i \cdot \frac{J_0}{J_i}$

$$\rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 4; \lambda_3 = 2$$

Thay vào:

$$i = 1: \quad 0 \cdot 0 + 2(0 + 4)M_1 + 4M_2 + 6J \left[0 + \frac{4,2}{4J} \right] + 6EJ[0 + 0] + 6EJ \left[\frac{-0,005 \cdot l_1 - 0}{l_1} + \frac{0,03 - 0}{4} \right] = 0$$

$$\rightarrow 8M_1 + 4M_2 = -12 - 0,015EJ = -28,2$$

$$i = 2: \quad 4M_1 + 2(4 + 2)M_2 + 2 \cdot (-4) + 6J \left[\frac{4,2}{4J} + \frac{6,4,2}{4,2J} \right] + 6EJ \left[0 + \frac{\alpha}{0,4} (40 - 20) \frac{4}{2} \right] + 6EJ \left[\frac{0 - 0,03}{4} + \frac{0,02 - 0,03}{4} \right] = 0$$

$$\rightarrow 4M_1 + 12M_2 = 8 - 21,6 - 600EJ + 0,06EJ = 43,424$$

$$\rightarrow \begin{cases} 8M_1 + 4M_2 = -28,2 \\ 4M_1 + 12M_2 = 43,424 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 = -6,401 < 0 \\ M_2 = 5,752 > 0 \end{cases}$$

5. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen (M): treo biểu đồ (H5.9.29)

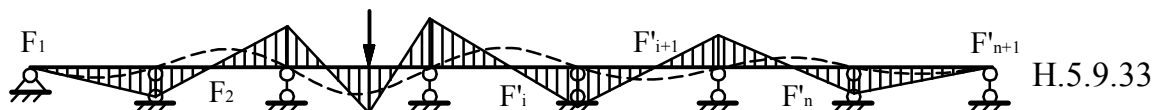
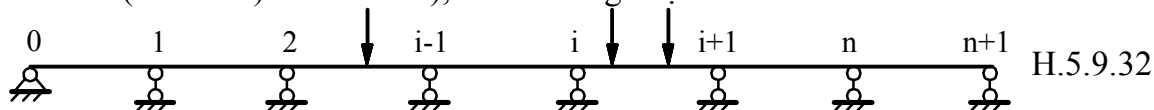
b. Biểu đồ lực cắt, lực dọc (H5.9.30 & H5.9.31)

III. Tính dầm liên tục bằng phương pháp tiêu cự mômen:

* **Mục đích:** Là đi vận dụng khéo léo phương pháp phương trình 3 mômen để tính dầm liên tục nhiều nhịp chịu tải trọng chỉ tác dụng lên 1 nhịp mà không phải giải hệ phương trình chính tắc. Nếu trường hợp tải trọng tác dụng lên nhiều nhịp thì có thể áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để đưa về thành tổng của nhiều bài toán, mỗi bài toán tải trọng chỉ tác dụng lên 1 nhịp.

Ví dụ: Hệ trên hình (H.5.9.32) có thể phân tích thành hai trường hợp như trên hình (H.5.9.33 & H.5.9.34)

Với dầm liên tục nhiều nhịp chịu tải trọng tác dụng lên một nhịp (Ví dụ dầm trên hình (H.5.9.33) & H.5.9.34), ta có những nhận xét sau:



a. Đường đàn hồi (đường đứt nét) lượn theo hình sóng trên những nhịp kế tiếp nhau.

b. Trên những nhịp không chịu tải trọng tác dụng thì mômen uốn tại hai gối tựa liên tiếp luôn trái dấu nhau, mômen uốn tại góc tựa gần nhịp chịu tải trọng hơn sẽ có giá trị tuyệt đối lớn hơn. Trên những nhịp này biểu đồ mômen uốn là đoạn thẳng cắt đường chuẩn tại 1 điểm gọi là *tiêu điểm mômen*.

+ Những tiêu điểm nằm bên trái nhịp chịu tải trọng gọi là tiêu điểm trái. Ký hiệu F_i .

+ Những tiêu điểm nằm bên phải nhịp chịu tải trọng gọi là tiêu điểm phải. Ký hiệu F'_i .

Ở đây i là chỉ số nhịp thứ i .

c. Ta định nghĩa: tỷ số dương và lớn hơn đơn vị của 2 mômen uốn tại 2 gối tựa liên tiếp của nhịp không chịu tải trọng tác dụng là tỷ số tiêu cự mômen.

+ Đối với nhịp nằm bên trái của nhịp chịu tải trọng:

$$k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}} : \text{gọi là tỷ số tiêu cự trái.}$$

+ Đối với nhịp nằm bên phải của nhịp chịu tải trọng:

$$k'_i = -\frac{M_{i-1}}{M_i} : \text{gọi là tỷ số tiêu cự phải}$$

Để thấy nếu biết được tỷ số tiêu cự mômen thì sẽ biết được vị trí của tiêu điểm mômen và ngược lại.

d. Ta sẽ vẽ được biểu đồ mômen nếu biết được 2 yếu tố:

+ Mômen uốn tại 2 gối tựa của nhịp chịu tải trọng.

+ Các tỷ số tiêu cự mômen.

1. Xác định tỷ số tiêu cự :

a. Tỷ số tiêu cự trái: (k_i)

Xét 2 nhịp thứ i và $(i-1)$ nằm bên trái của nhịp chịu tải trọng tác dụng. Viết phương trình 3 mômen cho gối $(i-1)$:

$$\lambda_{i-1} \cdot M_{i-2} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) M_{i-1} + \lambda_i \cdot M_i = 0$$

($\Delta_{i-1P} = 0$ do trên các nhịp này không chịu tải trọng tác dụng)

Chia 2 vế của phương trình cho M_{i-1} ta được:

$$\lambda_{i-1} \cdot \frac{M_{i-2}}{M_{i-1}} + 2(\lambda_{i-1} + \lambda_i) + \lambda_i \frac{M_i}{M_{i-1}} = 0$$

Mặt khác: $k_i = -\frac{M_i}{M_{i-1}}, k_{i-1} = -\frac{M_{i-1}}{M_{i-2}}$

Thay vào, rút gọn ta được:

$$k_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \left[2 + \frac{1}{k_{i-1}} \right] \quad (5-27)$$

Công thức (5-12) có tính truy hồi nghĩa là có thể xác định được k_i nếu biết được k_{i-1} .

+ Nếu gối tựa đầu tiên là khớp: (H.5.9.35)

$$k_1 = -\frac{M_1}{M_0} = -\frac{M_1}{0} = \infty$$

+ Nếu gối tựa đầu tiên là ngàm: (H.5.9.36)

Đưa về hệ tương đương có gối tựa đầu tiên là khớp (H.5.9.37), ta có $k_0 = \infty$. Từ công thức (5-12) ta tính được:

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \left[2 - \frac{1}{k_0} \right] \\ &= 2 + \frac{0}{\lambda_1} \left[2 - \frac{1}{\infty} \right] = 2 \end{aligned}$$

b. Tỷ số tiêu cự phải: (k'_i)

Tương tự, ta thiết lập được:

$$k'_i = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \left[2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right] \quad (5-28)$$

Công thức truy hồi (5-13) được xác định theo chỉ số tiêu cự phải của nhịp cuối cùng:

+ Nếu gối tựa cuối cùng là khớp: $k'_{n+1} = \infty$

+ Nếu gối tựa cuối cùng là ngàm: $k'_{n+1} = 2$

2. Xác định mômen uốn tại 2 gối tựa của nhịp chịu tải trọng tác dụng:

Giả sử tải trọng tác dụng lên nhịp thứ i , mômen cần xác định là M_{i-1} , M_i . Bằng cách phân tích phương trình 3 mômen cho 2 gối tựa thứ i và $(i - 1)$ ta được kết quả:

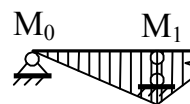
$$M_{i-1} = -\frac{6J_0\omega_i}{l_i\lambda_i J_i} \cdot \frac{b_i k'_i - a_i}{k_i k'_i - 1} = -\frac{6\omega_i}{l_i^2} \cdot \frac{b_i k'_i - a_i}{k_i k'_i - 1} \quad (5-29)$$

$$M_i = -\frac{6J_0\omega_i}{l_i\lambda_i J_i} \cdot \frac{a_i k_i - b_i}{k_i k'_i - 1} = -\frac{6\omega_i}{l_i^2} \cdot \frac{a_i k_i - b_i}{k_i k'_i - 1} \quad (5-30)$$

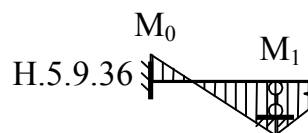
Chú ý:

- Nếu tải trọng tác dụng lên nhịp đầu tiên và gối tựa đầu tiên là khớp:

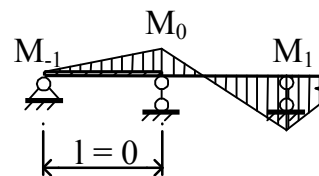
$$M_0 = 0; M_1 = -\frac{6\omega_1}{l_1^2} \cdot \frac{a_1 k_1 - b_1}{k_1 k'_1 - 1} = -\frac{6\omega_1}{l_1^2} \cdot \frac{a_1 \infty - b_1}{\infty k'_1 - 1} = -\frac{6\omega_1}{l_1^2} \cdot \frac{a_1}{k'_1}$$



H.5.9.35



H.5.9.36



H.5.9.37

- Nếu tải trọng tác dụng lên nhịp cuối cùng và gối tựa cuối cùng là khớp:
($k'_{n+1} = \infty$)

$$M_{n+1} = 0; M_n = -\frac{6\omega_{n+1}}{l_{n+1}^2} \cdot \frac{b_{n+1}k'_{n+1} - a_{n+1}}{k_{n+1}k'_{n+1} - 1} = -\frac{6\omega_{n+1}}{l_{n+1}^2} \cdot \frac{b_{n+1}}{k_{n+1}}$$

3. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen:

- Trên nhịp chịu tải trọng tác dụng: dựng tung độ của 2 gối tựa của nhịp và treo biểu đồ (M_p^o) vào.

- Bên trái của nhịp chịu tải trọng: là những đoạn thẳng kế tiếp qua tung độ tại các gối tựa được xác định:

$$M_{i-1} = -\frac{M_i}{k_i}$$

- Những nhịp bên phải của nhịp chịu tải trọng: là những đoạn thẳng kế tiếp qua tung độ tại các gối tựa được xác định:

$$M_i = -\frac{M_{i-1}}{k'_i}$$

b. Biểu đồ lực cắt: Được vẽ bằng cách suy ra từ biểu đồ mômen.

c. Biểu đồ lực dọc: Thường trùng với đường chuẩn.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.5.9.38)

1. Tạo hệ cơ bản đánh số các gối tựa, vẽ biểu đồ (M_p^o), xác định các đại lượng:

$$\omega_1 = \omega_3 = \omega_4 = 0$$

$$\omega_2 = \frac{2}{3}lf = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4 = \frac{32}{3}$$

Chọn $J_0 = J$, tính $\lambda_i = l_i \cdot \frac{J_0}{J_i}$

$$\rightarrow \lambda_1 = 3m; \lambda_2 = 2m; \lambda_3 = \lambda_4 = 3m.$$

2. Xác định các tỷ số tiêu cự mômen:

a. Tỷ số tiêu cự trái:

$$k_i = 2 + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \left[2 - \frac{1}{k_{i-1}} \right]$$

Thay $k_1 = \infty$ và tính truy hồi:

$$k_2 = 2 + \frac{3}{2} \left[2 - \frac{1}{\infty} \right] = 5; k_3 = 2 + \frac{2}{3} \left[2 - \frac{1}{5} \right] = 3,2; k_4 = 2 + \frac{3}{3} \left[2 - \frac{1}{3,2} \right] = 3,68$$

b. Tỷ số tiêu cự phải:

$$k'_i = 2 + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \left[2 - \frac{1}{k'_{i+1}} \right]$$

Thay $k'_4 = \infty$ và tính truy hồi:

$$k'_3 = 2 + \frac{3}{3} \left[2 - \frac{1}{\infty} \right] = 4; k'_2 = 2 + \frac{2}{3} \left[2 - \frac{1}{4} \right] = 4,625; k'_1 = 2 + \frac{2}{3} \left[2 - \frac{1}{4,625} \right] = 3,498$$

3. Xác định mômen uốn tại 2 gối tựa của nhịp chịu tải trọng:

$$M_2 = -\frac{6\omega_2}{l_2^2} \cdot \frac{b_2 k'_2 - a_2}{k_2 k'_2 - 1} = -\frac{6 \cdot 32}{4^2 \cdot 3} \cdot \frac{2.4,625 - 2}{5.4,625 - 1} = -1,311$$

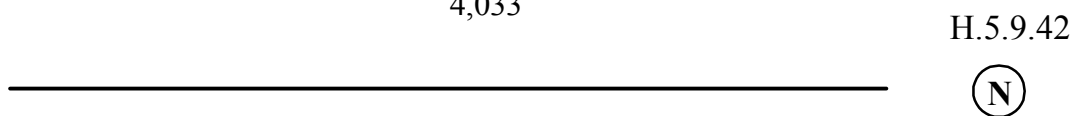
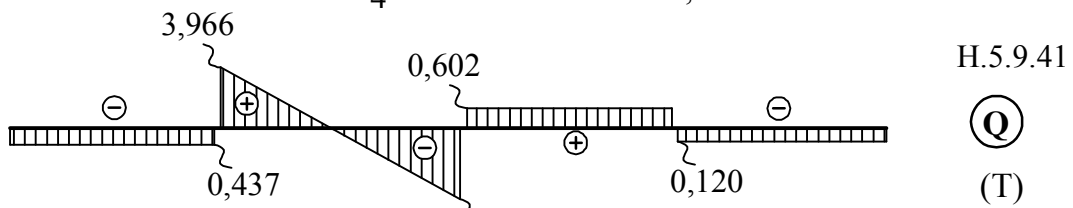
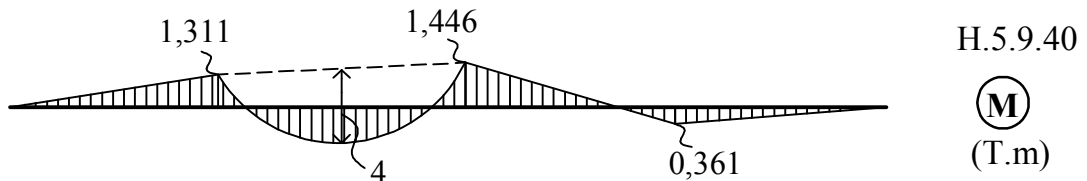
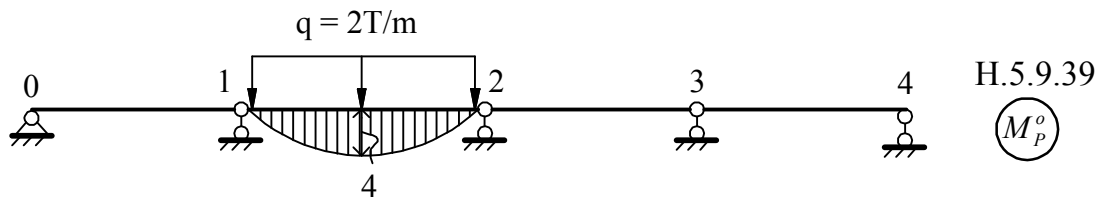
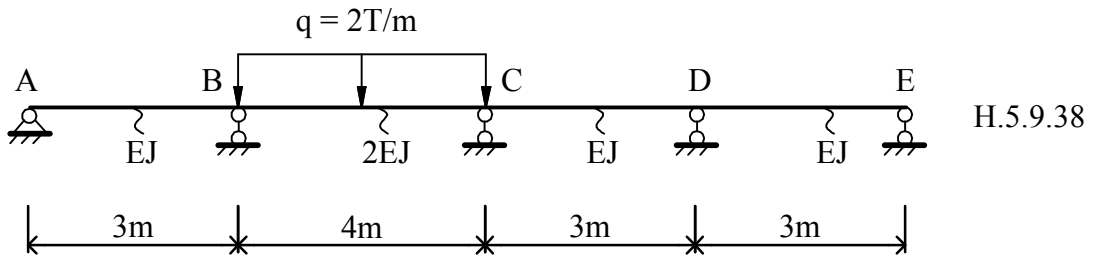
$$M_3 = -\frac{6\omega_2}{l_2^2} \cdot \frac{a_2 k_2 - b_2}{k_2 k'_2 - 1} = -\frac{6 \cdot 32}{4^2 \cdot 3} \cdot \frac{2.5 - 2}{5.4,625 - 1} = -1,446$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen: Kết quả trên hình (H.5.9.40)

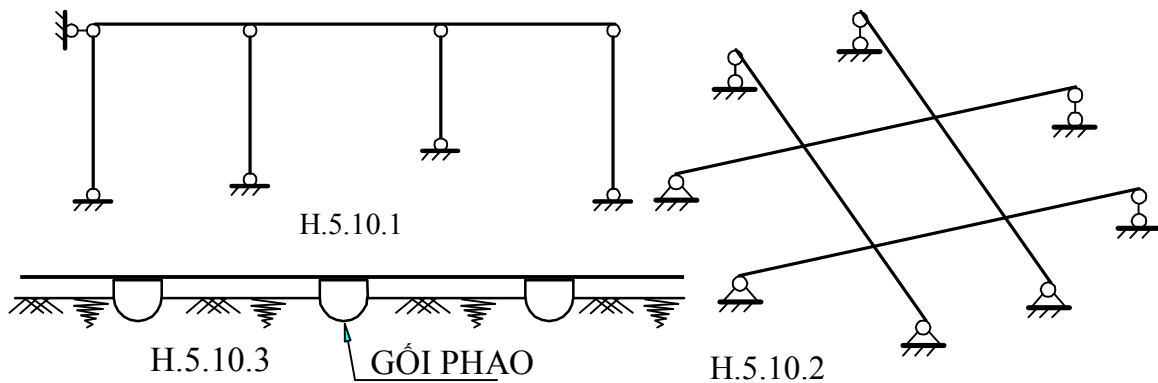
b. Biểu đồ lực cắt: Suy ra từ (M). (H.5.9.41).

c. Biểu đồ lực dọc: Trùng với đường chuẩn.



§10. TÍNH DẦM LIÊN TỤC ĐẶT TRÊN CÁC GỐI TỰA ĐÀN HỒI

I. Khái niệm: là những dầm liên tục đặt trên các gối tựa có khả năng chuyển vị theo phương vuông góc với trục dầm như cột có chiều dài hữu hạn hệ dầm đỡ dầm đang xét (H.5.10.2), dầm trên các gối phao (H.5.10.3)...



Gọi k_i là hệ số đàn hồi của gối tựa thứ i . Về ý nghĩa, k_i là chuyển vị của gối tựa thứ i khi gối chịu lực dọc bằng đơn vị. Ví dụ, hệ số đàn hồi của cột thứ i có tiết diện F_i , chiều cao d_i sẽ là $k_i = \frac{1 \cdot d_i}{EF_i}$. Vậy nếu phản lực tại gối tựa thứ i là R_i thì chuyển vị tại gối tựa này là $k_i R_i$. Ta biểu thị các gối tựa bằng các lò xo với hệ số k_i .

III. Phương trình năm mômen:

1. Hệ cơ bản:

Không mất tính tổng quát, ta xét các nhịp thứ $(i - 2), (i - 1), i, (i + 1), (i + 2)$ của một dầm liên tục đặt trên các gối tựa đàn hồi như trên hình (H.5.10.4). Tương tự bài toán dầm liên tục, tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ liên kết ngăn cản chuyển vị góc xoay tương đối của 2 tiết diện 2 bên gối tựa trung gian (thay hàn bằng khớp) (H.5.10.6)

2. Hệ phương trình chính tắc:

Xét phương trình thứ i của hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{i1} M_1 + \delta_{i2} M_2 + \dots + \delta_{in} M_n + \Delta_{iP} = 0$$

Nhận xét rằng: $\delta_{ik} = \delta_{ki}$; δ_{ki} là chuyển vị góc xoay tương đối của 2 tiết diện ở 2 bên gối tựa thứ k do $M_i = 1$ gây ra. Với cách chọn hệ cơ bản như trên thì M_i chỉ gây ra biến dạng tại nhịp thứ $(i - 1), i, (i + 1), (i + 2)$ (H.5.10.9) và chỉ gây ra chuyển vị góc xoay tại các gối tựa $(i - 2), (i - 1), i, (i + 1), (i + 2)$. Điều này có ý nghĩa $\delta_{(i-2)i}, \delta_{(i-1)i}, \delta_{ii}, \delta_{(i+1)i}, \delta_{(i+2)i} \neq 0$ còn các hệ số $\delta_{ki} (k \neq i - 2, i - 1, i, i + 1) = 0$.

Vậy ta viết phương trình thứ i :

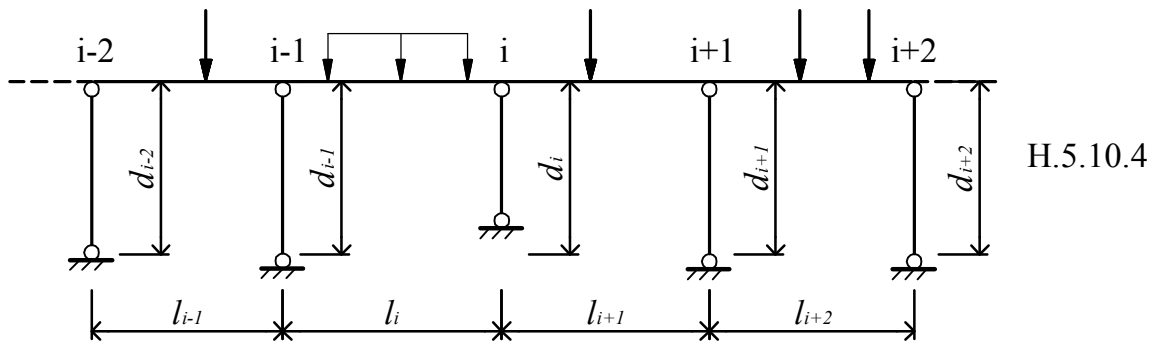
$$\delta_{i(i-2)} M_{i-2} + \delta_{i(i-1)} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i(i+1)} M_{i+1} + \delta_{i(i+2)} M_{i+2} + \Delta_{iP} = 0$$

Phương trình này gọi là phương trình năm mômen.

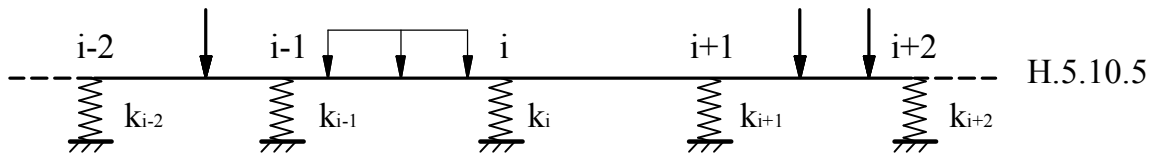
3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Các hệ số này ngoài ảnh hưởng của biến dạng uốn còn phải kể đến biến dạng dọc trục trong các gối tựa đàn hồi.

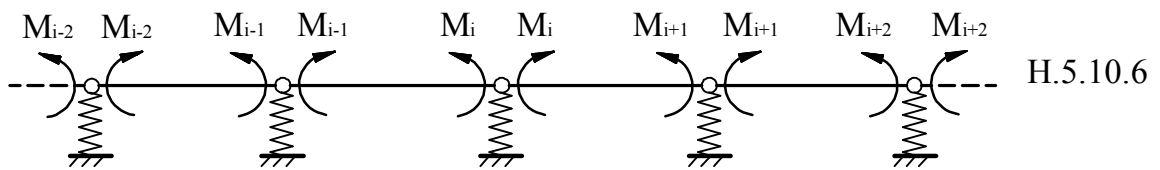
$$\delta_{ik} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_k) + \sum_m \bar{N}_{mi} \cdot \bar{N}_{mk} \cdot \frac{d_m}{EF_m}$$



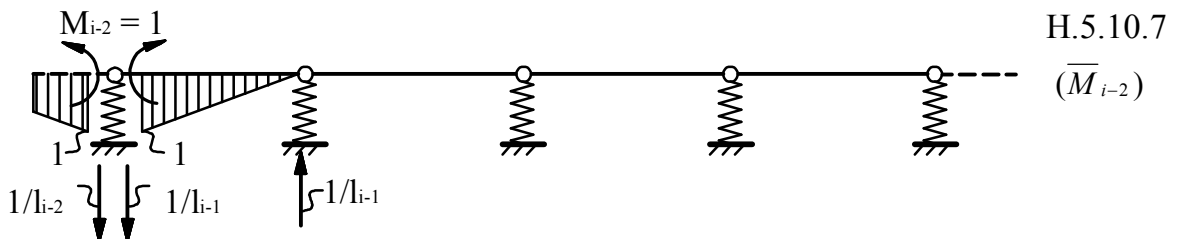
H.5.10.4



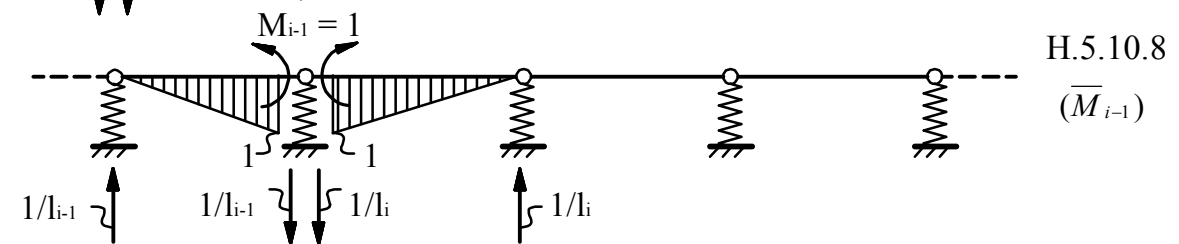
H.5.10.5



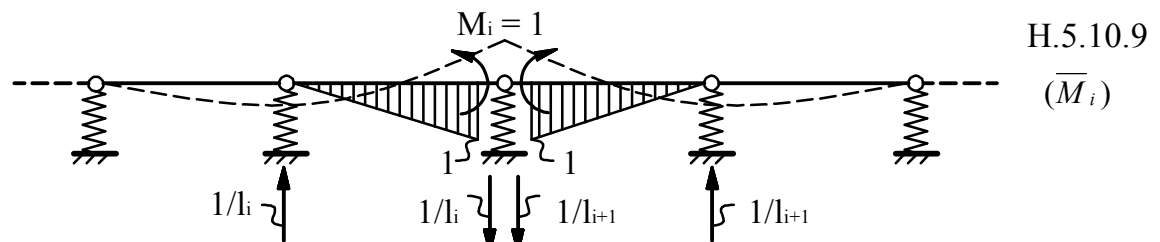
H.5.10.6



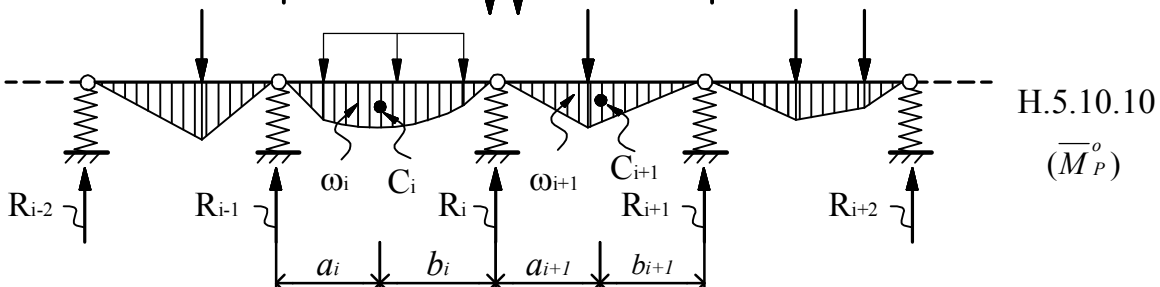
H.5.10.7



H.5.10.8



H.5.10.9



H.5.10.10

Trong đó: (\bar{M}_i) , (\bar{M}_k) lần lượt là biểu đồ mômen uốn do $M_i = 1$, $M_k = 1$ tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

\bar{N}_{mi} , \bar{N}_{mk} lần lượt là lực dọc (phản lực) trong gối tựa thứ m do $M_i = 1$ và $M_k = 1$ tác dụng lên hệ cơ bản gây ra.

$$\delta_{i(i-2)} = 0 + \left(-\frac{1}{l_{i-1}}\right)\left(-\frac{1}{l_i}\right) \cdot \frac{d_{i-1}}{EF_{i-1}} = \frac{k_{i-1}}{l_{i-1}l_i}$$

$$\begin{aligned} \delta_{i(i-1)} &= \frac{l_i}{6EJ_i} + \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right)\left(-\frac{1}{l_i}\right) \cdot \frac{d_{i-1}}{EF_{i-1}} + \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)\left(-\frac{1}{l_i}\right) \cdot \frac{d_i}{EF_i} \\ &= \frac{l_i}{6EJ_i} - \frac{k_{i-1}}{l_i} \left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right) - \frac{k_i}{l_i} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) \delta_{ii} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} + \left(-\frac{1}{l_i}\right)\left(-\frac{1}{l_i}\right) \cdot \frac{d_{i-1}}{EF_{i-1}} + \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 \cdot \frac{d_i}{EF_i} + \left(-\frac{1}{l_{i+1}}\right)\left(-\frac{1}{l_{i+1}}\right) \cdot \frac{d_{i+1}}{EF_{i+1}} \\ &= \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} + \frac{k_{i-1}}{l_i^2} + \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 k_i + \left(\frac{1}{l_{i+1}}\right)^2 k_{i+1} \end{aligned}$$

Thay chỉ số i trong hệ số $\delta_{i(i-1)}$ bằng (i-1) ta sẽ được $\delta_{i(i-1)}$.

$$\delta_{i(i+1)} = \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} + \frac{k_i}{l_{i+1}} \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) - \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} \left(\frac{1}{l_{i+1}} + \frac{1}{l_{i+2}}\right)$$

Thay chỉ số i = (i + 2) trong hệ số $\delta_{i(i-2)}$ ta sẽ được $\delta_{i(i+2)}$

$$\delta_{i(i+2)} = \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}l_{i+2}}$$

Số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc:

$$\Delta_{iP} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_P^o) + \sum_m \bar{N}_{mi} \cdot \bar{N}_{mP}^o \cdot \frac{d_m}{EF_m}$$

(M_P^o) là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản.

(N_m^P) : lực dọc (phản lực) trong gối tựa m do P gây ra trên hệ cơ bản.

$$\begin{aligned} \Delta_{iP} &= \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EJ_{i+1}} + \left(-\frac{1}{l_i}\right)\left(-R_{i-1}\right) \cdot \frac{d_{i-1}}{EF_{i-1}} + \\ &+ \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right)\left(-R_i\right) \cdot \frac{d_i}{EF_i} + \left(-\frac{1}{l_{i+1}}\right)\left(-R_{i+1}\right) \cdot \frac{d_{i+1}}{EF_{i+1}} \\ \rightarrow \Delta_{iP} &= \frac{\omega_i a_i}{l_i EJ_i} + \frac{\omega_{i+1} b_{i+1}}{l_{i+1} EJ_{i+1}} + \frac{k_{i-1}}{l_i} R_{i-1} - \left(\frac{1}{l_i} + \frac{1}{l_{i+1}}\right) k_i R_i + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} R_{i+1} \end{aligned}$$

Các đại lượng ω_i , a_i , b_i có ý nghĩa như trong phần phương trình 3 mômen.

Thay các hệ số ta được phương trình 5 mômen dưới dạng khai triển.

Trong trường hợp dầm có độ cứng $EJ = \text{const}$, chiều dài các nhịp bằng nhau (bằng l), các gối tựa có hệ số đàn hồi là như nhau thì phương trình 5 mômen có dạng:

$$\begin{aligned} \alpha M_{i-2} + (1 - 4\alpha) M_{i-1} + (4 + 6\alpha) M_i + (1 - 4\alpha) M_{i+1} + \\ + \alpha M_{i+2} + \frac{6}{l^2} (\omega_i a_i + \omega_{i+1} b_{i+1}) + \alpha l (R_{i-1} - 2R_i + R_{i+1}) = 0 \end{aligned}$$

Trong đó: $\alpha = \frac{6EJ}{l^2} \cdot k$

Sau khi thiết lập và giải hệ thống phương trình 5 mômen, ta sẽ xác định và vẽ biểu đồ nội lực như đã trình bày trong phần dầm liên tục.

§11. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

1. Đường ảnh hưởng cơ bản: là đường ảnh hưởng của các ản X_k , là các ản số thay thế cho các liên kết bị loại bỏ khi tạo hệ cơ bản.

1. Hệ cơ bản:

Tạo hệ cơ bản bằng cách loại bỏ các liên kết thừa và thay thế bằng các ản số X_k như trong phần hệ cơ bản của phương pháp lực.

2. Hệ phương trình chính tắc:

Để vẽ đường ảnh hưởng ta giả thiết trên công trình chỉ có 1 lực $P = 1$ di động theo 1 tọa độ z . Lực này bằng đơn vị và duy nhất tác dụng nên số hạng tự do chỉ còn Δ_{kP} và được thay bằng δ_{kP} . Do đó, hệ phương trình chính tắc có dạng:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \delta_{2P} = 0 \\ \dots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \delta_{nP} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Hệ số chính và phụ: (δ_{km}).

δ_{km} không phụ thuộc vào lực $P = 1$ di động và được xác định như hệ chịu tải trọng bất động: $\delta_{km} = (\bar{M}_k)(\bar{M}_m)$.

b. Số hạng tự do: (δ_{kP})

δ_{kP} do $P = 1$ động gây ra nên sẽ thay đổi theo tọa độ chạy z của lực P di động. Khi xác định δ_{kP} ta nên chia nhiều trường hợp của lực $P = 1$ di động với mỗi trường hợp P di động trên một phần tử thuộc hệ. Với mỗi trường hợp ta vẽ được một "dạng" của (M_P^o).

$$\delta_{kP} = (\bar{M}_k)(M_P^o)$$

4. Giải hệ phương trình chính tắc:

Sử dụng phương pháp hệ số ảnh hưởng. Trong phương trình này các ản X_k được biểu diễn qua các số hạng tự do (δ_{kP}) và hệ số ảnh hưởng:

$$\begin{cases} X_1 = \beta_{11}\delta_{1P} + \beta_{12}\delta_{2P} + \dots + \beta_{1n}\delta_{nP} \\ X_2 = \beta_{21}\delta_{1P} + \beta_{22}\delta_{2P} + \dots + \beta_{2n}\delta_{nP} \\ \dots \\ X_n = \beta_{n1}\delta_{1P} + \beta_{n2}\delta_{2P} + \dots + \beta_{nn}\delta_{nP} \end{cases}$$

Trong đó β_{ik} : là hệ số ảnh hưởng, được xác định theo công thức sau:

$$\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm 1} \cdot \frac{D_{ik}}{D}$$

D là định thức của hệ số chính và phụ của hệ phương trình chính tắc:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix}$$

D_{ik} là định thức được suy ra từ định thức D bằng cách loại bỏ hàng thứ i cột thứ k (hoặc hàng k cột i)

Sau khi xác định được X_k (là hàm theo tọa độ chạy z của $P = 1$ di động), cho z biến thiên sẽ vẽ được đ.a.h. X_k .

II. Đường ảnh hưởng phản lực, nội lực, chuyển vị:

Sau khi tìm được các đường ảnh hưởng cơ bản, áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có thể vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng S (nội lực, phản lực, chuyển vị...) theo biểu thức sau:

$$\text{đ.a.h.}S = \bar{S}_1 \cdot (\text{đ.a.h.}X_1) + \bar{S}_2 \cdot (\text{đ.a.h.}X_2) + \dots + \bar{S}_n \cdot (\text{đ.a.h.}X_n) + \text{đ.a.h.}S^0 \quad (5-31)$$

Trong đó: \bar{S}_k là giá trị của S do riêng $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

đ.a.h. X_k : là các ảnh hưởng cơ bản.

đ.a.h. S^0 : đường ảnh hưởng của S trên hệ cơ bản. Nếu hệ cơ bản chọn là tĩnh định thì đ.a.h. S^0 được vẽ như trong phần cơ học kết cấu I.

* *Chú ý:* Do phương trình đường ảnh hưởng $S(z)$ là hàm bậc cao theo z nên trong cách vẽ thực hành người ta sử dụng phương pháp điểm chia và lập thành bảng tính. Có thể tham khảo nội dung của bảng (B.5.11.1) bên dưới.

B.5.11.1 Bảng tính đ.a.h.S trong hệ siêu tĩnh

Điểm	z	đ.a.h. X_1	đ.a.h. X_2	...	đ.a.h. X_n	đ.a.h. S^0	đ.a.h. S
...	

Ví dụ: Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k của hệ trên hình vẽ (H.5.11.1). Cho EJ trong các thanh bằng hằng số trên toàn hệ.

1. Vẽ đường ảnh hưởng cơ bản:

a. Bậc siêu tĩnh:

$$n = 3V - K = 3 \cdot 3 - 7 = 2$$

b. hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản: (H.5.11.2)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1P} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2P} = 0 \end{cases}$$

c. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Hệ số chính và phụ δ_{km} :

$$\delta_{11} = \left(\frac{1}{EJ} \cdot \frac{1.3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) \cdot 2 = \frac{2}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1.3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{2EJ}$$

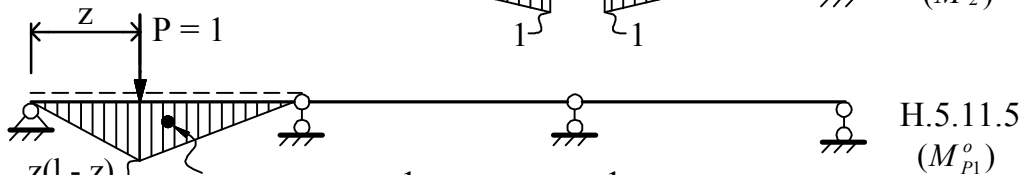
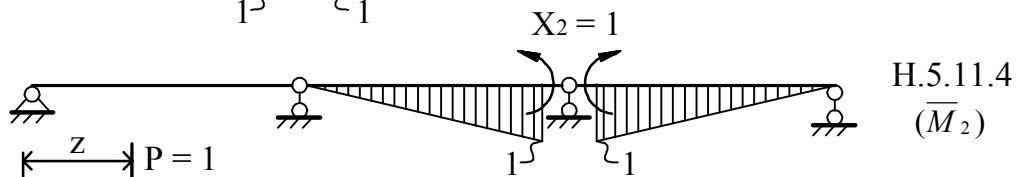
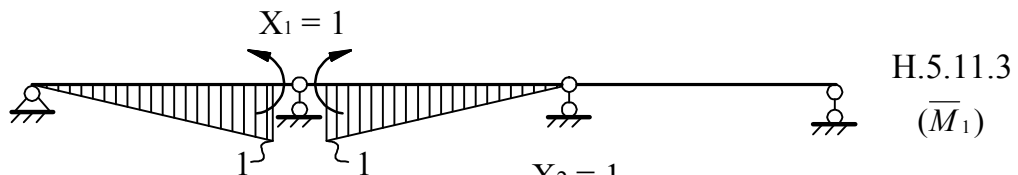
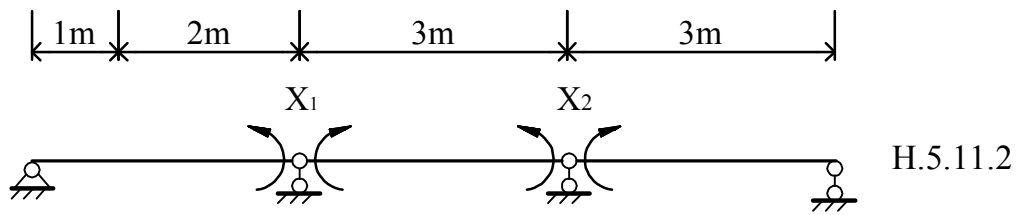
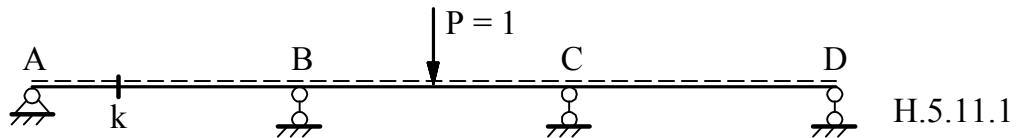
$$\delta_{22} = \frac{2}{EJ} (= \delta_{11})$$

- Xác định số hạng tự do δ_{kP} :

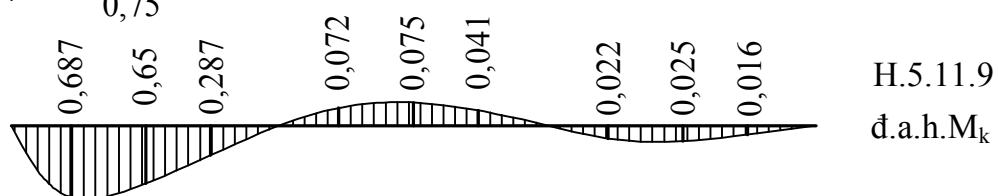
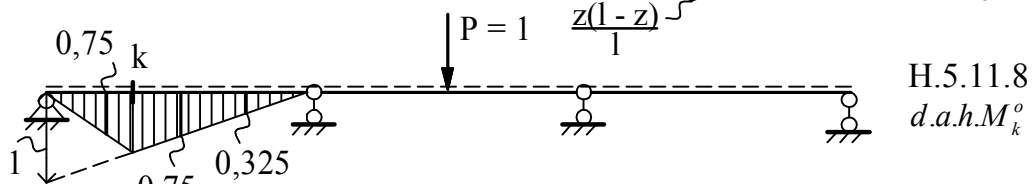
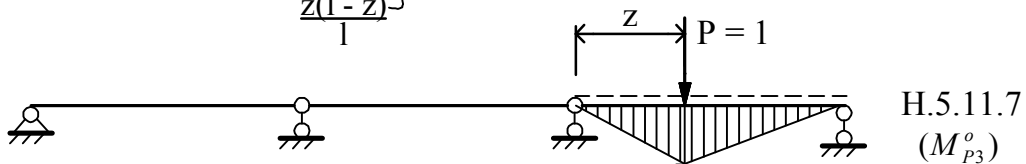
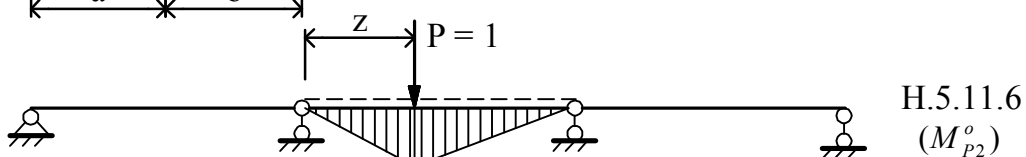
Chia đường xe chạy ra làm ba đoạn (phần tử) AB, BC, CD. Ứng với mỗi phần tử ta chọn góc tọa độ tại đầu trái. Ứng với mỗi phần tử, ta vẽ được (M_P^o) tương ứng (H.5.11.5 → H.5.11.7)

+ Khi $P = 1$ di động trên AB ($z \in [0;3]$)

$$\delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_{P1}^o) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(3+z)}{3} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(9-z^2)}{18}$$



$$a = \frac{1}{3}(1+z); \quad b = \frac{1}{3}(21-z)$$



$$\delta_{2P} = (\bar{M}_2)(M_{P1}^o) = 0$$

+ Khi $P = 1$ di động trên BC ($z \in [0;3]$)

$$\delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_{P2}^o) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(2.3-z)}{3} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)(6-z)}{18}$$

$$\delta_{2P} = (\bar{M}_2)(M_{P2}^o) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(9-z^2)}{18}$$

+ Khi P = 1 di động trên CD ($z \in [0;3]$)

$$\delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_{P3}^o) = 0$$

$$\delta_{2P} = (\bar{M}_2)(M_{P3}^o) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)(6-z)}{18}$$

d. Giải hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} X_1 = \beta_{11}\delta_{1P} + \beta_{12}\delta_{2P} \\ X_2 = \beta_{21}\delta_{1P} + \beta_{22}\delta_{2P} \end{cases}$$

$$\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm 1} \cdot \frac{D_{ik}}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{EJ} & \frac{1}{2EJ} \\ \frac{1}{2EJ} & \frac{2}{EJ} \end{vmatrix} = \frac{15}{4(EJ)^2}$$

$$\beta_{11} = (-1)^3 \cdot \frac{2}{EJ} / \frac{15}{4(EJ)^2} = -\frac{8EJ}{15}$$

$$\beta_{12} = (-1)^4 \cdot \frac{1}{2EJ} / \frac{15}{4(EJ)^2} = \frac{2EJ}{15}$$

$$\beta_{21} = \beta_{12} = \frac{2EJ}{15}$$

$$\beta_{22} = (-1)^5 \cdot \frac{2}{EJ} / \frac{15}{4(EJ)^2} = -\frac{8EJ}{15}$$

Thay vào phương trình:

+ Khi P = 1 di động trên AB ($z \in [0;3]$)

$$X_1 = -\frac{8EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(9-z^2)}{18} + \frac{2EJ}{15} \cdot 0 = -\frac{1}{33,75} \cdot z(9-z^2)$$

$$X_2 = \frac{2EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(9-z^2)}{18} - \frac{8EJ}{15} \cdot 0 = \frac{1}{135} \cdot z(9-z^2)$$

+ Khi P = 1 di động trên BC ($z \in [0;3]$)

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{8EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)(6-z)}{18} + \frac{2EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(9-z^2)}{18} \\ &= -\frac{1}{33,75} \cdot z(3-z)(6-z) + \frac{1}{135} \cdot z(9-z^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{2EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)(6-z)}{18} - \frac{8EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(9-z^2)}{18} \\ &= \frac{1}{135} \cdot z(3-z)(6-z) - \frac{1}{33,75} \cdot z(9-z^2) \end{aligned}$$

+ Khi P = 1 di động trên CD ($z \in [0;3]$)

$$X_1 = -\frac{8EJ}{15} \cdot 0 + \frac{2EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)(6-z)}{18} = \frac{1}{135} \cdot z(3-z)(6-z)$$

$$X_2 = \frac{2EJ}{15} \cdot 0 - \frac{8EJ}{15} \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{z(3-z)(6-z)}{18} = -\frac{1}{33,75} \cdot z(3-z)(6-z)$$

Cho z biến thiên trên từng đoạn ta có thể vẽ được các đường ảnh hưởng cơ bản.

2. Đường ảnh hưởng mômen uốn tại k :

$$\text{đ.a.h. } M_k^o = \bar{M}_{k1} (\text{đ.a.h. } X_1) + \bar{M}_{k2} (\text{đ.a.h. } X_2) + \text{đ.a.h. } M_k^o$$

đ.a.h. M_k^o được vẽ trên hình (H.5.11.8)

$$\bar{M}_{k1} = \frac{1}{3}; \bar{M}_{k2} = 0$$

Ta lập bảng tính toán: Chia đường xe chạy ra làm 12 đoạn, mỗi đoạn dài 0,75m.

Phần tử	z (m)	đ.a.h. X_1	đ.a.h. X_2	\bar{M}_{k1} đ.a.h. X_1	\bar{M}_{k2} đ.a.h. X_2	đ.a.h. M_k^o	đ.a.h. M_k
AB	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	-0,187	0,047	-0,063	0	0,75	0,687
	1,5	-0,3	0,075	-0,1	0	0,75	0,65
	2,25	-0,263	0,066	-0,088	0	0,375	0,287
	3	0	0	0	0	0	0
BC	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	-0,216	-0,122	-0,072	0	0	0,072
	1,5	-0,225	-0,225	-0,075	0	0	-0,075
	2,25	-0,122	-0,216	-0,041	0	0	-0,041
	3	0	0	0	0	0	0
CD	0	0	0	0	0	0	0
	0,75	0,066	-0,187	0,022	0	0	0,022
	1,5	0,075	-0,3	0,025	0	0	0,025
	2,25	0,047	-0,263	0,016	0	0	0,016
	3	0	0	0	0	0	0

Bảng 5.12. Bảng tính đ.a.h cơ bản và đ.a.h. M_k

§12. BIỂU ĐỒ BAO NỘI LỰC

Theo thời gian tác dụng lên công trình, tải trọng được chia thành 2 loại:

- + Tải trọng lâu dài: Nội lực do nó gây ra không đổi.
- + Tải trọng tạm thời: Nội lực do nó gây ra sẽ thay đổi.

Tải trọng tác dụng lên công trình gồm 2 loại trên nên nội lực sẽ thay đổi trong suốt quá trình tồn tại của công trình. Do đó, khi thiết kế cần phải xác định các giá trị đại số lớn nhất và nhỏ nhất của nội lực tại tất cả các tiết diện của hệ. Nếu biểu diễn nó lên trên một đồ thị sẽ được biểu đồ gọi là biểu đồ bao nội lực.

I. Định nghĩa biểu đồ bao nội lực:

Biểu đồ bao nội lực là biểu đồ mà mỗi tung độ của nó biểu thị giá trị đại số của nội lực lớn nhất hoặc nhỏ nhất do tải trọng lâu dài và tải trọng tạm thời có thể có gây ra tại tiết diện tương ứng.

II. Cách thực hiện:

Để đơn giản, ta xem tải trọng tạm thời tác dụng đồng thời lên từng nhịp của hệ và tiến hành các bước sau:

Bước 1: Vẽ biểu đồ nội lực do tải trọng lâu dài tác dụng lên toàn hệ gây ra (S_{ld})

Bước 2: Lần lượt vẽ các biểu đồ nội lực do tải trọng tạm thời gây ra sao cho mỗi trường hợp tải trọng tạm thời chỉ tác dụng lên một nhịp của hệ (S_{tt})

Bước 3: Vẽ biểu đồ bao nội lực bằng cách xác định tung độ lớn nhất (nhỏ nhất) tại các tiết diện của hệ. Biểu thức xác định có thể được viết:

$$S_{\max}^k = S_{ld}^k + \Sigma S_{tt}^k(+)$$

$$S_{\min}^k = S_{ld}^k + \Sigma S_{tt}^k(-)$$

k: chỉ tiết diện xác định tung độ biểu đồ bao.

$\Sigma S_{tt}^k(+)$, $\Sigma S_{tt}^k(-)$: lấy tổng các trường hợp nội lực tại k do tải trọng tạm thời gây ra mang dấu dương hay âm.

CHƯƠNG 6. PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ.
§1. CÁC KHÁI NIỆM.

I. Các giả thiết của phương pháp chuyển vị:

- *Giả thiết 1:* Các nút của hệ được xem là tuyệt đối cứng. Do đó, khi biến dạng, các đầu thanh qui tụ vào mỗi nút sẽ có chuyển vị thẳng và góc xoay là như nhau.

Giả thiết này làm giảm số lượng ẩn số.

- *Giả thiết 2:* Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt khi xét biến dạng của các cấu kiện bị uốn.

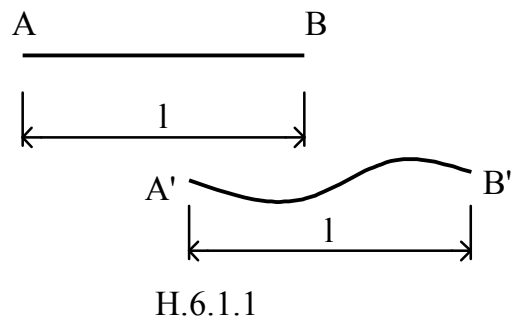
Giả thiết này không làm thay đổi số lượng ẩn số nhưng làm cho bảng tra nội lực các cấu kiện mẫu đơn giản hơn.

- *Giả thiết 3:* Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng đàn hồi dọc trục khi xét biến dạng của các cấu kiện chịu uốn. (biến dạng dọc trục vì nhiệt độ không được phép bỏ qua)

Giả thiết này làm giảm số lượng ẩn số.

Ngoài ra, còn tuân theo giả thiết vật liệu, tuân theo định luật Hook, biến dạng và chuyển vị là những đại lượng vô cùng bé.

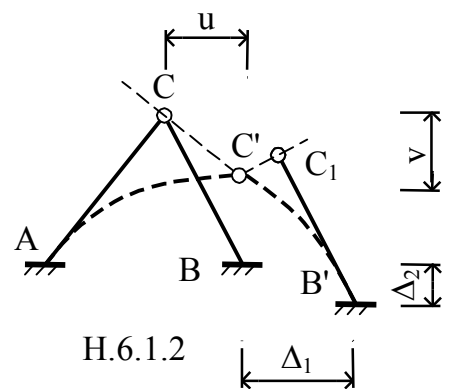
* **Kết luận:** Trước và sau khi biến dạng, khoảng cách giữa 2 nút ở hai đầu thanh theo phương ban đầu của thanh là không thay đổi trừ trường hợp thanh có biến dạng dọc trục vì nhiệt độ hoặc thanh có hai đầu khớp với độ cứng EF khác vô cùng (H.6.1.1).



II. Hệ xác định động và hệ siêu động:

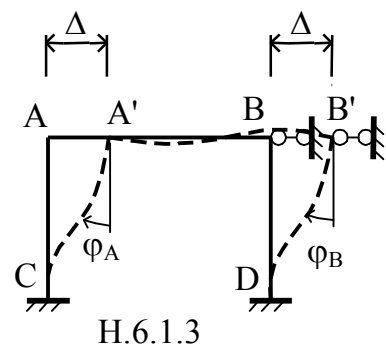
1. Hệ xác định động: là những hệ khi chịu chuyển vị cưỡng bức, ta có thể xác định được các chuyển vị tại các đầu thanh chỉ bằng điều kiện động học (hình học).

Xét hệ trên hình vẽ (H.6.1.2) khi B chịu chuyển vị cưỡng bức thì các đầu thanh quy tụ vào C chỉ tồn tại 2 thành phần chuyển vị thẳng (u, v). Ta có thể xác định được hai thành phần này chỉ bằng điều kiện động học (hình học). Vậy hệ đã cho là hệ xác định động.



2. Hệ siêu động: là những hệ khi chịu nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức ta chưa thể xác định được tất cả các chuyển vị tại các đầu thanh chỉ bằng điều kiện động học (hình học) mà phải sử dụng thêm điều kiện cân bằng.

Ví dụ: Khi liên kết thanh chuyển vị ngang Δ (H.6.1.3), bằng điều kiện động học có thể xác định được chuyển vị thẳng tại A và B (chuyển vị ngang bằng Δ, chuyển vị đứng bằng 0). Tuy nhiên, chưa



thể xác định được góc xoay (φ_A, φ_B). Vậy hệ là hệ siêu động.

* **Chú ý:**

- Khái niệm về hệ siêu động hay xác định động là phụ thuộc vào các giả thiết chấp nhận.

- Hệ siêu động (xác định động) có thể là hệ tĩnh định hay siêu tĩnh. Ta chỉ tập trung nghiên cứu hệ siêu động đồng thời là siêu tĩnh.

III. Bậc siêu động:

1. Khái niệm: Bậc siêu động của hệ siêu động chính là số lượng các chuyển vị độc lập chưa biết của các nút và các khớp không nối đất trong hệ. Ký hiệu n.

$$n = n_1 + n_2 \quad (6-1)$$

n_1 : số chuyển vị xoay độc lập chưa biết của các nút, n_1 chính bằng số nút trong hệ.

n_2 : số chuyển vị thẳng độc lập chưa biết của các nút và các khớp không nối đất.

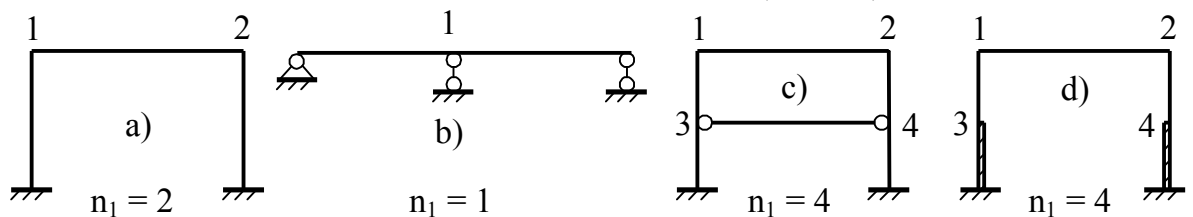
2. Cách xác định:

a. Xác định n_1 : Bằng cách tính số lượng nút trong hệ. Nút là nơi giao nhau giữa các phân tử và được nối bằng liên kết hàn. Trong đó, phân tử là một cấu kiện mẫu tức là có biểu đồ nội lực cho trước và được lập sẵn thành bảng.

Đối với môn Cơ học kết cấu, phân tử là 1 đoạn thanh thẳng thỏa mãn các điều kiện:

- Độ cứng không đổi.
- Được nối với các phân tử khác hoặc trái đất chỉ bằng liên kết ở 2 đầu.

Ví dụ: Xác định n_1 của các hệ cho trên hình vẽ (H.6.1.4).

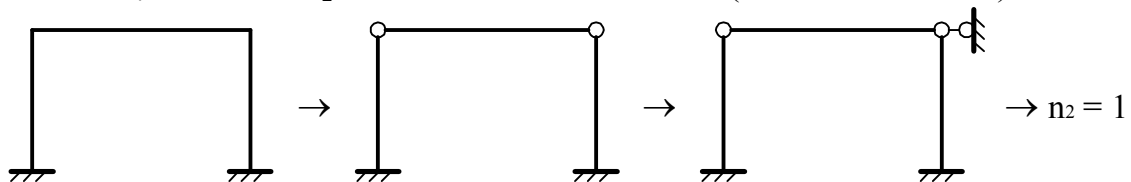


H.6.1.4

b. Xác định n_2 : Bằng cách tính số lượng các chuyển vị thẳng độc lập chưa biết tại các nút và các khớp không nối đất. Để xác định, ta thay các nút, ngàm nối đất bằng các liên kết khớp để được 1 hệ mới.

Nếu hệ mới là bất biến hình thì $n_2 = 0$; nếu hệ mới là biến hình hay gần biến hình tức thời thì n_2 chính là số liên kết thanh vừa đủ thêm vào để hệ trở thành hệ bất biến hình.

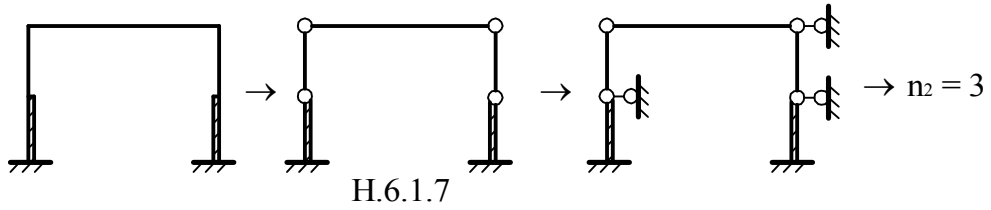
Ví dụ: Xác định n_2 của các hệ cho trên hình vẽ (H.6.1.5 → H.6.1.7).



H.6.1.5



H.6.1.6



**Chú ý:* Khái niệm về bậc siêu động có thể thay đổi và phụ thuộc vào các yếu tố:

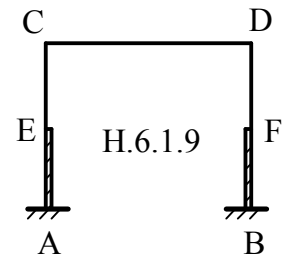
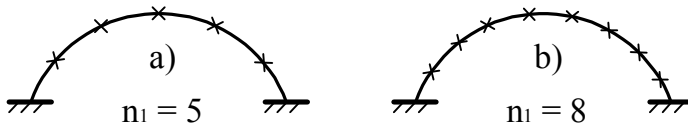
- Các giả thiết chấp nhận: chẳng hạn nếu phủ nhận giả thiết 3 thì n_1 không đổi còn n_2 tăng lên.

- Sơ đồ rời rạc hoá chấp nhận (H.6.1.8).

- Các cấu kiện mẫu mà người thiết kế sẵn có (H.6.1.9):

- + Nếu quan niệm mỗi phần tử là 1 thanh thẳng có độ cứng không đổi (AB, BC, CD, DE, EF) thì $n = n_1 + n_2 = 4 + 3 = 7$.

- + Nếu quan niệm mỗi phần tử là 1 thanh thẳng (AEC, CD, DFB) thì $n = 2 + 1 = 3$.



§2. NỘI DUNG CỦA PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

I. Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị:

1. Định nghĩa: Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là hệ được suy ra từ hệ đã cho bằng cách đặt các liên kết phụ thêm vào hệ nhằm ngăn cản chuyển vị của các nút và các khớp không nối đất

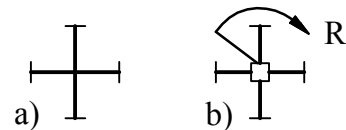
- Nếu các liên kết thêm vào khử được tất cả chuyển vị của các nút và các khớp không nối đất thì hệ cơ bản là hệ xác định động.

- Nếu các liên kết chỉ khử được 1 phần chuyển vị của các nút thì hệ cơ bản là hệ siêu động nhưng có bậc siêu động thấp hơn.

Yêu cầu: Hệ cơ bản chỉ tồn tại những cấu kiện mẫu, tức là có biểu đồ nội lực cho sẵn trong bảng.

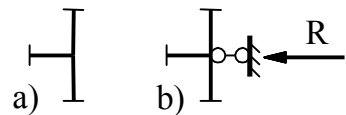
2. Các loại liên kết phụ thêm:

a. Liên kết mômen: Là loại liên kết chỉ ngăn cản chuyển vị góc xoay, không ngăn cản chuyển vị thẳng. Trong liên kết này chỉ phát sinh 1 thành phần phản lực mômen. Ký hiệu (H.6.2.1).



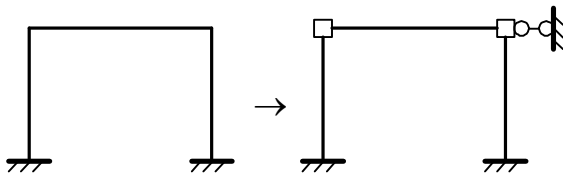
H.6.2.1

b. Liên kết lực (liên kết thanh): Liên kết này chỉ ngăn cản chuyển vị dọc theo trục thanh (trục liên kết). Trong liên kết thanh chỉ phát sinh 1 thành phần phản lực dọc theo trục thanh.

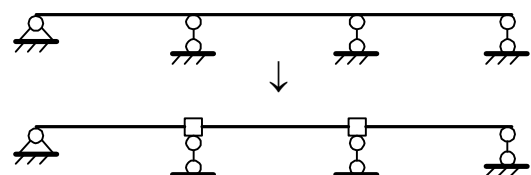


H.6.2.2

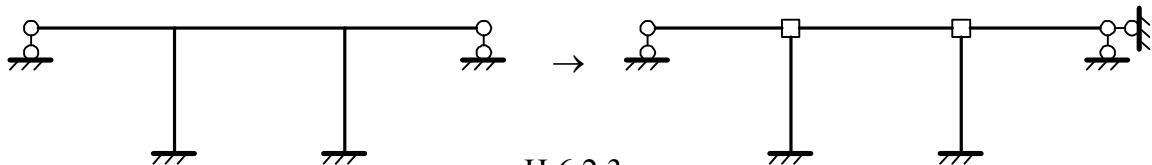
3. Các ví dụ tạo hệ cơ bản:



H.6.2.3a



H.6.2.3b



H.6.2.3c

Nhận xét:

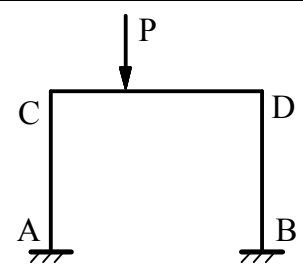
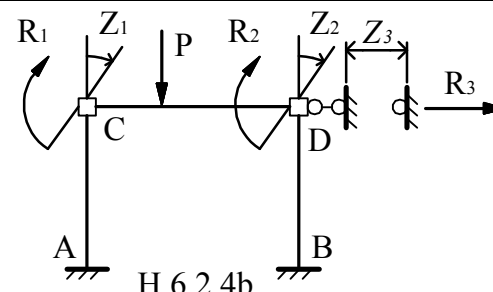
- Khác với hệ cơ bản của phương pháp lực, hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là duy nhất nếu các yếu tố ảnh hưởng đến bậc siêu động là xác định.

- Hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị thực chất là những cấu kiện rời rạc và làm việc độc lập nhau.

II. Hệ phương trình cơ bản của phương pháp chuyển vị:

Do đặt các liên kết phụ thêm vào nên hệ cơ bản có những yếu tố khác với hệ siêu động ban đầu. Vì vậy ta cần so sánh sự khác nhau đó và bổ sung thêm các điều kiện để hệ cơ bản làm việc giống với hệ ban đầu.

Giả sử xét hệ siêu động trên hình (H.6.2.4a) và hệ cơ bản của nó (H.6.2.4b).

 <p style="text-align: center;">H.6.2.4a</p>	 <p style="text-align: center;">H.6.2.4b</p>
<p>- Về chuyển vị: Tại C và D có tồn tại chuyển vị ngang và góc xoay.</p> <p>- Về mặt phản lực: Tại C và D không tồn tại phản lực.</p>	<p>Tại C và D không tồn tại chuyển vị.</p> <p>Tại C và D tồn tại phản lực (R_1, R_2, R_3) tại các liên kết phụ thêm.</p>

Vậy để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ siêu động ban đầu, trên hệ cơ bản cần:

- Tạo ra các chuyển vị cưỡng bức (Z_1, Z_2, Z_3) tương ứng với các liên kết phụ thêm vào.
- Thiết lập điều kiện phản lực tại các liên kết phụ thêm vào do các nguyên nhân (Z_1, Z_2, Z_3, P) bằng không. Các điều kiện này được viết dưới dạng:

$$\begin{cases} R_1(Z_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \\ R_2(Z_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \\ R_3(Z_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \end{cases}$$

Từ điều kiện này ta có thể giải ra được (Z_1, Z_2, Z_3).

Tương tự như vậy ta mở rộng cho 1 hệ siêu động bất kỳ chịu các nguyên nhân bên ngoài (P, t, Z). Tạo hệ cơ bản bằng cách đặt n liên kết phụ thêm vào. Để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ ban đầu thì trên hệ cơ bản cần:

- Tạo ra các chuyển vị cưỡng bức (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) tương ứng với các liên kết phụ thêm vào. Các chuyển vị này có chiều tùy ý, tuy nhiên thường chọn xoay theo chiều kim đồng hồ, thẳng theo chiều từ trái sang phải. Các chuyển vị này đóng vai trò là ẩn số.
- Thiết lập điều kiện phản lực tại các liên kết phụ thêm vào do các nguyên nhân ($Z_1, Z_2, \dots, Z_n, P, t, Z$) = 0.

Điều kiện thứ 2 được viết:

$$\begin{cases} R_1(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \\ R_2(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \\ \dots \\ R_n(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \end{cases} \quad (6-2)$$

Hệ phương trình này gọi là hệ phương trình cơ bản của phương pháp chuyển vị.

III. Hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị:

Xét phương trình thứ k của hệ phương trình cơ bản:

$$R_k(Z_1, Z_2, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0.$$

Khai triển phương trình này theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$R_k(Z_1) + R_k(Z_2) + \dots + R_k(Z_n) + R_k(P) + R_k(t) + R_k(Z) = 0.$$

Gọi r_{km} là phản lực tại liên kết phụ thêm thứ k do riêng chuyển vị cưỡng bức tại liên kết phụ thêm thứ m $Z_m = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

Suy ra: $R_k(Z_m) = r_{km} \cdot Z_m$

Gọi R_{kP} , R_{kt} , R_{kZ} : lần lượt là phản lực tại liên kết phụ thêm thứ k do nguyên nhân ngoài P , t , Z gây ra trên hệ cơ bản.

Suy ra: $R_k(P) = R_{kP}$, $R_k(t) = R_{kt}$, $R_k(Z) = R_{kZ}$

Thay tất cả vào phương trình khai triển ta được:

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kP} + R_{kt} + R_{kZ} = 0$$

Cho $k = \overline{1, n}$ ta được hệ phương trình chính tắc của phương pháp chuyển vị:

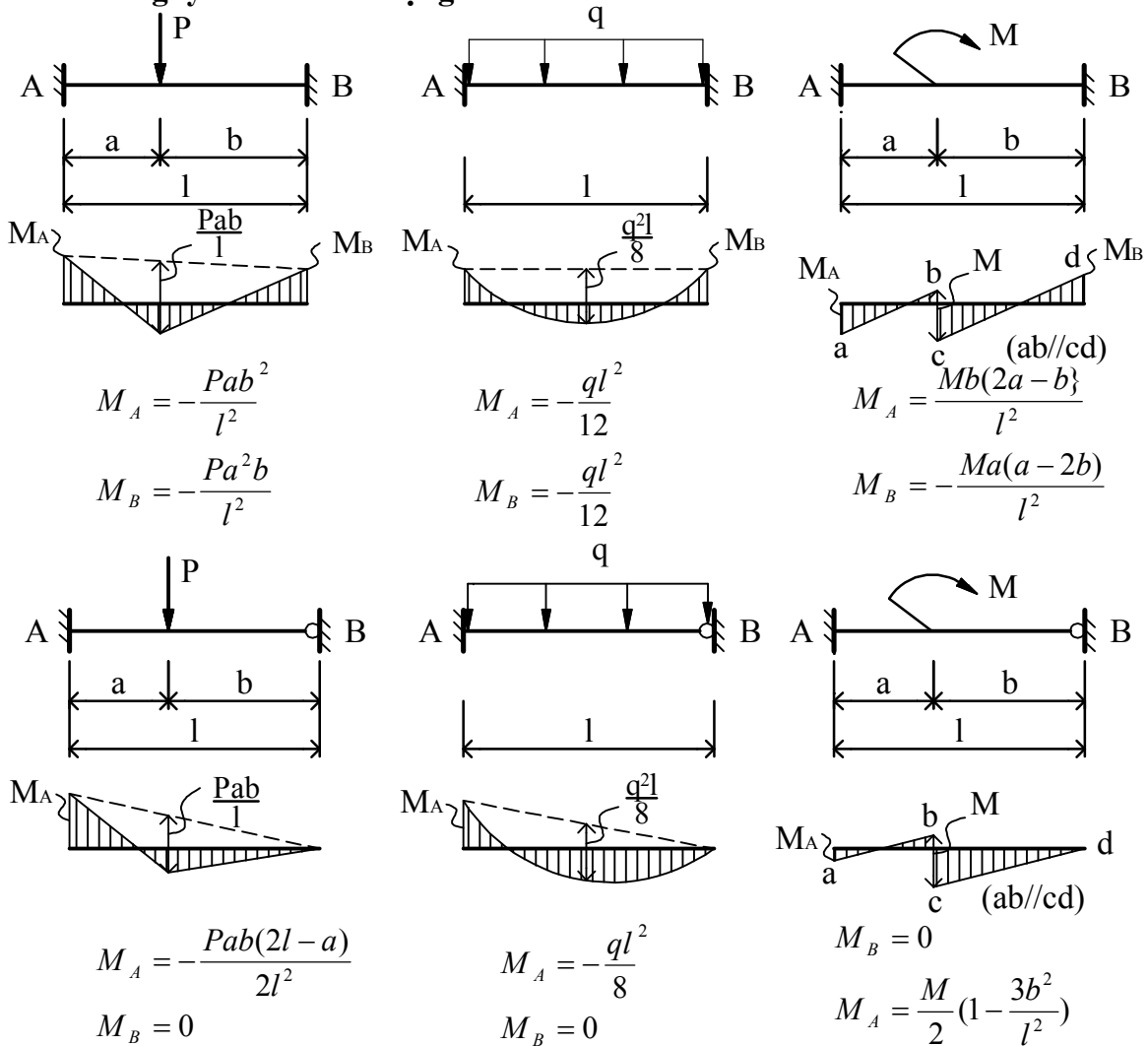
$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} + R_{1t} + R_{1Z} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} + R_{2t} + R_{2Z} = 0 \\ \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} + R_{nt} + R_{nZ} = 0 \end{cases} \quad (6-3)$$

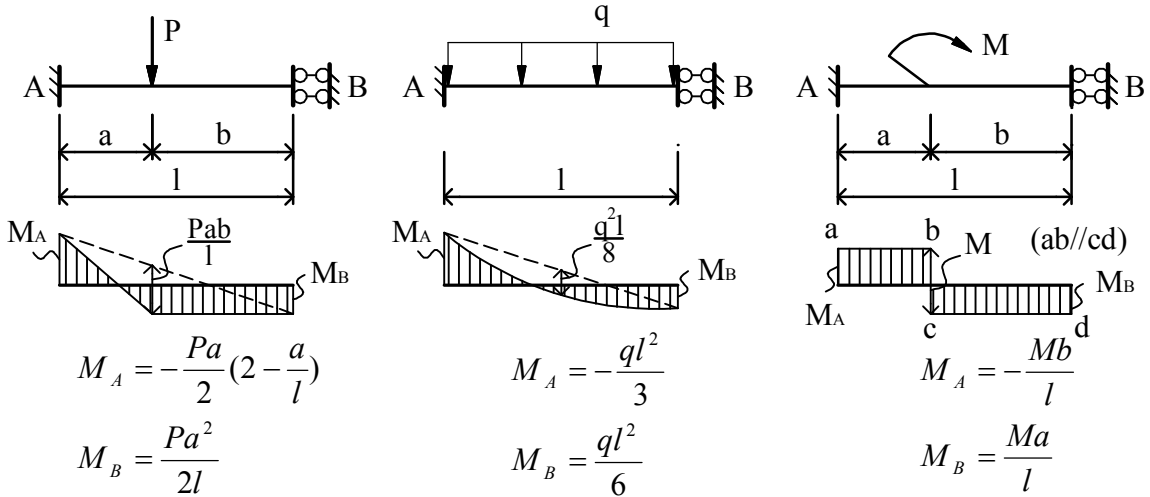
Trong hệ phương trình này:

- r_{kk} : gọi là hệ số chính, $r_{kk} > 0$; - r_{km} : ($k \neq m$) gọi là hệ số phụ, $r_{km} = r_{mk}$
- R_{kP} , R_{kt} , R_{kZ} : gọi là số hạng tự do.

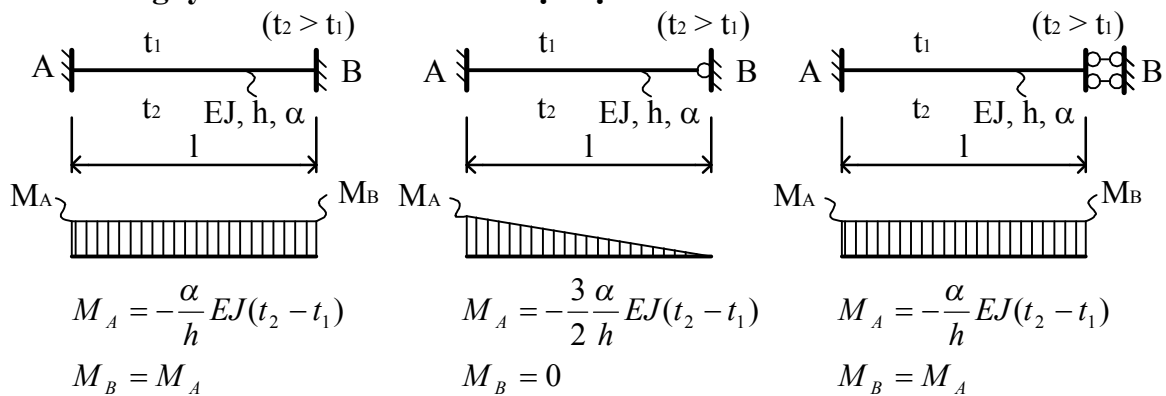
IV. Bảng tra nội lực cho một số phần tử:

1. Nguyên nhân tải trọng:

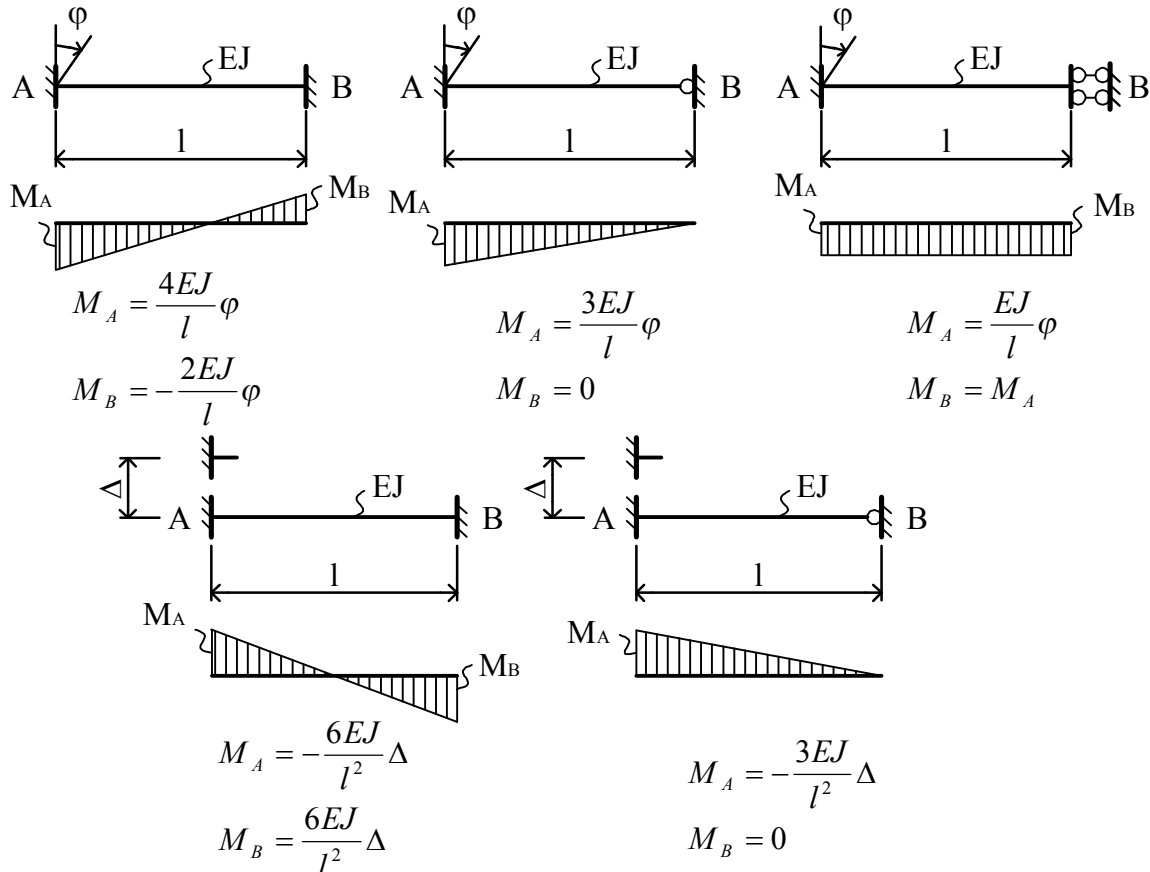




2. Nguyên nhân biến thiên nhiệt độ:



3. Nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức:



V. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:**1. Vẽ các biểu đồ mômen uốn trong hệ cơ bản xác định động:**

a. Biểu đồ (\bar{M}_k): Là biểu đồ mômen uốn do riêng nguyên nhân $Z_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

a.1. Trường hợp Z_k là chuyển vị góc xoay:

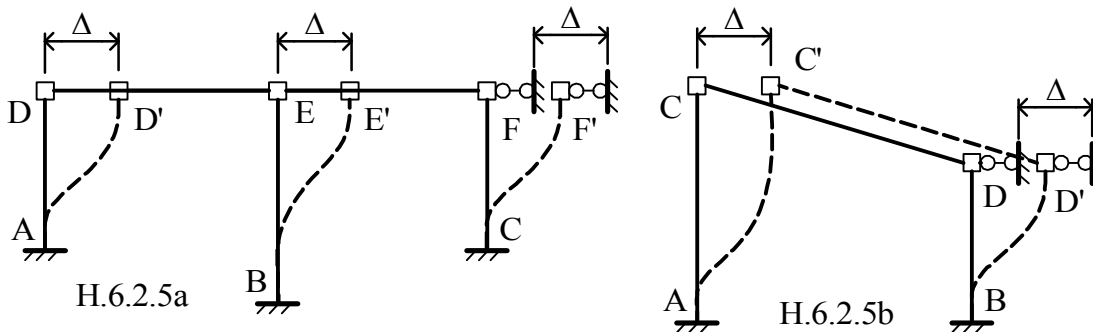
Nguyên nhân này chỉ gây ảnh hưởng cục bộ tại liên kết chịu Z_k , nghĩa là chỉ có các thanh có đầu quy tụ vào nút đó mới chịu ảnh hưởng. Do vậy biểu đồ (\bar{M}_k) được vẽ bằng cách rời rạc hệ cơ bản và tra bảng cho các phần tử chịu chuyển vị góc xoay tại đầu thanh.

a.2. Trường hợp Z_k là chuyển vị thẳng:

Khi một nút chuyển vị thẳng sẽ gây ra chuyển vị thẳng tại nhiều nút trong hệ, do đó sẽ gây ra nội lực trong nhiều thanh. Mặc khác chỉ có chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh mới gây ra nội lực.

a.2.1 Khi hệ chỉ gồm các thanh đứng song song:

Nếu bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng dọc trục thanh, khi 1 nút nào đó chuyển vị thẳng thì các thanh ngang và nghiêng sẽ tịnh tiến nghĩa là các thanh phần chuyển vị tương đối theo phương vuông góc với trục thanh bằng không, còn các thanh đứng trong phạm vi mỗi tầng sẽ có chuyển vị tương đối như nhau theo phương vuông góc với trục thanh (H.6.2.5a & b).

**a.2.2. Khi hệ có các thanh đứng không song song:**

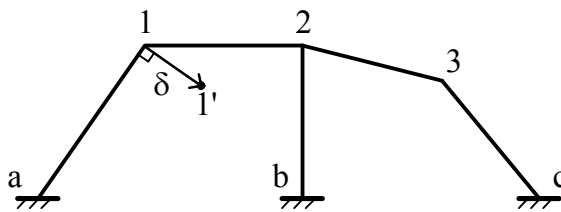
Thành phần chuyển vị thẳng cần tìm nói chung sẽ tồn tại trong tất cả các thanh, giá trị của chúng sẽ khác nhau trong mỗi thanh đứng. Các thành phần này có thể tìm bằng cách lập sơ đồ chuyển vị.

* Cơ sở của việc lập sơ đồ: Chuyển vị thẳng tại 1 nút sẽ biết nếu như biết được ít nhất 1 chuyển vị tại 2 đầu thanh đối diện quy tụ vào nút. Xem sự phân tích trên hình (H.6.1.2)

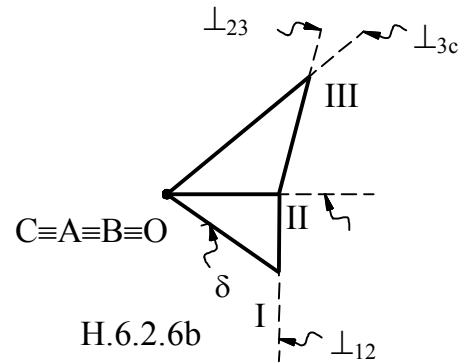
* Mục đích của việc lập sơ đồ chuyển vị là biểu diễn sự thay đổi vị trí của các đầu thanh lên sơ đồ mà trên đó ta có thể xác định được chuyển vị thẳng tương đối tại các đầu thanh. Ta tìm hiểu cách lập sơ đồ qua hệ cho trên hình vẽ (H.6.2.6a). Trong đó, giả sử nút 1 chịu chuyển vị δ .

Bước 1: Chọn 1 điểm O làm gốc và tượng trưng cho các điểm không có chuyển vị. Vậy nếu gọi A, B, C là tượng trưng cho các điểm a, b, c trên sơ đồ chuyển vị thì A, B, C trùng với O.

Bước 2: Qua O kẻ 1 đoạn $OI = \delta$ theo phương và chiều của chuyển vị nút 1, có độ lớn theo tỷ lệ xích tùy chọn. Điểm I là tượng trưng cho chuyển vị của nút 1 trên sơ đồ chuyển vị.



H.6.2.6a



H.6.2.6b

Bước 3: Xác định điểm II trọng trung cho nút 2 trên sơ đồ chuyển vị.

Nút 2 có 2 đầu thanh đối diện đã biết trên sơ đồ chuyển vị là $1 \rightarrow I$, $b \rightarrow B$. Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 12, qua B kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 2b. Giao điểm chính là II.

Bước 4: Xác định điểm III trọng trung cho nút 3 trên sơ đồ chuyển vị.

Tương tự bước 3, qua II kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 23, qua C kẻ đường thẳng vuông góc với thanh 3c. Giao điểm là điểm III.

Bước 5: Xác định kết quả. Để xác định chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh của thanh ik ta chỉ việc đo chiều dài của đoạn IK tương ứng trên sơ đồ chuyển vị hoặc giải các tam giác với các góc và các cạnh đã biết trên sơ đồ chuyển vị.

* Sau khi đã xác định chuyển vị thẳng, ta vẽ biểu đồ (\bar{M}_k) bằng cách rời rạc và tra bảng cho từng cấu kiện.

b. Biểu đồ (M_p^o) : Là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản. (\bar{M}_p^o) được vẽ bằng cách rời rạc và tra bảng cho từng cấu kiện.

c. Biểu đồ (M_t^o) : Là biểu đồ mômen uốn do biến thiên nhiệt độ gây ra trên hệ cơ bản.

Phân tích nguyên nhân này ra làm hai thành phần:

- Thành phần biểu thị sự thay đổi nhiệt độ của thớ trên và thớ dưới trong phạm vi mỗi cấu kiện và được đặc trưng bằng $\Delta t = t_2 - t_1$. Thành phần này gây ra $(M_{\Delta t}^o)$.

- Thành phần biểu thị sự thay đổi nhiệt độ dọc trục thanh và được đặc trưng bằng t_c . Thành phần này gây ra $(M_{t_c}^o)$.

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$(M_t^o) = (M_{t_c}^o) + (M_{\Delta t}^o)$$

- $(M_{\Delta t}^o)$ là do Δt gây ra. Nhưng sự chênh lệch nhiệt độ Δt chỉ làm cho thanh bị uốn cong mà không thay đổi chiều dài. Điều này có nghĩa Δt chỉ gây ra mômen uốn trong thanh đó mà không ảnh hưởng đến các thành phần tử khác. Vậy $(\bar{M}_{\Delta t}^o)$ được vẽ bằng cách rời rạc hệ và tra bảng cho cái phần tử chịu Δt .

- $(M_{t_c}^o)$ do t_c gây ra. Mặc dù t_c không làm cho thanh bị uốn cong nhưng làm thay đổi chiều dài. Điều này gây ra chuyển vị thẳng tại các nút và gây ra nội lực trong hệ. So sánh với trường hợp hệ chịu nguyên nhân Z_k là chuyển vị thẳng thì có

sự tương tự nhưng ở đây sự chuyển vị của các nút do sự thay đổi chiều dài của các thanh. Vậy ta cũng đi lập sơ đồ chuyển vị (còn gọi là *giản đồ Williot*) như khi lập cho Z_k là chuyển vị thẳng nhưng cần bổ sung sự chuyển vị các nút do sự thay đổi chiều dài trong mỗi thanh.

Ta sẽ tìm hiểu cách lập sơ đồ chuyển vị qua hệ trên hình (H.6.2.7.a).

Biến dạng dọc trục của thanh ik được xác định bằng biểu thức

$$\Delta l_{ik} = \alpha l_{ik} t_{cik}$$

+ α hệ số dẫn nở vì nhiệt

+ t_{cik} , l_{ik} là biến thiên nhiệt độ dọc trục và chiều dài thanh ik

Trong ví dụ này giả sử biến dạng trong các thanh tương ứng là Δl_{a3} , Δl_{23} , Δl_{21} , Δl_{1c} (giãn ra) và Δl_{2b} : (co ngắn lại)

Các bước thực hiện như sau:

Bước 1: Chọn 1 điểm O làm chuẩn, O tượng trưng cho những điểm không có chuyển vị. Như vậy nếu gọi A, B, C, D là tượng trưng cho các điểm a, b, c, d trên sơ đồ chuyển vị thì A, B, C, D trùng với O.

Bước 2: Xác định điểm I tượng trưng cho nút 1 trên sơ đồ chuyển vị.

Ta nhận thấy nút 1 chỉ có thể chuyển vị theo phương dọc trục thanh 1c nên trên giản đồ ta dựng 1 đoạn $I = \Delta l_{1c}$.

Bước 3: Xác định điểm II tượng trưng cho nút 2 trên sơ đồ chuyển vị.

Nút 2 có 2 đầu thanh đối diện đã biết trên sơ đồ chuyển vị là $b \rightarrow B$; $1 \rightarrow I$.

+ Qua I kẻ 1 đoạn Δl_{12} (độ giãn của thanh 12) được 2_1

+ Qua B kẻ 1 đoạn Δl_{2b} (độ co ngắn của thanh 2b) được 2_2

+ Qua 2_1 kẻ đường vuông góc với thanh 12.

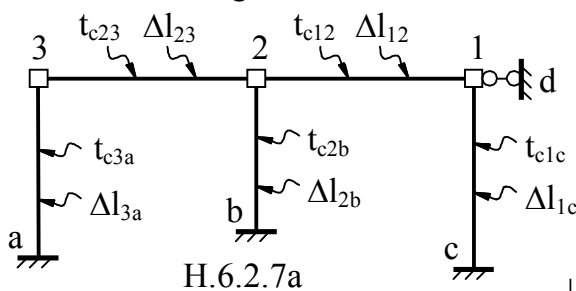
+ Qua 2_2 kẻ đường vuông góc với thanh 2b.

Giao điểm của 2 đường này là II.

Bước 4: Xác định điểm III tượng trưng cho nút 3 trên sơ đồ chuyển vị.

Nút 3 có 2 đầu thanh đối diện đã biết trên sơ đồ chuyển vị là $2 \rightarrow II$, $a \rightarrow A$.

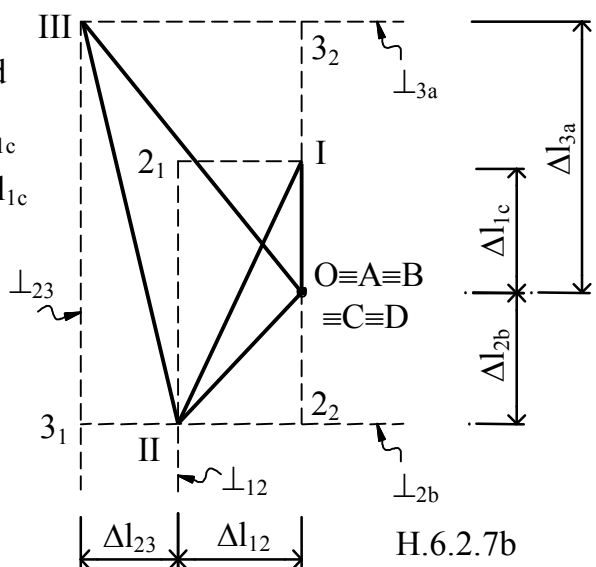
Ta thực hiện tương tự như bước 3.



Bước 5: Xác định kết quả.

Muốn tìm chuyển vị tương đối theo phương vuông góc với trục thanh của thanh ik , ta chiếu đoạn IK tương ứng trên giản đồ lên phương cần tìm.

Sau khi đã xác định được chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh ta sẽ tra bảng vẽ được (\bar{M}_{ic}^o).



d. Biểu đồ (M_Z^o): là biểu đồ mômen uốn do chuyển vị cưỡng bức tại các gối tựa gây ra trên hệ cơ bản.

Phân tích nguyên nhân này ra làm 2 loại: chuyển vị thẳng (Δ) và chuyển vị góc xoay (φ).

Theo nguyên lý cộng tác dụng:

$$(M_Z^o) = (M_\varphi^o) + (M_\Delta^o)$$

(M_φ^o) : do nguyên nhân (φ) gây ra, vẽ tương tự biểu đồ (\bar{M}_k) do Z_k là chuyển vị góc xoay.

(M_Δ^o) : do nguyên nhân (Δ) gây ra, vẽ tương tự biểu đồ (\bar{M}_k) do Z_k là chuyển vị thẳng. Tất nhiên là có thể lập sơ đồ chuyển vị nếu cần.

2. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Trường hợp liên kết k là liên kết mômen:

- Xác định r_{km} : Tách nút k trên biểu đồ mômen (\bar{M}_m) và xét cân bằng mômen nút.

- Xác định R_{kP} , R_{kt} , R_{kZ} . Tương tự, tách nút k trên các biểu đồ mômen tương ứng và xét cân bằng mômen nút.

b. Trường hợp liên kết k là liên kết lực:

Tương tự như ở trên bằng cách thực hiện 1 mặt cắt qua liên kết k trên biểu đồ mômen tương ứng nhằm tách ra khỏi hệ một bộ phận và xét cân bằng lực.

* *Chú ý:*

- Chiều dương của phản lực lấy theo chiều của chuyển vị cưỡng bức đặt thêm vào trên hệ cơ bản.

- Khi liên kết k là liên kết mômen, thì chỉ cần xác định mômen quanh nút k là đủ để viết phương trình cân bằng mômen. Khi liên kết k là liên kết lực thì ta chỉ cần xác định các lực cắt hoặc lực dọc vừa đủ để tham gia phương trình cân bằng hình chiếu.

VI. Vẽ biểu đồ nội lực:

Sau khi giải hệ phương trình chính tắc sẽ xác định được (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) và có thể giải hệ theo cách tính trực tiếp hay theo nguyên lý cộng tác dụng như phương pháp lực. Trong vẽ thực hành người ta thường sử dụng phương pháp cộng tác dụng để vẽ biểu đồ mômen:

$$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + \dots + (\bar{M}_n)Z_n + (M_P^o) + (M_t^o) + (M_Z^o)$$

Biểu đồ lực cắt được suy ra từ biểu đồ mômen và biểu đồ lực dọc được suy ra từ biểu đồ lực cắt như trong phương pháp lực.

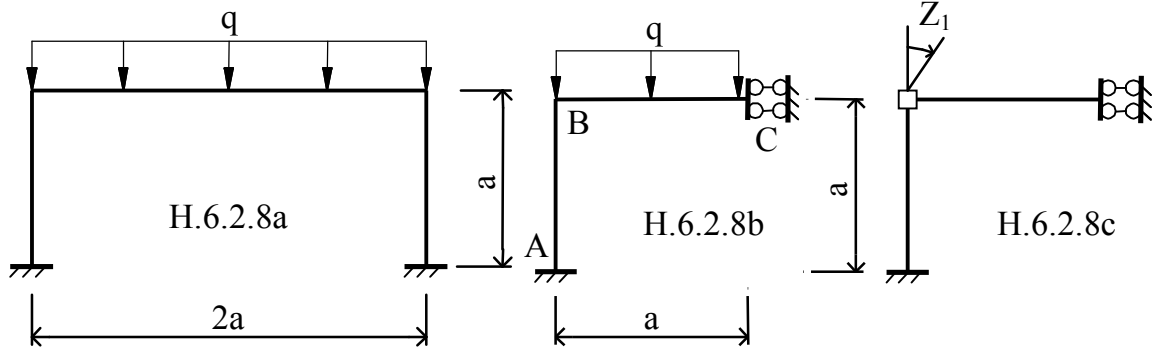
CÁC VÍ DỤ VỀ PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.6.2.8a). Cho biết độ cứng trong các thanh là $EJ = \text{const}$ và chỉ xét biến dạng uốn.

* Hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng, ta lập sơ đồ tính một nửa hệ tương đương như trên hình (H.6.2.8b) và đi giải bài toán trên một nửa hệ tương đương.

1. Bậc siêu động:

$$n = n_1 + n_2 = 1 + 0 = 1$$



2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

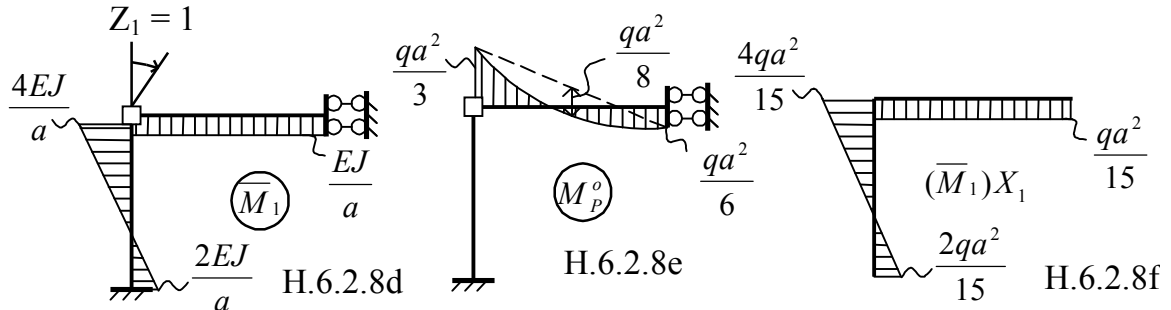
- Hệ cơ bản: (H.6.2.8c)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Vẽ các biểu đồ (\bar{M}_1) , (M_p^o) : kết quả trên hình vẽ (H.6.2.8d & H.6.2.8e).



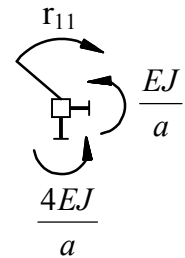
- Xác định các hệ số:

* r_{11} : Tách nút B trên (\bar{M}_1) và xét cân bằng nút.

Kết quả $r_{11} = \frac{5EJ}{a}$

* R_{1P} : Tách nút B trên (M_p^o) và xét cân bằng nút.

Kết quả $R_{1P} = -\frac{qa^2}{3}$



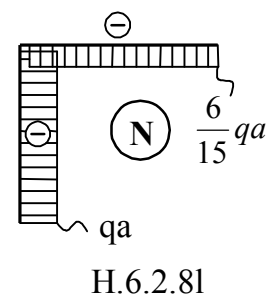
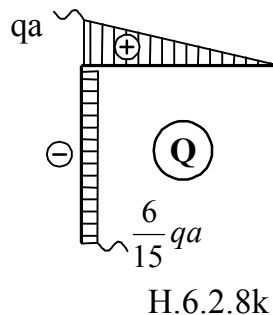
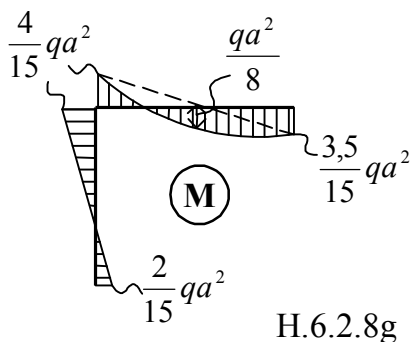
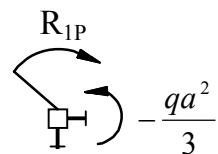
Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\frac{5EJ}{a}Z_1 - \frac{qa^2}{3} = 0 \rightarrow Z_1 = \frac{qa^3}{15EJ} > 0$$

4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen:

$$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (M_p^o)$$

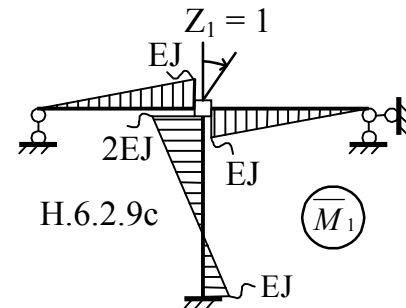
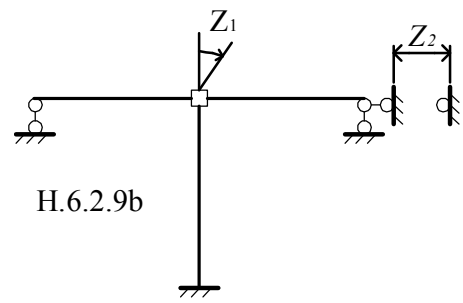
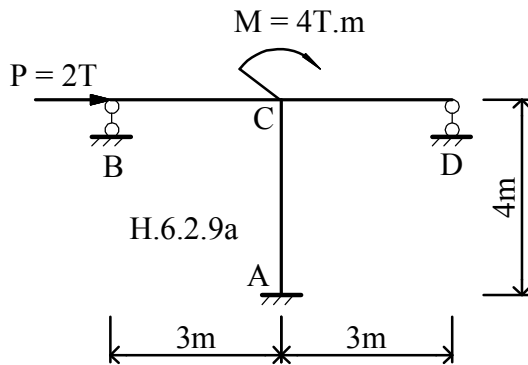


b. Biểu đồ lực cắt: được suy ra từ biểu đồ mômen. Kết quả trên hình vẽ (H.6.2.8k).

c. Biểu đồ lực dọc: suy ra từ biểu đồ lực cắt. Kết quả trên hình vẽ (H.6.2.8l).

Sau khi đã có kết quả trên 1 nửa hệ, ta suy ra kết quả trên toàn hệ theo tính chất của hệ đối xứng chịu nguyên nhân đối xứng.

Ví dụ 2: Vẽ biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.6.2.9a). Cho biết độ cứng trong thanh đứng là $2EJ$, trong các thanh ngang là EJ . Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.



1. Bậc siêu động:

$$n = n_1 + n_2 = 1 + 1 = 2$$

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

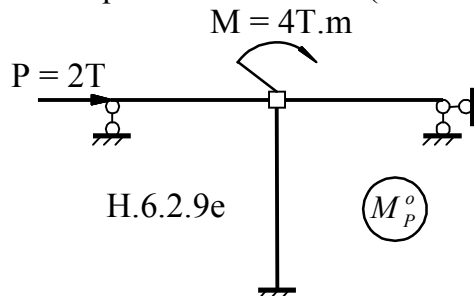
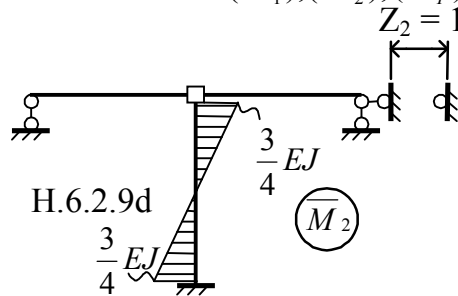
- Hệ cơ bản: (H.6.2.9b)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{M}_2), (M_P^o)$: kết quả trên hình vẽ (H.6.2.9c → H.6.2.9e).



- Xác định các hệ số:

* r_{11} : Tách nút C trên (\bar{M}_1) , $r_{11} = 4EJ$

* $r_{12} = r_{21}$: Tách nút C trên (\bar{M}_2)

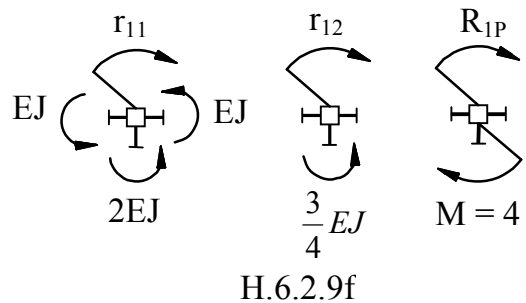
$$r_{12} = r_{21} = 0,75EJ$$

* r_{22} cắt 1 phần hệ trên (\bar{M}_2)

(H.6.2.9g).

Q được suy ra từ (\bar{M}_2) . $Q = Q^tr$ trên đoạn AC:

$$Q = \frac{0,75EJ - (-0,75EJ)}{4} = 0,375EJ$$



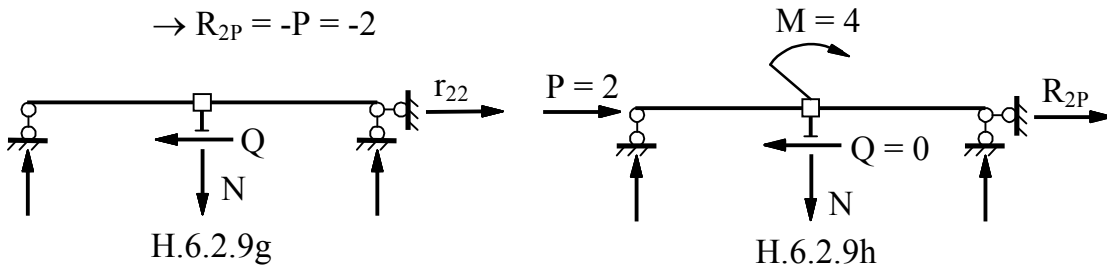
Chiều lên phương X $\rightarrow r_{22} = Q = 0,375EJ$

* R_{1P} : tách nút C trên (M_p^o)

$\rightarrow R_{1P} = -M = -4$

* R_{2P} : cắt 1 phần hệ trên (M_p^o) (H.6.2.9h). Chiều lên phương X

$\rightarrow R_{2P} = -P = -2$



Thay vào hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} 4EJ.Z_1 - 0,75EJ.Z_2 - 4 = 0 \\ -0,75EJ.Z_1 + 0,375EJ.Z_2 - 2 = 0 \end{cases} \begin{cases} Z_1 = 3,2 / EJ \\ Z_2 = 11,733 / EJ \end{cases}$$

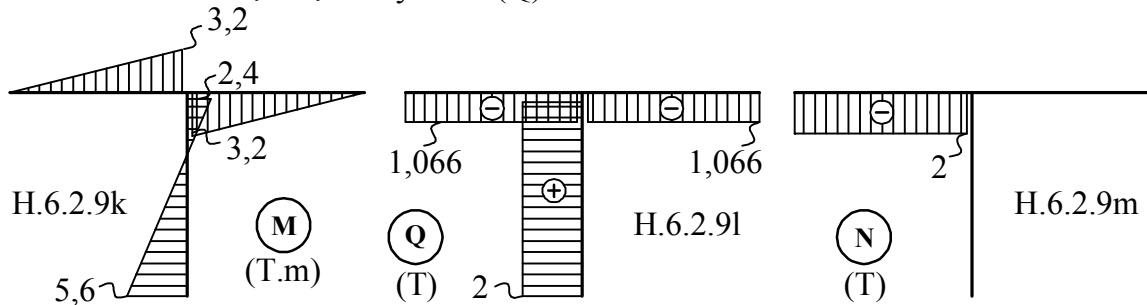
4. Vẽ các biểu đồ nội lực:

a. Biểu đồ mômen: $(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_p^o)$

Kết quả thể hiện trên hình vẽ (H.6.2.9k)

b. Biểu đồ lực cắt: Suy ra từ (M)

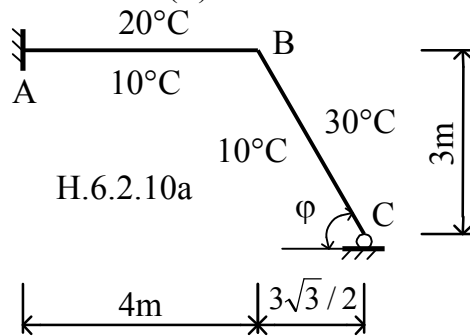
c. Biểu đồ lực dọc: Suy ra từ (Q).



Ví dụ 3: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình vẽ (H.6.2.10a). Cho biết độ cứng trong các thanh là như nhau $EJ = 2000T.m^2$; $h = 0,4m$; $\alpha = 1,2.10^{-5}.^oC^{-1}$. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

* Chiều dài trong thanh BC:

$$l_{BC} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos 30^o} = 3(m)$$



1. Bậc siêu động:

$n = n_1 + n_2 = 1 + 0 = 1$

2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản (H.6.2.10b)

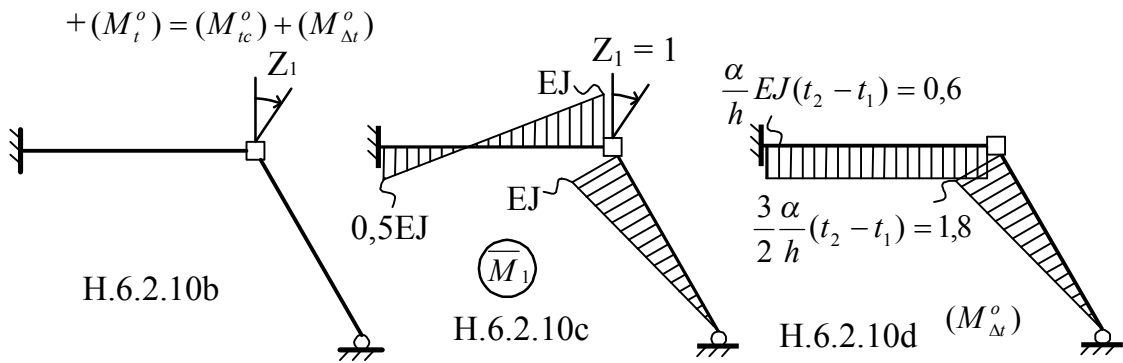
- Hệ phương trình chính tắc:

$r_{11}.Z_1 + R_{1t} = 0$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (M_t^o)$

+ (\bar{M}_1) do $Z_1 = 1$ gây ra trên hệ cơ bản (H.6.2.10c)



* $(M_{\Delta t}^o)$ Rời rạc hệ và tra bảng cho các cầu kiện chịu nguyên nhân biến thiên nhiệt độ ở thờ trên và thờ dưới (H.6.2.10d)

* (M_{tc}^o) : do biến thiên nhiệt độ dọc trục gây ra chuyển vị thẳng tại nút. Ta sẽ đi xác định chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh bằng sơ đồ chuyển vị (*giản đồ Williot*)

+ Biến thiên chiều dài trong các thanh:

$$\Delta l_{AB} = \alpha l_{AB} t_{cAB} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot \frac{10+20}{2} = 0,72 \text{ mm} \quad (\text{dãn dài ra})$$

$$\Delta l_{BC} = \alpha l_{BC} t_{cBC} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot \frac{10+30}{2} = 0,72 \text{ mm}$$

(dãn dài ra)

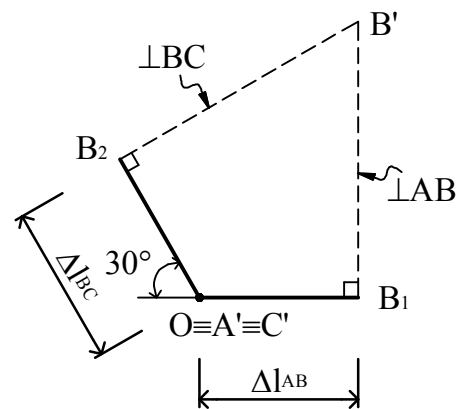
+ Lập sơ đồ chuyển vị: (H.6.2.10e)

+ Chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với thanh AB là chiều đoạn A'B' lên phương cần tìm chuyển vị. Đo bằng đoạn B1B'.

+ Tương tự đối với thanh BC là bằng đoạn B'B2. Bằng quan hệ hình học dễ thấy:

$$\Delta_{AB} = \Delta_{BC} = \frac{\Delta l_{BC}}{\text{tg}15^0} = \frac{0,72}{\text{tg}15^0} = 2,687 \text{ (mm)}$$

+ Rời rạc hệ và tra bảng theo các chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh (H.6.2.10f).

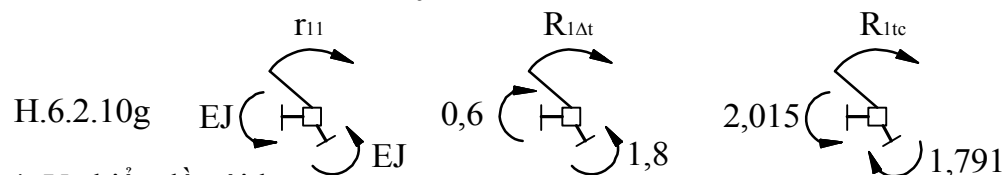
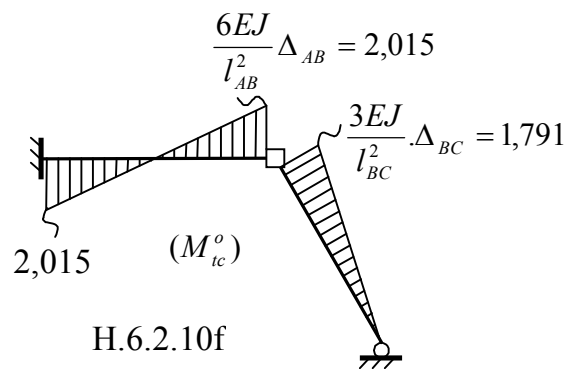


b. Xác định các hệ số:

- * r_{11} : $r_{11} = 2EJ$
- * $R_{1t} = R_{1tc} + R_{1\Delta t}$
- + $R_{1\Delta t}$: $R_{1\Delta t} = 1,2$
- + R_{1tc} : $R_{1tc} = 0,224$
- $R_{1t} = 1,424$

Thay vào phương trình:

$$2EJ \cdot Z_1 + 1,424 = 0 \rightarrow Z_1 = \frac{-0,712}{EJ} < 0$$



4. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (M_{ic}^o) + (M_{\Delta}^o)$ (Xem H.9.10h)

b. Biểu đồ lực cắt (Q), và biểu đồ lực dọc (N), vẽ tương tự các ví dụ trước.

Ví dụ 4: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ cho như trên hình vẽ (H.6.1.2.11a). Các số liệu bài toán tương tự ví dụ 3. Cho $\varphi = 0,005\text{rad}$; $\Delta_1 = \Delta_2 = 0,02\text{m}$.

Hệ có sơ đồ giống ví dụ 3 nhưng chịu nguyên nhân là chuyển vị cưỡng bức thay vì nhiệt độ nên trong phương trình chính tắc chỉ khác số hạng tự do (dùng R_{1Z} , thay vì R_{1t}). Vậy ta cần xác định số hạng tự do.

+ Vẽ biểu đồ:

$$(M_Z^o) = (M_\varphi^o) + (M_\Delta^o)$$

* Biểu đồ (M_φ^o) : (H.6.2.11b)

* Biểu đồ (M_Δ^o) : Lập sơ đồ chuyển vị.

Từ sơ đồ chuyển vị (H.6.2.11c), xác định được chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc với trục thanh:

$$\Delta_{AB} = A'B' = \Delta_1 \cdot \sin 45^\circ + \Delta_2 \cdot \text{tg} 60^\circ = 0,05464(m)$$

$$\Delta_{BC} = B'C' = \frac{\Delta_2}{\cos 60^\circ} = 0,04(m)$$

* Rời rạc hệ, tra bảng, vẽ được (M_Δ^o)

+ Xác định số hạng tự do:

$$* R_{1Z} = R_{1\varphi} - R_{1\Delta}$$

Từ (M_φ^o) xác định được $R_{1\varphi} = -5$

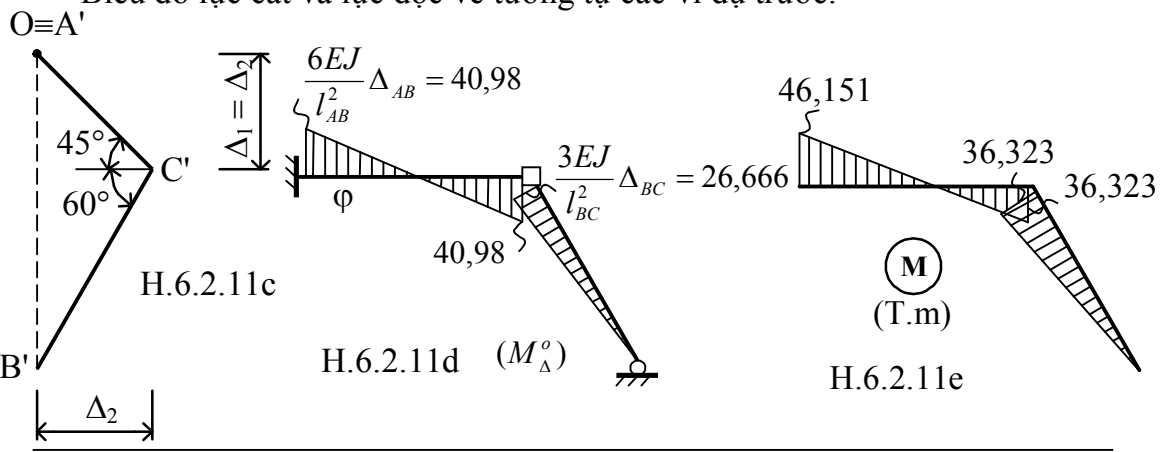
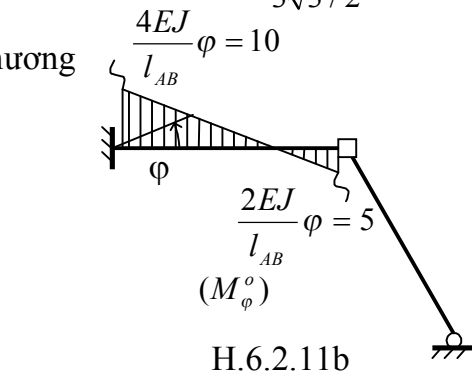
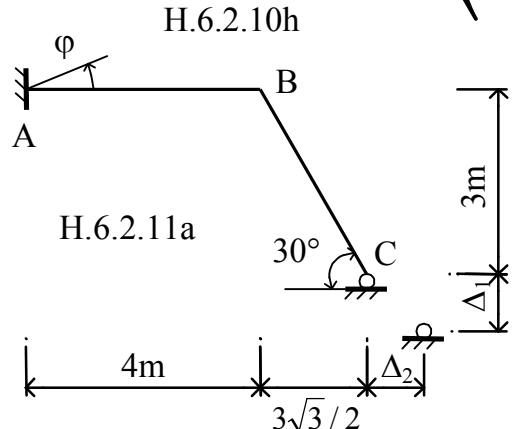
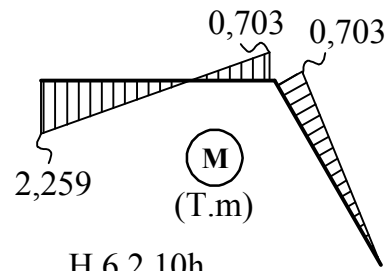
Từ (M_Δ^o) xác định được $R_{1\Delta} = 26,666 - 40,98 = -14,314$

Suy ra $R_{1Z} = -19,314$

Thay vào phương trình chính tắc, giải ra được: $Z_1 = 9,657/EJ > 0$

Vẽ biểu đồ $(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (M_\varphi^o) + (M_\Delta^o)$

Biểu đồ lực cắt và lực dọc vẽ tương tự các ví dụ trước.



§3. XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ TRONG HỆ SIÊU ĐỘNG.

1. Chuyển vị tại các nút:

Đó chính là các chuyển vị Z_k tương ứng tìm được khi giải hệ phương trình chính tắc.

2. Chuyển vị tại các tiết diện bên trong phần tử:

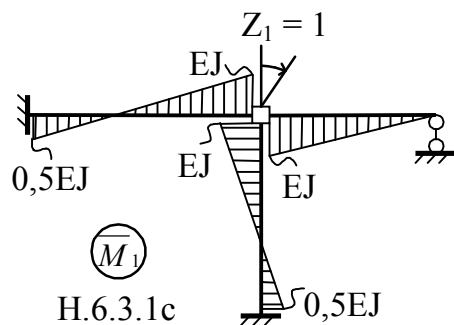
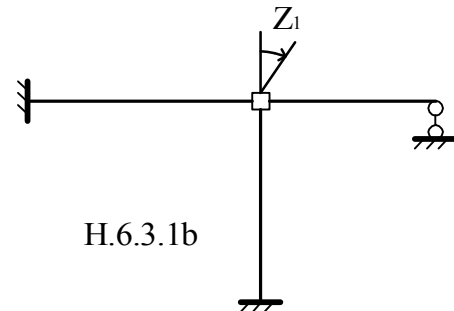
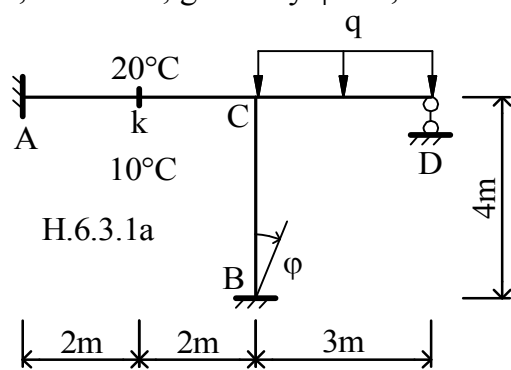
Có thể được xác định theo 1 trong 3 cách sau:

a. Ngay từ đầu, coi tiết diện có chuyển vị cần tìm như 1 nút của hệ. Như vậy, ta đưa bài toán xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ về bài toán tìm chuyển vị tại nút và thực hiện như đã nêu ở trên. Biện pháp này đơn giản nhưng làm tăng số lượng ẩn số.

b. Sau khi giải bài toán, đã biết được nội lực và chuyển vị ở 2 đầu mỗi phần tử, ta có thể xác định chuyển vị tại tiết diện bất kỳ bên trong phần tử theo các phương pháp đã biết như phương pháp thông số ban đầu, cách xác định chuyển vị trong chương chuyển vị...

c. Sau khi xác định được nội lực trong hệ siêu động, ta xem hệ là hệ siêu tĩnh với nội lực đã biết và áp dụng cách xác định chuyển vị trong hệ siêu tĩnh như đã biết trong chương phương pháp lực. Trong tính toán thường sử dụng cách này.

Ví dụ: Xác định độ võng tại tiết diện k của hệ trên hình vẽ (H.6.3.1a). Cho EJ trên toàn hệ bằng $1000T.m^2$, chiều cao tiết diện các thanh $h = 0,3m$; hệ số giãn nở vì nhiệt $\alpha = 1,2.10^5 . ^\circ C^{-1}$; góc xoay $\varphi = 0,005rad$.



1. Vẽ biểu đồ mômen uốn:

a. Bậc siêu động:

$$n = n_1 + n_2 = 1 + 0 = 1$$

b. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính

tắc:

- Hệ cơ bản (H.6.3.1b)

- Hệ phương trình chính tắc:

$$r_{11}.Z_1 + R_{1P} + R_{1t} + R_{1Z} = 0$$

c. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (M_p^o), (M_t^o), (M_Z^o)$

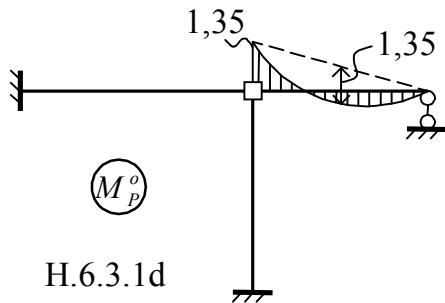
$$+ (M_t^o) = (M_{tc}^o) + (M_{\Delta t}^o)$$

* (M_{tc}^o) : nguyên nhân t_c trong thanh AC chỉ gây ra chuyển vị thẳng tương đối theo phương vuông góc trục thanh của thanh BC. Dễ thấy:

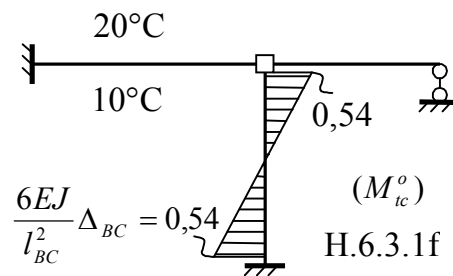
$$\Delta l_{BC} = \alpha l_{AC} t_{CAC} = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot \frac{10+20}{2} = 0,72 \text{ mm}$$

$$+ (M_Z^o) = (M_\phi^o) + (M_\Delta^o)$$

Ở đây (M_Δ^o) không tồn tại.

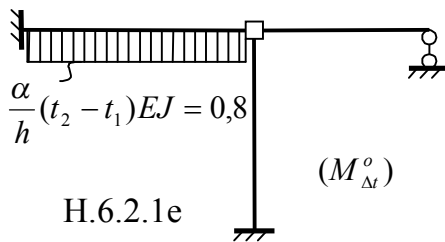


H.6.3.1d

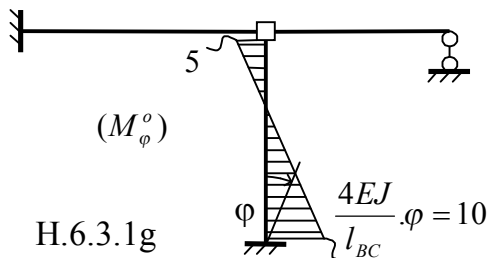


(M_{tc}^o)

H.6.3.1f



H.6.2.1e



(M_ϕ^o)

H.6.3.1g

- Xác định các hệ số: Từ các biểu đồ đã vẽ, tính được:

$$* r_{11} = 3EJ; R_{1P} = -1,35;$$

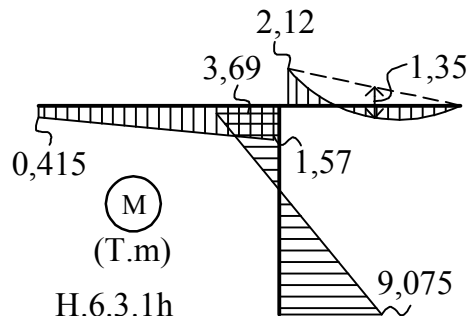
$$* R_{1t} = R_{1tc} + R_{1\Delta t} = -0,54 - 0,8 = -1,34$$

$$* R_{1Z} = R_{1\phi} = 5$$

Thay vào hệ phương trình:

$$3EJ \cdot Z_1 - 1,35 - 1,34 + 5 = 0$$

$$\rightarrow Z_1 = -\frac{0,77}{EJ}$$



(M)
(T.m)

H.6.3.1h

d. Vẽ biểu đồ mômen:

$$(M) = (\bar{M}_1) Z_1 + (M_P^o) + (M_{tc}^o) + (M_{\Delta t}^o) + (M_\phi^o)$$

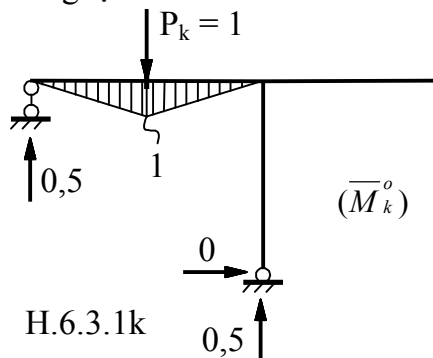
2. Xác định độ võng tại k:

- Trạng thái "m" đã được giải với biểu đồ (M) ở trên

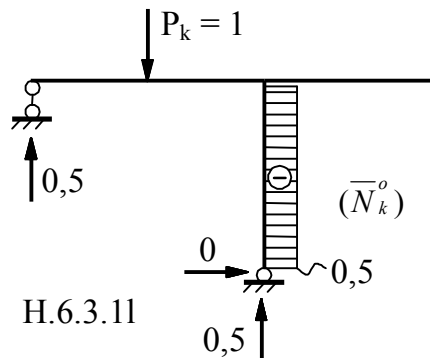
- Trạng thái "k" tạo trên hệ cơ bản của phương pháp lực và xác định (\bar{M}_k^o) ,

$$(\bar{N}_k^o), (\bar{R}_{jk}^o)$$

- Độ võng tại k:



H.6.3.1k



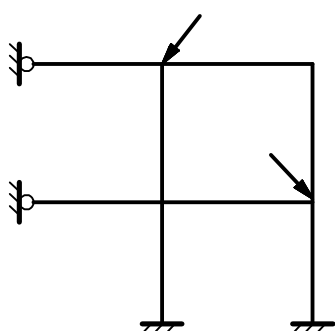
H.6.3.1l

$$\begin{aligned}y_k &= (\bar{M}_k^o)(M) - \Sigma \bar{R}_{jk}^o . Z_{jm} + \Sigma \frac{\alpha}{h} (t_2 - t_1) \Omega (M_k^o) + \Sigma \alpha t_c \Omega (\bar{N}_k^o) \\&= \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1.4}{2} \cdot \frac{0,415 + 1,57}{2} - 0 + \frac{\alpha}{0,3} (10 - 20) \cdot \frac{1.4}{2} + 0 \\&= \frac{1,985}{EJ} - \frac{200\alpha}{3} = 0,1925(mm) > 0\end{aligned}$$

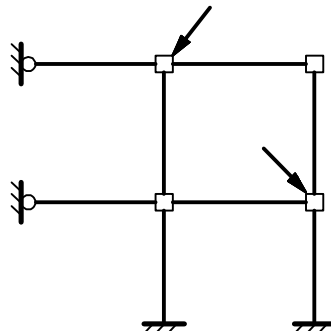
Chuyển vị cùng chiều với P_k .

**§4: TÍNH HỆ CÓ NÚT KHÔNG CHUYỂN VỊ THẲNG
CHỈ CHỊU TẢI TRỌNG LÀ CÁC LỰC TẬP TRUNG TẠI NÚT**

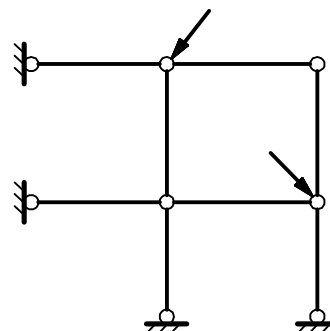
Chẳng hạn hệ cho trên hình (H.6.4.1) là thỏa mãn yêu cầu bài toán.



H.6.4.1



H.6.4.2



H.6.4.3

Với những loại hệ này thì khi tạo hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị ta chỉ đặt thêm các liên kết mômen. Mặc khác, tải trọng chỉ là những lực tập trung tại nút nên biểu đồ (M_p^o) không tồn tại và do đó R_{kp} cũng không tồn tại.

Vậy hệ phương trình chính tắc tổng quát cho trường hợp này:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n = 0 \\ \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình thuần nhất, đẳng cấp và người ta chứng minh chỉ có nghiệm duy nhất $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = 0$

Suy ra biểu đồ mômen của hệ:

$$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + \dots + (\bar{M}_n)Z_n + (M_p^o) \text{ sẽ không tồn tại}$$

Suy ra biểu đồ lực cắt của hệ không tồn tại.

Nội lực trong hệ chỉ tồn tại lực dọc, hệ làm việc như 1 hệ dàn với các nút và các ngàm được thay bằng các khớp lý tưởng (H.6.4.1c)

Kết luận: Khi tính hệ có nút không chuyển vị thẳng và chỉ chịu tải trọng là các lực tập trung tại nút, ta có thể thay thế các nút và ngàm bằng các liên kết khớp và tính toán như 1 hệ dàn thông thường.

§ 5. TÍNH HỆ SIÊU ĐỘNG CHỊU TẢI TRỌNG DI ĐỘNG

Cũng tương tự như phương pháp lực, ta chỉ nghiên cứu cách vẽ đường ảnh hưởng.

I. Đường ảnh hưởng cơ bản: Là ảnh hưởng của các ản Z_k khi $P = 1$ di động trên hệ cơ bản gây ra:

1. Hệ phương trình chính tắc:

Tương tự phương pháp lực, số hạng tự do được thay bằng r_{kP} :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + r_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + r_{2P} = 0 \\ \dots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + r_{nP} = 0 \end{cases}$$

2. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

a. Hệ số chính và phụ (r_{km}): Các hệ số này là không thay đổi và được xác định như trường hợp tải trọng bất động.

b. Số hạng tự do (r_{kP}): Là phản lực tại liên kết k do $P = 1$ di động trên hệ gây ra. Điều này có nghĩa là r_{kP} sẽ thay đổi theo các vị trí của P .

Do hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị thực chất là những cấu kiện làm việc độc lập nhau nên người ta đã lập sẵn bảng tra nội lực, phản lực tại các đầu thanh (Xem bảng B.6.5.1 \rightarrow 3). Dựa vào bảng tra đó ta có thể xác định được r_{kP} theo các vị trí của $P = 1$.

c. Giải hệ phương trình chính tắc:

Tương tự phương pháp lực, ta sử dụng phương pháp hệ số ảnh hưởng:

$$\begin{cases} Z_1 = \beta_{11}r_{1P} + \beta_{12}r_{2P} + \dots + \beta_{1n}r_{nP} \\ Z_2 = \beta_{21}r_{1P} + \beta_{22}r_{2P} + \dots + \beta_{2n}r_{nP} \\ \dots \\ Z_n = \beta_{n1}r_{1P} + \beta_{n2}r_{2P} + \dots + \beta_{nn}r_{nP} \end{cases}$$

β_{ik} là hệ số ảnh hưởng: $\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm 1} \cdot \frac{D_{ik}}{D}$

D là định thức hệ số chính và phụ của hệ phương trình chính tắc:

$$D = |r_{ik}| \text{ với } i, k \in [1; n]$$

D_{ik} là định thức suy ra từ định thức D bằng cách loại bỏ hàng i cột k (hoặc hàng k cột i).

Sau khi xác định được Z_k , cho $P = 1$ di động, sẽ vẽ được đ.a.h. Z_k .

II. Đường ảnh hưởng của nội lực, phản lực và chuyển vị:

Sau khi xác định được đường ảnh hưởng Z_k , áp dụng nguyên lý công tác dụng ta có thể vẽ đường ảnh hưởng của đại lượng S (nội lực, phản lực, hay chuyển vị) tại 1 tiết diện bất kỳ theo biểu thức:

$$\text{đ.a.h.}S = \bar{S}_1(\text{đ.a.h.}Z_1) + \bar{S}_2(\text{đ.a.h.}Z_2) + \dots + \bar{S}_n(\text{đ.a.h.}Z_n) + \text{đ.a.h.}S^0$$

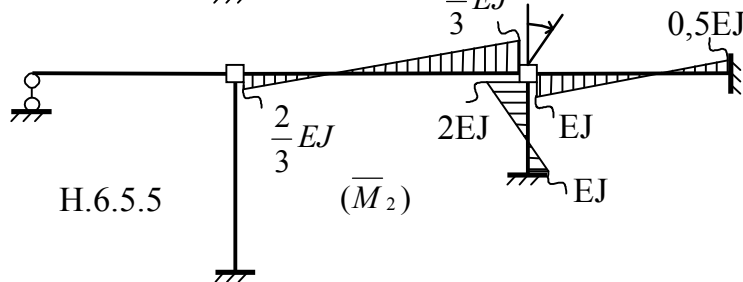
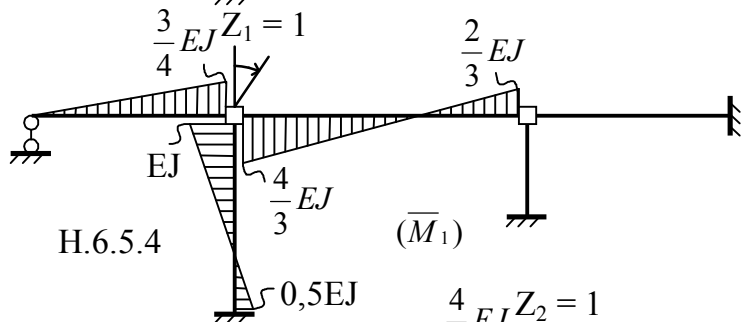
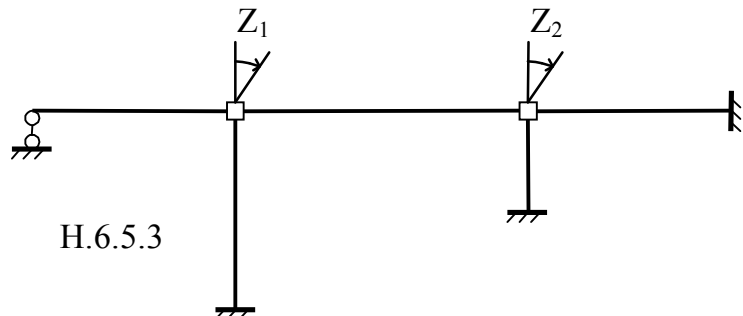
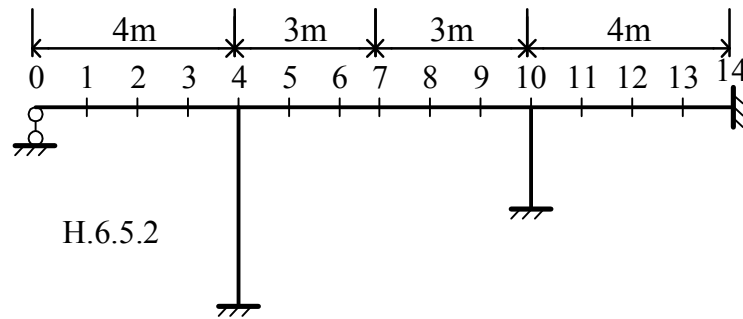
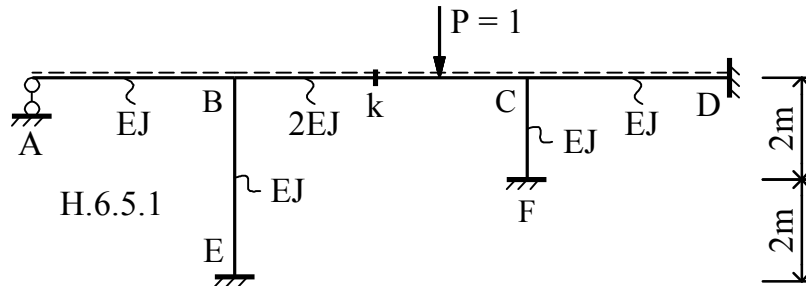
- \bar{S}_k là giá trị của đại lượng S do $Z_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản.

- đ.a.h. S^0 là đ.a.h. S do $P = 1$ di động trên hệ cơ bản gây ra. (đ.a.h này có thể vẽ theo bảng tra B.6.5.1 \rightarrow 3)

* *Chú ý:* Quá trình tính toán có thể lập thành bảng tương tự như đã nêu trong phương pháp lực.

Ví dụ: Vẽ đường ảnh hưởng mômen uốn đ.a.h. M_k của hệ cho trên hình (H.6.5.1)

Chia đường xe chạy ra làm 14 đoạn, mỗi đoạn dài 1m và đánh số thứ tự các điểm chia như trên hình (H.6.5.2)



1. Bậc siêu động: $n = n_1 + n_2 = 2 + 0 = 2$

- Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản (H.6.5.3)

2. Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{2P} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Vẽ biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{M}_2)$

$$r_{11} = \left[\frac{3}{4} + 1 + \frac{4}{3} \right] EJ = \frac{37}{12} EJ$$

$$r_{12} = r_{21} = \frac{2}{3} EJ$$

$$r_{22} = \left[\frac{4}{3} + 2 + 1 \right] EJ = \frac{13}{3} EJ$$

- Xác định số hạng tự do:

+ Khi P = 1 di động trên AB, sơ đồ cấu kiện mẫu ta có

$$r_{1P} = -M_A = \frac{1}{2} \xi(1-\xi)(2-\xi)l$$

$$r_{2P} = 0$$

Lần lượt cho $\xi = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ ta sẽ có các giá trị tương ứng của r_{1P} khi P = 1 di động trên AB.

+ Khi P = 1 di động trên BC: tương tự.

$$r_{1P} = M_A = -\xi(1-\xi)^2 l$$

$$r_{2P} = -M_B = \xi^2(1-\xi)l$$

Lần lượt cho $\xi = 0; \frac{1}{6}; \frac{2}{6}; \frac{3}{6}; \frac{4}{6}; \frac{5}{6}; 1$ (ứng với điểm chia trên BC) ta sẽ tìm được các giá trị tương ứng của r_{1P}, r_{2P} khi P di động.

+ Khi P = 1 di động trên CD: tương tự.

$$r_{1P} = 0$$

$$r_{2P} = M_A = -\xi(1-\xi)^2 l$$

Cho ξ các giá trị 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1 ta sẽ tìm được các số hạng tự do trên đoạn này.

4. Giải hệ phương trình chính tắc:

- Xác định các hệ số ảnh hưởng

$$\beta_{ik} = (-1)^{i+k\pm 1} \cdot \frac{D_{ik}}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} \frac{37}{12} EJ & \frac{2}{3} EJ \\ \frac{2}{3} EJ & \frac{13}{3} EJ \end{vmatrix} = \frac{465}{36} (EJ)^2$$

$$D_{11} = \frac{13}{3} EJ; D_{12} = D_{21} = \frac{2}{3} EJ; D_{22} = \frac{37}{12} EJ$$

$$\rightarrow \beta_{11} = -\frac{156}{465} / EJ; \beta_{12} = \beta_{21} = \frac{24}{465} / EJ; \beta_{22} = -\frac{111}{465} / EJ$$

- Giải hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} Z_1 = \beta_{11}r_{1P} + \beta_{12}r_{2P} \\ Z_2 = \beta_{21}r_{1P} + \beta_{22}r_{2P} \end{cases}$$

Thực hiện tính toán theo các biểu thức trên. Kết quả được thể hiện trong bảng: (B.6.5.3)

5. Vẽ đường ảnh hưởng M_k :

$$\text{đ.a.h.}M_k = \bar{M}_{k1}(\text{đ.a.h.}Z_1) + \bar{M}_{k2}(\text{đ.a.h.}Z_2) + \text{đ.a.h.}M_k^o$$

- \bar{M}_{k1} lấy trên (\bar{M}_1) tại tiết diện k

$$\bar{M}_{k1} = \frac{EJ}{3}$$

- Tương tự: $\bar{M}_{k2} = -\frac{EJ}{3}$

- đ.a.h M_k^o là đường ảnh hưởng mômen uốn tại tiết diện k do $P = 1$ di động gây ra trên hệ cơ bản. Ở bài toán này $P = 1$ chỉ gây ra ảnh hưởng đến k khi nó di động trên BC. Tra sơ đồ cấu kiện mẫu ta sẽ xác định được. Kết quả trong bảng (B.6.5.4)

B.6.5.4 Bảng tính các tung độ đường ảnh hưởng Z_k & M_k

Thanh	Điểm	r_{1P}	r_{2P}	Tung độ (đ.a.h. Z_i). EJ		đ.a.h. M_k^o	đ.a.h M_k
				Z_1	Z_2		
AB	0	0	0	0	0	0	0
	1	0,6562	0	-0,220	0,034	0	-0,084
	2	0,75	0	-0,252	0,039	0	-0,096
	3	0,4687	0	-0,157	0,024	0	-0,060
	4	0	0	0	0	0	0
BC	4	0	0	0	0	0	0
	5	-0,694	0,139	0,240	-0,069	0,083	0,186
	6	-0,888	0,444	0,321	-0,152	0,333	0,491
	7	-0,75	0,75	0,290	-0,217	0,75	0,919
	8	-0,444	0,888	0,195	-0,235	0,333	0,476
	9	-0,139	0,694	0,082	-0,173	0,083	0,168
CD	10	0	0	0	0	0	0
	11	0	-0,562	-0,029	0,134	0	-0,054
	12	0	-0,5	-0,026	0,119	0	-0,048
	13	0	-0,1875	-0,009	0,044	0	-0,018
	14	0	0	0	0	0	0

CHƯƠNG 7 PHƯƠNG PHÁP HỖN HỢP VÀ PHƯƠNG PHÁP LIÊN HỢP

§ 1. SO SÁNH PHƯƠNG PHÁP LỰC VÀ PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ, CHỌN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Nội dung so sánh	Phương pháp lực	Phương pháp chuyển vị
Độ chính xác	Như nhau nếu các giả thiết được chấp nhận như nhau	
Phạm vi áp dụng	Tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ	Tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ. Nên áp dụng cho hệ khung, dầm.
Số ẩn số	Bảng số bậc siêu tĩnh (không phụ thuộc các giả thiết)	Bảng số bậc siêu động (phụ thuộc giả thiết, cấu kiện mẫu, sơ đồ rời rạc chấp nhận)
Hệ cơ bản	Loại bỏ các liên kết thừa. Có nhiều cách tạo hệ cơ bản.	Thêm các liên kết để ngăn cản chuyển vị tại các nút. Hệ cơ bản là duy nhất
Vẽ $(\bar{M}_k), (M_p^o)$	Người tính toán tự vẽ (tốn thời gian, dễ mắc sai sót)	Vẽ bằng cách tra bảng (đơn giản, ít sai sót)
Vẽ $(M_i^o), (M_z^o)$	Không tồn tại nếu hệ cơ bản là tĩnh định.	Tồn tại và thường phức tạp.
Xác định các hệ số và các số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc.	Theo các bài toán xác định chuyển vị. (phức tạp, dễ sai sót)	Theo các điều kiện cân bằng (đơn giản hơn)
Hệ phương trình chính tắc	Nói chung thường đầy đủ các hệ số nên tốn thời gian khi giải hệ phương trình.	Thường có nhiều hệ số phụ bằng không nên đỡ tốn thời gian giải.
Biểu đồ nội lực cuối cùng	Tương đương nhau	
Kiểm tra kết quả	Theo điều kiện chuyển vị nên phức tạp.	Theo điều kiện cân bằng nên đơn giản.

B.7.1.1 Bảng so sánh phương pháp lực và phương pháp chuyển vị

Qua so sánh cho thấy phương pháp chuyển vị có nhiều ưu điểm hơn phương pháp lực. Tuy vậy, cũng không thể kết luận được phương pháp nào ưu việt hơn vì điều này còn căn cứ vào bài toán cụ thể và công cụ tính toán. Đối với công cụ thông thường người ta khuyên nên chọn phương pháp nào cho số hạng ẩn số là ít nhất. Trong trường hợp 2 phương pháp này đều có ẩn số như nhau thì nên chọn phương pháp chuyển vị để giải bài toán.

§ 2 PHƯƠNG PHÁP HỖN HỢP

I. Đặt vấn đề:

Trong thực tế có những loại hệ mà có 1 bộ phận thích hợp với cách giải theo phương pháp lực, bộ phận khác lại thích hợp với phương pháp chuyển vị (cho số ẩn số ít) nhưng nếu sử dụng độc lập 1 trong 2 phương pháp để giải bài toán thì ẩn số sẽ lớn. Ví dụ, hệ cho trên hình (H.7.4.1)

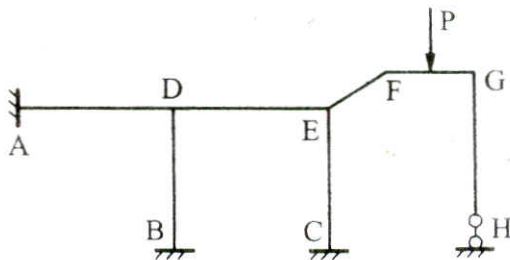
- + Phương pháp lực cho $n = 7$
- + Phương pháp chuyển vị cho $n = 5$

Nếu phân tích cho từng phần hệ, ta thấy phần ABCDE là thích hợp phương pháp chuyển vị, phần (EFGH) thích hợp với phương pháp lực. Để tận dụng ưu điểm của từng bộ phận, dùng phương pháp hỗn hợp do giáo sư A.A.Gvôzdiev đề xuất. Nội dung như sau:

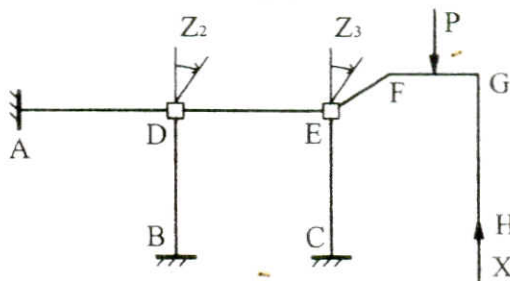
+ Đối với phần hệ thích hợp với phương pháp lực (có nhiều nút nhưng số liên kết với phần khác là ít), dùng phương pháp lực để giải.

+ Đối với phần hệ thích hợp với phương pháp chuyển vị (có ít nút nhưng số liên kết với phần hệ khác là nhiều), dùng phương pháp chuyển vị để giải.

Số ẩn số sẽ bằng tổng số ẩn của 2 phần hệ và giảm đi khá nhiều. ✓



H.7.2.1



H.7.2.2

$n = 3$

II. Hệ cơ bản và hệ phương trình cơ bản:

1. Hệ cơ bản:

- Loại bỏ các liên kết thừa và chọn lực làm ẩn số trên các bộ phận thích hợp phương pháp lực.

- Đặt thêm liên kết ngăn cản chuyển vị của các nút và chọn chuyển vị làm ẩn số trên các bộ phận thích hợp phương pháp chuyển vị.

2. Hệ phương trình cơ bản: Xét hệ (H.7.2.2)

Tương tự phương pháp lực và phương pháp chuyển vị, để cho hệ cơ bản làm việc giống hệ ban đầu, trên hệ cơ bản cần:

- + Đặt thêm X_1, Z_2, Z_3 trên hệ cơ bản
- + Thiết lập điều kiện chuyển vị đứng tại H, các phản lực tại các liên kết đặt thêm vào D, C do (X_1, Z_2, Z_3, P) bằng không. Điều kiện này được viết:

$$\begin{cases} \Delta X_1(X_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \\ R_2(X_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \\ R_3(X_1, Z_2, Z_3, P) = 0 \end{cases}$$

Tổng quát, cho 1 hệ chịu (P, t, Z) gồm n ẩn số, trong đó số ẩn số theo phương pháp lực là m :

$$\begin{cases} \Delta X_1(X_1, X_2, \dots, X_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \\ \dots \\ \Delta X_m(X_1, X_2, \dots, X_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \\ R_{m+1}(X_1, X_2, \dots, X_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \\ \dots \\ R_n(X_1, X_2, \dots, X_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0 \end{cases}$$

Đây là hệ phương trình cơ bản của phương trình hỗn hợp.

III. Hệ phương trình chính tắc:

1. Xét phương trình thứ i, $i = \overline{1, m}$ của hệ phương trình cơ bản:

$$\Delta X_i(X_1, X_2, \dots, X_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0$$

$$\rightarrow \Delta X_i(X_1) + \Delta X_i(X_2) + \dots + \Delta X_i(X_m) + \Delta X_i(Z_{m+1}) + \dots + \Delta X_i(Z_n) + \Delta X_i(P) + \Delta X_i(t) + \Delta X_i(Z) = 0$$

+ Gọi δ_{ik} là chuyển vị tương ứng với phương và vị trí X_i do riêng $X_k = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, $k = \overline{1, m} \rightarrow \Delta X_i(X_k) = \delta_{ik} \cdot X_k$

+ Gọi δ_{ij} là chuyển vị tương ứng với phương và vị trí X_i do riêng $Z_j = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, $j = \overline{m+1, n} \rightarrow \Delta X_i(Z_j) = \delta_{ij} \cdot Z_j$ $\delta_{ij} = -\delta_{ji}$

+ Gọi $\Delta_{iP}, \Delta_{it}, \Delta_{iZ}$ là chuyển vị tương ứng với phương và vị trí X_i do P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản $\rightarrow \Delta X_i(P) = \Delta_{iP}, \Delta X_i(t) = \Delta_{it}, \Delta X_i(Z) = \Delta_{iZ}$

Thay tất cả vào phương trình khai triển:

$$\delta_{i1} \cdot X_1 + \delta_{i2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{im} \cdot X_m + \delta_{i,m+1} \cdot Z_{m+1} + \dots + \delta_{in} \cdot Z_n + \Delta_{iP} + \Delta_{it} + \Delta_{iZ} = 0$$

2. Xét phương trình thứ j của hệ phương trình cơ bản: $j = \overline{m+1, n}$

$$R_j(X_1, X_2, \dots, X_m, Z_{m+1}, \dots, Z_n, P, t, Z) = 0$$

+ Gọi r_{ji} là phản lực tại liên kết j thêm vào do $X_i = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, $i = \overline{1, m}$ xét hp 2 cơ tách và xét cb

$$\rightarrow R_j(X_i) = r_{ji}$$

+ Gọi r_{jq} là phản lực tại liên kết j thêm vào do $Z_q = 1$ gây ra trên hệ cơ bản, $q = \overline{m+1, n}$

$$\rightarrow R_j(Z_q) = r_{jq} \cdot Z_q$$

+ Gọi R_{jP}, R_{jt}, R_{jZ} lần lượt là phản lực tại liên kết j do P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản:

$$\rightarrow R_j(P) = R_{jP}, R_j(t) = R_{jt}, R_j(Z) = R_{jZ}$$

Thay tất cả vào phương trình khai triển:

$$r_{j1} X_1 + r_{j2} X_2 + \dots + r_{jm} X_m + r_{j,m+1} Z_{m+1} + \dots + r_{jn} Z_n + R_{jP} + R_{jt} + R_{jZ} = 0$$

Tiếp đó cho $i = \overline{1, m}, j = \overline{m+1, n}$ sẽ được hệ phương trình chính tắc của phương pháp hỗn hợp.

IV. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

Trước khi tiến hành cần phải vẽ các biểu đồ nội lực (thường là biểu đồ mômen) do các nguyên nhân X_i, Z_q, P, t, Z gây ra trên hệ cơ bản.

+ δ_{ik} : được xác định theo phương pháp lực: $\delta_{ik} = (\bar{M}_i)(\bar{M}_k)$

+ $\dot{\delta}_{ij}$: có thể xác định theo nguyên tắc chung của bài toán xác định chuyển vị

hoặc bằng hình học hoặc thông qua việc xác định r_{ji}^* từ mối quan hệ: $\dot{\delta}_{ij} = -r_{ji}^*$

+ $\Delta_{iP}, \Delta_{it}, \Delta_{iZ}$: được xác định theo phương pháp lực.

+ r_{ji}^* : xác định theo điều kiện cân bằng như phương pháp chuyển vị.

+ $q_{jq}, R_{jP}, R_{jt}, R_{jZ}$: xác định theo phương pháp chuyển vị.

V. Vẽ các biểu đồ nội lực:

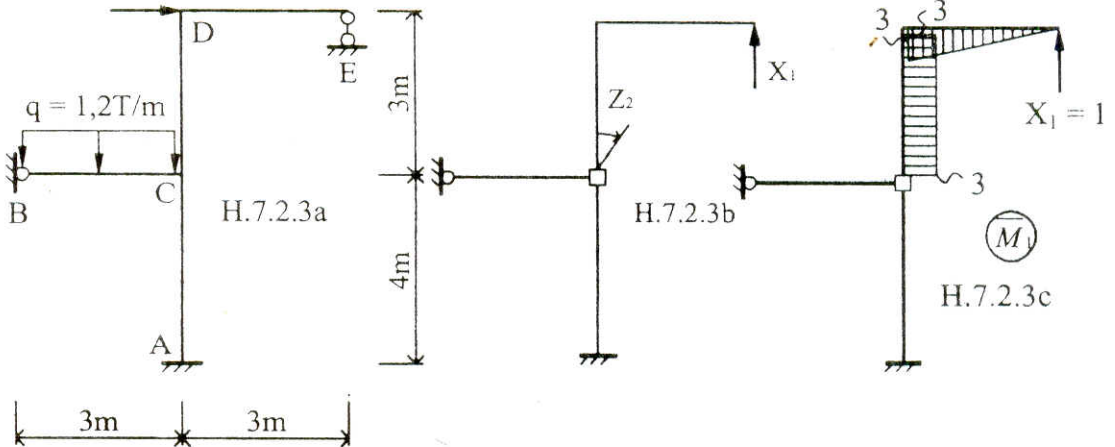
1. Biểu đồ mômen:

$$(M) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)X_2 + \dots + (\bar{M}_n)X_n + (\bar{M}_{n+1})Z_{n+1} + \dots + (\bar{M}_n)Z_n + (M_P^o) + (M_t^o) + (M_Z^o)$$

2. Biểu đồ lực cắt và lực dọc: được vẽ theo biểu đồ mômen như trong phương pháp lực.

Vi dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình (H.7.2.3a). Cho độ cứng trong các thanh là $EJ = \text{const}$. Chỉ xét ảnh hưởng của biến dạng uốn.

$P = 2T$



1. Số ẩn số:

- Phần hệ CDE: giải bằng phương pháp lực, $n = 1$
- Phần hệ ABC: giải bằng phương pháp chuyển vị, $n = 1 + 0 = 1$

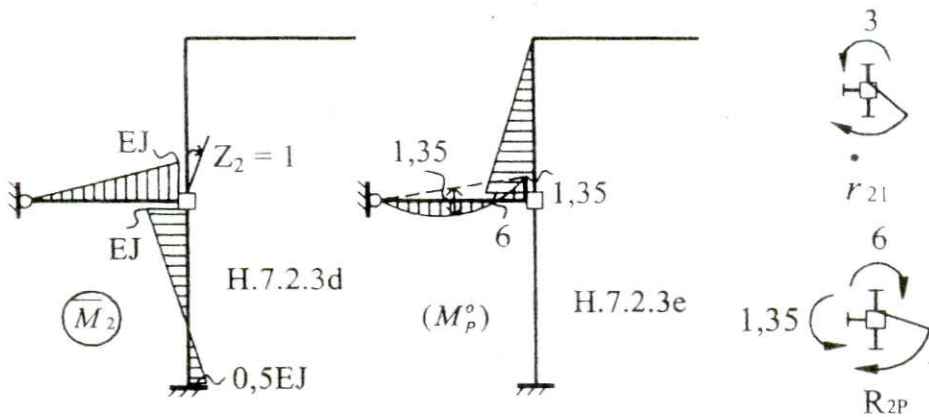
2. Hệ cơ bản và hệ phương trình chính tắc:

- Hệ cơ bản (H.7.2.3b)
- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \dot{\delta}_{12}Z_2 + \Delta_{1P} = 0 \\ r_{21}^*X_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

3. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

- Vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{M}_2), (M_P^o)$.
- Xác định các hệ số:



$$* \delta_{11} = (\bar{M}_1)(\bar{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{3.3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot 3.3.3 = \frac{36}{EJ}$$

$$* \delta_{12} = -\dot{r}_{21} \quad \dot{r}_{21} = 3.$$

$$\rightarrow \delta_{12} = -\dot{r}_{21} = -3$$

$$* r_{22} = 2EJ.$$

$$* \Delta_{1P} = (\bar{M}_1)(M_p^0) = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{6.3}{2} \cdot 3 = -\frac{27}{EJ}$$

$$* R_{2P} = -6 + 1,35 = -4,65$$

Thay vào hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{36}{EJ} X_1 - 3Z_2 - \frac{27}{EJ} = 0 \\ 3X_1 + 2EJ \cdot Z_2 - 4,65 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 0,839 \\ Z_2 = 1,066/EJ \end{cases}$$

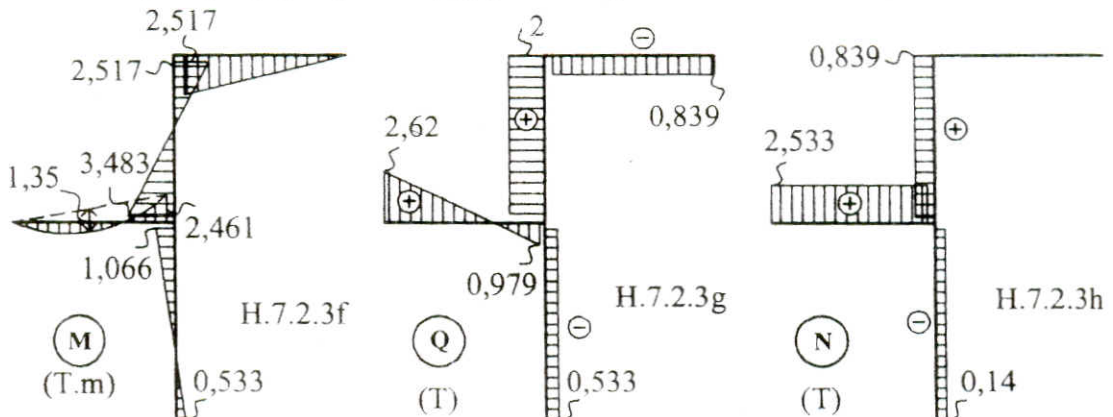
4. Vẽ biểu đồ nội lực:

a. Mômen: $(M) = (\bar{M}_1)X_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + (M_p^0)$

Kết quả trên hình (H.7.2.7)

b. Lực cắt: (Q) suy ra từ (M) (H.7.2.3g)

c. Lực dọc: (N) suy ra từ (Q) (H.7.2.3h)

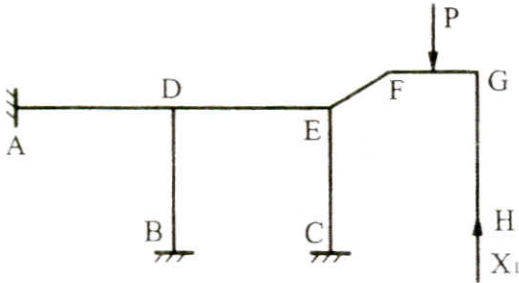


§ 3. PHƯƠNG PHÁP LIÊN HỢP

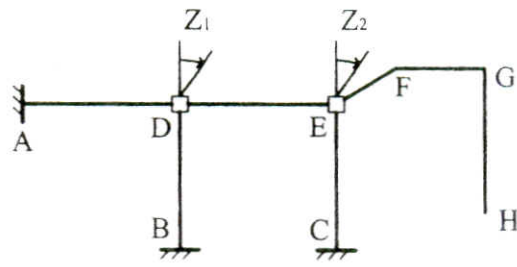
Đối với những loại bài toán như đã nêu trên ta còn có thể dùng phương pháp liên hợp để giải, trong đó phối hợp song song phương pháp lực và phương pháp chuyển vị. Để trình bày được đơn giản ta sẽ lý luận với hệ cho trên hình (H.7.2.1), tuy nhiên cách lập luận vẫn tổng quát và được áp dụng cho hệ bất kỳ.

Theo phương pháp liên hợp, ta có thể tiến hành theo 1 trong 2 hướng sau:

1. Chọn hệ cơ bản theo phương pháp lực nhưng chỉ loại bỏ các liên kết thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp lực. Hệ cơ bản vẫn là hệ siêu tĩnh (H.7.3.1).



H.7.3.1



H.7.3.2

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

- Để xác định các hệ số δ_{11} , Δ_{1P} cần vẽ các biểu đồ (\bar{M}_1) , (M_p^o) trên hệ cơ bản.

+ Bộ phận tĩnh định EFGH: vẽ dễ dàng.

+ Bộ phận siêu tĩnh ABCDE: dùng phương pháp chuyển vị để giải bài toán phụ.

* Hệ cơ bản của bài toán phụ (H.7.3.2)

* Hệ phương trình chính tắc của bài toán phụ:

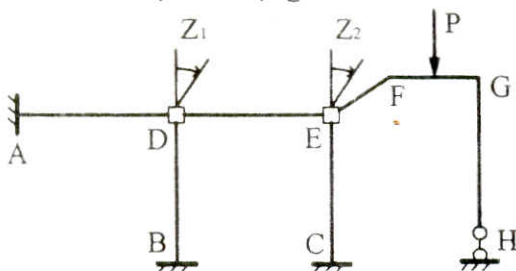
$$\begin{cases} r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21} Z_1 + r_{22} Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

* Lần lượt giải bài toán phụ với các nguyên nhân $X_1 = 1$ và P sẽ vẽ được (\bar{M}_1) , (M_p^o) .

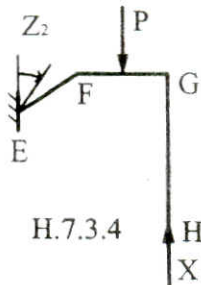
- Sau khi giải được X_1 ta sẽ tìm được (M) bằng cách tổ hợp:

$$(M) = (\bar{M}_1) X_1 + (M_p^o)$$

2. Chọn hệ cơ bản theo phương pháp chuyển vị nhưng chỉ đặt thêm các liên kết phụ tại các nút thuộc bộ phận thích hợp với phương pháp chuyển vị (H.7.3.3). Hệ cơ bản vẫn là hệ siêu tĩnh.



H.7.3.3



H.7.3.4

- Hệ phương trình chính tắc:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} = 0 \end{cases}$$

- Để xác định các hệ số $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}, R_{1P}, R_{2P}$ ta cần phải vẽ các biểu đồ $(\bar{M}_1), (\bar{M}_2), (M_p^o)$

+ Bộ phận xác định động ABCDE: vẽ dễ dàng.

+ Bộ phận siêu động EFGH (do không phải là phần tử mẫu) dùng phương pháp lực để giải bài toán phụ.

* Hệ cơ bản của bài toán phụ (H.7.3.4)

* Hệ phương trình chính tắc của bài toán phụ:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

* Lần lượt giải bài toán phụ với các nguyên nhân $Z_1 = 1, Z_2 = 1, P$ gây ra trên hệ cơ bản sẽ vẽ được $(\bar{M}_1), (\bar{M}_2), (M_p^o)$.

- Sau khi giải ra được Z_1, Z_2 ta sẽ vẽ được (M):

$$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + (\bar{M}_2)Z_2 + M_p^o$$

* Nhận xét:

+ Số ẩn số bài toán khi giải theo phương pháp hỗn hợp và liên hợp như nhau.

+ Phương pháp liên hợp đưa về 2 bài toán độc lập: 1 theo phương pháp lực và 1 theo phương pháp hỗn hợp.

Ví dụ: Vẽ các biểu đồ nội lực của hệ trên hình vẽ (H.7.3.5a). Cho biết độ cứng trong các thanh ngang là $2EJ$, trong thanh đứng là EJ . Chỉ xét ảnh hưởng ảnh hưởng của biến dạng uốn.

1. Chọn hệ cơ bản:

Chọn hệ cơ bản theo hướng thứ 2 của phương pháp liên hợp, ẩn số là Z_1 (H.7.3.5b)

2. Hệ phương trình chính

tắc:

$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

3. Xác định các hệ số và số hạng tự do:

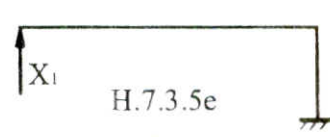
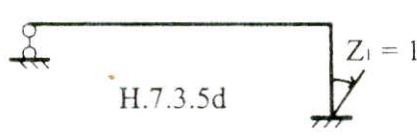
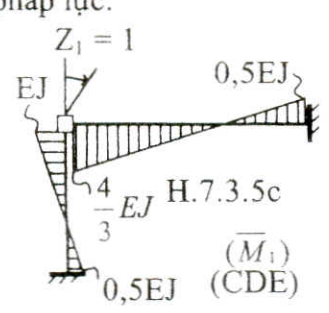
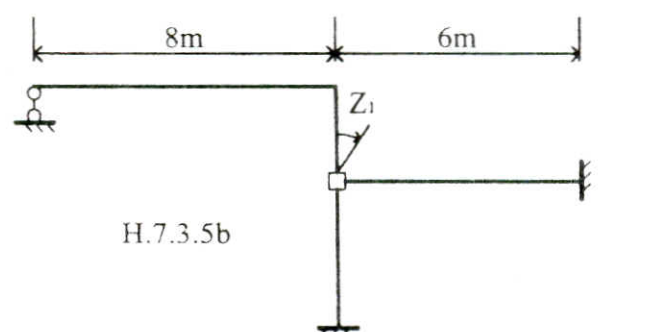
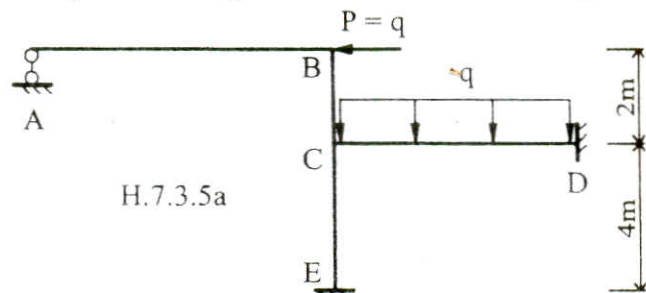
- Vẽ $(\bar{M}_1), (M_p^o)$.

a. Vẽ (\bar{M}_1) do $Z_1 = 1$ gây ra

- Phần hệ CDE: (H.7.3.5c)

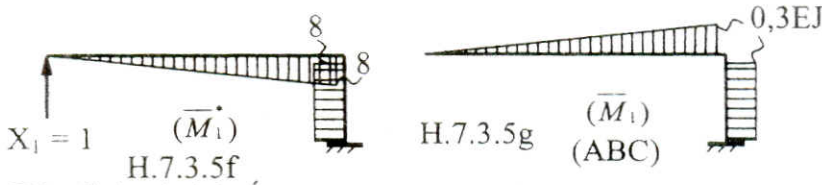
- Phần hệ CDE (H.7.3.5d):

giải bài toán phụ bằng phương pháp lực:



+ Hệ cơ bản (H.7.3.5e)

+ Hệ phương trình chính tắc: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{12} = 0$



+ Xác định các hệ số:

Vẽ (\bar{M}_1^*) do $X_1 = 1$ gây ra (H.7.3.5f)

$$\delta_{11} = (\bar{M}_1^*)(\bar{M}_1^*) = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{8 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{1}{EJ} \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 = \frac{640}{3EJ}$$

$$\Delta_{12} = -\sum R_{j1} \cdot Z_{jm} = -(-8 \cdot Z_1) = 8$$

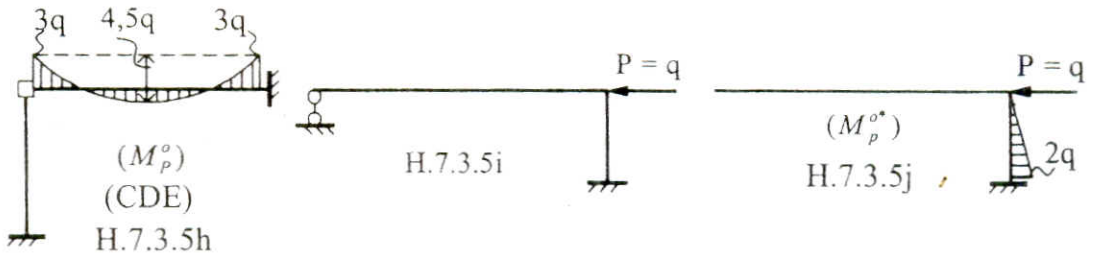
$$\rightarrow \frac{640}{3EJ} X_1 + 8 = 0 \rightarrow X_1 = -0,0375EJ$$

+ Vẽ (\bar{M}_1) trên phần hệ ABC: $(\bar{M}_1) = (\bar{M}_1^*)X_1$ (H.7.3.5g)

b. Vẽ (M_p^o) do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản:

- Phần hệ CDE (H.7.3.5h)

- Phần hệ ABC (H.7.3.5i): giải bài toán phụ bằng phương pháp lực:



+ Hệ cơ bản của bài toán phụ (H.7.3.5e) - giống bài toán phụ vẽ (\bar{M}_1)

+ Hệ phương trình chính tắc: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$

+ Xác định các hệ số:

(\bar{M}_1^*) và δ_{11} là không đổi so với trường hợp vẽ (\bar{M}_1)

Vẽ (\bar{M}_1^{o*}) (H.7.3.5j)

$$\rightarrow \Delta_{1P} = (\bar{M}_1^*)(M_p^o) = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{2 \cdot 29}{2} \cdot 8 = -\frac{169}{EJ}$$

Thay vào, giải ra được:

$$X_1 = 0,0759$$

Vẽ $(M_p^o) = (\bar{M}_1^*)X_1 + (M_p^{o*})$ (H.7.3.5k)

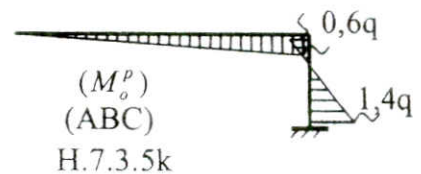
c. Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

$$* r_{11} = 0,3EJ + EJ + \frac{4}{3}EJ = 2,633EJ$$

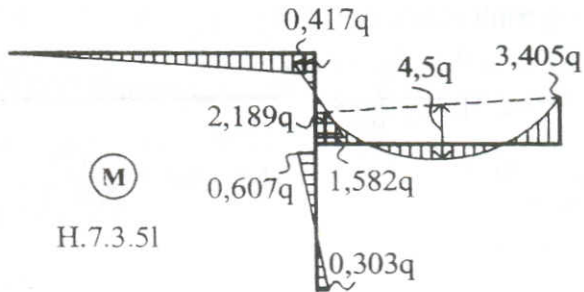
$$* R_{1P} = 1,4q - 3q = -1,6q$$

$$\rightarrow 2,633EJ \cdot Z_1 - 1,6q = 0 \rightarrow Z_1 = \frac{0,6076q}{EJ}$$

d. Vẽ các biểu đồ nội lực:



- Biểu đồ mômen: $(M) = (\bar{M}_1).Z_1 + (M_p^o)$. Kết quả trên hình (H.7.3.51).
- Biểu đồ lực cắt và lực dọc: vẽ tương tự các ví dụ trước.



CHƯƠNG 9 TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐÚNG DẦN

Cách tính hệ siêu tĩnh bằng phương pháp chuyển vị hay phương pháp lực cho ta các kết quả có độ chính xác cao. Tuy nhiên, việc tính theo các phương pháp này có gây ra những khó khăn nhất định đặc biệt là khi số lượng các ẩn số càng lớn nhưng với những công cụ tính toán thông thường.

Để giải quyết khó khăn này, người ta tìm cách giải bài toán với kết quả gần đúng bằng những cách tính đơn giản và kết quả gần đúng đó là chấp nhận được khi thiết kế kết cấu. Một trong các cách tính đó là phương pháp tính đúng dần.

Đặc điểm của phương pháp này là ta chỉ cần thực hiện phép tính theo một trình tự nhất định, lặp đi lặp lại nhiều lần cho đến khi thỏa mãn yêu cầu độ chính xác là được.

Nội dung của phương pháp tính đúng dần nói chung được trình bày dưới dạng phân phối mômen hay phân phối biến dạng theo hình thức này hoặc hình thức khác.

Sau đây, ta đi tìm hiểu 2 phương pháp đúng dần, đó là phương pháp H.Cross và phương pháp G.Kani.

§ 1. PHƯƠNG PHÁP H.CROSS

I. Khái niệm:

Phương pháp H.Cross là hình thức khác của phương pháp chuyển vị, trong đó việc giải hệ phương trình chính tắc được thực hiện theo phương pháp đúng dần mang ý nghĩa vật lý.

* Ưu điểm của phương pháp:

- Tính toán đơn giản.
- Chỉ yêu cầu phải giải 1 số lượng phương trình rất ít so với số lượng các phương trình theo phương pháp "chính xác" và có trường hợp không cần phải giải hệ phương trình.

* Nhược điểm của phương pháp: Chỉ áp dụng có hiệu quả cho những hệ có nút không chuyển vị thẳng.

II. Quy ước cách đọc tên và xét dấu của nội lực:

1. Quy ước khi đọc tên của nội lực:

Ta dùng ký hiệu cho nội lực tương ứng như đã biết nhưng kèm theo hai chỉ số:

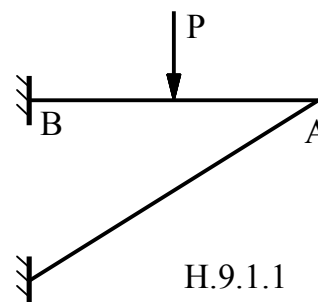
- Chỉ số thứ nhất biểu thị vị trí của tiết diện chứa thành phần nội lực.
- Chỉ số thứ hai kết hợp với chỉ số thứ nhất biểu thị thanh chứa nội lực đó.

Ví dụ: M_{AB} : mômen tại tiết diện A thuộc thanh AB.

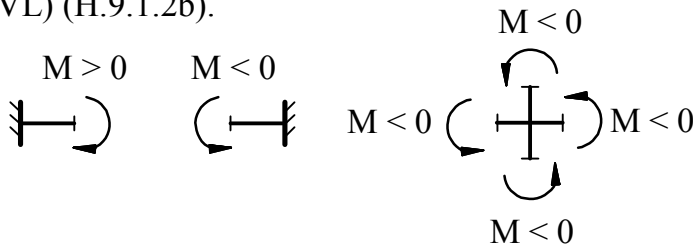
Q_{AC} : đọc là lực cắt tại tiết diện A thuộc thanh AC.

2. Quy ước dấu:

- Mômen uốn tại nút được xem là dương khi nó làm cho thớ giữa của thanh quay theo chiều kim đồng hồ và ngược lại. Xem ví dụ trên hình (H.9.1.2a).



- Lực cắt được xem là dương làm cho thành phần thanh chịu lực quay theo chiều kim đồng hồ và xem là âm khi nó quay ngược chiều kim đồng hồ (giống SBVL) (H.9.1.2b).

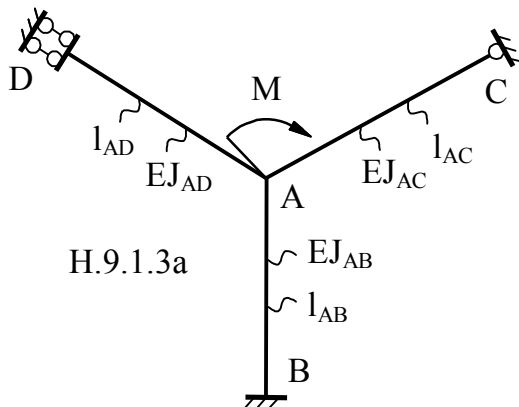


H.9.1.2a

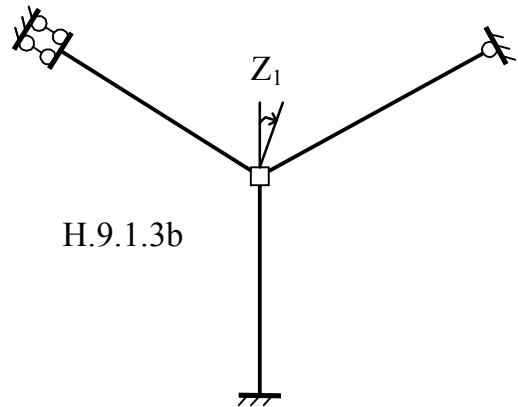
H.9.1.2b

III. Sự phân phối mômen xung quanh một nút:

Xét một hệ chỉ gồm có một nút không có chuyển vị thẳng và chịu mômen tập trung tại nút như trên hình (H.9.1.3a). Ta đi xác định mômen uốn M_{AB} , M_{AC} , M_{AD} tại các đầu thanh quy tụ tại nút A và mômen M_{BA} , M_{CA} , M_{DA} tại các đầu đối diện với nút A.



H.9.1.3a



H.9.1.3b

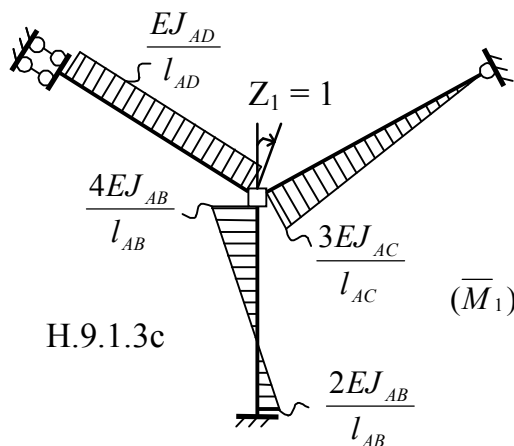
Chọn cách giải hệ bằng phương pháp chuyển vị:

- Chọn hệ cơ bản trên hình (H.9.1.3b), hệ phương trình chính tắc có dạng:

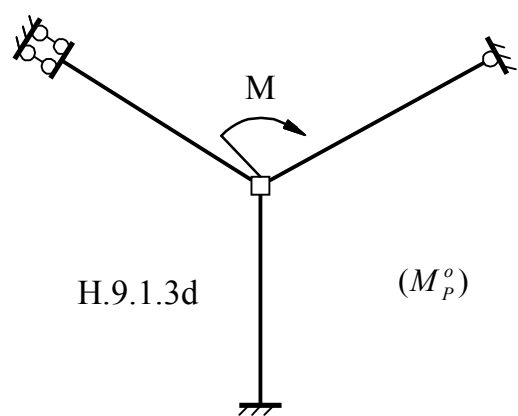
$$r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0$$

- Xác định các hệ số của hệ phương trình chính tắc:

+ Các biểu đồ (\bar{M}_1) và (M_p^o) vẽ trên hình (H.9.1.3.c & H.9.1.3d).



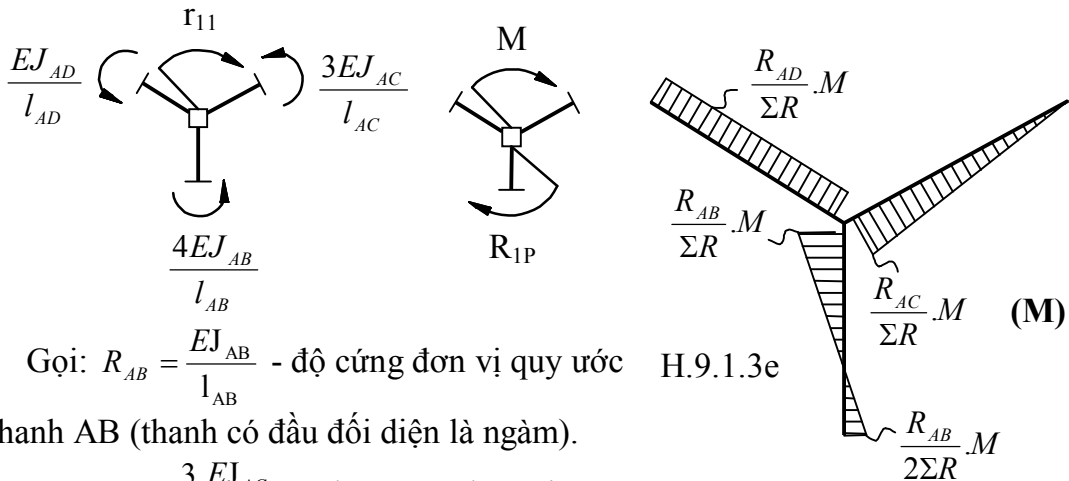
H.9.1.3c



H.9.1.3d

* r_{11} :

$$r_{11} = \frac{4.EJ_{AB}}{l_{AB}} + \frac{3.EJ_{AC}}{l_{AC}} + \frac{EJ_{AD}}{l_{AD}}$$



Gọi: $R_{AB} = \frac{EJ_{AB}}{l_{AB}}$ - độ cứng đơn vị quy ước H.9.1.3e

của thanh AB (thanh có đầu đối diện là ngàm).

$R_{AC} = \frac{3}{4} \frac{EJ_{AC}}{l_{AC}}$ - độ cứng đơn vị quy

ước của thanh AC (thanh có đầu đối diện là khớp).

$R_{AD} = \frac{1}{4} \frac{EJ_{AD}}{l_{AD}}$ - độ cứng đơn vị quy ước của thanh AD (thanh có đầu đối

diện là ngàm trượt song song với trục thanh).

Suy ra: $r_{11} = 4.(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD}) = 4 \Sigma R$

* R_{1P} :

$R_{1P} = -M.$

Thay vào phương trình chính tắc:

$$4.(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD}).Z_1 - M = 0 \Rightarrow Z_1 = \frac{M}{4(R_{AB} + R_{AC} + R_{AD})} = \frac{M}{4\Sigma R}$$

- Vẽ biểu đồ mômen (M):

$(M) = (\bar{M}_1)Z_1 + M_p^o$. Kết quả thể hiện trên hình (H.9.1.3e).

Từ đây, ta xác định được giá trị mômen uốn tại các đầu thanh quy tụ tại nút

A:

$$M_{AB} = \frac{R_{AB}}{\Sigma R} . M, \quad M_{AC} = \frac{R_{AC}}{\Sigma R} . M, \quad M_{AD} = \frac{R_{AD}}{\Sigma R} . M$$

- Các mômen uốn M_{AB}, M_{AC}, M_{AD} là do mômen M phân phối vào nút A nên gọi là mômen phân phối. Và nếu xét dấu theo qui ước H.Cross thì:

$$M_{AB} = -\frac{R_{AB}}{\Sigma R} . M, \quad M_{AC} = -\frac{R_{AC}}{\Sigma R} . M, \quad M_{AD} = -\frac{R_{AD}}{\Sigma R} . M$$

- Mômen uốn tại các đầu thanh đối diện với nút A:

$$M_{BA} = +\frac{1}{2} . M_{AB}; \quad M_{CA} = 0 . M_{AC}; \quad M_{DA} = -1 . M_{AD}.$$

Các mômen này gọi là mômen truyền.

♦ **Tổng quát:** Khi nút A gồm nhiều thanh quy tụ, ta có:

+ Mômen phân phối tại đầu A thuộc thanh AX:

$$M_{AX} = -\gamma_{AX} . M.$$

+ Mômen truyền:

$$M_{XA} = \beta_{XA} . M_{AX}.$$

Trong đó: γ_{AX} - hệ số phân phối của thanh AX.

$$\gamma_{AX} = \frac{R_{AX}}{\Sigma R}$$

R_{AX} : là độ cứng đơn vị quy ước của thanh AX, phụ thuộc vào liên kết đầu đối diện với nút.

ΣR : tổng độ cứng đơn vị quy ước của các thanh quy tụ tại nút A.

β_{XA} : hệ số truyền của thanh AX.

* *Chú ý*: Mômen M tập trung tại nút trong các biểu thức trên được lấy dấu dương khi xoay cùng chiều kim đồng hồ và ngược lại.

B.9.1.1 Bảng độ cứng đơn vị vi ước và các hệ số truyền

Liên kết đầu đối diện nút	R_{AX}	β_{XA}
- Khớp	$\frac{3}{4} \frac{EJ}{l}$	0
- Ngàm trượt	$\frac{1}{4} \frac{EJ}{l}$	-1
- Ngàm	$\frac{EJ}{l}$	+1/2
- Tự do	0	0

Ví dụ 1: Xác định mômen phân phối và mômen truyền của hệ cho trên hình (H.9.1.4a). Cho biết độ cứng trong tất cả các thanh là $EJ = \text{const}$.

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước:

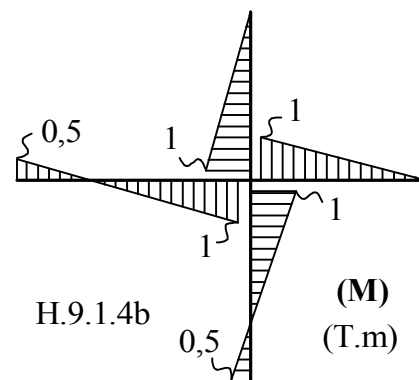
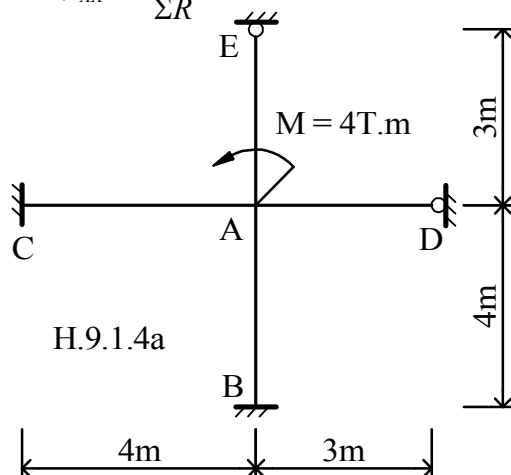
$$R_{AB} = \frac{EJ}{l_{AB}} = \frac{EJ}{4}; R_{AC} = \frac{EJ}{l_{AC}} = \frac{EJ}{4};$$

$$R_{AD} = \frac{3}{4} \frac{EJ}{l_{AD}} = \frac{3}{4} \frac{EJ}{3} = \frac{EJ}{4}; R_{AE} = \frac{3}{4} \frac{EJ}{l_{AE}} = \frac{3}{4} \frac{EJ}{3} = \frac{EJ}{4}$$

2. Xác định hệ số phân phối và mômen phân phối:

- Hệ số phân phối:

$$\gamma_{AX} = \frac{R_{AX}}{\Sigma R}$$



$$\rightarrow \gamma_{AB} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4}} = 0,25; \gamma_{AC} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4}} = 0,25; \gamma_{AD} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4}} = 0,25; \gamma_{AE} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4}} = 0,25$$

Mômen phân phối: $M_{AX} = -\gamma_{AX}.M$.

→ $M_{AB} = -0,25.(-4) = 1$; $M_{AC} = -0,25.(-4) = 1$;

$M_{AD} = -0,25.(-4) = 1$; $M_{AE} = -0,25.(-4) = 1$

3. Xác định hệ số truyền và mômen truyền:

- Hệ số truyền: $\beta_{BA} = \beta_{CA} = \frac{1}{2}$; $\beta_{DA} = \beta_{EA} = 0$.

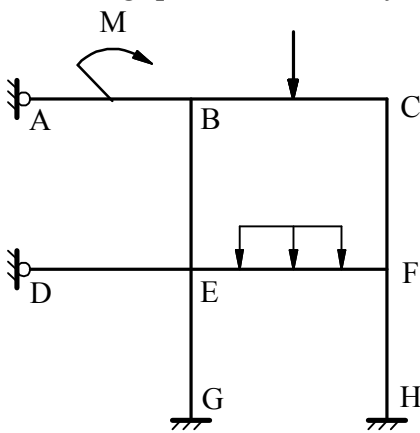
- Mômen truyền: $M_{XA} = \beta_{XA}.M_{AX}$.

→ $M_{BA} = \frac{1}{2}.1 = 0,5$; $M_{CA} = \frac{1}{2}.1 = 0,5$; $M_{DA} = M_{EA} = 0$.

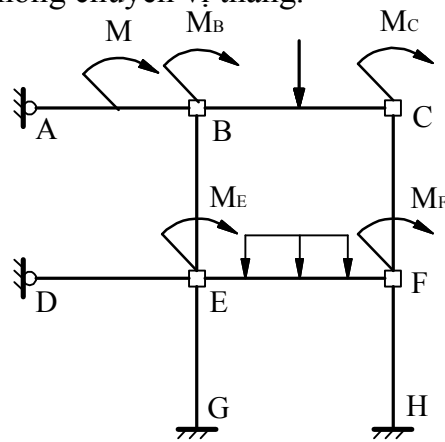
Kết quả tính toán có thể được vẽ trên biểu đồ (M) (H.9.1.4b)

IV. Cách tính hệ có nút không chuyển vị thẳng:

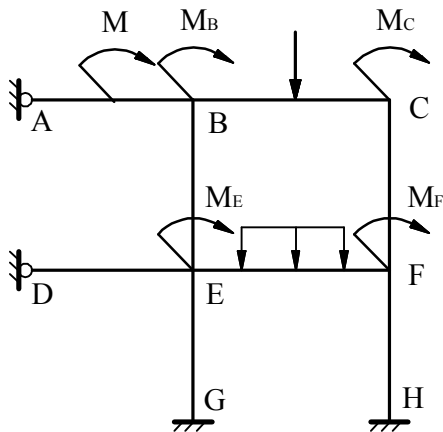
Ta phân tích cách tính hệ trên hình (H.9.1.5a). Tuy nhiên, cách lập luận vẫn mang tính tổng quát cho hệ bất kỳ có nút không chuyển vị thẳng.



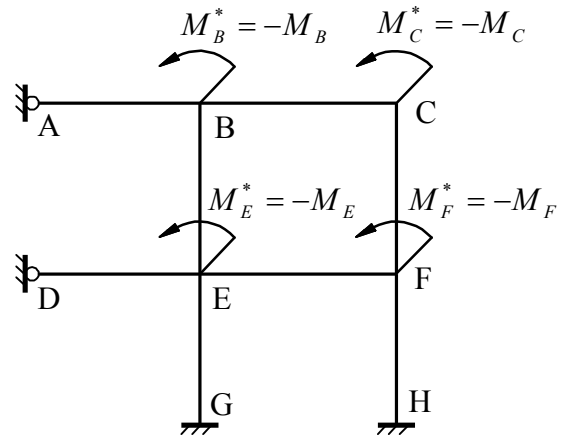
H.9.1.5a



H.9.1.5b



H.9.1.5c

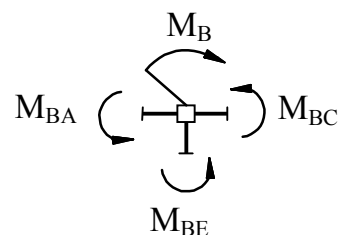


H.9.1.5d

Giả sử ngăn cản chuyển vị xoay của tất cả các nút bằng cách đặt thêm vào mỗi nút một liên kết mômen, ta sẽ thu được một hệ mới chính là hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị (H.9.1.5b). Tại mỗi nút bị chốt, sẽ phát sinh những phản lực mômen gọi là ngẫu lực chèn. Ngẫu lực chèn phải cân bằng với mômen uốn tại các đầu thanh quy tụ tại nút đó.

Ví dụ: Với nút B:

$$M_B + M_{BA} + M_{BE} + M_{BC} = 0.$$



Suy ra: $M_B = -(M_{BA} + M_{BE} + M_{BC})$.

Vậy ngẫu lực chèn tại một nút sẽ bằng tổng đại số mômen uốn tại các đầu thanh quy tụ tại mỗi nút đang xét do tải trọng gây ra trên hệ có nút bị chốt nhưng trái dấu.

Nhận xét: - Các ngẫu lực chèn chính là R_{kp} của phương pháp chuyển vị.

Tiếp tục biến đổi nút bị chốt bằng cách thay các liên kết mômen bằng các ngẫu lực chèn tương ứng tại mỗi nút ta sẽ được hệ tương đương trên hình (H.9.1.5c). Hệ này khác với hệ ban đầu là hệ có thêm các ngẫu lực chèn tại các nút.

Xét một hệ phụ lấy từ hệ ban đầu, trong đó chỉ chịu các ngẫu lực đặt tại các nút. Các ngẫu lực này có giá trị bằng ngẫu lực chèn nhưng ngược chiều và được gọi là mômen nút cứng (H.9.1.5d).

Theo nguyên lý cộng tác dụng thì:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Hệ ban đầu} \\ \text{H.9.1.5a} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{Hệ ban đầu + ngẫu lực} \\ \text{chèn tại các nút cứng} \\ \text{(H.9.1.5c)} \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} \text{Hệ ban đầu chỉ chịu} \\ \text{mômen nút cứng} \\ \text{(H.9.1.5d)} \end{array}}$$

Như vậy, thay vì đi giải bài toán với hệ trên hình (H.9.1.5.a), ta đi giải bài toán trên hình (H.9.5.1b) hoặc (H.9.5.1c) và (H.9.5.1d).

- Đối với hệ trên hình (H.9.5.1c) ta dễ dàng xác định được nội lực, đó chính là nội lực do tải trọng gây ra trên hệ cơ bản của phương pháp chuyển vị là biểu đồ (\bar{M}_p^o) của phương pháp chuyển vị.

- Đối với hệ trên hình (H.9.5.1d), ta tìm cách tính đúng dần. Cách thực hiện như sau:

+ Lần lượt tháo từng chốt. Khi tháo từng chốt thì mômen nút cứng sẽ phân phối vào nút đó và truyền vào các nút lân cận như đã trình bày trong bài toán sự phân phối mômen xung quanh một nút. Và nút này sẽ xoay đến vị trí cân bằng mới.

+ Chốt lại nút này và chuyển sang nút khác và thực hiện tương tự.

Quá trình cứ tiến hành như vậy và lặp lại nhiều lần cho đến khi ta tháo tất cả các chốt thì các nút không xoay nữa (mômen tại các nút đã cân bằng). Thực chất vẫn chưa cân bằng nhưng giá trị của mômen uốn không cân bằng là không đáng kể. Lúc này, ta dừng quá trình thực hiện và trạng thái đó là trạng thái cần tìm.

Mômen uốn tại các đầu thanh tương ứng chính là tổng đại số mômen phân phối và mômen truyền tích lũy trong các chu trình.

- Muốn tìm mômen uốn tại các đầu thanh nào của hệ đã cho ban đầu, ta lấy tổng đại số mômen do tải trọng gây ra trên hệ có các nút bị chốt với mômen uốn do mômen nút cứng gây ra trên các đầu thanh tương ứng.

Ví dụ 2: Vẽ biểu đồ mômen uốn của dầm liên tục trên hình (H.9.1.6.a). Cho biết độ cứng trong tất cả các thanh là $EJ = \text{const}$.

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước của các thanh:

$$R_{AB} = \frac{3 EJ}{4 l_{AB}} = \frac{3EJ}{16}; R_{BC} = \frac{EJ}{l_{BC}} = \frac{EJ}{3}$$

$$R_{CD} = \frac{EJ}{l_{CD}} = \frac{EJ}{4}; R_{DE} = \frac{3 EJ}{4 l_{DE}} = \frac{EJ}{4}$$

2. Xác định hệ số phân phối từng đầu thanh quy tụ vào nút:

- Tại nút B:

$$\gamma_{BA} = \frac{\frac{3EJ}{16}}{\left(\frac{3EJ}{16} + \frac{EJ}{3}\right)} = 0,36; \gamma_{BC} = \frac{\frac{EJ}{3}}{\left(\frac{3EJ}{16} + \frac{EJ}{3}\right)} = 0,64.$$

- Tại nút C:

$$\gamma_{CB} = \frac{\frac{EJ}{3}}{\left(\frac{EJ}{3} + \frac{EJ}{4}\right)} = 0,577; \gamma_{CD} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\left(\frac{EJ}{3} + \frac{EJ}{4}\right)} = 0,429.$$

- Tại nút D:

$$\gamma_{DC} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\left(\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4}\right)} = 0,5; \gamma_{DE} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\left(\frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{4}\right)} = 0,5.$$

3. Xác định mômen nút cứng M^* tại các đầu thanh do tải trọng gây ra:

Tra bảng cho các phần tử chịu tải trọng và xét dấu theo qui ước H.Cross.

$$M_{BA}^* = -2,25(\text{T.m}); M_{BC}^* = 0,9(\text{T.m}); M_{CB}^* = -0,9(\text{T.m});$$

$$M_{CD}^* = 1(\text{T.m}); M_{DC}^* = -1(\text{T.m}); M_{DE}^* = 1,35(\text{T.m}).$$

4. Phân phối và truyền mômen:

Quá trình phân phối và truyền mômen được lập thành bảng. Bảng có thể được lập như sau:

* Hàng thứ nhất ghi ký hiệu các nút và các đầu thanh có liên kết ngàm.

* Hàng thứ hai ghi ký hiệu những đầu thanh quy tụ tại nút tương ứng. Nút có bao nhiêu thanh quy tụ thì có bấy nhiêu cột.

* Hàng thứ ba ghi các hệ số phân phối tương ứng với các đầu thanh quy tụ vào nút.

* Hàng thứ tư ghi trị số mômen nút cứng tại các đầu thanh.

* Các hàng tiếp theo ghi kết quả phân phối và truyền mômen lần lượt tương ứng với các nút được tháo chốt.

Với ví dụ trên quá trình được thực hiện như sau:

Chu trình 1:

- Tháo chốt nút B:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_B^* = -2,25 + 0,9 = -1,35(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

$$M_{BA} = (-0,36).(-1,35) = 0,486(\text{T.m})$$

$$M_{BC} = (-0,64).(-1,35) = 0,864(\text{T.m})$$

Mômen truyền:

$$M_{AB} = 0.$$

$$M_{CB} = \frac{1}{2}.0,864 = 0,432$$

- Chốt nút B, tháo chốt nút C:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_C^* = -0,9 + 1 + 0,432 = 0,532(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

$$M_{CB} = (-0,571).0,532 = -0,3037(\text{T.m})$$

Mômen truyền:

$$M_{BC} = -0,1519(\text{T.m})$$

$$M_{CD} = (-0,429).0,532 = -0,2282(\text{T.m})$$

$$M_{DC} = -0,1141(\text{T.m})$$

- Chốt nút C, tháo chốt nút D:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_D^* = -1 + 0,35 - 0,1141 = 0,2359(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

$$M_{DC} = (-0,5).0,2359 = -0,1179(\text{T.m})$$

Mômen truyền:

$$M_{CD} = -0,0589(\text{T.m})$$

$$M_{DE} = (-0,5).0,2359 = -0,1179(\text{T.m})$$

$$M_{ED} = 0.$$

Chu trình 2:

- Tháo chốt nút B:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_B^* = -0,1519(\text{T.m}).$$

* Nhận xét: Khi tháo chốt ở các nút trong chu kỳ thứ (i) nào đó thì nguyên nhân làm cho nút không cân bằng là các mômen truyền từ các nút khác tới trong chu trình thứ (i-1) chứ không phải do mômen phân phối.

+ Mômen phân phối:

$$M_{BA} = (-0,36).(-0,1519) = 0,0546(\text{T.m})$$

Mômen truyền:

$$M_{AB} = 0.$$

$$M_{BC} = (-0,64).(-0,1519) = 0,0972(\text{T.m})$$

$$M_{CB} = 0,0486(\text{T.m})$$

- Chốt nút B, tháo chốt nút C:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_C^* = 0,0486 - 0,0589 = -0,0103(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

$$M_{CB} = (-0,571).(-0,0103) = 0,0058(\text{T.m})$$

Mômen truyền:

$$M_{BC} = 0,0029(\text{T.m})$$

$$M_{CD} = (-0,429).(-0,0103) = 0,0044(\text{T.m})$$

$$M_{DC} = 0,0022(\text{T.m})$$

- Chốt nút C, tháo chốt nút D:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_D^* = 0,0022(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

Mômen truyền:

$$M_{DC} = (-0,5).0,0022 = -0,0011(\text{T.m})$$

$$M_{CD} = \frac{1}{2}.(-0,0011) = -0,0005(\text{T.m})$$

$$M_{DE} = (-0,5).0,0022 = -0,0011(\text{T.m})$$

$$M_{ED} = 0.$$

Chu trình 3:

- Tháo chốt nút B

+ Mômen không cân bằng:

$$M_B^* = 0,0029(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

Mômen truyền:

$$M_{BA} = -0,36.0,0029 = -0,0010(\text{T.m})$$

$$M_{AB} = 0.$$

$$M_{BC} = -0,64.0,0029 = -0,0018(\text{T.m})$$

$$M_{CB} = -0,0009(\text{T.m})$$

- Chốt nút B, tháo chốt nút C:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_C^* = -0,0009 - 0,0005 = -0,0014(\text{T.m}).$$

+ Mômen phân phối:

Mômen truyền:

$$M_{CB} = (-0,571).(-0,0014) = 0,0008(\text{T.m})$$

$$M_{BC} = 0,0004(\text{T.m})$$

$$M_{CD} = (-0,429).(-0,0014) = 0,0006(\text{T.m})$$

$$M_{DC} = 0,0003(\text{T.m})$$

- Chốt nút C, tháo chốt nút D:

+ Mômen không cân bằng:

$$M_D^* = 0,0003(T.m).$$

+ Mômen phân phối:

$$M_{DC} = (-0,5).0,0003 = -0,00015(T.m)$$

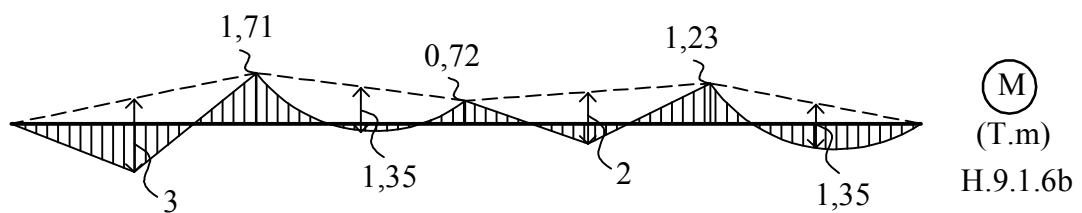
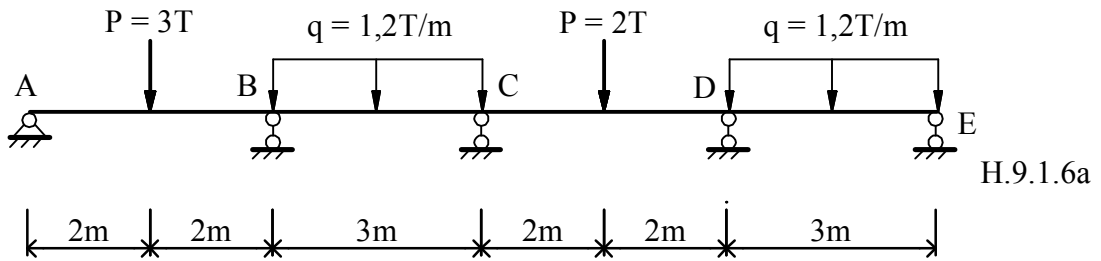
$$M_{DE} = (-0,5).0,0003 = -0,00015(T.m)$$

Mômen truyền:

$$M_{CD} = -0,00007(T.m)$$

$$M_{DC} = 0.$$

Các mômen phân phối đã khá nhỏ, ta có thể dùng quá trình tại đây. Kết quả tính toán ta thể hiện trên bảng (B.9.1.2).



Nút (Ngàm)	A		B		C		D		E
	Đầu	AB	BA	BC	CB	CD	DC	DE	ED
γ			0,36	0,64	0,571	0,429	0,5	0,5	
M^*			-2,25	0,9	-0,9	1	-1	1,35	
B	0	0,486	0,864	0,432					
C			-0,1519	-0,3037	-0,2282	-0,1141			
D					-0,0589	-0,1179	0,1179	0	
B	0	0,05476	-0,0972	0,0486					
C			0,0029	0,0058	0,0044	0,0022			
D					-0,0005	-0,0011	-0,0011	0	
B	0	-0,0010	-0,0018	-0,0009					
C			0,0004	0,0008	0,0006	0,0003			
D					-0,00007	-0,00015	-0,00015	0	
M_{cc}	0	-1,7102	1,7108	-0,7174	0,7173	-1,230	1,230	0	

B.9.1.2 Bảng phân phối mômen.

Mômen uốn tại các đầu thanh trong hệ ban đầu sẽ bằng mômen uốn trong hệ có các nút bị chốt ghi ở hàng thứ 4 trên bảng cộng với mômen uốn trong hệ chịu các mômen nút cứng đặt tại nút cứng là tổng các giá trị ghi từ hàng thứ 5 trở xuống.

5. Vẽ biểu đồ nội lực:

Sau khi đã biết mômen uốn tại các đầu thanh ta vẽ được biểu đồ (M) theo cách đã biết như phương pháp treo biểu đồ chẳng hạn (H.9.1.6b).

6. Kiểm tra cân bằng nút:

$$\text{Nút B: } -1,7102 + 1,7108 = 0,0006 \approx 0.$$

$$\text{Nút C: } -0,7174 + 0,7173 = -0,0001 \approx 0.$$

Nút D: $-0,1230 + 0,1230 = 0$.

* Chú ý:

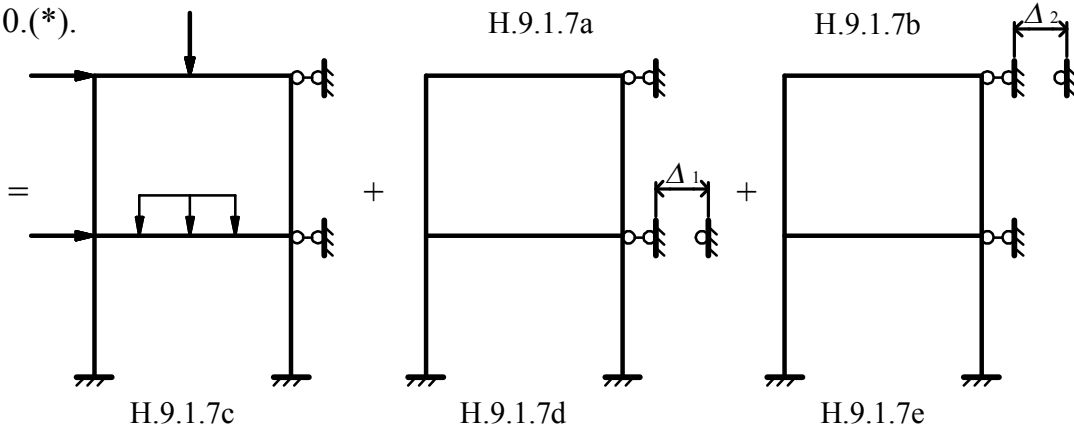
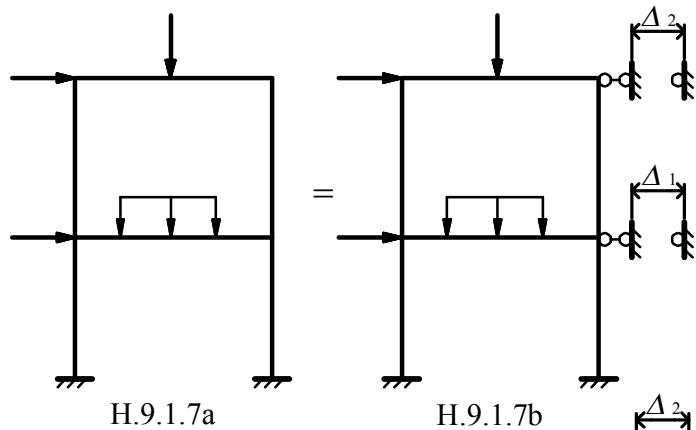
- Ta luôn kiểm tra kết quả trong quá trình tính toán:
 - + Tổng hệ số phân phối xung quanh một nút bằng đơn vị.
 - + Tổng mômen phân phối bằng mômen nút cứng nhưng trái dấu.
- Theo kinh nghiệm, ta nên tháo chốt nút có mômen không cân bằng lớn nhất làm nút khởi đầu.
- Trong trường hợp hệ chịu tác dụng của sự thay đổi nhiệt độ hay chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa, cũng tính tương tự với cách tính trên, riêng ở bước xác định mômen nút cứng M^* , ta thực hiện giống như lúc vẽ biểu đồ (M_z^o) , (M_i^o) của phương pháp chuyển vị.

V. Tính hệ có nút chuyển vị thẳng:

Để đơn giản, ta đi tìm hiểu cách tính hệ trên hình (H.9.1.7a). Tuy nhiên, cách lập luận vẫn tổng quát, áp dụng cho hệ bất kỳ.

Đưa hệ đã cho về hệ có nút không chuyển vị thẳng bằng cách đặt thêm hai liên kết thanh vào ngang mức hai tầng (H.9.1.7b).

Để hệ mới làm việc giống hệ ban đầu, ta cần gây ra các chuyển vị cưỡng bức Δ_1 , Δ_2 tương ứng với vị trí và phương của liên kết thanh mới thêm vào và thiết lập điều kiện phản lực trong các liên kết thanh này bằng không: $R_1 = 0$; $R_2 = 0$.(*)



Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta đưa hệ trên hình (H.9.1.7b) về ba hệ thành phần:

- Hệ có nút không chuyển vị thẳng và chịu tải trọng (H.9.1.7c).
- Hệ có nút không chuyển vị thẳng, không chịu tải trọng nhưng tại liên kết đặt thêm vào tại tầng một chịu chuyển vị cưỡng bức Δ_1 (H.9.1.7d).
- Hệ có nút không chuyển vị thẳng, không chịu tải trọng, nhưng tại liên kết đặt thêm vào tầng hai chịu chuyển vị cưỡng bức Δ_2 (H.9.1.7e).

Viết lại điều kiện (*):

$$\begin{cases} R_1(P, \Delta_1, \Delta_2) = 0 \\ R_2(P, \Delta_1, \Delta_2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R_{1P} + R_{1\Delta_1} + R_{1\Delta_2} = 0 \\ R_{2P} + R_{2\Delta_1} + R_{2\Delta_2} = 0 \end{cases}$$

Trong đó:

R_{kP} : phản lực tại liên kết k đặt thêm vào do tải trọng gây ra trong hệ có nút không chuyển vị thẳng.

$R_{k\Delta_m}$: phản lực tại liên kết k thêm vào do chuyển vị cưỡng bức tại liên kết m có giá trị bằng Δ_m gây ra.

Mặt khác, các chuyển vị Δ_m là chưa biết, để thuận lợi cho việc tính toán, ta biểu thị:

$$\Delta_m = k_m \cdot \delta_m$$

δ_m : chuyển vị tại liên kết m, δ_m có thể chọn tùy ý (thường chọn bằng đơn vị), còn k_m chưa biết giữ vai trò ẩn số.

Nếu gọi r_{km} là phản lực tại liên kết k do δ_m gây ra thì $R_{k\Delta_m} = r_{km} \cdot k_m$.

Thay vào hệ phương trình trên ta được:

$$\begin{cases} R_{1P} + r_{11}k_1 + r_{12}k_2 = 0 \\ R_{2P} + r_{21}k_1 + r_{22}k_2 = 0 \end{cases}$$

Biểu đồ mômen cuối cùng trong hệ:

$$(M) = (M_P) + (M_{\Delta_1}) + (M_{\Delta_2}) = (M_P) + k_1 \cdot (\bar{M}_1) + k_2 \cdot (\bar{M}_2).$$

- (\bar{M}_m) là biểu đồ mômen uốn do chuyển vị δ_m gây ra trên hệ có nút không chuyển vị thẳng; (M_P) là biểu đồ mômen uốn do tải trọng gây ra trên hệ có nút không chuyển vị thẳng.

+ Biểu đồ (M_P) ta dễ dàng vẽ được theo hệ có nút không có chuyển vị thẳng và chỉ chịu tải trọng như ở phần phương pháp chuyển vị.

+ Biểu đồ (\bar{M}_m) cũng thực hiện như vẽ biểu đồ (M_P) nhưng ở đây nguyên nhân tác dụng là chuyển vị cưỡng bức là δ_m .

Vấn đề còn lại là đi xác định k_1, k_2 . Cách thực hiện như sau:

- Sau khi vẽ được biểu đồ $(M_P), (\bar{M}_m)$, ta sẽ xác định được r_{km}, R_{kP} bằng cách thực hiện mặt cắt, tách ra một hệ và xét cân bằng như lúc xác định các hệ số của phương pháp chuyển vị tại liên kết thanh đặt thêm vào. Sau đó giải hệ trên ta sẽ được k_1, k_2 .

Trong trường hợp tổng quát, hệ có n nút chuyển vị độc lập:

- Phương trình thứ i của hệ xác định các k_i :

$$R_{iP} + r_{i1}k_1 + r_{i2}k_2 + \dots + r_{in}k_n = 0; i = \overline{1, n}.$$

- Và $(M) = (M_P) + (\bar{M}_1) \cdot k_1 + \dots + (\bar{M}_n) \cdot k_n$.

* *Chú ý:*

- Trường hợp hệ có thanh đứng không song song hay chịu tác dụng của nguyên nhân biến thiên nhiệt độ, chuyển vị cưỡng bức của các gối tựa, nguyên tắc tính toán vẫn không thay đổi. Tuy nhiên, cần chú ý vận dụng sơ đồ chuyển vị hay giản đồ *Williot* khi xác định các mômen nút cứng.

- Nếu chọn $\delta_k = \delta_m$ thì $r_{km} = r_{mk}$.

Ví dụ: Vẽ biểu đồ nội lực của hệ cho trên hình (H.9.1.8a). Cho biết độ cứng trong các thanh đứng là EJ, trong các thanh ngang là 2EJ.

1. Xác định độ cứng đơn vị quy ước của các thanh:

$$R_{AD} = R_{BE} = R_{CF} = \frac{EJ}{4};$$

$$R_{DE} = R_{EF} = \frac{2EJ}{4} = \frac{EJ}{2}.$$

2. Xác định hệ số phân phối:

Nút D:

$$\gamma_{DA} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4}} = 0,3333;$$

$$\gamma_{DE} = \frac{\frac{EJ}{2}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4}} = 0,6666.$$

Nút E:

$$\gamma_{ED} = \frac{\frac{EJ}{2}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{2}} = 0,4; \gamma_{EF} = \frac{\frac{EJ}{2}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{2}} = 0,4; \gamma_{EB} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4} + \frac{EJ}{2}} = 0,2.$$

$$\text{Nút F: } \gamma_{FC} = \frac{\frac{EJ}{4}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4}} = 0,3333; \gamma_{FE} = \frac{\frac{EJ}{2}}{\frac{EJ}{2} + \frac{EJ}{4}} = 0,6666.$$

3. Tính hệ số nút không chuyển vị thẳng chịu tải trọng. (H.9.1.8b)

- Xác định mômen nút cứng:

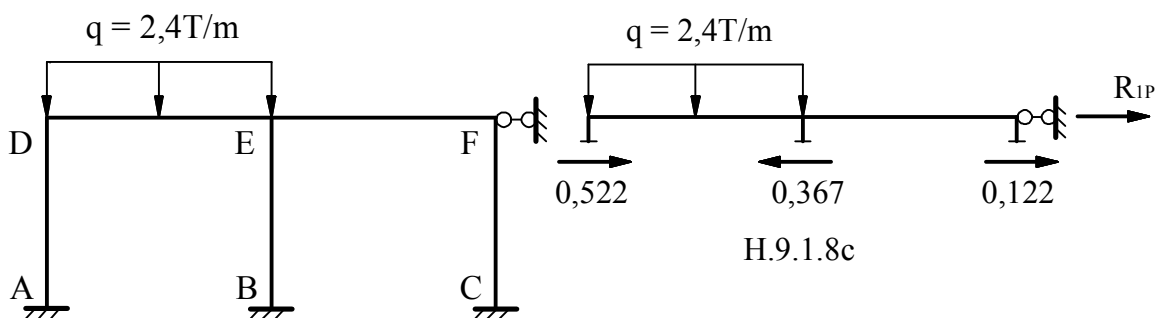
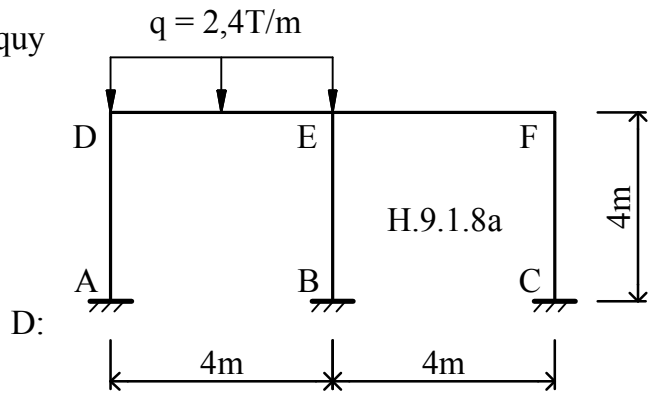
$$M_{DE}^* = -M_{ED}^* = \frac{ql^2}{12} = \frac{2,4 \cdot 4^2}{12} = 3,2(T.m).$$

- Lập bảng phân phối mômen (B.9.1.3)

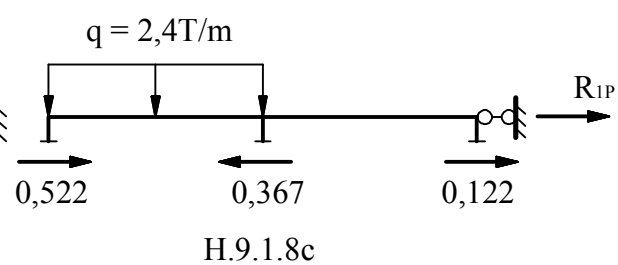
- Dựa vào kết quả của bảng tính, ta có thể vẽ được (M_p^o).

- Xác định phản lực R_{1P} : Thực hiện cắt ra khỏi hệ 1 phần như trên hình vẽ (H.9.1.8c). Lực cắt tại các đầu thanh bị cắt được suy ra từ biểu đồ mômen (M_p^o).

$$\rightarrow R_{1P} = 0,367 - 0,522 - 0,122 = -0,277.$$



H.9.1.8b



H.9.1.8c

Nút (Ngàm)	A	B	D		E			F		C
Đầu thanh	AD	BE	DA	DE	ED	EB	EF	FE	FC	CF
γ			0,3333	0,666	0,4	0,2	0,4	0,6666	0,3333	
M^*				3,2	-3,2					
D	-0,533		-1,066	-2,133	-1,066					
E		0,426		0,853	1,706	0,853	1,706	0,853		
F							-0,284	-0,568	-0,284	-0,142
D	-0,142		-0,284	-0,568	-0,284					
E		0,056		0,113	0,227	0,113	0,227	0,113		
F							-0,037	-0,075	-0,037	-0,018
D	-0,018		-0,037	-0,075	-0,037					
E		0,007		0,014	0,029	0,014	0,029	0,014		
F							-0,004	-0,009	-0,004	-0,002
D	-0,022		-0,004	-0,009	-0,004					
M_{cc}	-0,695	0,489	-1,395	1,395	-2,629	0,98	1,637	0,328	-0,325	-0,162

B.9.1.3 Bảng phân phối mômen do tải trọng

4. Tính hệ số nút không chuyển vị thẳng chịu chuyển vị cưỡng bức:

- Hệ số phân phối và hệ số truyền đã xác định ở mục 3.
- Xác định mômen nút cứng:

Chốt tất cả các nút và tra bảng cho các phần tử chịu chuyển vị cưỡng bức

(H.9.1.8d):

$$M_{DA}^* = M_{EB}^* = M_{FC}^* = \frac{6EJ}{l^2} \cdot \delta_1$$

Nếu chọn $\delta = \frac{l^2}{6EJ}$ thì $M_{DA}^* = M_{EB}^* = M_{FC}^* = 1$

Suy ra được: $M_{AD}^* = M_{BE}^* = M_{CF}^* = 1/2$.

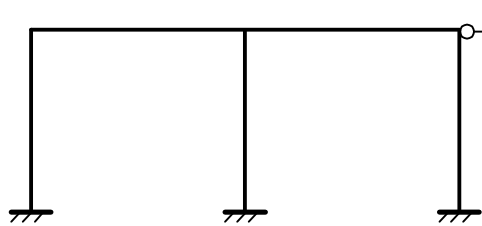
- Lập bảng phân phối mômen (B.9.1.4)
- Dựa vào kết quả của bảng tính, ta có thể vẽ được (\bar{M}_1).
- Xác định phản lực r_{11} :

Thực hiện cắt ra khỏi hệ 1 phần như trên hình vẽ (H.9.1.8d). Lực cắt tại các đầu thanh bị cắt được suy ra từ biểu đồ mômen (\bar{M}_1).

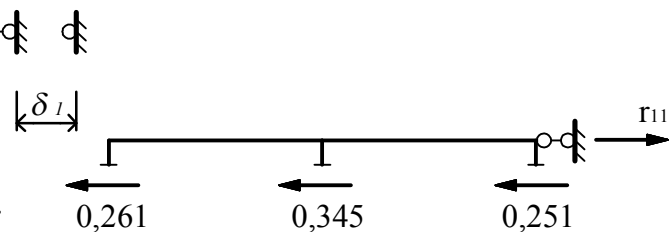
$$\rightarrow r_{11} = 0,261 + 0,345 + 0,251 = 0,857.$$

5. Thay tất cả vào phương trình xác định k:

$$r_{11}k_1 + R_{1P} = 0 \rightarrow 0,877 \cdot k_1 - 0,277 = 0 \rightarrow k_1 = 0,323.$$



H.9.1.8d



H.9.1.8e

Nút (Ngàm)	A	B	D		E			F		C
Đầu thanh	AD	BE	DA	DE	ED	EB	EF	FE	FC	CF
γ			0,333	0,666	0,4	0,2	0,4	0,666	0,333	
M^*	0,5	0,5	1			1			1	0,5
D	-0,166		-0,333	-0,666	-0,333					
E		-0,066		-0,133	-0,266	-0,133	-0,266	-0,133		
F								-0,577	-0,288	-0,144
D	0,022		0,044	0,088	0,044					
E		0,024		0,048	0,097	0,048	0,097	0,048		
F								-0,015	-0,031	-0,015
D	-0,008		-0,015	-0,031	-0,015					
E		0,003		0,006	0,012	0,006	0,012	0,006		
F								-0,002	-0,004	-0,002
M_{cc}	0,348	0,461	0,696	-0,688	-0,461	0,921	-0,462	-0,687	0,659	0,348

B.9.1.4 Bảng phân phối mômen do δ_1

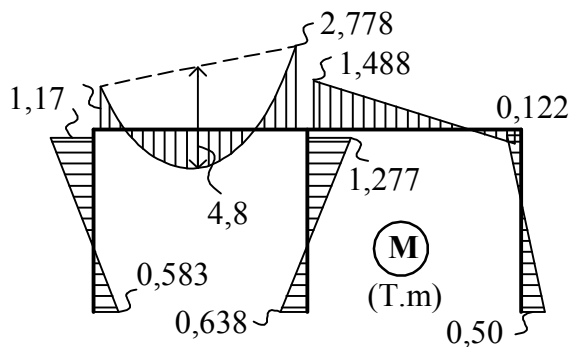
6. Xác định mômen uốn tại các đầu thanh của hệ ban đầu:

Đầu thanh	AD	BE	DA	DE	ED	EB	EF	FE	FC	CF
M_p^o	-0,695	0,489	-1,395	1,395	-2,629	0,98	1,637	0,328	-0,325	-0,162
\bar{M}_1	0,348	0,461	0,696	-0,688	-0,461	0,921	-0,462	-0,687	0,659	0,348
$\bar{M}_1.k_1$	0,112	0,149	0,225	-0,222	-0,149	0,297	-0,149	-0,222	0,213	0,112
M_{cc}	-0,583	0,638	-1,170	1,173	-2,778	1,277	1,488	0,106	-0,112	-0,50

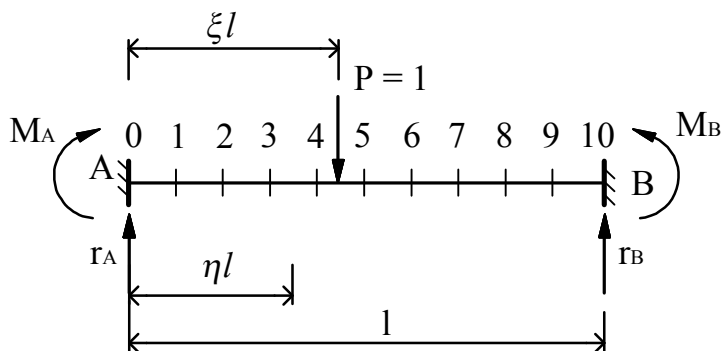
B.9.1.5 Bảng xác định mômen trên hệ.

Sau khi đã xác định được mômen uốn tại các đầu thanh, ta có thể vẽ được biểu đồ (M). Xem hình (H.9.1.8f).

Sau khi đã vẽ được biểu đồ (M), tiến hành biểu đồ lực cắt (Q) và lực dọc theo nguyên tắc đã biết.



H.9.1.8f



$$M_A = -\xi(1 - \xi)^2 l; \quad M_B = -\xi^2(1 - \xi) l$$

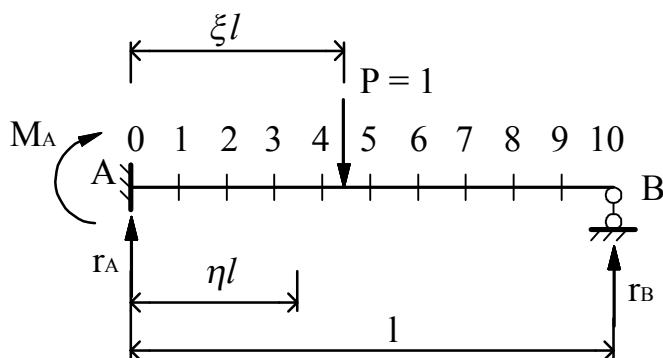
$$r_A = (1 - \xi)^2(1 + 2\xi); \quad r_B = \xi^2(3 - 2\xi) l$$

$$M_k = (1 - \xi)^2[\eta(1 + 2\xi) - \xi] l \quad \text{khi } \eta \leq \xi$$

$$M_k = \xi^2[(1 - \eta)(3 - 2\xi) - (1 - \xi)] l \quad \text{khi } \eta \geq \xi$$

ξ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
Mômen uốn tại tiết diện $\eta =$	0,0	0	-0,0810.1	-0,1280.1	-0,1470.1	-0,1440.1	-0,1250.1	-0,0960.1	-0,0630.1	-0,0320.1	-0,0090.1	0
	0,1	0	0,08092.1	-0,0384.1	-0,0686.1	-0,0792.1	-0,0750.1	-0,0608.1	-0,0414.1	-0,0216.1	-0,0062.1	0
	0,2	0	0,0134.1	0,0512.1	0,0118.1	-0,0144.1	-0,0250.1	-0,0256.1	-0,0198.1	-0,0112.1	-0,0034.1	0
	0,3	0	0,0106.1	0,0408.1	0,0882.1	0,0504.1	0,0250.1	0,0096.1	0,0234.1	-0,0008.1	-0,0006.1	0
	0,4	0	0,0078.1	0,0302.1	0,0666.1	0,1152.1	0,0750.1	0,0448.1	0,0018.1	0,0096.1	0,0022.1	0
	0,5	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,0800.1	0,0450.1	0,0200.1	0,0050.1	0
	0,6	0	0,0022.1	0,0096.1	0,0234.1	0,0448.1	0,0750.1	0,1152.1	0,0666.1	0,0302.1	0,0078.1	0
	0,7	0	-0,0006.1	-0,0008.1	0,0018.1	0,0096.1	0,0250.1	0,0504.1	0,0882.1	0,0408.1	0,0106.1	0
	0,8	0	-0,0034.1	-0,0112.1	0,0198.1	-0,0256.1	-0,0250.1	-0,0144.1	0,0118.1	0,0512.1	0,0134.1	0
	0,9	0	-0,0062.1	-0,0216.1	0,0414.1	-0,0608.1	-0,0750.1	-0,0792.1	-0,0686.1	-0,0384.1	0,0892.1	0
	1,0	0	-0,0090.1	-0,0320.1	0,0630.1	-0,0960.1	-0,1250.1	-0,1400.1	-0,1470.1	-0,1284.1	-0,0810.1	0

B.6.5.1



$$M_A = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)(2-\xi)l ; \quad M_B = 0$$

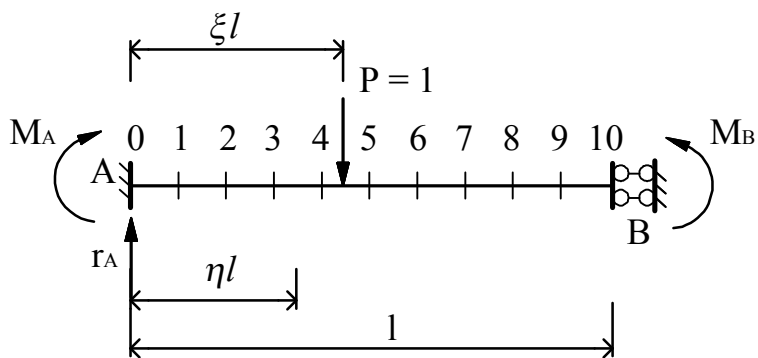
$$r_A = \frac{1}{2}(2-3\xi^2+\xi^3) ; \quad r_B = \frac{1}{2}\xi^2(3-\xi)l$$

$$M_k = \frac{1}{2}\xi^2(3-\xi)(1-\eta)l - (\xi-\eta)l \quad \text{khi } \eta \leq \xi$$

$$M_k = \frac{1}{2}\xi^2(3-\eta)(1-\eta)l \quad \text{khi } \eta \geq \xi$$

ξ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
Mômen uốn tại tiết diện $\eta =$	0,0	0	-0,08550.1	-0,1440.1	-0,17850.1	-0,1920.1	-0,18750.1	-0,1680.1	-0,13650.1	-0,0960.1	-0,04950.1	0
	0,1	0	0,01305.1	-0,0496.1	-0,09065.1	-0,1128.1	-0,11875.1	-0,1112.1	-0,09285.1	-0,0664.1	-0,03455.1	0
	0,2	0	0,01160.1	0,0448.1	-0,00280.1	-0,0336.1	-0,05000.1	-0,0544.1	-0,04920.1	-0,0368.1	-0,01960.1	0
	0,3	0	0,01015.1	0,0392.1	0,08505.1	0,0456.1	0,01875.1	0,0024.1	-0,00550.1	-0,0072.1	-0,00465.1	0
	0,4	0	0,00780.1	0,0336.1	0,07290.1	0,1248.1	0,08750.1	0,0592.1	0,03810.1	0,0224.1	0,01030.1	0
	0,5	0	0,00725.1	0,0280.1	0,06075.1	0,1040.1	0,15625.1	0,1160.1	0,08175.1	0,0520.1	0,02525.1	0
	0,6	0	0,00580.1	0,0224.1	0,04860.1	0,0832.1	0,12500.1	0,1728.1	0,12540.1	0,0816.1	0,04020.1	0
	0,7	0	0,00435.1	0,0168.1	0,03645.1	0,0624.1	0,09735.1	0,1296.1	0,16905.1	0,1112.1	0,05515.1	0
	0,8	0	0,00290.1	0,0112.1	0,02130.1	0,0416.1	0,06250.1	0,0864.1	0,11270.1	0,1408.1	0,07010.1	0
	0,9	0	0,00145.1	0,0056.1	0,01215.1	0,0208.1	0,03125.1	0,0432.1	0,05635.1	0,0704.1	0,08505.1	0
	1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

B.6.5.2



$$M_A = -\frac{1}{2}\xi(2-\xi)l ; \quad M_B = \frac{1}{2}\xi^2l$$

$$r_A = 1; \quad r_B = 0$$

$$M_k = -\frac{1}{2}\xi(2-\xi)l + \eta l \quad \text{khi } \eta \leq \xi$$

$$M_k = \frac{1}{2}\xi^2l \quad \text{khi } \eta \geq \xi$$

ξ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
Momen uốn tại tiết diện $\eta =$	0,0	0	-0,0950.1	-0,1800.1	-0,2550.1	-0,3200.1	-0,3750.1	-0,4200.1	-0,4550.1	-0,4800.1	-0,4950.1	-0,50.1
	0,1	0	0,0050.1	-0,0800.1	-0,1550.1	-0,2200.1	-0,2750.1	-0,3200.1	-0,3550.1	-0,3800.1	-0,3950.1	-0,40.1
	0,2	0	0,0050.1	0,0200.1	-0,0550.1	-0,1200.1	-0,1750.1	-0,2200.1	-0,2550.1	-0,2800.1	-0,2950.1	-0,30.1
	0,3	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	-0,0200.1	-0,0750.1	-0,1200.1	-0,1500.1	-0,1800.1	-0,1950.1	-0,20.1
	0,4	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,0250.1	-0,0200.1	0,0550.1	-0,0800.1	-0,0950.1	-0,10.1
	0,5	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,0800.1	0,0450.1	0,0200.1	0,0050.1	0,00
	0,6	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,1450.1	0,1200.1	0,1050.1	0,10.1
	0,7	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,2450.1	0,2200.1	0,2050.1	0,20.1
	0,8	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,2450.1	0,3200.1	0,3050.1	0,30.1
	0,9	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,2450.1	0,3200.1	0,4050.1	0,40.1
	1,0	0	0,0050.1	0,0200.1	0,0450.1	0,0800.1	0,1250.1	0,1800.1	0,2450.1	0,3200.1	0,4050.1	0,50.1

B.6.5.3

TRẦN CÔNG NGHỊ

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP
LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI
VÀ
CƠ HỌC KẾT CẤU

(TÀI LIỆU HỌC TẬP DÀNH CHO SINH VIÊN
KHOA ĐÓNG TÀU VÀ CÔNG TRÌNH NỔI)

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH 6 – 2009
ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI TP HỒ CHÍ MINH

Trang này để trống

Chương 1

LÝ THUYẾT ĐÀN HỒI

Tóm tắt

Phương trình cân bằng:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

trong đó X, Y, Z – lực khối.

Phương trình biến dạng:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \gamma_{zx} &= \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Điều kiện tương hợp (liên tục):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z} \end{aligned} \right\} \text{ và } \left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Công thức chuyển của tensor ứng suất. Nếu ký hiệu ma trận các cosin góc giữa hai hệ trục là [c], tensor ứng suất điểm trong hệ tọa độ Oxyz là [σ], tensor ứng suất trong hệ tọa độ mới [σ*] tính theo công thức:

$$[\sigma^*] = [c][\sigma][c]^T \quad (1.4)$$

$$\text{với } [c] = \begin{bmatrix} c_{xx^*} & c_{xy^*} & c_{xz^*} \\ c_{yx^*} & c_{yy^*} & c_{yz^*} \\ c_{zx^*} & c_{zy^*} & c_{zz^*} \end{bmatrix}; \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Ứng suất chính xác định từ phương trình:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)k + \tau_{yx}l + \tau_{zx}m &= 0 \\ \tau_{xy}k + (\sigma_y - \sigma)l + \tau_{zy}m &= 0 \\ \tau_{xz}k + \tau_{yz}l + (\sigma_z - \sigma)m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

hoặc dưới dạng ma trận:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ l \\ m \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (1.6)$$

trong đó tổng bình phương các cosin bằng đơn vị $k^2 + l^2 + m^2 = 1$. Lời giải hệ phương trình:

$$\sigma^3 - \sigma^2 J_1 + \sigma J_2 - J_3 = 0. \quad (1.7)$$

trong đó $J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$$J_2 = \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y - \tau_{yx}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 \quad (1.8)$$

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{xz} - \tau_{xy}^2 \sigma_z - \tau_{yz}^2 \sigma_x - \tau_{zx}^2 \sigma_y \quad (1.9)$$

Các đại lượng J_1 , J_2 , J_3 được gọi *bất biến* thứ nhất, *bất biến* thứ hai, và *bất biến* thứ ba của tenso ứng suất.

Trường hợp ứng suất phẳng, trong hệ tọa độ xOy ứng suất chính tính theo công thức:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.10)$$

Hướng trục ứng suất chính tính từ công thức:

$$\operatorname{tg} 2\theta_n = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1.11)$$

Ứng suất cắt lớn nhất:

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1.12)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_s = 2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}} \quad (1.13)$$

Vòng tròn Mohr xây dựng từ phương trình:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \quad (1.14)$$

Định luật Hooke áp dụng cho vật liệu đẳng hướng với mô đun đàn hồi E, hệ số Poisson ν .

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\} \text{ và } \left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

trong đó $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (1.16)

Nếu ký hiệu: $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ có thể viết:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_y \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_z \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

trong đó $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ mang tên gọi hằng số Lamé.

Hàm ứng suất Airy $\Phi(x,y)$: $\nabla^4 \Phi(x,y) = 0$.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y};$$

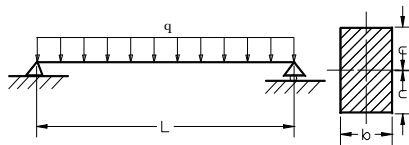
Ví dụ 1: Thành lập hàm ứng suất cho dầm dài L, hình 1.1, mặt cắt ngang hình chữ nhật cạnh đứng 2c, chiều rộng b, chịu tác động tải phân bố đều $q = \text{const}$.

Điều kiện biên như sau:

a) Tại $x = 0$:

$$\sigma_x = 0; \quad \tau_{xy} = 0.$$

b) Tại $x = L$:



Hình 1.1

$$\left. \begin{aligned} \int_{-c}^c \tau_{xy} b dy &= qL \\ \int_{-c}^c \sigma_x b dy &= 0 \\ \int_{-c}^c \sigma_x y b dy &= \frac{1}{2} qL^2 \end{aligned} \right\}$$

c) Tại $y = c$:

$$\sigma_y = -\frac{q}{b}; \quad \tau_{xy} = 0$$

d) Tại $y = -c$:

$$\sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0.$$

Những nhận xét ban đầu:

- Điều kiện đầu tiên của a) trong trường hợp cụ thể không thể thỏa mãn.

- Từ tính chất đối xứng của mặt cắt ngang và $\sigma_y = -\frac{q}{b}$ tại $y = c$ và $\sigma_y = 0$ tại $y = -c$, có

thể rút ra σ_y sẽ là hàm lẻ của y .

- Hàm σ_x cũng là hàm lẻ của y .

Hàm Airy nên viết dưới dạng:

$$\Phi = Axy + Bx^2 + Cx^2y + Dy^3 + Exy^3 + Fx^2y^3 + Gy^5$$

$$\text{Có thể thấy rằng: } \nabla^4 \Phi(x,y) = 24Fy + 120Gy = 0.$$

Từ phương trình cuối suy ra $F = -5G$.

Ứng suất tính theo công thức sau:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 6Dy + 6Exy - 30Gx^2y + 20Gy^3$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2B + 2Cy + 10Gy^3$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -(A + 2Cx + 3Ey^2 - 30Gxy^2)$$

Từ công thức tính τ_{xy} có thể viết:

Thỏa mãn điều kiện $\tau_{xy} = 0$ tại $x = 0$: $A + 3Ey^2 = 0$, từ đó $A = E = 0$.

Thỏa mãn $\tau_{xy} = 0$ tại $y = \pm c$ có thể thấy:

$$0 = -(2Cx - 30Gc^2x), \text{ hay là } C = 15Gc^2.$$

Giải phương trình xác định σ_y , thỏa mãn điều kiện biên cho phép xác định B, G:

$$-\frac{q}{b} = 2B + 30Gc^3 - 10Gc^3 = 2B + 20Gc^3$$

$$0 = 2B - 30Gc^3 + 10Gc^3 = 2B - 20Gc^3$$

Từ đó có thể nhận được:

$$B = -\frac{q}{4b}; \quad G = -\frac{q}{40bc^3}$$

Biết rằng momen quán tính mặt cắt ngang tính bằng $I = \frac{2}{3}bc^3$, biểu thức của B và G sẽ có dạng:

$$B = -\frac{qc^3}{6I}; \quad G = -\frac{q}{60I}$$

$$\text{Hằng C tính theo G sẽ là: } C = 15Gc^2 = -\frac{(qc^2)}{(4I)}$$

Từ phương trình xác định σ_x có thể viết:

$$\sigma_x = 6Dy + 6Exy - 30Gx^2y + 20Gy^3 = 6Dy + \frac{q}{2I}x^2y - \frac{q}{3I}y^3$$

Thay biểu thức cuối vào điều kiện biên tại $x = L$ có thể thấy:

$$\int_{-c}^{+c} \left(6Dy + \frac{q}{2I}x^2y - \frac{q}{3I}y^3 \right) y b dy = \frac{1}{2} qL^2$$

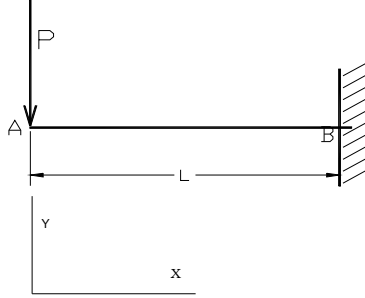
$$\text{Từ đó có thể viết: } D = \frac{qc^2}{30I}$$

Trường ứng suất có dạng sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{q}{10I} (5x^2 + 2c^2)y - \frac{q}{3I} y^3 \\ \sigma_y &= -\frac{q}{6I} (2c^3 + 3c^2y - y^3) \\ \tau_{xy} &= \frac{q}{2I} x(c^2 - y^2) \end{aligned} \right\}$$

Ví dụ 2: Phương trình chuyển vị dầm trình bày tại hình 1.2 có dạng:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{Py}{6EJ} (6Lx - 3x^2 - \nu y^2) \\ v(x, y) &= -\frac{P}{6EJ} [3Lx^2 - x^2 - 3\nu y^2(L - x)] \end{aligned} \right\}$$



Hình 1.2

Xác định chuyển vị điểm tại trục $y = 0$ và xác định trường ứng suất.

Chuyển vị theo phương thẳng đứng tại $y = 0$:

$$v(x,0) = -\frac{P}{6EJ}(3Lx^2 - x^3) = -\frac{Px^2}{6EJ}(3L - x)$$

Góc xoay dầm tính theo công thức $\theta_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$, mang dạng sau:

$$\theta_{xy} = \frac{1}{2} \left[-\frac{P}{6EJ}(6Lx - 3x^2 - 3uy^2) - \frac{P}{6EJ}(6Lx - 3x^2 - 3uy^2) \right] = -\frac{P}{6EJ}(6Lx - 3x^2 - 3uy^2)$$

Tại $y = 0$ góc xoay sẽ là:

$$\theta_{xy}(x,0) = -\frac{P}{6EJ}(6Lx - 3x^2)$$

Biến dạng trong dầm tính theo:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{P}{EJ}(L - x)y; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\nu P}{EJ}(L - x)y$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$-\frac{P}{6EJ}(6Lx - 3x^2 - 3uy^2) + \frac{P}{6EJ}(6Lx - 3x^2 - 3uy^2) = 0$$

Trường ứng suất tính theo cách sau:

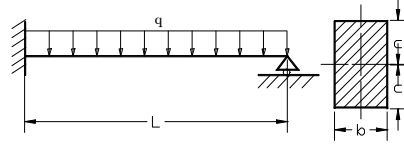
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{P}{EJ}(L-x)y - \frac{\nu^2 P}{EJ}(L-x)y \right] = \frac{P}{J}(L-x)y \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[-\frac{\nu P}{EJ}(L-x)y + \frac{\nu P}{EJ}(L-x)y \right] = 0 \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Ví dụ 3: Sử dụng phương trình cân bằng trong “lý thuyết đàn hồi” thành lập hàm ứng suất σ_y , τ_{xy} dầm, tiết diện dầm hình chữ nhật $2c \times b$, trong đó b – chiều rộng dầm, $2c$ – chiều cao dầm, chịu tải trọng phân bố đều cường độ $q(x) = \text{const}$.

Ứng suất σ_x tính tại mặt cắt bất kỳ của dầm, tại vị trí x , tính theo công thức:

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{J} y \quad (\text{a})$$

trong đó $M = -\frac{1}{2}qx^2$ (b)



Hình 1.3

Nếu bỏ qua trọng lượng bản thân, lực khối dầm sẽ không được nhắc tới. Từ phương trình cân bằng đầy đủ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_{Bx} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_{By} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{có thể viết:} \quad (\text{c})$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{q}{J} xy \quad (\text{d})$$

Tiến hành tích phân phương trình đạo hàm riêng này sẽ nhận được:

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{2J} xy^2 = f(x) \quad (\text{e})$$

Để ý rằng, trường hợp không có ứng suất cắt tại mép trên và mép dưới của dầm, $\tau_{xy} = 0$ tại $y = c$ và $y = -c$, hàm $f(x)$ sẽ phải là:

$$f(x) = \frac{qc^2}{2J} x \quad (\text{f})$$

Từ đây có thể viết: $\tau_{xy} = -\frac{q}{2J} x(c^2 - y^2)$ (g)

Từ phương trình thứ hai của (c) với $F_{By} = 0$ có thể viết:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{q}{2J} (c^2 - y^2)$$

Sau tích phân có thể nhận được:

$$\sigma_y = -\frac{q}{6J} y(3c^2 - y^2) + F(x) \quad (\text{h})$$

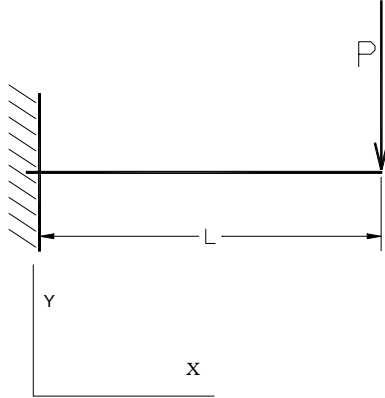
Điều kiện biên tại $y = c$: $\sigma_y = -\frac{q}{b}$. Momen quán tính qua trục trung hòa mang giá trị $J = \frac{b(2c)^3}{12}$.

Từ đây xác định $F(x) = -\frac{qc^3}{3J}$

Hàm σ_y giờ có thể viết:

$$\sigma_y = -\frac{q}{6J}(2c^3 + 3c^2y - y^3)$$

Ví dụ 4: Dùng phương trình từ điều kiện tương hợp (liên tục) xác định chuyển vị trong mặt phẳng xOy dầm công xôn nêu tại ví dụ 2. Mặt cắt dầm trong trường hợp này là hình chữ nhật, dày, độ cứng EJ, hệ số Poisson ν .



Hình 1.4

Momen uốn dầm tính theo công thức:

$$M = -P(L - x) \quad 0 < x < L \quad (a)$$

Các hàm ứng suất tính theo công thức quen thuộc sau:

$$\sigma_x = -\frac{M}{J}y = \frac{P}{J}y(L - x) \quad (b)$$

$$\sigma_y = 0;$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Từ định luật Hooke có thể viết các phương trình biến dạng:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{P}{EJ}y(L - x)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = -\frac{\nu P}{EJ}y(L - x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} = 0 \quad (c)$$

Quan hệ biến dạng - chuyển vị cho phép viết:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{P}{EJ}y(L - x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = -\frac{\nu P}{EJ}y(L - x) \quad (d)$$

Tiến hành tích phân hai phương trình đạo hàm riêng dạng (d) có thể nhận được:

$$u = \frac{P}{2EJ} xy(2L - x) + f(y)$$

$$v = -\frac{\nu P}{2EJ} y^2(L - x) + F(x)$$

Hàm f(y) là hàm chỉ của y, hàm F(x) chỉ của x.

Sau tích phân, tiến hành thay vào hàm biến dạng góc $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ chúng ta có thể viết:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\nu P}{2EJ} y^2 + \frac{\partial F(x)}{\partial x} + \frac{P}{2EJ} x(2L - x) + \frac{\partial f(y)}{\partial y}$$

Thay biểu thức cuối vào (c) sẽ nhận được phương trình:

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} + \frac{P}{2EJ} x(2L - x) = \frac{\partial f(y)}{\partial y} - \frac{\nu P}{2EJ} y^2 \quad (e)$$

Phương trình (e) chỉ thỏa mãn khi cả hai vế là const, ví dụ cả hai bằng C_1 .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(x)}{\partial x} + \frac{P}{2EJ} x(2L - x) &= C_1 \\ \frac{\partial f(y)}{\partial y} - \frac{\nu P}{2EJ} y^2 &= -C_1 \end{aligned} \right\}$$

Giải hệ phương trình này có thể viết:

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= -\frac{P}{6EJ} x^2(3L - x) + C_1 x + C_2 \\ f(y) &= -\frac{\nu P y^3}{6EJ} - C_1 y + C_3 \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

Hàm u và v giờ đây có dạng:

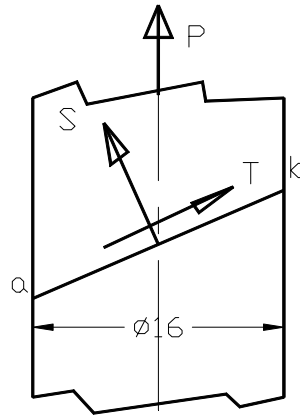
$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{P}{2EJ} xy(2L - x) - \frac{\nu P}{6EJ} y^3 - C_1 y + C_3 \\ v &= -\frac{\nu P y^2}{6EJ} (L - x) - \frac{P}{6EJ} x^2(3L - x) + C_1 x + C_2 \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

Thỏa mãn điều kiện biên sau đây: tại $x = y = 0$: $u = v = \theta_{xy} = 0$, các hằng số phải là $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Từ đó có thể viết:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{P}{2EJ} xy(2L - x) - \frac{\nu P}{6EJ} y^3 \\ v &= -\frac{\nu P}{2EJ} y^2(L - x) - \frac{P}{6EJ} x^2(3L - x) \end{aligned} \right\}$$

Ví dụ 5: Cho trục thép tròn đường kính $\phi 16\text{mm}$, chịu lực kéo dọc trục $P = 40\text{kN}$. Lực P gây ứng suất cắt τ tại mặt cắt ab , giá trị của τ bằng 60% ứng suất pháp σ tại mặt ab đó. Xác định góc nghiêng mặt ab .

Lời giải:



Hình 1.5

Ứng suất pháp tính tại tiết diện trục thép tròn:

$$\sigma_0 = \frac{P}{\pi d^2 / 4} = \frac{40000}{\pi \cdot 16^2 / 4} = 200\text{MPa}$$

Ứng suất tính tại mặt cắt xiên ab :

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 \cos^2 \alpha \\ \tau &= \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha \end{aligned} \right\}$$

Từ điều kiện đề ra $\tau = 0,6\sigma$ hay là $\sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha = 0,6 \sigma_0 \cos^2 \alpha$ có thể viết:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = 0,6$$

Từ đó có thể xác định $\alpha = 31^\circ$.

Ví dụ 6: Trạng thái ứng suất tại điểm P biểu diễn bằng tensor ứng suất:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 10 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{bmatrix} \text{MPa}.$$

Xác định ứng suất pháp và ứng suất tiếp tại mặt qua điểm, song song với mặt miêu tả bằng phương trình $2x - y + 3z = 9$.

Lời giải:

Cosin pháp tuyến mặt $2x - y + 3z - 9 = 0$ tính như sau:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}} \\ l &= \frac{(-1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{-1}{\sqrt{14}} \\ m &= \frac{3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Ứng suất pháp tính theo công thức:

$$\sigma = \sigma_x k^2 + \sigma_y l^2 + \sigma_z m^2 + 2\tau_{xy} kl + 2\tau_{yz} lm + 2\tau_{zx} mk \quad (b)$$

trong đó, từ tensor ứng suất đọc được $\sigma_x = 14$, $\sigma_y = 10$, $\sigma_z = 35$; $\tau_{xy} = 7$, $\tau_{zx} = -7$, $\tau_{yz} = 0$. Kết quả ứng suất pháp, tính theo (b) sẽ là $\sigma = 19,21$ MPa.

Ứng suất tiếp tính theo công thức:

$$\tau^2 = (\sigma_x k + \tau_{xy} l + \tau_{zx} m)^2 + (\tau_{xy} k + \sigma_y l + \tau_{zx} m)^2 + (\tau_{zx} k + \tau_{yz} l + \sigma_z m)^2 - \sigma^2 \quad (c)$$

Sau khi thay các giá trị ứng suất và k , l , m vào vế phải phương trình (c), ứng suất tiếp được tính như sau:

$$\tau = 14,95 \text{ MPa.}$$

Ví dụ 7: Trạng thái ứng suất tại điểm P, ghi trong hệ tọa độ Oxyz như sau:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -8 & 6 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Tính trạng thái ứng suất này trong hệ tọa độ Ox'y'z', qua hai bước: lần đầu trục Oz xoay góc $\theta = 45^\circ$, sau đó hệ trục vừa hình thành xoay quay trục Ox góc $\phi = 30^\circ$.

Lời giải:

Sau lần xoay quanh trục Oz, hệ tọa độ mới có mối liên hệ với hệ tọa độ Oxyz theo quan hệ:

$$\begin{cases} x'' \\ y'' \\ z'' \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}, \text{ với } \theta = 45^\circ$$

Lần xoay hệ trục sau thể hiện bằng quan hệ:

$$\begin{cases} x' \\ y' \\ z' \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{cases} x'' \\ y'' \\ z'' \end{cases}, \text{ với } \phi = 30^\circ$$

Từ đó:

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \theta & 0 \\ -\sin \phi \cos \phi & \cos \phi \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi \sin \phi & -\cos \phi \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [C_x] \{X\},$$

Công thức tính chuyển ứng suất từ hệ tọa độ Oxyz sang hệ tọa độ O'x'y'z' có dạng:
 $\sigma'_{ij} = [C_x] \sigma_{ij} [C_x]^T$

Sau khi thay $\theta = 45^\circ$, $\phi = 30^\circ$ các thành phần ma trận $[C_x]$ tính như sau:

$$[C_x] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Các thành phần ứng suất điểm đang xét trong hệ tọa độ O'x'y'z' sẽ là:

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= -8 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (-5) \times 0 + 2 \times 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \times 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 0 + \\ &+ 2 \times (-2) \times 0 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4MPa \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} &= -8 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right) + 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) + (-5) \times 0 \times \frac{1}{2} + 6 \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \right] \\ &+ 2 \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{1}{2} + 0 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \right] - 2 \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{1}{2} + 0 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \right] = 5,20MPa \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{z'x'} &= -8 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + (-5) \times 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 6 \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \right] \\ &+ 2 \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \right] - 2 \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \right] = -3MPa \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{y'} &= -8 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + (-5) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times 6 \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \frac{\sqrt{6}}{4} + \\ &+ 2 \times (-2) \times \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \frac{1}{2} + 2 \times (-2) \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \frac{1}{2} = -4,8MPa \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{y'z'} &= -8 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right) + 4 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) + (-5) \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 6 \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) \right] \\ &+ 2 \left[\left(\frac{\sqrt{6}}{4} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right] - 2 \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \right] = 2,71 \text{ MPa} \\ \sigma_{z'} &= -8 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 - 5 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 \times 6 \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right) + \\ &+ 2 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) + 2 \times (-2) \times \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) = -8,2 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Kết quả tính như sau:

$$\sigma_{ij}' = \begin{bmatrix} 4 & 5,2 & -3 \\ 5,2 & -4,8 & 2,7 \\ -3 & 2,7 & -8,2 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Ví dụ 8: Xác định trục chính và ứng suất chính phần tử chịu tác động ứng suất sau: $\sigma_x = 500 \text{ kG/cm}^2$, $\sigma_y = 300 \text{ kG/cm}^2$, $\tau_{xy} = 100 \text{ kG/cm}^2$.

Lời giải:

Công thức tính ứng suất chính:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Thay các giá trị đã cho vào biểu thức trên sẽ nhận được:

$$\sigma_1 = \frac{500 + 300}{2} + \sqrt{\left(\frac{500 - 300}{2} \right)^2 + 100^2} = 400 + 141,4 = 541,4 \text{ kG/cm}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{500 + 300}{2} - \sqrt{\left(\frac{500 - 300}{2} \right)^2 + 100^2} = 400 - 141,4 = 258,6 \text{ kG/cm}^2;$$

Góc nghiêng trục chính so với trục Ox, Oy tính theo công thức:

$$\text{tg} 2\theta = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Trường hợp này $\text{tg} 2\theta = -1$ và do vậy $2\theta = -45^\circ$; $\theta = -22 \frac{1}{2}^\circ$

Ví dụ 9: Biết trước giá trị biến dạng điểm trong mặt phẳng 2D sau đây:

$$\epsilon_x = 0,002; \quad \epsilon_y = -0,001; \quad \gamma_{xy} = 0,003.$$

Xác định hướng chính và biến dạng chính.

Lời giải:

Góc xoay hướng chính tính theo công thức:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{2(0,003)}{(0,002) - (0,001)} = 2$$

Từ đó: $2\theta = 63,4^\circ$ và $243,4^\circ$

$$\theta = 31,7^\circ \quad \text{và} \quad (31,7 + 90)^\circ$$

Biến dạng chính:

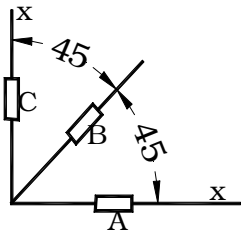
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta + \gamma_{xy} \sin 2\theta \\ \varepsilon_{y'} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\theta - \gamma_{xy} \sin 2\theta \end{aligned} \right\}$$

Sau thay thế bằng số công thức cuối có dạng:

$$\varepsilon_{x'} = 0,00385 \quad \text{và} \quad \varepsilon_{y'} = -0,00285.$$

Ví dụ 9: Bộ cảm biến dạng *rectangular rosette*, ba cảm biến bố trí trong nhánh $\frac{1}{4}$ vòng tròn, góc giữa chúng 45° , hình 1.6, ghi nhận biến dạng điểm đo như sau: $\varepsilon_x = 200\mu$; $\varepsilon_{45} = 900\mu$; $\varepsilon_y = 1000\mu$

Xác định giá trị và hướng ứng suất chính, giá trị ứng suất cắt lớn nhất tại điểm đo. Biết rằng $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,285$.



Hình 1.6

Lời giải:

Biến dạng góc tính từ công thức:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - \varepsilon_x - \varepsilon_y = 2 \times 900 - 200 - 1000 = 600\mu$$

Ứng suất tại điểm tính từ quan hệ biến dạng – ứng suất:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = \frac{200 \cdot 10^9}{1-(0,285)^2} [200 + 0,285 \times 1000 \cdot 10^{-6}] = 105,6 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{200 \cdot 10^9}{1-(0,285)^2} [1000 + 0,285 \times 200 \cdot 10^{-6}] = 230,1 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

Ứng suất tiếp:

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200.10^9}{2(1+0,285)} 600.10^{-6} = 46,7.10^6 \text{ N/m}^2$$

Góc xoay hướng chính tính theo công thức:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{2(600.10^{-6})}{(200.10^{-6}) - (1000.10^{-6})} = -1,5$$

Từ đó: $\theta = -18,4^\circ$ và $71,6^\circ$

Ứng suất pháp tính theo công thức:

Với $\theta = -18,4^\circ$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin \theta = 90,0 \text{ MPa}$$

Có thể viết: $\sigma_2 = 90,0 \text{ MPa}$.

Trường hợp $\theta = 71,6^\circ$ tính được $\sigma_1 = 245,7 \text{ MPa}$.

Ứng suất tiếp lớn nhất, tính cho trường hợp trạng thái ứng suất phẳng, $\sigma_3 = 0$:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{245,7 - 0}{2} = 122,8 \text{ MPa}$$

Ví dụ 10:

Tấm đua-ra dày $t = 2 \text{ mm}$ được kẹp bằng 4 kẹp cứng tại bốn mép. Các kẹp nối với nhau bằng khớp xoay. Tại vị trí C đặt lực $P = 25 \text{ kN}$, hình 1.7

Xác định:

- Thay đổi góc γ các góc tấm,
- Chuyển vị Δc theo chiều đứng,
- Ứng suất chính trong tấm,
- Thay đổi chiều dài AC và BD.

Biết rằng $E = 7.10^4 \text{ MPa}$; $\nu = 0,34$.

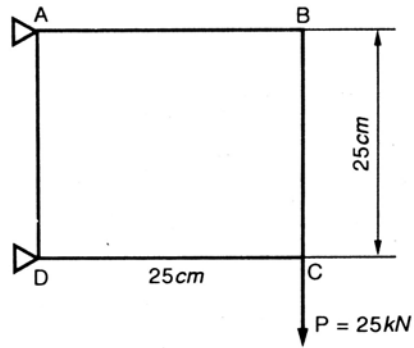
Lời giải:

Tải trọng P phải cân bằng lực cắt cạnh BC, bắt tấm chịu cắt thuần túy.

$$P = \tau \cdot A = \tau \cdot t \cdot l$$

Từ đó có thể tính:

$$\tau = \frac{2,5.10^4}{2.10^{-3} \cdot 0,25} = 5.10^7 \text{ Pa} = 50 \text{ MPa}$$



Hình 1.7

$$G = \frac{7 \cdot 10^{10}}{2(1 + 0,34)} = 2,6 \cdot 10^{10} \text{ Pa} = 2,6 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

Biến dạng góc tính bằng công thức $\gamma = \frac{\tau}{G} = 1,92 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

$$\Delta_C = \gamma \cdot l = 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,48 \text{ mm}$$

Ứng suất chính:

$$\sigma_1 = \tau = 50 \text{ MPa};$$

$$\sigma_2 = -\tau = -50 \text{ MPa};$$

Thay đổi chiều dài đoạn AB và BD:

$$\Delta l_{AC} = \varepsilon_1 l_{AC} = \frac{l_{AC}}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) = 0,338 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{BD} = -0,338 \text{ mm}$$

Bài tập

1. Xác định biến dạng trong lòng vật thể thỏa mãn phương trình chuyển vị:

$$u = A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2$$

$$v = A_2x^2 + B_2y^2 + C_2z^2$$

$$w = A_3x^2 + B_3y^2 + C_3z^2$$

$A_i, B_i, C_i, i = 1, 2, 3$ là const

Biến dạng này có thỏa mãn điều kiện tương thích hay không?

2. Biến dạng đo được biểu diễn bằng các hàm sau:

$$\varepsilon_x = A(x^2 + z^2); \quad \varepsilon_y = 0; \quad \varepsilon_z = Az^2$$

$$\gamma_{yz} = 0; \quad \gamma_{zx} = 2Axz; \quad \gamma_{xy} = 0;$$

Xác định chuyển vị tương ứng.

3. Trong ví dụ 3 chúng ta đã không xét đến ảnh hưởng lực cắt. Bài toán đang nêu tại hình 1.2 này được xem xét đầy đủ hơn, tính đến ảnh hưởng lực cắt. Mặt cắt ngang dầm hình chữ nhật, cạnh đứng 2c. Chuyển vị dầm được miêu tả bằng hàm u và v dạng sau:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{Py}{6EJ} \times [3xy(2L-x) - 3(1+\nu)c^2y + (2+\nu)y^3] \\ v(x, y) &= -\frac{P}{6EJ} \times [3y^2(L-x) - x^2(3L-x) + 3(1+\nu)c^2x] \end{aligned} \right\}$$

Xác định $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ của dầm. Xây dựng hàm $v(x, 0)$ và $\theta(x, 0)$.

4. Dầm ngắn chịu nén, chịu ứng suất pháp -100MPa , ứng suất tiếp 40MPa . Xác định góc nghiêng mặt tính toán, so với trục dầm. Tính ứng suất pháp và ứng suất cắt lớn nhất.

5. Biết rằng tấm thép hình vuông chịu ứng suất như sau: $\sigma_x = 150\text{MPa}$, $\sigma_y = 50\text{MPa}$. Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt ab nghiêng góc $-\alpha$ so với Ox.

6. Tấm hình chữ nhật kích thước $300 \times 100\text{mm}$ dày $t = 10\text{mm}$, chịu tác động ứng suất: $\sigma_x = 120\text{MPa}$, $\sigma_y = 60\text{MPa}$. Tính thay đổi kích thước tấm do biến dạng. Mô đun đàn hồi vật liệu $2 \cdot 10^5\text{MPa}$, hệ số Poisson $\nu = 0,25$.

7. Phần tử hình vuông chịu ứng suất: $\sigma_x = -200\text{MPa}$, $\sigma_y = 100\text{MPa}$, $\tau_{xy} = -120\text{MPa}$. Xác định hướng trục chính, ứng suất chính.

8. Trạng thái ứng suất phẳng tại điểm biểu thị trong hệ tọa độ xOy như sau:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} \text{ MPa}$$

Xác định giá trị các thành phần ứng suất của điểm trong hệ tọa độ $x'Oy'$ xoay theo chiều kim đồng hồ 45° . Giải bằng hai cách: (1) sử dụng công thức chuyển và (2) sử dụng vòng tròn Mohr.

9. Trạng thái ứng suất xác định như sau: $\sigma_x = 14\text{MPa}$, $\sigma_y = -10\text{MPa}$, $\tau_{xy} = 5\text{MPa}$. Xác định ứng suất chính, trục chính.

10. Trạng thái ứng suất xác định như sau: $\sigma_x = 14 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -10 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -5 \text{ MPa}$. Xác định ứng suất chính, trục chính.

11. Trạng thái ứng suất xác định như sau: $\sigma_x = -14 \text{ MPa}$, $\sigma_y = +10 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -5 \text{ MPa}$. Xác định ứng suất chính, trục chính.

12. Ứng suất tại điểm trong lòng vật thể mang giá trị thể hiện tại tensor ứng suất:
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Xác định trục chính, ứng suất chính và giá trị lớn nhất ứng suất cắt.

13. Khối sáu mặt làm từ nhôm chịu tác động các ứng suất sau: $\sigma_x = -40 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_z = 60 \text{ MPa}$.

Xác định:

- Ứng suất cắt lớn nhất.
- Ứng suất bất diện σ_{oct} .
- Ứng suất bất diện τ_{oct} .
- Thế năng đơn vị u_0 do biến dạng khối vật liệu.

Mô đun đàn hồi vật liệu $E = 7.104 \text{ MPa}$, hệ số Poisson $\nu = 0,35$.

Hướng dẫn:

Ứng suất chính:

$$\sigma_1 = 100 \text{ MPa}; \sigma_2 = 60 \text{ MPa}; \sigma_3 = -40 \text{ MPa}.$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}; \quad \sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$u_0 = \frac{1}{2E} [\sigma + \sigma + \sigma - 2\nu(\sigma_2\sigma_2 + \sigma_3\sigma_1 + \sigma_2\sigma_1)] = 1,1 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3$$

14. Ứng suất tại điểm trong lòng vật thể mang giá trị thể hiện tại tensor ứng

suất:
$$\begin{vmatrix} 21 & -6 & -6 \\ -6 & 37 & 18 \\ -6 & 18 & 37 \end{vmatrix} \text{ MPa}$$
, mô đun đàn hồi vật liệu $E = 200 \text{ GPa}$, hệ số Poisson $\nu = 0,3$. Xác định biến

dạng chính. Xác định biến dạng góc.

15. Kết quả đo biến dạng điểm vật thể trong trạng thái ứng suất phẳng đưa đến kết quả: $\varepsilon_x = -90 \mu$, $\varepsilon_y = -30 \mu$, $\gamma_{xy} = 120$. Biết rằng $E = 209 \text{ GPa}$, $\nu = 0,29$, lập tensor ứng suất và tensor biến dạng tại điểm khảo sát này.

16. Biết rằng tensor biến dạng tại điểm có dạng: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} \times 10^{-4}$, $E = 70\text{GPa}$, $\nu = 0,33$. Viết

tensor ứng suất cho điểm đang khảo sát.

17. Biết trước các giá trị của các thành phần tensor biến dạng ghi trong hệ tọa độ xOy , xác định các thành phần tensor biến dạng của cùng trạng thái trong hệ tọa độ rOs , như biểu diễn tại hình .

a/ $\epsilon_x = 200\mu$, $\epsilon_y = 400\mu$, $\gamma_{xy} = 400\mu$,

$\psi = 30^\circ$. Tìm ϵ_r , ϵ_s , γ_{rs}

b/ $\epsilon_x = -400\mu$, $\epsilon_y = 0$, $\gamma_{xy} = 300\mu$,

$\psi = -30^\circ$. Tìm ϵ_r , ϵ_s , γ_{rs}

c/ $\epsilon_x = 0$, $\epsilon_y = 0$, $\gamma_{xy} = 300\mu$,

$\psi = 45^\circ$. Tìm ϵ_r , ϵ_s , γ_{rs}

d/ $\epsilon_x = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_y = 0,8 \cdot 10^{-3}$, $\gamma_{xy} = -0,8 \cdot 10^{-3}$

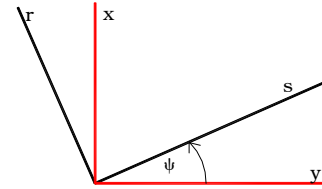
$\psi = 120^\circ$. Tìm ϵ_r , ϵ_s , γ_{rs}

d/ $\epsilon_x = 0,2 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_y = 0,1 \cdot 10^{-3}$, $\gamma_{xy} = 0,05 \cdot 10^{-3}$

$\psi = 45^\circ$. Tìm ϵ_r , ϵ_s , γ_{rs}

e/ $\epsilon_x = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon_y = 0,8 \cdot 10^{-3}$, $\gamma_{xy} = -0,8 \cdot 10^{-3}$

$\psi = 120^\circ$. Tìm ϵ_r , ϵ_s , γ_{rs}



Hình 1.8

18. Trạng thái ứng suất phẳng ghi lại như sau : $\epsilon_x = -90\mu$, $\epsilon_y = -30\mu$, $\gamma_{xy} = 120\mu$. Biết rằng $E = 209\text{GPa}$, $\nu = 0,29$, xác định các thành phần còn lại của tensor biến dạng và tensor ứng suất.

a) sử dụng phương trình chuyển giải bài toán

b) sử dụng vòng tròn Mohr xử lý bài toán.

19. Đánh giá độ bền kết cấu chịu tác động ứng suất trong không gian 3D sau đây: $\sigma_x = 90\text{MPa}$, $\sigma_y = 70\text{MPa}$, $\sigma_z = -30\text{MPa}$. Biết rằng ứng suất giới hạn $\sigma_{cr} = 120\text{MPa}$.

Hướng dẫn:

Tiêu chuẩn bền **Tresca**:

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = \sigma_Y$$

Tiêu chuẩn bền **von Mises** (lý thuyết Maxell-Huber-Hencky-von Mises) có dạng: $\sigma_{eq} = \sigma_Y$. Trong đó ứng suất tương đương viết như sau:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$

Trường hợp $\sigma_3 = 0$ tiêu chuẩn này mang dạng: $\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_Y$

Lời giải:

Theo tiêu chuẩn **Tresca**:

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} < \frac{Y}{2} \equiv \sigma_{cr}$$

Theo tiêu chuẩn **von Mises**:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = 112 \text{MPa} < \sigma_{cr}$$

20. Xác định chiều dày t của bình lặn trụ, đường kính ngoài $D = 80\text{mm}$, chịu áp lực nước bên ngoài $p = 30 \text{MPa}$. Nhận ứng suất giới hạn 160MPa .

Lời giải:

Ứng suất chính thành bình tính theo công thức:

$$\sigma_1 = \frac{pD}{2t} = \frac{30 \times 8 \times 10^{-2}}{2t} = \frac{1,2}{t}; \quad \sigma_2 = 0,5; \quad \sigma_3 = \frac{0,6}{t}$$

Từ tiêu chuẩn bền von Mises có thể tính:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{t} \sqrt{0,5[(1,2 - 0)^2 + (0,6 - 0)^2 + (1,2 - 0,6)^2]} = \frac{1,04}{t} \leq \sigma_{cr} = 160 \text{MPa}$$

Từ đây có thể tính: $t = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 6,5 \text{mm}$.

21. Trục thép đường kính 15mm làm từ vật liệu có ứng suất chảy 320MN/m^2 , chịu tác động momen quay Q . Xác định giá trị giới hạn momen quay theo tiêu chuẩn bền Tresca và theo tiêu chuẩn bền von Mises.

22. Bình thành mỏng, đường kính bình 1m , chịu áp lực trong 700kN/m^2 . Ứng suất chảy vật liệu làm bình 250MN/m^2 .

Xác định chiều dày thành bình theo tiêu chuẩn bền ứng suất cắt lớn nhất (tiêu chuẩn Tresca) và theo tiêu chuẩn von Mises.

23. Xác định momen xoắn giới hạn cho trục thép đường kính trục 10mm : a) theo tiêu chuẩn bền Tresca và b) tiêu chuẩn von Mises. Giới hạn bền vật liệu $[\sigma] = 140 \text{MPa}$.

Trả lời: Theo tiêu chuẩn Tresca $M_T = 13,7 \text{N.m}$; theo tiêu chuẩn von Mises $M_T = 15,9 \text{N.m}$.

Chương 2

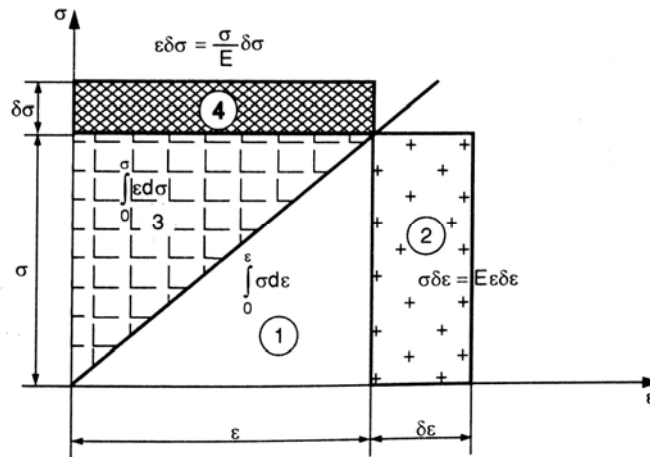
CÁC PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

2.1 Tóm tắt

Trong trạng thái cân bằng, công do ngoại lực gây ra phải bằng công biến dạng dạng (*strain energy*), dạng thế năng tích tụ. Những nguyên lý năng lượng dựa trên định luật bảo toàn năng lượng, dùng hữu hiệu trong cơ học kết cấu có thể chia làm bốn nhóm:

- Nguyên lý năng lượng toàn phần (*Principle of total potential energy*)
- Nguyên lý công ảo (*Principle of virtual work*)
- Nguyên lý công bù toàn phần (*Principle of complementary total potential energy*)
- Nguyên lý công bù ảo (*Principle of complementary virtual work*)

Biểu đồ trình bày giá trị bốn dạng công đang nêu như giới thiệu tại hình 2.1

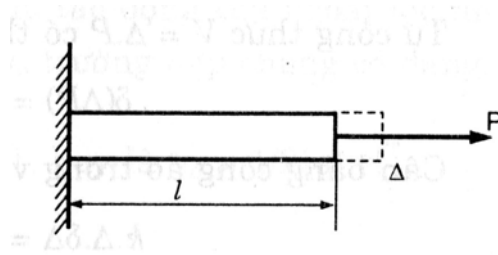


Hình 2.1

Từ lý thuyết đàn hồi chúng ta có thể viết biểu thức tính các công như sau.

- Công biến dạng $\int_0^\epsilon \sigma d\epsilon = \frac{1}{2} E \epsilon^2$
- Công ảo $\sigma d\epsilon = E \epsilon d\epsilon$
- Công bù $\int_0^\sigma \epsilon d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E}$
- Công bù ảo $\epsilon d\sigma = \frac{\sigma}{E} d\sigma$

Minh họa cách dùng bốn cách phát biểu nguyên lý bảo toàn công, công ảo áp dụng cho trường hợp kéo (nén) bằng lực P dầm trụ diện tích mặt cắt dầm A , mô đun đàn hồi vật liệu E , chiều dài dầm l , hình 2.2.



Hình 2.2

Nguyên lý năng lượng toàn phần

Công biến dạng tính bằng công thức:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma \times \epsilon dV$$

Có thể thấy rằng:

$$dV = dx dy dz = (dA) dx$$

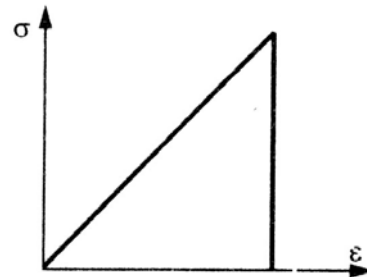
với $dA = dz dy$

$$\text{Mặt khác } \int_A \sigma dA = P \quad \text{hoặc} \quad P = \sigma \cdot A$$

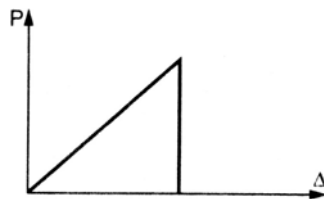
$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma \times \epsilon dV = \iint \frac{1}{2} (\sigma dA) \times \epsilon dx$$

$$\text{Từ } \sigma = E \cdot \epsilon \Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$U = \iint \frac{1}{2} (\sigma dA) \times \epsilon dx = \int_0^l \frac{1}{2} P \times \frac{\sigma \cdot A}{A \cdot E} dx = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{P^2}{AE} dx$$



Hình 2.3



Hình 2.4

Công ngoại lực, xem hình 2.4, trong đó $P = f(\Delta)$:

$$V = \frac{1}{2} P \cdot \Delta$$

Từ điều kiện cân bằng $U = V$ có thể viết:

$$\frac{P^2 l}{2AE} = \frac{1}{2} P \cdot \Delta$$

hay là: $\Delta = \frac{Pl}{AE}$

Nếu ký hiệu $AE/l = k$, công thức cuối mang dạng:

$$\Delta = \frac{Pl}{AE} = \frac{P}{k}$$

hay là **$k \cdot \Delta = P$**

Nguyên lý công ảo

Từ công thức $U = \frac{1}{2} \frac{P^2 l}{AE}$ có thể tính tiếp:

$$\frac{1}{2} \frac{P^2}{AE} \times l = \frac{1}{2} \frac{P}{AE/l} \times P = \frac{1}{2} \frac{P}{k} P = \frac{1}{2} \Delta P$$

với $P = k\Delta$:

$$U = k\Delta^2$$

Từ đó có thể viết:

$$\delta(\frac{1}{2}k\Delta^2) = \delta(k\Delta) = k\Delta \cdot \delta\Delta;$$

Từ công thức $V = \Delta \cdot P$ có thể viết:

$$\delta(\Delta P) = P \cdot \delta\Delta$$

Cân bằng công ảo trong và ngoài:

$$k\Delta \cdot \delta\Delta = P \cdot \delta\Delta \text{ có thể viết:}$$

$k \cdot \Delta = P$

Nguyên lý công bù toàn phần

$$\text{Công bù nội lực: } \int_l \frac{1}{2} \frac{P^2}{AE} dx = \frac{1}{2} \frac{P^2}{AE} l$$

$$\text{Công bù ngoại lực: } \frac{1}{2} \Delta P$$

$$\text{Thoả mãn điều kiện: } W_{\text{ext}}^* = W_{\text{int}}^*$$

Có thể thấy:

$$\frac{1}{2} \Delta P = \frac{1}{2} \frac{P^2}{k}$$

hay là: $\Delta = \frac{P}{k}$

Nguyên lý công bù ảo

$$W_{\text{int}}^* = \frac{1}{2} \frac{P^2}{k}$$

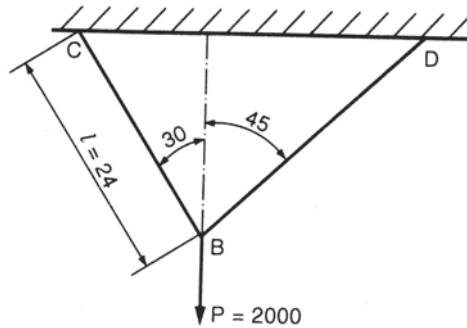
$$\text{Từ đó } \delta W_{\text{int}}^* = \frac{1}{k} P \delta P$$

$$W_{\text{ext}}^* = \Delta \cdot P \quad \Rightarrow \quad \delta W_{\text{ext}}^* = \Delta \delta P$$

$$\text{Từ quan hệ: } \delta W_{\text{ext}}^* = \delta W_{\text{int}}^* \text{ có thể viết: } \Delta \delta P = \frac{1}{k} P \delta P$$

$$\text{Với } \delta P \neq 0: \quad \Delta = \frac{P}{k}$$

Ví dụ 1: Sử dụng Nguyên lý năng lượng toàn phần xác định chuyển vị theo phương thẳng đứng điểm B kết cấu dưới đây. Biết rằng mô đun đàn hồi vật liệu $E = 30 \text{ Mpsi}$, diện tích mặt cắt ngang $A = 0,2 \text{ in}^2$. Chiều dài l đoạn dây BC 24 in, lực P tác động theo chiều đứng, bằng 2000 lbf



Hình 2.5

Qui đổi các đơn vị dùng trong bài tập theo cách sau:

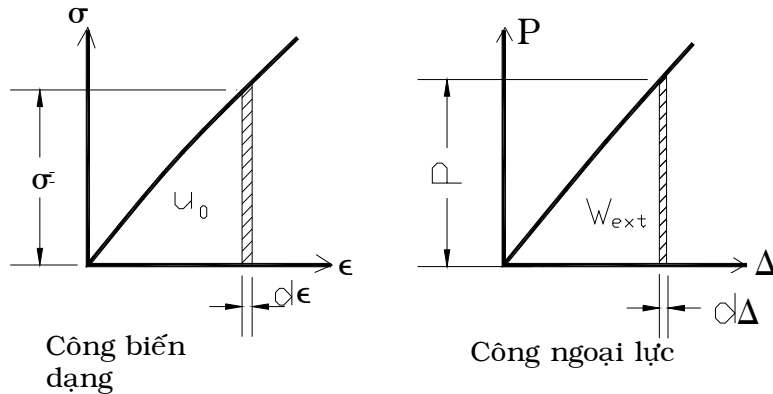
Chiều dài: $1 \text{ ft} = 0,3048 \text{ m}$; $1 \text{ in} = 0,0254 \text{ m}$.

Lực: $1 \text{ lbf} = 4,448 \text{ N}$.

Ứng suất, áp lực: $\text{lbf/ft}^2 = 47,88 \text{ Pa}$; $\text{psi} \equiv \text{lbf/in}^2 = 6895 \text{ Pa} (\text{N/m}^2)$.

Công biến dạng trong đơn vị thể tích vật thể chịu tác động của ngoại lực như đã trình bày tại “Cơ học kết cấu” $U = \int_V u_0 dV$. Hàm u_0 trường hợp chung có dạng:

$$\frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}), \text{ hay là } u_0 = \frac{1}{2} \{\sigma\} \{\varepsilon\}^T.$$



Hình 2.6

Thế năng trong dầm dài l , độ cứng $A.E$, với A – diện tích mặt cắt ngang, E – mô đun đàn hồi vật liệu, chịu kéo, nén bằng lực F tính bằng công biến dạng.

Công biến dạng dầm chịu kéo, nén dưới tác động lực dọc trục N có dạng:

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{N^2}{AE} dx, \text{ còn công biến dạng dầm chịu uốn: } U = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx.$$

Áp dụng công thức đầu vào giải bài toán cụ thể của chúng ta. Chuyển vị điểm B theo hướng thẳng đứng ký hiệu δ_B . Công ngoại lực áp đặt cho hệ thống là:

$$W = \frac{1}{2} P. \delta_B = 1000. \delta_B$$

Các lực căng cáp F_{BC} và F_{BD} tính từ hệ cân bằng lực:

$$\left. \begin{aligned} F_{BC} \cos 30^\circ + F_{BD} \cos 45^\circ &= 2000 \\ F_{BC} \sin 30^\circ - F_{BD} \sin 45^\circ &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$F_{BC} = 1464$$

$$F_{BD} = 1035$$

Chiều dài cáp xác định từ hình: $L_{BC} = 24 \text{ in}$; $L_{BD} = L_{BC} \cos 30^\circ / \sin 45^\circ = 29,4 \text{ in}$.

Thế năng tích lũy trong hai cáp tính theo công thức:

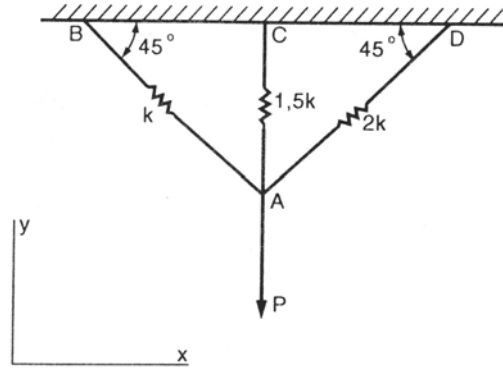
$$U = U_{BC} + U_{BD} = \frac{1}{2} \frac{F_{BC}^2 L_{BC}}{AE} + \frac{1}{2} \frac{F_{BD}^2 L_{BD}}{AE} = 4,29 + 2,62.$$

Từ quan hệ $1000. \delta_B = 6,91$ có thể tính:

$$\delta_B = \frac{6,91}{1000}$$

Ví dụ 2: Hệ thống ba lò xo trụ độ cứng tương ứng k , $1,5k$ và $2k$ bố trí như tại hình 2.6. Lực bên ngoài kéo hệ thống mang giá trị P , đặt tại A, hướng xuống dưới. Sử dụng nguyên lý công ảo xác định các lực kéo lò xo F_1, F_2, F_3 .

Chuyển vị điểm A dưới tác động ngoại lực P có thể biểu diễn bằng tổng hai thành phần u – chuyển vị theo chiều ngang, v – theo chiều hút trái đất. Chuyển vị ảo được ký hiệu theo cách đang trình bày: $\delta u, \delta v$.



Hình 2.7

Độ giãn dài ba lò xo tính như sau:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= u \cos 45^\circ - v \sin 45^\circ \\ s_2 &= -v \\ s_3 &= -u \cos 45^\circ - v \sin 45^\circ \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Độ giãn ảo tính theo biểu thức:

$$\left. \begin{aligned} \delta s_1 &= \delta u \cos 45^\circ - \delta v \sin 45^\circ \\ \delta s_2 &= -\delta v \\ \delta s_3 &= -\delta u \cos 45^\circ - \delta v \sin 45^\circ \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Công nội lực tính bằng tổng các công thực hiện trong hệ kết cấu đang xem xét:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \delta W_{\text{int},1} + \delta W_{\text{int},2} + \delta W_{\text{int},3} \\ &= (k)s_1\delta s_1 + (1,5k)s_2\delta s_2 + (2k)s_3\delta s_3 \\ &= (3ku \cos^2 45^\circ + kv \sin 45^\circ \cos 45^\circ) \delta u + (ku \cos 45^\circ \sin 45^\circ + 3kv \sin^2 45^\circ + \\ &1,5kv) \delta v. \end{aligned} \quad (c)$$

hay là:

$$\delta W_{\text{int}} = (1,5ku + 0,5kv) \delta u + (0,5ku + 3kv) \delta v. \quad (d)$$

Công ngoại lực do P thực hiện bằng $-P.v$ và từ đó $\delta W_{\text{ext}} = -P\delta v$. (e)

Cân bằng $\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}$ có thể nhận phương trình cân bằng trong phương pháp chuyển vị:

$$k \begin{bmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,5 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \end{Bmatrix}, \quad \text{được hiểu là} \quad (f)$$

$$\begin{pmatrix} \text{ma trận} \\ \text{cứng} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{vector} \\ \text{chuyển vị} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{vector} \\ \text{lực} \end{pmatrix}$$

Nghiệm của hệ phương trình mang giá trị:

$$u = 1,1176 \frac{P}{k} \quad \text{và} \quad v = -0,3529 \frac{P}{k} \quad (g)$$

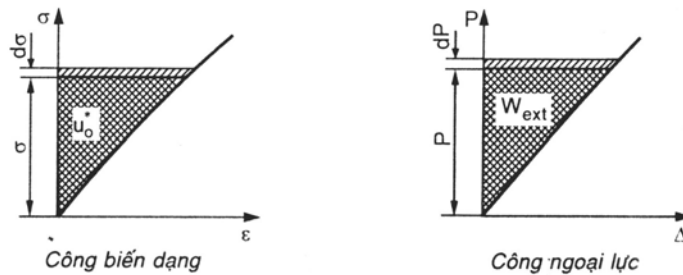
Từ đó có thể xác định các đại lượng giãn dài lò xo cùng các lực trong các lò xo.

$$s_1 = 0,3328 (P/k); \quad s_2 = 0,3529 (P/k); \quad s_3 = 0,1664 (P/k). \quad (h)$$

$$F_1 = 0,3328P; \quad F_2 = 0,5294P; \quad F_3 = 0,3328P. \quad (i)$$

Giải các bài toán dạng đang nêu theo nguyên lý công bù.

Giải thích: công bù bạn đọc đã quen tại phần lý thuyết đàn hồi. Trong hình 2.8 tiếp theo đây diện tích phần trên đường $\sigma - \varepsilon$ biểu diễn công bù.



Hình 2.8

Với vật thể đàn hồi, công bù được tính $U^* = \int_V u_0^*(\sigma) dV = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV$ còn công do ngoại lực áp đặt tính bằng $V^* = \int_{S_u} \{P\}^T \{\Delta\} dS$. Năng lượng $\Pi^* = U^* - V^*$ được tính bằng biểu

thức: $\Pi^* = \int_V u_0^*(\sigma) dV - \int_{S_u} \{P\}^T \{\Delta\} dS$. Biến phân hàm Π^* tính theo:

$$\delta \Pi^* = \delta \left(\int_V u_0^*(\sigma) dV - \int_{S_u} \{P\}^T \{\Delta\} dS \right)$$

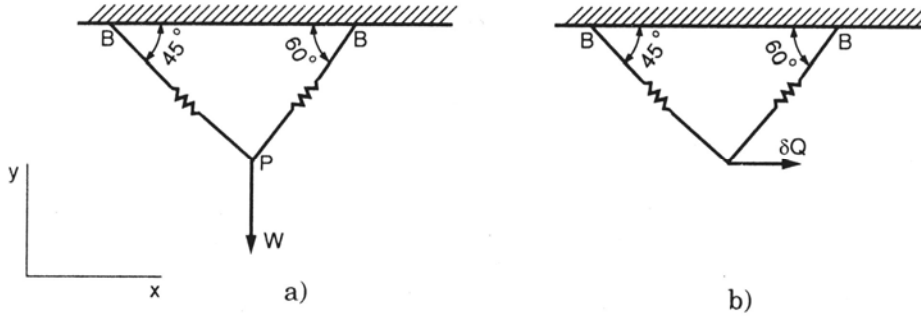
bằng không khi thỏa mãn điều kiện dừng. Trong trường hợp này bài toán trở thành:

$$\delta(U^* - V^*) = 0.$$

Ví dụ 3: Hệ thống hai dây lò xo cùng độ cứng k , nối với nhau tại nút P và chịu tác động lực thực W điểm đặt tại P , theo chiều hút trái đất, hình 2.9. Ứng dụng nguyên lý công bù ảo xác định chuyển vị nút nối đó theo hướng ngang.

Đặt lực ảo δQ tại P, tác động theo hướng ngang chúng ta sẽ xác định chuyển vị ngang dưới tác động các lực đang đề cập, cùng nội lực trong hệ thống. Công ảo do lực ảo bên ngoài gây tính theo cách vừa trình bày:

$$\delta W_{ext}^* = u\delta Q \tag{a}$$



Hình 2.9

Để tính công nội lực theo công thức nêu trên cần thiết xác định các tích nằm sau dấu Σ theo cách $\Delta r_{ij} \delta f_{ij} = \Delta s_{ij} \delta f_{ij}$. Độ giãn dài lò xo tính theo công thức $\Delta s_{ij} = \frac{f_{ij}}{k}$, với f_{ij} là lực thực, dạng nội lực của lò xo.

Trường hợp cụ thể này có thể viết:

$$\delta W_{int}^* = \left(\frac{f_{AP}}{k}\right) \times \delta f_{AP} + \left(\frac{f_{BP}}{k}\right) \times \delta f_{BP} \tag{b}$$

$$= \left(\frac{0,5176W}{k}\right) (0,8966\delta Q) + \left(\frac{0,7320W}{k}\right) (-0,7320\delta Q) = -\frac{0,0717W}{k} \delta Q \tag{c}$$

Kết quả tính:

$$u\delta Q = -0,0717 \left(\frac{W}{k}\right) \delta Q \tag{d}$$

hay là

$$u = -0,0717 \left(\frac{W}{k}\right) \tag{e}$$

Ví dụ 4: Giải bài toán tại ví dụ 1 trên cơ sở định lý Castigliano.

Lời giải: Công bù hệ thống tính theo công thức tổng công bù các thành phần tham gia kết cấu, ghi thành: $\sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \frac{F_i^2 L_i}{AE}$.

Như đã tính từ phân trên $F_1 = F_{BC} = 0,732P$; $F_2 = F_{BD} = 0,518P$

Công bù hệ thống được tính bằng:

$$U = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \frac{F_i^2 L_i}{AE} = \frac{0,535P^2 L_{BC}}{AE} + \frac{0,268P^2 L_{BD}}{AE}$$

Chuyển vị điểm B theo hướng tác động lực P bằng đạo hàm hàm năng lượng theo P, tính bằng số:

$$\sigma_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{0,535PL_{BC}}{AE} + \frac{0,268PL_{BD}}{AE} = 6,91 \times 10^{-3}$$

Chuyển vị ngang điểm B được coi do lực “ảo” ngang H, đặt tại B gây. Công bù trong trường hợp này mang dạng:

$$U = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \frac{F_i^2 L_i}{AE} = \frac{(0,732P + 0,732H)^2 L_{BC}}{AE} + \frac{(0,518P - 0,879H)^2 L_{BD}}{AE}$$

Chuyển vị điểm B theo hướng tác động của H:

$$\frac{\partial}{\partial H} U = \frac{0,732(0,732P + 0,732H)L_{BC}}{AE} - \frac{0,879(0,518P - 0,879H)L_{BD}}{AE} = -0,26 \times 10^{-3}$$

Bài tập

1. Chứng minh biểu thức tính năng lượng đơn vị vật liệu đàn hồi trong bài toán ứng suất phẳng:

$$\text{Công biến dạng } u_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \left[\frac{1}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - 2\varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 \right]$$

$$\text{Công biến dạng bù: } u_0^* = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 2(1+\nu)(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \right]$$

2. Chứng minh biểu thức tính công bù đơn vị hàm Airy trong trạng thái ứng suất phẳng:

$$u_0^* = \frac{1}{2E} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - 2(1+\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}$$

3. Chứng minh biểu thức tính công bù đơn vị vật liệu đẳng hướng trong bài toán 2D và 3D:

Bài toán 2D:

$$u_0^* = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y) + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2$$

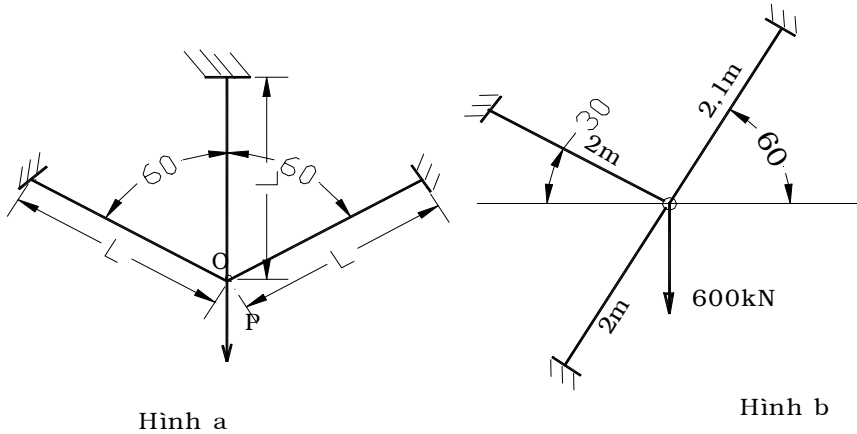
Bài toán 3D:

$$\begin{aligned} u_0^* &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{2\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z) + \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \end{aligned}$$

3. Xác định chuyển vị điểm O theo phương thẳng đứng theo nguyên lý công ảo, hình 2.10a.

4. Xác định các lực trong thanh của hệ thống trình bày tại hình 2.10b. Vật liệu dùng trong trường hợp này là vật liệu đàn hồi.

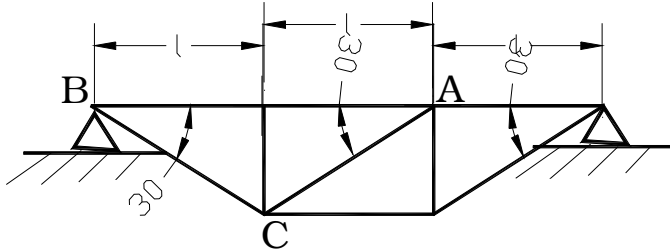
Xác định chuyển vị ngang điểm O, hình 2.10b theo nguyên lý công ảo.



Hình 2.10

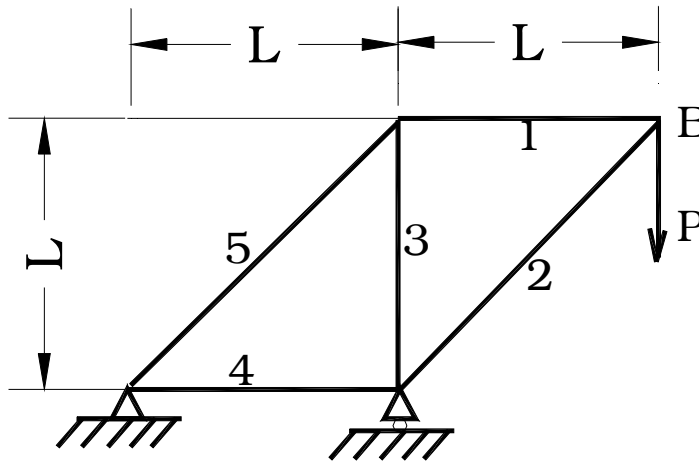
5 Giải bài toán 3 và 4 vừa nêu theo nguyên lý năng lượng toàn phần.

6 Khi lắp ráp khung người ta đã phát hiện rằng thanh BC bị ngắn so với thiết kế đoạn $a = 0,005l$. Xác định chuyển vị của nút A do thiếu hụt đó gây ra. Biết rằng $l = 120\text{cm}$.



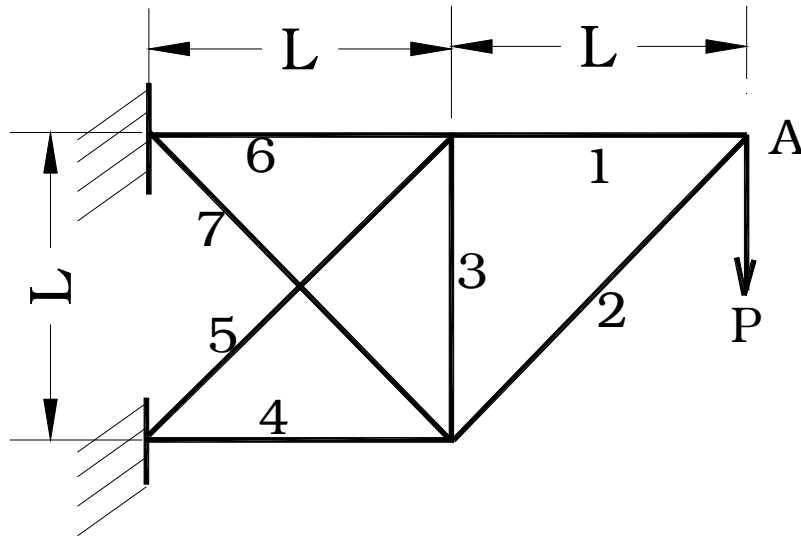
Hình 2.11

7. Xác định ứng suất trong các thanh của kết cấu cầu cẩu, hình 2.12. Chọn tiết diện mặt cắt từ thép hình (tự chọn) nhằm đảm bảo độ bền kéo, nén, biết rằng ứng suất cho phép $\sigma_{cr} = 160\text{ MPa}$. Tính chuyển vị đứng của điểm B, biết rằng $P = 50\text{ kN}$, $L = 80\text{cm}$, $E = 2 \cdot 10^5\text{ MPa}$.



Hình 2.12

8. Xác định chuyển vị theo hướng đứng điểm A thuộc kết cấu trình bày tại hình 2.13. Diện tích mặt cắt các thanh chịu kéo nén đánh số từ 1 đến 7 đều bằng a . Chiều dài các thanh ghi tại hình 2.13.



Hình 2.13

9 Xác định chuyển vị theo phương ngang điểm B của bài tập 8.

CHƯƠNG 3

DÀM THẰNG

Tóm tắt

Công thức chính

Biểu thức vi phân trình bày quan hệ giữa lực cắt $V(x)$ và phân bố tải trọng trên dầm $q(x)$:

$$\frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \quad (3.1)$$

Quan hệ giữa momen uốn dầm $M(x)$ và lực cắt dầm $V(x)$ thể hiện qua biểu thức vi phân:

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) \quad (3.2)$$

Từ đó:
$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -q(x) \quad (3.3)$$

Biểu thức tích phân thể hiện quan hệ lực cắt, momen uốn với tải trọng:

$$V(x) = V(x_0) - \int_{x_0}^x q(x) dx \quad (3.4)$$

$$M(x) = M(x_0) + V(x_0)(x - x_0) - \int_{x_0}^x (x - \xi) q(\xi) d\xi \quad (3.5)$$

Ứng suất uốn (*flexural stress*) tính từ biểu thức:

$$\sigma_x = \frac{M(x).z}{I} \quad (3.6)$$

Ứng suất cắt (*shear stress*) xác định theo biểu thức:

$$\tau_{xy} = \frac{V(x).S^*}{I.b} \quad (3.7)$$

trong đó: b – chiều rộng dầm tại vùng tính toán, S^* - momen tĩnh tính cho vùng bị cắt.

Quan hệ giữa độ võng dầm $w(x)$ và momen uốn:

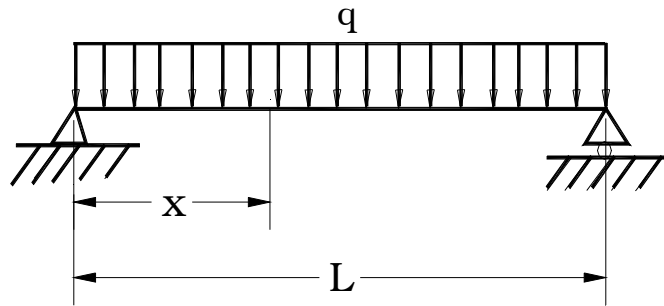
$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (3.8)$$

$$w(x) = \int \left(\int \frac{M}{EI} dx \right) dx + C_1x + C_2, \text{ trong đó } C_1, C_2 \text{ các hằng số.}$$

Xác định độ võng dầm tĩnh định

a/ Sử dụng phương pháp phương trình vi phân

Ví dụ 1: Xác định độ võng dài l , tựa tự do, chịu tải phân bố $q = \text{const}$



Hình 3.1

Từ $M(x) = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$ có thể viết $EJ \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$

Tiến hành tích phân biểu thức cuối sẽ nhận được:

$$EJ \frac{dw}{dx} = -\frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C_1$$

Tại điểm giữa sải dầm, tại $x = l/2$ $dw/dx = 0$, chúng ta có thể xác định:

$$C_1 = \frac{ql^3}{24}$$

$$EJ \frac{dw}{dx} = -\frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{24}$$

Tiếp tục tích phân sẽ nhận được:

$$EJw = -\frac{qlx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3x}{24} + C_2$$

Biết rằng tại $x = 0$, $w = 0$, do vậy $C_2 = 0$.

Từ đó có thể tính:

$$w = \frac{q}{24EJ} (l^3x - 2lx^3 + x^4)$$

Giá trị cực đại của w tại $x = l/2$:

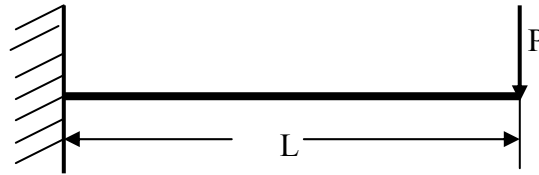
$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$

Góc xoay tại gối:

$$\theta = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \frac{ql^3}{24EJ}$$

b/ Giải bài toán trên cơ sở tích phân hệ phương trình vi phân cơ bản.

Ví dụ 2: Xác định độ võng dầm công xon, ngàm đầu bên trái, chịu tác động lực tập trung P đầu phía phải, hình 3.2



Hình 3.2

Momen uốn tính theo công thức sau.

$$M = -P(l - x) = -Pl + Px \quad (b)$$

Công thức (a) có thể viết dưới dạng:

$$EJw''(x) = Pl - Px \quad (c)$$

Thực hiện tích phân theo biểu thức (c) sẽ nhận được:

$$EJ \frac{dw(x)}{dx} = Plx - \frac{Px^2}{2} + C_1 \quad (d)$$

$$EJw(x) = \frac{Plx^2}{2} - \frac{Px^3}{6} + C_1x + C_2 \quad (e)$$

Thay điều kiện biên vào hai phương trình trên chúng ta sẽ xác định C_1 và C_2 .

Điều kiện tại $x = 0$: $w = 0$;

Tại $x = l$: $w'(l) = 0$;

Thay các giá trị này vào hai phương trình cuối sẽ xác định hai giá trị hằng số tích phân:

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Hai phương trình (d) và (e) giờ trở thành:

$$w'(x) = \frac{Pl}{EJ}x - \frac{P}{2EJ}x^2$$

$$w(x) = \frac{Pl}{2EJ}x^2 - \frac{P}{6EJ}x^3$$

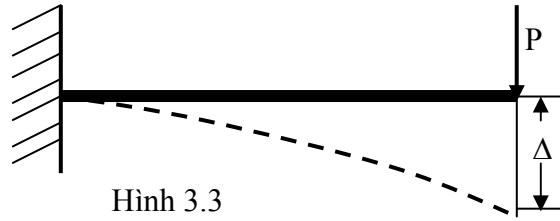
Tại $x = l$ hai hàm trở thành:

$$w'(l) = \frac{Pl^2}{2EJ}$$

$$w(l) = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

c/ Định lý Castigliano

Ví dụ 3: Xác định độ võng dầm công xon, ngàm đầu bên trái, chịu tác động lực tập trung P đầu phía phải, hình 3.3



Phương trình miêu tả độ võng dầm: $EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = -M$ (a)

trong đó EJ – độ cứng dầm chịu uốn, w – độ võng dầm, M – momen uốn dầm.

Momen uốn tính theo công thức: $M = -P(l - x) = -Pl + Px$ (b)

Hàm thế năng tính cho dầm bị uốn, theo lý thuyết dầm đàn hồi có thể viết:

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ} dx$$
 (c)

Thay biểu thức tính M từ (b) vào (c), sau tích phân có thể nhận được:

$$U = \frac{P^3 l^3}{6EJ}$$
 (d)

Từ định lý Castigliano, theo đó chuyển vị do P gây ra sẽ tính bằng đạo hàm U theo P:

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{P^2 l^3}{6EJ} \right) = \frac{Pl^3}{3EJ}$$
 (e)

d/ Tính theo phương pháp tải đơn vị hay công thức Maxwell-Mohr

Ví dụ 4: Xác định độ võng dầm công xon nêu tại hình 3.3

Độ võng dầm theo phương pháp này tính bằng công thức:

$$\Delta = \int_l \frac{M \times M_1}{EJ} dx$$
 (a)

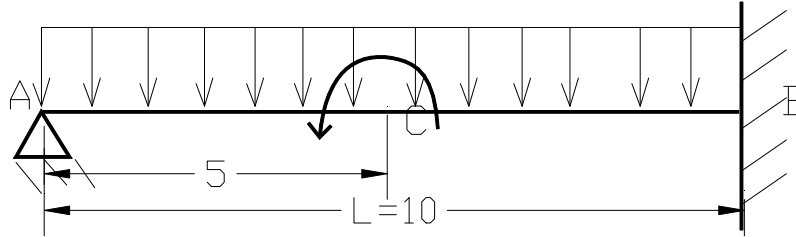
trong đó M – momen do do thực gây, $M = -P(1 - x)$

M_1 – momen do tải đơn vị ($= 1$), đặt tại đầu phía phải dầm gây ra, và như vậy $M_1 = 1.(x - l)$.

$$w(l) = \int_0^l \frac{-(l - x)(x - l)}{EJ} dx = \frac{Pl^3}{3EJ}$$

Xác định độ võng dầm không tĩnh định (siêu tĩnh)

Ví dụ 1: Cho trước dầm dài $L = 10$ đơn vị độ dài, độ cứng $EJ = \text{const}$, ngàm một đầu, đầu thứ hai tựa trên khớp cứng, chịu tải phân bố đều $q = \text{const}$ và momen uốn tập trung M_0 đặt tại giữa dầm. Xác định phản lực và độ võng dầm.



Hình 3.4

Từ phương trình vi phân trình bày quan hệ giữa độ võng và momen uốn dầm

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = -M \quad \text{có thể viết các phương trình sau:}$$

$$\left. \begin{aligned} EJ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} &= R_1 x - \frac{qx^2}{2} \\ EJ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} &= R_1 x - \frac{qx^2}{2} + M_0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} khi & \quad 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ khi & \quad \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{aligned} \quad (a)$$

Sau tích phân sẽ nhận được các biểu thức dạng:

trường hợp $0 \leq x \leq L/2$:

$$\left. \begin{aligned} EJ \frac{dw(x)}{dx} &= R_1 \frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1 \\ EJw(x) &= R_1 \frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + C_1 x + C_2 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

trường hợp $L/2 \leq x \leq L$:

$$\left. \begin{aligned} EJ \frac{dw(x)}{dx} &= R_1 \frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + M_0 x + C_3 \\ EJw(x) &= R_1 \frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} + M_0 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Tại đây chúng ta gặp bốn hằng số cần xác định, cùng với một phản lực R_1 . Để xử lý bài toán tìm đồng thời 5 ẩn, cần thiết thỏa mãn các điều kiện biên.

$$\text{Điều kiện tại } x = 0: w(0) = 0;$$

$$\text{Điều kiện tại } x = L: dw/dx|_{x=L} = w|_{x=L} = 0; \quad (d)$$

Nếu thay $L = 10$ và $q = 10$ như đã ghi tại đầu đề, các hằng số mang giá trị sau:

$$C_2 = 0;$$

$$C_3 = -(R_1/2) \cdot 10^2 + (10 \cdot 10^3)/6 - 100 \cdot 10 = -50 R_1 + 667$$

$$C_4 = -(R_1/6).10^3 + (10.10^4)/24 - 100 \times 10^2/2 - (-50R_1 + 667).10 = 333R_1 - 7,51.10^3.$$

Tại đây còn 2 ẩn phải xác định C_1 và R_1 .

Tại vị trí $x = L/2$ đặt momen uốn tập trung M_0 có thể viết:

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{x=L/2...trai} = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L/2...phai}$$

và

$$R_1 \left(\frac{5^2}{2} \right) - 10 \left(\frac{5^3}{6} \right) + C_1 = R_1 \left(\frac{5^2}{2} \right) - 10 \left(\frac{5^3}{6} \right) + 100.5 + C_3$$

Từ đây tính được:

$$C_1 = 500 + C_3$$

Mặt khác

$$w \Big|_{x=L/2...trai} = w \Big|_{x=L/2...phai}$$

$$R_1 \left(\frac{5^3}{6} \right) - 10 \left(\frac{5^4}{24} \right) + C_1.5 = R_1 \left(\frac{5^3}{6} \right) - 10 \left(\frac{5^4}{24} \right) + 100.5^2/2 + C_3.5 + C_4$$

Từ đó $5C_1 = 1250 + 5C_3 + C_4$

Để xác định C_1 và R_1 từ quan hệ trên đây có thể lập hệ phương trình:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + 50R_1 - 1167 &= 0 \\ 5C_1 - 83R_1 + 2,92.10^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

R_1 xác định từ đây, mang giá trị: $R_1 = 26,3$

Phản lực R_2 tìm từ phương trình cân bằng lực: $R_1 - qL + R_2 = 0$

hay là $R_2 = 73,7$

Momen phản lực tìm từ quan hệ: $-M_0(L/2) - M_0 + R_2L - M_2 = 0$.

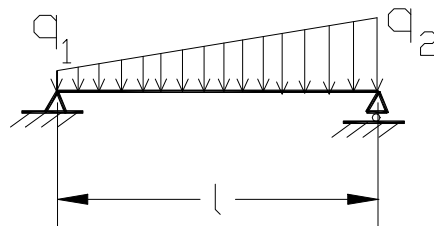
Từ đó $M_2 = 137$.

Dầm uốn

Ví dụ 1: Xây dựng biểu đồ lực cắt và momen uốn dầm thẳng dài l , chịu tác động tải phân bố theo qui luật tuyến tính, giá trị tại đầu phía trái q_1 , tại đầu phía phải q_2 . Phân biệt các trường hợp phân bố lực sau:

- $q_2 = 0$.
- $q_1 = q_2 = q$.
- $q_1 < 0$.

Qui luật phân bố ngoại lực được viết thành:



Hình 3.5

$$q(x) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{l}x \quad (a)$$

Từ điều kiện cân bằng lực và momen có thể viết phương trình momen tính cho đầu B nằm bên trái:

$$V_A l - \int_0^l (l-x)q(x)dx = 0 \quad (b)$$

Từ phương trình cuối tính được: $V_A = l(2q_1 + q_2)/6$.

Công thức tính lực cắt, tính tại khoảng cách x từ gối trái sẽ là:

$$V(x) = V_A - \int_0^x q(x)dx = \frac{1}{6}(2q_1 + q_2) - \left(q_1 x + \frac{q_2 - q_1}{l} \frac{x^2}{2} \right) \quad (c)$$

Momen uốn dầm:

$$M(x) = V_A x - \int_0^x (x-\xi)q(\xi)d\xi = \frac{1}{2}(2q_1 + q_2)x - \left(q_1 \frac{x^2}{2} + \frac{q_2 - q_1}{l} \frac{x^3}{6} \right) \quad (d)$$

Để xác định vị trí momen uốn đạt giá trị cực tiểu hoặc cực đại cần thiết giải phương trình (c) với $S(x_0) = 0$. Nếu ký hiệu $u = q_2/q_1$, x_0 tính theo biểu thức:

$$x_0 = \frac{l}{u-1} \left(\sqrt{\frac{u^2 + u + 1}{3}} - 1 \right) \quad (e)$$

trường hợp $q_2 = 0$ có thể thấy:

$$x_0 = l \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx 0,423l$$

Giá trị M tương ứng:

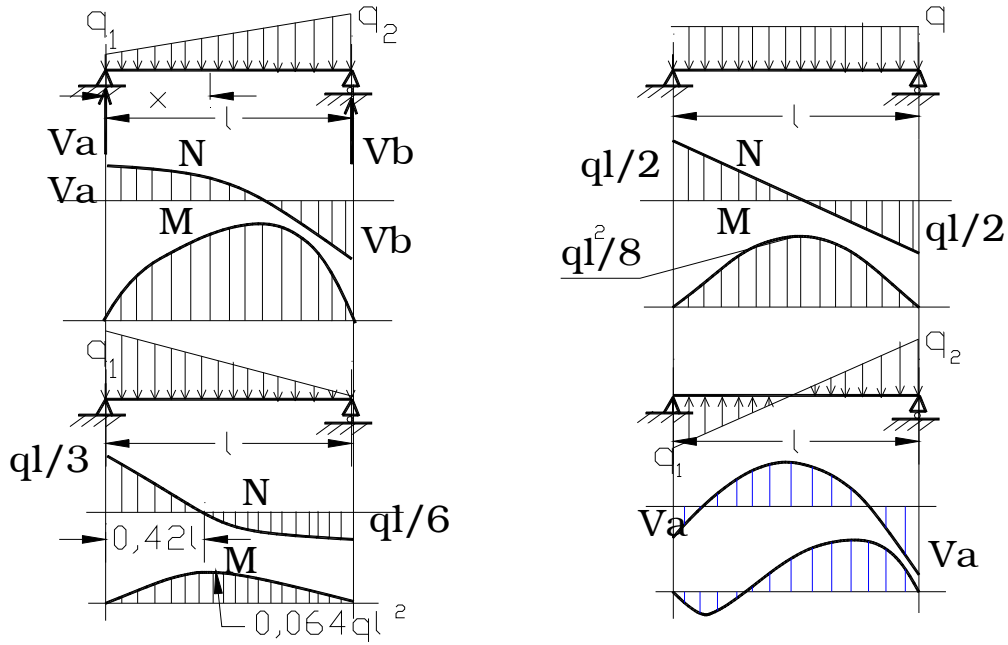
$$M_{\max} = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}} \approx 0,0642ql^2$$

với $q_1 = q_2 = q$ công thức tính lực cắt và momen uốn sẽ là:

$$V(x) = \frac{ql}{2} - qx;$$

$$M(x) = \frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

và
$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$



Hình 3.6

Trường hợp $q_1 < 0$.

Trường hợp $\frac{1}{2} < u < 2$ hàm M có hai đoạn dấu khác nhau. Hai giá trị của x_0 tính từ công thức (e) giờ sẽ mang dạng:

$$x_0^* = \frac{l}{u+1} \left(1 \mp \sqrt{\frac{u^2 - u + 1}{3}} \right)$$

Hai giá trị cực trị, M_{\min} và M_{\max} tính cho trường hợp đang đề cập như sau đây.

Với $u \geq 2$ hàm M mang giá trị dương, điểm cực đại đạt giá trị:

$$M_{\max} = \frac{2}{27} q_1 l^2 \quad \text{tại } x_0 = (2/3)l.$$

Với $u \leq 0,5$ hàm M mang giá trị âm, khi $u = \frac{1}{2}$, tại $x_0 = (1/3)l$ nhận được:

$$M_{\min} = -\frac{1}{27} q_1 l^2$$

Đồ thị trình bày momen uốn, lực cắt dầm tại hình 3.6.

Ví dụ 2: Dầm với mặt cắt hình chữ nhật, kết cấu thành mỏng, chịu uốn. Tại mặt cắt tính toán lực cắt dầm tính bằng $V = 10\text{kN}$. Xác định phân bố ứng suất cắt trong các thành của mặt cắt. Kích thước ghi tại hình tính bằng mm. Chiều dày các thành như sau: thành AB, CD, DA dày 3mm, thành BC dày 6mm.

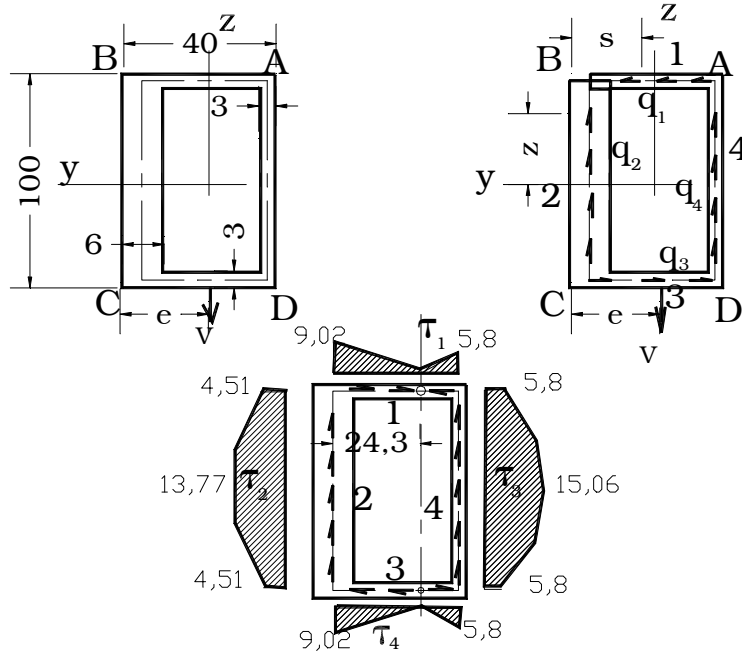
Momen quán tính I_y của mặt cắt ngang dầm:

$$I_y = 1,350 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Bước đầu tiên, tiến hành “mở” khung kín tại nút B. Theo cách này dòng cắt (*shear flow*) có chiều như thể hiện tại hình vẽ phía phải, trên. Cường độ dòng tính theo công thức:

$$q_1 = \tau t = \frac{V \cdot a \cdot t}{I_y} s = \frac{10 \times 10^3 \times 0,05 \times 0,003}{1,35 \times 10^{-6}} s = 1,111 \times 10^6 s$$

Trong công thức này s đo bằng m.



Hình 3.7

Dòng cắt thứ 2:

$$q_2 = \tau t = \frac{V}{2I_y} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right] t = \frac{10 \times 10^3}{2 \times 1,35 \times 10^{-6}} \left[\left(\frac{0,10}{2} \right)^2 - z^2 \right] 0,006 = 55,56 \times 10^3 - 22,22 \times 10^6 z^2 \quad q_3$$

= q1.

Momen tĩnh S^* tính cho thành trên và thành đứng DA mang giá trị:

$$S^* = 0,05 \times 0,003 \times 0,04 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{0,1}{2} \right)^2 - z^2 \right] 0,003 = 9,75 \times 10^{-6} - 1,5 \times 10^{-3} z^2$$

$$\text{Từ đó } q_4 = \frac{V}{I_y} S^* = 72,22 \times 10^3 - 11,111 \times 10^6 z^2$$

Dòng cắt trong khung kín ký hiệu bằng q_c , công thức tính tổng ứng suất cắt các thành miền kín được thể hiện như sau:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{q_{ci} - q_i}{t_i} = 0$$

Từ đây có thể tính :

$$\left(\frac{40}{3} + \frac{100}{6} + \frac{40}{3} + \frac{100}{3}\right)q_{c1} = 2 \int_0^{0,04} \frac{1,111 \times 10^6 s}{0,003} ds - 2 \int_0^{0,05} \frac{55,56 \times 10^3 - 22,22 \times 10^6 z^2}{0,006} dz$$

$$+ 2 \int_0^{0,05} \frac{77,22 \times 10^3 - 11,111 \times 10^6 z^2}{0,003} dz = 0$$

Từ

đó $q_{c1} = -27,05 \times 10^3 \text{ N/mm}$.

Dòng cắt trong mỗi thành tính lần lượt như sau.

Thành BA và CD:

$$q = 1,111 \cdot 10^6 s - 27,05 \cdot 10^3 \quad \text{và} \quad \tau = \frac{q}{0,003} = 370,4 \cdot 10^6 s - 9,017 \cdot 10^6 \quad \text{N/m}^2$$

Thành CB:

$$q = 55,56 \cdot 10^3 - 22,22 \cdot 10^6 z^2 + 27,05 \cdot 10^3 = 82,61 \cdot 10^3 - 22,22 \cdot 10^6 z^2$$

$$\text{và} \quad \tau = \frac{q}{0,006} = 13,77 \cdot 10^6 s - 3,704 \cdot 10^6 z^2 \quad \text{N/m}^2$$

Thành AD:

$$q = 77,22 \cdot 10^3 - 11,111 \cdot 10^6 z^2 - 27,05 \cdot 10^3 = 45,17 \cdot 10^3 - 11,111 \cdot 10^6 z^2$$

$$\text{và} \quad \tau = \frac{q}{0,003} = 15,06 \cdot 10^6 s - 3,704 \cdot 10^6 z^2 \quad \text{N/m}^2$$

Đồ thị ứng suất cắt trong các thành trình bày tại hình 3.7

Để xác định tâm cắt cần thiết xác định tổng momen của điểm C. Trường hợp kết cấu đơn liên này cần tính hai thành phần lực cắt Q_1 tại thành AB, lực trong thành AD.

$$Q_1 = \int_0^{0,04} [370,4 \cdot 10^6 s - 9,017 \cdot 10^6] 0,003 ds = -193,1N$$

$$Q_4 = 2 \int_0^{0,05} [15,06 \cdot 10^6 - 3,704 \cdot 10^6 z^2] 0,003 ds = 3590N$$

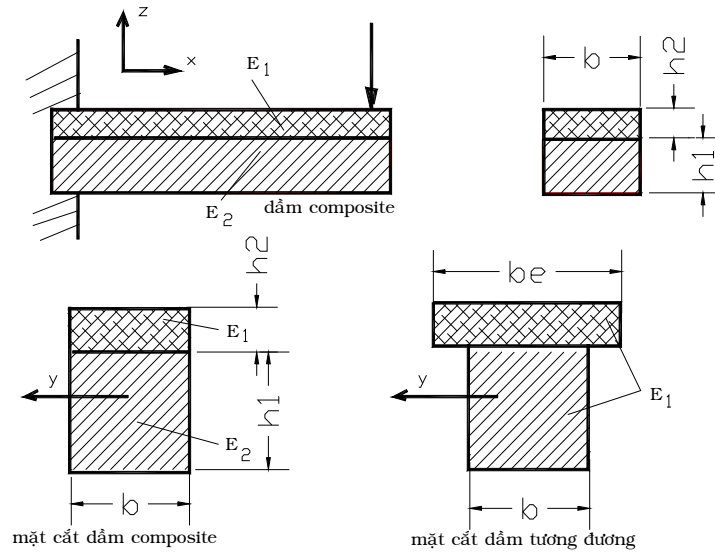
Tổng momen của C với $V = 10kN$:

$$\sum m_C = -e \cdot 10 \cdot 10^3 + 40 \cdot 3590 - 100 \cdot 193,08 = 0$$

Từ phương trình cuối xác định tâm cắt: $e = 12,4mm$.

Uốn dầm composite

Dầm cầu tạo từ ít nhất hai vật liệu cơ tính khác nhau được gọi là dầm tổng hợp (dầm composite).



Hình 3.8

Ví dụ minh họa theo đây giới thiệu dầm công xôn, làm từ hai vật liệu, mô đun đàn hồi lớp dưới là E_1 , lớp trên E_2 với $E_2 > E_1$. Biến dạng dọc dầm: $\varepsilon_x = \frac{M \cdot z}{EJ}$. Với $(\varepsilon_x)_e = (\varepsilon_x)_c$. Từ định luật

Hooke có thể viết: $\frac{(\sigma_x)_e}{E_1} = \frac{(\sigma_x)_c}{E_2}$. Ứng suất đang nêu tính cho mặt cắt tương đương $(\sigma_x)_E$, ứng

suất thực tế tính cho vùng vật liệu với E_2 được hiểu là: $(\sigma_x)_c = \frac{E_1}{E_2} (\sigma_x)_e$. Chiều rộng tương đương

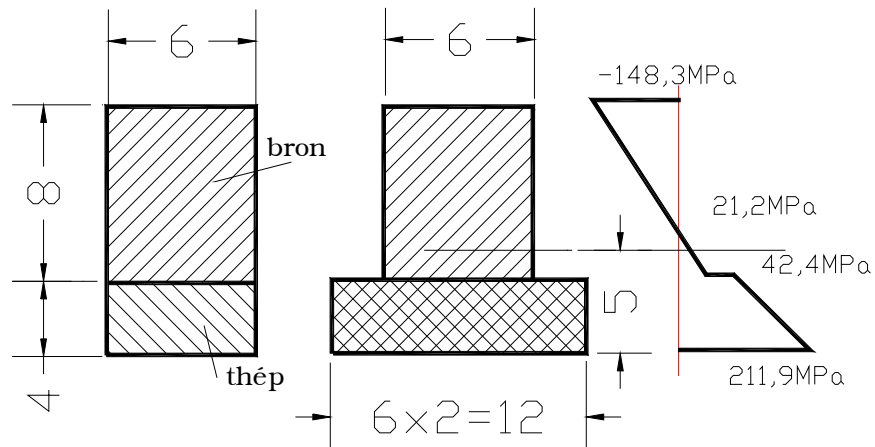
tại phần tử mặt cắt $b_e = \frac{(\sigma_x)_c}{(\sigma_x)_e} b_c$ hoặc $b_e = \frac{E_2}{E_1} b_c$. Momen quán tính tính cho mặt cắt này:

$$A_e = \frac{E_2}{E_1} A_c \quad \text{và} \quad I_e = \frac{E_2}{E_1} I_c.$$

Ví dụ 3: Dầm tiết diện hình chữ nhật, xem hình 3.9, làm từ bron với $E_b = 100\text{GPa}$, dán chặt với lớp thép $E_s = 200\text{GPa}$, chịu tác động momen uốn, tính tại mặt cắt x-x là $M = 25\text{N.m}$. Xác định ứng suất tại mặt tiếp xúc hai lớp vật liệu và ứng suất lớn nhất trong phần thép và bron.

Tỷ lệ giữa hai mô đun đàn hồi vật liệu $n = 200/100 = 2$. Chiều rộng tương đương b_e tính cho lớp bron sẽ là:

$$b_e = 2 \times 6 = 12\text{mm}.$$



Hình 3.9

Trục trung hòa mặt cắt tương đương:

$$z_n = \frac{(6 \times 8) \times 8 + (12 \times 4) \times 2}{48 + 48} = 5,0 \text{ mm}$$

Momen quán tính, tính qua trục trung hòa:

$$I_{eq} = \left(\frac{6 \times 8^3}{12} + 48 \times 3,0^2 \right) + \left(\frac{12 \times 4^3}{12} + 48 \times 3,0^2 \right) = 1184 \text{ mm}^4$$

Tại vị trí mặt tiếp xúc hai lớp vật liệu, $z = 1 \text{ mm}$ cách trục trung hòa ứng suất tính cho vật liệu bron xác định theo quan hệ:

$$\sigma_{x,b} = \frac{M}{I_{eq} / z} = \frac{25}{1,18 \times 10^{-9}} \times 10^{-3} = 21,2 \times 10^6 \text{ N / m}^2$$

Ứng suất tính cho vật liệu thép xác định theo quan hệ:

$$\sigma_{x,b} = \frac{2M}{I_{eq} / z} = \frac{2 \times 25}{1,18 \times 10^{-9}} \times 10^{-3} = 42,4 \times 10^6 \text{ N / m}^2$$

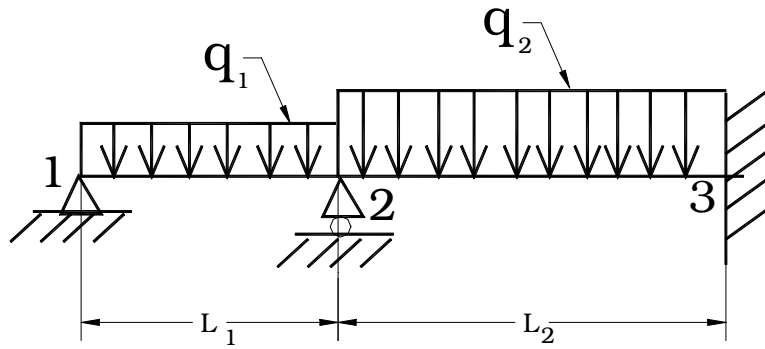
Ứng suất lớn nhất tính cho lớp vật liệu bron cách trục trung hòa $z = -7 \text{ mm}$.

$$\sigma_{x,b} = \frac{M}{I_{eq} / z} = \frac{25}{1,18 \times 10^{-9}} \times (-7) \times 10^{-3} = -148,3 \times 10^6 \text{ N / m}^2$$

Ứng suất lớn nhất tính cho lớp vật liệu thép cách trục trung hòa $z = 5 \text{ mm}$.

$$\sigma_{x,b} = \frac{2M}{I_{eq} / z} = \frac{2 \times 25}{1,18 \times 10^{-9}} \times 5 \times 10^{-3} = 211,9 \times 10^6 \text{ N / m}^2$$

Phương pháp lực áp dụng cho dầm không tĩnh định



Hình 3.10

Ví dụ 1: Cho trước dầm hai nhịp, dầm thứ nhất dài L_1 , dầm thứ hai nối tiếp dài L_2 . Chiều dài $L_1 = 0,8L_2$. Dầm bị ngàm tại đầu bên trái, tựa trên gối số 1 tại đầu phía phải và tựa tự do tại gối 2 nằm tại vị trí $x = L_1$. Tải phân bố đều q_1 tác động tại dầm thứ nhất, tải trên dầm thứ hai mang giá trị q_2 , trong đó $q_1 = 0,5q_2$.

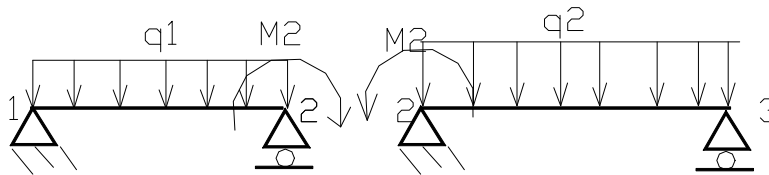
Xác định phản lực tại các gối, biểu đồ lực cắt và momen uốn.

Trong khuôn khổ phương pháp lực, tiến hành xác định bậc không tĩnh định.

$$N = (1+1+2) - 3 = 1.$$

Thành phần không tĩnh định trong trường hợp này nên chọn momen uốn tại gối số 2 M_2 .

Dầm hai dải được phân thành hai dầm, dầm thứ nhất tựa trên hai gối, chịu tác động tải $q_1 = \text{const}$ và momen M_2 đặt tại gối số 2, phía phải dầm này; dầm hai chịu tác động tải $q_2 = \text{const}$ và M_2 đặt tại gối số hai, giờ nằm phía trái dầm.



Hình 3.11

Phương trình cân bằng góc xoay dầm tại gối số 2: $\theta_{21} = \theta_{23}$:

$$\frac{M_2 L_1}{3EJ} - \frac{q_1 L_1^3}{24EJ} = -\frac{M_2 L_2}{3EJ} - \frac{M_3 L_2}{6EJ} + \frac{q_2 L_2^3}{24EJ}$$

Góc xoay tại ngàm bằng 0 trong trường hợp đang xét:

$$\frac{M_2 L_2}{6EJ} + \frac{M_3 L_2}{3EJ} - \frac{q_2 L_2^3}{24EJ} = 0$$

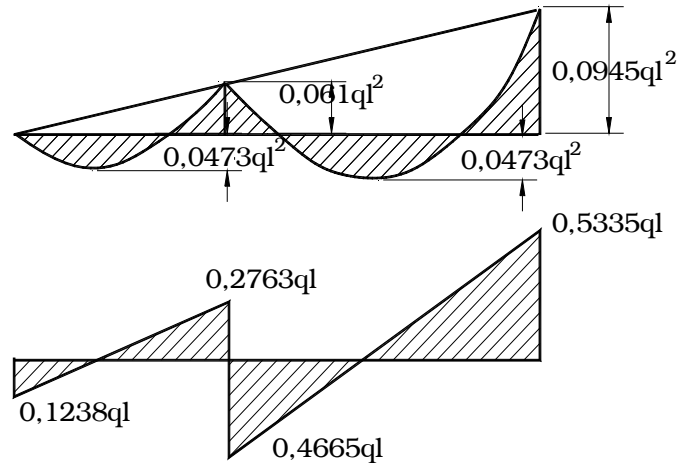
Nếu đặt $L_2 = l$ và $q_2 = q$, hai phương trình trên có thể viết dưới dạng:

$$\left. \begin{aligned} 18M_2 + 5M_3 &= 1,57ql^2 \\ 5M_2 + 10M_3 &= 1,25ql^2 \end{aligned} \right\}$$

hoặc dưới dạng phương trình ma trận:

$$\begin{bmatrix} 18 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,57ql^2 \\ 1,25ql^2 \end{Bmatrix}$$

Từ đó xác định:



Hình 3.12

$$M_2 = 0,061ql^2 ; M_3 = 0,0945ql^2 .$$

Phản lực tại các gối:

$$R_1 = \frac{q_1 L_1}{2} - \frac{M_2}{L_1} = 0,1238ql$$

$$R_3 = \frac{q_2 L_2}{2} - \frac{M_3 - M_2}{L_2} = 0,5535ql$$

Để tính R_2 cần thiết tính tổng hai thành phần R_{21} và R_{23} :

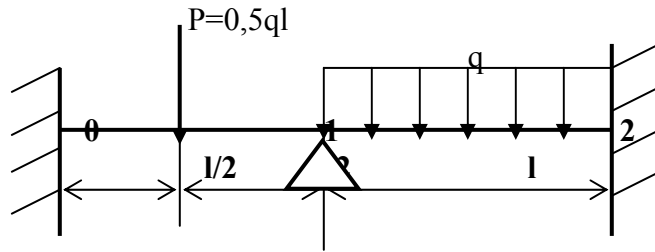
$$R_{21} = \frac{q_1 L_1}{2} - \frac{M_1}{L_1} = 0,2763ql$$

$$R_{23} = \frac{q_2 L_2}{2} - \frac{M_2 - M_3}{L_2} = 0,4665ql$$

và $R_2 = R_{21} + R_{23} = 0,7428ql$.

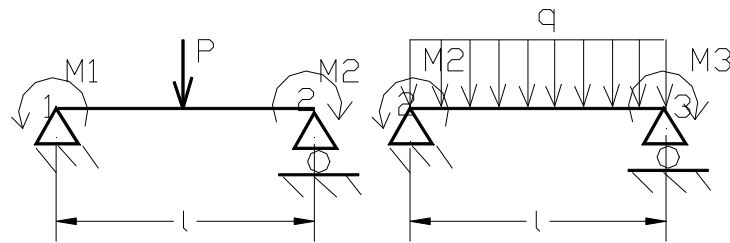
Đồ thị mô men uốn và lực cắt dầm trình bày tại hình 3.10

Ví dụ 2: Xác định phản lực và mô men uốn dầm hai nhịp sau đây theo phương pháp lực. Kết quả tính sẽ dùng để so sánh với lời giải theo phương pháp chuyển vị nêu tiếp theo tại phần dưới đây.



Hình 3.13

Mô hình tính trình bày tại hình 3.13



Hình 3.14

Phương trình xác định góc xoay tại ngàm trái $\theta_{12} = 0$:

$$-\frac{M_1 l}{3EJ} - \frac{M_2 l}{6EJ} + \frac{Pl^3}{16EJ} = 0$$

phương trình cân bằng góc xoay tại gối 2:

$$\frac{M_1 l}{6EJ} + \frac{M_2 l}{3EJ} - \frac{Pl^3}{16EJ} = -\frac{M_2 l}{3EJ} - \frac{M_3 l}{6EJ} + \frac{ql^3}{24EJ}$$

phương trình góc xoay ngàm phải:

$$\frac{M_2 l}{6EJ} + \frac{M_3 l}{3EJ} - \frac{ql^3}{16EJ} = 0$$

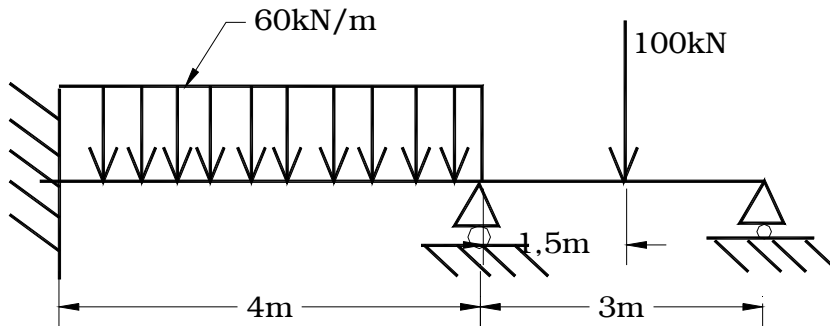
Sau khi thay $P = 0,5ql$, nhận được hệ phương trình sau.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{16} ql^2 \\ \frac{7}{16} ql^2 \\ \frac{1}{4} ql^2 \end{Bmatrix}$$

Sau khi giải hệ phương trình trên đây sẽ nhận được:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{11}{192} ql^2 \\ \frac{14}{192} ql^2 \\ \frac{17}{192} ql^2 \end{Bmatrix} = ql^2 \begin{Bmatrix} 0,0573 \\ 0,0729 \\ 0,0885 \end{Bmatrix}$$

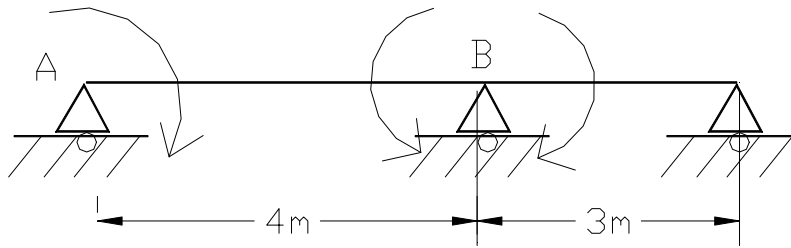
Ví dụ 3: Sử dụng phương pháp ma trận dẻo xác định chuyển vị và các thành phần lực cắt, momen uốn dầm, nêu tại hình dưới đây.



Hình 3.15

Số phân lực cần tìm gồm ba lực tại 3 gối và hai momen tại ngàm bên trái, gối giữa, tổng cộng 5. Số phương trình trong hệ phương trình cân bằng chỉ có 3. Như vậy bậc không tĩnh định (*degree of static indeterminacy*) sẽ là $5 - 3 = 2$.

Chọn momen tại ngàm và gối giữa là lực không tĩnh định M_A và M_B .



Hình 3.16

1) Biểu đồ momen uốn tại các kết cấu đã tách nhân tạo có dạng sau.

Góc xoay tại đầu dầm tựa tại hai gối, chịu tải phân bố $q = 60 \text{ kN/m}$, tính theo công thức:

$$\theta_A = -\theta_B = \frac{qL^3}{24EI}$$

Góc xoay tại đầu dầm tựa tại hai gối, chịu tải tập trung tại giữa sải $P = 100 \text{ kN}$, tính theo công

thức:
$$\theta_A = -\theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$$

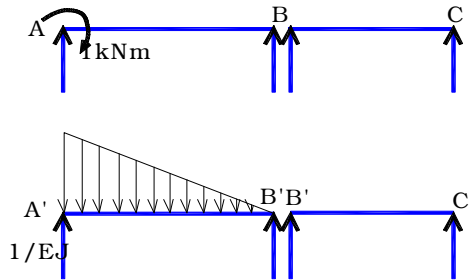
Giá trị Δ_{1L} tính tại A và Δ_{2L} tại B:

$$\Delta_{1L} = \frac{1}{24} \times \frac{4^3}{EI} = \frac{160}{EI}$$

$$\Delta_{2L} = \frac{160}{EI} + \frac{1}{16} \times \frac{100 \times 3^2}{EI} = \frac{216,25}{EI}$$

Để lập ma trận dẻo nên sử dụng phương pháp tải đơn vị áp đặt tại vị trí i , $i = 1, 2, \dots$ và xác định chuyển vị do các tải này gây ra tại j , $j = 1, 2, \dots$.

Cách làm trong trường hợp này như sau, hình 3.17

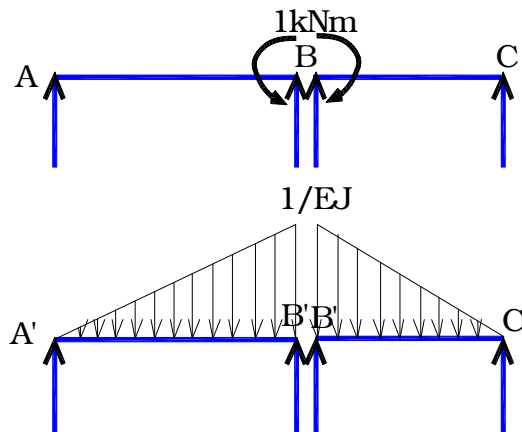


Hình 3.17

$$\delta_{11} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{EI} \times 4 = \frac{4}{3EI}$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{EI} \times 4 = \frac{2}{3EI}$$

Tương tự cách làm trên, có thể xây dựng mô hình tính:



Hình 3.18

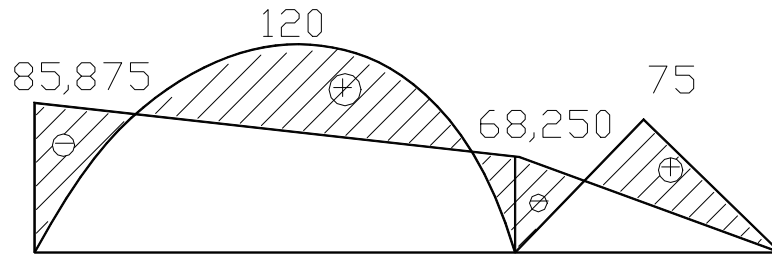
$$\delta_{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{EI} \times 4 = \frac{2}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{EI} \times 4 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{EI} \times 3 = \frac{7}{3EI}$$

Điều kiện biên bài toán thể hiện: $\Delta_1 = 0$; $\Delta_2 = 0$.

Phương trình ma trận giờ có thể viết:

$$\frac{1}{3EI} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} -160 \\ -216,5 \end{Bmatrix}$$



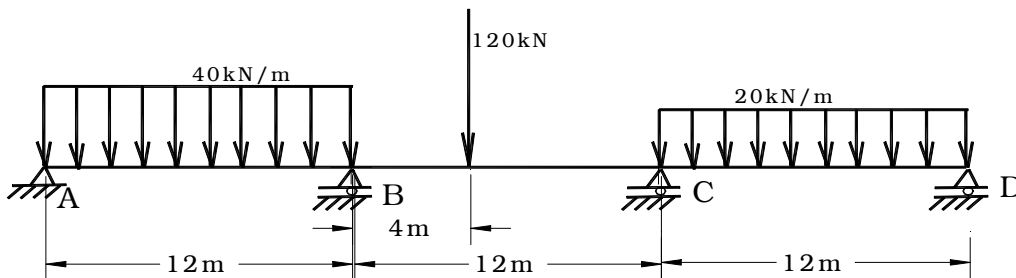
Hình 3.19

Từ đó:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -85,875 \\ -68,250 \end{Bmatrix}$$

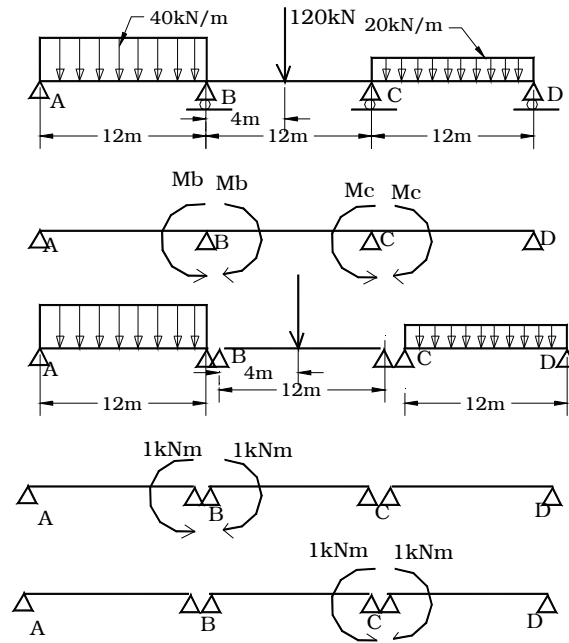
Biểu đồ momen uốn của dầm hai nhịp được vẽ tại hình 3.19

Ví dụ 4: Sử dụng phương pháp ma trận dẻo (*phương pháp lực*) xác định momen uốn tại B, C dầm sau đây.



Hình 3.20

Dầm đang nêu thuộc dạng không tĩnh định. Hai nghiệm siêu tĩnh được chọn sẽ là momen uốn M_B tại gối B và M_C tại gối C.



Hình 3.21

Các lực siêu tĩnh ký hiệu M_B và M_C trình bày tại hình a.

Chuyển vị (góc xoay) tại nút B do ngoại lực tác động trên dầm BA và do lực tập trung tại dầm BC gây, góc xoay tại C do ngoại lực trên dầm CD và dầm CB gây.

Căn cứ mô hình trình bày tại hình b, từ các bảng tính chuẩn bị sẵn có thể tính:

$$\theta_B = \theta_{BA} + \theta_{BC} = \frac{40 \times 12^3}{24EI} + \frac{120 \times 12^2}{16EI} = \frac{3946,67}{EI}$$

$$\theta_C = \theta_{CB} + \theta_{CD} = \frac{20 \times 12^3}{24EI} + \frac{120 \times 12^2}{16EI} = \frac{2293,33}{EI}$$

Hệ số dẻo thứ ij , ký hiệu δ_{ij} , xác định bằng chuyển vị tại nút thứ j do tải đơn vị đặt tại nút i gây. Tải đơn vị đặt tại B có C có dạng như trình bày tại hình c, d.

$$\delta_{11} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{1}{EI} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{1}{EI} = \frac{8}{EI}$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{1}{EI} = \frac{2}{EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{1}{EI} = \frac{2}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{1}{EI} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{1}{EI} = \frac{8}{EI}$$

Phương trình ma trận có dạng:

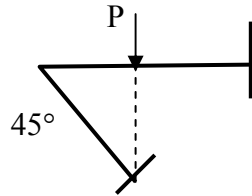
$$[\delta]\{P\} = \{\Delta\} + \{\Delta_L\}$$

$$\frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = -\frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 3946,67 \\ 2293,33 \end{Bmatrix}$$

Từ đây có thể tính giá trị hai momen đang là ẩn số:

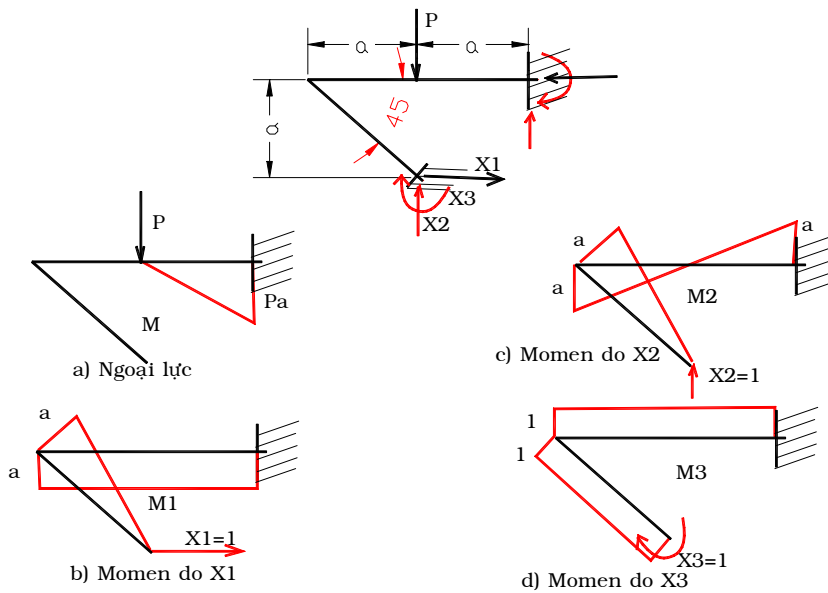
$$\begin{Bmatrix} M_B \\ M_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -449,78 \\ -174,22 \end{Bmatrix}$$

Ví dụ 5: Xây dựng đường momen uốn M , lực cắt N và lực dọc trục T khung phẳng sau.



Hình 3.22

Chọn X_1, X_2, X_3 làm lực siêu tĩnh, như trình bày tại hình a dưới.



Hình 3.23

Trong khuôn khổ *phương pháp lực*, tiến hành xây dựng hệ phương trình đại số tuyến tính, dạng phương trình ma trận:

$$[\delta] \{P\} = \{\Delta\} \quad (*)$$

Các thành phần ma trận dẻo δ_{ij} , $i = 1, 2, 3$ và $j = 1, 2, 3$ xác lập từ cơ sở chuyển vị nút i dưới tác động tải đơn vị đặt tại j ; Δ_i , $i = 1, 2, 3$ tính cho vị trí i dưới tác động lực thực của hệ thống.

$$\delta_{ij} = \int \frac{m_i m_j}{EJ} dx \quad \Delta_i = \int \frac{m_i M}{EJ} dx$$

trong đó M – momen uốn do ngoại lực gây;

$m_j, j = 1, 2, 3$ - momen do tải đơn vị (=1) gây.

Mô hình tính trình bày từ hình b.

Momen M trình bày tại hình c.

Momen m_1, m_2, m_3 trình bày tại hình d, e, f tương ứng.

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^2}{EJ} dx = \frac{\frac{1}{2}(a\sqrt{2})a\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}a^2a}{EJ} = \frac{2,47}{EJ}a^3$$

và

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{0,47a^3}{EJ}; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = \frac{0,707a^2}{EJ}; \quad \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{2,71a^2}{EJ}$$

$$\Delta_1 = \frac{aPa.a}{2EJ} = \frac{Pa^3}{2}$$

và

$$\Delta_2 = -\frac{Pa^3}{3EJ}; \quad \Delta_3 = -\frac{Pa^2}{2EJ}$$

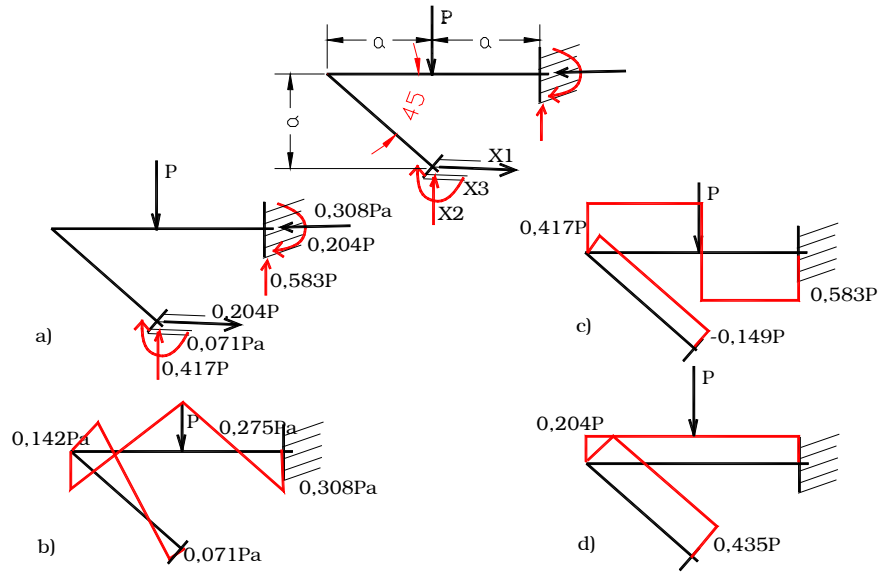
Hệ phương trình tại (*) giờ có dạng:

$$a^2 \begin{bmatrix} 2,47a & 0,472a & 2,71 \\ & 1,14a & -0,707 \\ & & 3,41/a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EJ} a^2 \begin{Bmatrix} Pa/2 \\ -Pa \\ -P/2 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ phương trình trên đây sẽ nhận được kết quả:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,204 \\ 0,417 \\ 0,071a \end{Bmatrix} P$$

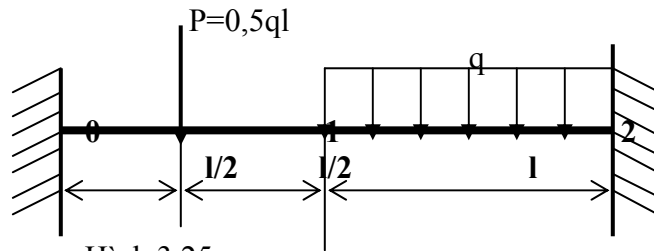
Đồ thị momen uốn, lực cắt, lực kéo, nén trình bày tại hình a, b, c, d.



Hình 3.24

Phương pháp chuyển vị

Ví dụ 1: Xác định phản lực và momen uốn dầm hai nhịp sau đây.



Hình 3.25

Tiến hành giải bài toán theo thứ tự sau:

a) Xác định số ẩn cần tìm. Trường hợp cụ thể góc xoay dầm tại ngàm số 0 và ngàm số 2 bằng 0: $\theta_0 = \theta_2 = 0$. Góc xoay tại gối số 1 cần được xác định

b) Xác định momen ngàm cố định, theo công thức từ sức bền vật liệu:

$$M_{F01} = -\frac{ql^2}{16}; \quad M_{F10} = \frac{ql^2}{16};$$

$$M_{F12} = -\frac{ql^2}{12}; \quad M_{F21} = \frac{ql^2}{12}$$

c) Xác định momen uốn tại nút.

$$M_{01} = \frac{2EJ}{l}\theta_1; \quad M_{10} = \frac{4EJ}{l}\theta_1$$

$$M_{12} = \frac{4EJ}{l}\theta_1; \quad M_{21} = \frac{2EJ}{l}\theta_1$$

d) Phương trình cân bằng góc xoay tại nút 1:

$$M_{F10} + M_{10} + M_{F12} + M_{12} = 0$$

Hay là:

$$\frac{ql^2}{16} + \frac{4EJ}{l}\theta_1 - \frac{ql^2}{12} + \frac{4EJ}{l}\theta_1 = 0$$

Từ đó có thể xác định θ_1 .

$$\theta_1 = \frac{1}{384} \frac{ql^2}{EJ}$$

e) Xác định các momen thành phần.

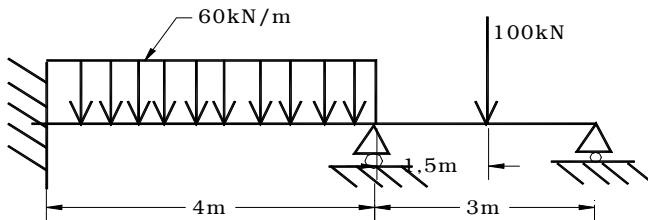
$$M_{01}^* = M_{F01} + M_{01} = -\frac{ql^2}{16} + \frac{2EJ}{l}\theta_1 = -0,0573ql^2$$

$$M_{10}^* = M_{F10} + M_{10} = \frac{ql^2}{16} + \frac{4EJ}{l}\theta_1 = 0,0729ql^2$$

$$M_{12}^* = M_{F12} + M_{12} = -\frac{ql^2}{16} + \frac{4EJ}{l}\theta_1 = -0,0729ql^2$$

$$M_{21}^* = M_{F21} + M_{21} = \frac{ql^2}{16} + \frac{2EJ}{l}\theta_1 = -0,0885ql^2$$

Ví dụ 2: Áp dụng phương pháp chuyển vị phân tích dầm hai nhịp, ngàm bên trái, tựa trên hai gối, kích thước như nêu tại hình 3.22. Độ cứng chịu uốn của dầm EJ. Bài này đã được nêu tại trang 156 khi bàn về phương pháp lực.



Hình 3.26

1) Chuyển vị đóng vai trò ẩn số trong trường hợp này là góc xoay tại B θ_B và C ký hiệu θ_C .

2) Ma trận cứng gồm các thành phần k_{ij} , hiểu như lực cần thiết tại i gây chuyển vị đơn vị tại j. Nếu lần lượt thay “chuyển vị” $\theta_B = 1$ có thể nhận:

$$k_{11} = \frac{2EJ}{4}(\theta_A + 2\theta_B - 0) + \frac{2EJ}{3}(2\theta_B + \theta_C - 0) =$$

$$\frac{4EJ}{4} + \frac{4EJ}{3} = \frac{7}{3}EJ$$

$$k_{12} = \frac{2EJ}{3}(\theta_B + 2\theta_C - 0) = \frac{2EJ}{3}$$

Trường hợp $\theta_C = 1$:

$$k_{21} = \frac{2EJ}{3}(2\theta_B + \theta_C - 0) = \frac{2EJ}{3}$$

$$k_{22} = \frac{2EJ}{3}(\theta_B + 2\theta_C - 0) = \frac{4EJ}{3}$$

3) Từ phương trình cân bằng lực có thể xác định vector tải trọng tác động lên hai gối B và C:

$$\{R\} = [-42,5 \quad -37,5]^T, \text{ kN.}$$

4) Phương trình cân bằng (b) tính cho dầm đang xem xét có dạng:

$$\begin{bmatrix} \frac{7EJ}{3} & \frac{2EJ}{3} \\ \frac{2EJ}{3} & \frac{4EJ}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -42,5 \\ -37,5 \end{Bmatrix}$$

từ đó:

$$\begin{Bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \frac{1}{EJ} \begin{Bmatrix} -11,875 \\ -22,188 \end{Bmatrix}$$

5) Momen uốn tính theo cách sau:

$$M = M_{FE} + M_L$$

Trong đó, M_{FE} - momen tính cho hai ngàm dầm sau mô hình hóa, thường được chuẩn bị sẵn trong các sổ tay tính toán bền. Hai trường hợp thường gặp như sau:

Dầm dài L, ngàm hai đầu, chịu tải trọng phân bố $q = \text{const}$, công thức tính momen tại ngàm có dạng: $M_{FE} = \frac{qL^2}{12}$.

Dầm dài L, ngàm hai đầu, chịu tải trọng tập trung P tại giữa sải, công thức tính momen tại ngàm có dạng: $M_{FE} = \frac{PL}{8}$

Áp dụng công thức trên cho dầm AB và BC sẽ là:

$$M_{FE}^{AB} = \frac{60 \times 4^2}{12} = 80 \text{ (kN.m)}, \text{ momen tại đầu dầm}$$

$$M_{FE}^{BC} = \frac{100 \times 3}{8} = 37,5 \quad (\text{kN.m}), \text{ momen tại đầu dầm}$$

Từ đó:

$$M_{AB} = -80 + \frac{2EJ}{4} \left(-\frac{11,875}{EJ} \right) = -85,938 \text{ kNm}$$

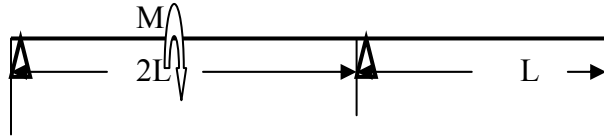
$$M_{BA} = 80 + \frac{2EJ}{4} \left(-\frac{2 \times 11,875}{EJ} \right) = 68,130 \text{ kNm}$$

$$M_{BC} = -37,5 + \frac{2EJ}{3} \left(-\frac{2 \times 11,875}{EJ} - \frac{22,188}{EJ} \right) = -68,130 \text{ kNm}$$

$$M_{CB} = 37,5 + \frac{2EJ}{3} \left(-\frac{11,875}{EJ} - 2 \times \frac{22,188}{EJ} \right) = 0$$

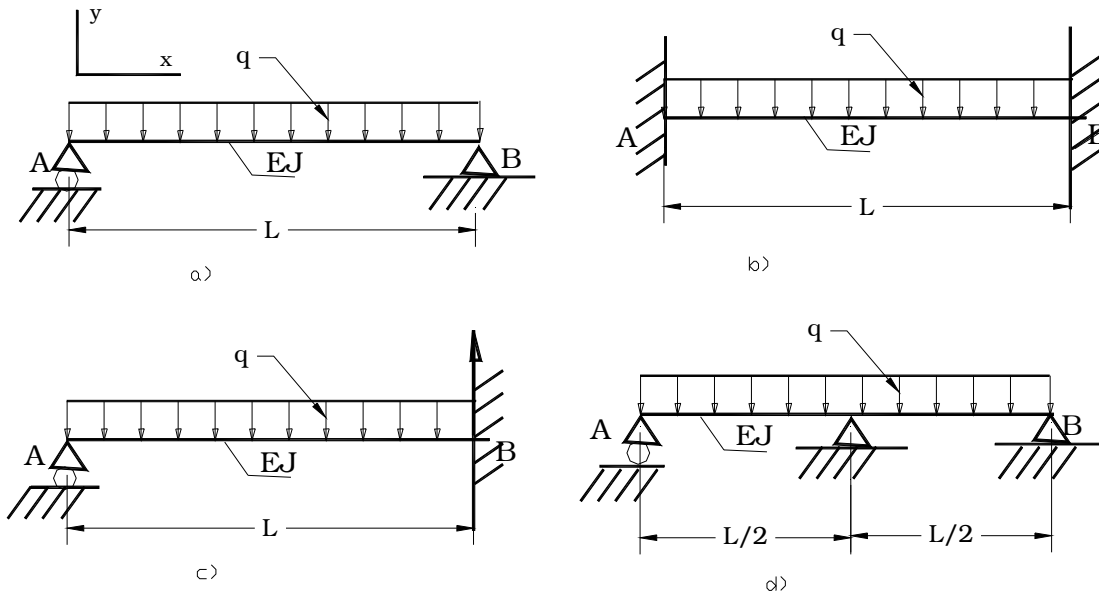
Bài tập

1. Cho trước dầm con son chiều dài L , độ cứng EJ , chịu tác động tải phân bố đều $q = \text{const}$. Xác định chuyển vị điểm đầu tự do. Chuyển vị điểm tại $L/2$ bằng bao nhiêu?
2. Tìm chuyển vị đầu cuối dầm hai sải, sải đầu dài $2L$, tựa trên hai gối tại đầu dầm và vị trí $x = 2L$, sải thứ hai dài L , đầu còn lại tự do. Dầm chịu momen uốn đặt tại vị trí $x = L$.



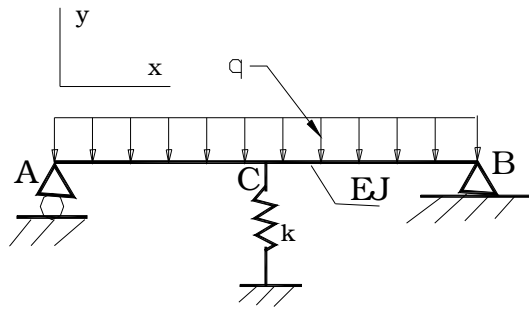
Hình 3.27

3. Sử dụng phương pháp lực giải các dầm sau đây.



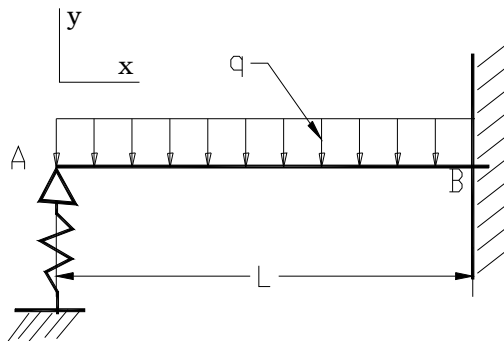
Hình 3.28

4. Giải bài toán 3. bằng phương pháp chuyển vị
5. Xác định phản lực R_C của gối đàn hồi, độ cứng lò xo k , trình bày tại hình dưới đây. Biết rằng độ cứng dầm EJ , chiều dài dầm L , đếm C giữa dầm



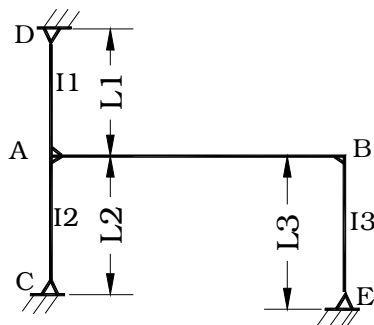
Hình 3.29

6. Xác định chuyển vị dầm chiều dài L , độ cứng EJ , ngàm bên phải, tựa trên gối đàn hồi phía trái, chịu tải trọng phân bố đều $q = \text{const}$. Độ cứng lò xo tại gối A tính bằng k .



Hình 3.30

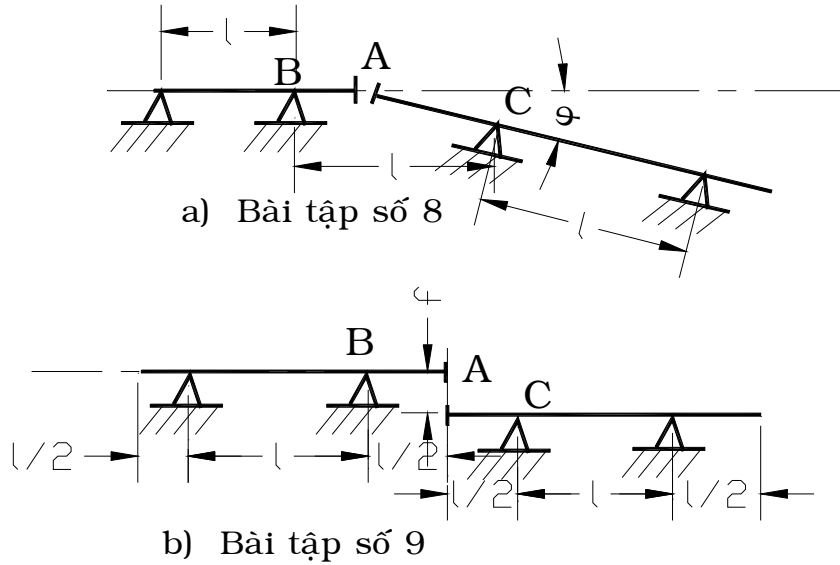
7. Xác định hệ số ngàm đoạn dầm AB hình dưới đây¹.



Hình 3.31

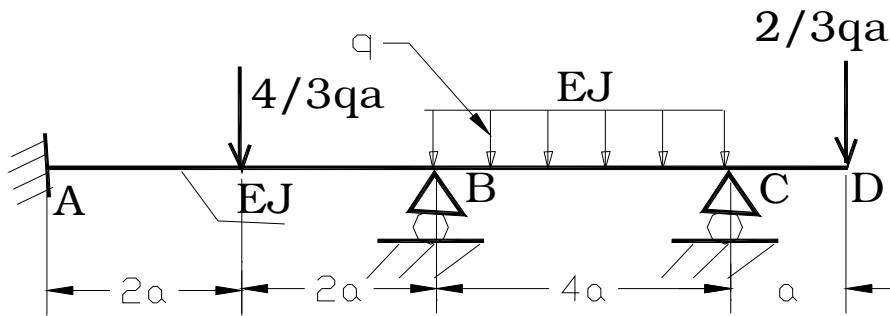
¹ Xem lời giải tại sách “Cơ học kết cấu tàu thủy và công trình nổi”, trang 264, NXB ĐHQG Tp HCM 2002.

8. Xác định phản lực tại gối ghi bằng ký tự B, C đường trục máy đẩy tàu trong trường hợp trục gãy góc khi lắp sẽ bị bắt chặt tại bích nối A.
9. Xác định phản lực tại gối ghi bằng ký tự B, C đường trục máy đẩy tàu trong trường hợp trục không đồng tâm khi lắp sẽ bị bắt chặt tại bích nối A.



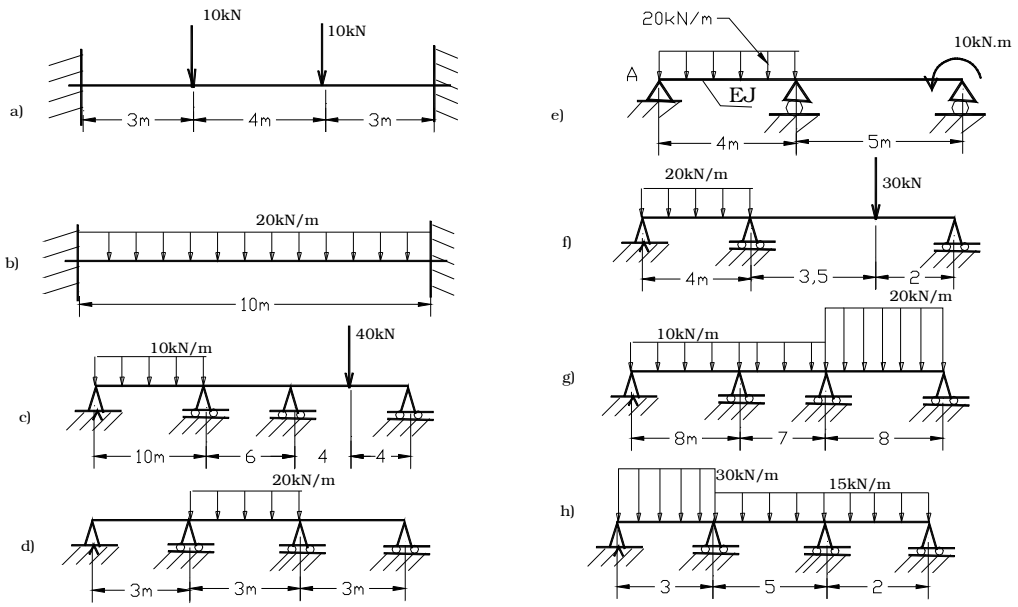
Hình 3.32

10. Sử dụng phương trình ba momen xây dựng biểu đồ uốn và lực cắt dầm dưới đây.



Hình 3.33

11. Xây dựng biểu đồ momen uốn, lực cắt. Tính phản lực các dầm nêu tại hình dưới đây.



Hình 3.34

Xoắn trục tròn

Tóm tắt

Biến dạng (*shear strain*) và chuyển vị (*deflection*) do xoắn tính từ công thức:

$$\gamma|_{r=r_0} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau \quad \text{trong đó} \quad \tau|_{r=r_0} = \frac{M_T \cdot r}{J_p} \quad (\text{a})$$

$$\text{Góc xoắn trục: } \varphi = 2(1+\nu) \frac{M_T l}{J_p E} = \frac{M_T l}{G J_p} \quad (\text{b})$$

M_T – momen xoắn, r – bán kính đến điểm tính toán, J_p - momen quán tính trong hệ trục cực, l – chiều dài trục.

Trường hợp trục rỗng, bán kính ngoài R , bán kính trong r , công thức tính J_p có dạng:

$$J_p = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4) \quad (\text{c})$$

Ví dụ 1: Trục hộp số dài $l = 0,6\text{m}$, quay $n = 500$ v/ph. Người ta gắn thiết bị đo biến dạng dưới góc 45° so với đường tâm trục, và đã ghi được độ giãn dài tương đối $\varepsilon = 3,4 \cdot 10^{-4}$. Xác định công suất máy P_e tại trục và góc xoắn trục.

Biết rằng đường kính ngoài trục $D = 8\text{cm}$, tỷ lệ đường kính trong và ngoài $\alpha = d/D = 0,8$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{MPa}$. Hệ số Poisson $\nu = 0,30$.

Lời giải:

Tại góc 45° có thể viết: $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_2 = -\tau$.

Độ giãn dài tương đối $\varepsilon = 3,4 \cdot 10^{-4}$ tính theo công thức:

$$\varepsilon = \frac{(\sigma_1 - \nu\sigma_2)}{E} = \frac{\tau(1+\nu)}{E} = 3,4 \cdot 10^{-4}$$

Ứng suất tiếp tính từ công thức:

$$\tau = \frac{\varepsilon E}{(1+\nu)} = 52,3 \text{MPa}$$

$$\text{Mô đun cắt } G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 77 \text{GPa};$$

Momen quán tính trong hệ tọa độ trục cực:

$$J_p = \frac{\pi}{32} D^4 (1 - \alpha^4) = 2,75 \cdot 10^{-6} \text{m}^4$$

Mô đun chống xoắn:

$$W_p = \frac{2J_p}{D} = 6,88 \cdot 10^{-5} \text{m}^3$$

Từ biểu thức tính ứng suất tiếp do xoắn tại lớp ngoài của trục $\tau = \frac{M_T}{W_p}$ có thể suy ra:

$$M_T = \tau.W_p = 3,6kN.m$$

Công suất truyền đến trục tính theo công thức:

$$P_e = M_T \omega = \frac{\pi n.M_T}{30} = 188kW$$

Góc xoắn trục tính theo công thức (b):

$$\varphi = \frac{M_T l}{GJ_p} = 1,02.10^{-2} rad = 35'$$

Xiển dầm thành mỏng

Tóm tắt

Ứng suất cắt trục thành mỏng tính bằng công thức:

$$\tau = \frac{M_T}{2tA} \quad (a)$$

trong đó A – diện tích phần nằm trong đường bao mặt cắt, t – chiều dày thành mỏng. Momen xoắn trục ký hiệu M_T . Biểu thức $q = \frac{M_T}{2A}$ trong công thức $M_T = 2qA$ mang tên gọi dòng ứng suất cắt.

Ứng suất cắt ống trụ dài L, thành mỏng, đường kính ngoài $D = 2R$, đường kính trong $d = 2r$, bị ngâm một đầu, chịu momen xoắn M_T tại đầu tự do nhận được kết quả sau đây. Nếu ký hiệu bán kính trung bình $r_m = (r + R)/2$, còn diện tích A trong vòng tròn này sẽ là: $A = \frac{\pi(r + R)^2}{4}$, giá trị ứng suất cắt (*shear stress*) tính như sau.

$$\tau = \frac{M_T}{2At} = \frac{M_T}{2[\pi(R+r)^2/4](R-r)} = \frac{2M_T}{\pi(R+r)^2(R-r)} \quad (b)$$

Phép tính chính xác đưa lại kết quả sau.

$$\tau = \frac{M_T}{J_p/r_m} = \frac{\frac{M_T(r+R)}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)(R^4 - r^4)} = \frac{M_T(r+R)}{\pi(R^4 - r^4)} \quad (c)$$

Từ nguyên lý bảo toàn năng có thể xác định góc xoắn theo các bước:

- Công ngoại lực $\frac{1}{2} M_T \varphi$ (d)

- Công biến dạng do xoắn $\frac{1}{2} \int_0^L \int_G \frac{\tau^2}{G} t ds dx$ (e)

Nếu thay $\varphi = \frac{d\varphi}{dx} L$ có thể tính tiếp:

$$M_T \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) = \frac{1}{G} \oint \tau^2 t ds = \frac{1}{G} \oint \frac{M_T^2}{4t^2 A^2} t ds \quad (f)$$

$$\text{và } \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{G} \frac{M_T}{4A^2} \oint \frac{1}{t} ds \quad (g)$$

Nếu ký hiệu S – chu vi mặt A, còn $t = \text{const}$, công thức cuối có dạng:

$$\bullet \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{G} \frac{M_T \cdot S}{4A^2 t} \quad (h)$$

• Góc xoắn dầm tính theo công thức Bredt sẽ là:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{G} \frac{M_T \cdot S}{4A^2 t} = \frac{4M_T}{\pi G (R+r)^3 (R-r)} \quad (i)$$

Công thức giải tích tính góc xoắn:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_T}{GJ_p} = \frac{M_T}{G(\pi/2)(R^4 - r^4)} \quad (j)$$

Ví dụ 1: Dầm thành mỏng, kết cấu kín, mặt cắt ngang hình chữ nhật, rộng 300mm, cao 100mm, chiều dày thành 3mm, chịu momen xoắn M_T .

Xác định giá trị momen xoắn giới hạn nếu nhận rằng ứng suất tiếp cho phép $[\tau] = 60 \text{ MPa}$.

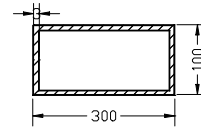
Lời giải:

Diện tích sec tơ của mặt cắt ngang dầm thành mỏng:

$$A_\omega = 2.30.10 = 600 \text{ cm}^2.$$

Ứng suất tiếp lớn nhất:

Hình 3.35



$$\tau_{\max} = \frac{M_T}{A_\omega t} = \frac{M_T}{0,06.10^{-3}} \leq 6.10^7$$

$$\text{Từ đó: } M_T = 6.10^7 \cdot 1,8.10^{-4} = 1,08.10^4 \text{ N.m} = 10,8 \text{ kNm}$$

Ví dụ 2: Tính đường kính trục tàu truyền momen quay từ động cơ công suất 8000 mã lực (PS), quay 100 v/ph. Biết rằng trục rỗng, tỷ lệ $D/d = 2$, ứng suất tiếp giới hạn $[\tau] = 300 \text{ kG/cm}^2$.

Hướng dẫn:

Sử dụng các công thức sau đây khi tính trục rỗng, đường kính trong d , đường kính ngoài D .

$$G\theta \int_{1/2d}^{1/2D} r^2 dA = M_T = G\theta J_p \quad (a)$$

$$\text{trong đó: } J_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} \quad (b)$$

$$\theta = \frac{32M_T}{\pi(D^4 - d^4)G} = \frac{M_T l}{GJ_p}; \quad \varphi = \theta l = \frac{M_T l}{GJ_p} \quad (c)$$

từ đó tính được $\tau_{\max} = \frac{16M_T}{\pi D^3 \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)}$ (d)

Đường kính trục cần tính nhằm đáp ứng truyền được momen quay M_T từ động cơ có công suất định trước P_e . Quan hệ giữa M_T trên trục với động cơ công suất P_e như sau:

$$M_T \times \frac{2\pi n}{60} = 7500 P_e \quad (e)$$

trong đó M_T đo bằng kG.m, n tính bằng v/ph, đại lượng $\frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$ gọi là vận tốc góc.

Momen xoắn trục tính theo công thức:

$$M_T = \frac{8000 \times 75 \times 100 \times 60}{2\pi \times 100}$$

Ứng suất lớn nhất tính theo (d):

$$\tau_{\max} = \frac{16}{15} \times \frac{16M_T}{\pi D^3}$$

Từ đó có thể tính:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \times 16 \times 8000 \times 75 \times 100 \times 60}{15 \times 2\pi \times 100 \times \pi \times 300}} = 47 \text{ cm}$$

Đường kính trong $d = D/2 = 23,5 \text{ cm}$.

Ví dụ 3: Dầm chữ I dài $l = 1,5 \text{ m}$, ngàm đầu trái, chịu tác động momen xoắn M_T tại đầu bên phải. Kích thước mặt cắt chữ I như sau: tấm bản dưới rộng $a = 12 \text{ cm}$, dày $t_1 = 1 \text{ cm}$, chiều dày tấm bản trên $t = 2 \text{ cm}$; Chiều cao dầm $b = 28 \text{ cm}$, dày t_1 .

Xác định giá trị giới hạn của momen xoắn M_T , biết rằng ứng suất tiếp cho phép $[\tau] = 60 \text{ MPa}$.

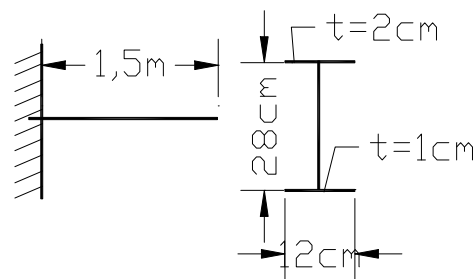
Momen quán tính trường hợp tính xoắn tính theo công thức:

$$J_T = \frac{\sum st^3}{3} = \frac{2,12.2^3 + 30.1^3}{3} = 74 \text{ cm}^4$$

Ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{M_T t_{\max}}{J_T} = \frac{2.10^{-2} M_T}{74.10^{-8}} = 2,7.10^4 M_T$$

Hình 3.36



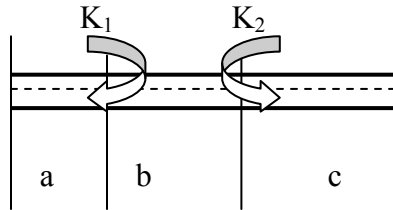
Momen xoắn giới hạn:

$$\tau_{\max} = 2,7.10^4 M_T \leq 6.10^7,$$

Từ đây $M_T = 2,22.10^3 \text{ Nm}$.

Xoắn trục không tĩnh định

Ví dụ 1: Trục đặc, ngâm hai đầu, chịu tác động hai momen xoắn $K_1 = 0,4 \text{ kNm}$ và $K_2 = 0,6 \text{ kNm}$, quay ngược chiều nhau. Chọn đường kính trục nhằm đảm bảo bền và cứng, biết rằng ứng suất tiếp giới hạn $[\tau] = 40 \text{ MPa}$, góc xoắn giới hạn $[\varphi] = 0,25^\circ/\text{m}$. Mô đun cắt $G = 8.10^4 \text{ MPa}$, các khoảng cách $a = 0,5\text{m}$; $b = 0,75\text{m}$; $c = 1,25\text{m}$.



Hình 3.37

Lời giải:

Sử dụng phương pháp lực giải bài toán không tĩnh định thường gặp này. Momen cần tìm (*tải siêu tĩnh redundant*) tại ngâm trái ký hiệu M_B , tham gia vào phương trình cân bằng:

$$\frac{K_1 \cdot a}{G \cdot J_p} - \frac{K_2 \cdot (a + b)}{G \cdot J_p} + \frac{M_B \cdot (a + b + c)}{G \cdot J_p} = 0$$

Từ phương trình cuối có thể xác định:

$$M_B = 220 \text{ Nm}$$

$$M_A = 400 + 220 - 600 = 20 \text{ Nm}$$

Xây dựng đồ thị M_T có trường hợp này, có thể rút ra rằng $M_{\max} = 380 \text{ Nm}$.

Chọn đường kính trục theo điều kiện bền:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_T}{\pi[\tau]}} = 0,0362\text{m} = 3,62\text{cm}$$

Chọn đường kính theo tiêu chuẩn cứng:

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_T}{\pi G [\varphi]}} = 0,0575\text{m} = 5,75\text{cm}$$

Từ kết quả trên, chọn $D = 5,75\text{cm}$ làm đường kính trục.

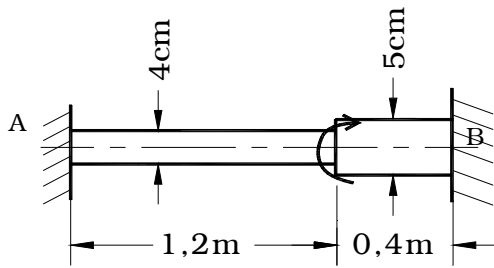
Trường hợp trục rỗng ruột, đường kính ngoài D , đường kính trong d , công thức tính đường kính theo tiêu chuẩn bền và cứng mang giá trị tương ứng sau:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M_T}{\pi(1-\alpha^4)[\tau]}}; \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

$$D = \sqrt[4]{\frac{32M_T}{\pi(1-\alpha^4)[\varphi]}}; \quad \alpha = \frac{d}{D}$$

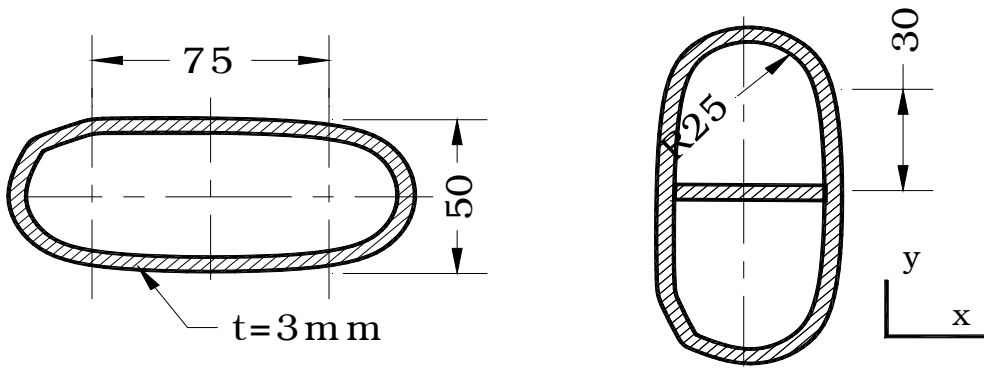
Bài tập

1. Xác định ứng suất cắt và góc xoắn ống tròn thành mỏng làm từ thép. Biết rằng chiều dài ống 0,5m, chịu tác động momen xoắn 1 kN.m. Mô đun đàn hồi vật liệu $E = 200 \text{ GPa}$, hệ số Poisson $\nu = 0,29$.
2. Xác định momen xoắn tại hai đầu ngàm trực nêu tại hình 3.32. Momen xoắn áp đặt $Q = 10 \text{ kN.m}$. Mô đun cắt $G = 3.10^4 \text{ MPa}$.



Hình 3.38

3. Ống thép mặt cắt ngang kết cấu thành mỏng, nửa hình tròn, chiều dày thành $t = 3 \text{ mm}$, bán kính trung bình $R = 40 \text{ mm}$, chịu momen xoắn 500 N.m. Ống dài 300mm. Mô đun đàn hồi $E = 210 \text{ GPa}$, hệ số Poisson $\nu = 0,29$. Xác định ứng suất cắt trung bình và góc xoắn dầm thành mỏng này.
4. Ống thép thành mỏng dài 1m, mặt cắt ngang trình bày tại hình 3.32, chịu momen



a) Bài tập 3

b) Bài tập 4

Hình 3.39

xoắn 2kN.m. Tính chất vật liệu: $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,29$.

Xác định ứng suất cắt trong thành ống. Xác định góc xoắn ống.

4. Kết cấu ống hai liên (hai vùng kín), làm bằng nhôm, mặt cắt có dạng nêu tại hình 3.33b. Chiều dày thành ống và thanh ngang $t = 5 \text{ mm}$. Mô đun đàn hồi nhôm $E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0,33$.

Xác định ứng suất cắt trong thành ống. Xác định góc xoắn ống.

ÔN ĐỊNH CỘT

Tóm tắt:

a/ **Xác định tải giới hạn bằng phương trình vi phân**

Độ võng dầm tính theo quan hệ $EJy'' = M = -Py$. Từ phương trình này có thể viết:
 $y'' + k^2y = 0$ trong đó $k^2 = \frac{P}{EJ}$

Nghiệm của phương trình vi phân tìm ở dạng:

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

Thay điều kiện biên cho bài toán trình bày tại hình 3.34, tại $x = 0, y = 0$ và tại $x = L, y = 0$ có thể viết $C_2 = 0$, còn $C_1 \sin kL = 0$ với $C_1 \neq 0$.

$KL = n\pi$, n – số nguyên chẵn.

Với $k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{P}{EJ}$ có thể viết:

$$P = \frac{n^2\pi^2 EJ}{L^2}$$

Giá trị trên đây gọi là tải giới hạn hay là tải Euler.

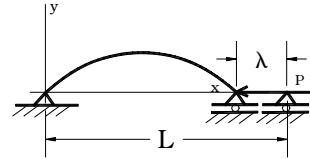
Trường hợp $n = 1$ tải giới hạn sẽ có giá trị $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$

Trong công thức E – mô đun đàn hồi vật liệu, J – momen quán tính mặt cắt, L – chiều dài cột.

Tổng quát tải P_{cr} thể hiện bằng công thức: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(KL)^2}$, trong đó K phụ thuộc vào điều kiện hình học đầu cột. Ứng suất giới hạn (ứng suất Euler) có dạng:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{(KL)^2 \cdot A}, \text{ với } A - \text{diện tích mặt cắt ngang cột.}$$

Nếu ký hiệu $r = \sqrt{J/A}$, $KL = L_e$ – chiều dài hữu hiệu, công thức tính ứng suất giới hạn được hiểu: $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2}$.



Hình 3.40

Công thức Euler đúng cho trường hợp: $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2} \leq \sigma_p$, tương ứng trường hợp $(L_e/r) \geq$

105 với thép thông thường $E = 210\text{kN/mm}^2$, giới hạn đàn hồi $\sigma_p = 190\text{ N/mm}^2$. Ngoài giới hạn trên tải giới hạn tính theo công thức Engesser-Shanley hoặc những công thức khác, dạng chung:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(L_e/r)^2}, \text{ trong đó } E_t \text{ phụ thuộc vào bản thân } \sigma_r, L_e/r.$$

Những công thức đang được dùng được viết gọn: $\sigma_{cr} = A - B(L_e/r)$

Tại châu Âu, giá trị A, B dùng cho thép cac bon có $E = 210\text{kN/mm}^2$ như sau:

Thép Fe 360: $A = 310, B = 1,14$.

Với thép Fe 510 $A = 459,3 B = 1,98$.

Thép nikel hàm lượng 0,05%Ni $A = 470, B = 2,3$.

Tại Nga sử dụng đường tiếp tuyến khi tính ứng suất giới hạn, với thép có $E = E = 210\text{kN/mm}^2$, $\sigma_p = 200\text{MPa}$, $\sigma_Y = 240\text{MPa}$ công thức tính σ_{cr} sẽ là:

$$\sigma_{cr} = 300 - (L_e/r) \text{ (MPa) khi } \sigma_{cr} \leq \sigma_Y$$

Thép chrom: $\sigma_{cr} = 1000 - 5,2(L_e/r) \text{ (MPa)}$

Đưa ra: $\sigma_{cr} = 400 - 3,33(L_e/r) \text{ (MPa)}$

Tại USA sử dụng đường parabol Johnson khi tính ứng suất giới hạn ngoài phạm vi đường cong Euler.

$$\sigma_{cr} = \sigma_Y - \frac{\sigma_Y^2}{4\pi^2 E} (L_e/r)^2 \quad \left(\sigma_{cr} > \frac{\sigma_Y}{2} \right)$$

b/ Xác định tải giới hạn bằng phương pháp năng lượng

Năng lượng uốn dầm tính bằng biểu thức:

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ} dx = \frac{1}{2} \int_0^l EJy''^2 dx = P_{cr} \lambda \quad (\text{a})$$

Mặt khác λ tính theo công thức:

$$\lambda = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx \quad (\text{b})$$

$$\text{Từ đó: } P_{cr} = \frac{\int_0^l EJy''^2 dx}{\int_0^l y'^2 dx} \quad (\text{c})$$

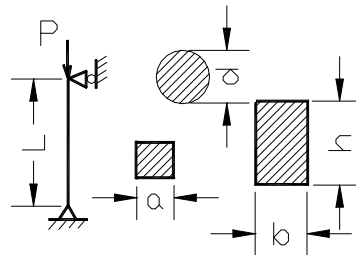
Hàm $y(x)$ chọn phù hợp với điều kiện từng bài toán.

Ví dụ 1: Xác định tải giới hạn dầm độ cứng EJ, dài L, chịu tác động tải trọng nén P như tại hình 3.40. Hàm y thích hợp trong trường hợp cụ thể nên là $y = C \sin \frac{\pi x}{l}$. Thay y vào công thức (c) sẽ nhận được:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

Bài tập

1. Cọc thép chiều dài L, gắn kết vào kết cấu như tại hình . Xác định kích thước mặt cắt ngang để kết cấu có khả năng không mất ổn định.



Hình 3.41

Tính tải giới hạn cho những trường hợp

- a/ Mặt cắt ngang hình tròn, $d = 30\text{mm}$, $L = 1,2\text{m}$
- b/ Mặt cắt hình chữ nhật $L = 1,2\text{m}$, $h/b = 2$, $b = 25\text{mm}$
- c/ Mặt cắt hình vuông $L = 1,2\text{m}$, $a = 30\text{mm}$.

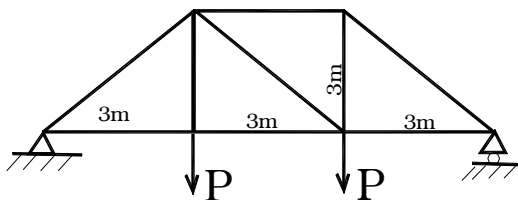
Biết rằng $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{MPa}$.

2. Tính tải giới hạn cho xi lanh động cơ đốt trong sau đây. Chiều dài $L = 0,9\text{m}$. Lực nén lớn nhất do khí đốt 160kN . Xác định kích thước cho hai phương án kết cấu: (1) piston đặc, mặt cắt ngang tròn đường kính d , và (2) kết cấu ống thành mỏng, tỷ lệ đường kính trong với đường kính ngoài $0,65$.

Vật liệu chế tạo có $E = 2,15 \cdot 10^5 \text{MPa}$. Giới hạn chảy vật liệu $\sigma_Y = 540 \text{MPa}$.

3. Ống hợp kim nhôm (đưa ra) dài $L = 1,06\text{m}$ chịu tác động lực nén P, như hình ảnh đã đề cập tại bài tập 1. Xác định đường kính ống nếu tỷ lệ giữa đường kính ống và chiều dày $d/t = 25$. Biết rằng $P = 32 \text{kN}$.

4. Kết cấu khung từ các thanh chịu kéo, nén trình bày tại hình 3.36 cần được kiểm tra ổn định.



Hình 3.42

Xác định giá trị của tải giới hạn P_{cr} của hệ khung. Biết rằng $E = 200\text{MGa}$, bán kính momen quán tính $r = \sqrt{J/A}$ của mỗi thanh bằng 2,5cm, diện tích mặt cắt $A = 6,45\text{ cm}^2$.

5. Xác định tải giới hạn cho dầm trình bày tại hình 3.34, giả sử rằng đường cong biến dạng đàn hồi có dạng:

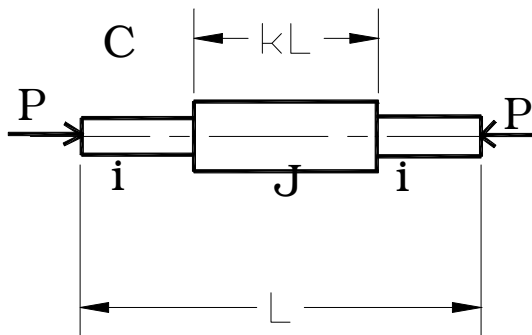
a/ $w = C(Lx - x^2)$

b/ $w = C(L^3x - 2Lx^3 + x^4)$

6. Xác định tải giới hạn trình bày dạng:

$$P_{cr} = C^2 \frac{EJ}{L^2}$$

trong đó C – hệ số phụ thuộc vào quan hệ $A = i/J$ và k nêu tại hình 3.43.



Hình 3.43

Giả sử đường cong trình bày độ võng ghi theo một trong hai dạng sau:

a/ $w = \frac{4f}{L^2}(Lx - x^2)$; b/ $w = f \sin \frac{\pi x}{L}$

trong đó f – độ võng lớn nhất tại $x = L/2$.

Tính tải giới hạn cho các trường hợp sau: 1) $A = 0,2$, $k = 0,2$; 2) $A = 0,4$, $k = 0,2$; 3) $A = 0,6$, $k = 0,6$.

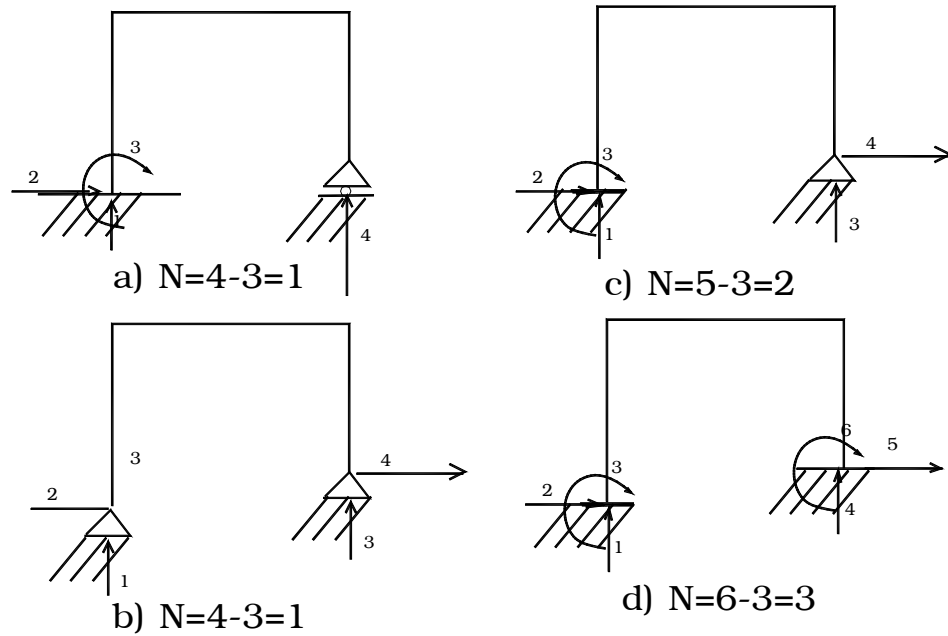
Chương 4

KHUNG VÀ GIÀN

4.1 Tóm tắt

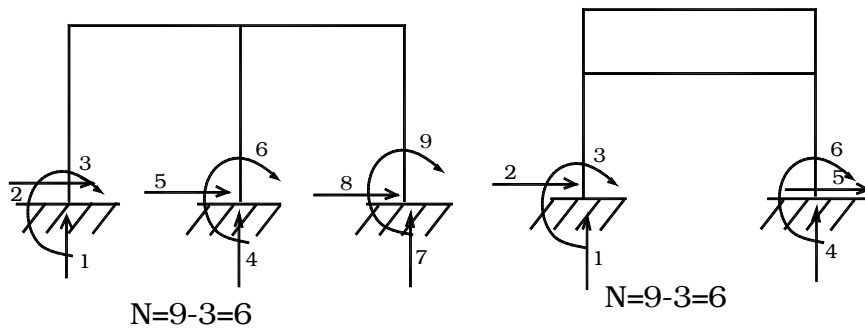
Xác định bậc không tĩnh định khung phẳng theo hướng dẫn sau:

Khung giản đơn



Hình 4.1

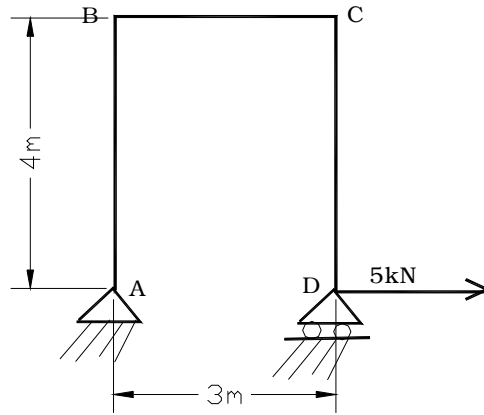
Khung phẳng nhiều tầng, khung phức tạp



Hình 4.2

4.2 Nguyên lý bảo toàn năng lượng trong xử lý khung phẳng

Ví dụ 1: Áp dụng nguyên lý bảo toàn năng lượng xác định chuyển vị nút D khung phẳng giới thiệu tại hình. Lực $P = 5 \text{ kN}$, độ cứng các thanh $EJ = 8000 \text{ kN.m}^2$.



Hình 4.3

Từ chương trước đã trình bày, công biến dạng trong vật thể tính bằng công thức $\int_V \frac{1}{2} \sigma \times \varepsilon dV$. Khi áp dụng công thức trên tính công biến dạng các dầm, thay biến dạng bằng quan

hệ $\varepsilon = \frac{M}{EJ} z$, trong đó E – mô đun đàn hồi, J – momen quán tính mặt cắt, z – khoảng cách từ trục

trung hòa mặt cắt đến vị trí tính toán, công thức tính công biến dạng trở thành $\int_V \frac{1}{2} \frac{M^2 z^2}{EJ^2} dV$. Sau

tích phân chúng ta nhận được phương trình tính công biến dạng dầm dài L , độ cứng EJ , chịu tác động momen uốn M dạng sau đây: $\int_0^L \frac{M^2}{2EJ} dx$ (*)

Có thể thành lập các phương trình tính momen uốn do lực $P = 5 \text{ kN}$, đặt ngang tại D, gây ra cho từng thanh thuộc kết cấu khung phẳng đang xét.

Đoạn CD: $M = 5x$;

Đoạn BC: $M = 20$;

Đoạn AB: $M = 20 - 5x$;

Công biến dạng tính theo công thức (*) đang nêu:

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \frac{1}{2} \frac{(5x)^2}{EJ} dx + \int_0^3 \frac{1}{2} \frac{(20)^2}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{1}{2} \frac{(20 - 5x)^2}{EJ} dx = \\ & = \frac{266,67}{EJ} + \frac{600}{EJ} + \frac{1}{2EJ} \left[1600 - 1600 + \frac{25 \times 64}{3} \right] = \frac{1133,33}{EJ} \end{aligned}$$

Công do ngoại lực thực hiện:

$$\frac{1}{2} \times P \times \Delta = \frac{1}{2} \times 5(kN) \times \Delta$$

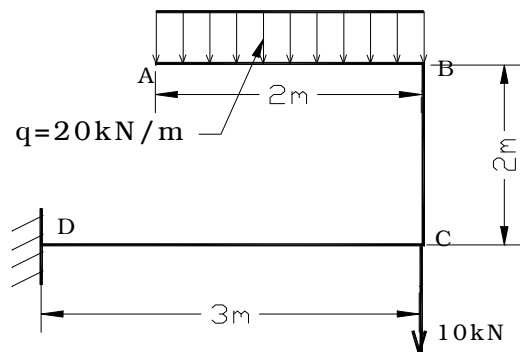
Cân bằng công biến dạng với công ngoại lực thực hiện có thể thấy:

$$\frac{1}{2} \times 5 \times \Delta = \frac{1133,33}{EJ} \Rightarrow \Delta = \frac{453,33}{EJ} \text{ hay là:}$$

$$\Delta = 453,33 / 8000 = 0,0567m. \text{ Có thể đổi thành } \Delta = 56,7mm.$$

4.3 Phương pháp tải đơn vị

Ví dụ 1: Áp dụng công thức (e) xác định chuyển vị điểm A khung phẳng làm bằng thép tại hình 4.4 dưới đây. Mô đun đàn hồi vật liệu $E = 200 \text{ GPa}$. Momen quán tính mặt cắt $J = 150.10^4 \text{ mm}^4$.



Hình 4.4

Phương trình momen M do tải trọng bên ngoài áp đặt:

$$\text{Đoạn AB: } M = 10x^2;$$

$$\text{Đoạn BC: } 40;$$

$$\text{Đoạn cD: } 40 - 90x.$$

Phương trình momen uốn tính cho các thanh khi áp đặt tải đơn vị tại A, theo hướng từ trên xuống.

$$\text{Đoạn AB: } M_1 = x;$$

$$\text{Đoạn BC: } M_1 = 2;$$

$$\text{Đoạn CD: } M_1 = 2 - x.$$

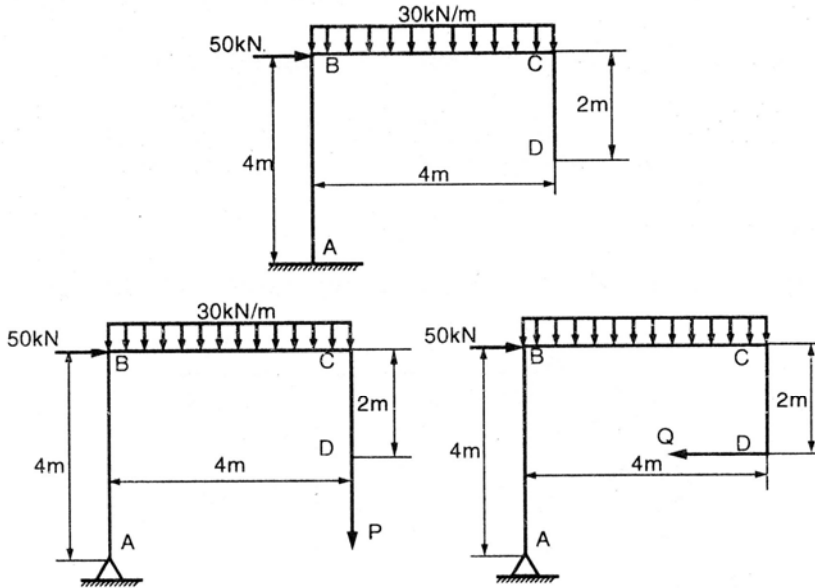
$$EJ\Delta = \int_0^2 10x^2 \cdot x dx + \int_0^2 80 dx + \int_0^3 (40 - 90x)(2 - x) dx = 260$$

Từ đó:

$$\Delta = \frac{260}{240 \times 10^9 \times 150 \times 10^{-8}} = 7,222.10^{-4} m$$

4.4 Ứng dụng định lý Castigliano xác định chuyển vị khung

Ví dụ 1: Xác định chuyển vị theo hướng ngang u và v theo hướng thẳng đứng điểm D của khung, tại hình 4.5 dưới. Kích thước khung ghi tại hình. Độ cứng các thanh $EJ = 12.10^{13} \text{ N.mm}^2$.



Hình 4.5

Các lực mượn (dummy loads) P và Q được gán tại D theo hướng từ trên xuống và sang ngang, tạo momen uốn. Momen uốn do tải trọng $q(x) = 30 \text{ kN/m}$ cùng P gây ra tính cho toàn khung như sau:

$$\text{Đoạn AB: } M = -(4P + 240 + 50x);$$

$$\text{Đoạn BC: } M = -(Px + 15x^2)$$

$$\text{Đoạn CD: } M = 0.$$

Công biến dạng tính bằng công thức (*):

$$U = \int_0^4 \frac{(4P + 240 + 50x)^2}{2EJ} dx + \int_0^4 \frac{(Px + 15x^2)^2}{2EJ} dx + 0$$

Chuyển vị theo hướng lực P tác động tính theo công thức Castigliano:

$$\Delta_V = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^4 2 \frac{(4P + 240 + 50x)}{2EJ} \times 4 dx + \int_0^4 2 \frac{(Px + 15x^2)}{2EJ} dx$$

Khi thay $P = 0$ sẽ nhận được:

$$\Delta_V = \int_0^4 \frac{(240 + 50x)}{EJ} \times 4 dx + \int_0^4 \frac{(15x^2)}{EJ} dx = \frac{6400}{EJ}$$

Thay giá trị $EJ = 12.10^{13} \text{ N.mm}^2$ vào công thức tính sẽ nhận được:

$$\Delta_V = \frac{6400}{12.10^4} = 0,0533 \text{ m}$$

Momen uốn do tải trọng bên ngoài cùng Q gây ra tính cho toàn khung như sau:

$$\text{Đoạn AB: } M = -[Q(2-x) + 240 + 50x];$$

$$\text{Đoạn BC: } M = -(20 + 15x^2)$$

$$\text{Đoạn CD: } M = Qx.$$

Công biến dạng tính bằng công thức (*):

$$U = \int_0^4 \frac{(2Q - Qx + 240 + 50x)^2}{2EJ} dx + \int_0^4 \frac{(2Q + 15x)^2}{2EJ} dx + \int_0^2 \frac{(Qx)^2}{2EJ} dx$$

Công thức tính chuyển vị điểm D theo hướng ngang có dạng:

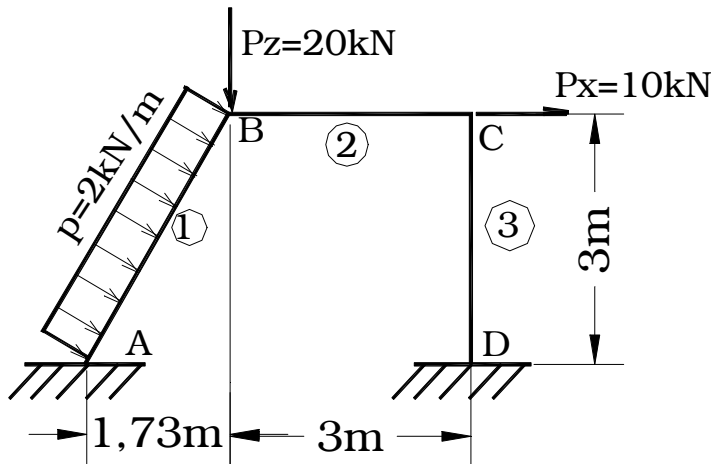
$$\Delta_H = \frac{\partial U}{\partial Q} \Big|_{Q=0} = \int_0^4 \frac{(240 + 50x)(2-x)}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{30x^2}{EJ} dx + 0$$

Sau thay thế $\Delta_H = 3,1\text{mm}$.

Ví dụ 2: Xác định phản lực cho khung phẳng hệ thống siêu tĩnh tại hình 4.6.

Chuyển vị nút D cuối dầm số 3 trên hình có thể xác định theo công thức Mohr:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial U}{\partial R_V} = 0 = \frac{1}{EJ} \int M \frac{\partial M}{\partial R_V} dx \\ v &= \frac{\partial U}{\partial R_H} = 0 = \frac{1}{EJ} \int M \frac{\partial M}{\partial R_H} dx \\ \theta &= \frac{\partial U}{\partial M_d} = 0 = \frac{1}{EJ} \int M \frac{\partial M}{\partial R_d} dx \end{aligned} \right\} \quad (a)$$



Hình 4.6.

Nếu ký hiệu R_H – phản lực phương ngang, R_V – phản lực phương thẳng đứng, có thể viết phương trình cân bằng lực sau cho hệ thống, A, B, C, D chỉ các nút nêu tại hình 4.6.

$$x'R_{HD} + M_D = M|_3$$

$$3R_{HD} + x''R_{VD} + M_D = M|_2$$

$$(3 - \tilde{y}''')R_{HD} + (3 + \tilde{x}''')R_{VD} + M_D$$

$$P_z \tilde{x}'''' - P_x \tilde{y}'''' - P_0 \frac{(x'''')^2}{2} = M|_1$$

trong đó $\tilde{y}''' = x''' \sin \alpha$; $\tilde{x}''' = x''' \cos \alpha$; $\alpha = 60^\circ$; $0 \leq x' \leq 3$; $0 \leq x'' \leq 3$;

$$0 \leq x''' \leq 3,464.$$

và $M|_i, i = 1, 2, 3$.

Tiến hành các phép tích phân sau:

$$\frac{1}{EJ} \int M \frac{\partial M}{\partial R_{VD}} \Big|_1 dx + \frac{1}{EJ} \int M \frac{\partial M}{\partial R_{VD}} \Big|_2 dx + \frac{1}{EJ} \int M \frac{\partial M}{\partial R_{VD}} \Big|_3 dx = 0 \quad (b)$$

$$\text{với } \frac{\partial M}{\partial R_{VD}} \Big|_3 = 0; \frac{\partial M}{\partial R_{VD}} \Big|_2 = x''; \frac{\partial M}{\partial R_{VD}} \Big|_1 = 3 + \tilde{x}'''';$$

Kết quả tính đưa lại:

$$32,088R_{HD} + 61,638R_{VD} + 18,696M_D = 524,694. \quad (c)$$

Tiếp tục tính theo dòng 2 công thức (a):

$$\frac{\partial M}{\partial R_{VD}} \Big|_3 = x'; \frac{\partial M}{\partial R_{VD}} \Big|_2 = 3; \frac{\partial M}{\partial R_{VD}} \Big|_1 = 3 + \tilde{y}'''';$$

và từ dòng 3:

$$\frac{\partial M}{\partial M_D} \Big|_3 = \frac{\partial M}{\partial M_D} \Big|_2 = \frac{\partial M}{\partial M_D} \Big|_1 = 1$$

Có thể xác lập tiếp hai phương trình cân bằng, dạng tương tự (c). Tập hợp lại trong hệ phương trình đại số tuyến tính có thể thấy:

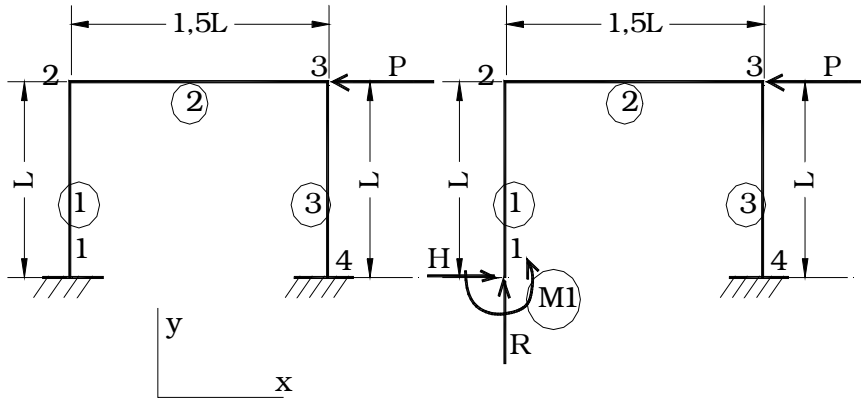
$$\begin{bmatrix} 32,088 & 61,638 & 17,89 \\ 46,392 & 32,088 & 18,696 \\ 18,698 & 17,892 & 9,464 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{HD} \\ R_{VD} \\ M_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 524,694 \\ 122,35 \\ 125,810 \end{Bmatrix}$$

Giải hệ phương trình theo phương pháp lực đang nêu nhận được:

$$R_{HD} = -10,205 \text{ kN}; \quad R_{VD} = 9,188 \text{ kN}; \quad M_D = 16,217 \text{ kN.m}$$

4.5 Nguyên lý công bù ảo

Ví dụ 1: Áp dụng nguyên lý công bù ảo xác định phân bố momen uốn khung phẳng dạng chữ Π , thường gọi portal frame, như tại hình 4.7.



Hình 4.7

Độ cứng các thanh của khung EJ. Chiều dài hai thanh đứng L, thanh ngang 1,5L. Lực ngang P tác động tại nút góc phải khung, từ phải sang trái.

Độ không tĩnh định khung đang xét là 3. Trường hợp này có thể chọn ba phản lực, phản lực theo hướng thẳng đứng R, theo hướng ngang H và momen M, tính tại nút 1 làm lực không tĩnh định.

Phương trình trình bày phân bố momen uốn trong các thanh được viết như sau: Thanh 1: $M_{(1)} = -Hs - M$;

$$\text{Thanh 2: } M_{(2)} = -HL + Rs - M;$$

$$\text{Thanh 3: } M_{(3)} = -H(L - s) + 1,5LR - M - Ps;$$

Lực ảo tính theo công thức:

$$\text{Thanh 1: } \delta M_{(1)} = -\delta Hs - \delta M;$$

$$\text{Thanh 2: } \delta M_{(2)} = -\delta HL + \delta Rs - \delta M;$$

$$\text{Thanh 3: } \delta M_{(3)} = -\delta H(L - s) + 1,5L\delta R - \delta M;$$

Công nội lực, công bù ảo tính cho mỗi thanh có dạng:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}}^{*(1)} &= \frac{1}{EJ} \int_0^L M^{(1)} \delta M^{(1)} ds = \frac{1}{EJ} \int_0^L (-Hs - M)(-\delta Hs - \delta M) ds = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{1}{3} L^3 H + \frac{1}{2} L^2 M \right) \delta H + \left(\frac{1}{2} L^2 H + LM \right) \delta M \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{int}}^{*(2)} &= \frac{1}{EJ} \int_0^{1,5L} M^{(2)} \delta M^{(2)} ds = \frac{1}{EJ} \int_0^{1,5L} (-Hs + Rs - M)(-\delta HL + \delta Rs - \delta M) ds = \\
&= \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{3}{2} L^3 H - \frac{9}{8} L^3 R + \frac{3}{2} L^2 M \right) \delta H + \left(\frac{3}{2} L^2 H - \frac{9}{8} L^2 R + \frac{3}{2} LM \right) \delta M \right] + \\
&\quad \frac{1}{EJ} \left[\left(-\frac{9}{8} L^3 H + \frac{9}{8} L^3 R - \frac{9}{8} L^2 M \right) \delta R \right] \\
\delta W_{\text{int}}^{*(3)} &= \frac{1}{EJ} \int_0^L M^{(3)} \delta M^{(3)} ds = \frac{1}{EJ} \int_0^L (-H[L-s] + 1,5LR - M - Ps)(-\delta H[L-s] + 1,5L\delta R - \delta M) ds \\
&= \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{1}{2} L^3 H - \frac{3}{4} L^3 R + \frac{1}{2} L^2 M + \frac{1}{6} L^3 P \right) \delta H + \left(\frac{1}{2} L^2 H - \frac{21}{8} L^2 R + \frac{7}{2} LM + \frac{1}{2} L^2 P \right) \delta M \right] + \\
&\quad \frac{1}{EJ} \left[\left(-\frac{15}{8} L^3 H + \frac{27}{8} L^3 R - \frac{3}{8} L^2 M - \frac{3}{4} L^3 P \right) \delta R \right]
\end{aligned}$$

Từ đó:

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{int}}^* &= \delta W_{\text{int}}^{*(1)} + \delta W_{\text{int}}^{*(2)} + \delta W_{\text{int}}^{*(3)} = \\
&= \frac{1}{EJ} \left[\left(\frac{13}{6} L^3 H - \frac{15}{8} L^3 R + \frac{5}{2} L^2 M + \frac{1}{6} L^3 P \right) \delta H + \right. \\
&\quad \left. \left(-\frac{15}{8} L^3 H + \frac{27}{8} L^3 R - \frac{21}{8} L^2 M + \frac{3}{4} L^3 P \right) \delta R + \left(\frac{5}{2} L^2 H - \frac{21}{8} L^2 R + \frac{7}{2} LM + \frac{1}{2} L^2 P \right) \delta M \right]
\end{aligned}$$

Vì rằng công bù ảo do ngoại lực tác động bằng 0 tính cho trường hợp các chuyển vị liên quan nút 1 đều bằng 0 có thể thấy ngay rằng: $\delta W_{\text{int}}^* = \delta W_{\text{ext}}^* = 0$. Từ đó có thể viết tiếp:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{13}{6} L^3 H - \frac{15}{8} L^3 R + \frac{5}{2} L^2 M + \frac{1}{6} L^3 P &= 0 \\
\left(-\frac{15}{8} L^3 H + \frac{27}{8} L^3 R - \frac{21}{8} L^2 M + \frac{3}{4} L^3 P \right) &= 0 \\
\left(\frac{5}{2} L^2 H - \frac{21}{8} L^2 R + \frac{7}{2} LM + \frac{1}{2} L^2 P \right) &= 0
\end{aligned} \right\}$$

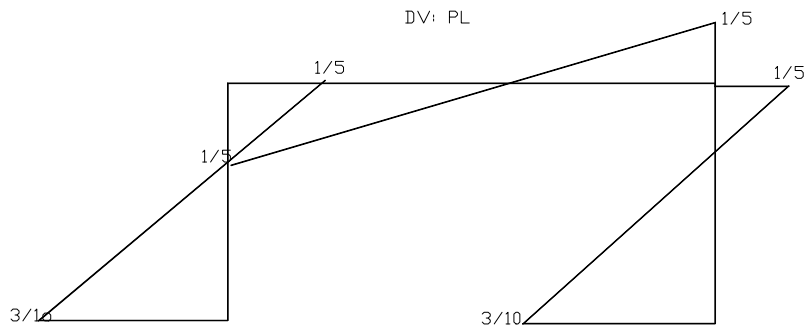
hay là:

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{6} L^3 & -\frac{15}{8} L^3 & \frac{5}{2} L^2 \\ & \frac{27}{8} L^3 & -\frac{21}{8} L^2 \\ DX & & \frac{7}{2} L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ R \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{6} PL \\ \frac{3}{4} PL^3 \\ -\frac{1}{2} PL^2 \end{Bmatrix}$$

Sau khi giải, nghiệm của hệ phương trình trên đây mang giá trị:

$$\begin{Bmatrix} H \\ R \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} P \\ \frac{4}{15} P \\ -\frac{3}{10} PL \end{Bmatrix}$$

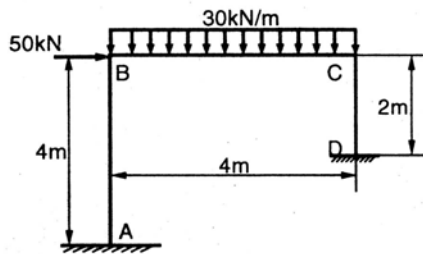
Momen uốn khung được vẽ dưới đây.



Hình 4.8

4.6 Phương pháp ma trận

Ví dụ 1: Sử dụng phương pháp ma trận để giải khung sau.



Hình 4.9

Như ví dụ trước, ba lực *redundant* áp đặt tại nút D của khung, lần lượt mang ký hiệu 1, 2, 3 hoặc H, R, M như đã dùng cho ví dụ trên.

Momen uốn do tải trọng bên ngoài gây ra xác định như sau:

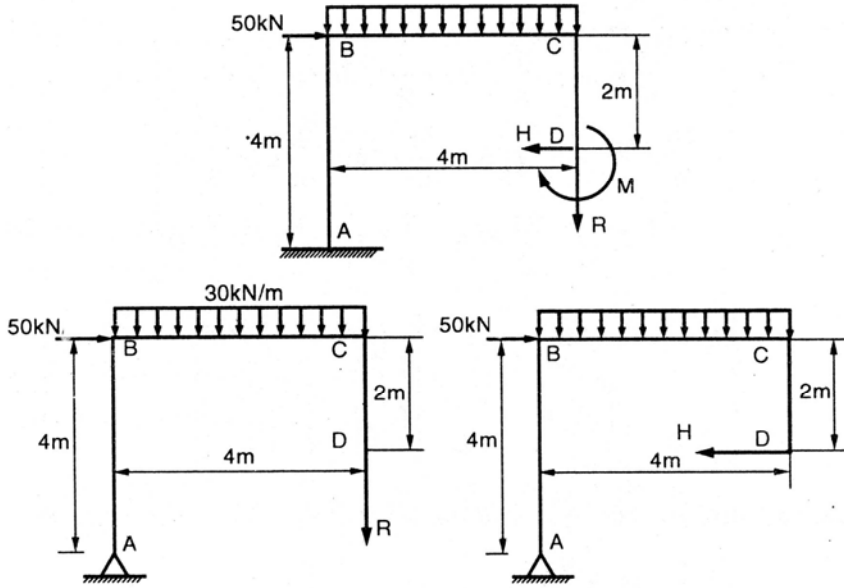
Tải	Ký hiệu	Đoạn DC	Đoạn CB	Đoạn BA
Tải thực	$M(x)$	0	$15x^2$	$50x+240$
$R_1 = 1$	m_1	$-x$	-2	$-2 + x$
$R_2 = 1$	m_2	0	$-x$	-4
$R_3 = 1$	m_3	1	1	1

Tất cả thành phần ma trận dẻo xác định như chuyển vị đơn vị do lực đơn vị $P_i = 1$ gây ra.

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \sum \int \frac{M_i^* M_k^*}{EI} ds \quad (*)$$

Tích phân trên thực hiện trong mỗi dầm riêng lẻ. Chuyển vị đơn vị được tính theo cách tương tự:

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_p^* M_i^*}{EI} ds \quad (**)$$



Hình 4.10

Trong đó M_p , S_p , Q_p là momen uốn, lực dọc trục và lực cắt của tải cho trước. M^* với chỉ số i là momen và lực tương ứng từ tải đơn vị $P_i = 1$. Hệ số κ dùng cho trường hợp liên quan lực cắt, chỉ tỉ lệ tham gia của diện tích tiết diện vào ứng suất cắt. Sau khi giải hệ phương trình cho lực đơn vị, ứng lực trong các dầm thuộc hệ thống được tính theo công thức:

$$M = M_p + \sum_{i=1}^n p_i M_i^* ; \quad (***)$$

Kết quả tính trong trường hợp đang xem xét này:

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1}{EJ} dx = \int_0^2 \frac{x^2}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{4}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{(-2+x)^2}{EJ} dx$$

$$= \frac{1}{EJ} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 + \frac{4}{EJ} x \Big|_0^4 + \frac{1}{EJ} \left(4x - \frac{4x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{24}{EJ}$$

$$\delta_{21} = \delta_{12} = \int m_1 m_2 \frac{dx}{EJ} = \int_0^4 \frac{1}{EJ} 2x dx + \int_0^4 \frac{(-4)(-2+x)}{EJ} dx = \frac{16}{EJ}$$

$$\delta_{31} = \delta_{13} = \int m_1 m_3 \frac{dx}{EJ} = \int_0^2 \frac{-x}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{(-2)}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{(x-2)}{EJ} dx = -\frac{10}{EJ}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{1}{EJ} m_2^2 dx = \int_0^4 \frac{1}{EJ} x^2 dx + \int_0^4 \frac{16}{EJ} dx = \frac{85,33}{EJ}$$

$$\delta_{32} = \delta_{23} = \int m_2 m_3 \frac{dx}{EJ} = \int_0^4 \frac{-x}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{(-4)}{EJ} dx = -\frac{24}{EJ}$$

$$\delta_{33} = \int \frac{1}{EJ} m_3^2 dx = \int_0^2 \frac{1}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{1}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{1}{EJ} dx = \frac{10}{EJ}$$

Vec tor lực tính như sau:

$$\Delta_{1L} = \int \frac{M.m_1}{EJ} dx = \int_0^4 \frac{15x^2(-2)}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{(50x+240)(-2+x)}{EJ} dx =$$

$$\int_0^4 \frac{-30x^2}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{(50x^2+140x-480)}{EJ} dx = -\frac{373,33}{EJ}$$

$$\Delta_{2L} = \int \frac{M.m_2}{EJ} dx = \int_0^4 \frac{-15x^2}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{(50x+240)}{EJ} dx = -\frac{6400}{EJ}$$

$$\Delta_{3L} = \int \frac{M.m_3}{EJ} dx = \int_0^4 \frac{15x^2}{EJ} dx + \int_0^4 \frac{(50x+240)}{EJ} dx = \frac{1680}{EJ}$$

Phương trình tương hợp, theo cách diễn đạt tại chương ba “Cơ học kết cấu” mang dạng:

$$[\delta][P] = [\Delta] - [\Delta_L]$$

$$\frac{1}{EJ} \begin{bmatrix} 24 & 16 & -10 \\ & 85,33 & -24 \\ DX & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ R \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{1}{EJ} \begin{Bmatrix} -373,33 \\ -6400 \\ 1680 \end{Bmatrix}$$

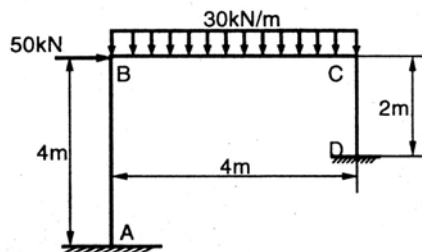
Sau giải hệ phương trình giá trị các lực xác định như sau:

$$H = -53,33 \text{ kN}; \quad R = 70,01 \text{ kN}; \quad M = -53,33 \text{ kN.m}$$

Ví dụ 2: Sử dụng phương pháp ma trận cứng giải khung vừa đề cập.

Trong khuôn khổ phương pháp chuyên vị cách xử lý bài toán qua ma trận cứng được dùng từ rất sớm. Ngày nay phương pháp ma trận cứng đang chiếm vị trí quan trọng trong số các phương pháp năng lượng. Thủ tục tính theo phương pháp ma trận cứng trình bày tại chương ba giành cho đảm được sử dụng vào hệ khung phẳng, không đổi thay nội dung.

Chọn chuyên vị đang là ẩn số cho bài toán đang xem xét: 1- chuyển dịch ngang nút B, 2 - góc xoay tại nút B, và 3 – góc xoay tại nút C. Ba tọa độ chọn lựa trình bày tại hình tiếp theo.



Hình 4.11

Các lực và momen cố định tại nút các dầm:

Lực tác động ngang 50 kN

$$\text{Momen cố định tại đầu trái đoạn BC: } M_{FBC} - \frac{30 \times 4^2}{12} = -40 \text{ kN.m}$$

Momen cố định đầu bên phải BC: +40 kN.m

Vecto lực được tính là:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 40 \\ -40 \end{Bmatrix}$$

Thành lập ma trận cứng.

Chuyển vị đơn vị theo hướng lực số 1, tính cho trường hợp $\Delta=1$:

$$k_{11} = \frac{12EJ}{4^3} + \frac{12EJ}{2^3} = 1,6875EJ$$

$$k_{21} = k_{12} = -\frac{6EJ}{4^2} = -0,375EJ$$

$$k_{31} = k_{13} = -\frac{6EJ}{2^2} = -1,5EJ$$

Chuyển vị đơn vị theo hướng hai tức góc xoay tại B, $\theta = 1$:

$$k_{22} = \frac{4EJ}{4} + \frac{4EJ}{4} = 2EJ$$

$$k_{32} = k_{23} = \frac{2EJ}{4} = 0,5EJ$$

Chuyển vị đơn vị theo hướng ba tức góc xoay tại C, $\theta = 1$:

$$k_{33} = \frac{4EJ}{4} + \frac{4EJ}{2} = 3EJ$$

Phương trình trình bày quan hệ giữa độ cứng, chuyển vị và lực tác động có dạng:

$$EJ \begin{bmatrix} 1,6875 & -0,375 & -1,5 \\ & 2 & 0,5 \\ DX & & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H \\ \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 40 \\ -40 \end{Bmatrix}$$

Vecto chuyển vị tính từ hệ phương trình:

$$\begin{Bmatrix} H \\ \theta_B \\ \theta_C \end{Bmatrix} = \frac{1}{EJ} \begin{Bmatrix} 35556 \\ 26,667 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Biểu đồ momen tính cho khung phẳng đang nêu có dạng:

$$M_{AB} = \frac{2EJ}{4} \left(0 + 26,667 - \frac{3.35556}{4} \right) = 0$$

$$M_{BA} = \frac{2EJ}{4} \times \frac{1}{EJ} \left(0 + 2 \times 26,667 - \frac{3 \times 35556}{4} \right) = 13,333kNm$$

$$M_{BC} = \frac{2EJ}{4} \frac{1}{EJ} (2 \times 26,667) - 40 = -13,333kNm$$

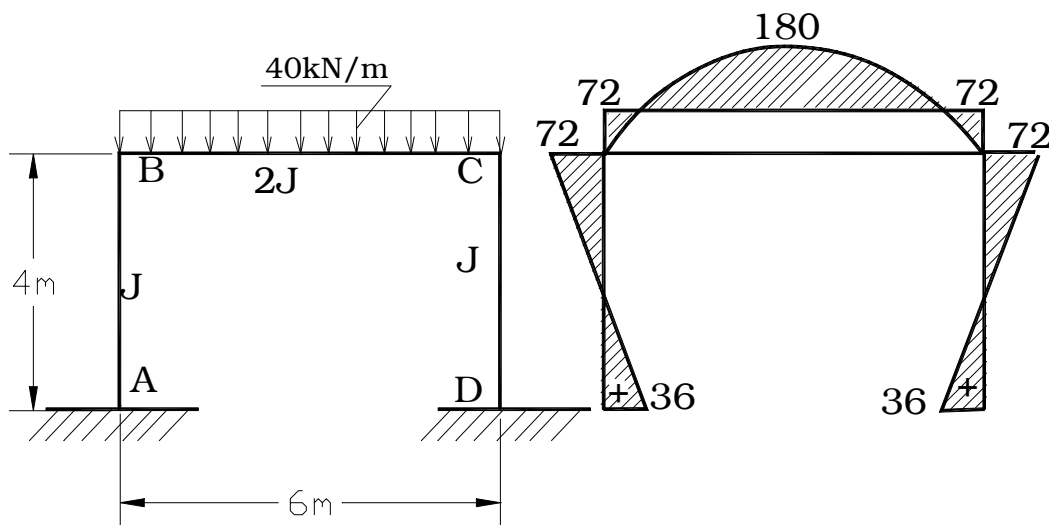
$$M_{CB} = \frac{2EJ}{4} \frac{1}{EJ} \times 26,667 + 40 = 53,333kNm$$

$$M_{CD} = \frac{2EJ}{2} \frac{1}{2EJ} [0 - 3 \times 35556] = -53,333kNm$$

$$M_{DC} = \frac{2EJ}{2} \frac{1}{2EJ} [0 - 3 \times 35556] = -53,333kNm$$

4.7 Phương pháp chuyển vị góc

Ví dụ 1: Phân tích kết cấu khung phẳng dưới đây bằng phương pháp chuyển vị góc. Biết rằng độ cứng các thanh đứng của khung EJ, thanh ngang 2EJ.



Hình 4.12

Cách giải khung phẳng theo phương pháp chuyển vị góc trình bày tại giáo trình “Cơ học kết cấu tàu thủy”.

Momen tại ngàm (fixed moments) tính như sau:

$$M_{FBC} = \frac{-40 \times 6^2}{12} = -120kN.m$$

$$M_{FCB} = 120 \text{ kN.m}$$

$$M_{FAB} = M_{FBA} = M_{FCD} = M_{FDC} = 0$$

Các phương trình chuyển vị góc.

Với $\varphi_A = 0$ có thể viết:

$$M_{AB} = 0 + \frac{2EJ}{4}(2\varphi_A + \varphi_B - 0) = 0,5EJ\varphi_B$$

Trong trường hợp $\varphi_A = 0$ còn có thể viết:

$$M_{BA} = 0 + \frac{2EJ}{4}(\varphi_A + 2\varphi_B - 0) = EJ\varphi_B$$

$$M_{BC} = -120 + \frac{2EJ}{6}(2\varphi_B + \varphi_C - 0) = -120 + \frac{4}{3}EJ\varphi_B + \frac{4}{3}EJ\varphi_C$$

$$M_{CB} = 120 + \frac{2E(2J)}{6}(\varphi_B + 2\varphi_C - 0) = 120 + \frac{2}{3}EJ\varphi_B + \frac{4}{3}EJ\varphi_C$$

Với $\varphi_D = 0$ có thể viết:

$$M_{CD} = 0 + \frac{2EJ}{4}(2\varphi_C + \varphi_D - 0) = EJ\varphi_C$$

$$M_{DC} = 0 + \frac{2EJ}{4}(\varphi_C + 2\varphi_D - 0) = 0,5EJ\varphi_C$$

Phương trình cân bằng:

$$\sum M_B = 0;$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0;$$

$$EJ\varphi_B - 120 + \frac{4}{3}EJ\varphi_B + \frac{2}{3}EJ\varphi_C = 0.$$

Sắp xếp lại ba phương trình có thể nhận được phương trình sau đây:

$$7EJ\varphi_B + 2EJ\varphi_C = 360.$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0;$$

$$120 + \frac{2}{3}EJ\varphi_B + \frac{4}{3}EJ\varphi_C = 0.$$

Sắp xếp lại ba phương trình cuối có thể nhận được phương trình sau đây:

$$2EJ\varphi_B + 7EJ\varphi_C = 360.$$

Từ hai phương trình $7EJ\varphi_B + 2EJ\varphi_C = 360$ và $2EJ\varphi_B + 7EJ\varphi_C = 360$ có thể xác định:

$$EJ\varphi_B = 72 \quad \text{và} \quad 7EJ\varphi_C = -72$$

Thay các giá trị này vào phương trình cân bằng chuyển vị góc sẽ nhận được:

$$M_{AB} = 0,5 \times 72 = 36kN.m;$$

$$M_{BA} = 72kN.m;$$

$$M_{BC} = 120 + \frac{4}{3} \times 72 + \frac{2}{3} \times (-72) = -72kN.m;$$

$$M_{CB} = 120 + \frac{2}{3} \times 72 + \frac{2}{3} \times (-72) = 72kN.m;$$

$$M_{CD} = -72kN.m;$$

$$M_{DC} = -36kN.m$$

Biểu đồ momen uốn trình bày tại hình phía phải, hình 4.12.

Ví dụ 2: Giải khung phẳng sau đây, khi giải tính đến trường hợp các nút tham gia chuyển vị tuyến tính. Biết trước mô đun đàn hồi vật liệu làm khung E, momen quán tính mặt cắt ghi tại hình 4.13.

Có thể tính mô men tại ngàm ảo cho dầm BC theo các công thức từ sức bền vật liệu:

$$M_{FBC} = -\frac{40 \times 6^2}{12} = -120kN.m;$$

$$M_{FCB} = 120kN.m$$

$$M_{FAB} = M_{FBA} = M_{FCD} = M_{FDC} = 0$$

Phương trình cân bằng chuyển vị góc:

$$M_{AB} = 0 + \frac{2EI}{4} \left(2\varphi_A + \varphi_B - \frac{3\Delta}{4} \right) = 0,375\Delta$$

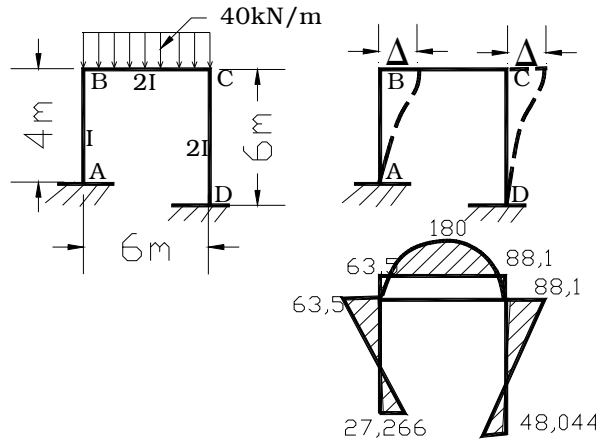
$$M_{BA} = 0 + \frac{2EI}{4} \left(\varphi_A + 2\varphi_B - \frac{3\Delta}{4} \right) = EI\varphi_B - 0,375\Delta$$

$$M_{BC} = -120 + \frac{2E(2I)}{6} (2\varphi_B + \varphi_C) = -120 + 1,333EI\varphi_B + 0,887EI\varphi_C$$

$$M_{CB} = 120 + \frac{2E(2I)}{6} (\varphi_B + 2\varphi_C) = 120 + 0,667EI\varphi_B + 1,333EI\varphi_C$$

$$M_{CD} = \frac{2E(2I)}{6} \left(2\varphi_C + \varphi_D - \frac{3\Delta}{6} \right) = 1,333EI\varphi_C - 0,333EI\Delta$$

$$M_{DC} = \frac{2E(2I)}{6} \left(\varphi_C + 2\varphi_D - \frac{3\Delta}{6} \right) = 0,667EI\varphi_C - 0,333EI\Delta$$



Hình 4.13

Phương trình cân bằng momen.

$$\sum M_B = 0$$

$$\sum M_{BA} + \sum M_{BC} = 0$$

$$EI\varphi_B - 0,375\Delta - 120 + 1,333EI\varphi_C + 0,667EI\varphi_C = 0$$

Ba công thức này được dồn lại trong biểu thức sau:

$$2,333EI\varphi_B + 0,667EI\varphi_C - 0,375\Delta = 120$$

$$\sum M_C = 0$$

$$\sum M_{CB} + \sum M_{CD} = 0$$

$$120 + 0,667EI\varphi_B + 1,333EI\varphi_C - 0,333EI\Delta = 0$$

Ba công thức này được dồn lại trong biểu thức sau:

$$0,667EI\varphi_B + 2,667EI\varphi_C - 0,333\Delta = -120$$

Nếu coi rằng các phản lực ngang tại nút A và D mang giá trị sau:

$$H_A = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{4} \quad \text{và} \quad H_D = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{6}$$

Trong khi đó $H_A + H_D = 0$, chúng ta có thể viết:

$$3(M_{AB} + M_{BA}) + 2(M_{CD} + M_{DC}) = 0.$$

Từ đó có thể viết phương trình cân bằng thứ ba, tiếp (a) và (b):

$$4,5EI\varphi_B + 4EI\varphi_C - 3,583\Delta = 0$$

Giải hệ ba phương trình ba ẩn (a), (b), (c) nhận được nghiệm sau:

$$EI\varphi_B = 72,414; \quad EI\varphi_C = -60,172; \quad EI\Delta = 23,842;$$

Thay các giá trị vừa tìm vào hệ phương trình cân bằng chuyển vị góc sẽ nhận được:

$$M_{AB} = 0,5.(72,414) - 0,375. 23,842 = 27,266 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA} = 72,414 - 0,375. 23,842 = 73,473 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC} = -120 + 1,333. 72,414 + 0,667.(-60,127) = 63,577 \text{ kN.m}$$

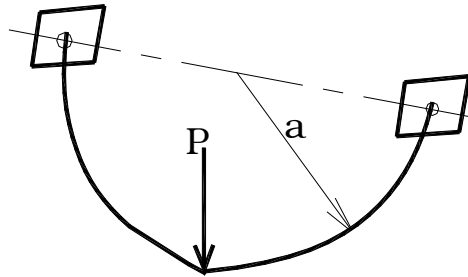
$$M_{CB} = 120 + 0,667.72,414 + 1,333 (-60,127) = 88,151 \text{ kN.m}$$

$$M_{CD} = 1,333.(-60,127) - 0,333.23,842 = 88,089 \text{ kN.m}$$

$$M_{DC} = 0,667.(-60,127) - 0,333.(23,842) = -48,044 \text{ kN.m}$$

4.8 Giàn phẳng

Ví dụ 1: Nửa cung tròn, bán kính a , ngàm hai đầu vào tường cứng. Tải tập trung P đặt tại giữa cung, tác động theo phương pháp tuyến với mặt phẳng cung. Xác định momen uốn, lực cắt giàn.



Hình 4.14

Trường hợp kết cấu đối xứng, tải bố trí tại đường tâm đối xứng, chúng ta có thể chia cơ kết này thành hai phần đối xứng để xem xét. Tại vị trí đặt P , cắt cung tròn ta hai phần nửa $\frac{1}{4}$ cung tròn, một đầu ngàm, đầu kia chịu lực tập trung $\frac{1}{2}P$. Momen đơn vị bố trí tại đầu tự do $\frac{1}{4}$ cung này.

Lời giải

Momen uốn và momen xoắn do lực thực:

$$M(x) = \frac{1}{2}P.r.\sin\varphi$$

$$M_T(x) = \frac{1}{2}P(r - r\cos\varphi)$$

Momen đơn vị mang giá trị sau:

$$m = -1.\cos\varphi$$

$$m_T = -1.\sin\varphi$$

$$\Delta_{1P} = \int \frac{M.m}{EJ} dx + \int \frac{M_T.m_T}{GJ_p} dx$$

Đề ý rằng $dx = r.d\varphi$, công thức cuối mang dạng:

$$\Delta_{1P} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos \varphi \cdot Pr \cdot \sin \varphi \cdot r d\varphi}{2EJ} + 2 \int_0^{\pi/2} \frac{-\sin \varphi \cdot Pr(1 - \cos \varphi) r d\varphi}{2GJ_p} =$$

$$= \frac{Pr^2}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GJ_p} \right)$$

Các thành phần ma trận dẻo tính theo cách sau:

$$\delta_{11} = \int \frac{m^2}{EJ} dx + \int \frac{m_T^2}{GJ_p} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi}{EJ} r d\varphi + 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \varphi}{GJ_p} r d\varphi =$$

$$= \frac{\pi \cdot r}{2} \left(\frac{1}{EJ} + \frac{1}{GJ_p} \right)$$

Trường hợp cung làm từ thép tròn, mô đun cắt $G = 0,4E$, biểu thức $GJ_p = 0,8EJ$, kết quả tính vừa trình bày sẽ mang dạng:

$$\Delta_{1P} = -\frac{1,125 Pr^2}{EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{1,125 \pi r}{EJ}$$

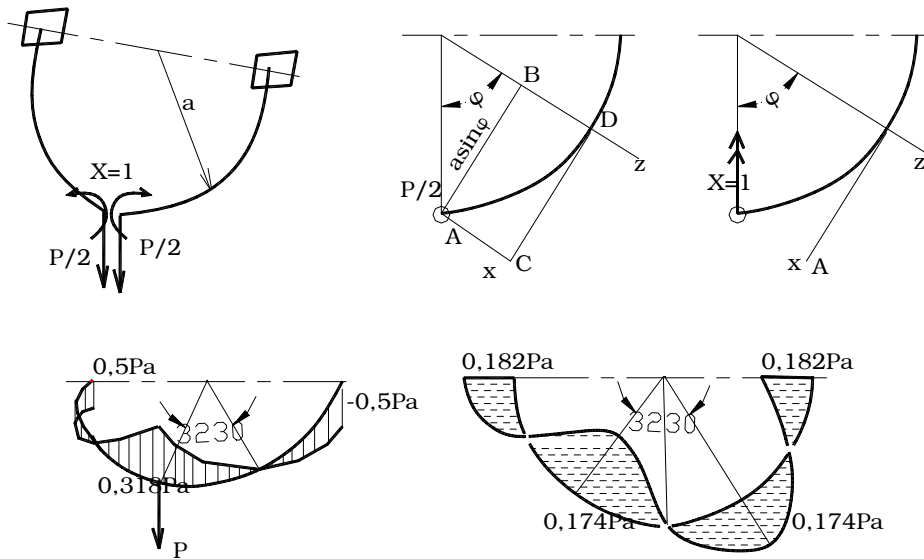
Từ đó, momen uốn tại giữa cung tính bằng biểu thức:

$$X = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{Pr}{\pi} = 0,318 Pr$$

Biểu đồ momen uốn và momen xoắn tính như sau:

$$M = M_p + m \cdot X = \frac{1}{2} Pr \sin \varphi - 0,318 Pr \cos \varphi$$

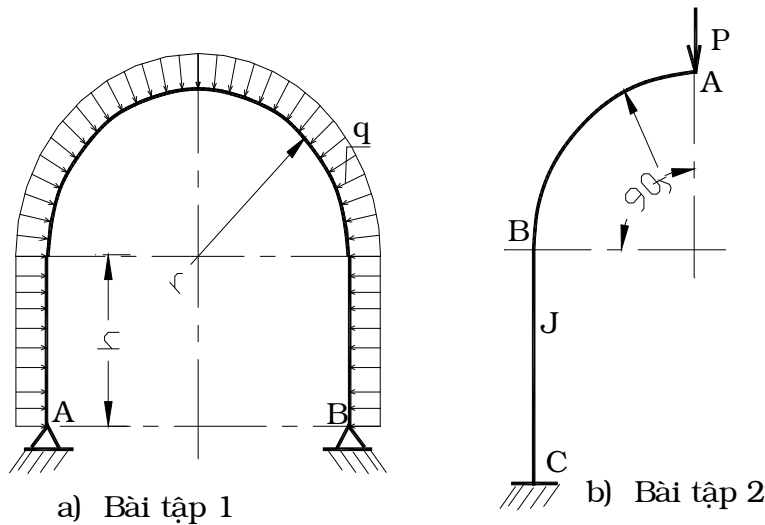
$$M_T = M_{pT} + m_T \cdot X = \frac{1}{2} Pr(1 - \cos \varphi) - 0,318 Pr \cdot \sin \varphi$$



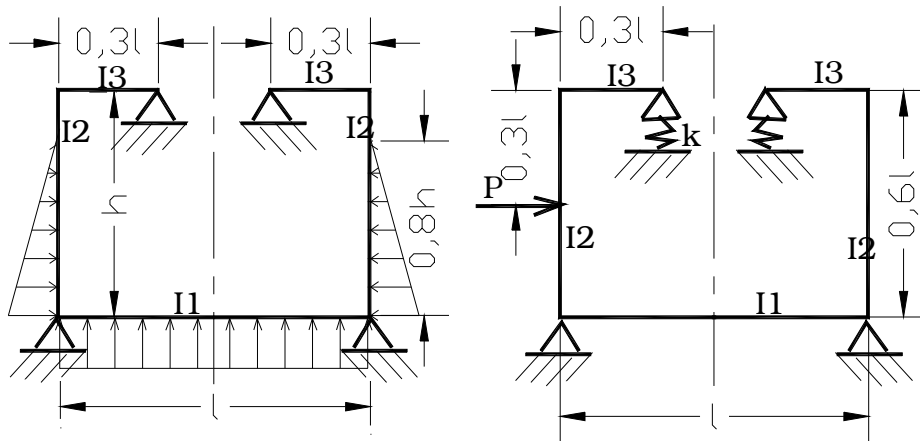
Hình 4.15

Bài tập

1. Xác định phản lực theo hướng thẳng đứng và hướng ngang V và H , vẽ biểu đồ mô men uốn khung phẳng, chịu áp lực phân bố đều, cường độ $q = \text{const}$, hình 4.16a. Biết rằng độ cứng khung EJ , kích thước khung trình bày tại hình.
2. Cột cầu có dạng như miêu tả tại hình 4.16b, độ cứng EJ . Xác định phản lực và momen uốn khung vờ hình thành dưới tác động lực P .

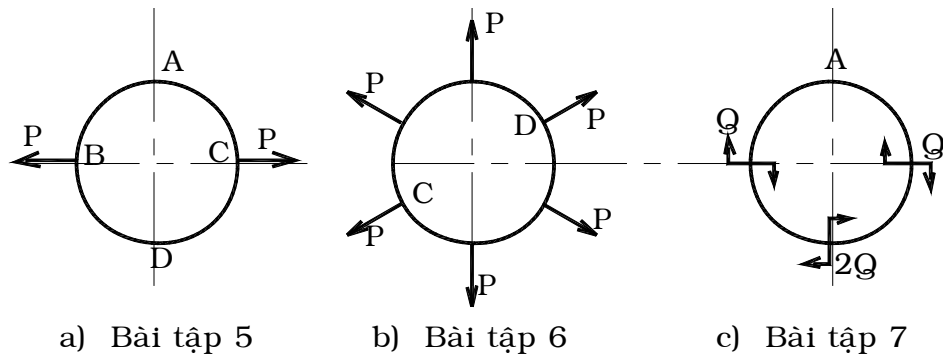


Hình 4.16



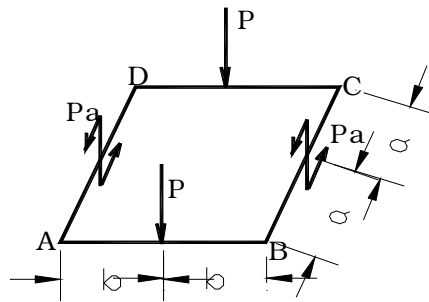
Hình 4.17

3. Xác định phản lực, trình bày biểu đồ momen uốn khung phẳng tại hình 4.17 phía trái.
4. Xác định phản lực, trình bày biểu đồ momen uốn khung phẳng tại hình 4.17 phía phải.



Hình 4.18

5. Vẽ đồ thị momen uốn vòng bị tác động hai lực P kéo đối xứng, hình 4.18a.
6. Vẽ đồ thị momen uốn vòng bị tác động lực sáu lực P kéo đối xứng, hình 4.18b.
7. Vẽ đồ thị momen uốn vòng bị tác động ba momen nêu tại hình 4.18c.

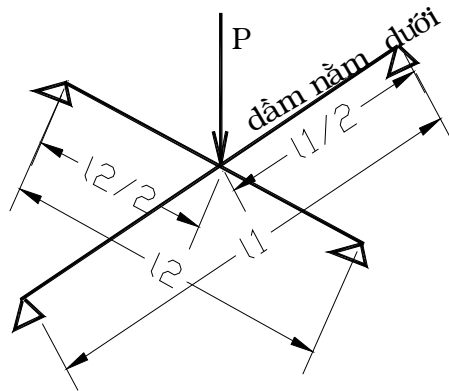


Hình 4.19

8. Trình bày đồ thị momen uốn giàn tại hình 4.19.
9. Hai dầm cùng vật liệu, dầm thứ nhất dài l_1 , độ cứng EJ_1 , dầm thứ hai dài l_2 , độ cứng EJ_2 , đặt tựa lên nhau, vuông góc với nhau. Điểm tựa lên nhau chính giữa mỗi dầm. Hệ thống chịu tải tập trung P , tác động pháp tuyến, tại điểm tựa đang nêu. Xác định phản lực hai dầm dưới tác động của P .

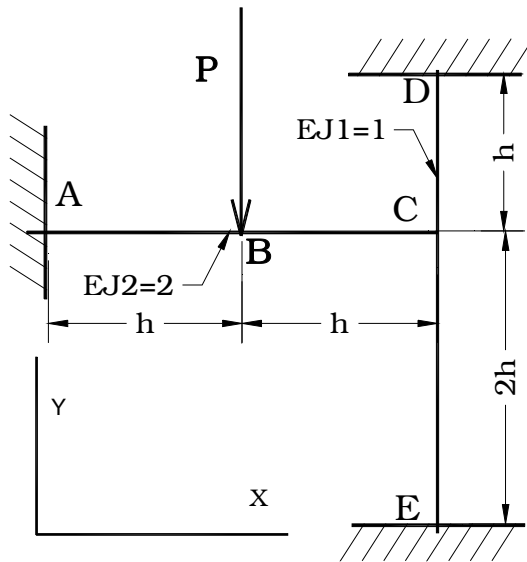
Hướng dẫn: a) R_1 từ dầm thứ nhất và R_2 từ dầm thứ hai thỏa mãn điều kiện $R_1 + R_2 = P$.

b) Độ võng của điểm giữa hai dầm bằng nhau.



Hình 4.20

10. Vẽ biểu đồ momen uốn trong khung phẳng nêu tại hình 4.21.



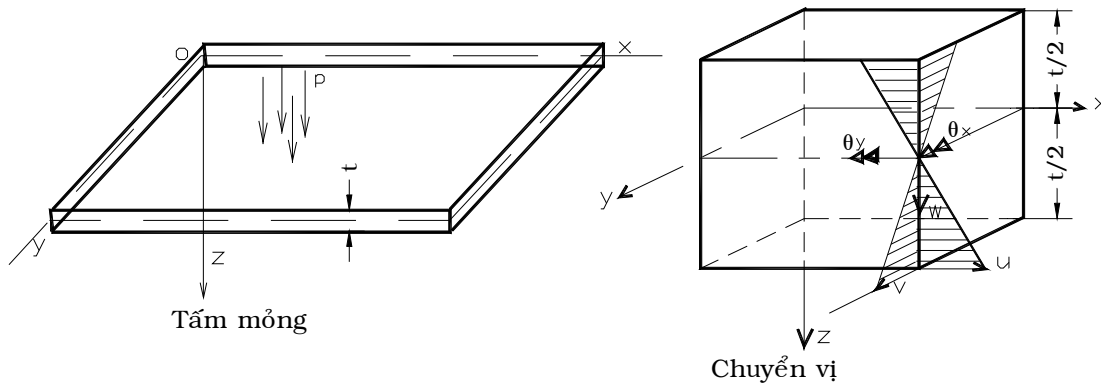
Hình 4.21

CHƯƠNG 5

TẤM MỎNG

Tóm tắt

Tấm mỏng được xác định trong hệ tọa độ Oxyz như tại hình 5.1



Hình 5.1

Quan hệ giữa biến dạng – chuyển vị bài toán phẳng áp dụng vào tấm mỏng:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Phương trình chuyển vị trong tấm u, v, w theo chuyển vị w và góc xoay θ_x, θ_y mặt trung hòa diễn đạt như sau:

$$\left. \begin{aligned} u &= z \times \theta_x \\ v &= z \times \theta_y \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Thay phương trình (b) vào (a) chúng ta nhận được các biểu thức tính biến dạng trong tấm. Từ giả thiết đảm bảo độ vuông góc của pháp tuyến sau biến dạng, các biểu thức $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, còn biến dạng $\varepsilon_z = 0$ và như vậy biến dạng tấm trong mặt phẳng Oxy sẽ là:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= z \times \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= z \times \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= z \times \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Ký hiệu $\kappa_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$; $\kappa_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}$; $\kappa_{xy} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}$, phương trình (c) trở thành:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= z \times \kappa_x \\ \varepsilon_y &= z \times \kappa_y \\ \gamma_{xy} &= 2z \times \kappa_{xy} \end{aligned} \right\}.$$

Thay thế $\theta_x = -\frac{\partial}{\partial x} w$; $\theta_y = -\frac{\partial}{\partial y} w$ vào (c) có thể thấy:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \times \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= -z \times \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= -2z \times \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Quan hệ biến dạng – ứng suất thể hiện tại định luật Hooke:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} \quad (e)$$

Từ đó có thể tính vec tơ ứng suất trong trạng thái ứng suất phẳng:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\} \quad (f)$$

Trong nghiên cứu tấm mỏng, thay vì xem xét ứng suất σ_x , σ_y , τ_{xy} người ta thường dùng đại lượng hợp lực (stress resultants) tính bằng giá trị lực trên đơn vị chiều dài, dạng thường gặp sau:

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz; \quad N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz; \quad N_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz;$$

Trường hợp trạng thái ứng suất phẳng quan hệ giữa hợp lực và biến dạng tương tự phương trình trong định luật Hooke:

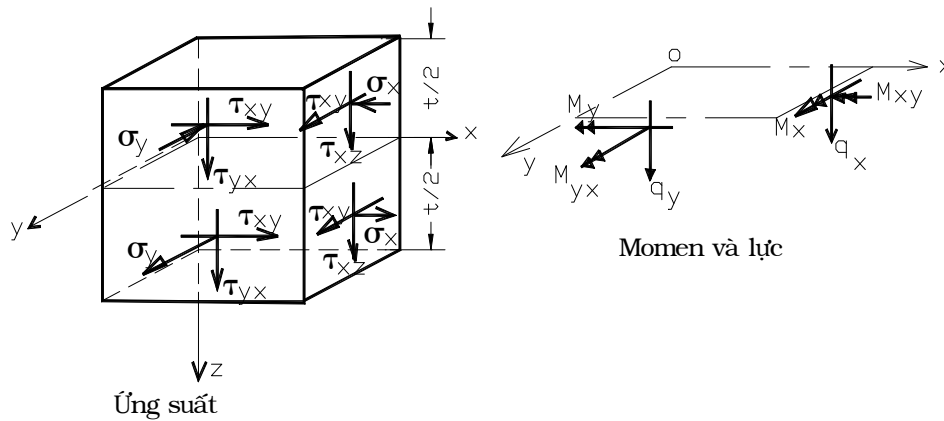
và

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (g)$$

hoặc tính ngược lại:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{Et} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (h)$$

Ứng suất và hợp lực trong phần tử tám diện tả tại hình 5.2 tiếp theo.



Hình 5.2

Momen uốn, momen xoắn và lực cắt liên quan ứng suất vừa trình bày được biết dưới dạng:

$$\text{Momen uốn, momen xoắn} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (i)$$

$$\text{và lực cắt} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (j)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (k)$$

Đại lượng $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ trong công thức cuối có tên gọi *độ cứng tấm*.

Trường hợp biểu diễn các hệ số κ_x , κ_y , κ_{xy} trong quan hệ với w :

$$\kappa_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{quan hệ (k) được hiểu theo}$$

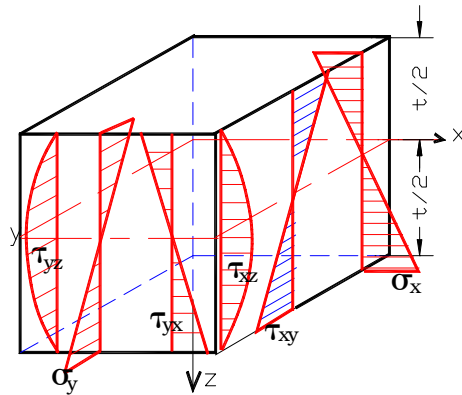
cách khác như sau:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{tư đó} \quad \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{12}{Et^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

Ứng suất của tấm trong trạng thái ứng suất phẳng:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_x z}{t^3 / 12} \\ \sigma_y &= \frac{M_y z}{t^3 / 12} \\ \tau_{xy} &= \frac{M_{xy} z}{t^3 / 12} \end{aligned} \right\} \quad (l)$$

Phân bố ứng suất theo chiều dày tấm có dạng trình bày tại hình 5.3.



Hình 5.3

Điều kiện cân bằng

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - q_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (m)$$

Thay thế hai công thức cuối từ hệ phương trình đang đề cập vào phương trình đầu, chúng ta nhận được phương trình cân bằng bậc cao hơn sau đây:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 \quad (n)$$

Phương trình vi phân uốn tấm

Thay thế các biểu thức từ (11a) vào vị trí M_x , M_y , M_{xy} của phương trình (n) chúng ta nhận được phương trình vi phân bậc 4 trình bày điều kiện cân bằng.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (o)$$

Công thức cuối này còn được viết theo cách sau đây: $\nabla^4 w = \frac{p}{D}$

trong đó $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = (\nabla^2)^2$, còn $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Ví dụ 1: Phương trình độ võng tấm chữ nhật, vật liệu đẳng hướng, chỉ hai cạnh đối xứng tựa tự do trên gối cứng theo cách giải Navier được giới thiệu tiếp dưới đây. Chiều dày tấm t , tải trọng phân bố đều $q(x,y) = \text{const}$. Tâm toạ độ tại góc dưới bên trái.

$$D \cdot \nabla^4 w = q. \quad (a)$$

Lưu ý tính đối xứng bài toán và điều kiện biên cũng đối xứng, lời giải có thể tìm một trong hai cách:

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\text{hoặc } w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (b)$$

Chuỗi phân bố tải trọng tương ứng:

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{hoặc} \quad q = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (c)$$

Chọn phương án 2 khi tiếp tục giải bài toán này. Nhân hai vế của biểu thức cho q với $(2/a)\sin(n\pi x/a)$ và tích phân từ $x = 0$ đến $x = a$, hệ số q_n sẽ được xác định:

$$q_n = \frac{4q}{n\pi} \quad \text{khi } n=1,3,5,\dots$$

$$q_n = 0 \quad \text{nếu } n=2,4,\dots \quad (d)$$

Từ đó:

$$q = \frac{4q}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (e)$$

Thay biểu thức trên vào (b), với $n=1,3,5,\dots$ sẽ nhận được phương trình vi phân bậc bốn sau:

$$Y_n^{IV} - 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n'' + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 Y_n = \frac{4q}{n\pi D} \quad (f)$$

Lời giải riêng là $\frac{4qb^4}{n\pi^5 D \beta^4}$, với $\beta = \frac{\pi b}{a}$ (g)

Nghiệm bài toán có dạng:

$$Y_n(y) = C_0 \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + C_1 \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + C_2 \frac{n\pi y}{a} \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + C_3 \frac{n\pi y}{a} \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + \frac{4qb^4}{n\pi^5 D \beta^4} \quad (h)$$

Điều kiện biên bài toán đòi hỏi thỏa mãn 4 phương trình:

$$w(x,0) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x,0) = w(x,b) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x,b) = 0. \quad (i)$$

Thay biểu thức $w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \sin \frac{n\pi x}{a}$ vào các phương trình thuộc điều kiện biên trên sẽ nhận được:

$$Y_n(0) = Y_n''(0) = Y_n(b) = Y_n''(b) = 0. \quad (j)$$

Từ đó:

$$Y_n(y) = \frac{4qa^4}{(n\pi)^5 D} \left[1 - \left(1 + \frac{n\beta}{4} \tanh \frac{n\beta}{2} \right) \frac{\cosh \frac{n\beta y}{b}}{\sinh \frac{n\beta}{2}} + \frac{n\beta y}{2b} \times \frac{\sinh \frac{n\beta y}{b}}{\cosh \frac{n\beta}{b}} \right] \quad (k)$$

Momen uốn tâm có dạng sau:

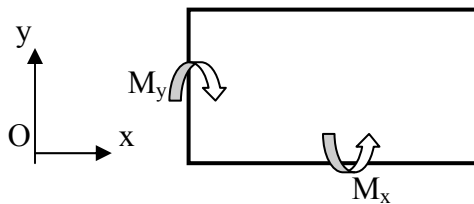
$$M_x = \frac{4qa^3}{\pi^3} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} \times \left\{ 1 - \left[1 + (1-\nu) \frac{n\beta}{4} \tanh \frac{n\beta}{2} \right] \frac{\cosh \frac{n\beta y}{b}}{\cosh \frac{n\beta}{4}} + \right. \\ \left. + (\nu-1) \frac{n\beta y}{2b} \times \frac{\sinh \frac{n\beta y}{b}}{\cosh \frac{n\beta}{2}} \right\} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (l)$$

$$M_y = \frac{4qa^3}{\pi^3} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} \times \left\{ \nu - \left[\nu + (\nu-1) \frac{n\beta}{4} \tanh \frac{n\beta}{2} \right] \frac{\cosh \frac{n\beta y}{b}}{\cosh \frac{n\beta}{4}} + \right. \\ \left. + (\nu-1) \frac{n\beta y}{2b} \times \frac{\sinh \frac{n\beta y}{b}}{\cosh \frac{n\beta}{2}} \right\} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (m)$$

Ví dụ 2: Tấm hình chữ nhật, tựa trên bốn cạnh, chiều dày tấm $t = 0,6\text{cm}$ chịu tác động momen uốn $M_x = 600 \text{ N.m/m}$, phân bố đều dọc cạnh dài, song song với trục Oy, hình 5.4.

Xác định momen xoắn lớn nhất trong tấm và ứng suất lớn nhất tại tấm.

Biết rằng $E = 2.10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$.



Hình 5.4

Lời giải

Ứng suất do uốn tính theo công thức:

$$\sigma_{x,\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6M_x}{t^2} = 10^8 \text{ Pa} = 100 \text{ MPa}$$

Theo hướng Oy momen uốn $M_y = 0$ và theo đó $\sigma_y = 0$.

Ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{x,\max} - \sigma_y}{2} = 50 \text{ MPa}$$

Momen xoắn lớn nhất:

$$Q_{\max} = \tau_{\max} \frac{1.t^2}{6} = 300 \text{ Nm/m}$$

Bán kính cung uốn tính từ biểu thức: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$ như đã giới thiệu trong phần uốn dầm.

$$\rho = \frac{EJ}{M_x} = \frac{2.10^{11} \times 1.6^3 \cdot 10^{-9}}{600.12} = 6m$$

Ví dụ 3: Tấm chữ nhật tựa trên bốn cạnh, chiều dày tấm $t = 4mm$, chịu tác động momen uốn $M_x = 300 Nm/m$ và $M_y = 100 Nm/m$.

Xác định ứng suất lớn nhất trong tấm.

Kiểm tra độ bền theo tiêu chuẩn von Mises, biết rằng $\sigma_{cr} = 120MPa$.

Trả lời

$$\sigma_{x,max} = \frac{6M_x}{t^2} = 112,5MPa;$$

$$\sigma_{y,max} = \frac{6M_y}{t^2} = 37,5MPa;$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{x,max} - \sigma_{y,max}}{2} = 37,5MPa$$

Theo tiêu chuẩn bền von Mises:

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = 99MPa$$

Giới hạn trên đây nhỏ hơn giá trị ứng suất cho phép $\sigma_{cr} = 120MPa$

Ví dụ 4: Tấm hình chữ nhật, cạnh $a = 80cm$; $b = 25cm$, chiều dày tấm $t = 0,4cm$, tựa trên bốn cạnh, chịu tải phân bố đều theo phương pháp tuyến $p = 40kPa$.

Xác định độ võng lớn nhất f , ứng suất lớn nhất và momen xoắn lớn nhất. Biết rằng $E = 2.10^5 MPa$, $\nu = 0,25$.

Với tấm dài, tỷ lệ $a/b > 3$ có thể coi rằng liên kết tựa hai cạnh ngắn đến độ uốn tấm theo chiều kia không lớn. Công thức tính momen uốn và ứng suất mang dạng:

$$M_{x,max} = \frac{pb^2}{8} = 200N.m/m; \quad M_{y,max} = \nu M_x = 50N.m/m$$

Từ đó có thể tính tiếp:

$$\sigma_{x,max} = \frac{6M_{x,max}}{t^2} = 75MPa$$

Momen xoắn tính theo công thức:

$$Q_{max} = \frac{M_{x,max} - M_{y,max}}{2} = 75N.m/m$$

và $\tau_{max} = \frac{6Q_{max}}{t^2} = 28,1MPa$

Độ cứng tấm chịu uốn:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = 1,14kN.m$$

Độ võng lớn nhất, tính tại điểm giữa tấm:

$$f = w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{pb^4}{D} = 0,73mm$$

Ổn định tấm hình chữ nhật

Ví dụ 1: Tấm chữ nhật, tựa bản lề bốn cạnh, chịu tác động lực nén theo chiều dọc. Xác định ứng suất giới hạn nếu $a = 40$ cm, $b = 25$ cm, $t = 0,8$ cm, $E = 7,2 \cdot 10^4$ MPa, $\nu = 0,30$ và ứng suất giới hạn cơ cấu cứng $[\sigma] = 240$ MPa.

Lời giải

Ứng suất giới hạn tính theo công thức:

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 t}$$

trong đó $k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2$

Điều kiện chuyển tiếp để tấm chuyển sang giai đoạn mất ổn định từ m nửa sóng đến $m + 1$ nửa sóng:

$$\sqrt{m(m+1)} = \frac{a}{b}$$

Trường hợp này, $a/b = 40/25 = 1,6 > \sqrt{2}$. Hệ số k tính bằng $k = 4,2$.

Độ cứng tấm:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = 3,47N.m$$

Từ đó có thể tính:

$$\sigma_{cr} = 2,88MPa < [\sigma] = 240MPa$$

Ví dụ 2: Tấm hình vuông cạnh $b = 20$ cm, tựa trên các cạnh, bị nén cả hai chiều bằng tải T .

Xác định ứng suất giới hạn nếu $t = 0,4$ cm, $E = 7,0 \cdot 10^4$ MPa, $\nu = 0,30$.

Trường hợp chỉ chịu nén một hướng ứng suất giới hạn sẽ giảm như thế nào?

Lời giải

Tấm hình vuông mất ổn định trong cả trường hợp $m = n = 1$.

Ứng suất giới hạn tính bằng biểu thức:

$$\sigma_{cr,x} = \sigma_{cr,y} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 t}$$

trong đó $k = \frac{\left[\left(\frac{mb}{a} \right)^2 + n^2 \right]^2}{\left(\frac{mb}{a} \right)^2 + n^2} = 2$

Độ cứng tấm:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = 410 N.m$$

$$\sigma_{cr,x} = \sigma_{cr,y} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 t} = 50,6 MPa$$

Tấm bị cắt

Ví dụ 1: Tấm chữ nhật, $a = 40$ cm, $b = 25$ cm, $t = 0,4$ cm, chịu ứng suất cắt $\tau = \text{const}$ dọc bốn cạnh. Xác định ứng suất cắt giới hạn, biết $E = 7,2 \cdot 10^4$ MPa, $[\tau] = 120$ MPa.

Lời giải

Ứng suất cắt giới hạn tính theo công thức:

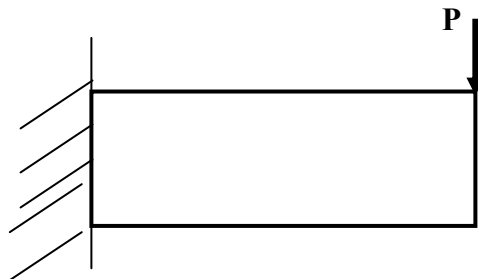
$$\tau_{cr} = (0,9k_s) \frac{E}{\left(\frac{b}{t} \right)^2}$$

Trong đó $k_s = 5,35 + 4 \left(\frac{b}{a} \right)^2 = 6,9$

$$\tau_{cr} = 114 MPa$$

Ví dụ 2: Tấm hình chữ nhật, cạnh $a = 30$ cm, $b = 12$ cm, $t = 0,1$ cm, bị viền bằng nẹp cứng ba cạnh, hai cạnh dài và một cạnh ngắn, cạnh ngắn còn lại gắn chặt vào cơ cấu khớp. Tấm chịu lực cắt đặt tại nút trên của tấm, xem hình. Biết rằng $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $[\tau] = 250$ MPa.

Xác định lực cắt giới hạn, biết rằng hệ số an toàn cho ổn định $n = 1,5$.



Hình 5.5

Lời giải

Ứng suất cắt tại các mép tấm:

$$\tau = \frac{nP_{cr}}{bt} = 4,17 \cdot 10^3 P_{cr}, \quad (\text{Pa})$$

Công thức tính ứng suất giới hạn, như đã trình bày trên đây, có dạng:

$$\tau_{cr} = (0,9k_s) \frac{E}{\left(\frac{b}{t}\right)^2} \quad \text{với } k_s = 5,35 + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 5,99$$

Từ đây có thể viết: $4,17 \cdot 10^3 P_{cr} = 7,49 \cdot 10^7$

$$P_{cr} = 1,8 \cdot 10^4 = 18 \text{ kN.}$$

Bài tập

1. Giải bài toán uốn tấm mỏng, hình chữ nhật, kích thước $a \times b$, trình bày tại hình 1, phần tấm mỏng, tựa trên các cạnh, chịu tác động áp lực $p(x,y)$ theo phương pháp tuyến.

Phương án thực hiện: trình bày $p(x,y)$ dạng chuỗi Navier.

$$p(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Hằng số C_{mn} tính từ chuỗi Fourier:

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy$$

2. Trường hợp $p(x,y) = p_0 = \text{const}$ được áp dụng cho bài tập 1 vừa nêu, chứng minh rằng:

$$C_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \quad m, n = 1, 3, 5, \dots$$

Chuyển vị tấm tính theo công thức:

$$w(x,y) = \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \left[\frac{a^2 b^2}{(bm)^2 + (an)^2} \right]^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$m, n = 1, 3, 5, \dots$$

3. Sử dụng kết quả bài tập 2 tìm độ võng điểm giữa tấm với $a/b = 1,6$.

4. Sử dụng kết quả bài tập 2 giải bài toán tấm mỏng làm từ thép, kích thước 200mm x 400mm, chiều dày tấm $t = 6\text{mm}$, $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0,3$. Áp lực $p_0 = 100 \text{ kPa}$.

Xác định w_{\max} cho các trường hợp sau:

- Các cạnh tựa tự do
- Các cạnh ngàm
- Hai cạnh ngấn tựa trên gối, hai cạnh dài ngàm
- Hai cạnh ngấn tựa, hai cạnh còn lại tự do

5. Xác định ứng suất lớn nhất độ võng lớn nhất đo tại giữa tấm hình chữ nhật, cạnh dài a, cạnh ngắn b, chịu tác động phân bố lực p theo phương pháp tuyến, dựa vào công thức sau đây:

$$\sigma_{\max} = K_1 p \left(\frac{b}{t} \right)^2 \quad w_{\max} = K_2 \frac{pb^4}{Et^3}; \quad \text{Hệ số Poisson } \nu = 0,3$$

Bảng 1

Trường hợp 1: **Bốn cạnh tựa trên gối**

a/b	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	3.0	4.0	5.0	∞
K1	0.2874	0.3762	0.4530	0.5172	0.5688	0.6102	0.7134	0.7410	0.7476	0.7500
K2	0.0440	0.0616	0.0770	0.0906	0.1017	0.1110	0.1335	0.1400	0.1417	0.1421

Trường hợp 2: **Bốn cạnh ngàm**

a/b	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	∞
K1	0.3078	0.3834	0.4356	0.4680	0.4872	0.4974	0.5000
K2	0.0138	0.0188	0.2260	0.0251	0.0267	0.0277	0.0284

Trường hợp 3: **Hai cạnh đối diện, cạnh a, tựa tự do, hai cạnh kia ngàm**

a/b	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	∞
K1	0.4182	0.5208	0.5988	0.6540	0.6912	0.7146	0.7500
K2	0.0210	0.0349	0.0502	0.0658	0.0800	0.0922	0.1422

Trường hợp 4: **Hai cạnh đối diện, cạnh b, tựa tự do, hai cạnh kia ngàm**

a/b	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	∞
K1	0.4182	0.4626	0.4860	0.4968	0.4971	0.4973	0.5000
K2	0.0210	0.0243	0.0262	0.0273	0.0280	0.0283	0.0285

Đặc trưng hình học và áp lực p của các tấm như sau:

- 1) a = 2m; b = 1m; t = 5mm; p = 5MPa.
- 2) a = 2m; b = 1m; t = 8mm; p = 9,81MPa.
- 3) a = 4m; b = 1m; t = 8mm; p = 9,81MPa.
- 4) a = 6m; b = 1m; t = 10mm; p = 9,81MPa.
- 5) a = 9m; b = 1m; t = 10mm; p = 9,81MPa.

6. Chứng minh những biểu thức sau đây, dùng cho tấm hình tròn.

Chuyển vị hướng li tâm: $u_r = -z \frac{dw}{dr}$ (a)

Biến dạng:
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} = -z \frac{d^2 w}{dr^2} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} = -\frac{z}{r} \frac{dw}{dr} \end{aligned} \right\} \quad \text{(b)}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ \text{Ứng suất: } \sigma_\theta &= -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \\ \sigma_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Nếu ký hiệu M – momen uốn phân bố trên đơn vị chiều dài, công thức cuối có thể viết thành:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 12 \frac{M_r z}{t^3} \\ \sigma_\theta &= 12 \frac{M_\theta z}{t^3} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

với

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) \end{aligned} \right\} \text{ với } D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (e)$$

Công thức trình bày tại (d) dùng cho tấm dày t có dạng:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x)_{\max, \min} &= \pm 6 \frac{M_r}{t^3} \\ (\sigma_\theta)_{\max, \min} &= \pm 6 \frac{M_\theta}{t^3} \end{aligned} \right\}$$

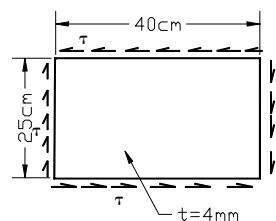
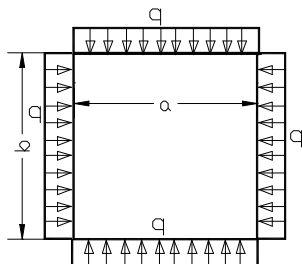
Phương trình vi phân bậc bốn uốn tấm, chịu tác động lực pháp tuyến $p(r)$ được viết thành:

$$\nabla^4 w(r) = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{p(r)}{D}$$

7. Xác định chiều dày t tấm thép hình chữ nhật nhằm tránh mất ổn định tấm trong trường hợp chịu lực nén $P=30\text{kN}$ phân bố đều dọc cạnh ngắn tấm. Tấm tựa tự do bốn cạnh. Biết rằng cạnh tấm $a = 35\text{cm}$, $b = 10\text{cm}$, $E = 2.10^5\text{MPa}$, $\nu = 0,28$.

8. Tấm thép hình vuông cạnh $b = 25\text{cm}$, tựa bốn mép trên gối, chịu lực nén cường độ q cả hai chiều, hình 5.6. Xác định ứng suất giới hạn (ứng suất Euler) của tấm, biết rằng chiều dày tấm $t = 0,40\text{cm}$, $E = 7.10^4\text{MPa}$, $\nu = 0,3$.

Trường hợp lực nén cường độ như trên chỉ tác động theo một hướng, kết quả tính sẽ như thế nào?

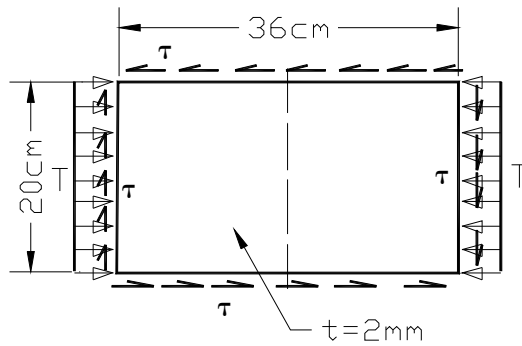


Hình 5.6

Hình 5.7

9. Tấm làm từ hợp kim nhôm, hình chữ nhật cạnh $a = 40\text{cm}$, $b = 25\text{cm}$, tựa tự do trên bốn cạnh, chịu tác động lực cắt τ , hình 5.7. Xác định tải giới hạn, biết rằng $E = 7,2 \cdot 10^4\text{MPa}$, $[\tau] = 120\text{MPa}$.

10. Tấm hình chữ nhật cạnh nhật cạnh $a = 36\text{cm}$, $b = 20\text{cm}$, tựa tự do trên bốn cạnh, chịu tác động lực cắt τ , và lực nén $T = 2\tau$, hình 5.8. Xác định τ_{cr} để tấm không bị mất ổn định.



Hình 5.8

Biết rằng $E = 7,2 \cdot 10^4\text{MPa}$, $\nu = 0,3$.