

www.mientayvn.com

Khi đọc qua tài liệu này, nếu phát hiện sai sót hoặc nội dung kém chất lượng xin hãy thông báo để chúng tôi sửa chữa hoặc thay thế bằng một tài liệu cùng chủ đề của tác giả khác. Tài liệu này bao gồm nhiều tài liệu nhỏ có cùng chủ đề bên trong nó. Phần nội dung bạn cần có thể nằm ở giữa hoặc ở cuối tài liệu này, hãy sử dụng chức năng Search để tìm chúng.

Bạn có thể tham khảo nguồn tài liệu được dịch từ tiếng Anh tại đây:

http://mientayvn.com/Tai_lieu_da_dich.html

Thông tin liên hệ:

Yahoo mail: thanhlam1910_2006@yahoo.com

Gmail: frbwrthes@gmail.com

Theo yêu cầu của khách hàng, trong một năm qua, chúng tôi đã dịch qua 16 môn học, 34 cuốn sách, 43 bài báo, 5 sổ tay (chưa tính các tài liệu từ năm 2010 trở về trước) Xem ở đây

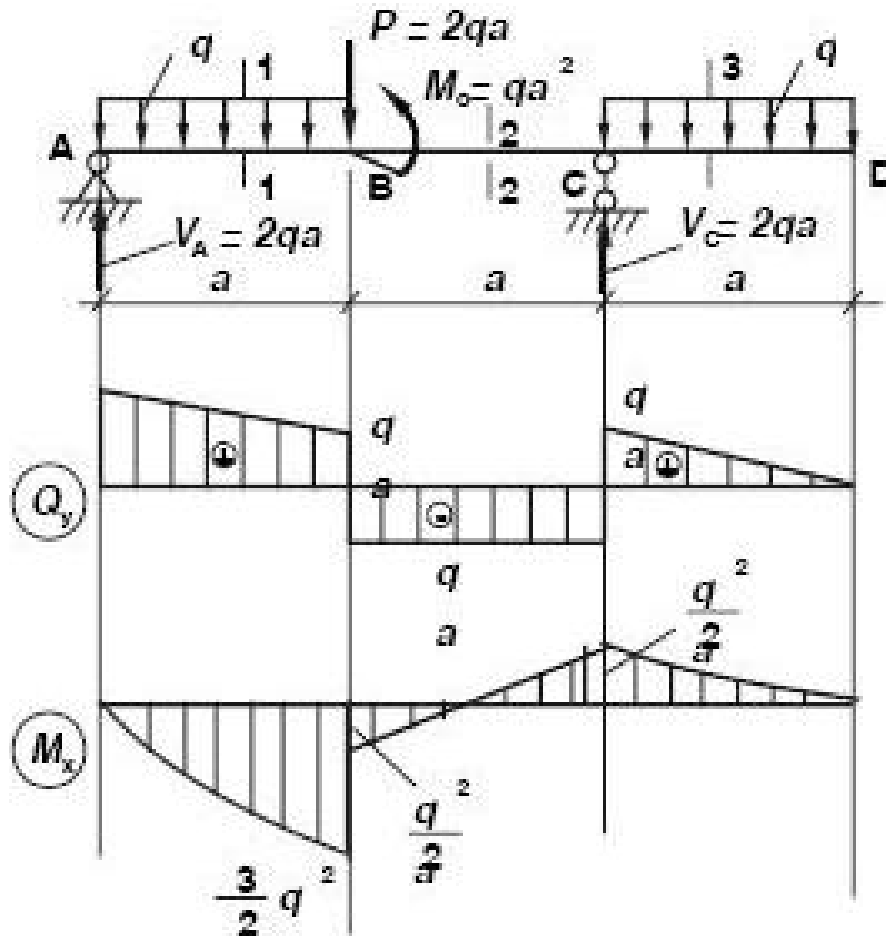
**DỊCH VỤ
DỊCH
TIẾNG
ANH
CHUYÊN
NGÀNH
NHANH
NHẤT VÀ
CHÍNH
XÁC
NHẤT**

Chỉ sau một lần liên lạc, việc dịch được tiến hành

Giá cả: có thể giảm đến 10 nghìn/1 trang

Chất lượng: Tạo dựng niềm tin cho khách hàng bằng công nghệ 1. Bạn thấy được toàn bộ bản dịch; 2. Bạn đánh giá chất lượng. 3. Bạn quyết định thanh toán.

Môn học sức bền vật liệu



CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1 KHÁI NIỆM VỀ MÔN HỌC SỨC BỀN VẬT LIỆU (SBVL)- ĐỐI TƯỢNG, NHIỆM VỤ, ĐẶC ĐIỂM CỦA MÔN SBVL

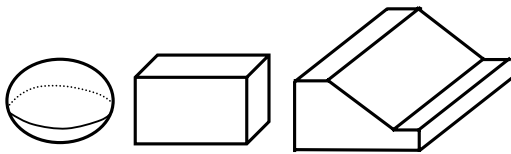
1.1.1 ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU CỦA SBVL- HÌNH DẠNG VẬT THỂ

SBVL nghiên cứu **vật thể thực** (công trình, chi tiết máy ...)

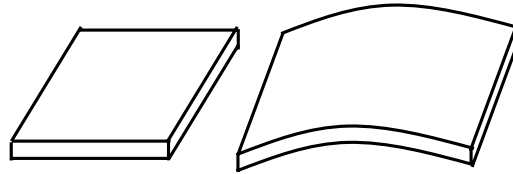
Vật thể thực có biến dạng dưới tác dụng của nguyên nhân ngoài (tải trọng, nhiệt độ, lắp ráp các chi tiết chế tạo không chính xác...)

Vật thể thực sử dụng trong kỹ thuật được chia ra ba loại cơ bản:

Khối: có kích thước theo ba phương tương đương: Đê đập, móng máy...



H. 1.1 Vật thể dạng khối

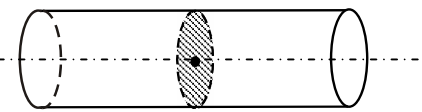


H. 1.2 Vật thể dạng tấm vỏ

Tấm và vỏ: vật thể mỏng có kích thước theo một phương rất nhỏ so với hai phương còn lại; tấm có dạng phẳng, vỏ có dạng cong: sàn nhà, mái vòm

Thanh: vật thể dài có kích thước theo một phương rất lớn so với hai phương còn lại: thanh dàn cầu, cột điện, trục máy... **SBVL nghiên cứu thanh, hệ thanh.**

Thanh được biểu diễn bằng **trục thanh** và **mặt cắt ngang F** vuông góc với trục thanh (H.1.3).



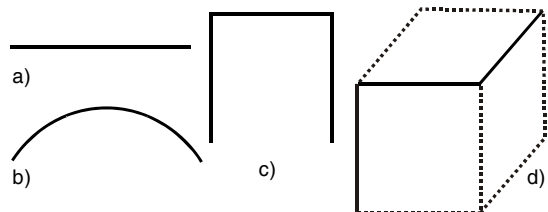
H. 1.3 Trục thanh và mặt cắt ngang

Trục thanh là quỹ tích của trọng tâm mặt cắt ngang.

Các loại thanh (H.1.4):

+Thanh thẳng, cong: trục thanh thẳng, cong,

+Hệ thanh : thanh gãy khúc (phẳng hay không gian)



H. 1.4 Các dạng trục thanh

1.1.2 Nhiệm vụ: SBVL là môn học kỹ thuật cơ sở, nghiên cứu tính chất chịu lực của vật liệu để đề ra các phương pháp tính các vật thể chịu các tác dụng của các nguyên nhân ngoài, nhằm thoả mãn yêu cầu **an toàn** và **tiết kiệm vật liệu**.

◆ Vật thể làm việc được **an toàn** khi:

- Thoả **điều kiện bền** : không bị phá hoại (nứt gãy, sụp đổ...).

- Thoả **điều kiện cứng**: biến dạng và chuyển vị nằm trong một giới hạn cho phép.

- Thoả **điều kiện ổn định** : bảo toàn hình thức biến dạng ban đầu.

◆ Thường, kích thước của vật thể lớn thì khả năng chịu lực cũng tăng và do đó độ an toàn cũng được nâng cao; tuy nhiên, vật liệu phải dùng nhiều hơn nên nặng nề và tốn kém hơn. Kiến thức của SBVL giúp giải quyết hợp lý mâu thuẫn giữa yêu cầu **an toàn và tiết kiệm** vật liệu.

◆ **Ba bài toán cơ bản của SBVL:**

+ Kiểm tra các điều kiện bền, cứng, ổn định.(Thẩm kế)

+ Định kích thước, hình dáng hợp lý của công trình hay chi tiết máy.

+ Định giá trị của các nguyên nhân ngoài (tải trọng, nhiệt độ...) cho phép tác dụng (Sửa chữa)

1.1.3 Đặc điểm:

◆ SBVL là môn khoa học thực nghiệm: Để đảm bảo sự tin cậy của các phương pháp tính, môn học kết hợp chặt chẽ giữa nghiên cứu thực nghiệm và suy luận lý thuyết.

Nghiên cứu thực nghiệm nhằm phát hiện ra tính chất ứng xử của các vật liệu với các dạng chịu lực khác nhau, làm cơ sở đề xuất các giả thiết đơn giản hơn để xây dựng lý thuyết. Vì vậy, lý thuyết SBVL mang tính gần đúng.

Thí nghiệm kiểm tra các lý thuyết tính toán đã xây dựng

Trong nhiều trường hợp, phải làm thí nghiệm trên mô hình công trình thu nhỏ trước khi xây dựng hoặc thử tải công trình trước khi sử dụng.

◆ SBVL khảo sát nội lực (lực bên trong vật thể) và biến dạng của vật thể (Cơ Lý Thuyết khảo sát cân bằng và chuyển động của vật thể).

◆ SBVL cũng sử dụng các kết quả của Cơ Lý Thuyết

1.2 NGOẠI LỰC- CÁC LOẠI LIÊN KẾT- PHẢN LỰC LIÊN KẾT

1.2.1 Ngoại lực

a) Định nghĩa: Ngoại lực là lực tác động từ môi trường hoặc vật thể bên ngoài lên vật thể đang xét.

b) Phân loại :

◆ **Tải trọng** : Đã biết trước (vị trí, phương và độ lớn), thường được quy định bởi các quy phạm thiết kế hoặc tính toán theo trạng thái chịu lực của vật thể. Tải trọng gồm:

+**Lực phân bố**: tác dụng trên một thể tích, một diện tích của vật thể (trọng lượng bản thân, áp lực nước lên thành bể...)

Lực phân bố thể tích có thứ nguyên là lực/thể tích, hay $[F/L^3]$.

Lực phân bố diện tích có thứ nguyên là lực/diện tích, hay $[F/L^2]$.

Nếu lực phân bố trên một dải hẹp thì thay lực phân bố diện tích bằng lực phân bố đường với cường độ lực có thứ nguyên là lực/chiều dài, hay $[F/L]$ (H.1.6). Lực phân bố

đường là loại lực thường gặp trong SBVL.

+**Lực tập trung**: tác dụng tại một điểm của vật thể, thứ nguyên $[F]$. Thực tế, khi diện tích truyền lực bé có thể coi như lực truyền qua một điểm

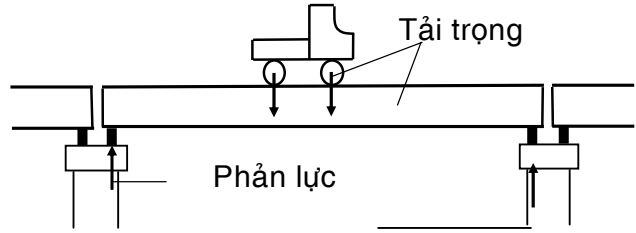
+ **Mômen** (ngẫu lực) có thứ nguyên là lực x chiều dài hay $[FxL]$

◆ **Phản lực** : là những lực thụ động (phụ thuộc vào tải trọng), phát sinh tại vị trí liên kết vật thể đang xét với các vật thể khác.

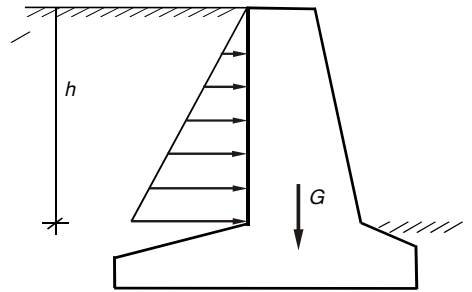
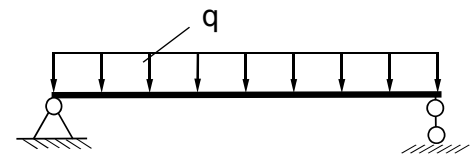
c) Tính chất tải trọng

◆ **Tải trọng tĩnh**: biến đổi chậm hay không đổi theo thời gian, bỏ qua gia tốc chuyển động (bỏ qua lực quán tính khi xét cân bằng). Áp lực đất lên tường chắn, trọng lượng của công trình là các lực tĩnh...

◆**Tải trọng động**: lực thay đổi nhanh theo thời gian, gây ra chuyển động có gia tốc lớn (rung động do một động cơ gây ra, va chạm của búa xuống đầu cọc...). Với lực động thì cần xét đến sự tham gia của **lực quán tính** .



H. 1.5 Tải trọng và phản lực



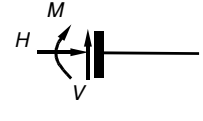
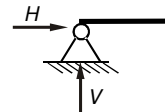
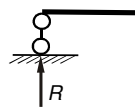
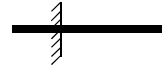
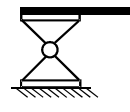
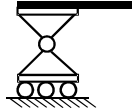
H. 1.6 Các loại lực phân bố

1.2.2 Liên kết phẳng, phản lực liên kết, cách xác định

1.2.2.1 Các loại liên kết phẳng và phản lực liên kết:

Một thanh muốn duy trì hình dạng, vị trí ban đầu khi chịu tác động của ngoại lực thì nó phải được **liên kết** với vật thể khác hoặc với đất.

♦ **Gối di động (liên kết thanh):** ngăn cản một chuyển vị thẳng và phát sinh một phản lực R theo phương của liên kết (H.1.7a)



a)

b)

c)

H. 1.7 Liên kết và phản lực liên kết

♦ **Gối cố định (Liên kết khớp, khớp, bản lề):** ngăn cản chuyển vị thẳng theo phương bất kỳ và phát sinh phản lực R cũng theo phương đó. Phản lực R thường được phân tích ra hai thành phần V và H (H.1.7b)

♦ **Ngàm:** ngăn cản tất cả chuyển vị thẳng và chuyển vị xoay. Phản lực phát sinh trong ngàm gồm ba thành phần V , H và M (H.1.7c)

1.2.2.2 Cách xác định phản lực:

Giải phóng các liên kết, thay bằng các phản lực tương ứng, các phản lực được xác định từ điều kiện cân bằng tĩnh học giữa tải trọng và phản lực.

Bài toán phẳng có ba phương trình cân bằng độc lập, được thiết lập ở các dạng khác nhau như sau:

1. $\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M_O = 0$ (2 phương X, Y không song song)
2. $\sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum M_C = 0$ (3 điểm A, B, C không thẳng hàng)
3. $\sum X = 0; \sum M_A = 0; \sum M_B = 0$ (phương AB không vuông góc với X)

Bài toán không gian có sáu phương trình cân bằng độc lập, thường có dạng: $\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0; \sum M /_{O_x} = 0; \sum M /_{O_y} = 0; \sum M /_{O_z} = 0$

Chú ý: Để cố định một thanh trong mp cần tối thiểu 3 liên kết đơn để chống lại 3 chuyển động tự do. Nếu đủ liên kết và bố trí hợp lý 3 phản lực sẽ tìm được từ 3 ptcb tĩnh học. Thanh được gọi là tĩnh định. Nếu số liên kết tương đương lớn hơn 3 gọi là bài toán siêu tĩnh.

1.3 CÁC DẠNG CHỊU LỰC VÀ BIẾN DẠNG CƠ BẢN – CHUYỂN VỊ

1.3.1 Biến dạng của vật thể:

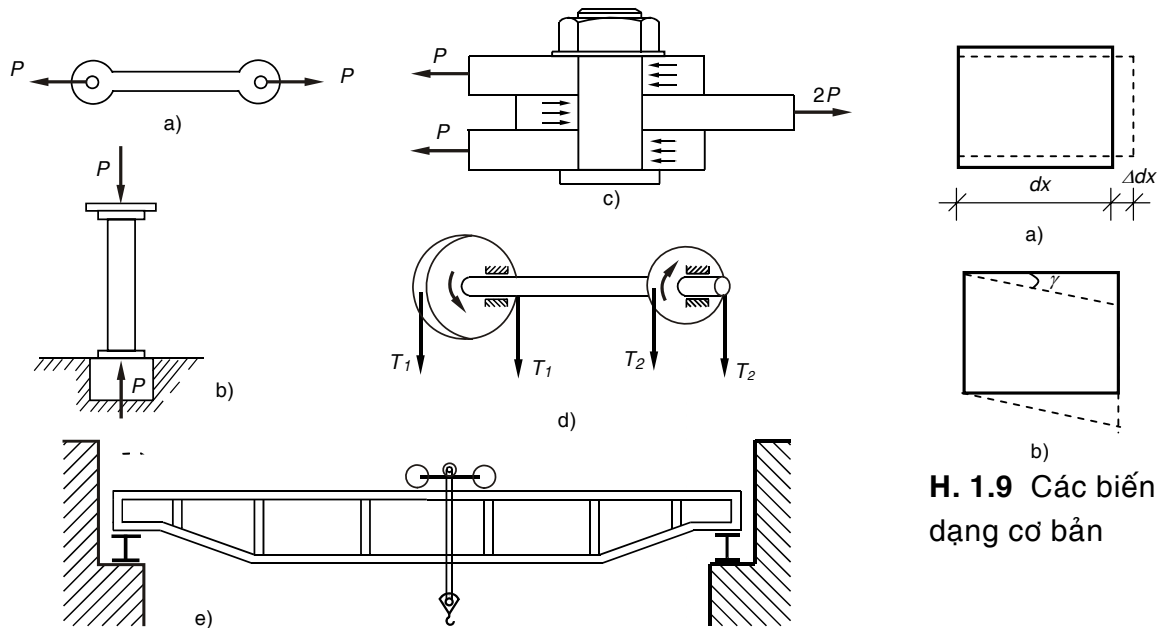
Trong thực tế, sự chịu lực của một thanh có thể phân tích ra các dạng chịu lực cơ bản:

Trục thanh khi chịu kéo (nén) sẽ giãn dài (co ngắn) (H.1.8a,b)

Trục thanh chịu uốn sẽ bị cong (H.1.8e)

Thanh chịu xoắn thì trục thanh vẫn thẳng nhưng đường sinh trên bề mặt trở thành đường xoắn trụ (H1.8.d).

Khi chịu cắt, hai phần của thanh có xu hướng trượt đối với nhau (H1.8.c).



Hình 1.8 Các dạng chịu lực cơ bản

H. 1.9 Các biến dạng cơ bản

1.3.2 Biến dạng của phân tử: Nếu tưởng tượng tách một phân tử hình hộp từ một thanh chịu lực thì sự biến dạng của nó trong trường hợp tổng quát có thể phân tích ra hai thành phần cơ bản:

- ◆ Phân tử trên H.1.9a dài dx chỉ thay đổi chiều dài, không thay đổi góc.

Biến dạng dài tuyệt đối theo phương x : $\Delta dx.$

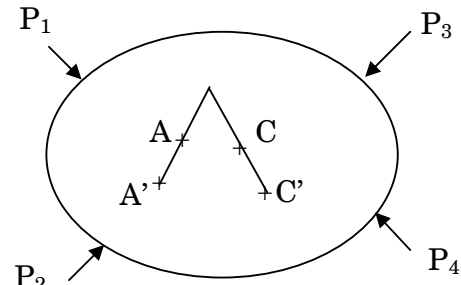
Biến dạng dài tương đối theo phương x : $\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$

- ◆ Phân tử trên H.1.9b chỉ có thay đổi góc, không thay đổi chiều dài

Biến dạng góc hay góc trượt, ký hiệu là γ : Độ thay đổi của góc vuông ban đầu

1.3.3 Chuyển vị:

Khi vật thể bị biến dạng, các điểm trong vật thể nói chung bị thay đổi vị trí. Độ chuyển dời từ vị trí cũ của điểm A sang vị trí mới A' được gọi là **chuyển vị dài**. Góc hợp bởi vị trí của một đoạn thẳng AC trước và trong khi biến dạng A'C' của vật thể được gọi là **chuyển vị góc** (H.1.10).



H. 1.10

1.4 Các giả thiết

Khi giải bài toán SBVL, người ta chấp nhận một số giả thiết nhằm đơn giản hoá bài toán nhưng cố gắng đảm bảo sự chính xác cần thiết phù hợp với yêu cầu thực tế.

1.4.1 Giả thiết về vật liệu

Vật liệu được coi là **liên tục, đồng nhất, đẳng hướng và đàn hồi tuyến tính**.

◆ Ta tưởng tượng lấy một phân tử bao quanh một điểm trong vật thể. Nếu cho phân tử bé tùy ý mà vẫn chứa vật liệu thì ta nói vật liệu **liên tục** tại điểm đó.

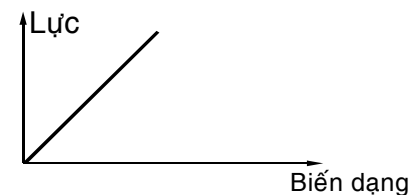
Giả thiết về sự liên tục của vật liệu cho phép sử dụng các phép tính của toán giải tích như giới hạn, vi phân, tích phân.... Trong thực tế, ngay cả với vật liệu được coi là hoàn hảo nhất như kim loại thì cũng có cấu trúc không liên tục.

◆ Vật liệu **đồng nhất** : Tính chất cơ học tại mọi điểm trong vật thể là như nhau.

◆ Vật liệu **đẳng hướng** : Tính chất cơ học tại một điểm theo các phương đều như nhau.

◆ Tính chất **đàn hồi** của vật thể là khả năng khôi phục lại hình dạng ban đầu của nó khi ngoại lực thôi tác dụng. Nếu quan hệ giữa ngoại lực và biến dạng là bậc nhất, thì vật liệu được gọi là **đàn hồi tuyến tính** (H.1.11).

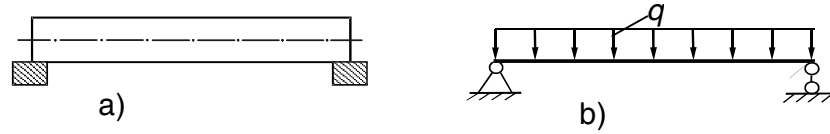
Giả thiết vật liệu đàn hồi tuyến tính làm giảm bớt sự phức tạp của bài toán SBVL.



H. 1.11 Đàn hồi tuyến tính

1.4.2 Giả thiết về sơ đồ tính

Khi tính toán, người ta thay vật thể thực bằng sơ đồ tính (H1.12).



H. 1.12 Sơ đồ tính

1.4.3 Giả thiết về biến dạng và chuyển vị

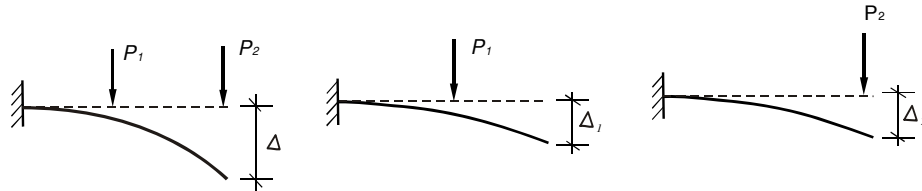
Vật thể có **biến dạng và chuyển vị bé** so với kích thước ban đầu của vật \Rightarrow Có thể khảo sát vật thể hoặc các bộ phận của nó trên hình dạng ban đầu (tính trên sơ đồ không biến dạng của vật thể).

Giả thiết này xuất phát điều kiện biến dạng và chuyển vị lớn nhất trong vật thể phải nằm trong một giới hạn tương đối nhỏ.

Hệ quả:

Khi vật thể có chuyển vị bé và vật liệu đàn hồi tuyến tính thì có thể áp dụng **nguyên lý cộng tác dụng** như sau:

Một đại lượng do nhiều nguyên nhân đồng thời gây ra sẽ bằng tổng đại lượng đó do từng nguyên nhân gây ra riêng lẻ. (H.1.13)



H.1.13 Nguyên lý cộng tác dụng

Chuyển vị Δ tại đầu thanh do lực P_1 và P_2 gây ra có thể phân tích như sau:

$$\Delta(P_1, P_2) = \Delta_1(P_1) + \Delta_2(P_2)$$

Nguyên lý cộng tác dụng biến bài toán phức tạp thành các bài toán đơn giản dễ giải quyết hơn. Vì vậy, thường được sử dụng trong SBVL.

Chương 2 LÝ THUYẾT NỘI LỰC

2.1 KHÁI NIỆM VỀ NỘI LỰC - PHƯƠNG PHÁP KHẢO SÁT - ỨNG SUẤT

1- Khái niệm về nội lực:

Xét một vật thể chịu tác dụng của ngoại lực và ở trạng thái cân bằng (H.2.1). Trước khi tác dụng lực, giữa các phân tử của vật thể luôn có các lực tương tác giữ cho vật thể có hình dáng nhất định. Dưới tác dụng của ngoại lực, các phân tử của vật thể có thể dịch lại gần nhau hoặc tách xa nhau. Khi đó, lực tương tác giữa các phân tử của vật thể phải thay đổi để chống lại các dịch chuyển này. Sự thay đổi của lực tương tác giữa các phân tử trong vật thể được gọi là *nội lực*.

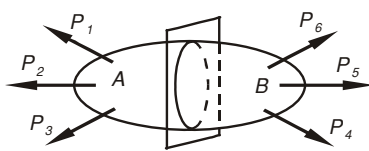
Một vật thể không chịu tác động nào từ bên ngoài thì được gọi là vật thể ở *trạng thái tự nhiên* và nội lực của nó được coi là *bằng không*.

2-Phương pháp khảo sát nội lực: Phương pháp mặt cắt

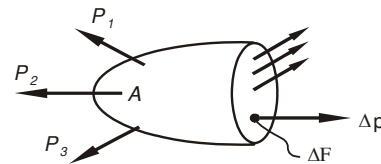
Xét lại vật thể cân bằng và 1 điểm C trong vật thể (H.2.1),.

Tưởng tượng một mặt phẳng Π cắt qua C và chia vật thể thành hai phần A và B; hai phần này sẽ tác động lẫn nhau bằng hệ lực phân bố trên diện tích mặt tiếp xúc theo định luật lực và phản lực.

Nếu tách riêng phần A thì hệ lực tác động từ phần B vào nó phải cân bằng với ngoại lực ban đầu (H.2.2).



H.2.1 Vật thể chịu lực cân bằng



H.2.2 Nội lực trên mặt cắt

Xét một phân tử diện tích ΔF bao quanh điểm khảo sát C trên mặt cắt Π có phương pháp tuyến v . Gọi $\Delta \vec{p}$ là *vector* nội lực tác dụng trên ΔF . Ta định nghĩa ứng suất toàn phần tại điểm khảo sát là:

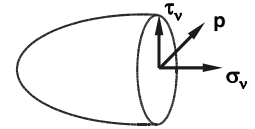
$$\vec{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta F} = \frac{d\vec{p}}{dF}$$

Thứ nguyên của ứng suất là [lực]/[chiều dài]² (N/m², N/cm²...).

Ứng suất toàn phần p có thể phân ra hai thành phần:

+ Thành phần ứng suất pháp σ_v có phương pháp tuyến của mặt phẳng Π

+ Thành phần ứng suất tiếp τ_v nằm trong mặt phẳng Π (H.2.3).



Hình 2.3 Các thành

phần

ứng suất

Các đại lượng này liên hệ với nhau theo biểu thức:

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2 \quad (2.1)$$

Ứng suất là một đại lượng cơ học đặc trưng cho mức độ chịu đựng của vật liệu tại một điểm; ứng suất vượt quá một giới hạn nào đó thì vật liệu bị phá hoại. Do đó, việc xác định ứng suất là cơ sở để đánh giá độ bền của vật liệu, và chính là một nội dung quan trọng của môn SBVL.

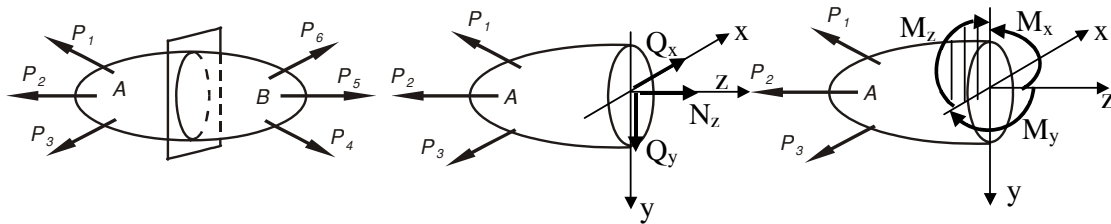
Thừa nhận: Ứng suất pháp σ_v chỉ gây ra biến dạng dài.

Ứng suất tiếp τ_v chỉ gây biến dạng góc.

2.2 CÁC THÀNH PHẦN NỘI LỰC - CÁCH XÁC ĐỊNH

1- Các thành phần nội lực:

Như đã biết, đối tượng khảo sát của SBVL là những chi tiết dạng thanh, đặc trưng bởi mặt cắt ngang (hay còn gọi là tiết diện) và trục thanh.



H.2.4 Các thành phần nội lực

Gọi hợp lực của các nội lực phân bố trên mặt cắt ngang của thanh là R . R có điểm đặt và phương chiều chưa biết.

Dời R về trọng tâm O của mặt cắt ngang \Rightarrow $\begin{cases} \text{Lực } R \\ \text{Mômen } M \end{cases}$ có phương bất kỳ

Đặt một hệ trục tọa độ Descartes vuông góc ngay tại trọng tâm mặt cắt ngang, $Oxyz$, với trục z trùng pháp tuyến của mặt cắt, còn hai trục x, y nằm trong mặt cắt ngang.

Khi đó, có thể phân tích R ra ba thành phần theo ba trục:

- + N_z , theo phương trục z (\perp mặt cắt ngang) gọi là *lực dọc*
- + Q_x theo phương trục x (nằm trong mặt cắt ngang) gọi là *lực cắt*.
- + Q_y theo phương trục y (nằm trong mặt cắt ngang) gọi là *lực cắt*.

Mômen M cũng được phân ra ba thành phần :

- + Mômen M_x quay quanh trục x gọi là *mômen uốn*.
- + Mômen M_y quay quanh trục y gọi là *mômen uốn*.
- + Mômen M_z quay quanh trục z gọi là *mômen xoắn*.

Sáu thành phần này được gọi là *các thành phần nội lực* trên mặt cắt ngang (H.2.4)

2 Cách xác định:

Sáu thành phần nội lực trên một mặt cắt ngang được xác định từ sáu phương trình cân bằng độc lập của phần vật thể được tách ra, trên đó có tác dụng của ngoại lực ban đầu P_i và các nội lực.

Các phương trình cân bằng hình chiếu các lực trên các trục tọa độ:

$$\begin{aligned}\sum Z = 0 &\Leftrightarrow N_z + \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \Rightarrow N_z \\ \sum Y = 0 &\Leftrightarrow Q_y + \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \Rightarrow Q_y \\ \sum X = 0 &\Leftrightarrow Q_x + \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \Rightarrow Q_x\end{aligned}\quad (2.2)$$

trong đó: P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} - là hình chiếu của lực P_i xuống các trục x, y, z .

Các phương trình cân bằng mômen đối với các trục tọa độ ta có:

$$\begin{aligned}\sum M / Ox &\Leftrightarrow M_x + \sum_{i=1}^n m_x(P_i) = 0 \Rightarrow M_x \\ \sum M / Oy &\Leftrightarrow M_y + \sum_{i=1}^n m_y(P_i) = 0 \Rightarrow M_y \\ \sum M / Oz &\Leftrightarrow M_z + \sum_{i=1}^n m_z(P_i) = 0 \Rightarrow M_z\end{aligned}\quad (2.3)$$

với: $m_x(P_i), m_y(P_i), m_z(P_i)$ - các mômen của các lực P_i đối với các trục x, y, z .

3-Liên hệ giữa nội lực và ứng suất:

Các thành phần nội lực liên hệ với các thành phần ứng suất như sau:

- Lực dọc là tổng các ứng suất pháp
- Lực cắt là tổng các ứng suất tiếp cùng phương với nó
- Mômen uốn là tổng các mômen gây ra bởi các ứng suất đối với trục x hoặc y
- Mômen xoắn là tổng các mômen của các ứng suất tiếp đối với trục z

2-3 BÀI TÓÁN PHẪNG:

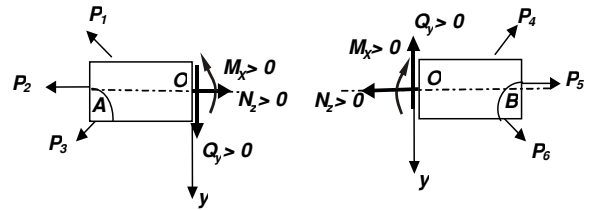
Trường hợp bài toán phẳng (ngoại lực nằm trong một mặt phẳng (thí dụ mặt phẳng yz)), chỉ có ba thành phần nội lực nằm trong mặt phẳng yz : N_z, Q_y, M_x .

♦ Qui ước dấu (H.2.5)

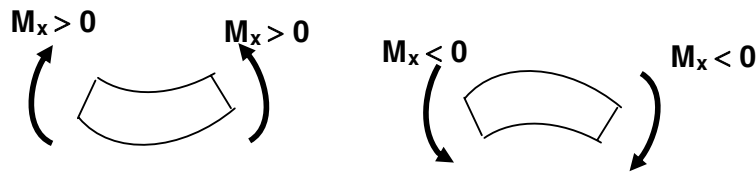
- Lực dọc $N_z > 0$ khi gây kéo đoạn thanh đang xét (có chiều hướng ra ngoài mặt cắt)

- Lực cắt $Q_y > 0$ khi làm quay đoạn thanh đang xét theo chiều kim đồng hồ.

- Mômen uốn $M_x > 0$ khi căng thớ dưới (thớ y dương).



Hình 2.5: Chiều dương các thành phần nội



Mômen $M_x > 0$, Mômen $M_x < 0$

♦ Cách xác định:

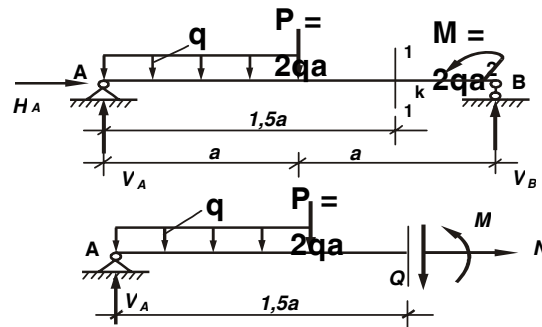
Dùng 3 phương trình cân bằng tĩnh học khi xét cân bằng phần A) hay phần B)

Từ phương trình $\Sigma Z = 0 \Rightarrow N_z$

Từ phương trình $\Sigma Y = 0 \Rightarrow Q_y$ (2.4)

Từ phương trình $\Sigma M/O = 0 \Rightarrow M_x$

Thí dụ 2.1 Xác định các trị số nội lực tại mặt cắt 1-1 của thanh AB, với :
 $q = 10 \text{ kN/m}$; $a = 1\text{m}$; $M_0 = 2qa^2$. (H.2.6)



H.
2.6

Giải.

Tính phản lực: Giải phóng các liên kết và thay vào đó bằng các phản lực liên kết V_A , H_A , V_B .

Viết các phương trình cân bằng tĩnh học khi xét cân bằng thanh AB

$$\sum Z = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - qa - P = 0$$

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow qa \times \frac{a}{2} + P \times a - M_0 - V_B \times 2a = 0$$

$$\Rightarrow H_A = 0; \quad V_A = \frac{11}{4}qa = 27,5 \text{ kN}; \quad V_B = \frac{1}{4}qa = 2,5 \text{ kN}$$

Tính nội lực: Mặt cắt 1-1 chia thanh làm hai phần.

Xét sự cân bằng của phần bên trái (H.2.6) :

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A - qa - P - Q = 0 \Rightarrow Q = -\frac{1}{4}qa = -2,5 \text{ kN}$$

$$\sum M/O_1 = 0 \Rightarrow M = V_A \times 1,5a - qa \times a - 2qa \times \frac{a}{2} = \frac{17}{8}qa^2 = 21,25 \text{ kNm}$$

Nếu xét cân bằng của phần phải ta cũng tìm được các kết quả như trên.

2.4 BIỂU ĐỒ NỘI LỰC (BÀI TOÁN PHẪNG)

1. Định nghĩa: Thường các nội lực trên các mặt cắt ngang của một thanh không giống nhau.

Biểu đồ nội lực (BĐNL) là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của các nội lực theo vị trí của các mặt cắt ngang. Hay gọi là mặt cắt biến thiên.

Nhờ vào BĐNL có thể xác định vị trí mặt cắt có nội lực lớn nhất và trị số nội lực ấy.

2. Cách vẽ BĐNL- Phương pháp giải tích:

Để vẽ biểu đồ nội lực ta tính nội lực trên mặt cắt ngang ở một vị trí bất kỳ có hoành độ z so với một gốc hoành độ nào đó mà ta chọn trước. Mặt cắt ngang chia thành ra thành 2 phần. Xét sự cân bằng của một phần (trái, hay phải) , viết biểu thức giải tích của nội lực theo z .

Vẽ đường biểu diễn trên hệ trục tọa độ có trục hoành song song với trục thanh (còn gọi là đường chuẩn), tung độ của biểu đồ nội lực sẽ được diễn tả bởi các đoạn thẳng vuông góc các đường chuẩn.

Thí dụ 2.2- Vẽ BĐNL của dầm nút thừa (H.2.7)

Giải

Xét mặt cắt ngang 1-1 có hoành độ z so với gốc A, ta có ($0 \leq z \leq l$)

Biểu thức giải tích của lực cắt và mômen uốn tại mặt cắt 1-1 được xác định từ việc xét cân bằng phần phải của thanh:

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N = 0$$

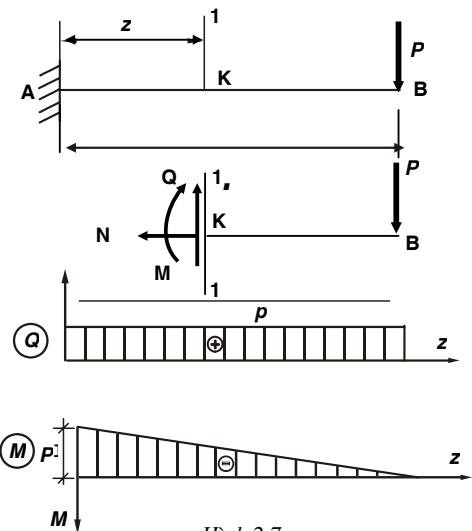
$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_y - P = 0 \Rightarrow Q_y = P$$

$$\sum M/O_1 = 0 \Rightarrow M_x + P(l-z) = 0 \Rightarrow M_x = -P(l-z)$$

Cho z biến thiên từ 0 đến l , ta sẽ được biểu đồ nội lực như trên H.2.7.

Qui ước: +Biểu đồ lực cắt Q_y tung độ dương vẽ phía trên trục hoành.

+Biểu đồ mômen uốn M_x tung độ dương vẽ phía dưới trục hoành.



Hình 2.7

(Tung độ của biểu đồ mômen luôn ở về phía thõ căng của thanh).

Thí dụ 2.3 – Vẽ BĐNL của dầm đơn giản chịu tải phân bố đều q (H.2.8a).

Giải

Phản lực: Bỏ các liên kết tại A và B, thay bằng các phản lực (H.2.8a).

$$\sum Z = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

$$\text{Do đối xứng} \Rightarrow V_A = V_B = \frac{ql}{2}$$

Nội lực: Chọn trục hoành như trên H.2.8b. Xét mặt cắt ngang 1-1 tại K có hoành độ là z , ($0 \leq z \leq l$). Mặt cắt chia thanh làm hai phần.

Xét cân bằng của phần bên trái AK (H.2.8b)

Từ các phương trình cân bằng ta suy ra:

$$\begin{cases} \sum Z = 0 \Rightarrow N_z = 0 \\ \sum Y = 0 \Rightarrow Q_y = \frac{ql}{2} - qz = q\left(\frac{l}{2} - z\right) \\ \sum M / O_1 = 0 \Rightarrow M_x = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} = \frac{qz}{2}(l - z) \end{cases}$$

Q_y là hàm bậc nhất theo z , M_x là hàm bậc 2 theo z .

Cho z biến thiên từ 0 đến l ta vẽ được các biểu đồ nội lực (H2.8).

Cụ thể: +Khi $z=0 \Rightarrow Q_y = ql/2$, $M_x = 0$

+Khi $z=l \Rightarrow Q_y = -ql/2$, $M_x = 0$

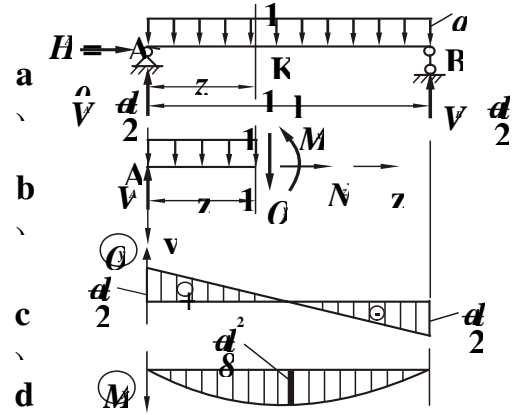
+Tìm $M_{x, \text{cực trị}}$ bằng cách cho đạo hàm $dM_x / dz = 0$,

$$dM_x / dz = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ql}{2} - qz = 0 \Rightarrow z = \frac{l}{2} \\ \Rightarrow M_{x, \text{max}} = \frac{ql^2}{8} \end{cases}$$

Qua các BĐNL, ta nhận thấy:

Lực cắt Q_y có giá trị lớn nhất ở mặt cắt sát gối tựa,

Mômen uốn M_x có giá trị cực đại ở giữa dầm.



H.2.8

Thí dụ 2.4 Vẽ BĐNL của dầm đơn giản chịu lực tập trung P (H.2.9a) .

Giải

Phản lực: Các thành phần phản lực tại các gối tựa là:

$$H_A = 0; V_A = \frac{Pb}{l}; V_B = \frac{Pa}{l}$$

Nội lực : Vì tải trọng có phương vuông góc với trục thanh nên lực dọc N_z trên mọi mặt cắt ngang có trị số bằng không.

Phân đoạn thanh: Vì tính liên tục của các hàm số giải tích biểu diễn các nội lực nên phải tính nội lực trong từng đoạn của thanh; trong mỗi đoạn phải không có sự thay đổi đột ngột của ngoại lực .

♦ Đoạn AC- Xét mặt cắt 1-1 tại điểm K_1 trong đoạn AC và cách gốc A một đoạn z , ($0 \leq z \leq a$).

Khảo sát cân bằng của phần bên trái ta được các biểu thức giải tích của nội lực:

$$\begin{cases} Q_y = V_A = \frac{Pb}{l} = \frac{P(l-a)}{l} \\ M_x = V_A \cdot z = \frac{Pb}{l} z = \frac{P(l-a)}{l} z \end{cases}$$

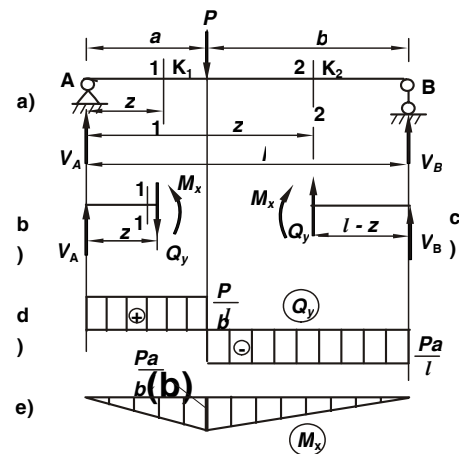
♦ Đoạn CB- Xét mặt cắt 2-2 tại điểm K_2 Trong đoạn CB cách gốc A một đoạn z , ($a \leq z \leq l$). Tính nội lực trên mặt cắt 2-2 bằng cách xét phần bên phải (đoạn K_2B). Ta được:

$$\begin{aligned} Q_y &= -V_B = -\frac{Pa}{l} \\ M_x &= V_B(l-z) = \frac{Pa}{l}(l-z) \end{aligned} \quad (b)$$

Từ (a) và (b) dễ dàng vẽ được các biểu đồ nội lực như H.2.9d,e.

Trường hợp đặc biệt : Nếu $a=b= L/2$, khi đó mômen cực đại xảy ra tại giữa dầm và có giá trị: $M_{\max} = PL/4$

(a)



H. 2.9

Thí dụ 2.5 Vẽ BĐNL của dầm đơn giản chịu tác dụng của mômen tập trung M_o (H.2.10a.)

Giải

Phản lực: Xét cân bằng của toàn dầm ABC \Rightarrow các phản lực liên kết tại A và B là: $H_A = 0$; $V_A = V_B = \frac{M_o}{l}$, chiều phản lực như H.2.10a.

Nội lực:

Đoạn AC: Dùng mặt cắt 1-1 cách gốc A một đoạn z_1 ; ($0 \leq z_1 \leq a$). Xét cân bằng của đoạn AK_1 bên trái mặt cắt $K_1 \Rightarrow$ các nội lực

$$\text{như sau } \begin{cases} Q_{y_1} = -V_A = -\frac{M_o}{l} \\ M_{x_1} = -V_A z_1 = -\frac{M_o}{l} z_1 \end{cases} \quad (c)$$

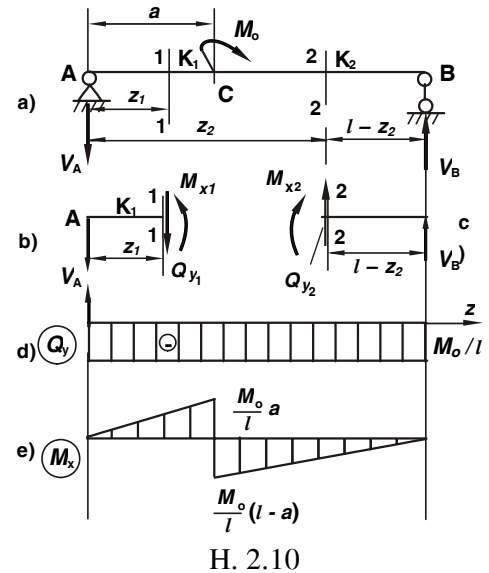
Đoạn CB: Dùng mặt cắt 2-2 trong đoạn CB cách gốc A một đoạn z_2 với ($a \leq z_2 \leq l$). Xét cân bằng của phần bên phải $K_2B \Rightarrow$ các biểu thức nội lực trên mặt cắt 2-2 là:

$$\begin{cases} Q_{y_2} = -V_B = -\frac{M_o}{l} \\ M_{x_2} = V_B(l - z_2) = \frac{M_o}{l}(l - z_2) \end{cases} \quad (d)$$

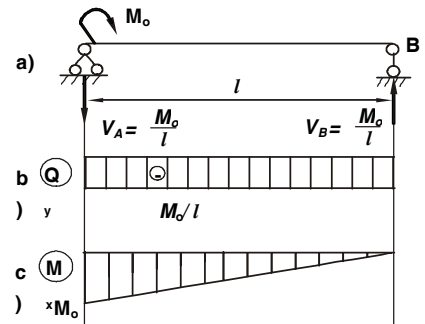
BĐNL được vẽ từ các biểu thức (c), (d) của nội lực trong hai đoạn (H.2.10d-e).

Trường hợp đặc biệt: Mômen tập trung M_o đặt tại mặt cắt sát gối tựa A (H.2.11).

Q_y và M_x sẽ được xác định bởi (d) ứng với $a = 0$. BĐNL vẽ như H.2.11



H. 2.10



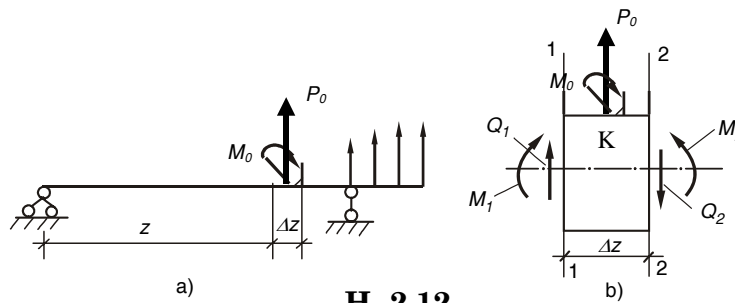
H. 2.11

Các nhận xét :

- Nơi nào có lực tập trung, biểu đồ lực cắt nơi đó có bước nhảy. Trị số của bước nhảy bằng trị số lực tập trung. Chiều bước nhảy theo chiều lực tập trung nếu ta vẽ từ trái sang phải

- Nơi nào có mômen tập trung, biểu đồ mômen uốn nơi đó có bước nhảy. Trị số của bước nhảy bằng trị số mômen tập trung. Chiều bước nhảy theo chiều mômen tập trung nếu ta vẽ từ trái sang phải

Kiểm chứng các nhận xét :



H. 2.12

Khảo sát đoạn Δz bao quanh một điểm K có tác dụng lực tập trung P_0 , mômen tập trung M_0 (H.2.12b).

Viết các phương trình cân bằng \Rightarrow

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_1 + P_0 - Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 - Q_1 = P_0 \quad (i)$$

$$\sum M/K = 0 \Rightarrow M_1 + M_0 - M_2 + Q_1 \frac{\Delta z}{2} - Q_2 \frac{\Delta z}{2} = 0$$

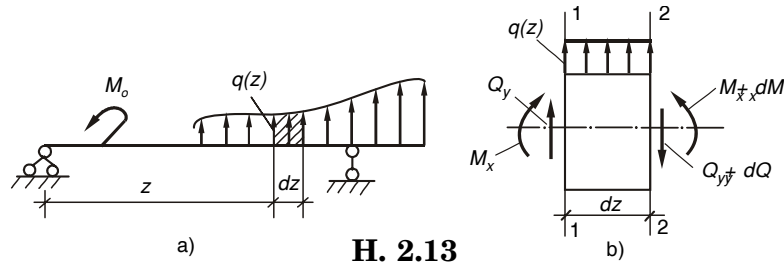
$$\text{Bỏ qua vô cùng bé bậc một } Q_1 \frac{\Delta z}{2}, Q_2 \frac{\Delta z}{2}, \Rightarrow M_2 - M_1 = M_0 \quad (ii)$$

Biểu thức (i) đã kiểm chứng nhận xét về bước nhảy của biểu đồ lực cắt.

Biểu thức (ii) đã kiểm chứng nhận xét về bước nhảy của biểu đồ mômen.

2.4. LIÊN HỆ VI PHÂN GIỮA NỘI LỰC VÀ TẢI TRỌNG PHÂN BỐ TRONG THANH THẲNG

Xét một thanh chịu tải trọng bất kỳ (H.2.13a). Tải trọng tác dụng trên thanh này là lực phân bố theo chiều dài có cường độ $q(z)$ có chiều dương hướng lên (H.2.13b).



H. 2.13

Khảo sát đoạn thanh vi phân dz , giới hạn bởi hai mặt cắt 1-1 và 2-2 (H.2.13b). Nội lực trên mặt cắt 1-1 là Q_y và M_x . Nội lực trên mặt cắt 2-2 so với 1-1 đã thay đổi một lượng vi phân và trở thành $Q_y + dQ_y$; $M_x + dM_x$. Vì dz là rất bé nên có thể xem tải trọng là phân bố đều trên đoạn dz .

Viết các phương trình cân bằng:

1-Tổng hình chiếu các lực theo phương đứng

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 &\Rightarrow Q_y + q(z)dz - (Q_y + dQ_y) = 0 \\ \Rightarrow q(z) &= \frac{dQ_y}{dz} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Đạo hàm của lực cắt bằng cường độ của lực phân bố vuông góc với trục thanh.

2- Tổng mômen của các lực đối với trọng tâm mặt cắt 2-2 ta được:

$$\sum M/o_2 = 0 \Rightarrow Q_y dz + q(z) \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} + M_x - (M_x + dM_x) = 0$$

Bỏ qua lượng vô cùng bé bậc hai $q(z) \cdot \frac{dz^2}{2} \Rightarrow$

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y \quad (2.5)$$

Đạo hàm của mômen uốn tại một mặt cắt bằng lực cắt tại mặt cắt đó

$$\text{Từ (2.4) và (2.5) } \Rightarrow \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q(z) \quad (2.6)$$

nghĩa là: Đạo hàm bậc hai của mômen uốn tại một điểm chính là bằng cường độ của tải trọng phân bố tại điểm đó.

Thí dụ 2.6 Vẽ BĐNL cho dầm đơn giản AB chịu tác dụng của tải phân bố bậc nhất như H.2.14.

Giải

. Phản lực: Giải phóng liên kết, đặt các phản lực tương ứng ở các gối tựa, xét cân bằng của toàn thanh,

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0,$$

$$\sum M/B = 0 \Rightarrow V_A l = \frac{1}{2} \times q_0 l \times \frac{l}{3} \Rightarrow V_A = \frac{1}{6} q_0 l$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_B = \frac{1}{3} q_0 l$$

. Nội lực: Cường độ của lực phân bố ở mặt cắt 1-1 cách gốc A một đoạn z cho bởi: $q(z) = q_0 \frac{z}{l}$

Dùng mặt cắt 1-1 và xét sự cân bằng của phần bên trái (H.2.14b).

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_y = V_A - q(z) \frac{z}{2} = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 z^2}{2l} \quad (e)$$

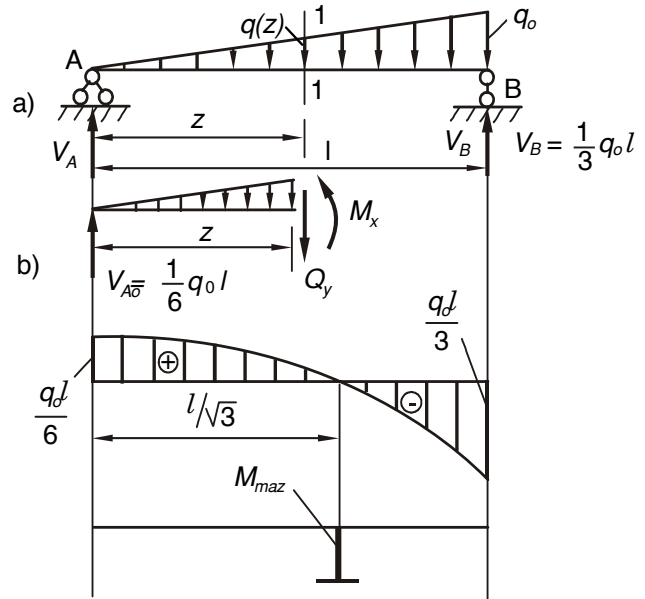
$$\sum M/o_1 = 0 \Rightarrow M_x = \frac{q_0 l}{6} z - q(z) \times \frac{z}{2} \times \frac{z}{3} = \frac{q_0 l}{6} z - \frac{q_0 z^3}{6l} \quad (g)$$

Từ (e) và (g) ta vẽ được biểu đồ lực cắt và mômen cho dầm đã cho. Các biểu đồ này có tính chất như sau:

Biểu đồ lực cắt Q_y có dạng bậc 2. Tại vị trí $z = 0$, $q(z) = 0$ nên ở đây biểu đồ Q_y đạt cực trị: $(Q_y)_{z=0} = Q_{\max} = q_0 l / 6$

Biểu đồ mômen uốn M_x có dạng bậc 3. Tại vị trí $z = l/\sqrt{3}$; $Q_y = 0$. Vậy tại đây M_x đạt cực trị:

$$(M_x)_{z=\frac{l}{\sqrt{3}}} = M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}$$



H.2.14

Thí dụ 2.7 Vẽ BĐNL cho dầm chịu lực tổng quát (H.2.15)

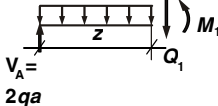
Giải

Phản lực: Giải phóng liên kết, xét cân bằng toàn thanh, suy ra phản lực liên kết tại A và C là:

$$H_A = 0, \quad V_A = 2qa; \quad V_C = 2qa$$

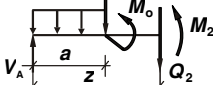
Nội lực:

* Đoạn AB: Mặt cắt 1-1, gốc A ($0 \leq z \leq a$), xét cân bằng phần trái

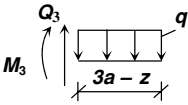
$$\begin{cases} Q_1 = 2qa - qz \\ M_1 = 2qaz - \frac{qz^2}{2} \end{cases}$$


* Đoạn BC: Mặt cắt 2-2, gốc A ($a \leq z \leq 2a$)

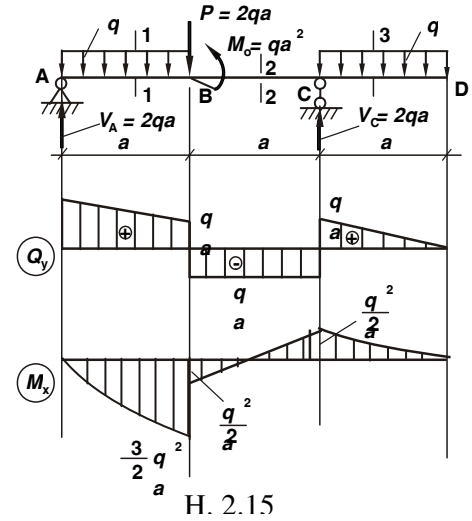
và xét cân bằng phần trái:

$$\begin{cases} Q_2 = -qa \\ M_2 = -qaz + \frac{3}{2}qa^2 \end{cases}$$


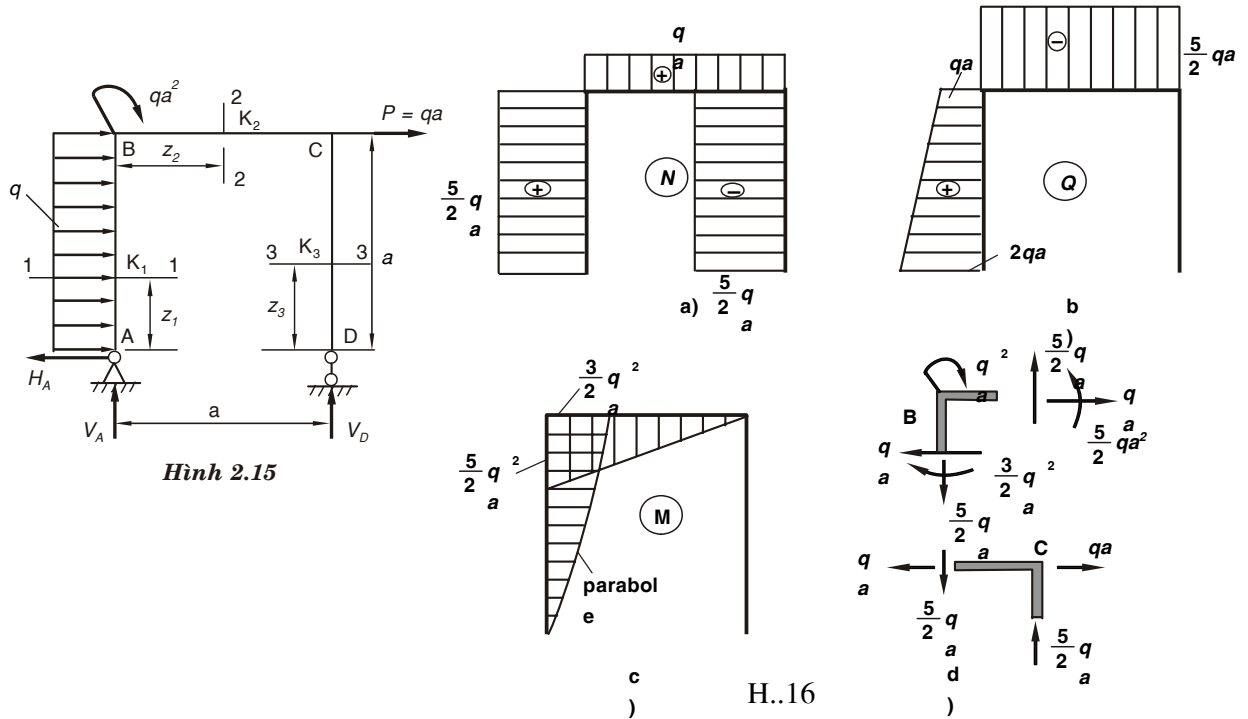
* Đoạn CD: Mặt cắt 3-3, gốc A, ($2a \leq z \leq 3a$) xét cân bằng phần phải:

$$\begin{cases} Q_3 = q(3a - z) \\ M_3 = -q \frac{(3a - z)^2}{2} \end{cases} \quad (2a \leq z \leq 3a)$$


Biểu đồ mômen và lực cắt vẽ như H.2.15.



Thí dụ 2.8 Vẽ biểu đồ nội lực trong khung chịu tải trọng như trên H.2.16.



Hình 2.15

H.16

Giải

Tính phản lực liên kết

Xét sự cân bằng của toàn khung dưới tác dụng của tải trọng ngoài và các phản lực liên kết ta suy ra:

$$\sum N_{\text{ngang}} = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum M/D = 0 \Rightarrow V_a \times a + qa \times \frac{a}{2} + qa^2 + qa \times a = 0 \rightarrow V_A = -\frac{5}{2}qa$$

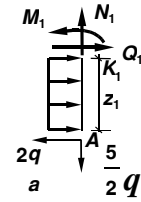
$$\sum \text{Đúng} = 0 \Rightarrow V_A + V_D = 0 \Rightarrow V_D = +\frac{5}{2}qa \quad (\text{Đúng chiều đã chọn})$$

Vậy chiều thật của V_A ngược với chiều đã chọn

Vẽ biểu đồ nội lực

Đoạn AB: dùng mặt cắt 1-1 và xét cân bằng đoạn AK₁ ta được:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{5}{2}qa \\ Q_1 = 2qa - qz_1 \\ M_1 = 2qaz_1 - \frac{qz_1^2}{2} \end{cases} \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

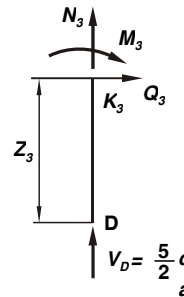


Đoạn BC: dùng mặt cắt 2-2 và xét cân bằng đoạn ABK₂ ta được:

$$\begin{cases} N_2 = qa \\ Q_2 = -\frac{5}{2}qa \\ M_2 = \frac{5}{2}qa^2 - \frac{5}{2}qaz_2 \end{cases} \quad (0 \leq z_2 \leq a)$$

Đoạn CD: dùng mặt cắt 3-3 và xét cân bằng DK₃

$$\begin{cases} N_3 = -\frac{5}{2}qa \\ Q_3 = 0 \\ M_3 = 0 \end{cases} \quad (0 \leq z_3 \leq a)$$



Kiểm tra sự cân bằng nút

Đối với khung, có thể kiểm tra kết quả bằng việc xét cân bằng các nút. Nếu tách nút ra khỏi hệ thì ta phải đặt vào nút các ngoại lực tập trung (nếu có) và các nội lực tại các mặt cắt, giá trị của chúng được lấy từ biểu đồ vừa vẽ.

Sau khi đặt các lực trên, nếu tính đúng các nội lực ở các nút thì nút sẽ cân bằng, nghĩa là các phương trình cân bằng được thỏa mãn. Ngược lại, nếu các phương trình không thỏa mãn thì các nội lực tính sai.

Cụ thể đối với khung đang xét, ta tách nút B và đặt vào đó mômen tập trung qa^2 và các thành phần nội lực trên các đoạn thanh ngang và đứng như H.2.16d:

- Tại mặt cắt trên thanh ngang có lực dọc $+qa$ hướng ra ngoài mặt cắt, lực cắt $5qa^2/2$ có chiều hướng lên và mômen $5qa^2/2$ gây căng thớ dưới.

- Tại mặt cắt trên thanh đứng có lực dọc $+5qa/2$ hướng ra ngoài mặt cắt (hướng xuống) lực cắt $+qa$ hướng từ phải sang trái và mômen $3qa^2/2$ gây ra căng thớ trong khung nên chiều quay có mũi tên hướng ra ngoài.

Ta dễ dàng thấy các phương trình cân bằng thỏa mãn:

$$\sum X = 0 ; \sum Y = 0 ; \sum M/B = 0$$

Tương tự, tách nút C và đặt vào đó lực tập trung qa hướng từ trái sang phải và các thành phần nội lực trên các đoạn thanh ngang và đứng như H.2.16d.

- Tại mặt cắt trên thanh ngang có lực dọc $+qa$ hướng ra ngoài mặt cắt, lực cắt $-5qa/2$ có khuynh hướng làm quay phần đoạn thanh đang xét ngược chiều kim đồng hồ nên có chiều hướng xuống, còn mômen thì bằng không.

- Tại mặt cắt trên thanh thẳng đứng tồn tại lực dọc $-5qa/2$ có chiều hướng vào mặt cắt (hướng lên) và không có lực cắt cũng như mômen.

Ta dễ dàng thấy rằng các phương trình cân bằng được thỏa mãn:

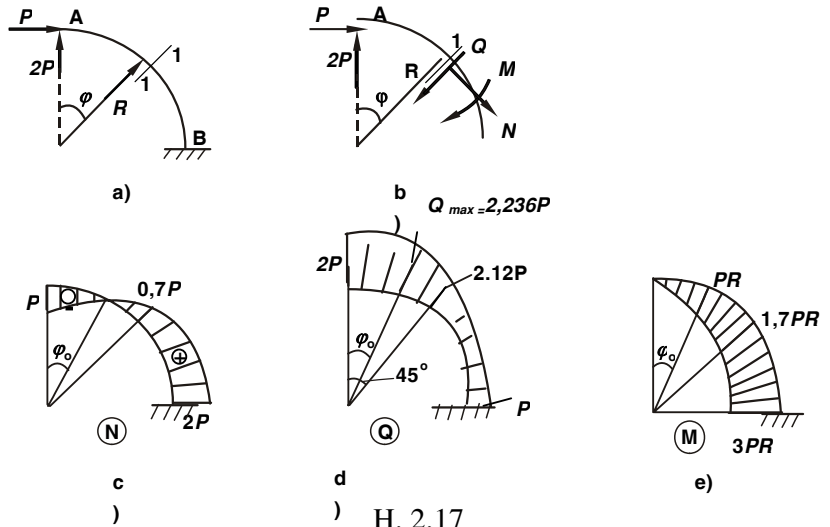
$$\sum X = -qa + qa = 0; \quad \sum Y = -\frac{5}{2}qa + \frac{5}{2}qa = 0; \quad \sum M/B = 0$$

Vậy các nút B và C đều cân bằng nghĩa là các hệ nội lực tại các nút đúng.

Thí dụ 2.9 Vẽ BĐNL trong thanh cong (H.2.17)

Giải

Cắt thanh tại tiết diện 1-1, xác định bởi góc φ ($0 \leq \varphi \leq 90^\circ$), xét cân bằng của phần trên dưới tác dụng của các ngoại lực và các thành phần nội lực đặt theo chiều dương quy ước như H.2.17b.



Phương trình cân bằng hình chiếu các lực theo phương pháp tuyến với mặt cắt cho:

$$N = 2P\sin\varphi - P\cos\varphi = P(2\sin\varphi - \cos\varphi) \quad (a)$$

Phương trình cân bằng hình chiếu các lực theo phương đường kính cho:

$$Q = 2P\cos\varphi + P\sin\varphi = P(2\cos\varphi + \sin\varphi) \quad (b)$$

Phương trình cân bằng của các mômen các lực đối với trọng tâm mặt cắt dẫn đến:

$$M = -2PR\sin\varphi - PR(1 - \cos\varphi) = -PR(2\sin\varphi + 1 - \cos\varphi) \quad (c)$$

Cho φ một vài trị số đặc biệt và tính các trị số nội lực tương ứng, ta vẽ được biểu đồ.

Lực cắt đạt cực trị khi $\frac{dQ_y}{d\varphi} = 0$, nghĩa là khi:

$$-2\sin\varphi + \cos\varphi = 0 \Rightarrow \text{tg}\varphi = 0,5 \Rightarrow \varphi = \varphi_0 = 26^\circ 56'$$

$$\sin\varphi_0 = 0,4472 ; \quad \cos\varphi_0 = 0,8944$$

Ta có bảng nội lực sau:

| φ | 0 | φ_0 | 45° | 90° |
|-----------|------|-------------|------------|------------|
| N | $-P$ | 0 | $0,7P$ | $2P$ |
| Q | $2P$ | $2,236P$ | $2,12P$ | $+P$ |
| M | 0 | $-PR$ | $-1,7PR$ | $-3PR$ |

Khi vẽ cần chú ý đặt các tung độ theo phương vuông góc với trục thanh, tức là theo phương bán kính như trên H.2.17c,d,e.

2.5 CÁCH VẼ BIỂU ĐỒ NHANH

2.5.1 Phương pháp vẽ từng điểm

Dựa trên các liên hệ vi phân, ta định dạng các BĐNL tùy theo dạng tải trọng đã cho và từ đó ta xác định số điểm cần thiết để vẽ biểu đồ.

Trên 1 đoạn thanh

+ $q = 0 \Rightarrow Q = \text{hằng số}, M = \text{bậc nhất}$.

+ $q = \text{hằng} \Rightarrow Q = \text{bậc nhất}, M = \text{bậc hai}$.

.....

+ Nếu biểu đồ có dạng hằng số, chỉ cần xác định một điểm bất kỳ.

+ Nếu biểu đồ có dạng bậc nhất, cần tính nội lực tại hai điểm đầu và cuối đoạn thanh.

+ Nếu biểu đồ có dạng bậc hai trở lên thì cần ba giá trị tại điểm đầu, điểm cuối và tại nơi có cực trị, nếu không có cực trị thì cần biết chiều lồi lõm của biểu đồ theo dấu của đạo hàm bậc hai. Đoạn thanh có lực phân bố q hướng xuống sẽ âm, nên bề lõm của biểu đồ mômen hướng lên. Ngược lại, nếu q hướng lên sẽ dương nên bề lõm của biểu đồ mômen hướng xuống. Tóm lại, đường cong mômen hứng lấy lực phân bố q .

Thí dụ 2.10: Vẽ BĐNL trong dầm cho trên H.2.18 (phương pháp vẽ điểm)

Giải.

Phản lực liên kết

$$\sum M/B = 0 \Rightarrow -qa^2 + 2qa^2 + 2qa^2 - V_C \times 2a = 0 \Rightarrow V_C = \frac{3}{2}qa$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_B = \frac{5}{2}qa$$

Nội lực

Đoạn AB: $q=0 \Rightarrow Q_y = \text{hằng số}$,
 $M_x = \text{bậc nhất}$.

Trong trường hợp này Q_y là hằng số bằng không vì $Q_A^{(AB)} = 0$.

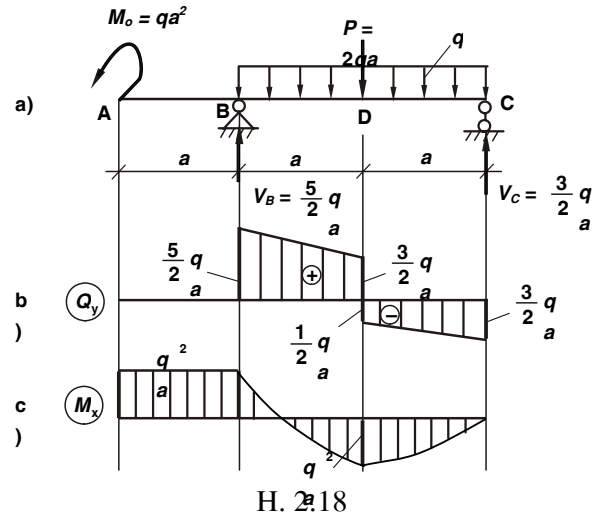
$\Rightarrow M_x$ trong đoạn này sẽ là hằng số

$$M_A^{(AB)} = M_B^{(BA)} = -M_o = -qa^2$$

Đoạn BD: $q = \text{hằng} \Rightarrow Q_y = \text{bậc 1}$,
 $M_x = \text{bậc 2}$.

Tại B:
$$\begin{cases} Q_B^{(BD)} = +\frac{5}{2}qa \\ M_B^{(BD)} = -M_o = -qa^2 \end{cases}$$

Tại D:
$$\begin{cases} Q_D^{(BD)} = \frac{5}{2}qa - qa = \frac{3}{2}qa \\ M_D^{(BD)} = \frac{3}{2}qa^2 - \frac{qa^2}{2} = qa^2 \end{cases}$$



Biểu đồ Q_y trong đoạn này không có vị trí nào $=0 \Rightarrow$ biểu đồ M_x không có cực trị.

Chỉ cần nối hai giá trị mômen tại B và D bằng đường cong bậc hai có bề lõm sao cho hứng lấy lực q .

Đoạn DC: $q = \text{hằng} \Rightarrow Q_y = \text{bậc 1}$, $M_x = \text{bậc 2}$.

Tại D: $Q_D^{(DC)} = -\frac{1}{2}qa$; $M_D^{(DC)} = \frac{3}{2}qa^2 - \frac{qa^2}{2} = qa^2$

Tại C: $Q_C = -V_C = -\frac{3}{2}qa$; $M_C = 0$

Biểu đồ Q_y trong đoạn này không có vị trí nào $=0 \Rightarrow$ biểu đồ M_x không có cực trị.

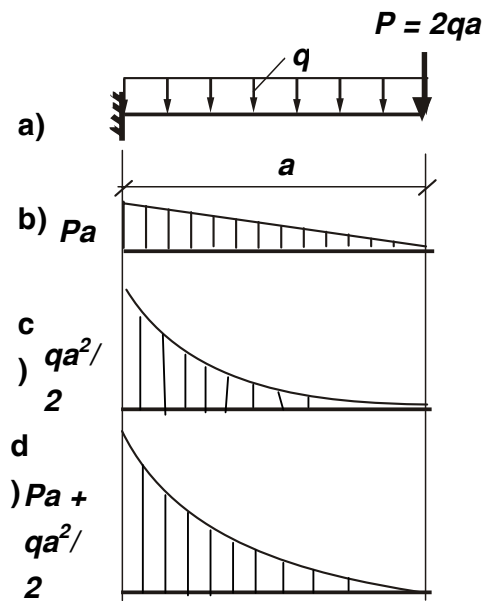
Chỉ cần nối hai giá trị mômen tại D và C bằng đường cong bậc hai có bề lõm sao cho hứng lấy lực q .

Các biểu đồ lực cắt Q_y và mômen M_x lần lượt được vẽ trên H.2.18b,c.

2.5.2 Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng

Khi thanh chịu tác dụng nhiều loại tải trọng, ta có thể vẽ biểu đồ nội lực trong thanh do từng tải trọng riêng lẻ gây ra rồi cộng đại số lại để được kết quả cuối cùng.

Thí dụ 10. Vẽ biểu đồ mô men trong dầm như H.2.18a bằng cách cộng biểu đồ.



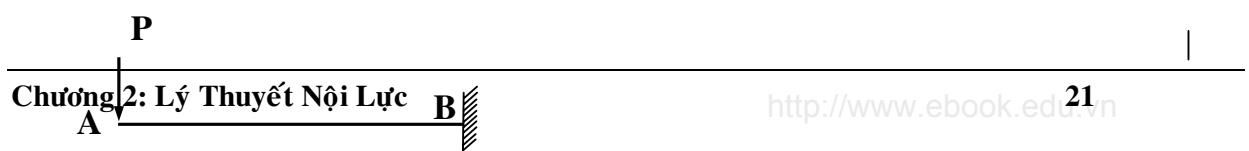
H.2.18

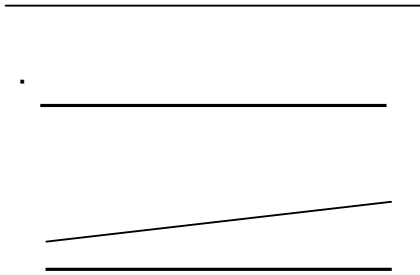
Giải. Tải trọng trên thanh được chia thành hai trường hợp cơ bản:

- + Hình 2.18b biểu diễn mô men do lực tập trung P gây ra
- + Hình 2.18c biểu diễn mô men do lực phân bố đều q gây ra

Hình 2.18d biểu diễn mô men tổng hợp cần tìm, các tung độ bằng tổng đại số các tung độ tại các tiết diện tương ứng trên H.2.18b,c

Bảng tóm tắt dầm console , dầm đơn giản, dầm đầu thừa

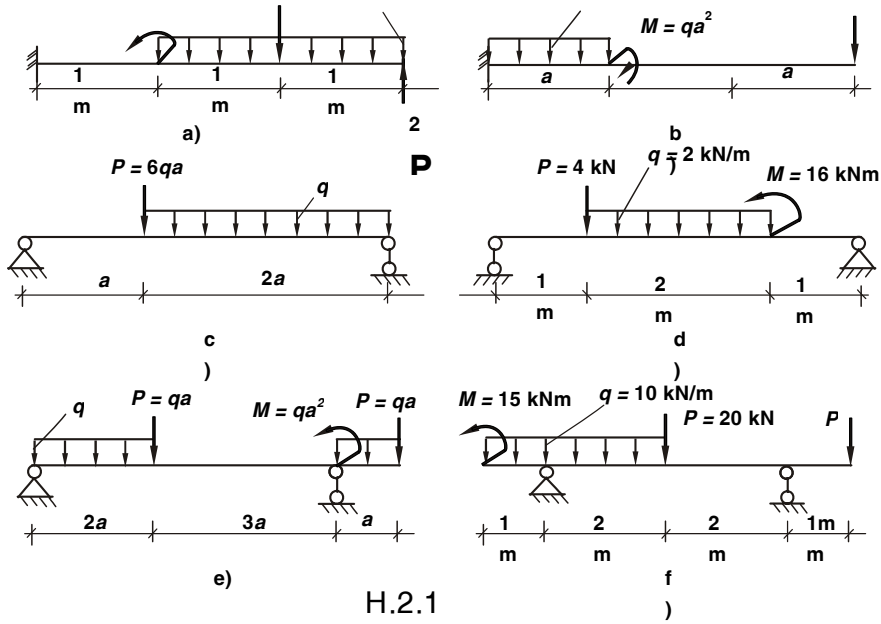




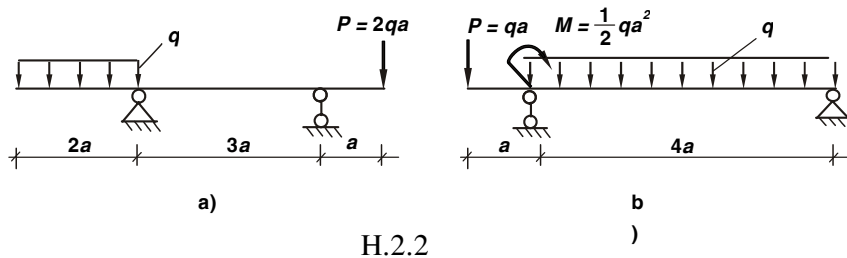
BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Vẽ biểu đồ nội lực của các dầm cho trên H.2.1.

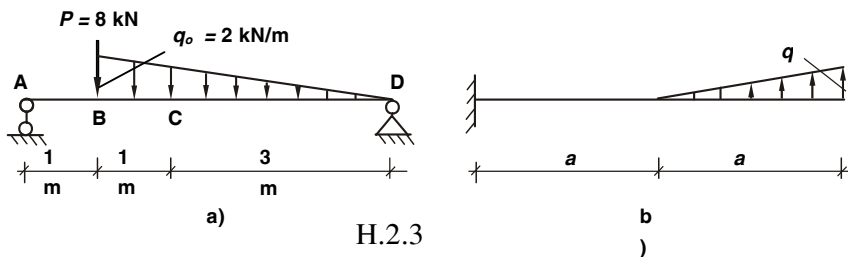
$$M = 10 \text{ kNm} \quad P = 5 \text{ kN} \quad q = 5 \text{ kN/m} \quad q \quad P = 2qa$$



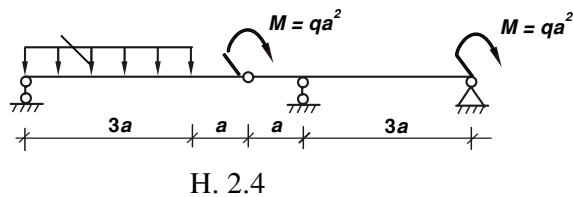
2.2. Không cần tính ra phản lực, vẽ BĐNL của các dầm cho trên H.2.2.



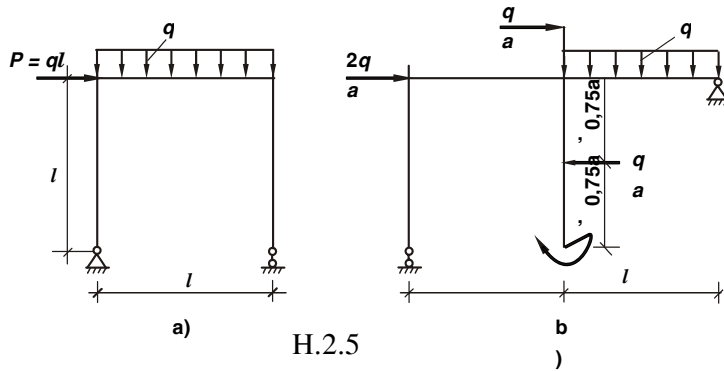
2.3. Vẽ biểu đồ nội lực như trên H.2.3.



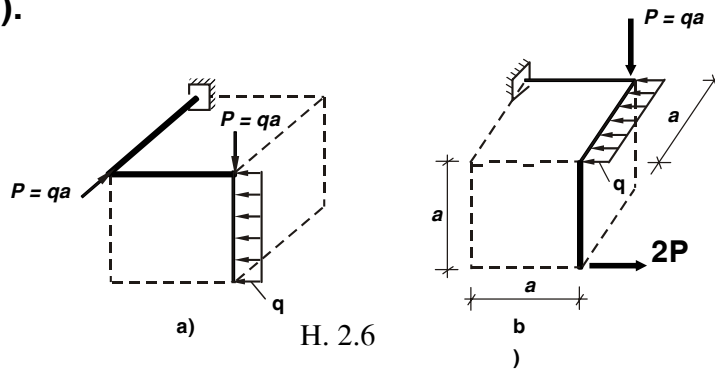
2.4. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm tĩnh định như trên H.2.4.



2.5. Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung sau (H.2.5).



2.6. Vẽ biểu đồ lực dọc, mômen uốn, mômen xoắn cho thanh không gian (H.2.6).



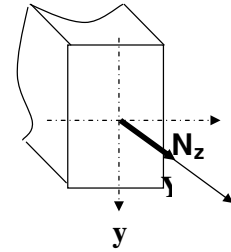
Chương 3. KÉO - NÉN ĐÚNG TÂM

3.1 KHÁI NIỆM

◆ Định nghĩa: Thanh được gọi là chịu kéo hay nén đúng tâm khi trên mọi mặt cắt ngang của thanh chỉ có một thành phần nội lực là lực dọc N_z .

$N_z > 0$ khi hướng ra ngoài mặt cắt- Kéo

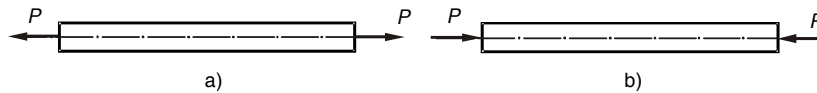
$N_z < 0$ khi hướng vào trong mặt cắt- Nén



H. 3.1

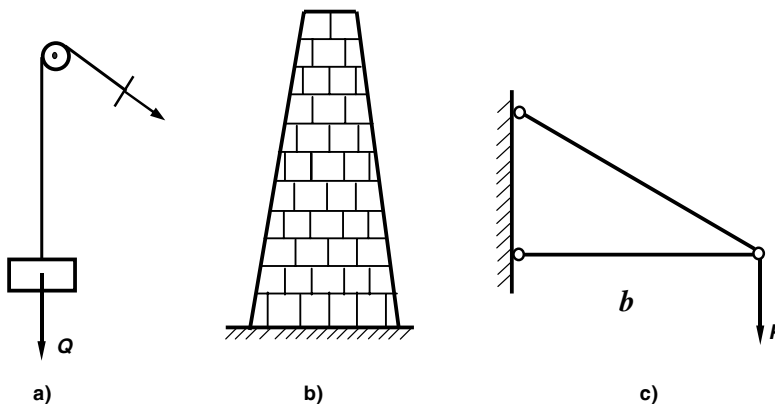
Đây là trường hợp chịu lực đơn giản nhất. Ta gặp trường hợp này khi thanh chịu 2 lực ở bằng nhau và trái chiều ở hai đầu dọc trục thanh .

Thanh chịu kéo đúng tâm (H.3.2a) hay chịu nén đúng tâm (H.3.2b).



H. 3.2 Định nghĩa thanh chịu kéo nén đúng

◆ Thực tế : có thể gặp các cấu kiện chịu kéo hay nén đúng tâm như: dây cáp trong cần cầu (H.3.3a), ống khói (H.3.3b), các thanh trong dàn (H.3.3c).

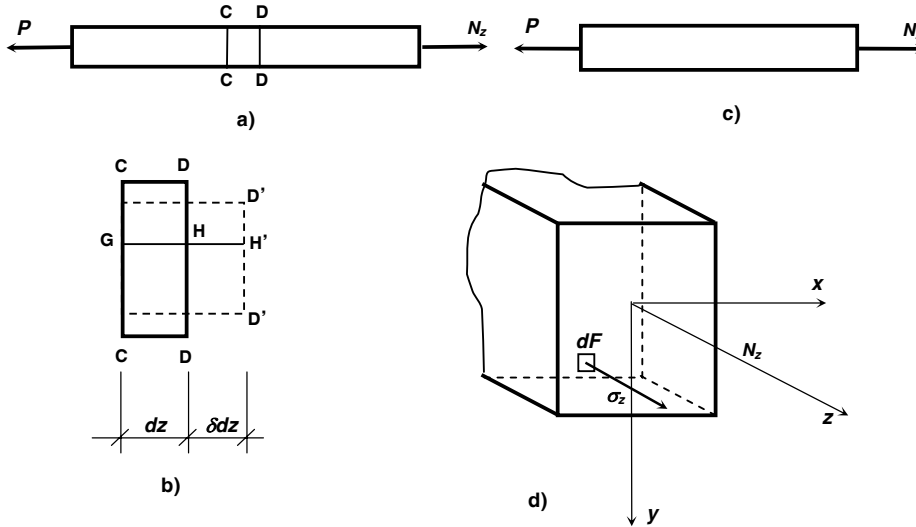


H. 3.3 Một số cấu kiện chịu kéo nén đúng tâm

3.2. ỨNG SUẤT TRÊN MẶT CẮT NGANG

Xét thanh thẳng chịu kéo (nén) đúng tâm (H.3.3a) các mặt cắt ngang CC và DD trước khi thanh chịu lực cách nhau đoạn dz và vuông góc trục thanh. Các thớ dọc trong đoạn CD (như là GH) bằng nhau (H.3.3b).

Khi thanh chịu kéo (nén), nội lực trên mặt cắt ngang DD hay bất kỳ mặt cắt ngang khác là $N_z = P$ (H.3.3c) thanh sẽ dãn ra, mặt cắt DD di chuyển dọc trục thanh z so với mặt cắt CC một đoạn bé δdz (H.3.3b).



Ta thấy biến dạng các thớ dọc như GH đều bằng HH' và không đổi, mặt cắt ngang trong suốt quá trình biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục thanh, điều này cho thấy các điểm trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất pháp σ_z không đổi (H.3.3d).

Ta có:
$$\int_F \sigma_z dF = N_z \quad \text{vì} \quad \left(\varepsilon_z = \frac{\delta dz}{dz} \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \right)$$

Nên $\sigma_z = \text{const}$ ta được: $\sigma_z F = N_z$

hay:
$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \quad (3.1)$$

với: F- diện tích mặt cắt ngang của thanh.

3.3. BIẾN DẠNG CỦA THANH CHỊU KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM

1- Biến dạng dọc

Biến dạng dọc trục z của đoạn dài dz chính là δdz (H.3.3b).

Như vậy biến dạng dài tương đối của đoạn dz là: $\varepsilon_z = \frac{\delta dz}{dz}$ (a)

Theo định luật Hooke ta có: $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$ (b)

trong đó: E - là hằng số tỷ lệ, được gọi là mô đun đàn hồi khi kéo (nén), nó phụ thuộc vào vật liệu và có thứ nguyên $\left[\frac{\text{lực}}{(\text{chiều dài})^2} \right]$, đơn vị N/m^2 , xác định từ thí nghiệm.

Bảng 3.1 cho trị số E của một số vật liệu.

| Vật liệu | E (kN/cm ²) | μ |
|----------------------|---------------------------|-------------|
| Thép (0,15 ÷ 0,20)%C | 2×10^4 | 0,25 ÷ 0,33 |
| Thép lò xo | $2,2 \times 10^4$ | 0,25 ÷ 0,33 |
| Thép niken | $1,9 \times 10^4$ | 0,25 ÷ 0,33 |
| Gang xám | $1,15 \times 10^4$ | 0,23 ÷ 0,27 |
| Đồng | $1,2 \times 10^4$ | 0,31 ÷ 0,34 |
| Đồng thau | $(1,0 \div 1,2)10^4$ | 0,31 ÷ 0,34 |
| Nhôm | $(0,7 \div 0,8)10^4$ | 0,32 ÷ 0,36 |
| Gỗ dọc thớ | $(0,08 \div 0,12)10^4$ | |
| Cao su | 0,8 | 0,47 |

T

Từ (a) tính δdz , thế (b) vào, ta được biến dạng dài dọc trục của đoạn dz là:

$$\delta dz = \varepsilon_z dz = \frac{\sigma_z}{E} dz = \frac{N_z}{EF} dz \quad (c)$$

Suy ra biến dạng dài (dãn khi thanh kéo, co khi thanh nén) của đoạn thanh dài L :

$$\Delta L = \int_L \delta dz = \int_L \frac{N_z}{EF} dz \quad (3.2)$$

Nếu E , F là hằng số và N_z cũng không đổi trên chiều dài L của thanh, ta sẽ được:

$$\Delta L = \frac{N_z}{EF} \int_L dz = \frac{N_z L}{EF} \quad (3.3)$$

Nếu thanh gồm nhiều đoạn chiều dài L_i và trên mỗi đoạn N_z , E , A không đổi thì:

$$\Delta L = \sum \Delta L_i = \sum \frac{N_{zi} L_i}{E_i F_i} \quad (3.3')$$

Tích số EF gọi là độ cứng khi chịu kéo hay nén đúng tâm của thanh.

2- Biến dạng ngang

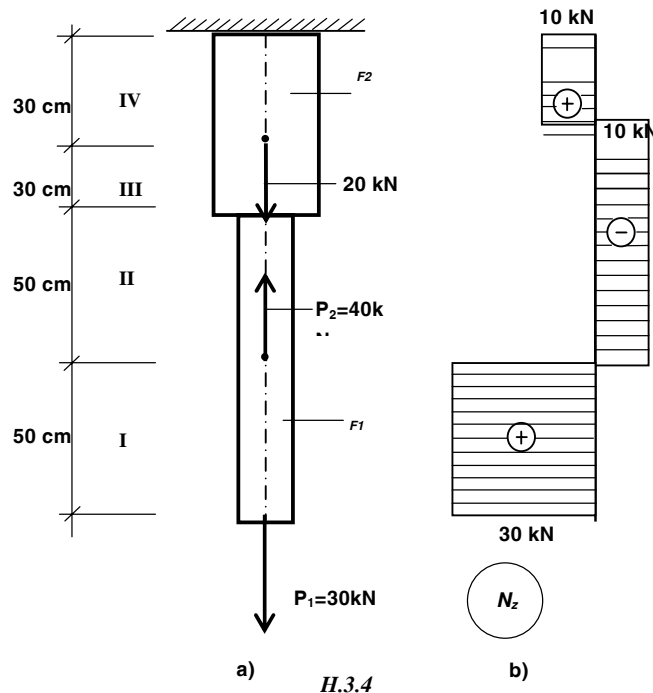
Theo phương ngang thanh cũng có biến dạng, ta đã chọn z là trục thanh, x, y là các phương vuông góc với z (H.3.3d). Nếu ta gọi ε_x và ε_y là biến dạng dài tương đối theo hai phương x và y , thì ta có quan hệ sau:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z \quad (3.4)$$

trong đó: ν - hệ số Poisson, là hằng số vật liệu

Dấu (-) trong biểu thức chỉ rằng biến dạng theo phương dọc và ngang ngược nhau.

Thí dụ 3.1. Vẽ biểu đồ dọc N_z tính ứng suất và biến dạng dài toàn phần của thanh trên H.3.4a cho biết $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $F_1 = 10 \text{ cm}^2$; $F_2 = 20 \text{ cm}^2$.



Giải. Dùng phương pháp mặt cắt ta dễ dàng vẽ được biểu đồ N_z (H.3.4b)

Từ đó ta tìm được ứng suất trên mặt cắt ngang mỗi đoạn là:

$$\sigma_I = \frac{N_z^I}{F_1} = \frac{30}{10} = 3 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_{II} = \frac{N_z^{II}}{F_1} = \frac{-10}{10} = -1 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_z^{III}}{F_2} = \frac{-10}{20} = -0,5 \text{ kN/cm}^2, \quad \sigma_{IV} = \frac{N_z^{IV}}{F_2} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ kN/cm}^2$$

Để xác định biến dạng dọc toàn phần chính là biến dạng dài tuyệt đối của thanh ta sử dụng công thức (3.3') áp dụng cho bốn đoạn của thanh.

$$\Delta L = \frac{30 \times 50}{2 \times 10^4 \times 10} + \frac{-10 \times 50}{2 \times 10^4 \times 10} + \frac{-10 \times 30}{2 \times 10^4 \times 20} + \frac{10 \times 30}{2 \times 10^4 \times 20} = 0,005 \text{ cm}$$

Biến dạng dọc mang dấu + nghĩa là thanh bị dài ra.

Ta có thể tính biến dạng bằng phương pháp cộng tác dụng.

$$\Delta L = \frac{30 \times 100}{2 \times 10^4 \times 10} + \frac{+ 30 \times 60}{2 \times 10^4 \times 20} + \frac{- 40 \times 50}{2 \times 10^4 \times 10} + \frac{- 40 \times 60}{2 \times 10^4 \times 20} + \frac{20 \times 30}{2 \times 10^4 \times 20} = 0,005 \text{ cm}$$

3.4. ĐẶC TRƯNG CƠ HỌC CỦA VẬT LIỆU

1. Khái niệm

Vấn đề của chúng ta là cần phải so sánh độ bền, độ cứng của vật liệu khi chịu lực với ứng suất biến dạng của vật liệu cùng loại đã biết. Ta cần thí nghiệm kéo, nén để tìm hiểu tính chất chịu lực và quá trình biến dạng từ lúc bắt đầu chịu lực đến lúc phá hỏng của các loại vật liệu khác nhau.

Người ta phân vật liệu thành hai loại cơ bản: Vật liệu dẻo, vật liệu giòn.

Như vậy có bốn thí nghiệm cơ bản sau:

2. Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo (thép)

1- Mẫu thí nghiệm

Theo tiêu chuẩn TCVN 197 - 85

(H.3.5)

Chiều dài L_0 thí nghiệm là đoạn thanh đường kính d_0 , diện tích F_0

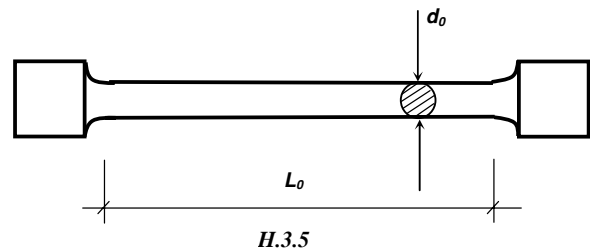
2- Thí nghiệm

Tăng lực kéo từ 0 đến khi mẫu đứt, với bộ phận vẽ biểu đồ của máy kéo, ta nhận được đồ thị quan hệ giữa lực kéo P và biến dạng dài ΔL của mẫu như H.3.6. Ngoài ra sau khi mẫu bị đứt ta chấp mẫu lại, mẫu sẽ có hình dáng như H.3.7.

3- Phân tích kết quả

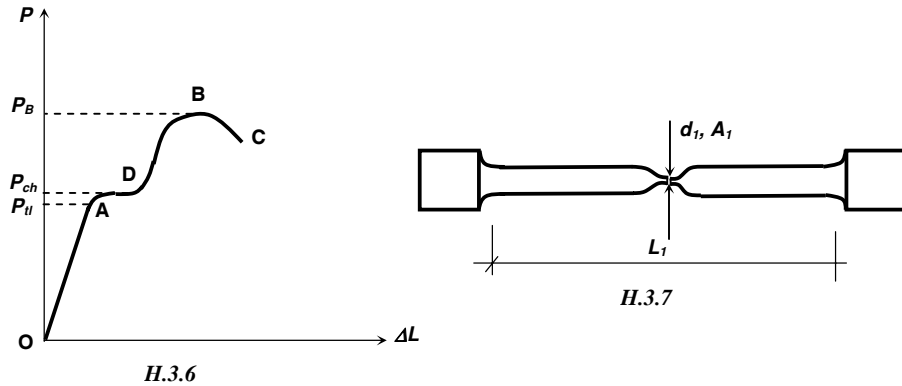
Quá trình chịu lực của vật liệu có thể chia làm ba giai đoạn.

OA: đàn hồi, P và ΔL bậc nhất, Lực lớn nhất là lực tỉ lệ P_{tl} . $\sigma_{tl} = \frac{P_{tl}}{F_0}$ (3.5)



AD: giai đoạn chảy, lực kéo không tăng nhưng biến dạng tăng liên tục. Lực kéo tương ứng là lực chảy P_{ch} và ta có giới hạn chảy. $\sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{F_o}$ (3.6)

DBC: giai đoạn củng cố (tái bền), tương quan giữa lực P và biến dạng ΔL là đường cong. Lực lớn nhất là lực bền P_B và ta có giới hạn bền. $\sigma_b = \frac{P_b}{F_o}$ (3.7)



Nếu chiều dài mẫu sau khi đứt (H.3.7) là L_1 và diện tích mặt cắt ngang nơi đứt là A_1 thì ta có các định nghĩa đặc trưng cho tính dẻo của vật liệu như sau:

Biến dạng dài tương đối (tính bằng phần trăm): $\delta = \frac{L_0 - L_1}{L_0} 100\%$ (3.8)

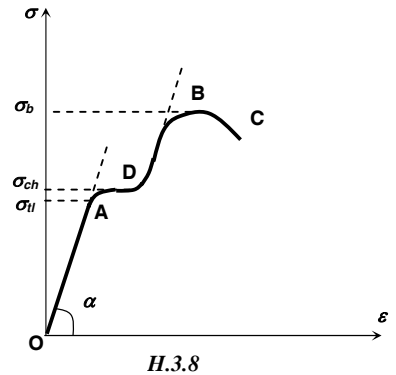
Độ thắt tỷ đối (tính bằng phần trăm): $\psi = \frac{F_o - F_1}{F_o} 100\%$ (3.9)

4- Biểu đồ $\sigma - \epsilon$ (biểu đồ qui ước)

Từ biểu đồ $P - \Delta L$ ta dễ dàng suy ra biểu đồ tương quan giữa ứng suất $\sigma_z = P/F_o$ và biến dạng dài tương đối $\epsilon_z = \Delta L/L_o$.

Biểu đồ này có hình dạng giống như biểu đồ $P - \Delta L$ (H.3.8). Trên biểu đồ chỉ rõ $\sigma_{ll}, \sigma_{ch}, \sigma_b$ và cả mô đun đàn hồi:

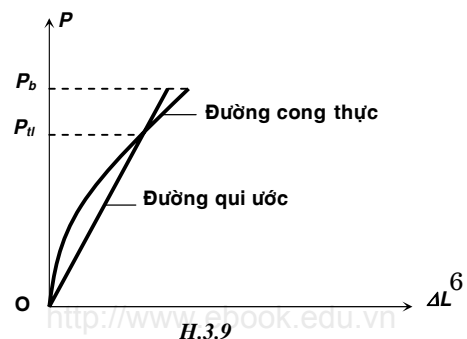
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \tan \alpha$$



Nếu kể đến sự biến đổi diện tích mặt cắt ngang ta sẽ có biểu đồ tương quan giữa ϵ_z và ứng suất thực (đường nét đứt).

3. Thí nghiệm kéo vật liệu dòn

Biểu đồ kéo vật liệu dòn có dạng đường cong (H.3.9). Vật liệu không có giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy mà chỉ có giới hạn bền.

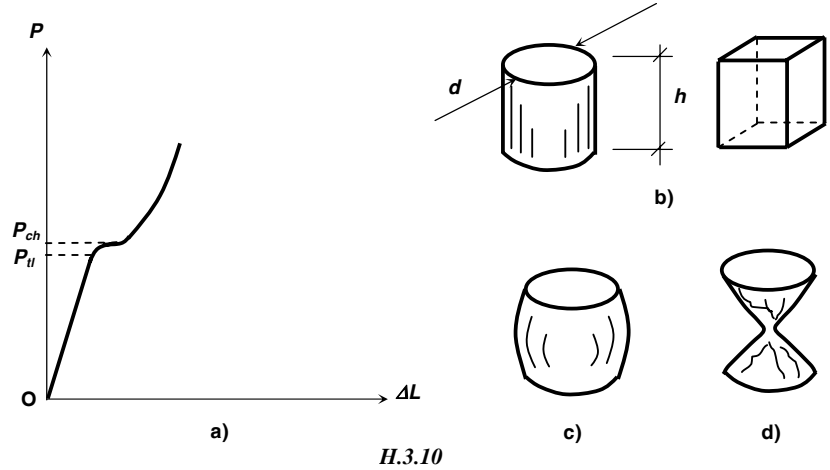


$$\sigma_b = \frac{P_b}{F_o} \quad (3-10)$$

Tuy vậy người ta cũng qui ước một giới hạn đàn hồi nào đó và xem đồ thị quan hệ lực kéo và biến dạng là đường thẳng (đường qui ước).

4. Nén vật liệu dẻo

Biểu đồ nén vật liệu dẻo như H.3.10a. Ta chỉ xác định được giới hạn tỷ lệ và giới hạn chảy, mà không xác định được giới hạn bền do sự phình ngang của mẫu làm cho diện tích mặt cắt ngang mẫu liên tục tăng lên. Sau thí nghiệm mẫu có dạng hình trống (H.3.10c).



5. Nén vật liệu giòn. Đường cong tương tự biểu đồ kéo vật liệu giòn. P_b .

Nghiên cứu các thí nghiệm kéo và nén các vật liệu dẻo và giòn, người ta thấy rằng: giới hạn chảy của vật liệu dẻo khi kéo và nén như nhau, còn đối với vật liệu giòn giới hạn bền khi kéo bé hơn nhiều so với giới hạn bền khi nén.

3.6. THỂ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI (TNBDDH)

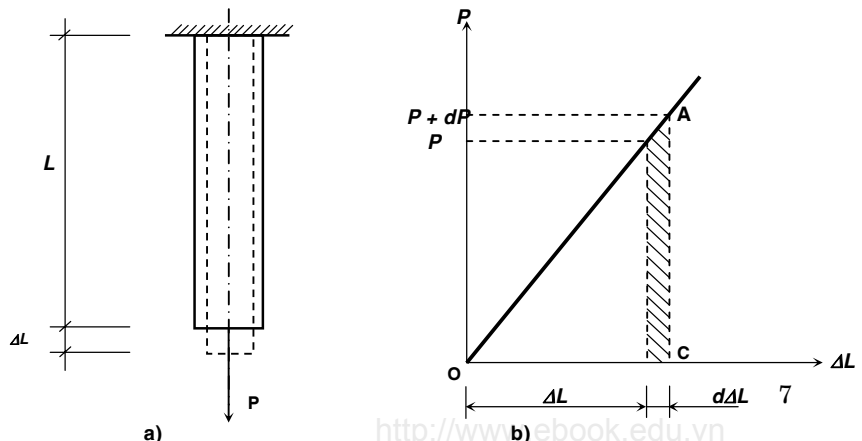
1- Khái niệm

Xét thanh chịu kéo làm việc trong giai đoạn đàn hồi (H.3.13a). Lực tăng dần từ 0 đến giá trị P , thanh dãn ra từ từ đến giá trị ΔL . Bỏ lực, thanh về vị trí ban đầu.

Người ta nói công của W của ngoại lực phát sinh trong quá trình di chuyển đã chuyển hóa thành thể năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong thanh và chính thể năng này làm cho thanh đàn hồi sau khi không tác dụng lực.

2- Tính thể năng biến dạng đàn hồi

P và ΔL biểu diễn như H.3.13b. Công của lực P trên chuyển dời ΔL .



H.3.13

$$dW = (P + dP)d\Delta L = Pd\Delta L + dPd\Delta L = Pd\Delta L$$

Suy ra công của lực kéo P tăng từ 0 đến P được biểu thị bằng diện tích tam giác OAC.

$$W = \frac{P\Delta L}{2}$$

Công này biến thành TNBD ĐH U : $U = W = \frac{P\Delta L}{2} = \frac{P^2 L}{2EF}$ (3.11)

Gọi u là TNBDĐH riêng (thế năng tích lũy trong một đơn vị thể tích), ta có:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\sigma_z^2}{2E} = \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2} \quad (3.12)$$

Xét đoạn thanh có chiều dài dz có nội lực N_z (H.3.14): $dU = \frac{N_z^2 dz}{2EF}$

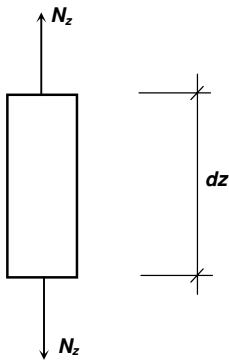
Suy ra thế năng biến dạng đàn hồi của đoạn thanh dài L , có nội lực N_z là:

$$U = \int_L dU = \int_L \frac{N_z^2 dz}{2EF}$$

Khi trong đoạn thanh $\frac{N_z}{EF}$ không đổi ta có: $U = \frac{N_z^2 L}{2EF}$ (3.13)

Với nhiều đoạn dài L_i ta sẽ có: $U = \sum U_i = \sum \frac{N_{zi}^2 L_i}{2E_i F_i}$ (3.13')

Thế năng biến dạng đàn hồi thường dùng để tính chuyển vị của hệ thanh.



H.3.14

Ví dụ 3.2. Xác định chuyển vị đứng của điểm đặt lực. Cho $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$; (H.3.15a). Cho $L = 200 \text{ cm}$; $P = 300 \text{ (KN)}$; $\alpha = 30^\circ$; $F = 10 \text{ cm}^2$

Giải

- Xác định nội lực

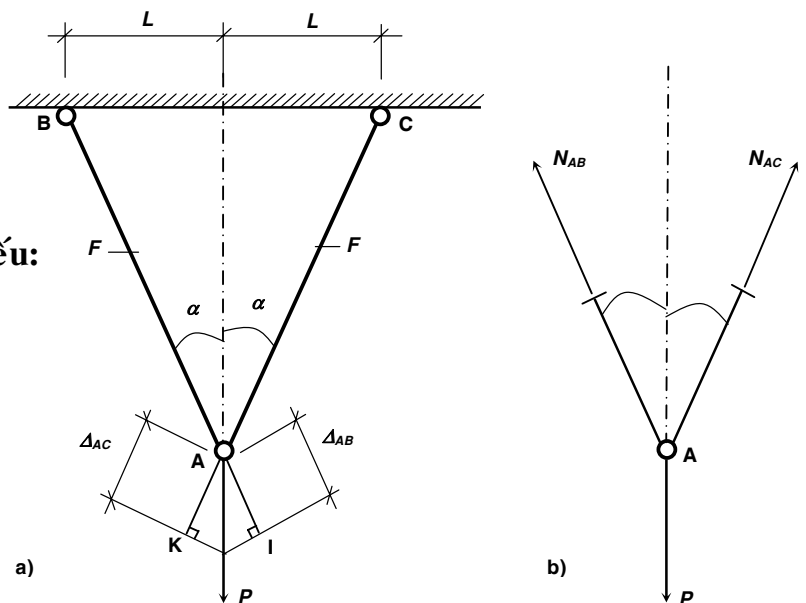
Tách mắt A (H.3.15b).

Dùng hai phương trình hình chiếu:

$$\sum X = 0: N_{AB} = N_{AC} = N$$

$$\sum Y = 0: 2N \cos \alpha = P$$

suy ra: $N = \frac{P}{2 \cos \alpha}$



H. 3.15

- Chuyển vị đứng của điểm A

a) Phương pháp dùng cách tính theo biến dạng hình học.

Gọi Δ_{AB} , Δ_{AC} các biến dạng của đoạn AB, AC (H.3.15a).

Từ I, K kẻ hai đường vuông góc với AB và AC, chúng cắt nhau ở A', AA' chính là độ di chuyển của điểm A.

Trường hợp hệ thanh trên vì $N_{AB} = N_{AC}$ nên $\Delta_{AB} = \Delta_{AC}$ và A' nằm trên đường thẳng đứng kẻ từ A, hay AA' chính là chuyển vị cần tìm.

Xét tam giác AIA' ta có:

$$AA' \cos \alpha = AI \quad \text{hay:} \quad AA' = \frac{AI}{\cos \alpha} = \frac{\Delta_{AB}}{\cos \alpha}$$

$$AA' = \frac{N_{AB} L_{AB}}{(EF)_{AB} \cos \alpha} = \frac{PL}{2EF \cos^2 \alpha}$$

Với $P = 300 \text{ kN}$, $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$, $A = 10 \text{ cm}^2$, $\alpha = 30^\circ$ ta được: $AA' = 0,4 \text{ cm}$

b) Phương pháp dùng thế năng biến dạng đàn hồi

Ta có: $W = U$ (*)

Công ngoại lực:

$$W = \frac{1}{2} P.AA'$$

Thế năng biến dạng đàn hồi của hệ: $U = \frac{N_{AB}^2 L_{AB}}{2(EF)_{AB}} + \frac{N_{AC}^2 L_{AC}}{2(EF)_{AC}} = 2 \frac{N^2 L}{2EF}$

Thế vào (*) ta được: $\frac{1}{2} P.AA' = 2 \frac{N^2 L}{2EF}$

suy ra: $AA' = \frac{2}{P} \frac{N^2 L}{EF} = \frac{PL}{2EF \cos^2 \alpha} = 0,4 \text{ cm}$

3.7. ỨNG SUẤT CHO PHÉP - HỆ SỐ AN TOÀN - BA BÀI TOÁN CƠ BẢN

Ta gọi ứng suất nguy hiểm, ký hiệu σ_o , là trị số ứng suất mà ứng với nó vật liệu được xem là bị phá hoại. Đối với vật liệu dẻo $\sigma_o = \sigma_{ch}$, đối với vật liệu giòn $\sigma_o = \sigma_b$.

Nhưng khi chế tạo, vật liệu thường không đồng chất hoàn toàn, và trong quá trình sử dụng tải trọng tác dụng có thể vượt quá tải trọng thiết kế, điều kiện làm việc của kết cấu hay chi tiết chưa được xem xét đầy đủ, các giả thiết khi tính toán chưa đúng với sự làm việc của kết cấu. Vì thế ta không tính toán theo σ_o . Chúng ta phải chọn một hệ số an toàn n lớn hơn 1 để xác định ứng suất cho phép.

$$[\sigma] = \frac{\sigma_o}{n} \quad (3.15)$$

Và dùng trị số $[\sigma]$ để tính toán.

Hệ số an toàn do nhà nước hay hội đồng kỹ thuật của nhà máy qui định.

Để chọn hệ số an toàn được chính xác, nhiều khi người ta phải chọn nhiều hệ số theo riêng từng nguyên nhân dẫn đến sự không an toàn của công trình hay chi tiết máy, có thể kể đến:

- Hệ số kể đến độ đồng chất của vật liệu
- Hệ số kể đến sự vượt quá tải trọng thiết kế
- Hệ số kể đến sự làm việc tạm thời hay lâu dài

Như vậy muốn đảm bảo sự làm việc an toàn về độ bền khi thanh chịu kéo (nén) đúng tâm, ứng suất trong thanh phải thỏa mãn điều kiện bền là:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \quad (3.16)$$

Từ điều kiện bền, ta có ba bài toán cơ bản:

Kiểm tra bền: $\sigma_z = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \pm 5\%$

Chọn kích thước mặt cắt ngang: $F \geq \frac{N_z}{[\sigma]} \pm 5\%$

Định tải trọng cho phép: $N_z \leq [\sigma]F \pm 5\%$ hay: $[N_z] = [\sigma]F$

Thí dụ 3.4. Cho hệ như H.3.17a. Định tải trọng cho phép $[P]$ theo điều kiện bền của các thanh 1, 2, 3. Cho biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $F_1 = 2 \text{ cm}^2$, $F_2 = 1 \text{ cm}^2$, $F_3 = 2 \text{ cm}^2$.

Giải. Trước tiên ta cần tính nội lực trong các thanh. Cô lập hệ như H.3.17b.

Xét cân bằng với các phương trình:

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_2 \cos 45^\circ + N_3 = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -P + N_1 + N_2 \sin 45^\circ = 0$$

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow -P2a + N_1a = 0$$

Ta được $N_1 = 2P$, $N_2 = -P\sqrt{2}$ (nén), $N_3 = P$

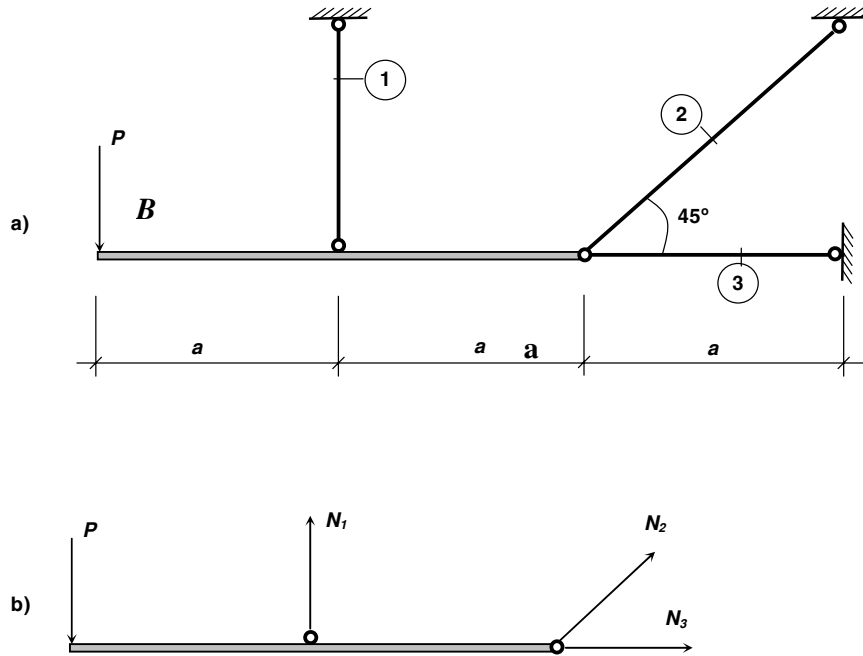
Viết điều kiện bền của các thanh 1, 2, 3:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{2P}{F_1} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq \frac{[\sigma]F_1}{2} = \frac{16 \cdot 2}{2} = 16 \text{ kN}$$

$$|\sigma_2| = \frac{|N_2|}{F_2} = \frac{P\sqrt{2}}{F_2} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq \frac{[\sigma]F_2}{\sqrt{2}} = \frac{16 \cdot 1}{\sqrt{2}} = 11,3 \text{ kN}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{P}{F_3} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq [\sigma] F_3 = 16 \cdot 2 = 32 \text{ kN}$$

So sánh ta được $[P] = 11,3 \text{ kN}$.



H. 3.17

3.8. BÀI TOÁN SIÊU TĨNH

Định nghĩa: *Bài toán siêu tĩnh là bài toán mà chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học sẽ không đủ để giải được tất cả các phản lực hay nội lực trong hệ.*

Cách giải. Cần tìm thêm các phương trình diễn tả điều kiện biến dạng của hệ sao cho cộng số phương trình này với các phương trình cân bằng tĩnh học vừa đủ bằng số ẩn số phản lực, nội lực cần tìm.

Thí dụ 3.5. Xét thanh chịu lực như H.3.18a. Ở hai ngàm có hai phản lực \$V_A\$ và \$V_B\$. Ta có phương trình cân bằng: $V_A + V_B - P = 0$ (a)

Phương trình này có hai ẩn, muốn giải được ta phải tìm thêm phương trình điều kiện biến dạng của thanh.

Tưởng tượng bỏ ngàm B và thay bằng phản lực \$V_B\$ (H.3.18b). Điều kiện biến dạng của hệ là: $\Delta L = \Delta_{BA} = \Delta_{BC} + \Delta_{CA} = 0$ (b)

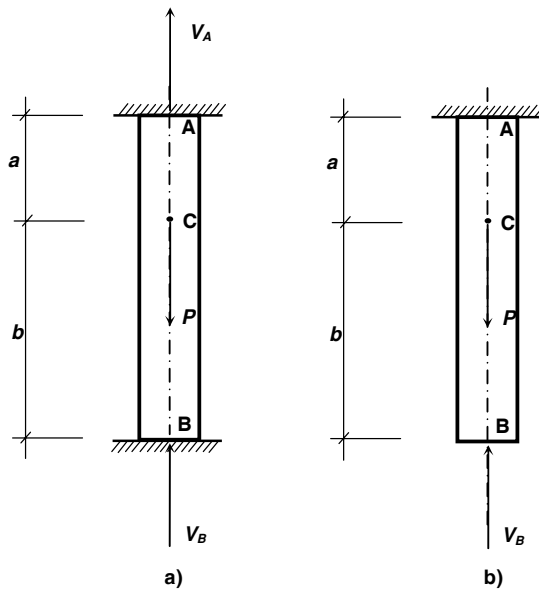
Gọi \$N_{BC}\$ và \$N_{CA}\$ là nội lực trên các mặt cắt của các đoạn BC và CA ta sẽ được:

$$\Delta L = \frac{N_{BC}L_{BC}}{EF} + \frac{N_{CA}L_{CA}}{EF} = 0 \quad (c)$$

với \$N_{BC} = -V_B\$; \$N_{CA} = -V_B + P\$, (c) trở thành: $\frac{-V_B b}{EF} + \frac{(-V_B + P)a}{EF} = 0$

suy ra:
$$V_B = \frac{Pa}{a+b}$$

Ta đã tính được phản lực \$V_B\$, bài toán trở thành bài toán tĩnh định bình thường



H.3.18

Thí dụ 3.6. Xét hệ gồm ba thanh treo lực P (H.3.19a) hãy tính nội lực trong các thanh treo.

Giải. Ta có hai phương trình cân bằng (tách nút A):

$$\sum X = N_{AB} \sin \alpha + N_{AD} \sin \alpha = 0 \quad (a)$$

$$\sum Y = -P + N_{AB} \cos \alpha + N_{AC} + N_{AD} \cos \alpha = 0 \quad (b)$$

Để giải ba ẩn số nội lực ta cần thêm một phương trình điều kiện biến dạng. Xét hệ thanh sau khi chịu lực. Vì đối xứng nên điểm A di chuyển theo phương AC đến A'. Từ A kẻ đường AI và AK lần lượt vuông góc với A'B và A'D. Biến dạng nhỏ nên góc A'BA và A'DA vô cùng bé và góc BA'C và DA'C vẫn α . Suy ra IA' là độ dãn dài của AB và tương tự KA' là độ dãn dài của AD.

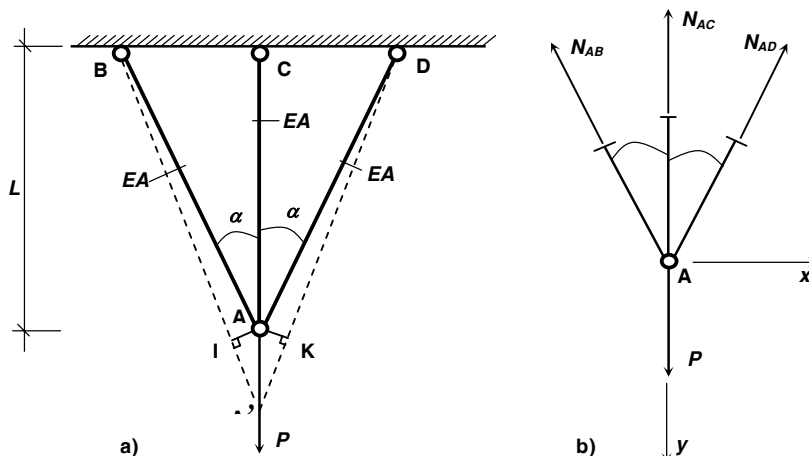
Ngoài ra AA' cũng chính là độ dãn dài của AC

Xét tam giác A'IA và A'KA ta có liên hệ:

$$IA' = KA' = AA' \cos \alpha \quad (c)$$

Thay $IA' = \frac{N_{AB}L}{EF \cos \alpha}$; $KA' = \frac{N_{AD}L}{EF \cos \alpha}$; $AA' = \frac{N_{AC}L}{EF}$ vào (c) rồi vào (a) và (b) ta

$$\text{sẽ được } N_{AB} = N_{AD} = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} ; N_{AC} = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$



H.3.19

Thí dụ 3.7. Cho thanh ABC tuyệt đối cứng liên kết khớp tại A được treo bởi dây CD có tiết diện F và có chiều dài L như hình vẽ.

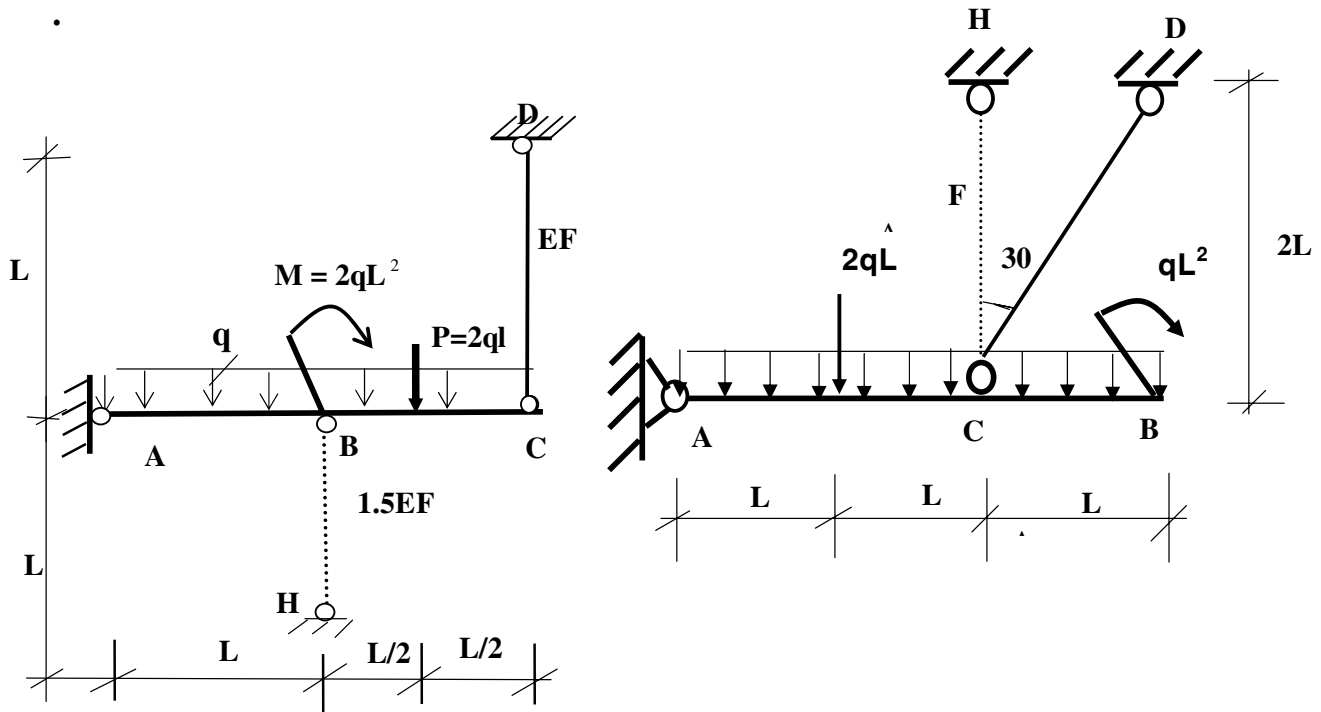
1/ Tính nội lực của CD.

2/ Tính $[q]$ theo điều kiện bền của thanh CD .

Cho biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $L=2\text{m}$ $F= 2 \text{ cm}^2$.

3/ Tính chuyển vị đứng của điểm C . Cho $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$

4/ Bây giờ thêm thanh chống BH hay thanh treo CH (nét chấm) . Tính lại nội lực của các thanh chống CD vàBH



Cho $q = 10 \text{ kN/m}$, $L = 1 \text{ m}$, $F = 1.5 \text{ cm}^2$, $E = 20000 \text{ kN/cm}^2$, $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$

-Kiểm tra bền thanh CD.

-Tính chuyển vị đứng của điểm C

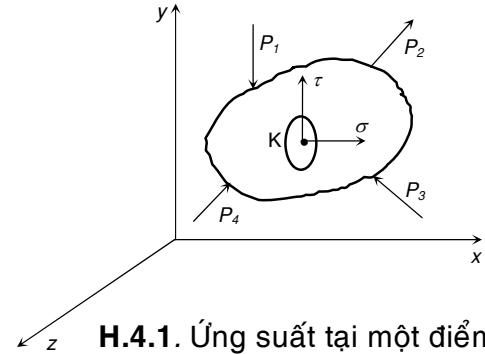
Chương 4

TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

4.1 NHỮNG KHÁI NIỆM VỀ TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT.

4.1.1 TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT (TTUS) TẠI MỘT ĐIỂM.

Xét một điểm K trong một vật thể cân bằng và các mặt cắt qua K, trên các mặt cắt ấy có các ứng suất pháp σ và ứng suất tiếp τ . Các ứng suất này thay đổi tùy vị trí mặt cắt (H.4.1).



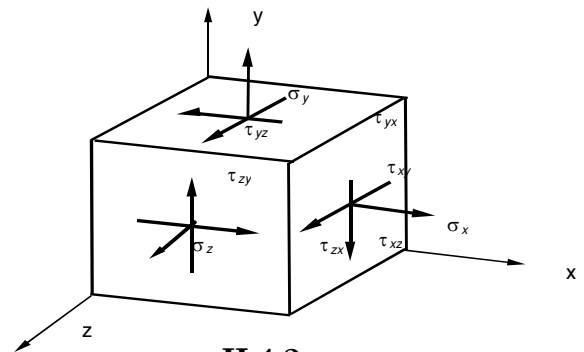
H.4.1. Ứng suất tại một điểm

Định nghĩa TTÚS: TTÚS tại một điểm là tập hợp tất cả những ứng suất trên các mặt đi qua điểm ấy.

TTÚS tại một điểm đặc trưng cho mức độ chịu lực của vật thể tại điểm đó. Nghiên cứu TTÚS là tìm đặc điểm và liên hệ giữa các ứng suất σ , τ , xác định ứng suất lớn nhất, nhỏ nhất để tính toán độ bền hay giải thích, đoán biết dạng phá hỏng của vật thể chịu lực.

4.1.2 Biểu diễn TTÚS tại một điểm

Tưởng tượng tách một phân tử hình hộp vô cùng bé bao quanh điểm K. Các mặt phân tử song song với các trục tọa độ (H 4.2).



H.4.2

Các thành phần ứng suất

Trên các mặt của phân tử sẽ có chín thành phần ứng suất:

- +Ba ứng suất pháp: σ_x , σ_y , σ_z
- +Sáu ứng suất tiếp. τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} ,

τ_{yz} , τ_{zy} ,

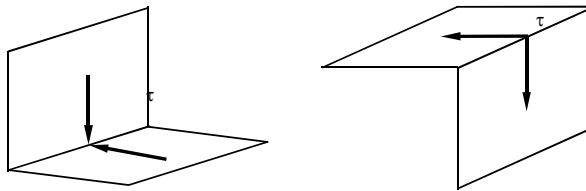
Ứng suất pháp σ có 1 chỉ số chỉ phương pháp tuyến mặt có σ .
 Ứng suất tiếp τ có hai chỉ số: Chỉ số thứ nhất chỉ phương pháp tuyến của mặt cắt có τ , chỉ số thứ hai chỉ phương của τ .

4.1.3 Định luật đối ứng của ứng suất tiếp

Trên hai mặt vuông góc, nếu mặt này có ứng suất tiếp hướng vào cạnh (hướng ra khỏi cạnh) thì mặt kia cũng có ứng suất tiếp hướng vào cạnh (hướng ra khỏi cạnh), trị số hai ứng suất bằng nhau (H.4.3)

$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|; |\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|; |\tau_{yz}| = |\tau_{zy}| \quad (4.1)$$

TTÚS tại một điểm còn 6 thành phần ứng suất



4.1.4 Mặt chính, phương chính và ứng suất chính. Phân loại TTÚS

Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh rằng tại một điểm bất kỳ của vật thể chịu lực luôn tìm được một phân tố hình hộp vuông góc mà trên các mặt của phân tố đó chỉ có ứng suất pháp, mà không có ứng suất tiếp (H4.4a).

Những mặt đó gọi là **mặt chính**.

Pháp tuyến của mặt chính gọi là **phương chính**.

Ứng suất pháp trên mặt chính gọi là **ứng suất chính** và ký hiệu là:

σ_1, σ_2 và σ_3 . Quy ước: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Thí dụ :

$$\sigma_1 = 200 \text{ N/cm}^2;$$

$$\sigma_2 = -400 \text{ N/cm}^2;$$

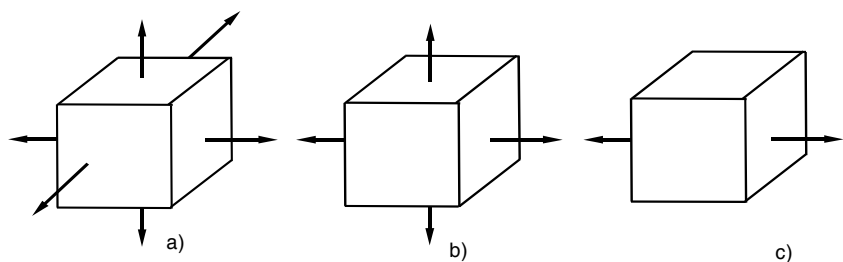
$$\sigma_3 = -500 \text{ N/cm}^2$$

Phân loại TTÚS :

- **TTÚS khối** : Ba ứng suất chính khác không (H.4.4a).

- **TTÚS phẳng**: Hai ứng suất chính khác không (H.4.4b).

- **TTÚS đơn**: Một ứng suất chính khác không (H.4.4c).



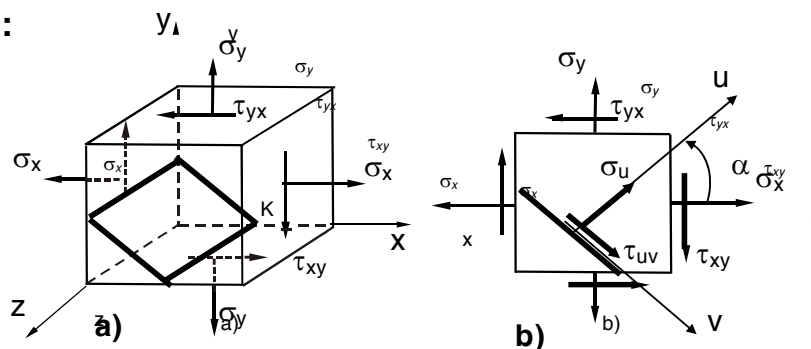
H. 4.4 Các loại trạng thái ứng suất

TTÚS khối và TTÚS phẳng gọi là **TTÚS phức tạp**.

4.2 TTÚS TRONG BÀI TOÁN PHẪNG- PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH.

4.2.1 Cách biểu diễn – Quy ước dấu

Cách biểu diễn:



H. 4.5 TTÚS trong bài toán phẳng

Xét một phân tố (H.4.5a). Ứng suất trên **mặt vuông góc với trục z bằng không** và mặt này là một mặt chính vì có ứng suất tiếp bằng không.

Để dễ hình dung, ta biểu diễn phân tố đang xét bằng hình chiếu của toàn phân tố lên mặt phẳng Kxy (H.4.5b).

Quy ước dấu: + $\sigma > 0$ khi gây kéo (hướng ra ngoài mặt cắt)

+ $\tau > 0$ khi làm cho phân tố quay thuận kim đồng hồ

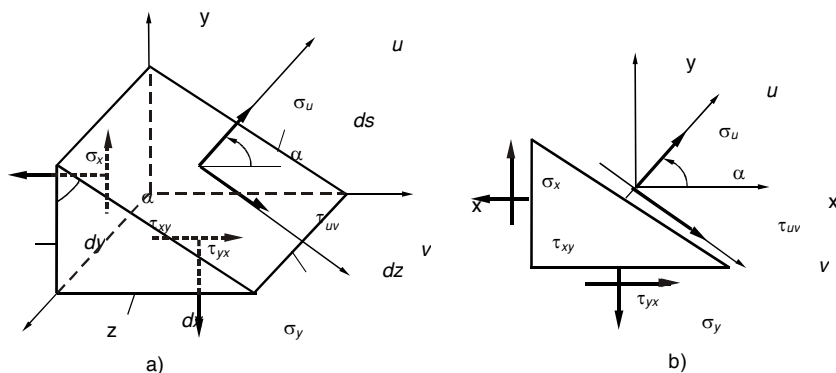
Hình 4.5b biểu diễn các ứng suất > 0

(qui ước này phù hợp với bài toán thanh)

4.2.2 Ứng suất trên mặt cắt nghiêng bất kỳ

Vấn đề: Xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng song song với trục z và có pháp tuyến u tạo với trục x một góc α ($\alpha > 0$ khi quay ngược chiều kim đồng hồ kể từ trục x) (H.4.6a). Giả thiết đã biết ứng suất σ_x , σ_y và τ_{xy} .

♦ **Tính σ_u và τ_{uv}** : Tưởng tượng cắt phân tố bằng mặt cắt nghiêng đã nêu, mặt cắt chia phân tố ra làm hai phần, xét cân bằng của một phần phân tố (H.4.6b)



H.4.6 Ứng suất trên mặt nghiêng

Trên mặt nghiêng có ứng suất σ_u và τ_{uv} , chúng được xác định từ phương trình cân bằng tĩnh học.

$$* \sum U=0 \Rightarrow \sigma_u ds dz - \sigma_x dz dy \cos \alpha + \tau_{xy} dz dy \sin \alpha - \sigma_y dz dx \sin \alpha + \tau_{xy} dz dx \cos \alpha = 0$$

$$* \sum V=0 \Rightarrow \tau_{uv} ds dz - \sigma_x dz dy \sin \alpha - \tau_{xy} dz dy \cos \alpha + \sigma_y dz dx \cos \alpha + \tau_{xy} dz dx \sin \alpha = 0$$

Kể đến: $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$; $dx = ds \sin \alpha$; $dy = ds \cos \alpha$,

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha); \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\Rightarrow \sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.2a)$$

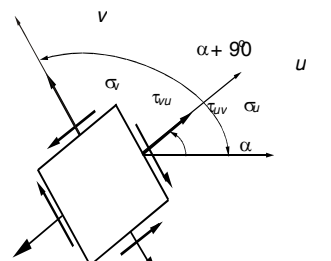
$$\tau_{uv} = + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (4.2b)$$

♦ **Tính σ_v** : Xét mặt nghiêng có pháp tuyến v , vuông góc mặt có pháp tuyến u (H.4.7). Thay thế α bằng $(\alpha + 90^\circ)$ vào (4.2a),

\Rightarrow ứng suất pháp tác dụng trên mặt có pháp tuyến v :

$$\sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.3)$$

Tổng (4.2a) và (4.3), \Rightarrow



H. 4.7 Ứng suất trên 2 mặt vuông góc nhau

$$\sigma_u + \sigma_v = \sigma_x + \sigma_y \quad (4.4)$$

Biểu thức trên cho thấy, tổng ứng suất pháp tác dụng trên hai mặt vuông góc của phân tố ứng suất phẳng tại một điểm là hằng số và không phụ thuộc vào góc α .

Đó là **Bất Biến Thứ Nhất** của ứng suất pháp

Thí dụ 4.1 Thanh có diện tích 5 cm^2 , chịu kéo với lực $P = 40 \text{ kN}$. Xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng một góc 30° với mặt cắt ngang (H.4.8).

Giải

Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang (Chương 3)

$$\sigma_x = \frac{P}{F} = \frac{40}{5} = 8 \text{ kN/cm}^2$$

Tách phân tố hình hộp bao điểm K nằm trên mặt cắt ngang.

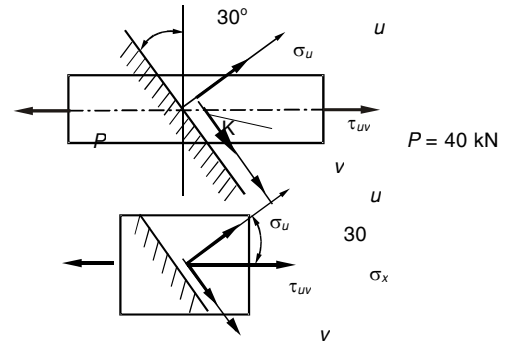
Ta có: $\sigma_x = + 8 \text{ kN/cm}^2, \sigma_y = 0$

Mặt cắt nghiêng có pháp tuyến hợp với trục x (trục thanh) một góc $(+30^\circ)$.

Từ (4.2) \Rightarrow

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\alpha = \frac{8}{2}(1 + \cos 2.30^\circ) = 6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{uv} = + \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha = + \frac{8}{2} \sin 2.30^\circ = + 3,46 \text{ kN/cm}^2$$



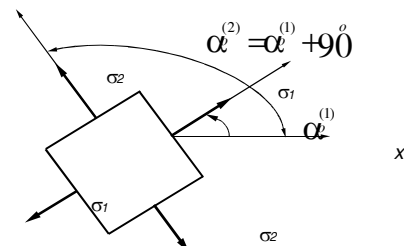
H.4.8

4.2.3 Ứng suất chính - Phương chính - Ứng suất pháp cực trị

1- Ứng suất chính - phương chính

Ngoài mặt chính là mặt đã biết vuông góc với trục z , hai mặt chính còn lại là những mặt song song với trục z (vì phải vuông góc với mặt chính đã có).

Mặt chính là mặt có ứng suất tiếp $= 0 \Rightarrow$ Tìm hai mặt chính còn lại bằng cách cho $\tau_{uv} = 0$



H. 4.9 Ứng suất chính

Nếu gọi α_o là góc của trục x hợp với phương chính thì điều kiện để tìm phương chính là: $\tau_{uv} = 0 \Leftrightarrow + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$

\Rightarrow Phương trình xác định α_o : $\tan 2\alpha_o = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \tan \beta$ (4.5)

$$\alpha_o = \frac{\beta}{2} \pm k \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_{o1} = \frac{\beta}{2} \quad \text{và} \quad \alpha_{o2} = \frac{\beta}{2} \pm \frac{\pi}{2}$$

(4.5) cho thấy có hai giá trị α_o sai biệt nhau 90° . Vì vậy, có **hai mặt chính vuông góc với nhau** và song song với trục z. Trên mỗi mặt chính có một ứng suất chính tác dụng.

Hai ứng suất chính này cũng là ứng suất pháp cực trị (ký hiệu là σ_{\max} hay σ_{\min}) bởi vì

$$\frac{d\sigma_u}{dz} = 0 \Leftrightarrow \tan 2\alpha = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \text{giống với (4.5)}$$

Giá trị ứng suất chính hay ứng suất pháp cực trị có thể tính được bằng cách thế ngược trị số của α trong (4.5) vào (4.2a).

Để ý rằng: $\sin 2\alpha_o = \pm \frac{\tan 2\alpha_o}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_o}}$; $\cos 2\alpha_o = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\alpha_o}}$

$$\Rightarrow \sigma_{\max} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
 (4.6)

Ta lại thấy $\sigma_{\max} + \sigma_{\min} = \sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y$

Thí dụ 4.2 Tìm ứng suất chính và phương chính của TTUS (H.4.10a). Đơn vị của ứng suất là kN/cm^2 .

Giải

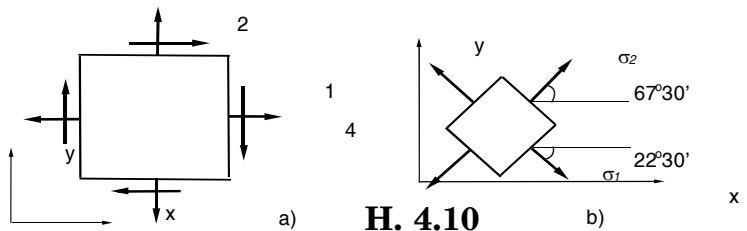
Theo quy ước dấu, ta có:

$$\sigma_x = 4 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_y = 2 \text{ kN/cm}^2 \quad \tau_{xy} = +1 \text{ kN/cm}^2$$

Phương chính xác định từ (4.5):

$$\tan 2\alpha_o = - \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2}{4-2} = -1 \Rightarrow 2\alpha_o = -45^\circ + k180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha_o^{(1)} = -22^\circ 30'; \quad \alpha_o^{(2)} = 67^\circ 30' \quad (i)$$



Có 2 phương chính (2 mặt chính) vuông góc nhau
 Các ứng suất chính được xác định từ (4.6):

$$\sigma_{\min}^{\max} = \frac{4+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4-2}{2}\right)^2 + 1} = 3 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} 4,41 \text{ kN/cm}^2 \\ 1,58 \text{ kN/cm}^2 \end{cases} \quad (\text{ii})$$

Để xác định mặt chính nào từ (i) có ứng suất chính (ii) tác dụng, ta dùng (4.2b), chẳng hạn với $\alpha_o^{(1)} = -22^\circ 30'$, ta có:

$$\sigma_u = \frac{4+2}{2} + \frac{4-2}{2} \cos 2(-22^\circ 30') - 1 \sin 2(-22^\circ 30') = 4,41 \text{ kN/cm}^2$$

Vậy : $\sigma_1 = 4,41 \text{ kN/cm}^2$ ứng với góc nghiêng $\alpha_o^{(1)} = -22^\circ 30'$,
 $\sigma_2 = 1,58 \text{ kN/cm}^2$ tác dụng trên mặt có $\alpha_o^{(2)} = -67^\circ 30'$.

Các mặt và ứng suất chính biểu diễn trên phân tố ở H.4.10b.

2- Ứng suất tiếp cực trị

Tìm ứng suất tiếp cực trị và mặt nghiêng trên đó có ứng suất tiếp cực trị bằng cách cho $\frac{d\tau_{uv}}{d\alpha} = 0$

$$\frac{d\tau_{uv}}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - 2\tau_{xy} \sin 2\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \quad (4.7)$$

$$\text{So sánh (4.7) với (4.5)} \Rightarrow \tan 2\alpha = -\frac{1}{\tan 2\alpha_o}$$

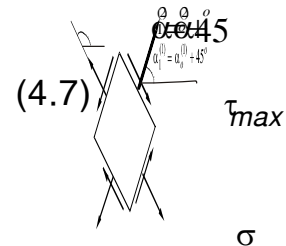
(4.8)

$$\Rightarrow 2\alpha = 2\alpha_o \pm k90^\circ \text{ hay } \alpha = \alpha_o \pm k45^\circ \Rightarrow$$

Mặt có ứng suất tiếp cực trị hợp với những mặt chính một góc 45°.

Thế (4.8) vào (4.2b), ta được :

$$\tau_{\min}^{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.9)$$



H. Ứng suất tiếp cực trị

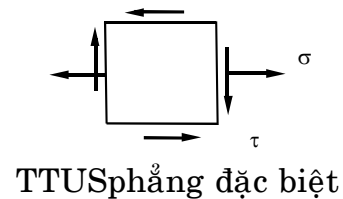
4.2.4 Các trường hợp đặc biệt

1- TTUS phẳng đặc biệt

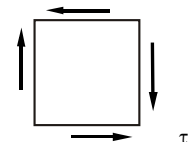
Phân tố trên H.4.12 có: $\sigma_x = \sigma$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \tau$

Từ (4.6)

\Rightarrow



H.4.12



$$\sigma_{\max}^{\min} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (4.10)$$

Phân tử có 2 ứng suất chính (sẽ gặp ở trường hợp thanh chịu uốn).

2- TTỨ trượt thuần túy (H.4.13)

Ở đây, $\sigma_x = \sigma_y = 0; \tau_{xy} = \tau$; Thay vào (4.6)

$$\Rightarrow \sigma_{\max}^{\min} = \sigma_{1,3} = \pm \tau \quad \text{hay} \quad \sigma_1 = -\sigma_3 = \tau \quad (4.11)$$

Hai phương chính được xác định theo (4.5):

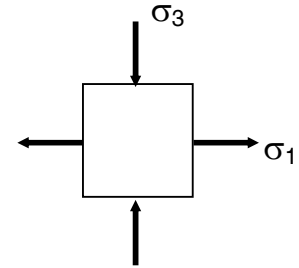
$$\tan 2\alpha_o = \infty \Leftrightarrow \alpha_o = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \quad (4.12)$$

Những phương chính xiên góc 45° với trục x và y .

3- Trường hợp phân tử chính (H.4.14)

Phân tử chính chỉ có $\sigma_1, \sigma_3, \tau = 0$;

$$\text{Thay vào (4.9), ta được: } \tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (4.13)$$



H. 4.14

4.3 TTỨ TRONG BÀI TOÁN PHẪNG- PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ.

1- Vòng tròn Mohr ứng suất.

Công thức xác định ứng suất trên mặt cắt nghiêng (4.2) có thể biểu diễn dưới dạng hình học bằng vòng tròn Mohr. Để vẽ vòng tròn Mohr, ta sắp xếp lại (4.2) như sau:

$$\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.14)$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \quad (4.14)'$$

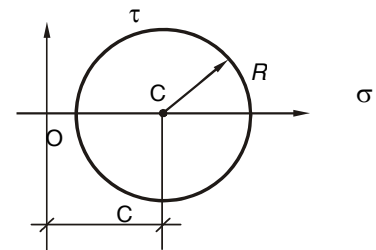
Bình phương cả hai vế của hai đẳng thức trên rồi cộng lại, ta được:

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (4.15)$$

$$\text{Đặt: } c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; R^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (4.16)$$

$$(4.15) \text{ thành: } (\sigma_u - c)^2 + \tau_{uv}^2 = R^2 \quad (4.17)$$

Trong hệ trục tọa độ, với trục hoành σ và trục tung τ , (4.17) là phương trình của một đường tròn có tâm nằm trên trục hoành với hoành độ là c và có bán kính R . Như vậy, các



H. 4.15 Vòng tròn ứng suất

giá trị ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên tất cả các mặt song song với

trục z của phân tố đều biểu thị bằng tọa độ những điểm trên vòng tròn. Ta gọi vòng tròn biểu thị TTUS của phân tố là **vòng tròn ứng suất** hay **vòng tròn Mohr ứng suất** của phân tố.

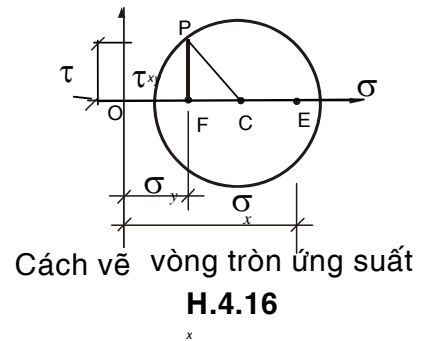
Cách vẽ vòng tròn: (H.4.16)

- Định hệ trục tọa độ $\sigma\tau$: trục hoành σ // trục x , trục tung τ // trục y của phân tố và hướng lên trên.

- Trên trục σ định điểm $E(\sigma_x, 0)$ và điểm $F(\sigma_y, 0)$
 Tâm C là trung điểm của EF

- Định **điểm cực** $P(\sigma_y, \tau_{xy})$.

- Vòng tròn tâm C , qua P là **vòng tròn Mohr** cần vẽ

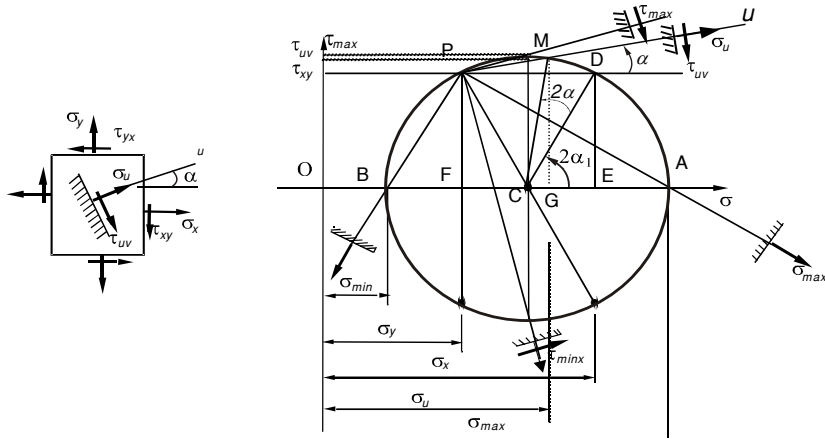


Chứng minh: + C là trung điểm của $EF \Rightarrow \overline{OC} = \frac{\overline{OE} + \overline{OF}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = c$

Trong tam giác vuông CPF : $\overline{FC} = \frac{\overline{OE} - \overline{OF}}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$; $\overline{FP} = \tau_{xy}$

$$\text{Do đó } \Rightarrow \overline{CP} = \overline{FC}^2 + \overline{FP}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

2- Ứng suất trên mặt cắt nghiêng



H. 4.17 Định ứng suất trên mặt nghiêng

Dùng vòng tròn Mohr để tìm ứng suất trên mặt cắt nghiêng của phần tử có pháp tuyến u hợp với trục x một góc α .

Cách tìm σ_u ; τ_{uv}

Vẽ vòng tròn Mohr như H.4.17.

Từ cực P vẽ tia Pu // với phương u cắt vòng tròn tại điểm M.

Hoành độ của M = σ_u ; Tung độ của M = τ_{uv}

Chứng minh:

Ký hiệu $2\alpha_1$ là góc (CA,CD), 2α là góc (CD,CM).

Hình 4.17 cho:

$$\begin{aligned} \overline{OG} &= \overline{OC} + \overline{CG} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos(2\alpha_1 + 2\alpha) \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \cos 2\alpha_1 \cos 2\alpha - R \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

nhưng: $R \cos 2\alpha_1 = \overline{CE} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$; $R \sin 2\alpha_1 = \overline{ED} = \tau_{xy}$

nên: $\overline{OG} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma_u$

Tương tự, ta có:

$$\begin{aligned} \overline{GM} &= R \sin(2\alpha_1 + 2\alpha) = R \cos 2\alpha_1 \sin 2\alpha + R \sin 2\alpha_1 \cos 2\alpha \\ &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \tau_{uv} \end{aligned}$$

Ta nhận lại được phương trình (4.2)

3- Định ứng suất chính- phương chính- Ứng suất pháp cực trị

Trên vòng tròn ứng suất (H.4.17)

Điểm A có hoành độ lớn nhất, tung độ = 0 $\Rightarrow \sigma_{\max} = OA$; $\tau = 0$

Tia PA biểu diễn một phương chính.

Điểm B có hoành độ nhỏ nhất, tung độ = 0 $\Rightarrow \sigma_{\min} = OB$; $\tau = 0$

Tia PB biểu diễn phương chính thứ hai.

4- Định ứng suất tiếp cực trị

Trên vòng tròn (H.4.17): hai điểm I và J là những điểm có tung độ τ lớn và nhỏ nhất. Do đó, tia PI và PJ xác định pháp tuyến của những mặt trên đó có ứng suất tiếp cực đại và cực tiểu. Những mặt này tạo với những mặt chính một góc 45° .

Ứng suất tiếp cực trị có trị số bằng bán kính đường tròn.

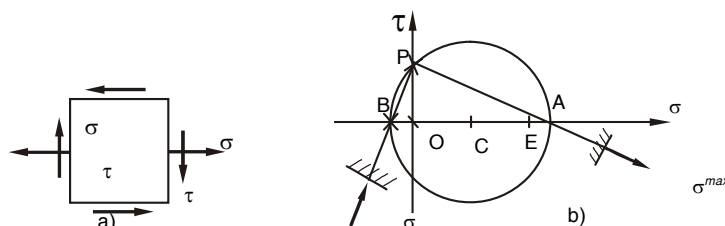
Ứng suất pháp trên mặt có ứng suất tiếp cực trị có giá trị bằng hoành độ điểm C, tức là giá trị trung bình của ứng suất pháp:

$$\sigma_{tb} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

5- Các trường hợp đặc biệt

- TTÚS phẳng đặc biệt

Phân tố có hai ứng suất chính σ_1 và σ_3 (H.4.18).



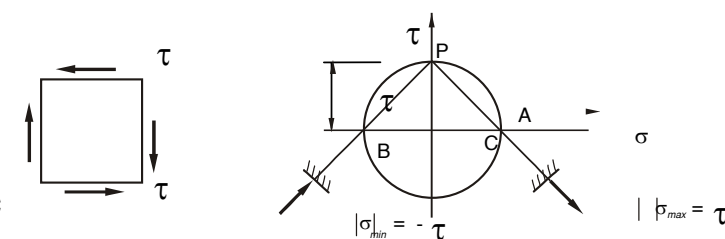
H. 4.18 TTÚS phẳng đặc biệt và vòng Morh

- TTÚS trượt thuần túy

Phân tố có 2 ứng suất chính:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|$$

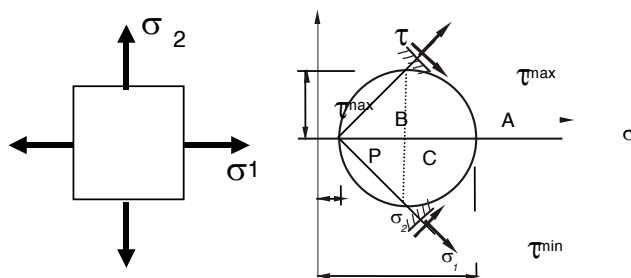
Các phương chính xiên góc 45° với trục x và y (H.4.19)



H. 4.19 TTÚS trượt thuần túy và vòng Morh

- TTÚS chính (H.4.20)

$$\tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

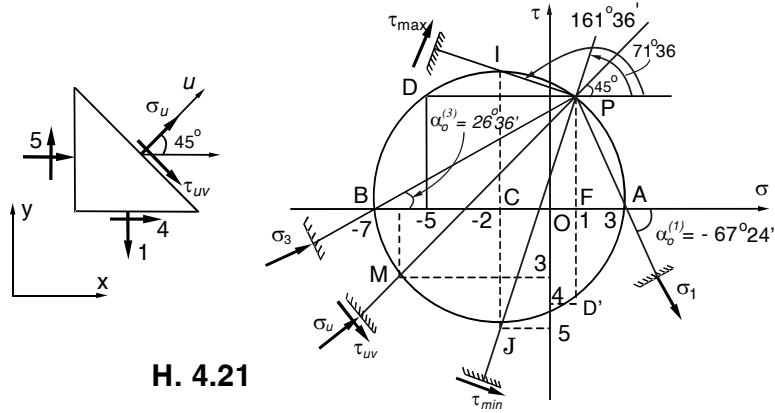


H. 4.20 TTÚS CHÍNH- Vòng Morh

Thí dụ 4.3 Phân tố ở TTÚS phẳng (H.4.21), các ứng suất tính theo

kN/cm^2 . Dùng vòng tròn Mohr, xác định:

- Ứng suất trên mặt cắt nghiêng $\alpha = 45^\circ$
- Ứng suất chính và phương chính
- Ứng suất tiếp cực trị.



H. 4.21

Giải.

Theo quy ước ta có:

$$\sigma_x = -5 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_y = 1 \text{ kN/cm}^2; \quad \tau_{xy} = +4 \text{ kN/cm}^2$$

◆ Tâm vòng tròn ở $C\left(\frac{-5+1}{2}, 0\right)$.

◆ Cực P(1, +4). Từ P vẽ tia song song với trục u cắt vòng tròn Mohr tại M. Tọa độ điểm M biểu thị ứng suất trên mặt cắt nghiêng với $\alpha = 45^\circ$:

$$\sigma_u = -6 \text{ kN/cm}^2; \quad \tau_{uv} = -3 \text{ kN/cm}^2$$

◆ Hoành độ A và B biểu thị ứng suất chính có giá trị bằng:

$$\sigma_1 = \sigma_A = 3 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_3 = \sigma_B = -7 \text{ kN/cm}^2$$

Hai phương chính xác định bởi góc α_o :

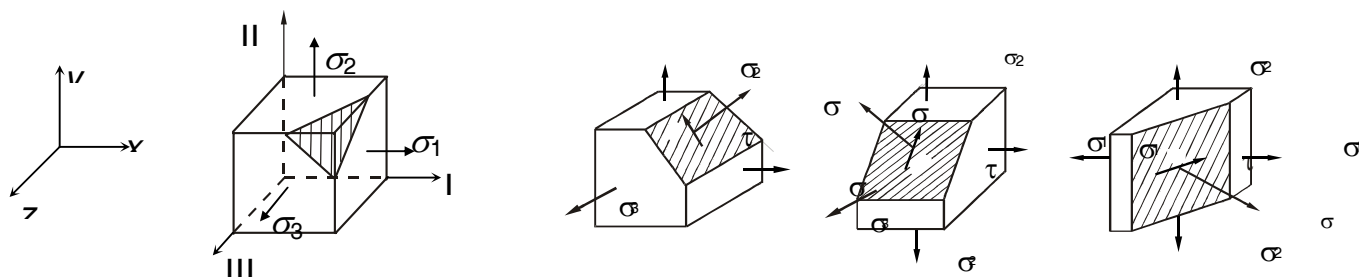
$$\alpha_o^{(1)} = -67^\circ 42'; \quad \alpha_o^{(3)} = 26^\circ 36'$$

◆ Tung độ I và J có giá trị bằng ứng suất tiếp cực trị:

$$\tau_{\max} = 5 \text{ kN/cm}^2; \quad \tau_{\min} = -5 \text{ kN/cm}^2$$

Các ứng suất này tác dụng lên các mặt, tương ứng với các góc nghiêng: $\alpha_1^{(1)} = 71^\circ 36'; \quad \alpha_1^{(2)} = 161^\circ 36'$

4.3 BIỂU DIỄN HÌNH HỌC TTÚS KHỐI



H.4.22. TTÚS khối với mặt cắt nghiêng bất kỳ

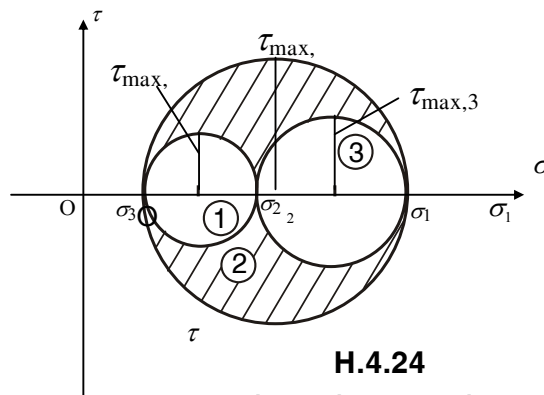
H. 4.23 TTÚS khối và các mặt // trục chính

♦ Tổng quát, TTÚS tại một điểm là TTÚS khối (H.4.22).

♦ Xét những mặt // một phương chính (thí dụ phương III) , ứng suất chính σ_3 không ảnh hưởng đến σ, τ trên các mặt này (H.4.23). \Rightarrow có thể nghiên cứu ứng suất trên những mặt này tương tự TTÚS phẳng.

Vẽ vòng tròn ứng suất biểu diễn các ứng suất trên mặt nghiêng này (vòng tròn số 3 trên H.4.24) .

Từ vòng tròn này, ta thấy trên những mặt song song với phương chính III có mặt có ứng suất tiếp cực đại (ký hiệu $\tau_{\max,3}$) , $\tau_{\max,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$



H.4.24
Ba vòng tròn Mohr ứng suất

♦ Tương tự, đối với những mặt song song với phương chính thứ I và thứ II, ta cũng vẽ được các vòng tròn ứng suất (Vòng tròn số 1 và vòng tròn số 2) (H.4.24).

♦ Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh rằng giá trị của σ và τ trên một mặt bất kỳ của một phân tố trong TTÚS khối có thể biểu thị bằng tọa độ của một điểm nằm trong miền gạch chéo (H.4.24) .

♦ Qua hình vẽ, ứng suất tiếp lớn nhất của phân tố biểu thị bằng bán kính của vòng tròn lớn nhất, (H.4.24).

$$\tau_{\max,2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (18)$$

4.4 LIÊN HỆ ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

4.4.1 Định luật Hooke tổng quát

1- Liên hệ ứng suất pháp và biến dạng dài

♦ **TTUS đơn:** trong chương 3, đã có:

Định luật Hooke liên hệ giữa ứng suất pháp và biến dạng dài : $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ (4.19)

ε - biến dạng dài tương đối theo phương σ .

Theo phương vuông góc với σ cũng có biến dạng dài tương đối ε' ngược dấu với ε : $\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu\frac{\sigma}{E}$ (4.20)

♦ **TTUS khối:** với các ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ theo ba phương chính I, II, III (H.4.25). **Tìm biến dạng dài tương đối ε_1 theo phương I.**

Biến dạng dài theo phương I do σ_1 gây ra: $\varepsilon_1(\sigma_1) = \frac{\sigma_1}{E}$

Biến dạng dài theo phương I do σ_2 gây ra: $\varepsilon_1(\sigma_2) = -\mu\frac{\sigma_2}{E}$

Biến dạng dài theo phương I do σ_3 gây ra: $\varepsilon_1(\sigma_3) = -\mu\frac{\sigma_3}{E}$

Biến dạng dài tương đối theo phương I do cả ba ứng suất $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sinh ra sẽ là tổng của ba biến dạng trên:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\sigma_1) + \varepsilon_1(\sigma_2) + \varepsilon_1(\sigma_3) = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (4.21)$$

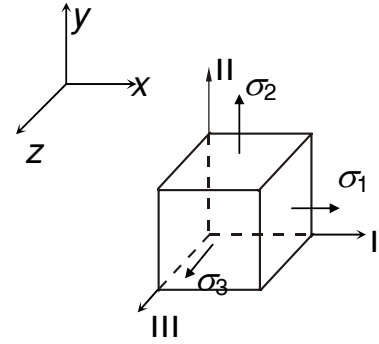
Tương tự, biến dạng dài tương đối theo hai phương chính II, III còn lại:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 - \sigma_1)] \quad (4.22)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (4.23)$$

♦ **TTUS tổng quát:** Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh đối với vật liệu đàn hồi đẳng hướng, σ chỉ sinh ra biến dạng dài mà không sinh ra biến dạng góc, τ chỉ sinh ra biến dạng góc mà không sinh ra biến dạng dài.

⇒ Trong trường hợp phân tố ở TTUS tổng quát, vẫn có



H.4.25. TTUS khối

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (4.24)$$

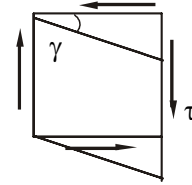
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

2-Liên hệ giữa ứng suất tiếp và biến dạng góc

(Định luật Hooke về trượt)

Phân tử ở TTÚS trượt thuần túy (H.4.26). Biến dạng góc (góc trượt) γ biểu thị độ thay đổi góc vuông.



H. 4.26 TTÚS trượt thuần túy- Biến dạng góc

Định luật Hooke về trượt:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (4.25)$$

trong đó: G - là môđun đàn hồi trượt. Thứ nguyên của G là [lực/(chiều dài)²] và đơn vị thường dùng là N/m^2 hay MN/m^2 .

Liên hệ giữa E , ν và G như sau: $G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$

(4.26)

4.4.2 Định luật Hooke khối

Tính độ biến đổi thể tích của một phân tử hình hộp có các cạnh bằng da_1 , da_2 và da_3 .

Thể tích của phân tử trước biến dạng là:

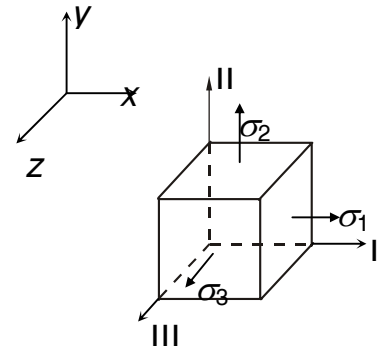
$$V_o = da_1 da_2 da_3$$

Sau biến dạng, phân tử có thể tích là:

$$V_1 = (da_1 + \Delta da_1)(da_2 + \Delta da_2)(da_3 + \Delta da_3)$$

Gọi **biến dạng thể tích tương đối** là θ , ta có:

$$\theta = \frac{V_1 - V_o}{V_o} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (4.27)$$



H.4.27. TTÚS khối

Thế (4.21)(4.22),(4.23) vào (4.27) \Rightarrow

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.28)$$

đặt tổng ứng suất pháp là: $\Sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

$$(4.28) \text{ thành: } \theta = \frac{1-2\mu}{E} \Sigma \quad (4.29)$$

công thức (4.29) được gọi là **định luật Hooke khối** biểu thị quan hệ tuyến tính giữa biến dạng thể tích tương đối và tổng ứng suất pháp.

Nhận xét :

♦ Từ (4.29), nếu vật liệu có hệ số Poisson $\mu = 0,5$ (cao su), thì θ luôn luôn bằng không tức là thể tích không đổi dưới tác dụng của ngoại lực.

♦ Công thức trên cho thấy θ phụ thuộc vào tổng ứng suất pháp chứ không phụ thuộc vào riêng từng ứng suất pháp. Như vậy, nếu cũng với phân tố ấy ta thay các ứng suất chính bằng một ứng suất trung bình σ_{tb} có giá trị bằng trung bình cộng của ba ứng suất chính nói trên:

$$\sigma_{tb} = \frac{\Sigma}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

thì biến dạng thể tích tương đối của phân tố trên vẫn không thay đổi.

Thật vậy, với những ứng suất chính là σ_{tb} , biến dạng thể tích bằng:

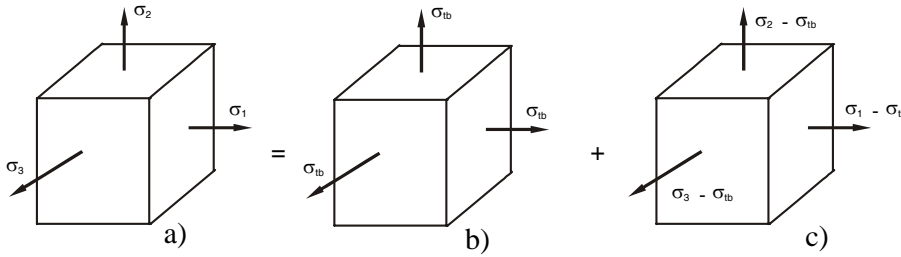
$$\theta_1 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_{tb} + \sigma_{tb} + \sigma_{tb}) = \frac{1-2\mu}{E} \Sigma$$

Kết quả trên có ý nghĩa như sau: với phân tố ban đầu là hình lập phương, trong hai trường hợp trên ta thấy thể tích phân tố đều biến đổi như nhau.

- Tuy nhiên, trong trường hợp đầu khi các ứng suất chính khác nhau, phân tố vừa **biến đổi thể tích** vừa **biến đổi hình dáng** tức là trở thành phân tố hình hộp chữ nhật sau khi biến dạng.

- Còn trong trường hợp thứ hai, khi thay các ứng suất chính bằng ứng suất trung bình, phân tố chỉ biến đổi về thể tích mà không biến đổi hình dáng, nghĩa là sau khi biến dạng phân tố vẫn giữ hình lập phương.

- Về mặt lý luận, có thể phân phân tố ở TTUS khối chịu các ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ thành 2 phân tố (H. 4.28). Phân tố b) chỉ biến đổi thể tích, phân tố c) chỉ biến đổi hình dáng.



H.4.28 Phân tích TTUS khối thành 2 TTUS

4.5 THỂ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

♦ Ở chương 3, phân tố ở TTUS đơn (thanh bị kéo hoặc nén):

Thể năng biến dạng đàn hồi riêng $u = \sigma\varepsilon/2$ (4.30)

♦ Trong TTUS khối, sử dụng nguyên lý độc lập tác dụng, ta có thể năng biến dạng đàn hồi riêng bằng:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2} \quad (4.31)$$

thay $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ theo định luật Hooke trong (4.21) - (4.23) vào , \Rightarrow

$$u = \frac{1}{2E} \{ \sigma_1 [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \sigma_2 [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] + \sigma_3 [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)] \}$$

hay $u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$ (4.32)

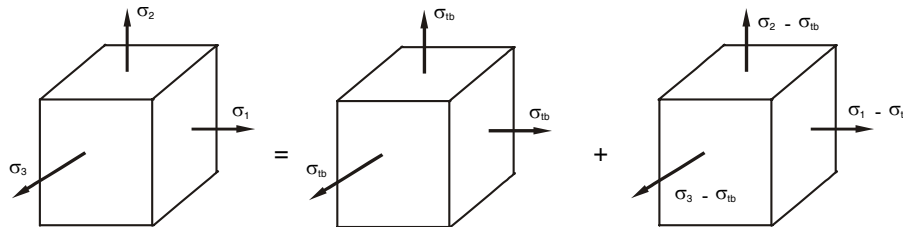
Ta có thể phân tích thể năng biến dạng đàn hồi u thành hai thành phần:

-Thành phần làm đổi thể tích gọi là **thể năng biến đổi thể tích u_{tt}**

-Thành phần làm đổi hình dáng gọi là **thể năng biến đổi hình dáng u_{hd}**

Ta có: $U = U_{tt} + U_{hd}$

Để tính thể năng biến đổi hình dáng, ta thay các ứng suất σ_1, σ_2 và σ_3 bằng ứng suất $(\sigma_1 - \sigma_{tb}), (\sigma_2 - \sigma_{tb}), (\sigma_3 - \sigma_{tb})$, tác dụng lên các mặt phân tố.



H.4.29 Phân tích TTUS thành hai TTUS

Thế vào (4.32) ta có thể năng biến đổi hình dáng bằng:

$$u_{hd} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] - \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

hay :
$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3) \quad (4.33)$$

♦ **TTUS đơn**, thay $\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = 0$ vào (4.32) và (4.33), ta được thế năng riêng và thế năng biến đổi hình dáng như sau:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}; \quad u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma^2 \quad (4.34)$$

Thí dụ 4.4: Cho phân tử như hình vẽ:

ở trạng thái ứng suất phẳng.

Tính $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_u$ (phương utạo vức trục x một góc 30°).

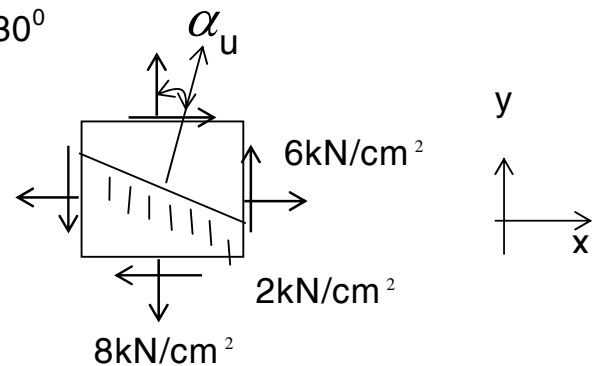
Cho $E = 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $\mu = 0,34$, $\alpha = 30^\circ$

Ta có $\sigma_x = 6 \text{ kN/cm}^2$

$\sigma_y = 8 \text{ kN/cm}^2$

$\tau = -2 \text{ kN/cm}^2$

$\alpha = 60^\circ$



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu\sigma_y] = \frac{1}{10^4} [6 - (0,34)8] = 3,28 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu\sigma_x] = \frac{1}{10^4} [8 - (0,34)6] = 5,96 \times 10^{-4}$$

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = 9,232 \text{ kN/cm}^2$$

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E} [\sigma_u - \mu\sigma_v] = \frac{1}{E} [\sigma_u - \mu(\sigma_x + \sigma_y - \sigma_u)] = 7,611 \text{ kN/cm}^2$$

Thí dụ 4.5:

Một khối lập phương bằng bê tông đặt vừa khít vào rãnh của vật thể A (tuyệt đối cứng) chịu áp suất phân bố đều ở mặt trên $P = 1 \text{ kN/cm}^2$ (H.4.11).

Xác định áp lực nén vào vách rãnh, liên hệ giữa ứng suất và biến dạng dài tương đối theo các phương. Độ biến dạng thể tích tuyệt đối. Cho cạnh $a = 5 \text{ cm}$; $E = 8 \cdot 10^2 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,36$.

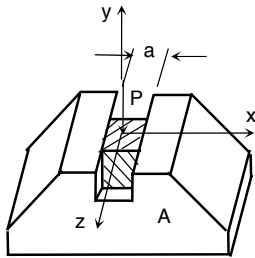
Chọn hệ trục như hình vẽ. Ta có: khối bê tông ở TTÚS phẳng .

$$\sigma_x \neq 0; \quad \sigma_y = -p \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_z \neq 0; \quad \varepsilon_y \neq 0; \quad \varepsilon_x = 0$$

Định luật Hooke cho biến dạng dài:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0$$



H.4.11

$$\Rightarrow \sigma_x = -\mu p = -(0,36 \times 1) = -0,36 \text{ kN/cm}^2$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{-p}{E} (1 - \mu^2)$$

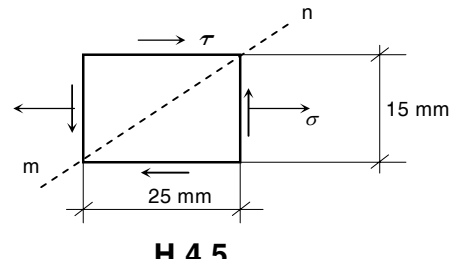
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} [0 - \mu(-\mu p - p)] = \frac{\mu p}{E} (1 + \mu)$$

Biến dạng thể tích tuyệt đối:

$$\begin{aligned} \Delta_v &= \theta V = \frac{1 - 2\mu}{E} [\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z] V \\ &= \frac{1 - (2 \times 0,36)}{800} [-0,36 - 1] (5 \times 5 \times 5) = -0,0559 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Thí dụ 4.6

Một tấm mỏng có kích thước như trên H.4.5 chịu tác dụng của ứng suất kéo $\sigma = 30 \text{ kN/cm}^2$ theo phương chiều dài của tấm và ứng suất tiếp $\tau = 15 \text{ kN/cm}^2$.



- a) Xác định ứng suất pháp theo phương đường chéo mn và phương vuông góc với đường chéo
b) Tính biến dạng dài tuyệt đối của đường chéo mn.

Cho $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$, $\mu = 0,3$

$$\text{Gọi } \sigma_u = \sigma_{mm}, \quad \varepsilon_u = \frac{\Delta l_{mm}}{l_{mm}} \Rightarrow \Delta l_{mm} = l_{mm} \times \varepsilon_u$$

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E} [\sigma_u - \eta \sigma_v]$$

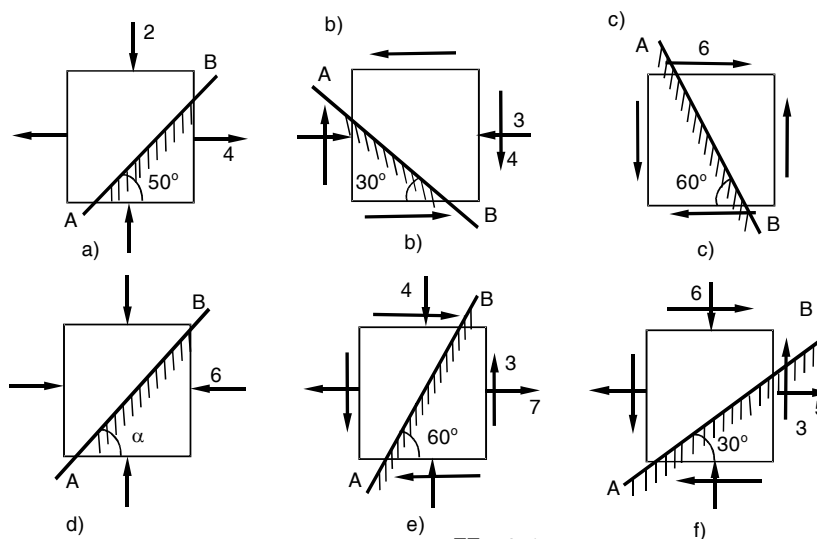
$$\sigma_u = \frac{30+0}{2} + \frac{30-0}{2} \cos 60^\circ - (-15) \sin 60^\circ = 35,5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{mm} = \frac{1}{E} [\sigma_u - \eta (\sigma_u - \sigma_u)] = 1,8575 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta l_u = \Delta l_{mm} = 1,8575 \cdot 10^{-3} \times 50 = 0,093 \text{ mm}$$

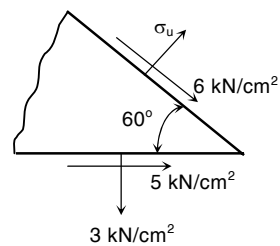
BÀI TẬP CHƯƠNG 4

4.1 Tìm giá trị ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt AB của phân tử như trên H.4.1 bằng phương pháp giải tích và đồ thị. Đơn vị ứng suất tính bằng kN/cm^2 .



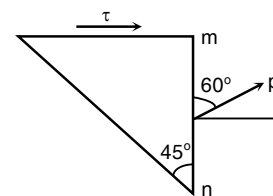
H. 4.1

4.2 Trên hai mặt tạo với nhau một góc $\alpha = 60^\circ$ và đi qua một điểm ở TTUS phẳng có các ứng suất như trên H.4.2. Hãy tính các ứng suất chính tại điểm đó, ứng suất pháp σ_u và biến dạng tương đối ε_u theo phương u . Cho: $E = 2.10 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.



H.4.2

4.3 Trên mặt cắt m - n đi qua một điểm trong vật thể ở TTUS phẳng có ứng suất toàn phần $p = 3000 \text{ N/cm}^2$, ứng suất này có phương tạo thành góc 60° với mặt cắt. Trên mặt vuông góc với mặt cắt đó chỉ có ứng suất tiếp (H.4.3).

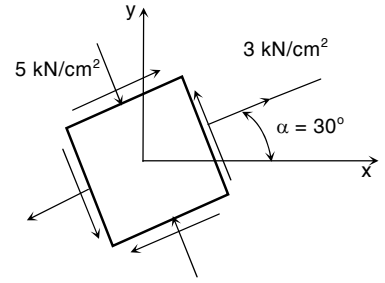


H. 4.3

Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt hợp với mặt cắt m - n một góc 45° . Tính ứng suất pháp lớn nhất tại điểm đó.

4.4 Tại một điểm trên bề mặt của vật thể, ứng suất tác dụng lên phân tử nghiêng một góc 30° với trục x có trị số và hướng như trên H.4.30.

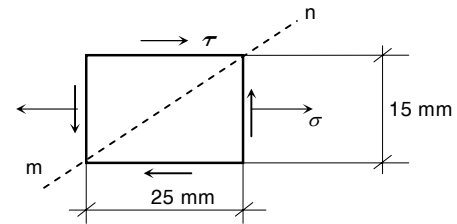
- Xác định ứng suất chính và phương chính.
- Xác định ứng suất tiếp cực trị và ứng suất pháp trên bề mặt có ứng suất tiếp cực trị. Biểu diễn các ứng suất đó trên H.4.4.



H. 4.4

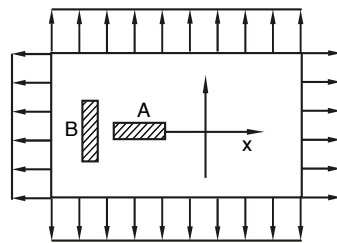
4.5 Một tấm mỏng có kích thước như trên H.4.5 chịu tác dụng của ứng suất kéo $\sigma = 30 \text{ kN/cm}^2$ theo phương chiều dài của tấm và ứng suất tiếp $\tau = 15 \text{ kN/cm}^2$.

- Xác định ứng suất pháp theo phương đường chéo mn và phương vuông góc với đường chéo
 - Tính biến dạng dài tuyệt đối của đường chéo mn .
- Cho $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $\mu = 0,3$.

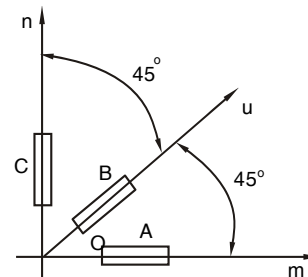


H 4 5

4.6 Một tấm thép mỏng hình chữ nhật chịu ứng suất pháp phân bố đều σ_x và σ_y như trên H.4.6. Các tấm điện trở A và B được gắn lên tấm theo hai phương x và y cho các số đo như sau: $\epsilon_x = 4,8 \cdot 10^{-4}$ và $\epsilon_y = 1,3 \cdot 10^{-4}$. Tính σ_x và σ_y , biết $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.



H. 4.6



H. 4.7

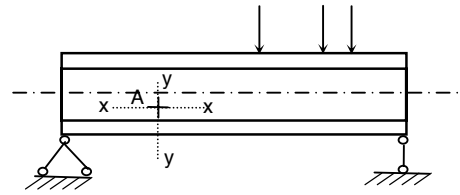
4.7 Tại một điểm trên mặt vật thể chịu lực, người ta gắn các tấm điện trở A, B, C để đo biến dạng tỷ đối theo các phương Om , On và Ou (H.4.7).

Các số đo thu được: $\epsilon_m = -2,81 \cdot 10^{-4}$; $\epsilon_n = -2,81 \cdot 10^{-4}$; $\epsilon_u = 1,625 \cdot 10^{-4}$

Xác định ứng suất chính, phương chính tại điểm đó.

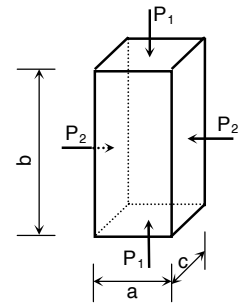
Cho : $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.

4.8 Tại điểm A của một dầm cầu có gắn hai tenxômét để đo biến dạng theo phương nằm ngang và phương thẳng đứng (H.4.8). Khi xe chạy qua cầu, người ta đo được: $\varepsilon_x = 0,0004$; $\varepsilon_y = -0,00012$. Tính ứng suất pháp theo phương dọc và phương thẳng đứng của dầm. Cho biết $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.



H.4.8

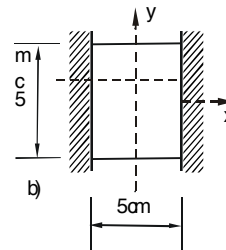
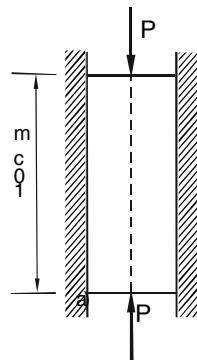
4.9 Có một phân tử hình hộp có các cạnh: $a = 2 \text{ cm}$; $b = 4 \text{ cm}$; $c = 2 \text{ cm}$, chịu tác dụng của các lực P_1, P_2 trên bốn mặt của phân tử (xem H.4.9). Cho : $P_1 = 60 \text{ kN}$; $P_2 = 120 \text{ kN}$; $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.



H.4.9

- Xác định các biến dạng dài $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ của các cạnh a, b, c và biến đổi thể tích của phân tử hình hộp.
- Muốn biến đổi thể tích $\Delta V = 0$ thì phải đặt thêm lực pháp tuyến P_3 bằng bao nhiêu vào hai mặt còn lại?
Tính τ_{\max} trong trường hợp này.

4.10 Một khối hình hộp làm bằng thép có kích thước cho trên H.4.10, được đặt giữa hai tấm cứng tuyệt đối, chịu lực nén $P = 250 \text{ kN}$. Tính lực tác dụng tương hỗ giữa mặt tiếp xúc của hình hộp với các tấm cứng. Cho $\mu = 0,3$.



H.4.10

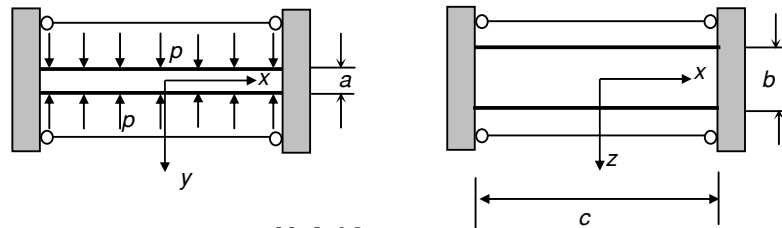
4.11 Một khối lập phương bằng bê tông đặt vừa khít rãnh của vật thể A chịu áp suất phân bố đều ở mặt trên $P = 1 \text{ kN/cm}^2$ (H.4.11).

Xác định áp lực nén vào vách rãnh và độ biến dạng thể tích tuyệt đối.

Cho cạnh $a = 5 \text{ cm}$; $E = 8 \cdot 10^2 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,36$.

. Vật thể A coi như cứng tuyệt đối.

4.12 Một tấm thép kích thước $a \times b \times c$ đặt giữa hai tấm tuyệt đối cứng, hai tấm này được liên kết với nhau bằng bốn thanh như H.4.12. Khi tấm thép chịu áp lực p phân bố trên hai mặt bên thì ứng suất kéo của thanh là bao nhiêu? Tính ứng suất chính trong tấm thép. Cho $E_{\text{tấm}} = E_{\text{thanh}}$ và diện tích F của thanh.



H.4.12

Chương 5 LÝ THUYẾT BỀN

5.1 KHÁI NIỆM VỀ LÝ THUYẾT BỀN

♦ Điều kiện bền thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm (chương 3), (TTÚS đơn) :

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma]_k ; \quad |\sigma_{\min}| = |\sigma_3| \leq [\sigma]_n$$

trong đó, $[\text{Ứng suất cho phép}] = \frac{\text{Ứng suất nguy hiểm của vật liệu } (\sigma_0)}{\text{Hệ số an toàn}} ; [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$

Ứng suất nguy hiểm σ_0 có được từ những thí nghiệm kéo (nén) đúng tâm:

- Đối với vật liệu dẻo là giới hạn chảy σ_{ch}
- Đối với vật liệu giòn là giới hạn bền σ_b .

♦ Để viết điều kiện bền ở một điểm của vật thể ở TTÚS phức tạp (phẳng hay khối), cần phải có kết quả thí nghiệm phá hỏng những mẫu thử ở TTÚS tương tự. Việc thực hiện những thí nghiệm như thế rất khó khăn vì:

- Ứng suất nguy hiểm phụ thuộc vào độ lớn của các ứng suất chính và phụ thuộc vào tỉ lệ giữa những ứng suất này. Do đó phải thực hiện một số lượng rất lớn các thí nghiệm mới đáp ứng được tỉ lệ giữa các ứng suất chính có thể gặp trong thực tế

- Thí nghiệm kéo, nén theo ba chiều cần những thiết bị phức tạp, không phổ biến rộng rãi như thí nghiệm kéo nén một chiều

Vì vậy, không thể căn cứ vào thí nghiệm trực tiếp mà phải dựa trên các giả thiết về nguyên nhân gây ra phá hỏng của vật liệu hay còn gọi là những **thuyết bền** để đánh giá độ bền của vật liệu.

Định nghĩa :Thuyết bền là những giả thuyết về nguyên nhân phá hoại của vật liệu, nhờ đó đánh giá được độ bền của vật liệu ở mọi TTÚS khi chỉ biết độ bền của vật liệu ở TTÚS đơn (do thí nghiệm kéo, nén đúng tâm).

Nghĩa là, với phân tử ở TTÚS bất kỳ có các ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, ta phải tìm ứng suất tính theo thuyết bền là một hàm của $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ rồi so sánh với $[\sigma]_k$ hay $[\sigma]_n$ ở TTÚS đơn.

⇒ **Điều kiện bền** của vật liệu có thể biểu diễn dưới dạng tổng quát như sau: $\sigma_t = \sigma_{td} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma]_k$ (hay $\sigma_t = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma]_n$)

σ_t, σ_{td} được gọi là **ứng suất tính** hay **ứng suất tương đương**. Vấn đề là phải xác định hàm f hay là tìm được thuyết bền tương ứng.

5.2 CÁC THUYẾT BỀN (TB) CƠ BẢN

1- Thuyết bền ứng suất pháp lớn nhất (TB 1)

◆ Nguyên nhân vật liệu bị phá hỏng là do ứng suất pháp lớn nhất của phân tử ở TTÚS phức tạp đạt đến ứng suất nguy hiểm ở TTÚS đơn.

◆ Nếu ký hiệu:

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: ứng suất chính của TTÚS phức tạp

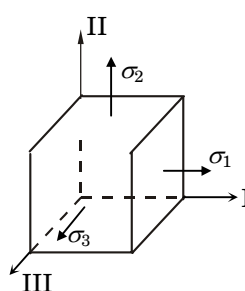
σ_{0k} hay σ_{0n} - ứng suất nguy hiểm về kéo và nén

n - hệ số an toàn

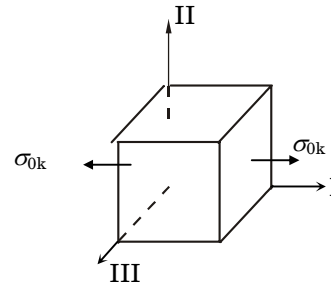
⇒ Điều kiện bền theo TB 1:

$$\sigma_{t1} = \sigma_1 \leq \frac{\sigma_{0k}}{n} = [\sigma]_k \quad (5.1a)$$

$$\sigma_{t1} = |\sigma_3| \leq \frac{\sigma_{0n}}{n} = [\sigma]_n \quad (5.1b)$$



H.5.1. TTÚS khối H.5.2. Trạng thái nguy hiểm của TTÚS đơn



trong đó: σ_{t1} - là ứng suất tính hay ứng suất tương đương theo TB 1

◆ **Ưu khuyết điểm:** TB 1, trong nhiều trường hợp, không phù hợp với thực tế. Thí dụ trong thí nghiệm mẫu thử chịu áp lực giống nhau theo ba phương (áp lực thủy tĩnh), dù áp lực lớn, vật liệu hầu như không bị phá hoại. Nhưng theo TB 1 thì vật liệu sẽ bị phá hỏng khi áp lực đạt tới giới hạn bền của trường hợp nén theo một phương.

TB 1 không kể đến ảnh hưởng của các ứng suất khác cho nên TB này **chỉ đúng đối với TTÚS đơn**.

2- Thuyết bền biến dạng dài tương đối lớn nhất (TB 2)

◆ Nguyên nhân vật liệu bị phá hỏng là do biến dạng dài tương đối lớn nhất của phân tử ở TTÚS phức tạp đạt đến biến dạng dài tương đối lớn nhất ở trạng thái nguy hiểm của phân tử ở TTÚS đơn.

◆ Gọi ε_1 : biến dạng dài tương đối lớn nhất của phân tử ở TTÚS phức tạp

ε_{0k} : biến dạng dài tương đối ở trạng thái nguy hiểm của phân tử bị kéo theo một phương (TTÚS đơn).

Theo định luật Hooke, ta có:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \quad (a)$$

$$\varepsilon_{0k} = \frac{\sigma_{0k}}{E} \quad (b)$$

Thanhđng Tuấn

Kết hợp (a) và (b), kể đến hệ số an toàn n

⇒ **Điều kiện bền** theo TB 2:

$$\frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{1}{n} \frac{\sigma_{0k}}{E} \quad (c)$$

hay $\sigma_{t2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_k$ (5.2a)

Đối với trường hợp biến dạng co ngắn, ta có

$$\sigma_{t2} = |\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)| \leq [\sigma]_k \quad (5.2b)$$

♦ **Ưu khuyết điểm:** TB biến

dạng dài tương đối tiến bộ hơn so với TB ứng suất pháp vì có kể đến ảnh hưởng của cả ba ứng suất chính. Thực nghiệm cho thấy TB này chỉ phù hợp với vật liệu giòn và ngày nay **ít được dùng trong thực tế**.

3- Thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (TB 3)

♦ Nguyên nhân vật liệu bị phá hỏng là do ứng suất tiếp lớn nhất của phân tố ở TTÚS phức tạp đạt đến ứng suất tiếp lớn nhất ở trạng thái nguy hiểm của phân tố ở TTÚS đơn.

♦ Gọi: τ_{max} - ứng suất tiếp lớn nhất của phân tố ở TTÚS phức tạp ;

τ_{0k} - ứng suất tiếp lớn nhất ở trạng thái nguy hiểm của phân tố bị kéo theo một phương (TTÚS đơn).

n – Hệ số an toàn

⇒ Điều kiện bền theo TB 3: $\tau_{max} \leq \frac{\tau_{0k}}{n}$ (d)

trong đó, theo (4.18), chương 4, ta có:

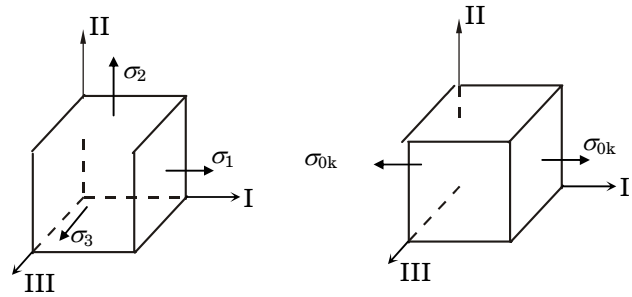
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{0k} = \frac{\sigma_{0k}}{2} \quad (e)$$

(e) vào (d), ⇒ $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \frac{\sigma_{0k}}{2n}$

⇒ **Điều kiện bền** theo TB 3:

$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_k \quad (5.3)$$

♦ **Ưu khuyết điểm:** TB ứng suất tiếp lớn nhất phù hợp với thực nghiệm hơn nhiều so với hai TB 1 và TB 2 . Tuy không kể tới ảnh hưởng của ứng suất chính σ_2 song TB này tỏ ra khá **thích hợp với vật liệu dẻo** và ngày nay **được sử dụng nhiều trong tính toán cơ khí và xây dựng**. Nó cũng phù hợp với kết quả mẫu thử chịu áp lực theo ba phương.



H.5.1. TTÚS khối H.5.2. Trạng thái nguy hiểm của TTÚS đơn

4- Thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng (TB 4)

♦ Nguyên nhân vật liệu bị phá hỏng là do thế năng biến đổi hình dáng của phân tử ở TTÚS phức tạp đạt đến thế năng biến đổi hình dáng ở trạng thái nguy hiểm của phân tử ở TTÚS đơn.

♦ Gọi: u_{hd} - Thế năng biến đổi hình dáng của phân tử ở TTÚS phức tạp

$(u_{hd})_o$ - Thế năng biến đổi hình dáng ở trạng thái nguy hiểm của phân tử bị kéo theo một phương (ở TTÚS đơn).

n – Hệ số an toàn

⇒ Điều kiện để phân tử ở TTÚS

phức tạp không bị phá hỏng là bền theo TB 4 là:

$$u_{hd} < (u_{hd})_o \quad (g)$$

Theo 4.5 ,chương 4, ta đã có:

$$u_{hd} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \quad (h)$$

$$(u_{hd})_o = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{0k}^2$$

Thế (h) vào (g) , lấy căn bậc hai của hai vế , kể đến hệ số an toàn n

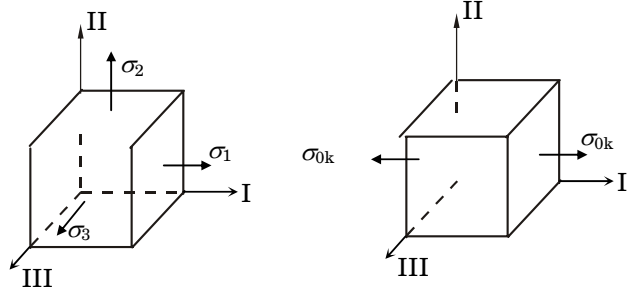
⇒ **Điều kiện bền** theo TB 4:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]_k$$

hay là: $\sigma_{t4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]_k \quad (5.4)$

trong đó: σ_{t4} - là ứng suất tương đương theo thuyết bền thứ tư.

♦ **Ưu khuyết điểm:** TB thế năng biến đổi hình dáng được dùng phổ biến trong kỹ thuật vì khá **phù hợp với vật liệu dẻo**. Ngày nay **được sử dụng nhiều trong tính toán cơ khí và xây dựng** .



H.5.1. TTÚS khối **H.5.2.** Trạng thái nguy hiểm của TTÚS đơn

CÁC KẾT QUẢ ĐẶC BIỆT:**1- TTÚS phẳng đặc biệt (H.5.3):**

Các ứng suất chính : $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad \sigma_2 = 0$

Theo TB ứng suất tiếp (5.3):

$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (5.5)$$

Theo TB thế năng biến đổi hình dáng (5.4):

$$\sigma_{t4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_1 - \sigma_3\sigma_2} \leq [\sigma]$$

hay: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (5.6)$

2- TTÚS trượt thuần túy (H.5.4):

Các ứng suất chính : $\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|; \quad \sigma_2 = 0$

Theo TB ứng suất tiếp:

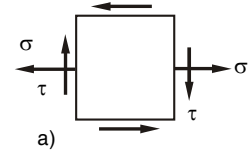
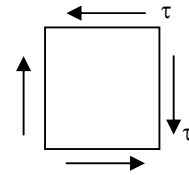
$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2|\tau| \leq [\sigma]$$

hay: $|\tau| \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad (5.7)$

Theo TB thế năng biến đổi hình dáng:

$$\sigma_{t4} = \sqrt{3\tau^2} \leq [\sigma]$$

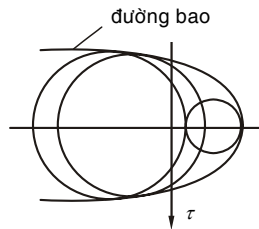
hay: $|\tau| \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad (5.8)$

**H. 5.3****H.5.4**

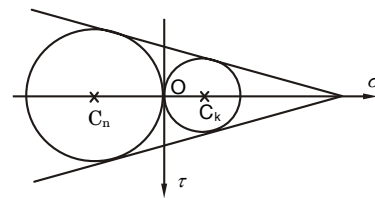
5- Thuyết bền về các TTÚS giới hạn (TB 5 hay là TB Mohr)

TB Mohr được xây dựng trên cơ sở các kết quả thực nghiệm, khác với các TB trước xây dựng trên cơ sở các giả thuyết.

Ở chương 4, ta đã biết một TTÚS khối với ba ứng suất chính σ_1, σ_2 và σ_3 có thể biểu diễn bằng ba vòng tròn Mohr 1, 2 và 3 với đường kính tương ứng là $\sigma_2 - \sigma_3, \sigma_1 - \sigma_3$ và $\sigma_1 - \sigma_2$ như Hình.4.22. Nếu vật liệu ở trạng thái nguy hiểm thì những vòng tròn tương ứng với TTÚS nguy hiểm được gọi là những vòng tròn Mohr giới hạn. Thực nghiệm cho thấy, ứng suất pháp σ_2 ít ảnh hưởng đến sự phá hoại của vật liệu nên ta chỉ để ý đến vòng tròn Mohr lớn nhất gọi là *vòng tròn chính* xác định bởi đường kính $\sigma_1 - \sigma_3$.



H. 5.5 Các vòng tròn Mohr giới hạn và đường cong giới hạn



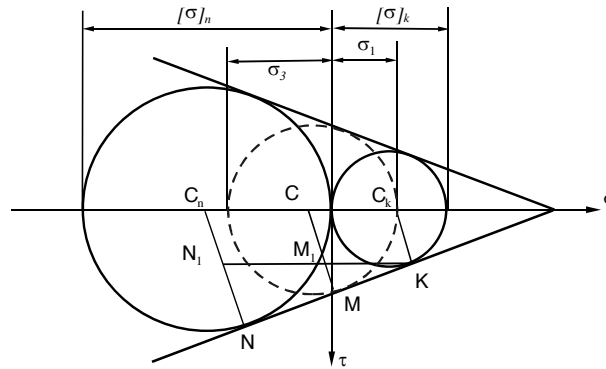
H. 5.6 Đường bao giới hạn đơn giản hóa

Tiến hành thí nghiệm cho các TTÚS khác nhau và tìm trạng thái giới hạn tương ứng của chúng, trên mặt phẳng tọa độ σ, τ ta vẽ được một họ các đường tròn chính giới hạn như ở H.5.5. Nếu vẽ đường bao những vòng tròn đó ta sẽ thu được một *đường cong giới hạn*, đường cong này cắt trục hoành ở điểm tương ứng với trạng thái có ba ứng suất chính là ứng suất kéo có giá trị bằng nhau. Giả thiết rằng đường bao là duy nhất đối với mỗi loại vật liệu, ta nhận thấy nếu TTÚS nào biểu thị bằng một vòng tròn chính nằm trong đường bao thì vật liệu đảm bảo bền, vòng tròn chính tiếp xúc với đường bao thì TTÚS đó ở giới hạn bền còn nếu vòng tròn chính cắt qua đường bao thì vật liệu bị phá hỏng.

Việc phải thực hiện một số lượng lớn các thí nghiệm để xác định các vòng tròn giới hạn và vẽ chính xác đường cong giới hạn là không đơn giản. Vì vậy, người ta thường vẽ gần đúng đường bao bằng cách dựa trên cơ sở hai vòng tròn giới hạn kéo và nén theo một phương với đường kính tương ứng là $[\sigma]_k$ và $[\sigma]_n$. Ở đây, để cho tiện ta thay thế các ứng suất nguy hiểm σ_{0k} và σ_{0n} bằng ký hiệu ứng suất cho phép $[\sigma]_k$ và $[\sigma]_n$ tức là đã có kể tới hệ

Thanhđng Tuấn

số an toàn. Đường bao được thay thế bằng đường thẳng tiếp xúc với hai vòng tròn giới hạn như trên H.5.6.



H. 5.7 Trạng thái ứng suất giới hạn và đường bao

Xét một TTÚS khối có vòng tròn Mohr lớn nhất σ_1 và σ_3 tiếp xúc với đường bao, nằm ở giới hạn về độ bền. Trên H.5.7, vòng tròn này được vẽ bằng đường nét đứt. Sau đây, ta thiết lập liên hệ giữa những ứng suất chính σ_1 và σ_3 với các ứng suất cho phép $[\sigma]_k$ và $[\sigma]_n$. Từ hình vẽ ta có tỷ lệ thức:

$$\frac{NN_1}{KN_1} = \frac{MM_1}{KM_1}$$

Thay thế các trị số:

$$NN_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_n - [\sigma]_k); \quad KN_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_n + [\sigma]_k)$$

$$MM_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma]_k); \quad KM_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_k - (\sigma_1 + \sigma_3))$$

vào tỷ lệ thức trên, ta nhận được điều kiện giới hạn:

$$\frac{[\sigma]_n - [\sigma]_k}{[\sigma]_n + [\sigma]_k} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma]_k}{[\sigma]_k - (\sigma_1 + \sigma_3)}$$

hoặc:

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \sigma_3 = [\sigma]_k$$

Như vậy, điều kiện bền theo TB Mohr (TB 5) được viết là: $\sigma_1 - \alpha \sigma_3 \leq [\sigma]_k$

(5.9a)

với hệ số: $\alpha = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}$ (5.9b)

Tuy bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất chính σ_2 và đơn giản hóa đường cong giới hạn thành đường thẳng, thuyết bền Mohr có ưu điểm hơn những thuyết bền trên vì nó không dựa vào giả thuyết nào mà căn cứ trực tiếp vào trạng thái giới hạn của vật liệu. Thực tế cho thấy **TB này phù hợp với vật liệu giòn**, tuy nhiên nó cho kết quả chính xác chỉ khi vòng tròn giới hạn của TTÚS đang xét nằm trong khoảng hai vòng tròn giới hạn kéo và nén.

5.3 VIỆC ÁP DỤNG CÁC TB

Trên đây là những TB được dùng tương đối phổ biến. Việc áp dụng TB này hay TB khác để giải quyết bài toán cụ thể phụ thuộc vào loại vật liệu sử dụng và TTÚS của điểm kiểm tra.

Đối với TTÚS đơn, người ta dùng TB 1 để kiểm tra độ bền.

Đối với TTÚS phức tạp, nếu là vật liệu giòn, người ta thường dùng TB 5 (TB Mohr) hay TB 2, nếu là vật liệu dẻo người ta dùng TB 3 hay TB 4.

Hiện nay, có nhiều TB mới được xây dựng, tổng quát hơn và phù hợp hơn với kết quả thực nghiệm. Tuy vậy, những TB này cũng có những nhược điểm nhất định nên chưa được sử dụng rộng rãi.

Thí dụ: Kiểm tra bền phân tố vật thể ở TTÚS khối như trên H.5.8. Ứng suất cho theo kN/cm^2 . Cho biết: $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

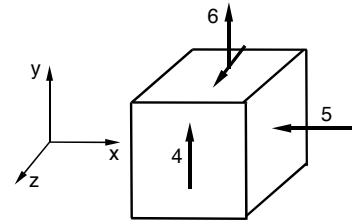
Giải.

Chọn hệ tọa độ như trên H.5.8.

Theo quy ước ta có:

$$\sigma_x = -5 \text{ kN/cm}^2, \sigma_y = 6 \text{ kN/cm}^2, \tau_{zy} = -\tau_{yz} = 4 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_z = 0, \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yx} = \tau_{xy} = 0$$



H. 5.8

Mặt vuông góc với trục x là mặt chính với ứng suất chính $\sigma_x = -5 \text{ kN/cm}^2$. Hai ứng suất chính còn lại nằm trong mặt phẳng vuông góc với ứng suất chính đã cho và có giá trị bằng:

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} = 3 \pm 5 = \begin{cases} 8 \text{ kN/cm}^2 \\ -2 \text{ kN/cm}^2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \sigma_1 = 8 \text{ kN/cm}^2; \sigma_2 = -2 \text{ kN/cm}^2; \sigma_3 = -5 \text{ kN/cm}^2$$

Theo TB ứng suất tiếp:

$$\sigma_{t3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 8 - (-5) = 13 \text{ kN/cm}^2 < 16 \text{ kN/cm}^2$$

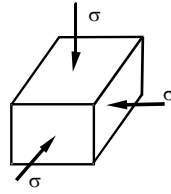
Theo TB thế năng biến đổi hình dáng:

$$\begin{aligned} \sigma_{t4} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \\ &= \sqrt{8^2 + 2^2 + 5^2 - (-2) \times 8 - 8(-5) - (-2)(-5)} \\ &= 11,79 \text{ kN/cm}^2 < 16 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

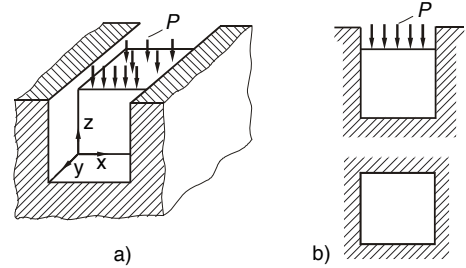
Như vậy, theo cả hai TB phân tố này đảm bảo bền.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

5.1 Khi nén vật liệu theo ba phương cùng với trị số ứng suất pháp (H.5.1), người ta thấy vật liệu không bị phá hoại. Hãy kiểm tra bền đối với phân tố trên bằng TB ứng suất tiếp lớn nhất và TB thế năng biến đổi hình dáng lớn nhất.



H. 5.1

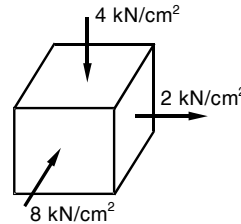


H. 5.2

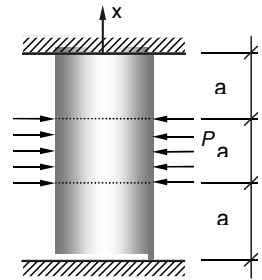
5.2 Dùng TB ứng suất tiếp lớn nhất để tính áp lực p lớn nhất tác dụng trên khối thép trên H.5.2. Khối thép đó được đặt khít vào trong khối thép lớn.

Cho $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$; $\mu = 0,28$;
 $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

5.3 Cho TTÚS như H.5.3. Tính ứng suất tương đương (vế trái của công thức kiểm tra bền) theo TB thế năng biến đổi hình dáng và TB Mohr. Cho $\sigma_{ok}/\sigma_{on} = 0,25$.

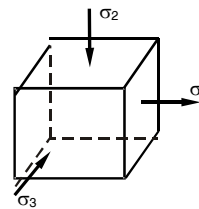


H. 5.3

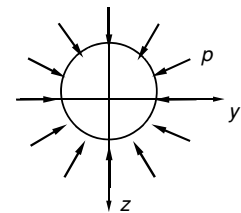


5.4 Cho TTÚS tại một điểm của vật thể chịu lực như H.5.4:

$\sigma_1 = 20 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_2 = -40 \text{ kN/cm}^2$;
 $\sigma_3 = -80 \text{ kN/cm}^2$



H. 5.4



H. 5.5

Kiểm tra độ bền theo TB 3 và TB 4.

Biết $[\sigma] = 120 \text{ kN/cm}^2$.

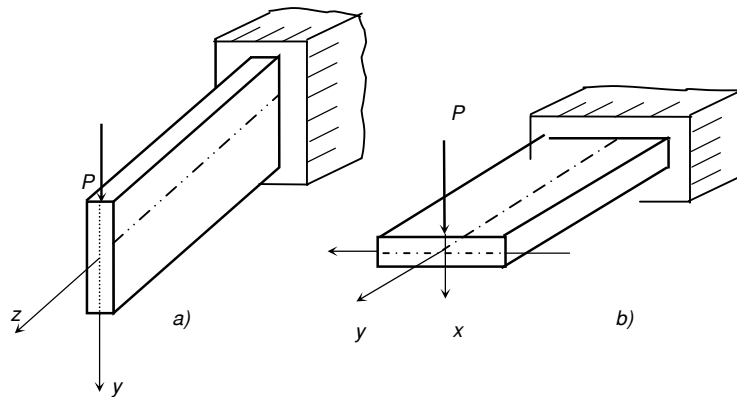
5.5 Một trụ tròn bằng thép ($\mu = 0,3$) đặt khít giữa hai tường cứng như H.5.5. Phần giữa của trụ chịu áp lực p phân bố đều. Tính ứng suất tương đương theo TB 4 ở phần giữa và phần đầu của hình trụ.

Chương 6

ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG

6.1 KHÁI NIỆM

Ở chương 3, khi tính độ bền của thanh chịu kéo (nén) đúng tâm, ta thấy ứng suất trong thanh chỉ phụ thuộc vào độ lớn của diện tích mặt cắt ngang F (mặt cắt F , diện tích F). Trong những trường hợp khác, như thanh chịu uốn, xoắn... thì ứng suất trong thanh không chỉ phụ thuộc vào diện tích F mà còn phụ thuộc vào hình dáng, cách bố trí mặt cắt... nghĩa còn những yếu tố khác mà người ta gọi chung là **đặc trưng hình học của mặt cắt ngang**.



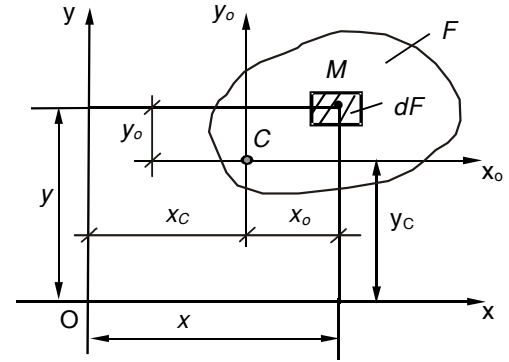
H.6.1. Dầm chịu uốn

a) Tiết diện đứng; b) Tiết diện nằm ngang

Xét thanh chịu uốn trong hai trường hợp mặt cắt đặt khác nhau như trên H.6.1. Bằng trực giác, dễ dàng nhận thấy trường hợp a), thanh chịu lực tốt hơn trường hợp b), tuy rằng trong hai trường hợp diện tích của mặt cắt ngang thanh vẫn như nhau. Như vậy, khả năng chịu lực của thanh còn phụ thuộc vào cách sắp đặt và vị trí mặt cắt ngang đối với phương tác dụng của lực. (Ứng suất nhỏ 04 lần độ võng nhỏ 16 lần). Cho nên sự chịu lực không những phụ thuộc F , mà cần phải nghiên cứu các đặc trưng hình học khác của mặt cắt ngang để tính toán độ bền, độ cứng, độ ổn định và thiết kế mặt cắt của thanh cho hợp lý.

6.2 MÔMEN TÍNH - TRỌNG TÂM

Xét một hình phẳng biểu diễn mặt cắt ngang F (mặt cắt F) như trên H.6.2. Lập một hệ tọa độ vuông góc Oxy trong mặt phẳng của mặt cắt. $M(x,y)$ là một điểm bất kỳ trên hình. Lấy chung quanh M một diện tích vi phân dF .



H.6.2 Mặt cắt F và trọng tâm C

♦ **Mômen tĩnh** của mặt cắt F đối với trục x (hay y) là tích phân:

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF \quad (6.1)$$

vì x, y có thể âm hoặc dương nên mômen tĩnh có thể có trị số âm hoặc dương.

Thứ nguyên của mômen tĩnh là $[(\text{chiều dài})^3]$.

♦ **Trục trung tâm** là trục có mômen tĩnh của mặt cắt F đối với trục đó bằng không.

♦ **Trọng tâm** là giao điểm của hai trục trung tâm.

⇒ **Mômen tĩnh đối với một trục đi qua trọng tâm bằng không.**

♦ **Cách xác định trọng tâm C** của mặt cắt F :

Dựng hệ trục x_0y_0 song song với hệ trục xOy ban đầu (H.6.2). Ta có

$$x = x_C + x_0; \quad y = y_C + y_0, \quad \text{với } C(x_C, y_C)$$

Thay vào (6.1), ⇒

$$S_x = \int_F (y_C + y_0) dF = y_C \int_F dF + \int_F y_0 dF = y_C F + S_{x_0}$$

vì trục x_0 là trục trung tâm nên $S_{x_0} = 0$, ⇒

$$S_x = y_C F, \quad \text{và} \quad S_y = x_C F \quad (6.2)$$

Từ (6.2) ⇒

$$x_C = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{S_x}{F} \quad (6.3)$$

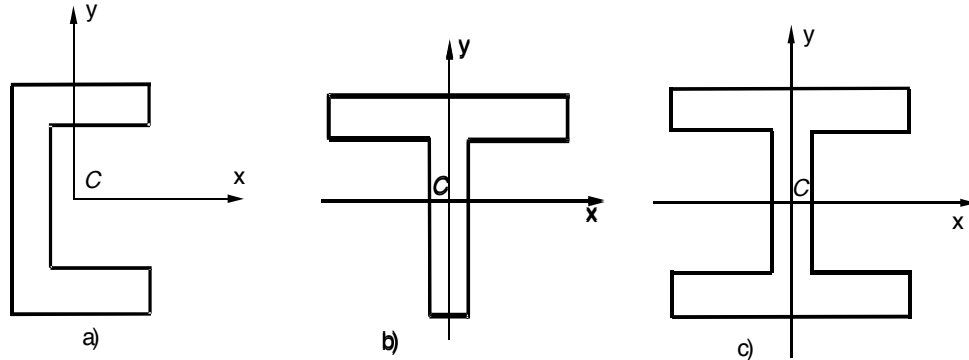
Kết luận: Tọa độ trọng tâm $C(x_C, y_C)$ được xác định trong hệ trục xOy ban đầu theo mômen tĩnh S_x, S_y và diện tích F theo (6.4).

Ngược lại, nếu biết trước tọa độ trọng tâm, có thể sử dụng (6.2), (6.3) để xác định các mômen tĩnh.

Nhận xét 1:

Mặt cắt có trục đối xứng, trọng tâm nằm trên trục này vì mômen tĩnh đối với trục đối xứng bằng không (H.6.3a,b).

Mặt cắt có hai trục đối xứng, trọng tâm nằm ở giao điểm hai trục đối xứng (H.6.3c).



H.6.3 Mặt cắt có trục đối xứng

Thực tế, có thể gặp những mặt cắt ngang có hình dáng phức tạp được ghép từ nhiều hình đơn giản.

Tính chất: mômen tĩnh của hình phức tạp bằng tổng mômen tĩnh của các hình đơn giản.

Với những hình đơn giản như chữ nhật, tròn, tam giác hoặc mặt cắt các loại thép định hình I, U, V, L... ta đã biết trước (hoặc có thể tra theo các bảng trong phần phụ lục) diện tích, vị trí trọng tâm, từ đó dễ dàng tính được mômen tĩnh của hình phức tạp gồm n hình đơn giản:

$$S_x = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum_1^n F_i y_i \quad (6.4)$$

$$S_y = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum_1^n F_i x_i$$

trong đó: F_i, x_i, y_i - diện tích và tọa độ trọng tâm của hình đơn giản thứ i ,
 n - số hình đơn giản.

⇒ Tọa độ trọng tâm của một hình phức tạp trong hệ tọa độ xy .

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i} ; \quad y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (6.5)$$

Thí dụ 6-1 Xác định trọng tâm mặt cắt chữ L chỉ gồm hai hình chữ nhật như trên H.6.4. Tọa độ trọng tâm C của hình trên là:

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2}{F_1 + F_2};$$

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2}{F_1 + F_2}$$

Thí dụ 6.2 Một mặt cắt thanh ghép, gồm thép chữ I số hiệu N^o55, thép chữ [số hiệu N^o27, và thép chữ nhật $15 \times 1,2$ cm (H.6.5). Xác định trọng tâm C của mặt cắt.

Giải.

Tra bảng (ГОСТ 8239-89) \Rightarrow số liệu sau:

- Đối với thép chữ I N^o55:

$$h_2 = 55 \text{ cm}$$

$$t = 1,65 \text{ cm}$$

$$F_2 = 118 \text{ cm}^2$$

- Đối với thép chữ [N^o27:

$$h_3 = 27 \text{ cm}$$

$$F_3 = 35,2 \text{ cm}^2$$

$$z_3 = 2,47 \text{ cm}$$

- Hình chữ nhật:

$$F_1 = 15 \text{ cm} \times 1,2 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$$

Chọn hệ trục tọa độ xy qua gốc $C_2 \Rightarrow$ tọa độ trọng tâm của ba hình trên là:

$$y_1 = \frac{55}{2} + \frac{1,2}{2} = 28,1 \text{ cm}; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = \frac{55}{2} + 2,47 = 29,97 \text{ cm}$$

Diện tích và mômen tĩnh của toàn mặt cắt là:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 18 + 118 + 35,2 = 171,2 \text{ cm}^2$$

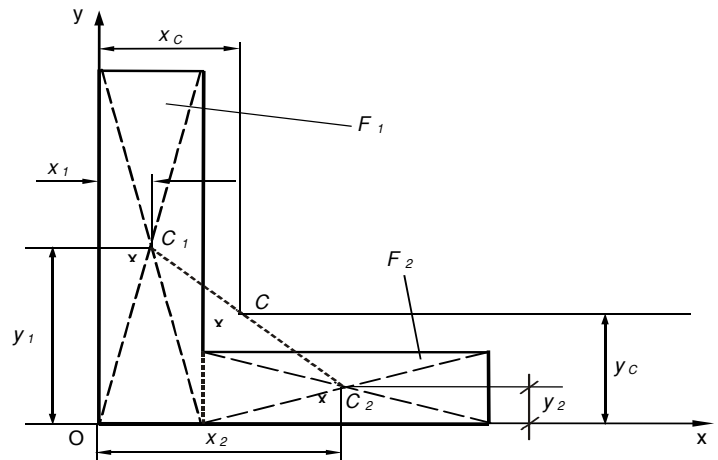
$$S_x = y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3 = (28,1)(18) + 0 - (29,97)(35,2) = -549,144 \text{ cm}^3$$

vì y là trục đối xứng, trọng tâm C sẽ nằm trên trục này.

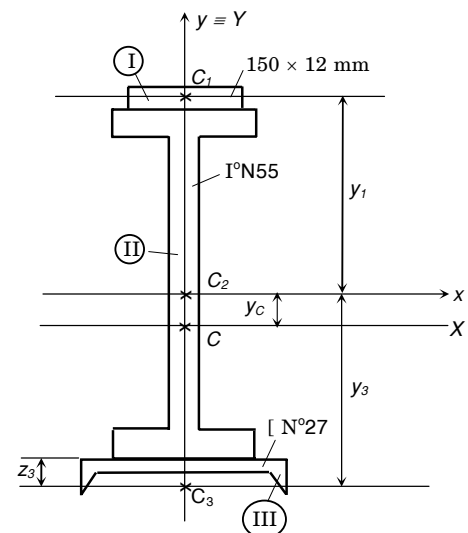
$$\Rightarrow \text{Tọa độ điểm } C \text{ là: } x_C = 0; \quad y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{-549,144}{171,2} \approx -32 \text{ cm}$$

Dấu (-) cho thấy trọng tâm C nằm phía dưới trục x .

Chú ý rằng, **trục x có thể chọn tùy ý** song ở thí dụ này ta đặt trục x đi qua trọng tâm C_2 của mặt cắt chữ I cho tiện tính toán.



H.6.4 Trọng tâm hình phức tạp



H.6.5. Trọng tâm C của hình ghép

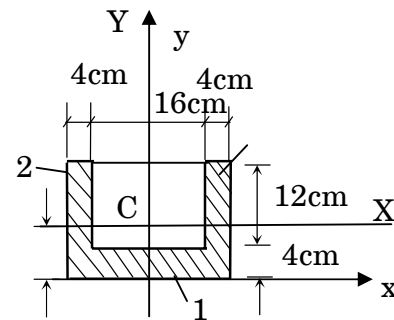
Thí dụ 6.3. Cho mặt cắt hình chữ U .Tìm trọng tâm C

Chọn hệ trục x,y như hình vẽ, trục x qua đáy mặt cắt (trục y là trục đối xứng, C nằm trên trục y)

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{24 \times 4 \times 2 + 2(4 \times 12 \times 10)}{(24 \times 4) + 2(4 \times 12)} = 6 \text{ cm}$$

Hay :

$$y_C = \frac{S_{x_1} - S_{x_2}}{F_1 - F_2} = \frac{(24 \times 16 \times 8) - (16 \times 12 \times 10)}{(24 \times 16) - (16 \times 12)} = 6 \text{ cm}$$



H. 6.12

6.3 MÔMEN QUÁN TÍNH- HỆ TRỤC QUÁN TÍNH CHÍNH TRUNG TÂM

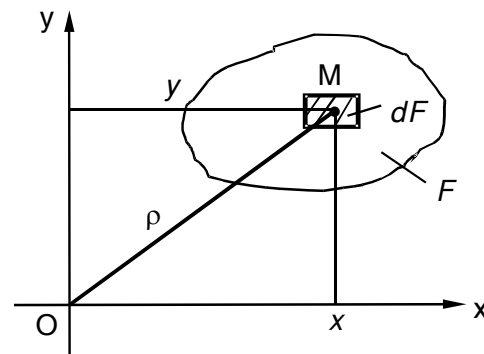
1- Mômen quán tính (MMQT)

◆ Mômen quán tính độc cực

(MMQT đối với điểm) của mặt cắt F đối với điểm O được định nghĩa là biểu thức tích phân:

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF \quad (6.6)$$

với: ρ - khoảng cách từ điểm M đến gốc tọa độ O,



H. 6.6 Hình phẳng F

◆ Mômen quán tính đối với trục y và x của mặt cắt F được định nghĩa:

$$J_y = \int_F x^2 dF; J_x = \int_F y^2 dF \quad (6.7)$$

◆ Mômen quán tính ly tâm của mặt cắt F đối với hệ trục x,y được định nghĩa:

$$J_{xy} = \int_F xy dF \quad (6.8)$$

Từ định nghĩa các mômen quán tính, ta nhận thấy:

- MMQT có thứ nguyên là $[\text{chiều dài}]^4$
- $J_x, J_y, J_\rho > 0$
- MMQT ly tâm J_{xy} có thể dương, âm hoặc bằng không.
- Vì $\rho^2 = x^2 + y^2$ nên $J_\rho = J_x + J_y$ (6.9)

Chương 7

UỐN PHẪNG THANH THẲNG

7.1 KHÁI NIỆM CHUNG

◆ Thanh chịu uốn là thanh có **trục bị uốn cong** dưới tác dụng của ngoại lực. Thanh có trục nằm ngang chịu uốn được gọi là **dầm**.

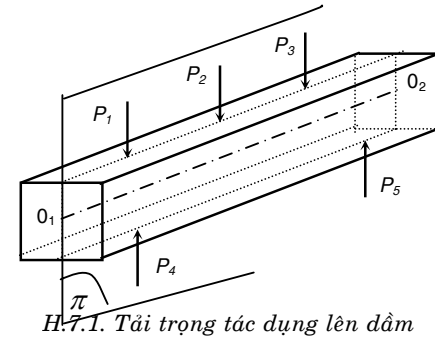
(Thanh có trục thẳng đứng gọi là cột)

◆ **Ngoại lực:** Lực tập trung P , lực phân bố q tác dụng vuông góc với trục dầm hay momen (ngẫu lực)

M nằm trong mặt phẳng chứa trục dầm (H.7.1).

◆ **Mặt phẳng tải trọng:** Mặt phẳng (π) chứa ngoại lực và trục dầm.

Đường tải trọng: Giao tuyến của mặt phẳng tải trọng với mặt cắt ngang.



H.7.1. Tải trọng tác dụng lên dầm

◆ **Giới hạn bài toán:**

+ Chỉ khảo sát các thanh mặt cắt ngang có ít nhất một trục đối xứng.

Trục đối xứng này và trục thanh hợp thành mặt phẳng đối xứng.

Tải trọng nằm trong mặt phẳng đối xứng.

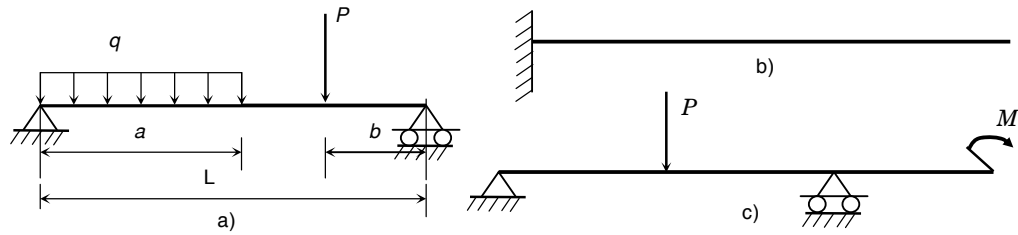
Mặt phẳng tải trọng trùng mặt phẳng đối xứng,

Đường tải trọng cũng là trục đối xứng của mặt cắt ngang

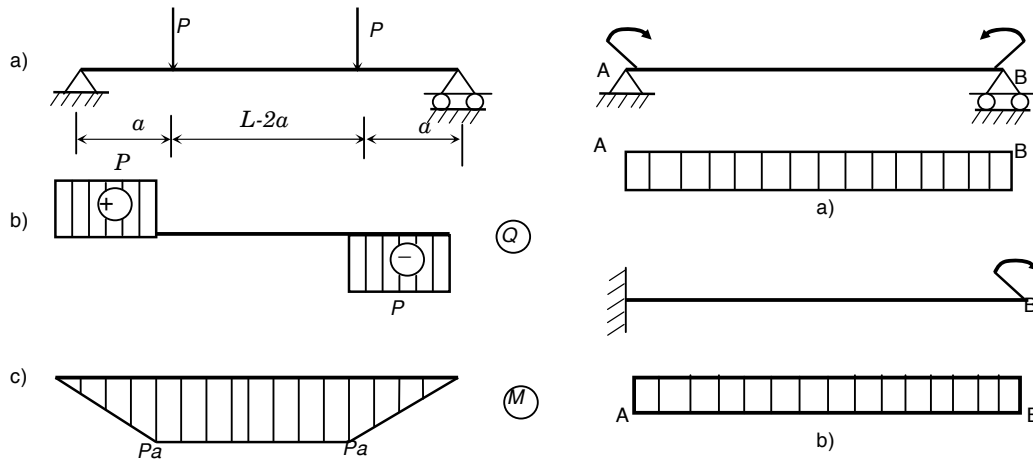
Trục dầm sau khi bị cong vẫn nằm trong mặt phẳng (π) được gọi là **uốn phẳng**.

+ Mặt cắt ngang dầm có chiều rộng bé so với chiều cao.

◆ H.7.3 ,7.4,7.5 : giới thiệu một số loại dầm đơn giản thường gặp



H.7.3. Các loại dầm: a) Dầm đơn giản
b) Dầm chèn kẹp; c) Dầm có đầu mút thừa



H.7.4. Dầm với vùng ở giữa chịu uốn thuần túy

H.7.5. Dầm chịu uốn thuần túy

◆ **Nội lực:** Tùy theo ngoại lực tác dụng mà trên mặt cắt ngang dầm có các nội lực là **lực cắt Q_y** và **mômen uốn M_x** .

◆ **Phân loại:**

Uốn thuần túy phẳng: Nội lực chỉ có mômen uốn $M_x = \text{hằng số}$.

Uốn ngang phẳng: Nội lực gồm lực cắt Q_y và mômen uốn M_x

◆ Dầm ở H.7.4 có đoạn giữa CD chịu uốn thuần túy, dầm ở H. 7.5 chịu uốn thuần túy. Đoạn dầm AC và DB của dầm ở H.7.4 chịu uốn ngang phẳng.

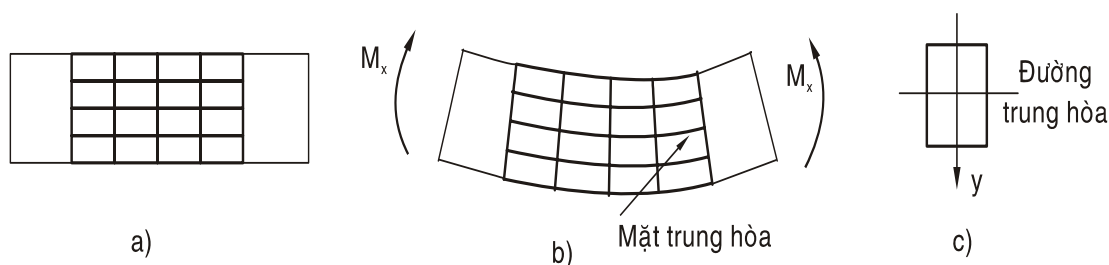
7.2 UỐN THUẦN TÚY PHẪNG

7.2.1 Định nghĩa: Thanh chịu uốn thuần túy phẳng khi trên mọi mặt cắt ngang chỉ có một nội lực M_x .

Dấu của M_x : $M_x > 0$ khi căng (kéo) thớ dưới (thớ $y > 0$) của dầm

7.2.2 Tính ứng suất trên mặt cắt ngang:

1. Thí nghiệm và quan sát biến dạng:



H.7.6. a) Thanh trước khi biến dạng
b) Sau biến dạng; c) Mặt cắt ngang sau biến dạng

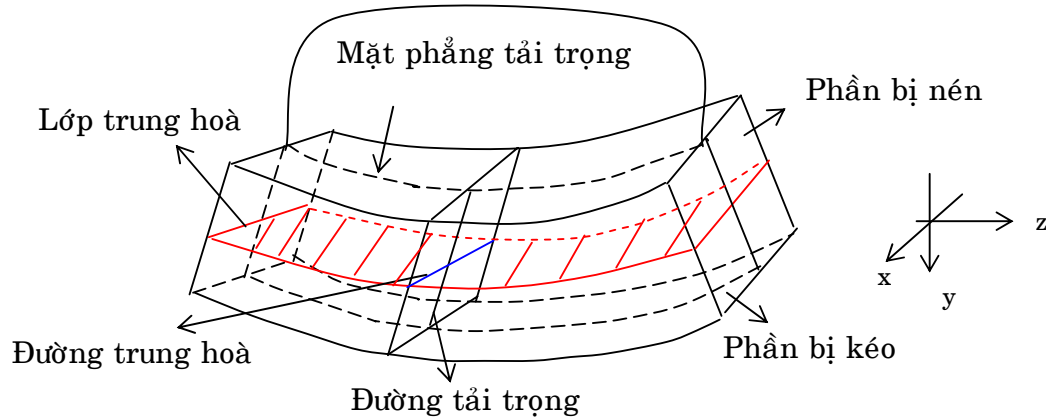
H. 7.6 a) Thanh trước khi biến dạng

b) Sau biến dạng; c) Mặt cắt ngang sau biến dạng

Kẻ lên mặt ngoài một thanh thẳng chịu uốn như H.7.6a, những đường song song với trục thanh tượng trưng cho các thớ dọc và những đường vuông góc với trục thanh tượng trưng cho các mặt cắt ngang; các đường này tạo thành các lưới ô vuông (H.7.6a).

Sau khi biến dạng (H.7.6b), trục thanh bị cong, các đường thẳng song song với trục thanh thành các đường cong song song với trục thanh; những đường vuông góc với trục thanh vẫn còn vuông góc với trục thanh, nghĩa là các **góc vuông được bảo toàn** trong quá trình biến dạng.

Ngoài ra, nếu quan sát thanh thì thấy các thớ bên dưới dãn ra (*bi kéo*) và các thớ bên trên co lại (*bi nén*). Như thế, từ thớ bị dãn sang thớ bị co sẽ tồn tại các thớ mà chiều dài không thay đổi trong quá trình biến dạng, gọi là **thớ trung hòa**. Các thớ trung hòa tạo thành **lớp trung hòa**. Giao tuyến của lớp trung hòa với mặt cắt ngang tạo thành **đường trung hòa**. Vì mặt cắt ngang có chiều rộng bé nên đường trung hòa xem như thẳng (H.7.6.c)

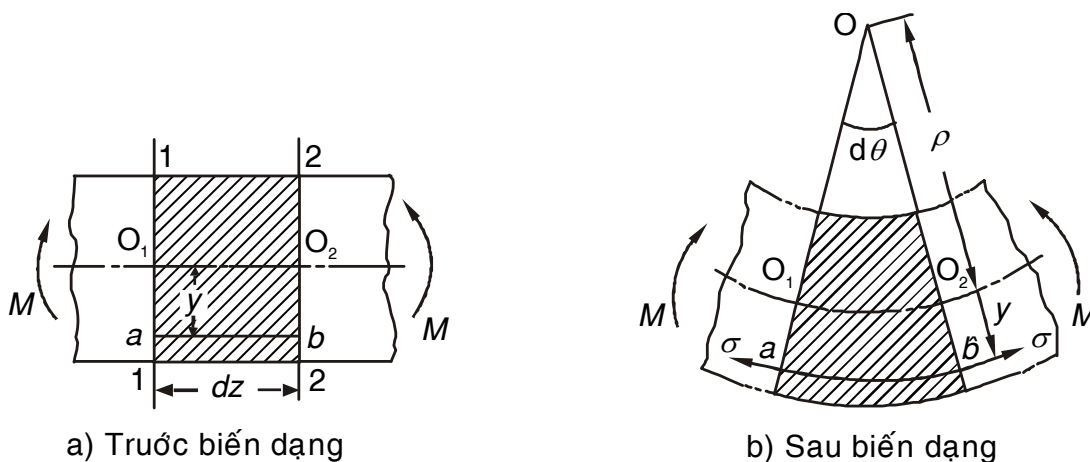


Sau biến dạng các mặt cắt ngang 1-1 và 2-2 ban đầu cách nhau một đoạn vi phân dz sẽ cắt nhau tại tâm cong O' (H.7.7b) và hợp thành một góc $d\theta$. Gọi ρ là bán kính cong của thớ trung hòa, tức khoảng cách từ O' đến thớ trung hòa. Độ dãn dài tương đối của một thớ ab ở cách thớ trung hòa một khoảng cách y cho bởi:

$$\varepsilon_z = \frac{ab - 0_1 0_2}{0_1 0_2} = \frac{(\rho + y)d\theta - dz}{dz} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho} = \kappa y \quad (a)$$

trong đó: κ - là độ cong của dầm.

Hệ thức này chứng tỏ biến dạng dọc trục dầm tỉ lệ với độ cong và biến thiên tuyến tính với khoảng cách y từ thớ trung hòa



H.7.7 Đoạn dầm vi phân dz

2. Thiết lập công thức tính ứng suất:

Mỗi thớ dọc của dầm chỉ chịu kéo hoặc nén (các điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang ở trạng thái ứng suất đơn).

Định luật Hooke ứng với trạng thái ứng suất đơn cho ta:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E\kappa y \quad (b)$$

Ứng suất pháp tác dụng trên mặt cắt ngang biến thiên bậc nhất với khoảng cách y từ trục trung hoà.

Xét hợp lực của các ứng suất pháp trên toàn mặt cắt ngang.

+ Liên hệ giữa σ_z và N_z

$$\int_F \sigma_z dF = \int_F E\kappa y F = 0 \quad (\text{định nghĩa } N_z = 0) \quad (c)$$

Vì độ cong κ và môđun đàn hồi E là hằng số nên có thể đem ra ngoài dấu tích phân, $\Rightarrow \int_F y dF = 0$ (d)

(d) cho thấy mômen tĩnh của diện tích mặt cắt ngang đối với trục trung hoà x bằng không \Leftrightarrow **trục trung hoà x đi qua trọng tâm mặt cắt ngang.**

Tính chất này cho phép xác định trục trung hoà của bất kỳ mặt cắt ngang nào. **Nếu trục y là trục đối xứng, thì hệ trục (x,y) chính là hệ trục quán tính chính trung tâm.**

+ Liên hệ giữa σ_z và M_x

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF = \kappa E \int_F y^2 dF = \kappa E J_x \quad (e)$$

trong đó: $J_x = \int_F y^2 dF$ (g)

là mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục trung hoà x .

Biểu thức (e) được viết lại như sau:

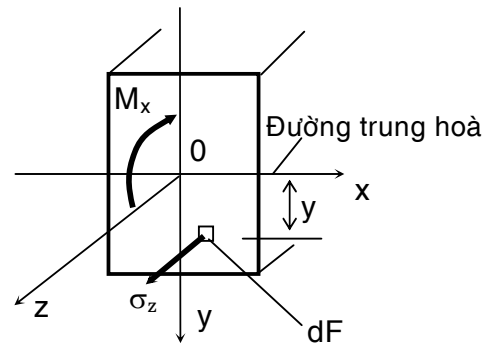
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E J_x} \quad (7.1)$$

$E J_x$ gọi là **độ cứng uốn** của dầm.

Thế (7.1) vào (b) \Rightarrow Công thức tính ứng suất pháp tại một điểm trên mặt cắt

ngang dầm: $\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$ (7.2)

Ứng suất biến thiên bậc nhất theo tung độ y . và y là khoảng cách của điểm tính ứng suất kể từ trục trung hoà x . (M_x và y mang dấu đại số)



H.7.8. Ứng suất pháp và mômen uốn trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn

Công thức kỹ thuật:

Nếu mômen uốn dương, dầm bị căng (bị kéo) ở dưới, các thớ trên bị nén . Kết quả ngược lại nếu mômen uốn âm. Do vậy trong thực hành, ta có thể sử dụng công thức kỹ thuật để tính ứng suất,

$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{J_x} |y| \quad (7.3)$$

ta sẽ lấy: dấu (+) nếu M_x gây **kéo** tại điểm cần tính ứng suất.

dấu (-) nếu M_x gây **nén** tại điểm cần tính ứng suất.

7.2.3 Biểu đồ ứng suất pháp - Ứng suất pháp cực trị:**♦ Biểu đồ ứng suất pháp:**

+Những điểm càng ở xa trục trung hòa có trị số ứng suất càng lớn.

+Những điểm cùng có khoảng cách tới thớ trung hòa sẽ có cùng trị số ứng suất pháp.

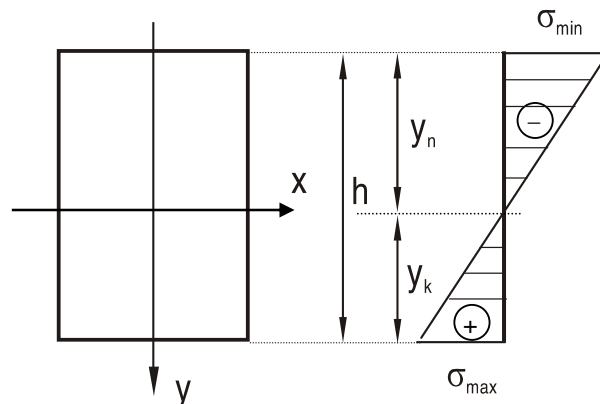
Biểu đồ phân bố ứng suất pháp là đồ thị biểu diễn giá trị các ứng suất tại các điểm trên mặt cắt ngang.

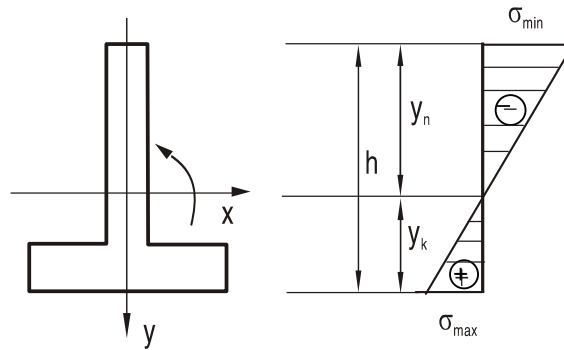
*Trường hợp mặt cắt ngang có hai trục đối xứng (Hình tròn, chữ nhật..) cho bởi H.7.9

*Trường hợp mặt cắt ngang chỉ có một trục đối xứng (chữ I,U) cho bởi H.7.10.

Dấu (+) chỉ ứng suất kéo.

Dấu (-) chỉ ứng suất nén.



H. 7.9 Biểu đồ ứng suất pháp cho các mặt cắt có hai trục đối xứng**H. 7.10** Biểu đồ ứng suất pháp cho các mặt cắt có một trục đối xứng**◆ Ứng suất pháp cực trị:**

Tính ứng suất pháp khi kéo và khi nén lớn nhất trên mặt cắt ngang dầm ở những điểm xa đường trung hòa nhất.

Gọi y_{\max}^k , y_{\max}^n lần lượt là khoảng cách thớ chịu kéo và thớ chịu nén ở xa đường trung hòa nhất. Khi đó ứng suất chịu kéo lớn nhất σ_{\max} và ứng suất chịu nén lớn nhất σ_{\min} sẽ tính bởi các công thức:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x} |y_{\max}^k| = \frac{|M_x|}{W_x^k} \quad (7.4a)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{|M_x|}{J_x} |y_{\max}^n| = \frac{|M_x|}{W_x^n} \quad (7.4b)$$

với:
$$W_x^k = \frac{J_x}{|y_{\max}^k|}; \quad W_x^n = \frac{J_x}{|y_{\max}^n|} \quad (7.5)$$

Các đại lượng W_x^k và W_x^n gọi là các suất tiết diện hoặc **mômen chống uốn** của mặt cắt ngang.

Trường hợp đặc biệt: Nếu trục x (trục trung hoà) cũng là trục đối xứng (mặt cắt chữ nhật, tròn, I, ...) thì:

$$|y_{\max}^k| = |y_{\max}^n| = \frac{h}{2}$$

khi đó:
$$W_x^k = W_x^n = W_x = \frac{2J_x}{h} \quad (7.6)$$

và ứng suất nén và kéo cực đại có trị số bằng nhau:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{|M_x|}{W_x} \quad (7.7)$$

* Mặt cắt ngang hình chữ nhật với bề rộng b và chiều cao h :

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad W_x = \frac{bh^2}{6} \quad (7.8)$$

* Mặt cắt ngang hình tròn:

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4; \quad W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3 \quad (7.9)$$

* Mặt cắt ngang hình vành khăn : đường kính ngoài D, trong, d

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64}(1-\eta^4); \quad W_x = \frac{\pi D^3}{32}(1-\eta^4) \quad \text{với} \quad \eta = d/D$$

* Mặt cắt ngang hình I, C: Tra bảng thép định hình.

Ý nghĩa vật lý của mômen chống uốn: **khi mômen chống uốn càng lớn dầm chịu được mômen uốn càng lớn.**

7.2.4 Điều kiện bền- Ba bài toán cơ bản

Điều kiện bền:

+ Dầm bằng vật liệu dòn: $[\sigma]_k \neq [\sigma]_n$

$$\begin{aligned} |\sigma_{\min}| &\leq [\sigma]_n \\ \sigma_{\max} &\leq [\sigma]_k \end{aligned} \quad (7.10a)$$

+ Dầm bằng vật liệu dẻo: $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$

$$\max |\sigma_z| \leq [\sigma] \quad (7.10b)$$

Ba bài toán cơ bản:

+ Bài toán kiểm tra bền, (*Đây là bài toán thẩm kế.*)

+ Bài toán chọn kích thước mặt cắt ngang, (*bài toán thiết kế.*)

+ Bài toán chọn tải trọng cho phép. (*bài toán sửa chữa, nâng cấp*)

Bài toán cơ bản 1: Kiểm tra bền- Kiểm tra thanh chịu lực có đảm bảo độ bền hay không. Dùng (7.10a) hay (7.10b) để kiểm tra.

Thí dụ 7.1 Trên mặt cắt ngang của một dầm chữ T ngược (H.7.11), mômen uốn $M_x = 7200 \text{ Nm}$. Dầm làm bằng vật liệu có ứng suất cho phép khi kéo và nén khác nhau:

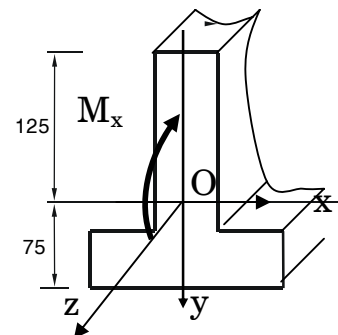
· $[\sigma]_k = 20 \text{ MN/m}^2; \quad [\sigma]_n = 30 \text{ MN/m}^2$

· Kiểm tra bền biết rằng: $J_x = 5312,5 \text{ cm}^4$

Giải.

Ta có: $y_{\max}^k = 75 \text{ mm} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$y_{\max}^n = 125 \text{ mm} = 12,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$



Dầm chữ T chịu uốn

$$W_x^k = \frac{J_x}{y_{\max}^k} = \frac{5312,5 \times 10^{-8}}{7,5 \times 10^{-2}} = 708,3 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$W_x^n = \frac{J_x}{y_{\max}^n} = \frac{5312,5 \times 10^{-8}}{12,5 \times 10^{-2}} = 425 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x^k} = \frac{7200}{708,3 \times 10^{-6}} = 10,20 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 10,20 \text{ MN/m}^2 < [\sigma_k]$$

$$|\sigma_{\min}| = \frac{M_x}{W_x^n} = \frac{7200}{425 \times 10^{-6}} = 17 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = 17 \text{ MN/m}^2 < [\sigma_n]$$

vậy đảm đủ bền.

Bài toán cơ bản 2: Chọn kích thước mặt cắt ngang sao cho đảm thỏa điều kiện bền.

Từ điều kiện bền tổng quát (7.10a,b) \Rightarrow mômen chống uốn và kích thước của mặt cắt ngang sẽ được xác định.

Thí dụ 7.2 Cho dầm chịu lực như H.7.12. Dầm làm bằng hai thép chữ \mathbf{x} , Chọn số hiệu của thép chữ \mathbf{x} để dầm thỏa điều kiện bền. Biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Giải.

Dầm chịu uốn thuần túy; trên mọi mặt cắt ngang của dầm có mômen uốn $M_x = 60 \text{ kNm}$.

Áp dụng công thức (7.7) và (7.10b) ta được: $W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{60 \cdot 100}{16} = 375 \text{ cm}^3$

Tra bảng thép hình ta chọn 2 $\mathbf{x} 20$ có $W_x = 2 \times 184 = 368 \text{ cm}^3$.

Kiểm tra lại điều kiện bền ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{60 \cdot 100}{368} = 16,3 \text{ kN/cm}^2$$

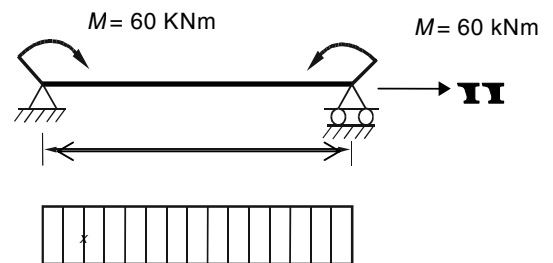
sai số tương đối: $\frac{16,3 - 16}{16} \times 100\% = 1,9\%$; vậy đảm đủ bền. Chọn 2 $\mathbf{x} 20$

Bài toán cơ bản 3: **Định tải trọng cho phép [P] để đảm thỏa điều kiện bền.**

Thí dụ 7.3 Một dầm bằng gang có mặt cắt ngang như H.7.13. Xác định trị số mômen uốn cho phép (mômen có chiều như hình vẽ). Biết: $[\sigma]_k = 1,5 \text{ kN/cm}^2$.

Hỏi với trị số mômen uốn cho phép đó, ứng suất nén lớn nhất trong dầm là bao nhiêu?

Cho biết $J_x = 25470 \text{ cm}^4$



H.7.12

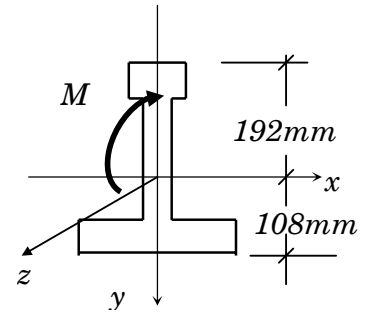
Giải.

Từ điều kiện bền $\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x} |y_{\max}^k| = \frac{|M_x|}{W_x^k} \leq [\sigma]_k$

$\Rightarrow [M_x] = [\sigma_k] \frac{J_x}{y_{\max}^k} = 1,5 \times \frac{25470}{10,8} = 3537,5 \text{ kNcm}$

Tương ứng ta có:

$$\sigma_{\min} = -\frac{|M_x|}{J_x} |y_{\max}^n| = -\frac{3537,5}{25470} \times 19,2 = -2,67 \text{ kN/cm}^2$$

**H.7.13****7.2.5 Hình dáng hợp lý của mặt cắt ngang.**

Hình dáng hợp lý là sao cho khả năng chịu lực của dầm là lớn nhất nhưng đồng thời ít tốn vật liệu nhất. Điều kiện:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{J_x} |y_{\max}^k| = |\sigma|_k, \quad |\sigma|_{\min} = \frac{|M_x|}{J_x} |y_{\max}^n| = |\sigma|_n$$

Lập tỉ số các ứng suất :

$$\frac{|y_{\max}^k|}{|y_{\max}^n|} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} = \alpha$$

- Nếu vật liệu dẻo: $\alpha < 1$ vì : $|\sigma|_k < |\sigma|_n$ nên $|y_{\max}^k| < |y_{\max}^n|$

Ta chọn mặt cắt ngang không đối xứng qua trục trung hoà.

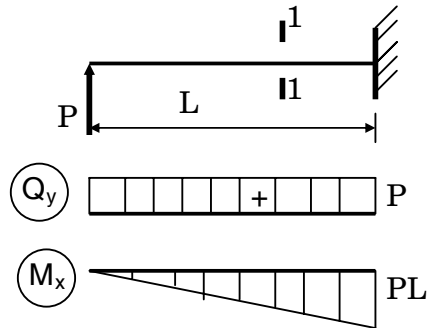
- Nếu vật liệu giòn: $\alpha = 1$ nên $|y_{\max}^k| = |y_{\max}^n|$

Ta chọn mặt cắt ngang đối xứng qua trục trung hoà.

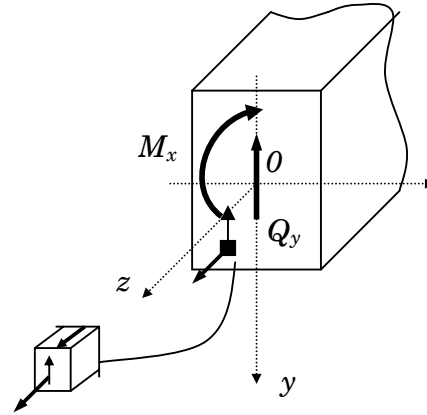
Theo biểu đồ ứng suất ta thấy càng gần trục trung hoà ứng suất càng nhỏ, nên tại đó vật liệu làm việc ít hơn ở những điểm xa trục trung hoà, vì vậy thường cấu tạo hình dáng mặt cắt sao cho vật liệu xa trục trung hoà. ví dụ hình chữ I,U,vành khăn ,hình rỗng...

7.3 UỐN NGANG PHẪNG

7.3.1 Định nghĩa- Dầm gọi là chịu uốn ngang phẳng khi trên mặt cắt ngang có 2 nội lực là: mômen uốn M_x và lực cắt Q_y (H 7.14).



H.7.14. Số đồ dầm chịu uốn ngang

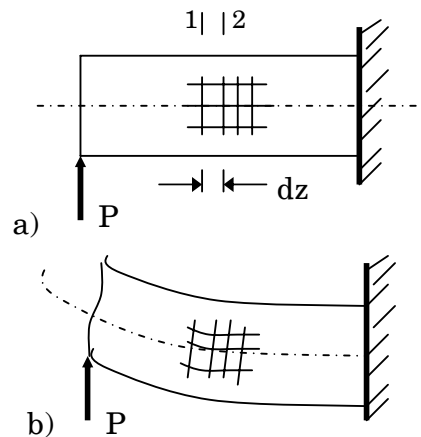


H.7.15 Mặt cắt ngang dầm chịu uốn ngang phẳng

7.3.2 Các thành phần ứng suất:

1- Thí nghiệm và quan sát biến dạng

Kẻ những đường song song và vuông góc với trục thanh (H.7.16a). Sau biến dạng các góc vuông không còn vuông (H.7.16b).



H. 7.16. a) Thanh trước biến dạng
b) Thanh sau biến dạng
c) Trạng thái ứng suất phẳng

2- Trạng thái ứng suất:

Khác với trường hợp uốn thuần túy, ngoài ứng suất pháp σ_z do mômen M_x gây ra còn có ứng suất tiếp τ_{zy} do lực cắt Q_y gây ra. Trạng thái ứng suất của một phân tử có các mặt song song các trục tọa độ biểu diễn như hình 7.15 và 7.16c

3. Công thức tính ứng suất pháp:

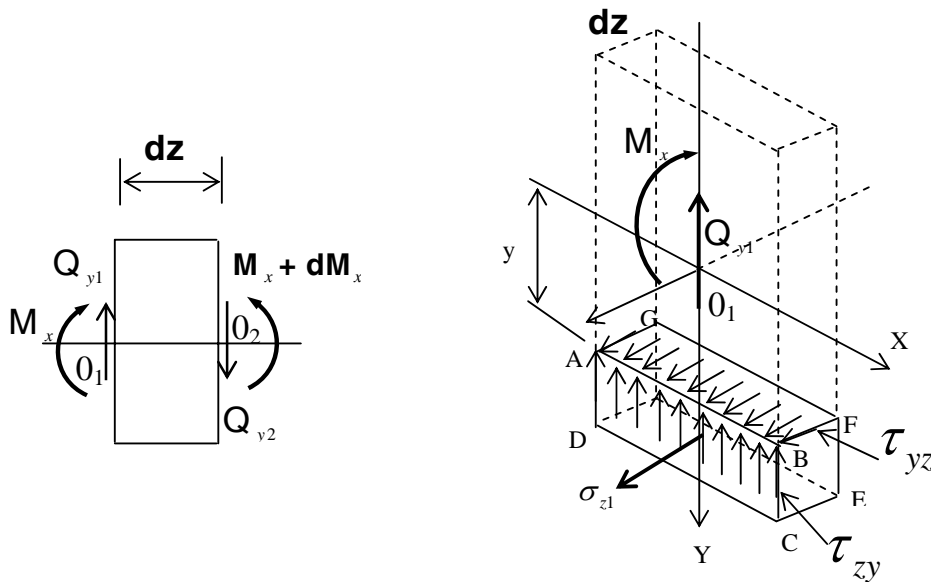
Chấp nhận với sai số không lớn dùng công thức (7.2) để tính ứng suất pháp trong thanh chịu uốn ngang phẳng. (Lý thuyết đàn hồi đã chứng minh)

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad (7.2)$$

4. Công thức tính ứng suất tiếp:

Giả thiết:

- Mặt cắt ngang dầm có chiều rộng bé so với chiều cao.
- Ứng suất tiếp phân bố đều theo bề rộng của mặt cắt và cùng chiều với lực cắt (nghĩa là mọi điểm nằm cách đều đường trung hòa thì có cùng trị số ứng suất tiếp).



Ta xác định quy luật phân bố ứng suất tiếp dọc theo chiều cao của mặt cắt ngang.

Xét đoạn dầm giới hạn bởi 2 mặt cắt 1-1 và 2-2 cách nhau dz (H.7.17a). Để khảo sát ứng suất tiếp tại điểm K cách đường trung hòa x một khoảng y , ta dùng mặt cắt đi qua K vuông góc với lực cắt.

Xét cân bằng của phần dưới ABCDEFGH (H.7.17b)

Theo các giả thiết đã nêu, các ứng suất tiếp τ_{zy} thẳng đứng có phương song song với lực cắt thì phân bố đều trên mặt thẳng đứng ABCD. Ngoài ra theo định luật đối ứng của ứng suất tiếp, trên mặt vuông góc với mặt cắt ngang ABFE cũng có ứng suất tiếp τ_{yz} có giá trị bằng với τ_{zy} (H.7.17b).

Như vậy, tồn tại ứng suất tiếp theo phương ngang giữa các lớp song song với trục dầm cũng như các ứng suất tiếp thẳng đứng trên các mặt cắt ngang của dầm. Tại một điểm, các ứng suất này có giá trị bằng nhau.

Phương trình cân bằng theo phương z dọc trục thanh cho:

$$N_1 - N_2 + T = 0 \quad (a)$$

trong đó: N_1 - là hợp của các lực tác dụng trên mặt 1-1 được tính bởi:

$$N_1 = \int_{F_c} \sigma_{z1} dF = \int_{F_c} \frac{M}{J_x} y dF \quad (b)$$

N_2 - là hợp của các lực tác dụng trên mặt 2-2 được tính bởi:

$$N_2 = \int_{F_c} \sigma_{z2} dF = \int_{F_c} \frac{M_x + dM_x}{J_x} y dF \quad (c)$$

T - là hợp của các lực tác dụng trên mặt trên ABEF của phần tử:

$$T = \tau_{yz} b^c dz \quad (d)$$

Thay (b), (c), (d) vào (a) \Rightarrow

$$\int_{F_c} \frac{M_x}{J_x} y dF - \int_{F_c} \frac{M_x + dM_x}{J_x} y dF + \tau_{yz} b^c dz = 0 \quad (e)$$

$$\Rightarrow \tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{dM_x}{dz} \left(\frac{1}{J_x b^c} \right) \int_{F_c} y dF \quad (f)$$

thay $Q_y = dM_x/dz$ ta được:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{Q_y}{J_x b^c} \int_{F_c} y dF \quad (g)$$

$$\text{Đặt: } S_x^c = \int_{F_c} y dF \quad \Rightarrow \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x b^c} \quad (7.11)$$

Công thức (7.11) gọi là công thức **D.I. Zhuravski**

S_x^c : momen tĩnh của phần diện tích bi cắt (F_c) đối với trục trung hòa.

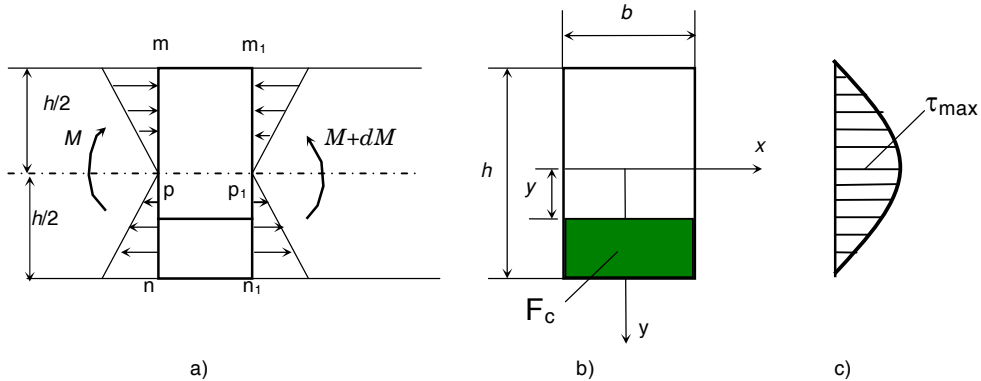
b^c : bề rộng tiết diện cắt.

J_x : Momen quán tính của tiết diện.

Q_y : Lực cắt tại tiết diện đang tính.

5-Phân bố ứng suất tiếp trên một số mặt cắt thường gặp:

+ Mặt cắt ngang chữ nhật (H.7.18):



H.7.18. Phân bố của ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang chữ nhật

Diện tích bị cắt F_c là hình chữ nhật, nên

$$S_x^c = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(y + \frac{h/2 - y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (i)$$

$$\text{Thay vào (7.11)} \Rightarrow \tau_{zy} = \frac{Q_y}{2J_x} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (7.12)$$

Hệ thức này chứng tỏ ứng suất tiếp trong dầm tiết diện chữ nhật biến thiên theo quy luật bậc hai theo khoảng cách y từ trục trung hòa và biểu đồ theo chiều cao của dầm có dạng như trên H.7.18c.

$\tau_{zy} = 0$ khi $y = \pm h/2$ (các điểm ở biên trên, dưới của mặt cắt)

$\tau_{zy} = \tau_{\max}$ khi $y = 0$ (các điểm trên trục trung hòa):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y h^2}{8J_x} = \frac{3 Q_y}{2 F} \quad (7.13)$$

trong đó: $F = bh$ - là diện tích của mặt cắt ngang.

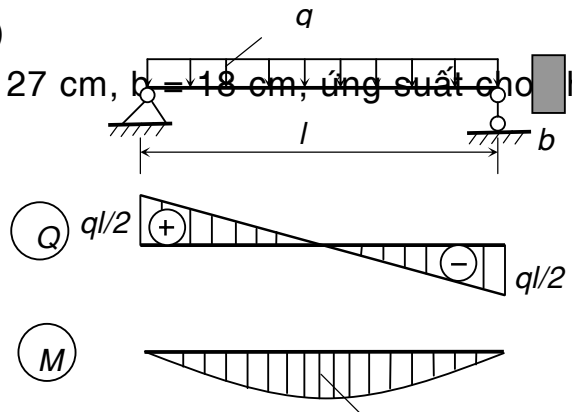
Thí dụ 7.4 Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp cực đại trên dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật $b \times h$ (H. 7.19)

Cho biết: $q = 12 \text{ kN/m}$, $l = 4 \text{ m}$; $h = 27 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$; ứng suất cho phép $[\sigma] = 1,1 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 0,22 \text{ kN/cm}^2$.

Giải.

Mômen cực đại ở giữa dầm:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{12 \times 4 \times 4 \times 10^2}{8} = 2400 \text{ kNcm}$$



Lực cắt cực đại ở hai gối tựa:

$$Q_{\max} = \frac{ql}{2} = \frac{12 \times 4}{2} = 24 \text{ kN}$$

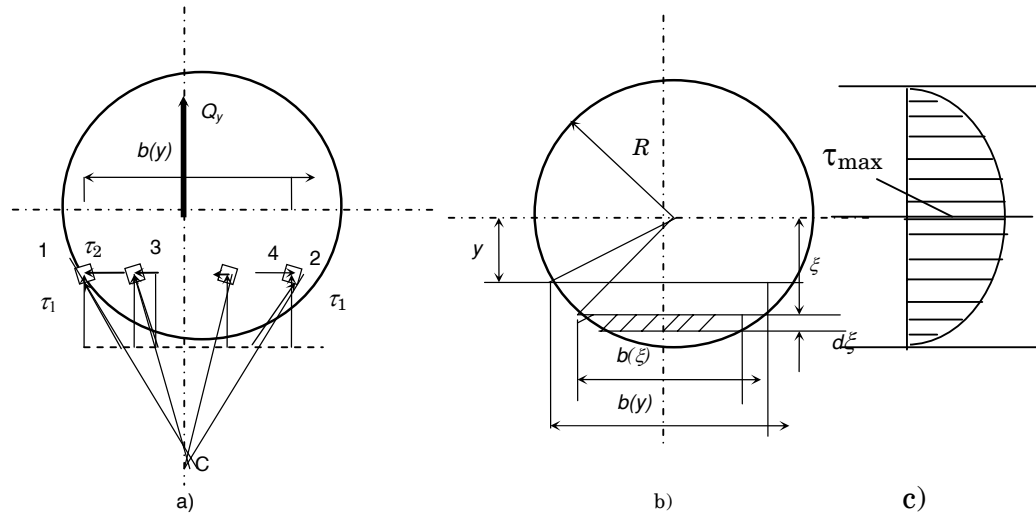
Ứng suất cực đại:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{2400 \times 6}{18 \times 27^2} = 1,095 \text{ kN/cm}^2 < 1,1 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_{\max}}{2bh} = \frac{3 \times 24}{2 \times 18 \times 27} = 0,075 \text{ kN/cm}^2 < 0,22 \text{ kN/cm}^2$$

H.7.19

+ Mặt cắt ngang hình tròn và hình vành khăn (H.7.20)



H.7.20. Ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang hình tròn

Khi dầm có mặt cắt ngang là hình tròn, ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang không còn song song với lực cắt nữa. Nếu không có lực tác dụng trên mặt ngoài của dầm, ứng suất tiếp trên hai diện tích vi phân tại các điểm 1 và 2 trên vùng sát chu vi của mặt cắt ngang phải hướng theo phương tiếp tuyến với chu vi này (H.7.20a).

Các tiếp tuyến này có phương đồng quy tại điểm C trên phương tác dụng của lực cắt. Bởi vì lực cắt Q_y là hợp của các ứng suất tiếp (H.7.20), nên các ứng suất tiếp tại các diện tích vi phân tại 3 và 4 có cùng khoảng cách y tới trục trung hòa sẽ có phương đi ngang điểm C.

Mỗi ứng suất tiếp này có thể phân thành hai thành phần: thành phần thẳng đứng τ_1 , và nằm ngang τ_2 . Các thành phần nằm ngang tác dụng trên hai phần trái và phải sẽ tự cân bằng nhau do tính đối xứng, trong khi các thành phần thẳng đứng hợp lại thành lực cắt Q_y .

Như vậy, trong dầm có mặt cắt ngang tròn, thành phần τ_1 sẽ đóng vai trò của τ trong dầm có mặt cắt ngang hình chữ nhật.

Mômen tĩnh của phần diện tích giới hạn bởi biên dưới mặt cắt ngang và mặt cắt song song với mặt trung hòa ở khoảng cách y từ trục trung hòa x cho bởi:

$$S_x^c = \int_{F_c} \xi dF = \int_{F_c} \xi b(\xi) d\xi \quad (j)$$

ta có: $b^c = b(\xi) = 2\sqrt{R^2 - y^2}$ (k)

trong đó: R - là bán kính của hình tròn mặt cắt ngang.

Do vậy: $S_x^c = \int_y^r 2\sqrt{R^2 - y^2} \xi d\xi = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2}$ (l)

và thành phần ứng suất tiếp theo phương thẳng đứng có trị số:

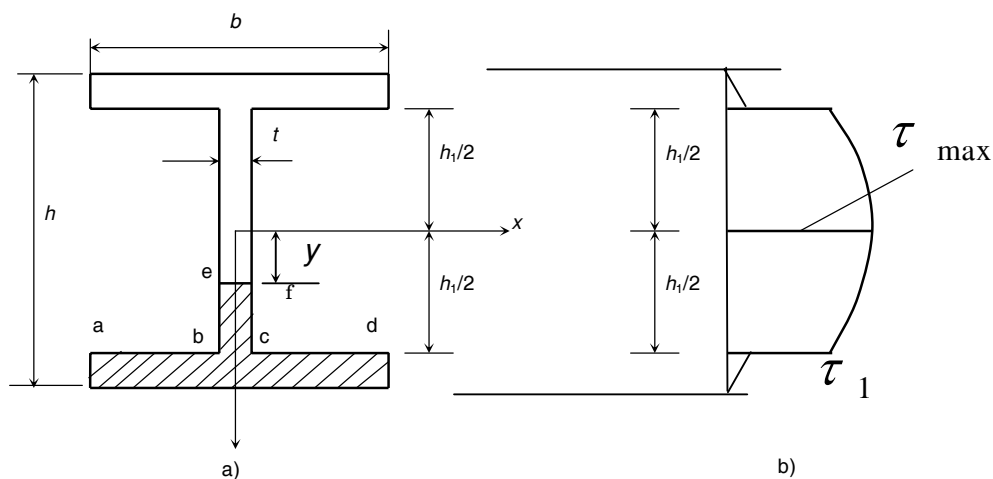
$$\tau_{zy} = \frac{4 Q_y}{3 F} \left(1 - \frac{y^2}{R^2} \right) \quad (7.14)$$

$\tau_{zy} = 0$ khi $y = \pm h/2$ (các điểm ở biên trên, dưới của mặt cắt)

$\tau_{zy} = \tau_{\max}$ khi $y = 0$ (các điểm trên trục trung hòa):

$$\tau_{\max} = \frac{4 Q_y}{3 F} \quad , (F: \text{diện tích hình tròn}) \quad (7.15)$$

+ Mặt cắt ngang hình chữ I, hay chữ T



H.7.17. Ứng suất tiếp trong lòng của dầm chữ I

Các mặt cắt ngang chữ **I** hay chữ **T** được xem như cấu tạo bởi các hình chữ nhật ghép nên với mức độ chính xác nhất định, các công thức dùng cho dầm mặt cắt ngang chữ nhật cũng dùng được cho các loại mặt cắt này. Ứng suất tiếp được tính bằng công thức Zhuravski : $\tau = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b^c}$

◆ **τ_{zy} trong bản bụng:** Xét điểm có tung độ y (H.7.21a)

b^c chính là bề rộng bản bụng: $b^c = d$

S_x^c là mômen tĩnh của phần diện tích gạch chéo dưới mức ef đối với trục trung hòa x . S_x^c có thể tính bằng mômen tĩnh của nửa hình I (trong bảng ghi là S_x) trừ mômen tĩnh của phần diện tích ($y \times d$)

$$S_x^c = S_x - (d \times y \times \frac{y}{2}) \quad (o)$$

⇒ Ứng suất tiếp τ_{zy} trong bản bụng của dầm chữ I là

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{J_x d} \left[S_x - (d \times \frac{y^2}{2}) \right] \quad (p)$$

(p) chỉ rằng ứng suất tiếp trong bản bụng của dầm chữ **I** biến thiên theo quy luật parabol dọc theo chiều cao của dầm.

$\tau_{zy} = \tau_{\max}$ khi $y = 0$ (các điểm trên trục trung hòa):

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y}{J_x d} S_x \quad (7.17)$$

$\tau_{zy} = \tau_1$ khi $y = \frac{h}{2} - t = h_1$ (điểm tiếp giáp giữa bụng và cánh). τ_1 khá lớn

và:
$$\tau_1 = \frac{Q_y}{J_x d} \left(S_x - d \times \frac{h_1^2}{2} \right) \quad (7.18)$$

◆ **τ_{zy} trong bản cánh:** Xét một điểm trong bản cánh, bề rộng cắt $b^c = b$ khá lớn so với d , nên τ_{zy} trong cánh bé, có thể bỏ qua (H.7.21)

◆ **τ_{zx} trong bản cánh:** Xét một điểm trong cánh (H7.21), $b^c = t$

$$S_x^c = t \times \left(\frac{b}{2} - x \right) \times \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \tau_{zx} = \frac{Q_y \times \left(\frac{b}{2} - x \right) \times \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)}{J_x} \quad (7.19)$$

Ứng suất tiếp τ_{zx} phân bố bậc nhất theo x , biểu đồ phân bố như H.7.21

Thí dụ 7.5 Tính ứng suất tiếp ở các điểm trên trục trung hoà trong thân của dầm chữ **T** có mặt cắt ngang như trên H.7.22 . Cho $b = 8 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $h = 16 \text{ cm}$, $h_1 = 14 \text{ cm}$, và $Q = 20 \text{ kN}$.

Giải

Khoảng cách c tới trọng tâm của mặt cắt ngang được xác định bởi:

$$c = \frac{8 \times 2 \times 1 + 14 \times 2 \times 9}{8 \times 2 + 14 \times 2} = 6,09 \text{ cm}$$

Mômen quán tính J_x của mặt cắt ngang:

$$J_x = \frac{8 \times 2^3}{12} + 8 \times 2 \times (6,09 - 1)^2 + \frac{2 \times 14^3}{12} + 14 \times 2 \times (9 - 6,09)^2 = 1144,3 \text{ cm}^4$$

+ Ứng suất tiếp ở các điểm trên trục trung hoà:

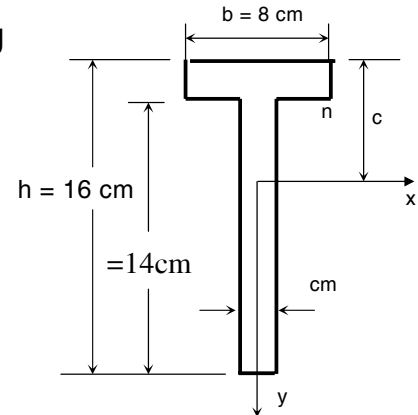
$$b_c = 2 \text{ cm}$$

Mômen tĩnh của phần diện tích dưới trục trung hoà đối với trục này là:

$$S_x^c = \frac{2 \times (16 - 6,09)^2}{2} = 98,208 \text{ cm}^3 \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{20 \times 98,208}{1144,3 \times 2} = 0,858 \text{ kN/cm}^2$$

+ Ứng suất tiếp ở các điểm tiếp giáp cánh và bụng : $b_c = 2 \text{ cm}$

$$S_x^c = 2 \times 8 \times (6,09 - 1) = 81,44 \text{ cm}^3 \Rightarrow \tau_1 = \frac{20 \times 81,44}{1144,3 \times 2} = 0,712 \text{ kN/cm}^2$$



H.7.22

7.4 KIỂM TRA BỀN DẦM CHỊU UỐN NGANG PHẪNG

Trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn ngang phẳng có 2 ứng suất:

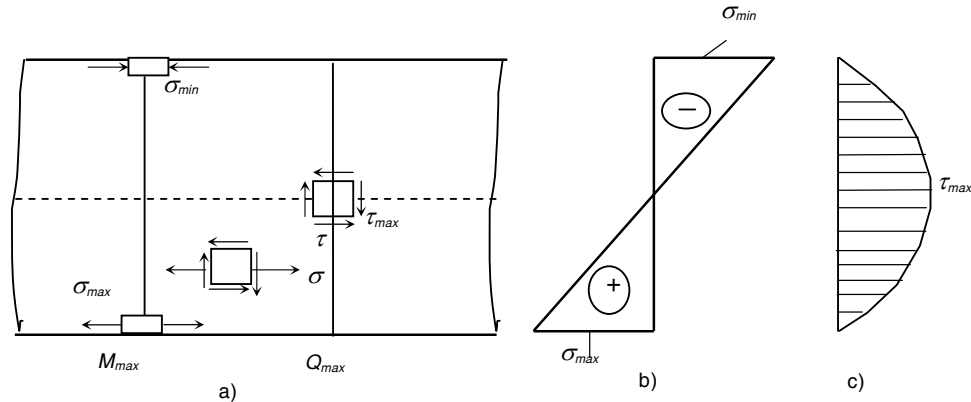
- Ứng suất pháp σ_z do mômen uốn M_x gây ra.
- Ứng suất tiếp τ_{zy} do lực cắt Q_y gây ra.

Biểu đồ phân bố ứng suất pháp và ứng suất tiếp theo chiều cao của mặt cắt ngang hình chữ nhật (H.7.23b,c), ta thấy có ba loại phân bố ở trạng thái ứng suất khác nhau (H.7.23a):

- Những điểm ở biên trên và dưới $\tau = 0$, chỉ có $\sigma_z \neq 0$ nên trạng thái ứng suất của các phân bố ở những điểm này là **trạng thái ứng suất đơn**

- Những điểm nằm trên trục trung hoà $\sigma_a = 0$, chỉ có τ_{\max} nên trạng thái ứng suất của những phân bố ở những điểm này là **trượt thuần túy**.

- Các điểm khác, $\sigma_z \neq 0$ và $\tau_{zy} \neq 0$, nên chúng ở **trạng thái ứng suất phẳng đặt biệt**.



H. 7.23 a) Các phân tố ở trạng thái ứng suất khác nhau
b) Sự phân bố ứng suất pháp; c) Sự phân bố ứng suất tiếp

⇒ Khi kiểm tra bền toàn dầm, phải bảo đảm mọi phân tố đều thỏa điều kiện bền. (đủ 3 điều kiện bền)

a) Phân tố ở trạng thái ứng suất đơn (những điểm ở trên biên trên và dưới của dầm), xét tại mặt cắt có $|M|_{\max}$ và sử dụng thuyết bền ứng suất pháp lớn nhất ta có:

+ Dầm làm bằng vật liệu dẻo, $[\sigma_k] = [\sigma_n] = [\sigma]$, điều kiện bền:

$$\max|\sigma| \leq [\sigma] \quad (7.20)$$

+ Dầm làm bằng vật liệu giòn, $[\sigma_k] \neq [\sigma_n]$, điều kiện bền :

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &\leq [\sigma_k] \\ |\sigma_{\min}| &\leq [\sigma_n] \end{aligned} \quad (7.21)$$

b) Phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy (những điểm nằm trên trục trung hòa), xét tại mặt cắt có $|Q_y|_{\max}$ ta có $\tau_{\max} = \frac{|Q_y^{\max}| \cdot S_x}{J_x \cdot b^c} \leq [\tau]$

+ Dầm bằng vật liệu dẻo:

Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (TB 3): $\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$ (7.22)

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng (TB 4):

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad (7.23)$$

+ Dầm bằng vật liệu dòn: sử dụng thuyết bền Mohr (TB 5):

$$\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{1+m} \quad (7.24)$$

trong đó: $m = \frac{[\sigma_k]}{[\sigma_n]}$ (7.25)

c) Phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt:

-Xét tại mặt cắt có mômen uốn M_x và lực cắt Q_y cùng lớn, (có thể nhiều mặt cắt).

-Chọn điểm nguy hiểm trên mặt cắt để có σ_z và τ_{zy} tương đối lớn (chỉ cần kiểm tra tại những nơi nguy hiểm như nơi tiếp giáp giữa lòng và đế của mặt cắt chữ I, chữ C...) chỗ thay đổi tiết diện. Các ứng suất của phân tố này được tính bởi các công thức quen thuộc:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad \text{và} \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x b^c}$$

-Tính ứng suất chính của phân tố. $\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$

Điều kiện bền (chương 5):

+ Dầm làm bằng vật liệu dẻo:

Theo TB 3: (7.26) $\sigma_{t3} = |\sigma_1 - \sigma_3| = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma]$

Theo TB 4: $\sigma_{t4} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{zy}^2} \leq [\sigma]$ (7.27)

+ Dầm làm bằng vật liệu dòn: Dùng TB 5

$$\sigma_{t5} = \frac{1-m}{2} \sigma_z + \frac{1+m}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} \leq [\sigma] \quad (7.28)$$

Từ đây cũng có **ba bài toán cơ bản**:

Bài toán cơ bản 1: Kiểm tra bền

Bài toán cơ bản 2: Chọn kích thước mặt cắt ngang

Dựa vào điều kiện bền của phân tố ở **trạng thái ứng suất đơn** để chọn sơ bộ kích thước mặt cắt ngang dầm. Sau đó, tiến hành kiểm tra bền đối với các phân tố ở trạng thái ứng suất khác. Nếu không đạt thì thay đổi kích thước mặt cắt ngang.

Bài toán cơ bản 3: Định tải trọng cho phép.

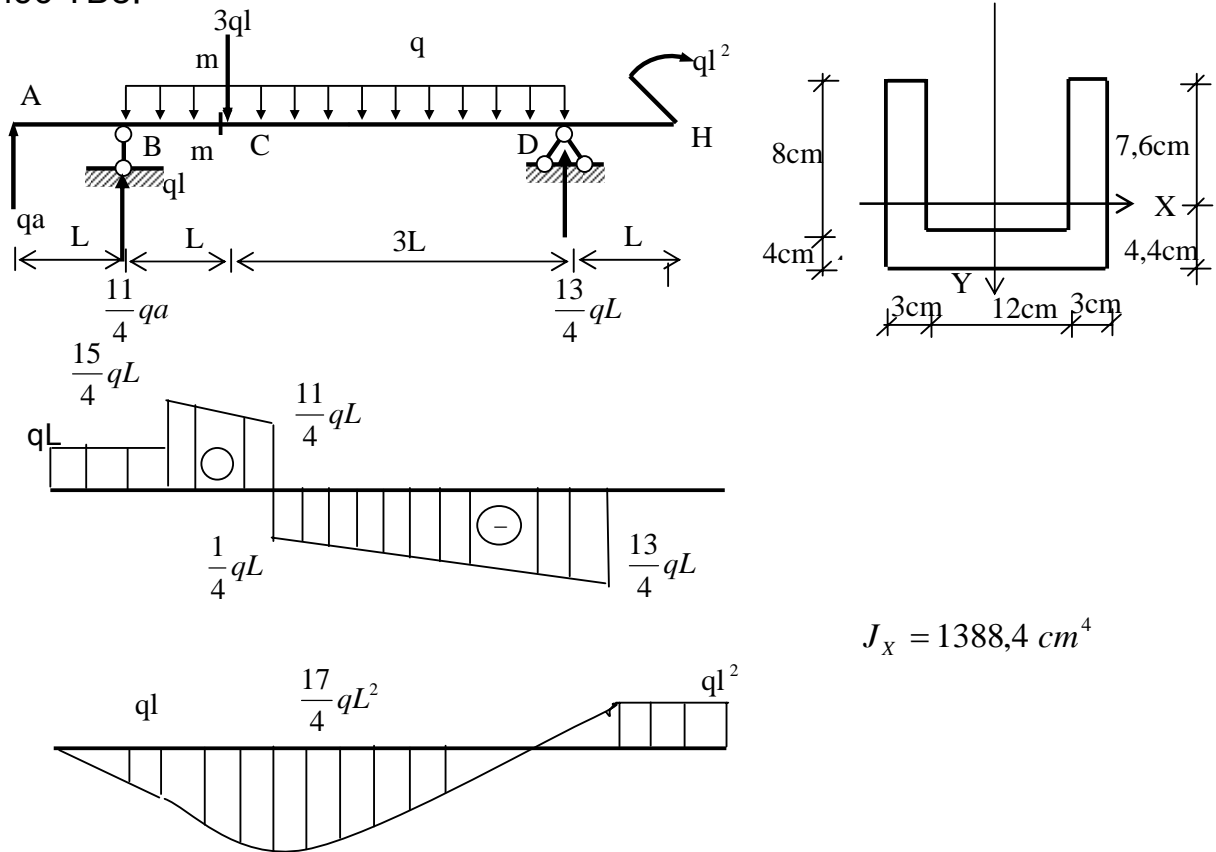
Từ điều kiện bền của phân tố ở **trạng thái ứng suất đơn**, xác định sơ bộ tải trọng cho phép sau đó tiến hành kiểm tra bền các phân tố còn lại

Thí dụ 7.9 Cho dầm có mặt cắt ngang và chịu lực như hình vẽ.

1/ Vẽ biểu đồ M_x và Q_y .

2/ Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp lớn nhất tại mặt cắt m-m (bên trái c).

3/ Tính ứng suất chính tại điểm K (mặt cắt tiếp giáp lòng và đế) mặt m-m, Theo TB3.



Tại mặt cắt m-m có nội lực : $M_x = \frac{17}{4} qa^2 = \frac{17}{4} \times 10 \times 1 \times 1 = 42,5 kN - m$

$$Q_y = \frac{11}{4} qL = \frac{11}{4} \times 10 \times 1 = 27,5 kN$$

$$y_{\max}^k = 4,4 \text{ cm}, y_{\max}^n = 7,6 \text{ cm}$$

$$\sigma_{m-m}^{\max} = \left| \frac{M_x}{J_x} \right| y_{\max}^k = \frac{4250}{1388,4} \times 4,4 = 13,47 kN / cm^2$$

$$\sigma_{m-m}^{\min} = -\left|\frac{M_x}{J_x}\right| y_{\max}^n = -\frac{4250}{1388,4} \times 7,6 = -23,26 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{m-m}^{\max} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x b^c} = 0,572 \text{ kN/cm}^2 \quad , \quad \text{với} \quad S_x^c = \left(2(3 \times 7,6 \times \frac{7,6}{2})\right) = 173,28 \text{ cm}^3$$

Tính ứng suất chính tại K.

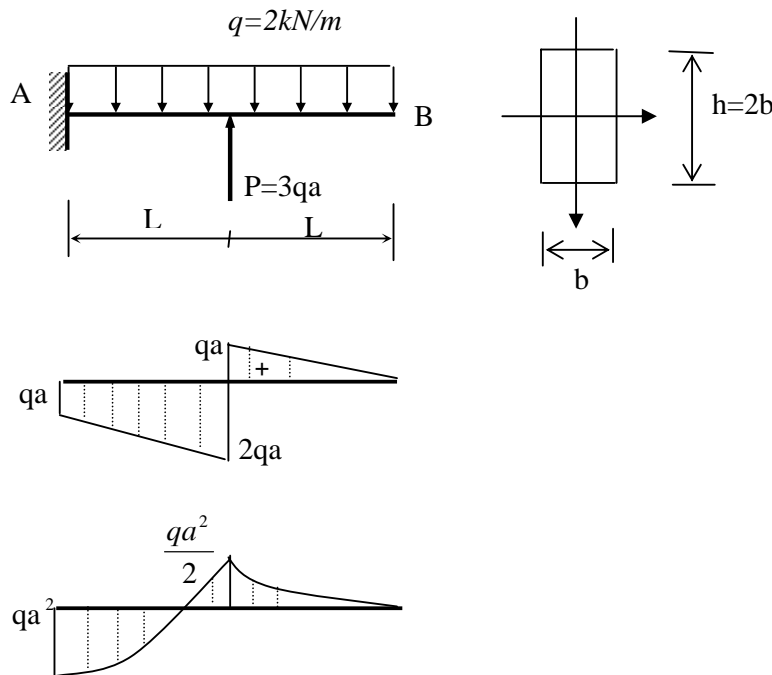
$$\tau_k = \frac{27,5 \times 158,4}{1388,4 \times 18} = 0,174 \text{ cm}^2, \quad S_x^c(18 \times 4 \times 2,2 \text{ cm}^3) = 158,4 \text{ cm}^3$$

$$\sigma_z^k = \frac{4250}{1388,4} \times (4,4 - 4) = 1,22 \text{ kN/cm}^2$$

Theo thuyết bền 3:

$$\sigma_{i3} = \sqrt{\sigma_K^2 + 4\tau_K^2} = \sqrt{(1,22)^2 + 4(0,174)^2} = 2,22 \text{ kN/cm}^2$$

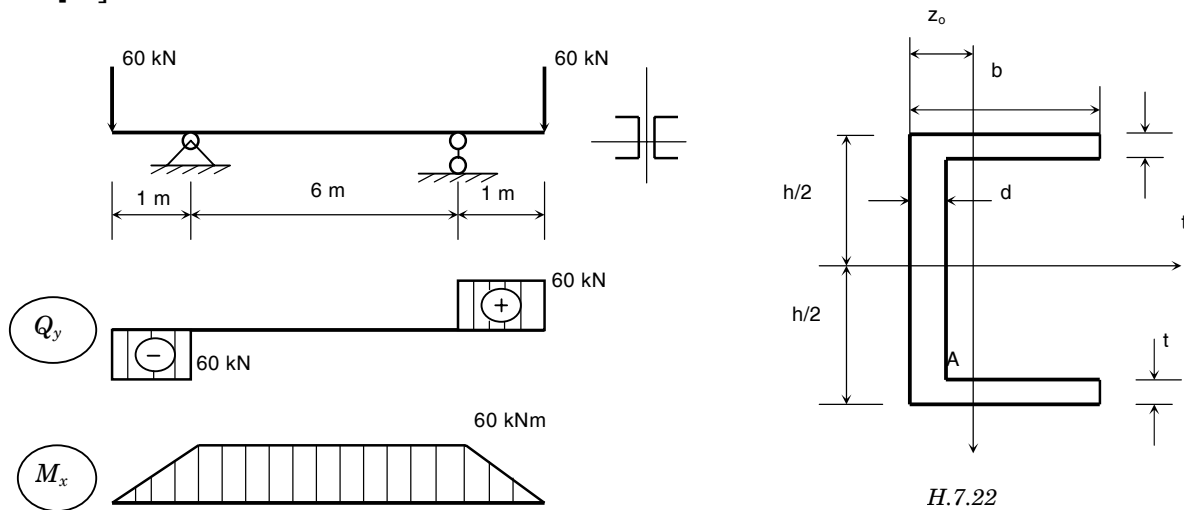
Thí dụ 7.6 Xác định kích thước mặt cắt ngang hình chữ nhật , cho $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$, $L=1\text{m}$, $h=2b$. Tính τ_{\max}



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x,\max}}{W} = \frac{qa^2 \times 6}{b \times h^2} = \frac{2 \times 1 \times 100 \times 6}{b \times (2b)^2} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad b=7\text{cm}, h=14\text{cm}$$

$$\tau_{\max} = 1,5 \frac{Q_y}{F} = \frac{1,5 \times 2qa}{7 \times 14} = \frac{1,5 \times 2 \times 2 \times 1}{98} = 0,06 \text{ kN/cm}^2$$

Thí dụ 7.7 Xác định số hiệu mặt cắt ngang theo yêu cầu độ bền, nếu $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.



H.7.21

H.7.22

Giải.

Mô men uốn cực đại và lực cắt cực đại xảy ra tại cùng một mặt cắt dưới tác dụng của tải trọng:

$$M_{\max} = 60 \text{ kNm}; \quad Q_{\max} = 60 \text{ kN}$$

Mô men chống uốn cần thiết là:

$$W_x = \frac{M_{x,\max}}{[\sigma]} = \frac{6000}{16} = 375 \text{ cm}^3$$

Tra bảng thép hình mặt cắt [□OCT 8240-56 ta chọn 2[22 với:

một [22 có $d = 5,3 \text{ mm}$, $F = 26,7 \text{ cm}^2$; $W_x = 193 \text{ cm}^2$; $S_x = 111 \text{ cm}^3$;

$J_x = 2120 \text{ cm}^4$; $h = 22 \text{ cm}$; $t = 0,96 \text{ cm}$; $b = 8,2 \text{ cm}$.

Kiểm tra bền thép hình mới chọn:

* Phân tố ở trạng thái ứng suất đơn: đương nhiên thỏa

* Phân tố ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy: tại mặt cắt có:

$$Q_{y,\max} = 60 \text{ kN}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_x^c}{I_x b^c} \quad \text{với} \quad \begin{cases} S_x^c = 2S_x = 2 \times 111 \text{ cm}^3 \\ J_x = 2 \times 2120 \text{ cm}^4 \\ b^c = 2d = 2 \times 0,53 \text{ cm} \\ Q_y = 60 \text{ kN} \end{cases}$$

Suy ra: $\tau_{\max} = \frac{60 \times 2 \times 111}{2 \times 2120 \times 2 \times 0,53} = 2,96 \text{ kN/cm}^2$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ kN/cm}^2 > \tau_{\max}$$

vậy phân tố này thỏa điều kiện bền.

* Phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt: đó là phân tố ở nơi tiếp giáp giữa lòng và đế tại mặt cắt này có:

$$|M_{x,\max}| = 60 \text{ kNm} \quad \text{và} \quad |Q_{y,\max}| = 60 \text{ kN}$$

$$|\sigma_x^A| = \frac{6000}{2 \times 2120} \times (11 - 0,96) = 14,21 \text{ kN/cm}^2$$

$$S_x^c = 2 \times 8,2 \times 0,96 \times \left(11 - \frac{0,96}{2}\right) = 165,626 \text{ cm}^3$$

$$|\tau_A| = \frac{60 \times 165,626}{2 \times 2120 \times 2 \times 0,53} = 2,21 \text{ kN/cm}^2$$

Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

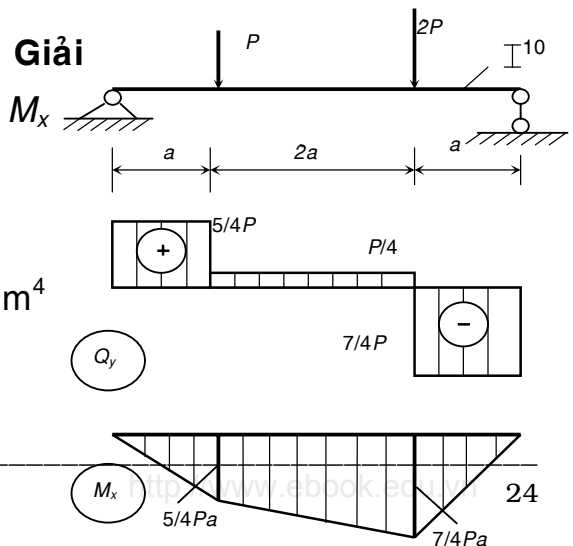
$$\sigma_{i3} = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} = \sqrt{(14,21)^2 + 4(2,21)^2} = 14,38 \text{ kN/cm}^2$$

vậy phân tố này thỏa điều kiện bền.

Kết luận: Chọn 2 [22.

Thí dụ 7.8 Xác định tải trọng cho phép $[P]$ của dầm cho trên H.7.25.

Cho: $a = 80 \text{ cm}$, $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$



◆ Biểu đồ lực cắt Q_y và mômen uốn M_x (H.7.25). Mặt cắt nguy hiểm có:

$$M_x = \frac{7}{4} Pa \quad \text{và} \quad Q_y = \frac{7}{4} P$$

Mặt cắt I 10 có: $h = 10 \text{ cm}$; $J_x = 198 \text{ cm}^4$

$$W_x = 39,7 \text{ cm}^3$$
; $S_x = 23 \text{ cm}^3$,

$$d = 0,45 \text{ cm}; t = 0,72 \text{ cm}; b = 5,5 \text{ cm}$$

◆ Từ điều kiện bền của phân tố ở

TTÚS đơn nguy hiểm ta có:

$$\frac{7Pa}{4W_x} \leq [\sigma] \Rightarrow P \leq \frac{4[\sigma]W_x}{7a} = \frac{4}{7} \times \frac{16 \times 39,7}{80} = 4,537 \text{ kN}$$

Ta chọn $[P] = 4,53 \text{ kN}$.

◆ Với trị số của P đã chọn, ta kiểm tra bền các phân tố còn lại ở TTÚS trượt thuần túy và TTÚS phẳng đặc biệt.

++ Phân tố ở TTÚS trượt thuần túy ; ở trục trung hòa của mặt cắt có:

$$|Q_y| = \frac{7}{4}P = \frac{7}{4} \times 4,53 = 7,923 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \frac{7}{4} \times \frac{4,53 \times 23}{198 \times 0,45} = 2,046 \text{ kN/cm}^2 < [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = 8 \text{ kN/cm}^2$$

⇒ phân tố này thỏa điều kiện bền.

++ Phân tố ở TTÚS phẳng đặc biệt; ở nơi tiếp giáp giữa lòng và đế tại mặt cắt có:

$$M_x = \frac{7}{4}Pa = \frac{7}{4} \times 4,53 \times 0,8 = 6,342 \text{ kNm} \text{ và } Q_y = \frac{7}{4}P = 7,923 \text{ kN}$$

$$S_x^c = 5,5 \times 0,72 \times \frac{(10 - 0,72)}{2} = 18,37 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{zy} = \frac{7}{4} \times \frac{4,53 \times 18,37}{198 \times 0,45} = 1,634 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_z = \frac{634,2}{198} \times \left(\frac{10}{2} - 0,72 \right) = 13,71 \text{ kN/cm}^2$$

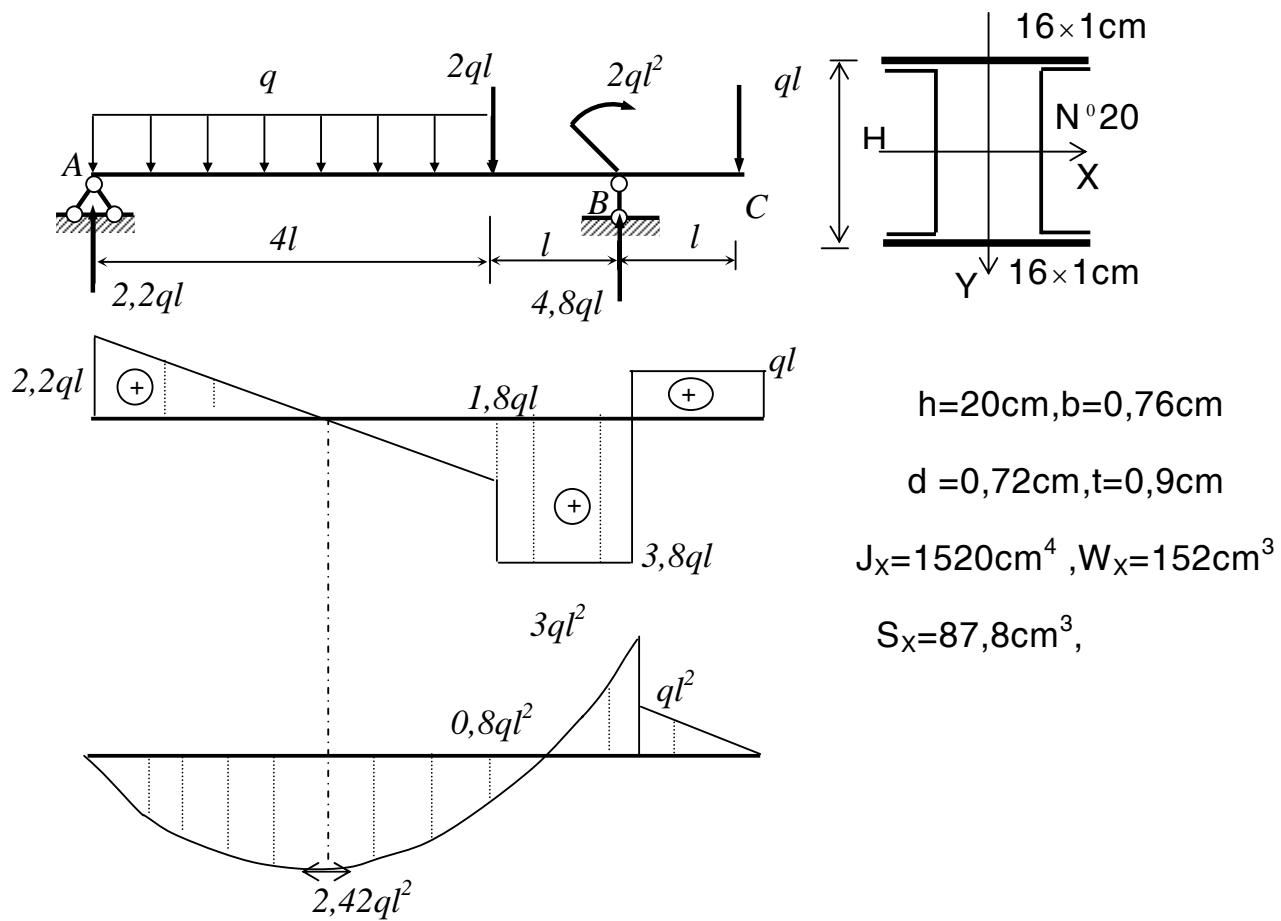
Theo thuyết bền ứng suất tiếp cực đại:

$$\begin{aligned} \sigma_{t3} &= \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2} = \sqrt{(13,71)^2 + 4 \times (1,634)^2} \\ &= 14,09 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

◆ **Kết luận:** Tải trọng cho phép $[P] = 4,53 \text{ kN}$

Thí dụ. 7.10: Cho dầm ABC chịu lực như hình vẽ .

Định $[q]$ cho $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$. $[\tau] = 9 \text{ kN/cm}^2$



Tính: $J_x = 2\left(\frac{16 \times 13^3}{12} + (10,5)^2 \times 16 \times 1\right) + 2J_x = 6570 \text{ cm}^4$

$$\text{Max}|\sigma_z| = \frac{|M_x^{\text{max}}|}{W_x} \leq [\sigma], \text{ với } W_x = \frac{J_x}{\frac{H}{2}} = \frac{6570}{11} = 597,3\text{cm}^3$$

$$\Rightarrow [q] \leq \frac{[\sigma] \times W_x}{3l^2} = \frac{16 \times 597,3}{3(1,5)^2} = 14,2 \text{ kN/m} , \text{ với } |M_x^{\max}| = 3ql^2$$

Kiểm tra lại ứng suất tiếp với q vừa tìm.

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x b^c} = 4,07 \text{ kN/cm}^2 \leq [\tau], \text{ với}$$

$$S_x^c = 2S_x + (16 \times 1 \times 10,5) \text{ cm}^3$$

$$J_x = 6570 \text{ cm}^4, l = 1,5 \text{ m}$$

$$b^c = 2d = 2 \times 0,52 \text{ cm}$$

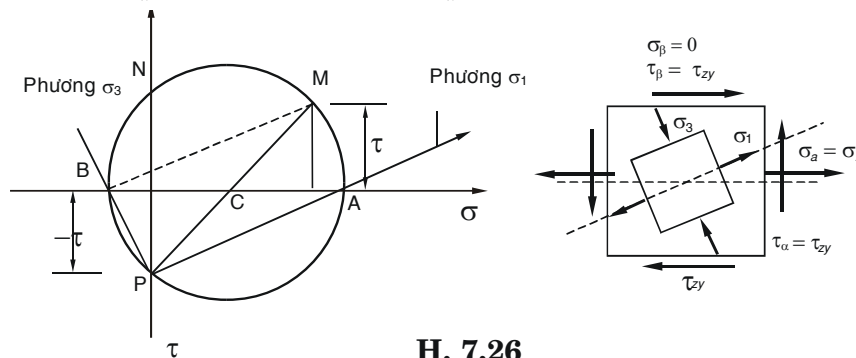
$$Q_y = 3,8ql = 3,8 \times 14,2 \times 1,5 = 80,94 \text{ kN}$$

7.5 QUĨ ĐẠO ỨNG SUẤT CHÍNH

Trong phần bên trên chúng ta chỉ mới xác định trị số của ứng suất chính đối với một phân tố bất kỳ mà chưa đề cập đến phương của chúng. Những kết quả đạt được khá tốt đối với vật liệu có ứng suất cho phép khi kéo và khi nén là như nhau. Tuy nhiên, đối với các vật liệu như bê tông cốt thép, việc xác định phương của ứng suất chính tại mọi điểm rất cần thiết, để từ đó có thể đặt cốt thép gia cường theo các phương này.

Ta có thể xác định phương của ứng suất chính thông qua vòng tròn Mohr. Giả sử σ_α và τ_α là các thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt phẳng vuông góc với trục dầm và có trị số dương:

$$\sigma_\alpha = +\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y \quad \text{và} \quad \tau_\alpha = +\tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^c}{J_x b^c}$$



H. 7.26

Sau khi vẽ vòng tròn Mohr ứng suất chúng ta nhận thấy phương chính là phương nối từ điểm cực P(0, + τ_{zy}) với hai điểm A và B ở hai đầu đường kính của vòng tròn Mohr: PA chỉ phương ứng suất chính σ_1 , còn PB chỉ phương ứng suất chính σ_3 .

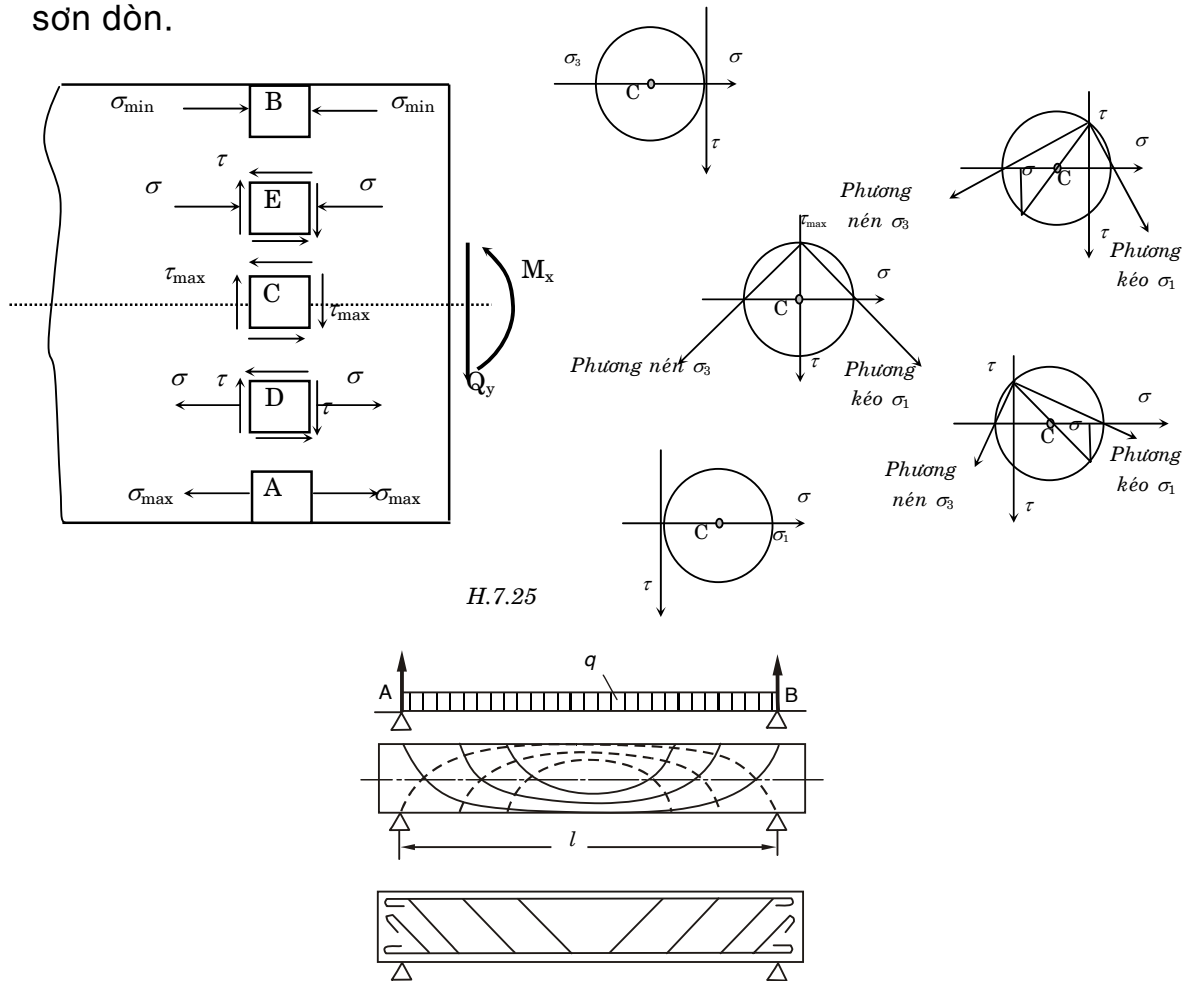
H.7.26 cho thấy, các vòng tròn Mohr ứng suất và các phương chính tại nhiều điểm khác nhau trên mặt cắt ngang. Ta giả sử rằng mômen uốn và lực cắt tại một mặt cắt mang dấu dương. Ứng suất chính thay đổi với biên mặt cắt ngang. Gần những biên, một trong các ứng suất chính bằng không, trong khi ứng suất chính kia có phương song song với trục dầm; còn ở trục trung hoà, các ứng suất chính có phương hợp với trục dầm một góc 45° .

Bằng phương pháp tương tự, ta có thể xác định được phương của ứng suất chính ở nhiều điểm trên dầm (H.7.27) Ta vẽ các đường cong có tiếp tuyến

là phương của ứng suất chính và gọi các đường đó là quỹ đạo ứng suất chính của dầm chịu uốn. Các quỹ đạo này hợp thành hai họ đường cong vuông góc nhau, một họ là quỹ đạo ứng suất kéo và một họ là quỹ đạo ứng suất nén. Các phương của ứng suất chính tùy thuộc vào loại tải trọng và điều kiện biên của dầm.

Trên H.7.28, quỹ đạo ứng suất kéo được biểu diễn bằng đường nét đậm còn quỹ đạo ứng suất nén biểu diễn bằng đường nét đứt.

Người ta thường dùng các phương pháp thực nghiệm để xác định quỹ đạo ứng suất chính như phương pháp quang đàn hồi, phương pháp dùng sơn dòn.



H.7.25

H. 7.28. Quỹ đạo ứng suất chính của dầm tựa đơn chịu tải phân bố đều

7.6 THỂ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI CỦA DẦM CHỊU UỐN PHẪNG

Trong chương TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT, ta đã có công thức tính thế năng riêng biến dạng đàn hồi của một phân tử là:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (7.29)$$

Trường hợp dầm chịu uốn ngang phẳng, trạng thái ứng suất của phân tử là phẳng nên một thành phần ứng suất chính bằng không, σ_2 chẳng hạn, khi đó biểu thức của thế năng riêng biến dạng đàn hồi có dạng:

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3] \quad (7.30)$$

trong đó: σ_1 và σ_3 là các ứng suất chính được suy từ σ_z và τ_{zy} theo công thức:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} \quad (7.31)$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2} \quad (7.32)$$

thay vào (7.30) \Rightarrow

$$u = \frac{1}{2E} \left\{ 2\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + 2\left[\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zy}^2\right] - 2\mu\left[\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 - \tau_{zy}^2\right] \right\}$$

rút gọn ta được:

$$u = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{zy}^2}{2} \cdot \frac{2(1+\mu)}{E} \quad (7.33)$$

Ngoài ra, giữa các hằng số của vật liệu E , G , μ tồn tại hệ thức sau:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (7.34)$$

thay vào (7.33) và rút gọn, cuối cùng ta được:

$$u = \frac{\sigma_z^2}{2E} + \frac{\tau_{zy}^2}{2G} \quad (7.35)$$

thay biểu thức của σ_z và τ_{zy} bằng (7.2) và (7.11) ta được:

$$u = \frac{M_x^2}{2EJ_x^2} y^2 + \frac{Q_y^2 (S_x^c)^2}{2GJ_x^2 (b^c)^2} \quad (7.36)$$

Thế năng biến dạng đàn hồi trong một đoạn thanh dz là:

$$dU = \int u dz \cdot dF = dz \int_F u dF = dz \left[\int_F \left(\frac{M_x^2}{2EJ_x^2} y^2 + \frac{Q_y^2 \cdot (S_x^c)^2}{2GJ_x^2 (b^c)^2} \right) dF \right] \quad (a)$$

với: $\int_F y^2 dF = J_x$ và nếu ta ký hiệu:

$$\frac{F}{J_x^2} \int_F \frac{(S_x^c)^2}{(b^c)^2} dF = \eta \quad (b)$$

ta được: $dU = \frac{M_x^2}{2EJ_x} dz + \eta \frac{Q_y^2}{2GF} dz$ (c)

Do đó, thế năng biến dạng đàn hồi trong cả thanh với chiều dài L là:

$$U = \int_0^L \frac{M_x^2}{2EJ_x} dz + \int_0^L \eta \frac{Q_y^2}{2GF} dz \quad (7.37)$$

Với thanh có độ cứng thay đổi từng đoạn hay luật biến thiên của M_x và Q_y thay đổi từng đoạn thanh, công thức trên có thể rút gọn lại:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \frac{M_x^2}{2EJ_x} dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{L_i} \eta \frac{Q_y^2}{2GF} dz \quad (7.38)$$

trong đó: L_i - chiều dài mỗi đoạn thanh, n - số đoạn thanh

η - hệ số điều chỉnh sự phân bố không đều của ứng suất tiếp.

Bằng cách áp dụng công thức tính η ta có thể tính được hệ số này đối với một số tiết diện thông thường

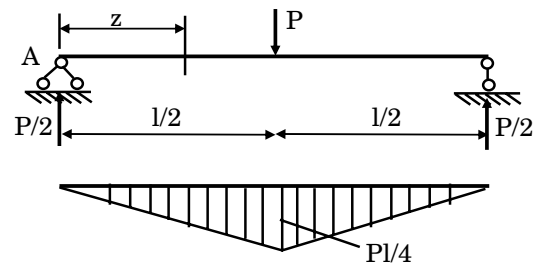
- Mặt cắt ngang hình chữ nhật: $\eta = 1,2$
- Mặt cắt ngang hình tròn: $\eta = 10/9$
- Mặt cắt ngang chữ I: $\eta = F / F_{lồng}$

trong đó: F - là diện tích toàn bộ mặt cắt.

$F_{lồng}$ là diện tích phần lòng (phần bản bụng) của chữ I.

7.7 DẦM CHỐNG UỐN ĐỀU

Trong trường hợp dầm có mặt cắt ngang không đổi, ta đã chọn kích thước của theo mặt cắt có mô men uốn lớn nhất. Cách sử dụng vật liệu như vậy chưa hợp lý vì khi ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên mặt cắt có mô men uốn



H. 7.29

lớn nhất đạt đến trị số ứng suất cho phép thì ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên các mặt cắt khác còn nhỏ hơn rất nhiều so với ứng suất cho phép. Như vậy ta chưa sử dụng hết khả năng chịu lực của vật liệu ở các mặt cắt khác. Để tiết kiệm được vật liệu ta phải tìm hình dáng hợp lý của dầm sao cho ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên mọi mặt cắt ngang đều cùng đạt đến giá trị ứng suất cho phép. Dầm có hình dáng như vậy gọi là **dầm chống uốn đều**.

Ta xét vài thí dụ cụ thể sau đây.

Giả sử, ta có dầm chịu lực như trên hình vẽ (H.7.29), mô men uốn M_x và lực cắt Q_y trên mặt cắt 1-1 nào đó cách gối tựa A bên trái một khoảng cách có trị số là:

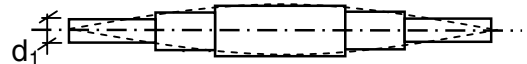
$$\begin{cases} M_x = \frac{P}{2} z \\ Q_y = \frac{P}{2} \end{cases}$$

Giả thiết mặt cắt ngang có hình dáng là một hình tròn. Như vậy trị số ứng suất pháp lớn nhất trên mặt cắt được tính với công thức:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{P \cdot z}{0,1d^3}$$

Với điều kiện ứng suất cực đại trên mọi mặt cắt cùng đạt tới trị số ứng suất cho phép $[\sigma]$, ta tìm được luật biến thiên của đường kính d theo biến số z như sau:

$$d = \sqrt[3]{\frac{P \cdot z}{0,1[\sigma]}}$$



H. 7.30

Như vậy hình dáng của thanh phải có dạng đường nét đứt như trên hình vẽ (H. 7.30).

Ta thấy tại hai đầu mút, mặt cắt có diện tích bằng không, điều đó hoàn toàn phù hợp với điều kiện biến thiên của mô men uốn, vì tại đó mô men uốn bằng không. Song, như vậy không thỏa mãn điều kiện bền của lực cắt Q_y . Quả vậy, trên mọi mặt cắt của dầm ta đều có một trị số lực cắt $Q_y = \frac{P}{2}$ và

lực cắt đó sinh ra ứng suất tiếp lớn nhất $\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F}$. Vì thế diện tích của mặt cắt cần phải đủ để chịu cắt. Do đó phải chọn đường kính với điều kiện:

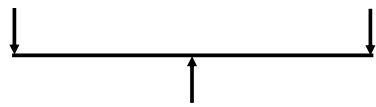
$$\tau_{\max} = \frac{4 Q_y}{3 F} \leq [\tau]$$

⇔ đường kính có trị số bé nhất cũng phải là:

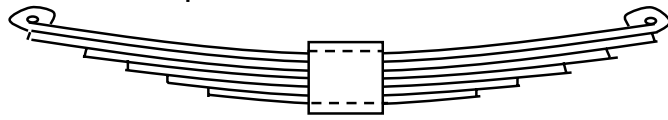
$$d = d_1 = \sqrt[3]{\frac{4 Q_y}{3 [\tau] \pi}} \quad (b)$$

Vì điều kiện chế tạo, rất khó gia công để thanh có thể có hình dáng đường cong được biểu diễn theo biểu thức (a), nên trong thực tế người ta thường làm các trục hình bậc, nghĩa là đường kính của các mặt cắt thay đổi từng đoạn một, gần sát với đường chống uốn đều (H. 7.31).

Các lò xo có sơ đồ chịu lực như (H.7.31), thường được ghép bởi các lá thép như (H.7.32). Các lá thép được ghép theo hình dáng của dầm chống uốn đều, hình dáng đó làm lò xo có trọng lượng nhỏ và chuyển vị lớn. Loại lò xo này thường dùng làm díp của các trục bánh xe.

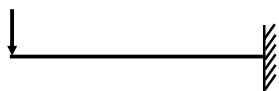


H. 7.31

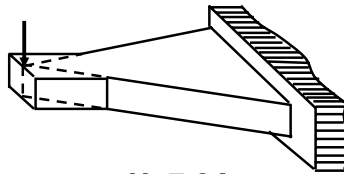


H. 7.32

Đối với dầm có sơ đồ chịu lực như (H.7.33), nếu chiều cao của dầm không đổi thì dầm chống uốn đều có hình dáng như trên (H. 7.34). Mặt cắt ở đầu tự do có diện tích khác không vì dầm còn chịu lực cắt. Diện tích đó được xác định tùy theo trị số của lực cắt.



H. 7.33



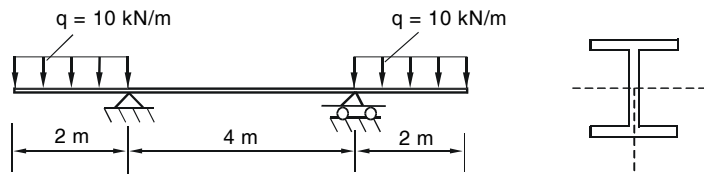
H. 7.34

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

7.1 Xác định chiều dài nhịp lớn nhất cho dầm tựa đơn có mặt cắt ngang hình chữ nhật ($140 \text{ mm} \times 240 \text{ mm}$) chịu tác dụng của tải phân bố đều cường độ $q = 6,5 \text{ kN/m}$ nếu ứng suất cho phép là $8,2 \text{ MPa}$ (trọng lượng của dầm đã kể trong q).

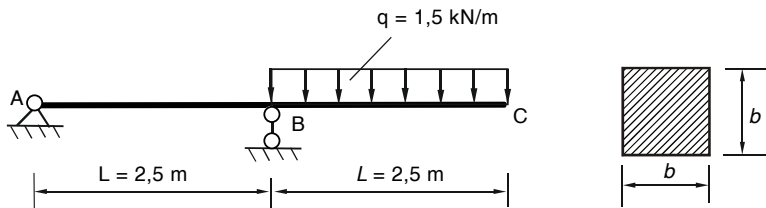
Trả lời: $3,68 \text{ m}$

7.2 Một dầm thép mặt cắt ngang hình chữ I tựa đơn và có hai đầu mút thừa như trên H.7.2. Dầm chịu tác dụng của lực phân bố đều cường độ $q = 10 \text{ kN/m}$ ở mỗi đầu mút thừa. Giả sử mặt cắt ngang chữ I có số hiệu 16 có mômen chống uốn (hay suất tiết diện) là 109 cm^3 . Xác định ứng suất pháp cực đại trong dầm do uốn, σ_{\max} do q .



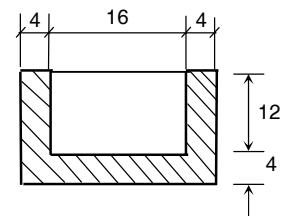
H.7.2

7.3 Một dầm bằng gỗ ABC có mặt cắt ngang hình vuông cạnh b , tựa đơn tại A và B chịu tải trọng phân bố đều $q = 1,5 \text{ kN/m}$ trên phần mút thừa BC (H.7.3). Tính cạnh của hình vuông b , giả sử chiều dài nhịp $L = 2,5 \text{ m}$ và ứng suất cho phép $[\sigma] = 12 \text{ MPa}$. Hãy kể đến trọng lượng riêng của dầm biết rằng trọng lượng riêng của gỗ là $\gamma = 5,5 \text{ kN/m}^3$.



H.7.3

7.4 Một máng nước có mặt cắt ngang như H.7.4. Máng đặt lên hai cột cách nhau 6 m . Vật liệu làm máng có trọng lượng riêng $\gamma = 18 \text{ kN/m}^3$. Hỏi khi chứa đầy nước thì ứng suất pháp và ứng suất tiếp cực đại là bao nhiêu?



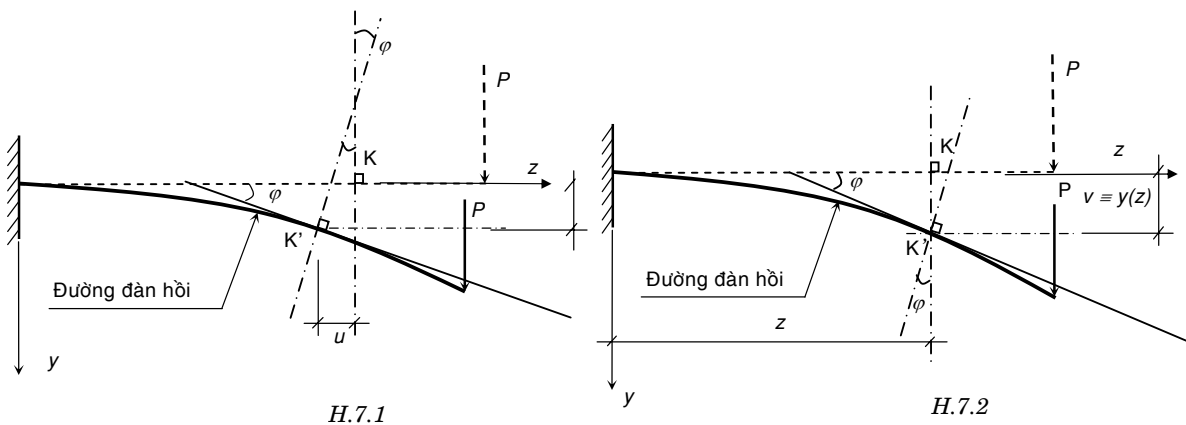
H.7.4

Chương 8

CHUYỂN VỊ CỦA DẦM CHỊU UỐN

8.1 KHÁI NIỆM CHUNG

Khi tính một dầm chịu uốn ngang phẳng, ngoài điều kiện bền còn phải chú ý đến điều kiện cứng. Vì vậy, cần phải xét đến biến dạng của dầm. Dưới tác dụng của các ngoại lực, trục dầm bị uốn cong, trục cong này được gọi là **đường đàn hồi** của dầm (H.8.1).



Xét một điểm K nào đó trên trục dầm trước khi biến dạng. Sau khi biến dạng, điểm K sẽ di chuyển đến vị trí mới K'. Khoảng cách KK' được gọi là **chuyển vị thẳng** của điểm K. Chuyển vị này có thể phân làm hai thành phần:

Thành phần v vuông góc với trục dầm (song song với trục y) gọi là **chuyển vị đứng** hay **độ võng** của điểm K.

Thành phần u song song với trục dầm (song song với trục z) gọi là **chuyển vị ngang** của điểm K.

Ngoài ra, sau khi trục dầm biến dạng, mặt cắt ngang ở K bị xoay đi một góc φ , ta gọi góc xoay này là **chuyển vị góc** (hay là **góc xoay**) của mặt cắt ngang ở điểm K. Có thể thấy rằng, góc xoay φ chính bằng góc giữa trục chưa biến dạng của dầm và tiếp tuyến ở điểm K của đường đàn hồi (H.8.1).

Ba đại lượng u , v , φ là ba thành phần chuyển vị của mặt cắt ngang ở điểm K.

Trong điều kiện biến dạng của dầm là bé thì thành phần chuyển vị ngang u là một đại lượng vô cùng bé bậc hai so với v , do đó có thể bỏ qua chuyển vị u và xem KK' là bằng v , nghĩa là vị trí K' sau khi biến dạng nằm trên đường vuông góc với trục dầm trước biến dạng (H.8.2).

Góc xoay φ có thể lấy gần đúng: $\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \frac{dv}{dz}$.

Nếu chọn trục dầm là z , trục y vuông góc với trục dầm, thì chuyển vị v chính là tung độ y của điểm K' . Tung độ y cũng chính là độ võng của điểm K. Ta thấy rõ nếu K có hoành độ z so với gốc nào đó thì các chuyển vị y , φ cũng là những hàm số của z và phương trình đàn hồi là:

$$y(z) = v(z)$$

Phương trình của góc xoay sẽ là:

$$\varphi(z) = \frac{dv}{dz} = \frac{dy}{dz} = y'(z)$$

hay, **phương trình của góc xoay là đạo hàm của phương trình đường đàn hồi.**

Quy ước dương của chuyển vị:

- Độ võng y dương nếu hướng xuống.
- Góc xoay φ dương nếu mặt cắt quay thuận chiều kim đồng hồ.

Điều kiện cứng: Trong kỹ thuật, khi tính toán dầm chịu uốn, người ta thường khống chế độ võng lớn nhất của dầm không được vượt qua một giới hạn nhất định để đảm bảo yêu cầu về sự làm việc, mỹ quan của công trình..., điều kiện này được gọi là **điều kiện cứng**. Nếu gọi f là độ võng lớn nhất của dầm thì điều kiện cứng thường chọn là:

$$\left[\frac{f}{L} \right] = \frac{1}{300} \div \frac{1}{1000}$$

trong đó: L - là chiều dài nhịp dầm.

Tùy loại công trình mà người ta quy định cụ thể trị số của $[f/L]$.

8.2 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA ĐƯỜNG ĐÀN HỒI

Xét 1 điểm bất kỳ K trên trục dầm.

Trong chương 7 (công thức 7.1) ta đã lập được mối liên hệ giữa độ cong của trục dầm tại K sau biến dạng với mômen uốn nội lực M_x tại K là:

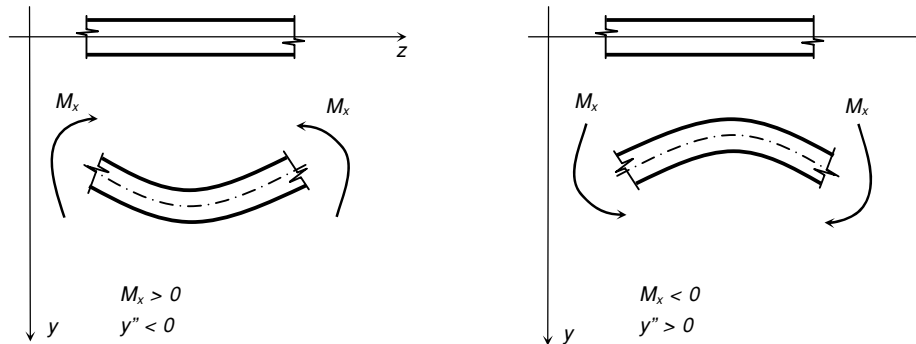
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (a)$$

Mặt khác, vì đường đàn hồi được biểu diễn bởi phương trình hàm số $y(z)$ trong hệ trục (yz) nên độ cong của đồ thị biểu diễn của hàm số ở 1 điểm K có hoành độ z được tính theo công thức:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (b)$$

$$(a) \text{ và } (b) \Rightarrow \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (c)$$

Đó là phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi, tuy nhiên phải chọn sao cho hai vế của phương trình trên đều thỏa mãn.



H.8. 3

Khảo sát một đoạn dầm bị uốn cong trong hai trường hợp như H.8.3. Trong cả 2 trường hợp mômen uốn M_x và đạo hàm bậc hai y'' luôn luôn trái dấu, cho nên phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M_x}{EI_x}$$

Với giả thiết chuyển vị là bé (độ võng và góc xoay bé), có thể bỏ qua $(y')^2$ so với 1 và khi đó **phương trình vi phân của đường đàn hồi** có dạng gần đúng như sau:

$$y'' = -\frac{M_x}{EI_x} \quad (8.1)$$

trong đó: Tích số EJ_x là **độ cứng khi uốn** của dầm .

8.3 LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN KHÔNG ĐỊNH HẠN

Vế phải của phương trình vi phân (8.1) chỉ là một hàm số của z nên (8.1) là phương trình vi phân thường.

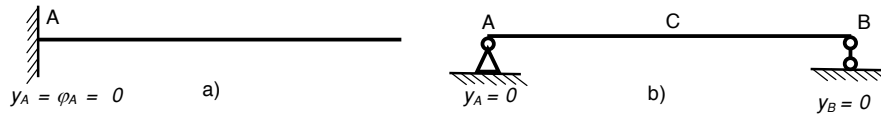
Tích phân lần thứ nhất (8.1) \Rightarrow phương trình góc xoay:

$$\varphi = y' = \int -\frac{M_x}{EJ_x} dz + C \quad (8.2)$$

Tích phân lần thứ hai \Rightarrow phương trình đường đàn hồi:

$$y = \int \left(\int -\frac{M_x}{EJ_x} dz + C \right) dz + D \quad (8.3)$$

Trong (8.2) và (8.3), C và D là hai hằng số tích phân sẽ được xác định các điều kiện biên. Các điều kiện này phụ thuộc vào liên kết của dầm và phụ thuộc vào sự thay đổi tải trọng trên dầm.



H. 8.4

Đối với dầm đơn giản, có thể có các điều kiện như sau:

+ Đầu ngàm của dầm console có góc xoay và độ võng bằng không

(H.8.4a): $y_A = \varphi_A = 0$

+ Các đầu liên kết khớp độ võng bằng không (H.8.4b):

$$y_A = y_B = 0$$

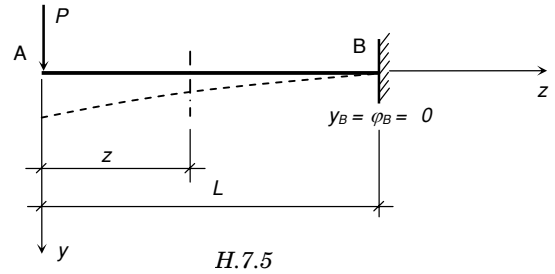
+ Tại nơi tiếp giáp giữa hai đoạn dầm có phương trình đường đàn hồi khác nhau, độ võng và góc xoay bên trái bằng với độ võng và góc xoay bên phải (điểm C trên H.8.4b): $y_C^{tr} = y_C^{ph}$; $\varphi_C^{tr} = \varphi_C^{ph}$

Thí dụ 8.1 Viết phương trình đường đàn hồi và góc xoay cho dầm công son (console) như H.8.5. Từ đó suy ra độ võng và góc xoay lớn nhất. Cho $EJ_x =$ hằng số.

Giải.

Phương trình mômen uốn tại mặt cắt có hoành độ z là:

$$M_x = -Pz \quad (a)$$



thế vào (8.1) \Rightarrow phương trình vi phân của đường đàn hồi :

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} = \frac{Pz}{EJ_x} \quad (b)$$

tích phân hai lần, $\Rightarrow \varphi = y' = \frac{Pz^2}{2EJ_x} + C \quad (c)$

$$y = \frac{Pz^3}{6EJ_x} + Cz + D \quad (d)$$

C và D được xác định từ các điều kiện biên về độ võng và góc xoay tại ngàm:

$$z = L; \varphi = 0 \text{ và } y = 0$$

thay các điều kiện này vào (c) và (d) \Rightarrow

$$C = -\frac{PL^2}{2EJ_x}; D = \frac{PL^3}{3EJ_x}$$

Vậy phương trình đường đàn hồi và góc xoay là:

$$y = \frac{Pz^3}{6EJ_x} - \frac{PL^2}{2EJ_x}z + \frac{PL^3}{3EJ_x};$$

$$\varphi = \frac{Pz^2}{2EJ_x} - \frac{PL^2}{2EJ_x}$$

Độ võng và góc xoay lớn nhất ở đầu tự do A của dầm; ứng với $z = 0$, ta có:

$$y_{\max} = \frac{PL^3}{3EJ_x}; \varphi = -\frac{PL^2}{2EJ_x}$$

$y_{\max} > 0$ chỉ rằng độ võng của điểm A hướng xuống

$\varphi < 0$ chỉ rằng góc xoay của điểm A ngược kim đồng hồ.

Thí dụ 8.2 Tính độ võng và góc xoay lớn nhất của dầm (H.8.6).

Cho $EJ_x = \text{hằng}$

Giải.

Phương trình mômen uốn tại mặt cắt có hoành độ z là:

$$M_x = -\frac{qz^2}{2}$$

thế vào (8.1), $\Rightarrow y'' = -\frac{qz^2}{2EJ_x}$

tích phân hai lần, $\Rightarrow \varphi = y' = \frac{qz^3}{6EJ_x} + C$

$$y = \frac{qz^4}{24EJ_x} + C z + D$$

hai điều kiện biên ở đầu ngàm $z = L$; $\varphi = 0$ và $y = 0$ cho :

$$C = -\frac{qL^3}{6EJ_x}; \quad D = \frac{qL^4}{8EJ_x}$$

Vậy phương trình đàn hồi và góc xoay là:

$$y = \frac{qL^4}{24EJ_x} - \frac{qL^3}{6EJ_x} z + \frac{qL^4}{8EJ_x};$$

$$\varphi = \frac{qL^3}{6EJ_x} - \frac{qL^3}{6EJ_x} z$$

Độ võng và góc xoay lớn nhất ở đầu tự do A của dầm; ứng với $z = 0$, ta có:

$$y_{\max} = \frac{qL^4}{8EJ_x} \quad \text{và} \quad \varphi_A = -\frac{qL^3}{6EJ_x}$$

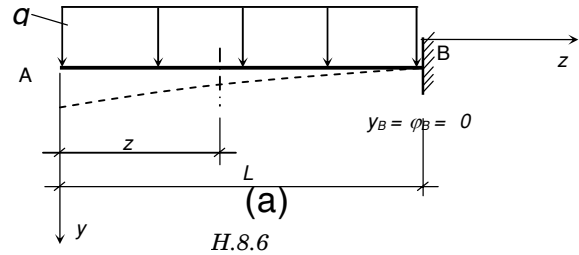
Thí dụ 8.3 Tính độ võng và góc xoay lớn nhất của dầm đơn giản chịu tải phân bố đều (H.8.7). Độ cứng EJ_x của dầm không đổi.

Giải.

Phương trình mômen uốn tại mặt cắt ngang có hoành độ z là:

$$M_x = \frac{qL}{2} z - \frac{qz^2}{2} = \frac{q}{2} (Lz - z^2) \quad (a)$$

thay vào (8.1), \Rightarrow phương trình vi phân của đường đàn hồi như sau:

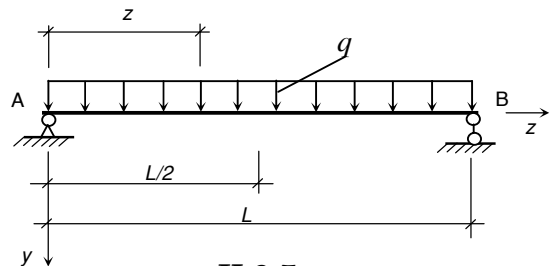


H.8.6

(b)

(c)

(d)



H.8.7

$$y'' = -\frac{q}{2EJ_x}(Lz - z^2) \quad (b)$$

tích phân hai lần, $\Rightarrow \varphi = y' = -\frac{q}{2EJ_x}\left(\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right) + C \quad (c)$

$$y = -\frac{q}{2EJ_x}\left(\frac{Lz^3}{6} - \frac{z^4}{12}\right) + Cz + D \quad (d)$$

điều kiện biên ở các gối tựa trái và phải của dầm: $\begin{cases} \text{khi : } z = 0; & y = 0 \\ \text{khi : } z = L; & y = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow D = 0; C = \frac{qL^3}{24EJ_x}$$

Như vậy phương trình đường đàn hồi và góc xoay là:

$$y = \frac{qL^3}{24EJ_x} z \left(1 - 2\frac{z^2}{L^2} + \frac{z^3}{L^3}\right) \quad (e)$$

$$\varphi = y' = \frac{qL^3}{24EJ_x} \left(1 - 6\frac{z^2}{L^2} + 4\frac{z^3}{L^3}\right) \quad (g)$$

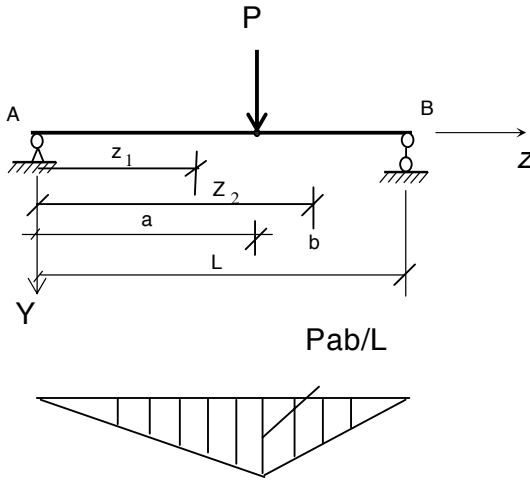
Độ võng lớn nhất của dầm ở tại mặt cắt ngang giữa nhịp ứng với:
 $z = \frac{L}{2}$ (tại đây $y' = 0$)

thay $z = \frac{L}{2}$ vào (e), $y_{\max} = y\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EJ_x}$

Góc xoay lớn nhất, nhỏ nhất (y'_{\max}, y'_{\min}) tại mặt cắt ngang có $y'' = 0$ (hay $M_x = 0$), tức ở các gối tựa trái và phải của dầm. Thay $z = 0$ và $z = L$ lần lượt vào (g) $\Rightarrow \varphi_{\max} = y'_{\max} = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ_x} \quad \varphi_{\min} = y'_{\min} = -\frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ_x}$

Góc xoay của mặt cắt ở gối tựa trái thuận chiều kim đồng hồ, góc xoay của mặt cắt ở gối tựa phải ngược chiều kim đồng hồ.

Thí dụ 8.4 Lập phương trình độ võng và góc xoay của dầm trên hai gối tựa chịu lực tập trung P như H.8.8 cho biết $EJ_x =$ hằng số.



H.8.8

Giải.

Dầm có hai đoạn, biểu thức mômen uốn trong hai đoạn AC và CB khác nhau nên biểu thức góc xoay và độ võng trong hai đoạn cũng khác nhau. Viết cho từng đoạn các biểu thức M_x , y'' , y' , y như sau:

Mômen uốn M_x trong các đoạn sau:

$$\text{Đoạn AC } (0 \leq z_1 \leq a): M_{x(1)} = \frac{Pb}{L} z_1 \quad (\text{a})$$

$$\text{Đoạn CB } (a \leq z_2 \leq L): M_{x(2)} = \frac{Pb}{L} z_2 - P(z_2 - a) \quad (\text{b})$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi trong mỗi đoạn:

$$\text{Đoạn AC: } y_1'' = -\frac{Pb}{LEJ_x} z_1 \quad (\text{c})$$

$$\text{Đoạn CB: } y_2'' = -\frac{Pb}{LEJ_x} z_2 + \frac{P}{EJ_x} (z_2 - a) \quad (\text{d})$$

Tích phân liên tiếp các phương trình trên, ta được:

Đoạn AC ($0 \leq z_1 \leq a$):

$$y_1' = -\frac{Pb}{2LEJ_x} z_1^2 + C_1 \quad (\text{e})$$

$$y_1 = -\frac{Pb}{6LEJ_x} z_1^3 + C_1 z_1 + D_1 \quad (\text{g})$$

Đoạn CB ($a \leq z_2 \leq L$):

$$y_2' = -\frac{Pb}{2LEJ_x} z_2^2 + \frac{P}{2EJ_x} (z_2 - a)^2 + C_2 \quad (h)$$

$$y_2 = -\frac{Pb}{6LEJ_x} z_2^3 + \frac{P}{6EJ_x} (z_2 - a)^3 + C_2 z_2 + D_2 \quad (i)$$

Xác định các hằng số tích phân C_1, D_1, C_2, D_2 từ các điều kiện biên

- Ở gối tựa A, B độ võng bằng không
- Ở mặt cắt ngang C nối tiếp hai đoạn, độ võng và góc xoay của hai đoạn phải bằng nhau.

$$\Leftrightarrow \text{khi:} \quad \begin{aligned} z_1 = 0; \quad y_1 &= 0 \\ z_2 = 0; \quad y_2 &= 0 \\ z_1 = z_2 = a; \quad y_1 = y_2; \quad y_1' &= y_2' \end{aligned}$$

Từ bốn điều kiện này \Rightarrow :

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ -\frac{Pb}{6LEJ_x} L^3 + \frac{P}{6EJ_x} (L-a)^3 + C_2 L + D_2 = 0 \\ -\frac{Pb}{6LEJ_x} a^3 + c_1 a + D_1 = -\frac{Pb}{6LEJ_x} a^3 + c_2 a + D_2 \\ -\frac{Pb}{2LEJ_x} a^2 + c_1 = -\frac{Pb}{2LEJ_x} a^2 + c_2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, \Rightarrow

$$D_1 = D_2 = 0; \quad C_1 = C_2 = \frac{Pb}{6LEJ_x} (L^2 - b^2)$$

Vậy phương trình góc xoay và độ võng trong từng đoạn là:

Đoạn AC ($0 \leq z_1 \leq a$):

$$\begin{cases} \varphi_1 = y_1' = \frac{Pb}{LEJ_x} \left(\frac{L^2 - b^2}{6} - \frac{z_1^2}{2} \right) \\ y_1 = \frac{Pb}{LEJ_x} \left(\frac{L^2 - b^2}{6} z_1 - \frac{z_1^3}{6} \right) \end{cases}$$

Đoạn BC ($a \leq z_2 \leq L$):

$$\begin{cases} \varphi_2 = y_2' = \frac{Pb}{LEJ_x} \left(\frac{z_2^2}{2} - \frac{L(z_2 - a)^2}{2b} - \frac{L^2 - b^2}{6} \right) \\ y_2 = \frac{Pb}{LEJ_x} \left(\frac{(z_2 - a)^3}{6b} L + \frac{L^2 - b^2}{6} z_2 - \frac{z_2^3}{6} \right) \end{cases}$$

Tính độ võng lớn nhất trong dầm bằng cách dựa vào điều kiện $y' = 0$,

Giả sử $a > b$. Trước hết ta sẽ xét độ võng lớn nhất trong đoạn nào ở gối tựa A ($z_1 = 0$) góc xoay bằng:

$$\varphi_{1A} = \frac{PbL}{6EJ_x} \left(1 - \frac{b^2}{L^2} \right) > 0$$

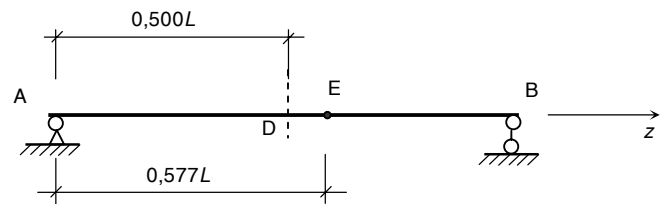
và ở C ($z_1 = a$): $\varphi_{1C} = -\frac{PbL}{3EJ_x} (a - b) < 0$

Như vậy, giữa hai điểm A và C góc xoay φ_1 đổi dấu, nghĩa là sẽ bị triệt tiêu một lần. Điều đó cho thấy độ võng có giá trị lớn nhất trong đoạn AC.

Để tìm hoành độ $z_1(0)$ của mặt cắt ngang có độ võng lớn nhất, ta cho phương trình $\varphi_1 = 0$:

$$\varphi_1[z_1(0)] = \frac{Pb}{LEJ_x} \left[\frac{L - b^2}{6} - \frac{(z_1(0))^2}{2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow z_1(0) = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad (o)$$



H.8.9

Sau đó đưa vào biểu thức (l) của độ võng, \Rightarrow giá trị lớn nhất của độ võng

$$y_{\max} = y_{1(z_1(0))} = \frac{\sqrt{3}Pb(L^2 - b^2)}{27EJ_x} \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{L^2} \right)} \quad (p)$$

Các hệ quả:

- Nếu P đặt ở giữa nhịp dầm ($b = L/2$), thì từ (o) và (p), ta được:

$$z_1(0) = \frac{L}{2} = 0,500L; \quad y_{\max} = \frac{PL^3}{48EJ_x}$$

- Khi P ở gần gối B, tức $b \rightarrow 0$ ta có: $z_1(0) = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0,577L$

Như vậy, nếu tải trọng di chuyển từ trung điểm D giữa nhịp dầm đến gối tựa B (H.8.9) thì hoành độ $z_1(0)$ sẽ biến thiên từ $0,5L$ đến $0,577L$, tức là từ điểm D đến điểm E. Trong thực tế người ta thường quy ước là khi tải trọng P tác dụng ở một vị trí nào đó thì vẫn có thể coi độ võng lớn nhất ở giữa nhịp dầm.

Thí dụ, nếu tải trọng P tác dụng ở vị trí như H.8.8 thì độ võng ở giữa nhịp dầm sẽ bằng:

$$y_{(l/2)} = \frac{Pb}{48EJ_x} (3L^2 - 4b^2)$$

So sánh hai giá trị y_{\max} và $y_{(l/2)}$ thấy hai giá trị này khác nhau và rất ít

Nhận xét: Nếu dầm có nhiều đoạn, cần phải lập phương trình vi phân đường đàn hồi cho nhiều đoạn tương ứng. Ở mỗi đoạn, phải xác định hai hằng số tích phân, nếu dầm có n đoạn thì phải xác định $2n$ hằng số, bài toán trở nên phức tạp nếu số đoạn n càng lớn, vì vậy phương pháp này ít dùng khi tải trọng phức tạp hay độ cứng dầm thay đổi.

8.4 XÁC ĐỊNH ĐỘ VĨNG VÀ GÓC XOAY BẰNG PHƯƠNG PHÁP TẢI TRỌNG GIẢ TẠO (PHƯƠNG PHÁP ĐỒ TOÁN)

◆ Phần trước, đã có liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực (CH. 2):

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dz} = q \\ \frac{dM_x}{dz} = Q \\ \frac{d^2M_x}{dz^2} = q \end{cases} \quad (a)$$

◆ Đối với việc khảo sát đường đàn hồi của dầm, cũng có phương trình vi phân:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (b)$$

Đối chiếu các phương trình (a) và (b), ta thấy có sự tương tự sau:

| | |
|---|---------------------------|
| y | M_x |
| $\frac{dy}{dz} = y'$ | $\frac{dM_x}{dz} = Q$ |
| $\frac{d^2y}{dz^2} = y'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$ | $\frac{d^2M_x}{dz^2} = q$ |

Ta nhận thấy muốn tính góc xoay y' và độ võng y thì phải tích phân liên tiếp hai lần hàm số $\frac{M_x}{EJ_x}$

Tương tự muốn có lực cắt Q_y và mômen uốn M_x thì phải tích phân liên tiếp hai lần hàm số tải trọng q .

Tuy nhiên ở phần trước (CH.2), ta đã tính lực cắt Q_y và mômen uốn M_x theo tải trọng q từ việc khảo sát các phương trình cân bằng.

Như vậy, cũng có thể tính góc xoay y' và độ võng y theo hàm $y'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$ mà không cần tích phân. Đó cũng chính là **phương pháp tải trọng giả tạo**.

◆ **Phương pháp tải trọng giả tạo:**

Tưởng tượng một **dầm giả tạo (DGT)** có chiều dài giống **dầm thực (DT)**, trên DGT có **tải trọng giả tạo** q_{gt} giống như biểu đồ $-\frac{M_x}{EJ_x}$ trên dầm thật, thì sẽ có sự tương đương:

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} = q_{gt} \quad ; \quad y' = Q_{gt} \quad ; \quad y = M_{gt}$$

trong đó: q_{gt} - Tải trọng giả tạo

Q_{gt} - Lực cắt giả tạo- Lực cắt trong DGT

M_{gt} - Mômen giả tạo- Mômen uốn trong DGT

⇒ Muốn tính góc xoay y' và độ võng y của một **dầm thực (DT)** (dầm đang khảo sát) thì chỉ cần tính lực cắt Q_{gt} và mômen uốn M_{gt} do tải trọng giả tạo tác dụng trên DGT gây ra.

Tuy nhiên, để có được sự đồng nhất đường đàn hồi y và Momen uốn M_{gt} thì điều kiện biên của chúng phải giống nhau: $y' = Q_{gt}$; $y = M_{gt}$ tại bất kỳ điểm trên hai DT và DGT; Ngoài ra nếu xét tại điểm bất kỳ trên dầm phải khảo sát đến sự giống nhau của bước nhảy góc xoay $\Delta y'$ và bước nhảy lực cắt ΔQ_{gt} .

◆ **Cách chọn dầm giả tạo (DGT)**

DGT được suy từ DT với điều kiện là nơi nào trên DT không có độ võng và góc xoay thì điều kiện liên kết của DGT ở những nơi đó phải tương ứng sao cho q_{gt} không gây ra M_{gt} và Q_{gt} .

Chiều dài của DT và DGT là như nhau.

Bảng 8.1 cho một số DGT tương ứng với một số DT thường gặp.

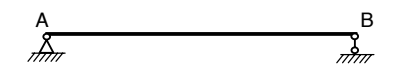
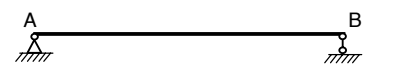
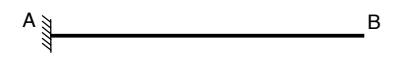
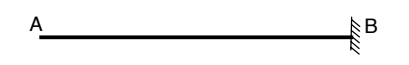
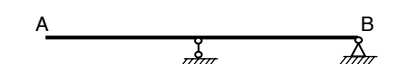
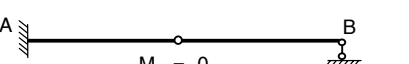
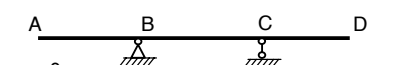
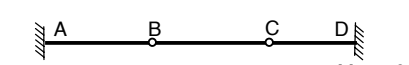
◆ Cách tìm tải trọng giả tạo q_{gt}

Vì $q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x}$, nên q_{gt} bao giờ cũng ngược dấu với mômen uốn M_x . Do đó:

- Nếu: $M_x > 0$ thì $q_{gt} < 0$, nghĩa là nếu biểu đồ M_x nằm phía dưới trục hoành (theo qui ước $M_x > 0$ vẽ phía dưới trục thanh) thì q_{gt} hướng xuống
- Nếu: $M_x < 0$ thì q_{gt} hướng lên.

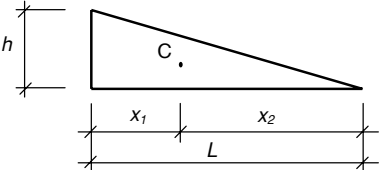
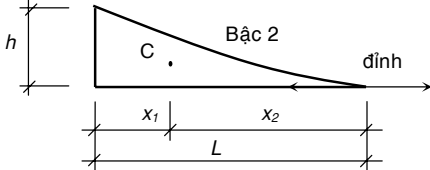
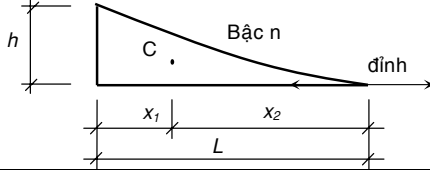
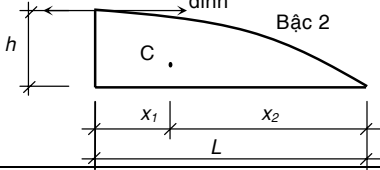
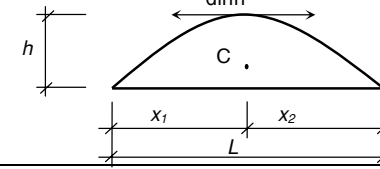
⇔ q_{gt} luôn có chiều hướng theo thớ căng của biểu đồ mô men M_x

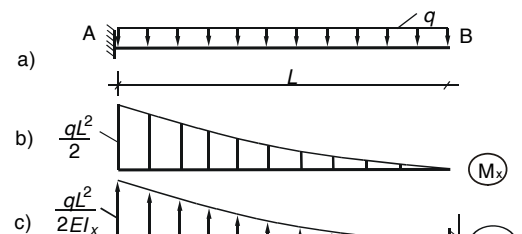
Bảng 8.1

| Dầm thực | Dầm giả tạo |
|---|--|
|  <p> $y = 0$ $y = 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ </p> |  <p> $M_{gt} = 0$ $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ </p> |
|  <p> $y = 0$ $y \neq 0$ $\varphi = 0$ $\varphi \neq 0$ </p> |  <p> $M_{gt} = 0$ $M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ </p> |
|  <p> $y \neq 0$ $y = 0$ $y = 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi_{tr} = \varphi_{ph}$ </p> |  <p> $M_{gt} \neq 0$ $M_{gt} = 0$ $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{tr} = Q_{ph}$ </p> |
|  <p> $y \neq 0$ $y = 0$ $y = 0$ $y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ </p> |  <p> $M_{gt} \neq 0$ $M_{gt} = 0$ $M_{gt} = 0$ $M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ </p> |

Ngoài ra trong quá trình tính các nội lực M_{gt} , Q_{gt} của DGT, cần phải tính hợp lực của lực phân bố q_{gt} trên các chiều dài khác nhau. Do đó, để tiện lợi ta xác định vị trí trọng tâm và diện tích Ω của những hình giới hạn bởi các đường cong như bảng 8.2 dưới đây

Bảng 8.2

| Hình vẽ | Diện tích (Ω) | Vị trí trọng tâm | |
|---|---------------------------|------------------|----------------------|
| | | x_1 | x_2 |
|  | $\frac{Lh}{2}$ | $\frac{L}{3}$ | $\frac{2L}{3}$ |
|  | $\frac{Lh}{3}$ | $\frac{L}{4}$ | $\frac{3L}{4}$ |
|  | $\frac{Lh}{n+1}$ | $\frac{L}{n+2}$ | $\frac{L(n+1)}{n+2}$ |
|  | $\frac{2Lh}{3}$ | $\frac{3L}{8}$ | $\frac{5L}{8}$ |
|  | $\frac{2Lh}{3}$ | $\frac{L}{2}$ | $\frac{L}{2}$ |



Thí dụ 8.5 Tính độ võng và góc xoay ở

Chương 8: Chuyển vị của dầm chịu uốn

đầu tự do B của dầm công xon chịu tải trọng phân bố đều q (H.8.10a). Độ cứng của dầm $EJ_x = \text{const}$

Giải.

+ Biểu đồ mômen uốn M_x của DT có dạng đường bậc 2 được vẽ trên H.810b.

+ DGT tương ứng với lực phân bố q_{gt} như H.8.10c.

+ Độ võng và góc xoay tại B của DT chính bằng mômen uốn M_{gt} và lực cắt Q_{gt} tại B của DGT. Dùng mặt cắt ở sát B của dầm giả tạo, tính nội lực ở mặt cắt ngang này và được:

$$\varphi_B = Q_{gt}^B = \frac{1}{3} \times \frac{qL^2}{2EJ_x} \times L = \frac{qL^3}{6EJ_x};$$

$$y_B = M_{gt}^B = \frac{1}{3} \times \frac{qL^2}{2EJ_x} \times L \times \frac{3}{4}L = \frac{qL^4}{8EJ_x}$$

Thí dụ 8.6 Tính độ võng

và

góc xoay tại C của dầm cho

trên H.8.11a. Đoạn dầm AB

có độ cứng $2EJ$, đoạn

dầm BC có độ cứng EJ .

Giải.

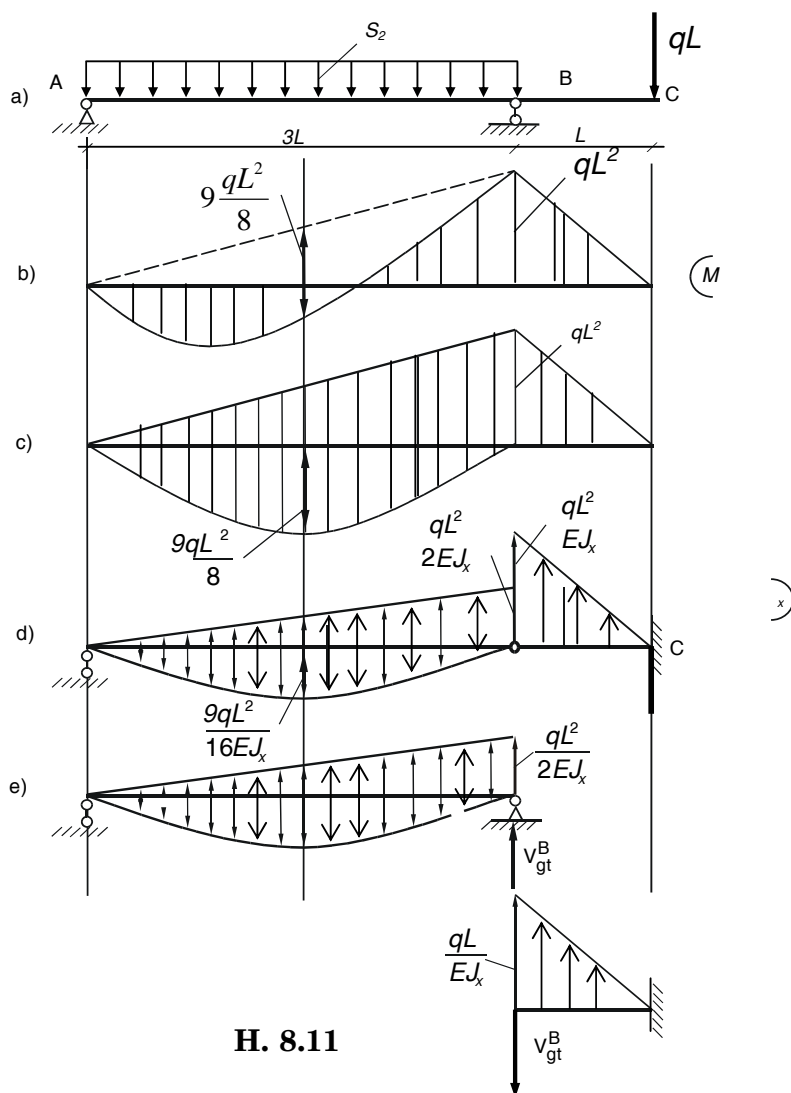
+ Biểu đồ mômen uốn được vẽ trên H.8.11b.

Để dễ dàng trong việc tính toán ta phân tích M_x thành tổng của các biểu đồ mômen uốn có dạng đơn giản như H.8.11c.

+ DGT với lực q_{gt} như H.8.11d.

(chú ý là độ cứng trong AB và BC khác nhau).

+ Tính nội lực ở C của DGT.



H. 8.11

Chia DGT thành hai DGT như H.8.11e, phản lực ở B của DGT AB là:

$$V_{gt}^B = \frac{1}{16} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

Phản lực này tác dụng lên DGT BC và dễ dàng tính được:

$$Q_{gt}^C = -\frac{1}{16} \frac{qL^3}{EJ_x} + \frac{1}{2} L \frac{qL^2}{EJ_x} = +\frac{7}{16} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

$$M_{gt}^C = -\frac{1}{16} \frac{qL^3}{EJ_x} L + \frac{1}{2} L \frac{qL^2}{EJ_x} \frac{2}{3} L = \frac{13}{48} \frac{qL^4}{EJ_x}$$

⇒ độ võng và góc xoay tại C của DT

$$y_C = M_{gt}^C = \frac{13}{48} \frac{qL^4}{EJ_x}; \quad \varphi_C = Q_{gt}^C = \frac{7}{16} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

8.5 BÀI TOÁN SIÊU TÍNH (BTST)

Tương tự các bài toán về thanh chịu kéo, nén đúng tâm, ta còn có các BTST về uốn.

Đó là các bài toán mà ta không thể xác định toàn bộ nội lực hoặc phản lực chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học, vì số ẩn số phải tìm của bài toán lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học có được.

Để giải được các BTST, cần tìm thêm một số phương trình phụ dựa vào điều kiện biến dạng của dầm.

Xét cụ thể thí dụ sau:

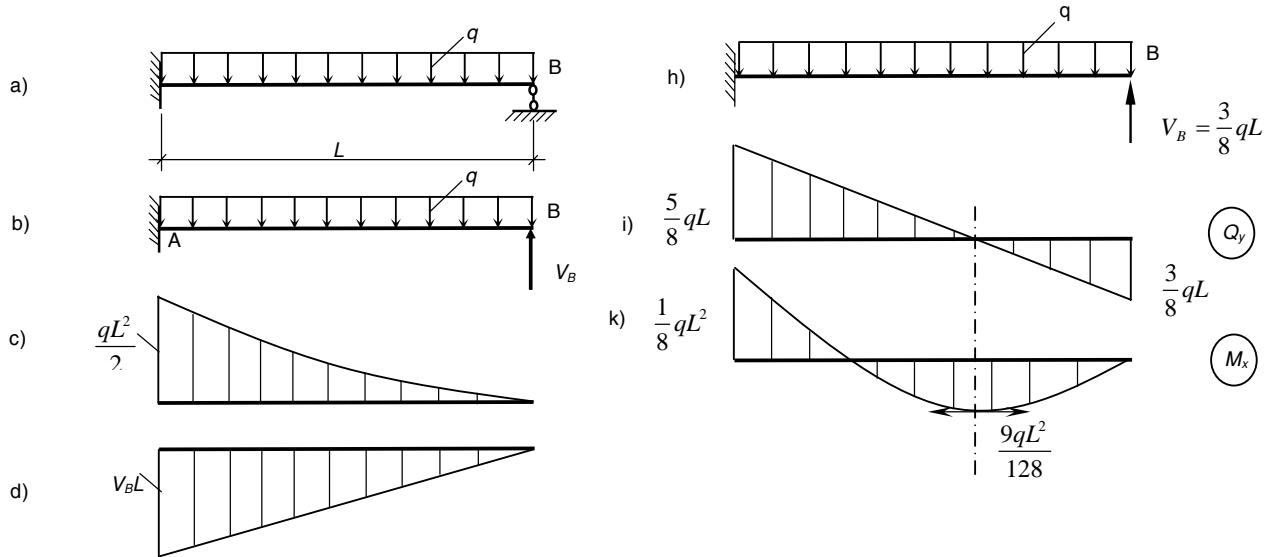
Thí dụ 8.6 Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm như H.8.12a. Biết $EJ =$ hằng số.

Giải.

+ Dầm đã cho có bốn phản lực cần tìm (ba ở ngàm A và một ở gối tựa B). Ta chỉ có ba phương trình cân bằng tĩnh học, nên cần tìm thêm một phương trình phụ về điều kiện biến dạng của dầm.

+ Tưởng tượng bỏ gối tựa ở đầu B và thay vào đó một phản lực V_B (H.8.12b), ta được một hệ mới. Hệ này chỉ có thể làm việc giống như hệ trên khi V_B phải có trị số và chiều thế nào để độ võng tại B, do tải trọng q và V_B sinh ra, phải bằng không

⇔ Điều kiện biến dạng (chuyển vị): $y_B(q, V_B) = 0$



+ Ta tính độ võng tại B bằng phương pháp tải trọng giả tạo (hay một phương pháp khác).

Biểu đồ mômen uốn của dầm ở H.8.12b do tải trọng q và phản lực V_B gây ra vẽ như H.8.12c,d, DGT và q_{gt} như H.8.12 e, g. Ta có:

Độ võng y_B của hệ 8.12b chính là Mômen giả tạo tại B của DGT

$$y_B = M_{gt}^B = \frac{1}{3} L \frac{qL^2}{2EJ} \times \frac{3}{4} L - \frac{1}{2} L \frac{V_B L}{EJ} \times \frac{2}{3} L$$

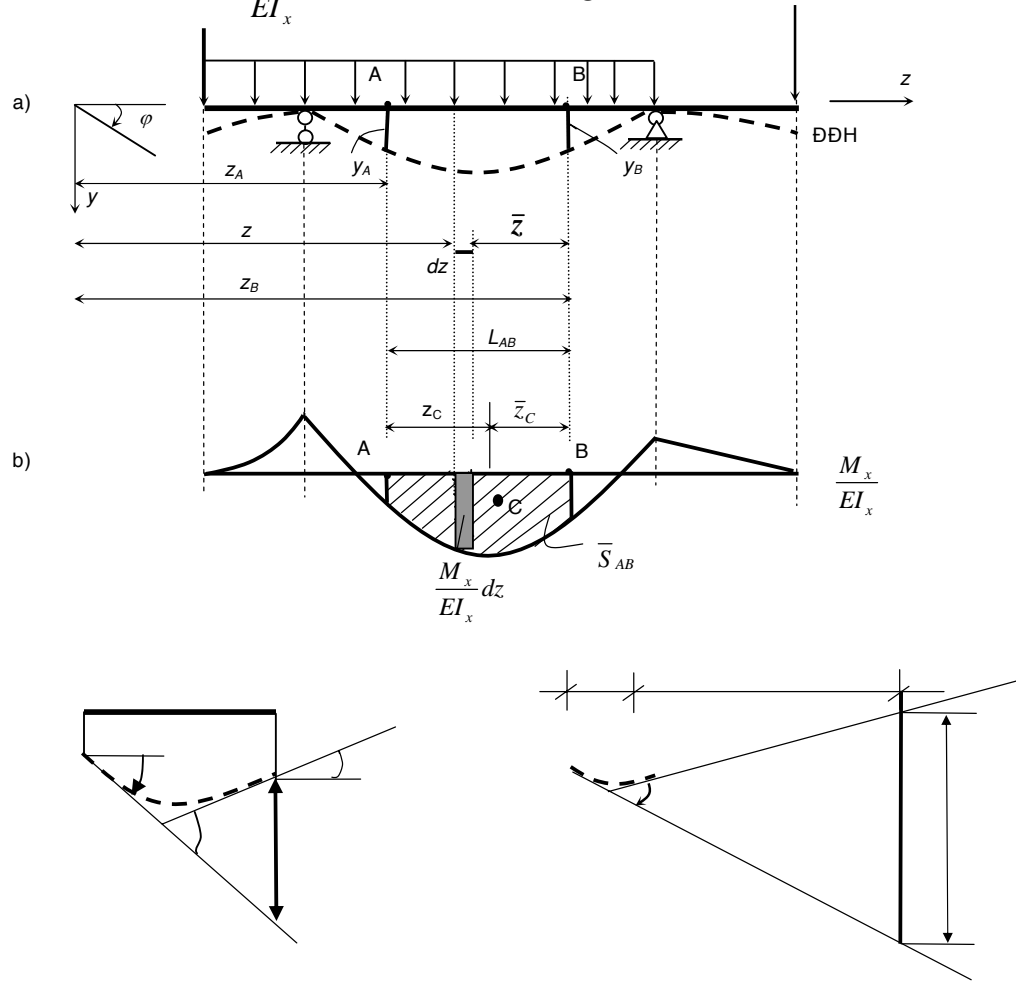
Điều kiện độ võng $y_B = 0, \Rightarrow V_B = \frac{3}{8} qL$

Sau khi tìm được V_B , dễ dàng vẽ được các biểu đồ nội lực của dầm đã cho như H.8.12 i, k.

7.4. PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH MÔMEN

1. Nội dung phương pháp

Xét dầm có biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ như H.8.10b, đường đàn hồi (nét đứt) như H.8.10a.



H.8.10 Phương pháp diện tích mô men

Xét đoạn dầm AB: $d\varphi = -\frac{M_x}{EI_x} dz$, suy ra: $\int_{z_A}^{z_B} d\varphi = \int_{z_A}^{z_B} -\frac{M_x}{EI_x} dz$

$$\varphi_B - \varphi_A = \varphi_{AB} = -\bar{S}_{AB} \quad (8.18)$$

với \bar{S}_{AB} là diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ gồm giữa hai mặt cắt A và B.

Định lý 1. Độ thay đổi góc xoay giữa hai mặt cắt của một dầm (thí dụ giữa A và B) thì bằng dấu trừ diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ giữa hai mặt cắt ấy.

Từ hình 8.10d: $dt = \bar{z}d\varphi = -\bar{z}\frac{M_x}{EI_x} dz$ suy ra: $t_{BA} = \int_{z_A}^{z_B} dt = \int_{z_A}^{z_B} -\bar{z}\frac{M_x}{EI_x} dz = -\bar{z}_C \bar{S}_{AB}$ (8.20)

\bar{z}_C là khoảng cách từ trọng tâm của diện tích \bar{S}_{AB} đến B

Định lý 2. Độ sai lệch giữa tiếp tuyến ở một điểm B trên đường đàn hồi với một tiếp tuyến ở một điểm A khác cũng trên đường đàn hồi bằng với dấu trừ mô men

tính của diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ đối với đường thẳng đứng đi qua B.

Từ H.8.10d ta có:

$$y_B = y_A + \varphi_A L_{AB} + t_{BA} = y_A + \varphi_A (z_B - z_A) + t_{BA}$$

$$y_B = y_A + \varphi_A (z_B - z_A) - \bar{z}_C \bar{S}_{AB} \quad (8.21)$$

(7.21) chính là công thức dùng để xác định độ võng của điểm B nếu biết độ võng của một điểm A ($z_B > z_A$) và biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ giữa hai điểm này.

Từ (8.21) có thể tính độ võng của điểm A khi biết độ võng của điểm B ($z_B > z_A$).

$$\varphi_A = \varphi_B + \bar{S}_{AB} \quad \text{và} \quad y_A = y_B - \varphi_A (z_B - z_A) + \bar{z}_C \bar{S}_{AB}$$

với: $\bar{z}_C = L_{AB} - z_C$

ta viết: $y_A = y_B - (\varphi_B + \bar{S}_{AB}) L_{AB} + (L_{AB} - z_C) \bar{S}_{AB}$

Khai triển và rút gọn, ta được: $y_A = y_B - \varphi_B L_{AB} - z_C \bar{S}_{AB} \quad (8.22)$

z_C - là khoảng cách từ trọng tâm C của \bar{S}_{AB} kể từ A.

Thí dụ 8.5. Dùng phương pháp diện tích mô men xác định góc xoay ở đầu trái A và độ võng ở điểm D giữa dầm (H.8.11). $EI_x =$ hằng số.

Giải. Theo định lý 1, công thức (7.4), xét hai điểm A ($z = 0$) và D ($z = L/2$)

$$\varphi_D = \varphi_A - \bar{S}_{AD}$$

Chú ý rằng $\varphi_D = 0$ vì bài toán đối xứng và \bar{S}_{AD} có thể phân chia thành $\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$.

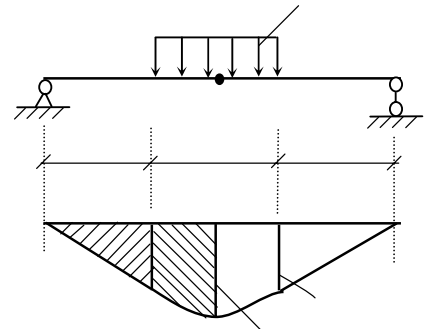
ta suy ra: $\varphi_A - (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3) = 0$

$$\varphi_A = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EI_x}$$

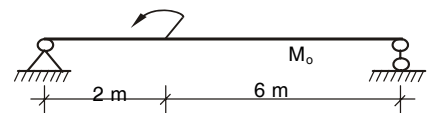
Góc xoay của mặt cắt A thuận chiều kim đồng hồ.

Áp dụng công thức (8.21), ta viết

$$y_D = y_A + \varphi_A \frac{L}{2} - \bar{z}_C \bar{S}_{AD} = 0 + \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EI_x} \times \frac{L}{2} - \left(\frac{-(1)}{z_C} \bar{S}_1 + \frac{-(2)}{z_C} \bar{S}_2 + \frac{-(3)}{z_C} \bar{S}_3 \right) = \frac{77}{11664} \times \frac{qL^2}{EI_x}$$



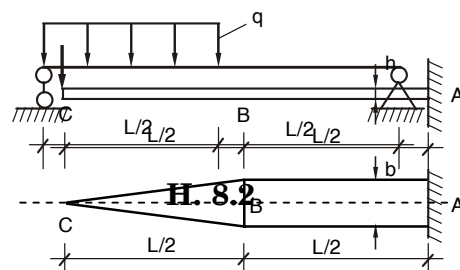
BÀI TẬP CHƯƠNG 8



8.1 Xác định đường đàn hồi dầm bằng phương pháp tích phân không định hạn, biết $M_0 = 20 \text{ kNm}$, EJ không đổi. H.8.1.

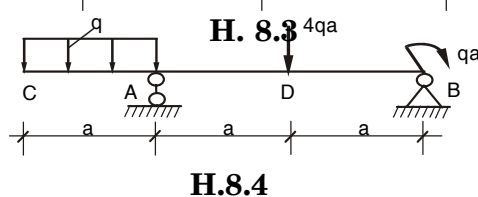
8.2 Xác định góc xoay ở hai đầu dầm và độ võng tại giữa dầm bằng phương pháp tích phân không định hạn, EJ không đổi. H.8.2.

8.3 Dầm mặt cắt ngang thay đổi và chịu lực như H.8.3. Tính độ võng tại dầm tự do và góc xoay tại mặt cắt ngang giữa dầm.

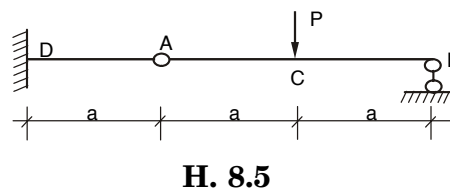


8.4 Dầm có độ cứng không đổi như H.8.4. Xác định:

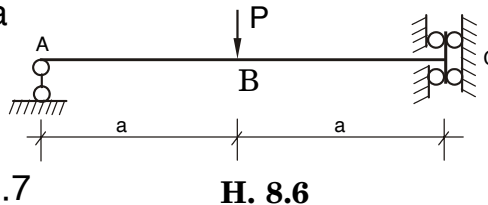
- Độ võng và góc xoay tại C
- Góc xoay tại A và B
- Độ võng tại mặt cắt D



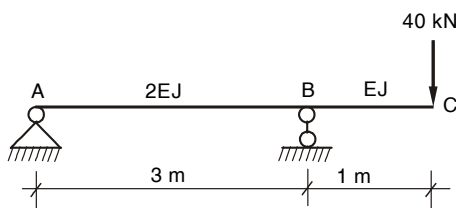
8.5 Tìm độ võng tại mặt cắt C, góc xoay bên trái và phải khớp A của dầm như H.8.5, biết độ cứng $EJ = \text{hằng}$.



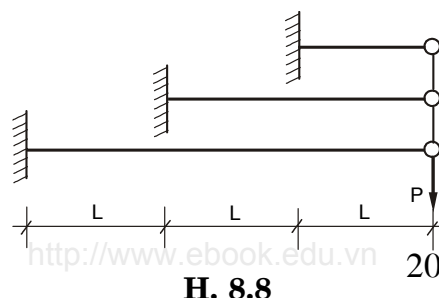
8.6 Tìm độ võng tại B, góc xoay tại A của dầm như H.8.6, biết $EJ = \text{hằng}$.



8.7 Xác định độ võng và góc xoay tại C. H.8.7

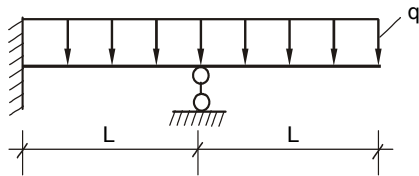


8.8 Một hệ thống gồm ba công xon, đầu tự do được liên kết với nhau bằng những giằng cứng như H.8.8. Tính ứng suất cực đại ở mỗi dầm khi có lực treo ở

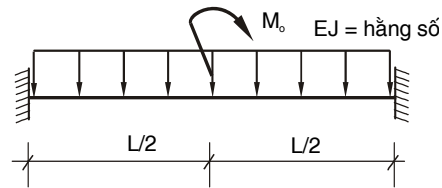


dầm, biết độ cứng EJ là hằng số.

8.9 Vẽ biểu đồ nội lực của dầm siêu tĩnh như H.8.9. Viết phương trình đường đàn hồi, biết độ cứng EJ là hằng số.



H. 8.9



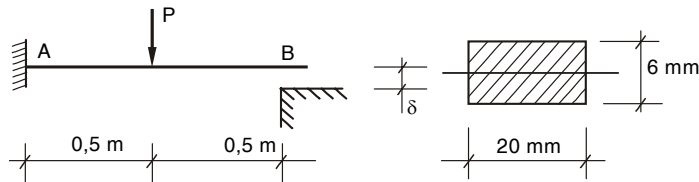
H. 8.10

8.10. Xác định phản lực của dầm siêu tĩnh như H.8.10.

8.11. Thanh thép dài 1 m, mặt cắt chữ nhật 2036 mm, ngàm ở đầu A, chịu lực $P = 30$ N đặt ở giữa nhịp. Kiểm tra độ bền của dầm.

Biết $[\sigma] = 16$ kN/cm². Ở đầu B có khe hở $\delta = 20$ mm.

Cho $E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm².

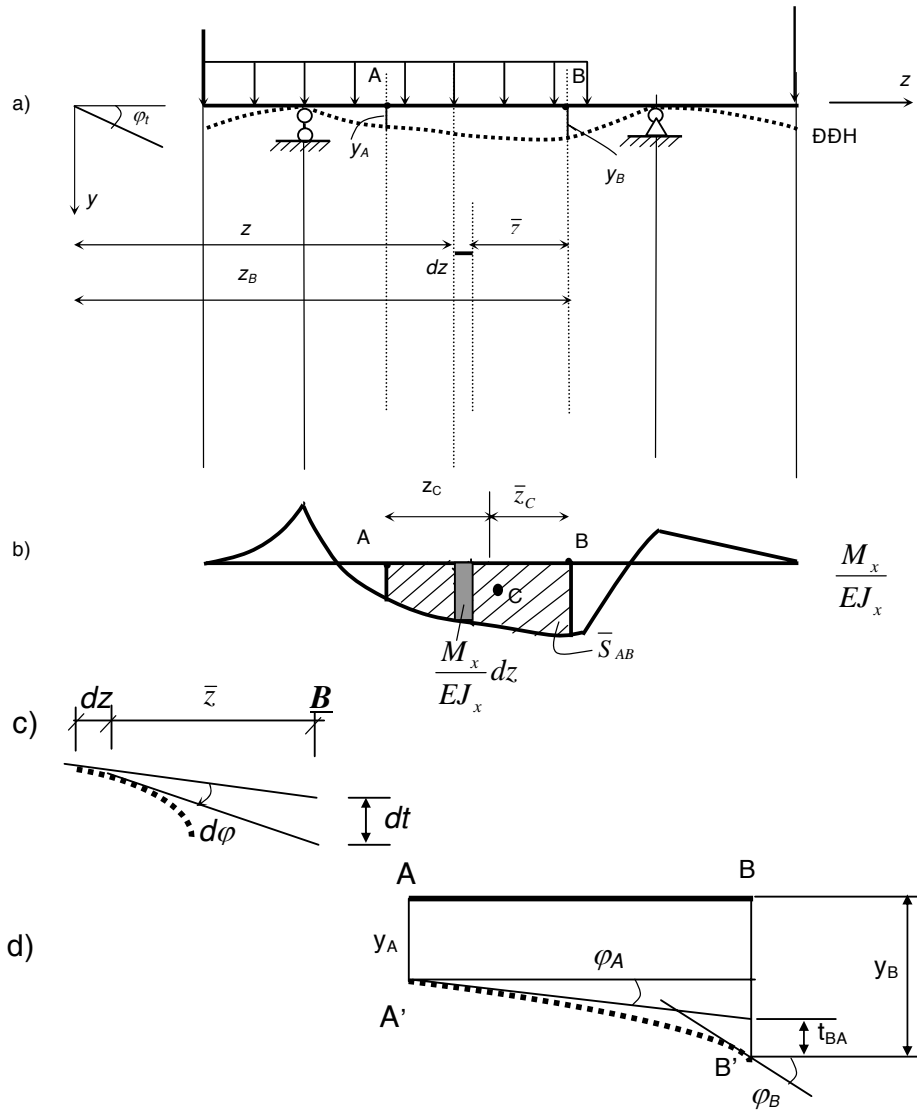


H. 8.11

8.5. PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH MÔMEN (DTMM)

1. Nội dung phương pháp

Xét dầm chịu uốn có biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ như H.8.13b, đường đàn hồi (nét đứt) như H.8.13a.



H.8.13

♦ Xét đoạn dầm AB, ta đã có:

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} \Leftrightarrow \frac{dy'}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow d\varphi = -\frac{M_x}{EJ_x} dz$$

$$\Rightarrow \int_{z_A}^{z_B} d\varphi = \int_{z_A}^{z_B} -\frac{M_x}{EJ_x} dz$$

$$\varphi_B - \varphi_A = \varphi_{AB} = -\bar{S}_{AB} \quad (8.4)$$

với \bar{S}_{AB} là diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ gồm giữa hai mặt cắt A và B.

Định lý 1. Độ thay đổi góc xoay giữa hai mặt cắt của một dầm (thí dụ giữa A và B) thì bằng dấu trừ diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ giữa hai mặt cắt ấy.

♦ Từ H.8.13c ta có thể viết:

$$dt = \bar{z}d\varphi = -\bar{z} \frac{M_x}{EJ_x} dz$$

suy ra:
$$t_{BA} = \int_{z_A}^{z_B} dt = \int_{z_A}^{z_B} -\bar{z} \frac{M_x}{EJ_x} dz = -\bar{z}_C \bar{S}_{AB}$$

\bar{z}_C là khoảng cách từ trọng tâm của diện tích \bar{S}_{AB} đến B

Định lý 2. Độ sai lệch giữa tiếp tuyến ở một điểm B trên đường đàn hồi với một tiếp tuyến ở một điểm A khác cũng trên đường đàn hồi bằng với dấu trừ mômen tĩnh của diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ đối với đường thẳng đứng đi qua B.

Từ H.8.13d ta có:

$$\begin{aligned} y_B &= y_A + \varphi_A L_{AB} + t_{BA} \\ &= y_A + \varphi_A L_{AB} - \bar{z}_C \bar{S}_{AB} \end{aligned} \quad (8.5)$$

(8.5) chính là công thức dùng để xác định độ võng của điểm B nếu biết độ võng của một điểm A ($z_B > z_A$) và biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ giữa hai điểm này.

♦ Từ (8.5) ta cũng có thể tính độ võng của điểm A khi biết độ võng của điểm B ($z_B > z_A$). Thật vậy theo phần trên ta có:

$$\varphi_A = \varphi_B + \bar{S}_{AB}$$

và:
$$y_A = y_B - \varphi_A L_{AB} + \bar{z}_C \bar{S}_{AB}$$

với:
$$\bar{z}_C = L_{AB} - z_C$$

ta viết:
$$y_A = y_B - (\varphi_B + \bar{S}_{AB}) L_{AB} + (L_{AB} - z_C) \bar{S}_{AB}$$

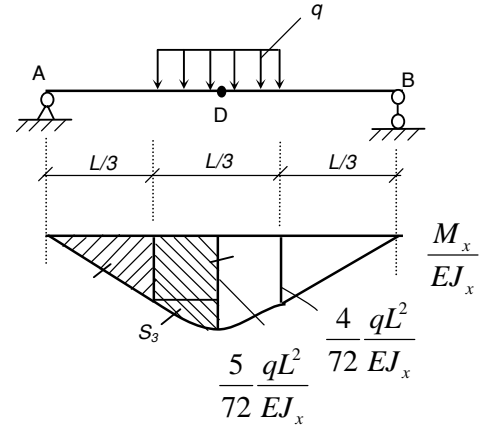
Khai triển và rút gọn, ta được:

$$y_A = y_B - \varphi_B L_{AB} - z_C \bar{S}_{AB} \quad (8.5)'$$

trong đó: z_C - là khoảng cách từ trọng tâm C của \bar{S}_{AB} kể từ A.

- ◆ Dùng phương pháp DTMM cần biết diện tích và trọng tâm của một số hình (bảng 8.2).

Thí dụ 8.7. Dùng phương pháp DTMM xác định góc xoay ở đầu trái A và độ võng ở điểm D giữa dầm (H.8.14). $EJ_x =$ hằng số.



Giải.

+ Theo định lý 1, công thức (8.4), xét hai điểm A ($z = 0$) và D ($z = L/2$) :

$$\varphi_D = \varphi_A - \bar{S}_{AD}$$

Chú ý rằng $\varphi_D = 0$ vì bài toán đối xứng và \bar{S}_{AD} có thể phân chia thành $\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$ (H.8.14).

$$\Rightarrow \varphi_A - (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3) = 0$$

$$\varphi_A = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$$

$$= \frac{4}{72} \times \frac{qL^2}{EJ_x} \times \frac{1}{2} \times \frac{L}{3} + \frac{4}{72} \times \frac{qL^2}{EJ_x} \times \frac{L}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{qL^2}{72EJ_x} \times \frac{L}{6} = \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EJ_x}$$

Góc xoay của mặt cắt A thuận chiều kim đồng hồ.

+ Áp dụng công thức (8-5), ta viết

$$y_D = y_A + \varphi_A \frac{L}{2} - z_C \bar{S}_{AD}$$

$$= 0 + \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EJ_x} \times \frac{L}{2} - \left(z_C^{(-1)} \bar{S}_1 + z_C^{(-2)} \bar{S}_2 + z_C^{(-3)} \bar{S}_3 \right)$$

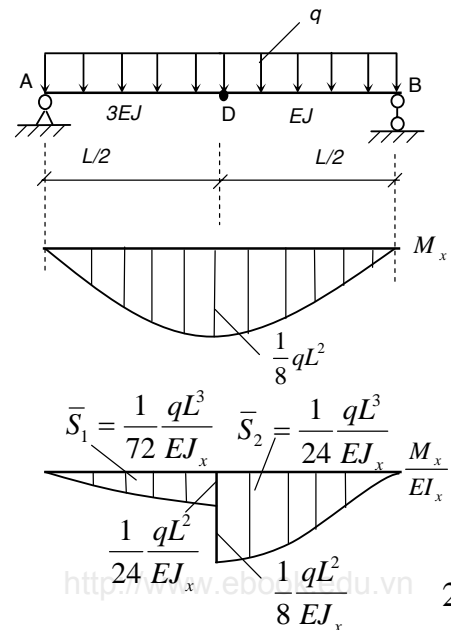
$$= \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EJ_x} \times \frac{L}{2} - \left[\left(\frac{L}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{L}{3} \right) \times \frac{1}{2} \times \frac{4qL^2}{72EJ_x} \times \frac{L}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{L}{6} \times \frac{L}{6} \times \frac{4qL^2}{72EJ_x} + \frac{3}{8} \times \frac{L}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{qL^2}{72EJ_x} \times \frac{L}{6} \right]$$

$$= \frac{77}{11664} \times \frac{qL^2}{EJ_x}$$

Độ võng mặt cắt D hướng xuống dưới.

Thí dụ 8.8

Xác định góc xoay ở A,B và độ võng ở D của dầm cho như H.8.15



$$\bar{S}_1 = \frac{1}{72} \frac{qL^3}{EJ_x} \quad \bar{S}_2 = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

$$\frac{1}{24} \frac{qL^2}{EJ_x} \quad \frac{1}{8} \frac{qL^2}{EJ_x}$$

Giải

+ Biểu đồ mô men uốn M_x và $\frac{M_x}{EJ}$

vẽ như H.8.15

+ Theo công thức 8.5, ta có:

$$y_B = y_A + \varphi_A L - \bar{z}_C \times \bar{S}_{AB}$$

$$0 = 0 + \varphi_A L - \bar{z}_C^{(1)} \times \bar{S}_1 - \bar{z}_C^{(2)} \times \bar{S}_2$$

$$\Rightarrow \varphi_A = \frac{1}{L} (\bar{z}_C^{(1)} \times \bar{S}_1 + \bar{z}_C^{(2)} \times \bar{S}_2)$$

\Rightarrow

$$= \frac{1}{L} \left[\left(\frac{3L}{8} + \frac{L}{2} \right) \times \frac{qL^3}{72EJ_x} + \frac{5L}{8} \times \frac{qL^3}{24EJ_x} \right] = \frac{13}{576} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

+ Bây giờ áp dụng định lý 1, công thức (8.4)

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \varphi_A - \bar{S}_{AB} = \varphi_A - \bar{S}_1 - \bar{S}_2 \\ &= \frac{13}{576} \frac{qL^3}{EJ_x} - \frac{qL^3}{72EJ_x} - \frac{qL^3}{24EJ_x} = -\frac{19}{576} \frac{qL^3}{EJ_x} \end{aligned}$$

Góc xoay mặt cắt B ngược chiều kim đồng hồ.

+ Cuối cùng xác định độ võng ở D bằng công thức 8.5 áp dụng cho hai điểm A và D

$$\begin{aligned} y_D &= y_A + \varphi_A \frac{L}{2} - \bar{z}_C \bar{S}_{AD} \\ &= 0 + \frac{13}{576} \times \frac{qL^3}{EJ_x} \times \frac{L}{2} - \frac{3}{8} \times \frac{L}{2} \times \frac{qL^3}{72EJ_x} = \frac{5}{576} \times \frac{qL^4}{EJ_x} \end{aligned}$$

+ Ta có thể kiểm tra lại kết quả của y_D bằng cách khảo sát đoạn DB, áp dụng (8.5)'

$$\begin{aligned} y_D &= y_B - \varphi_B \frac{L}{2} - \bar{z}_C \bar{S}_{BD} \\ &= 0 - \left(-\frac{19}{576} \times \frac{qL^3}{EJ_x} \right) \times \frac{L}{2} - \frac{3}{8} \times \frac{L}{2} \times \frac{qL^3}{24EJ_x} = \frac{5}{576} \times \frac{qL^4}{EJ_x} \end{aligned}$$

8.5 BÀI TOÁN SIÊU TĨNH (BTST)

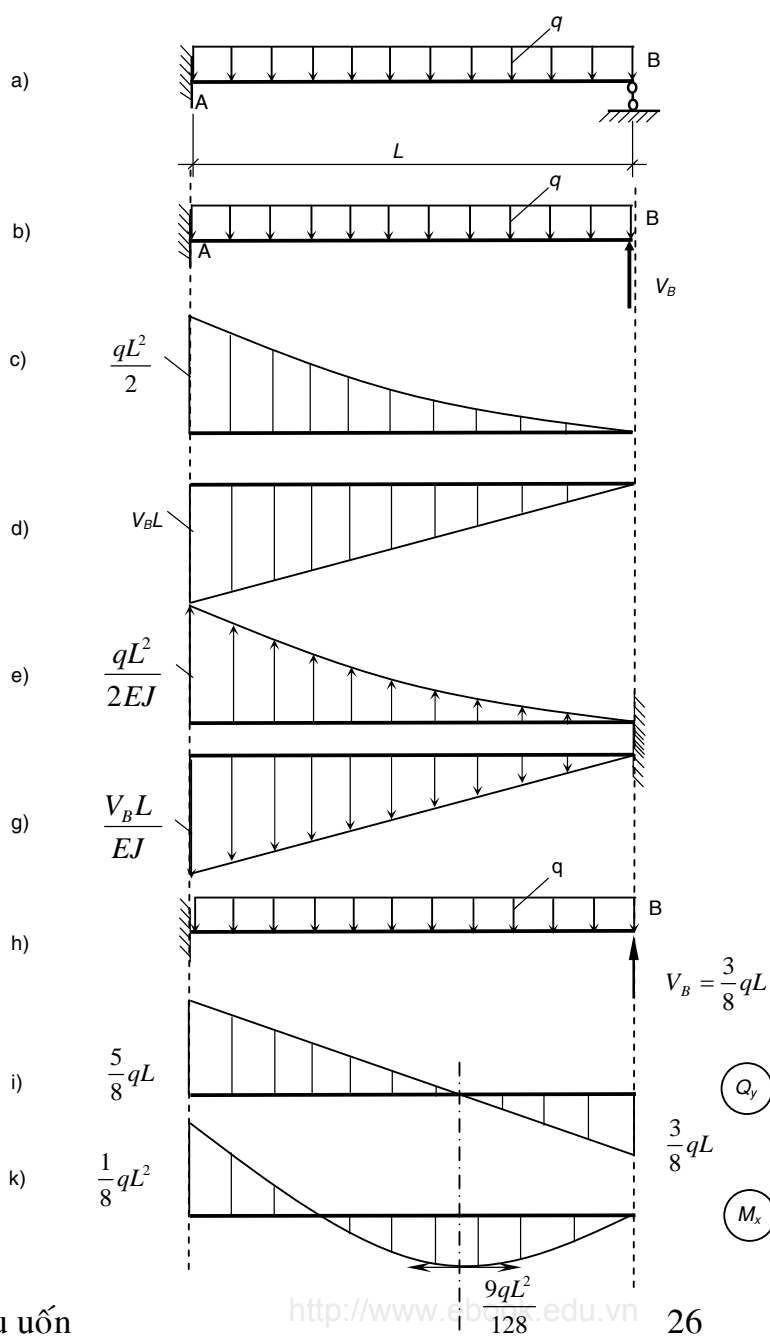
Tương tự các bài toán về thanh chịu kéo, nén đúng tâm, ta còn có các BTST về uốn.

Đó là các bài toán mà ta không thể xác định toàn bộ nội lực hoặc phản lực chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học, vì số ẩn số phải tìm của bài toán lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học có được.

Để giải được các BTST, cần tìm thêm một số phương trình phụ dựa vào điều kiện biến dạng của dầm.

Xét cụ thể thí dụ sau:

Thí dụ 8.10. Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm như H.8.16a.



Biết $EJ = \text{const.}$

Giải

Giải.

+ Dầm đã cho có 4 phản lực cần tìm (ba ở ngàm A và một ở gối tựa B). Ta chỉ có 3 phương trình cân bằng tĩnh học, nên cần tìm thêm 1 phương trình phụ về điều kiện biến dạng của dầm.

+ Tưởng tượng bỏ gối tựa ở đầu B và thay vào đó một phản lực V_B (H.8.12b), ta được một hệ mới. Hệ này chỉ có thể làm việc giống như hệ trên khi V_B phải có trị số và chiều thế nào để độ võng tại B, do tải trọng q và V_B sinh ra, phải bằng không

⇔ Điều kiện biến dạng (chuyển vị): $y_B(q, V_B) = 0$

+ Ta tính độ võng tại B bằng phương pháp tải trọng giả tạo (hay một phương pháp khác).

Biểu đồ mômen uốn của dầm ở H.8.16b do tải trọng q và phản lực V_B gây ra vẽ như H.8.16c,d, DGT và q_{gt} như H.8.16 e, g. Ta có:

Độ võng y_B của hệ 8.16b chính là Mômen giả tạo tại B của DGT

$$y_B = M_{gt}^B = \frac{1}{3}L \frac{qL^2}{2EJ} \times \frac{3}{4}L - \frac{1}{2}L \frac{V_B L}{EJ} \times \frac{2}{3}L$$

Điều kiện độ võng $y_B = 0, \Rightarrow V_B = \frac{3}{8}qL$

Sau khi tìm được V_B , dễ dàng vẽ được các biểu đồ nội lực của dầm đã cho như H.8.16 i, k.

Thí dụ 8.11. Tính phản lực V_B

của dầm siêu tĩnh như H.8.17a.

Cho biết : $EJ_x = \text{hằng}$

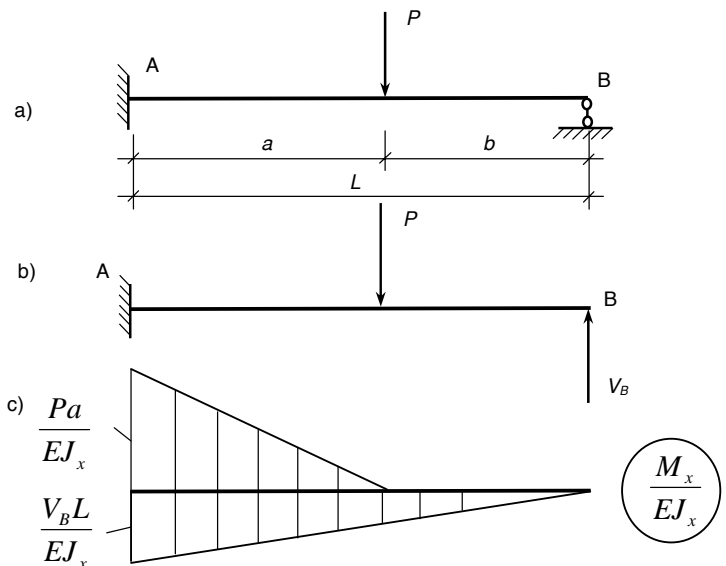
Giải.

Tương tự thí dụ trên, cũng có điều kiện $y_B = 0$

Tính y_B bằng phương pháp diện tích mô men

Biểu đồ M_x/EJ_x do tải trọng P và phản lực V_B được vẽ H.8.17c

Áp dụng công thức (8.5), ta



H.8.17

có:

$$y_A = y_B - \varphi_A L + \bar{z} \bar{s}_{AB}$$

$$0 = y_B - 0 \times L + \left[- \left(L - \frac{a}{3} \right) \frac{1}{2} a \frac{Pa}{EJ} + \frac{2}{3} L \frac{1}{2} L \frac{V_B L}{EJ} \right]$$

$$y_A = - \frac{Pa^2}{2EJ} \left(\frac{3L-a}{3} \right) + \frac{V_B L^3}{3EJ}$$

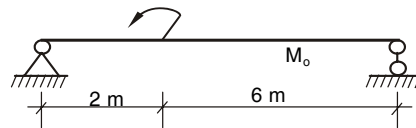
Điều kiện $y_B = 0$ cho ta

$$0 = - \frac{Pa^2}{2EJ} \left(\frac{3L-a}{3} \right) + \frac{V_B L^3}{3EJ}$$

suy ra $V_B = \frac{Pa^2}{2L^3} (3L-a)$

BÀI TẬP CHƯƠNG 8

8.1. Xác định đường đàn hồi dầm bằng phương pháp tích phân không định

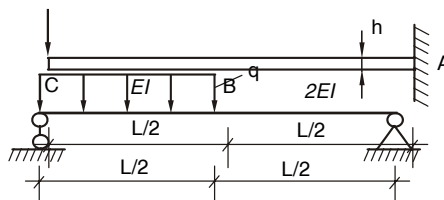


H.8.19

hạn, biết $M_o = 20 \text{ kNm}$

8.2. Xác định góc xoay ở hai đầu dầm và độ võng tại giữa dầm bằng phương pháp tích phân không định hạn

8.3. Dầm mặt cắt ngang thay đổi và chịu lực như H.8.21. Tính độ võng tại dầm tự do và góc tại mặt cắt ngang giữa dầm.

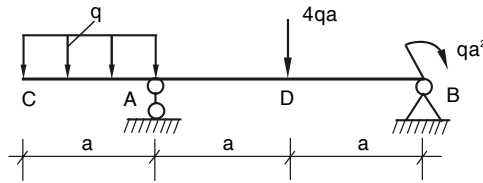


H.8.20

H.8.21

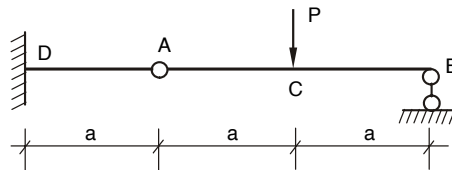
8.4. Dầm có độ cứng không đổi. Xác định:

- Độ võng và góc xoay tại C
- Góc xoay tại A và B
- Độ võng tại mặt cắt D



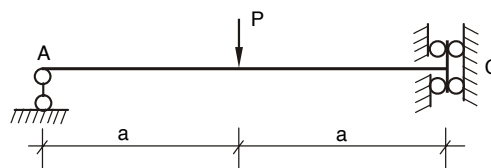
H.8.22

8.5. Tìm độ võng tại mặt cắt C, góc xoay bên trái và phải khớp A của dầm



như H.8.23.

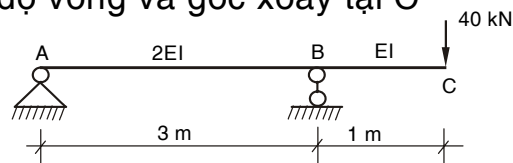
H.8.23



8.6. Tìm độ võng tại B, góc xoay tại A của dầm như H.8.24.

H.8.24

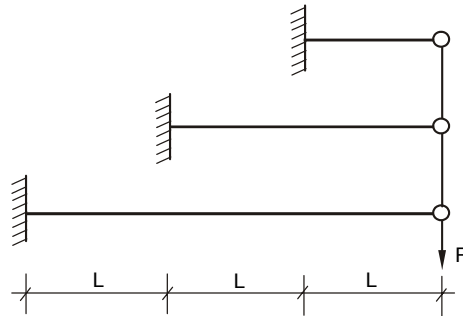
8.7. Xác định độ võng và góc xoay tại C



H.8.25

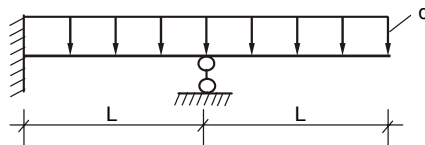
8.8. Một hệ thống gồm ba công xon, Dầm tự do được liên kết với nhau

bằng những găng cứng. Tính ứng suất cực đại ở mỗi dầm khi có lực P treo ở dầm



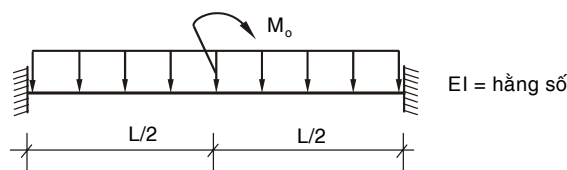
H.8.26

8.9. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm siêu tĩnh như H.8.27. Viết phương trình đường đàn hồi.



H.8.27

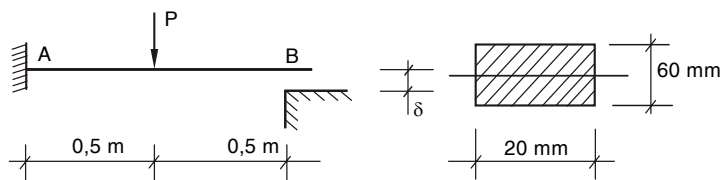
8.10. Xác định phản lực của dầm siêu tĩnh như H.8.28.



H.8.28

8.11. Thanh thép dài 1 m, mặt cắt chữ nhật 2036 mm, ngàm ở dầm A, chịu lực $P = 30$ N đặt ở giữa nhịp. Kiểm tra độ bền của dầm.

Biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$. Ở dầm B có khe hở $\delta = 20$ mm, cho $E = 2 \cdot 10^5$



MN/m²

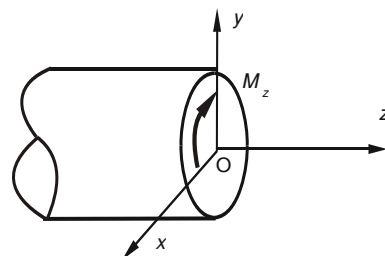
H.8.29

Chương 9

XOẮN THUẦN TÚY

I. KHÁI NIỆM

1- Định nghĩa: Thanh chịu xoắn thuần túy khi trên các mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là mômen xoắn M_z (H.9.1).



H. 9.1

Dấu của M_z : $M_z > 0$ khi từ ngoài mặt cắt nhìn vào thấy M_z quay thuận kim đồng hồ

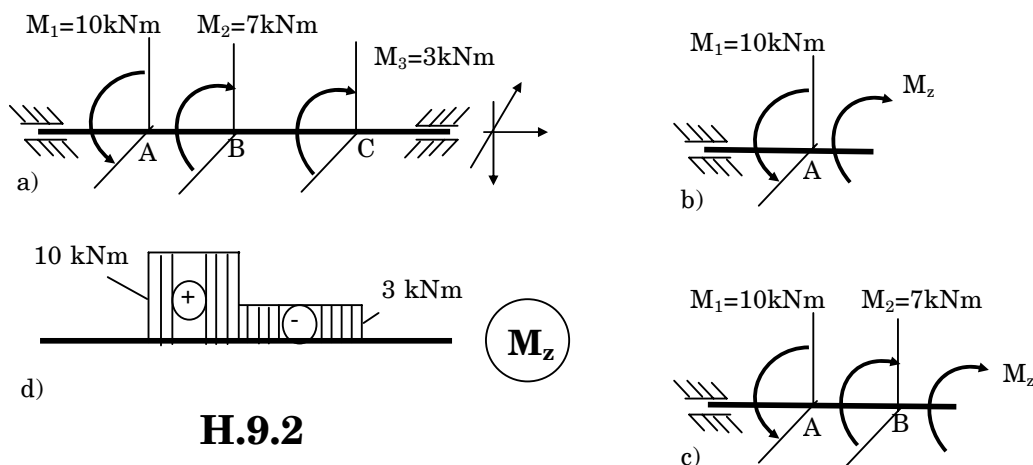
Ngoại lực: Gồm các ngẫu lực, mômen xoắn M_z , nằm trong mặt phẳng vuông góc trục thanh.

Thực tế: trục truyền động, thanh chịu lực không gian, dầm đỡ ôvăng...

2- Biểu đồ nội lực mômen xoắn M_z

Biểu đồ mômen xoắn được vẽ bằng cách xác định nội lực theo phương pháp mặt cắt và điều kiện cân bằng tĩnh học: $\sum M/OZ = 0$.

Thí dụ 1: Vẽ biểu đồ M_z cho trục truyền động chịu tác dụng của ba ngẫu lực xoắn (mômen xoắn) (H.9.2.a).



H.9.2

Giải: Thực hiện một mặt cắt ngang trong đoạn AB, xét cân bằng phần trái (H.9.2.b), dễ thấy rằng để cân bằng ngoại lực là ngẫu lực xoắn M_1 , trên tiết diện đang xét phải có nội lực là mômen xoắn M_z :

$$\sum M/z = 0 \Rightarrow M_z - 10 = 0 \Rightarrow M_z = 10\text{kNm}$$

Tương tự, cắt qua đoạn BC, xét phần trái (H.9.2.c):

$$\sum M/z = 0 \Rightarrow M_z + 7 - 10 = 0 \Rightarrow M_z = 3$$

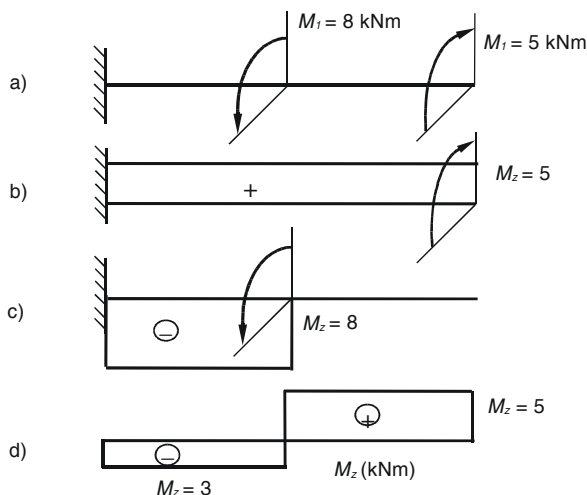
Mômen tại các tiết diện của hai đoạn đều thanh bằng không, biểu đồ nội lực vẽ ở H.9.2.d.

Thí dụ 2: Vẽ biểu đồ mômen xoắn M_z (H.9.3.a)

Giải: Phân tích thành tổng của hai trường hợp tác dụng riêng lẻ (H.9.3b và H.9.3c).

Trong mỗi trường hợp, ngoại lực là một ngẫu lực gây xoắn, do đó nội lực trong thanh cũng là mômen xoắn. Biểu đồ nội lực của từng thanh vẽ ngay trên H.9.3.b,c.

Biểu đồ M_z của thanh là tổng đại số hai biểu đồ trên (H.9.3.d).

**H.9.3**

Nhận xét: Dấu của nội lực là dương khi từ ngoài nhìn vào đầu thanh thấy ngoại lực quay thuận chiều kim đồng hồ và ngược lại.

3- Công thức chuyển đổi công suất động cơ ra ngẫu lực xoắn (mômen xoắn ngoại lực) trên trục

Khi tính toán các trục truyền động, thường ta chỉ biết công suất truyền của mô tơ tính bằng mã lực hay kilôoát và tốc độ trục quay bằng vòng/phút, do đó cần chuyển đổi công suất truyền ra ngẫu lực xoắn tác dụng lên trục.

Giả sử có một ngẫu lực xoắn M_o (đơn vị là N.m) tác dụng làm trục quay một góc α (radian) trong thời gian t , công sinh ra là:

$$A = M_o \cdot \alpha \quad (i)$$

công suất là:
$$W = \frac{A}{t} = \frac{M_o \alpha}{t} = M_o \frac{\alpha}{t} = M_o \omega \quad (ii)$$

trong đó: ω - là vận tốc góc (rad/s), đơn vị của công suất là N.m/s.

Gọi n là số vòng quay của trục trong một phút (vòng/phút), ta có:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad (iii)$$

từ (ii) và (iii) \Rightarrow

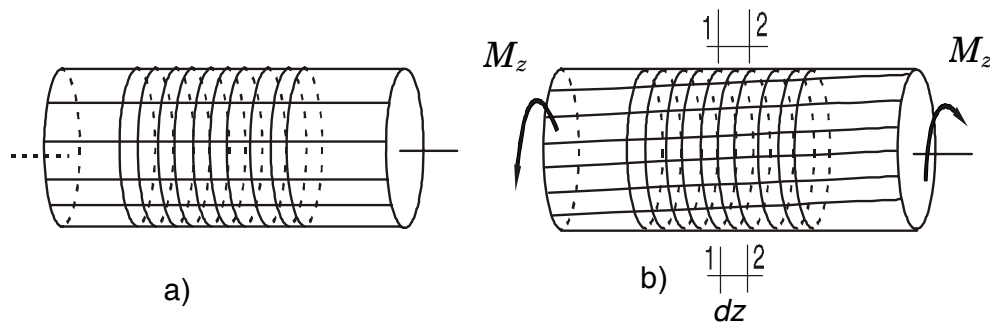
a) Nếu W tính bằng mã lực (CV, HP) ; 1 mã lực = 750 N.m/s = 0,736 kW:

$$M_o = \frac{30W}{\pi n} = \frac{30 \cdot 750 \cdot W}{\pi n} = 7162 \frac{W}{n} \text{ (Nm)} \quad (9.1)$$

b) Nếu W tính bằng kilôwat (KW), 1 KW \approx 1020 N.m/s:

$$M_o = \frac{30W}{\pi n} = \frac{30 \cdot 1020 \cdot W}{\pi n} = 9740 \frac{W}{n} \text{ (Nm)} \quad (9.2)$$

II. XOẮN THUẦN TÚY THANH THẲNG TIẾT DIỆN TRÒN



H. 9.4

1- Thí nghiệm - Nhận xét

Lấy một thanh thẳng tiết diện tròn, trên mặt ngoài có vạch những đường song song và những đường tròn thẳng góc với trục, tạo thành lưới ô vuông (H.9.4.a). Tác dụng lên hai đầu thanh hai ngẫu lực xoắn M_z ngược chiều, ta thấy trục thanh vẫn thẳng, chiều dài thanh không đổi, những đường tròn thẳng góc với trục vẫn tròn và thẳng góc với trục, những đường song song với trục thành những đường xoắn ốc, lưới ô vuông thành lưới bình hành (H.9.4.b).

2- Các giả thiết

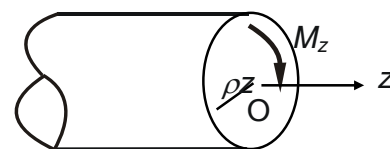
- Mặt cắt ngang vẫn phẳng, thẳng góc với trục thanh và khoảng cách không đổi trong quá trình biến dạng,
- Các bán kính vẫn thẳng và không đổi trong quá trình biến dạng,.
- các thớ dọc không ép và đẩy lẫn nhau trong quá trình biến dạng.

3- Công thức ứng suất tiếp

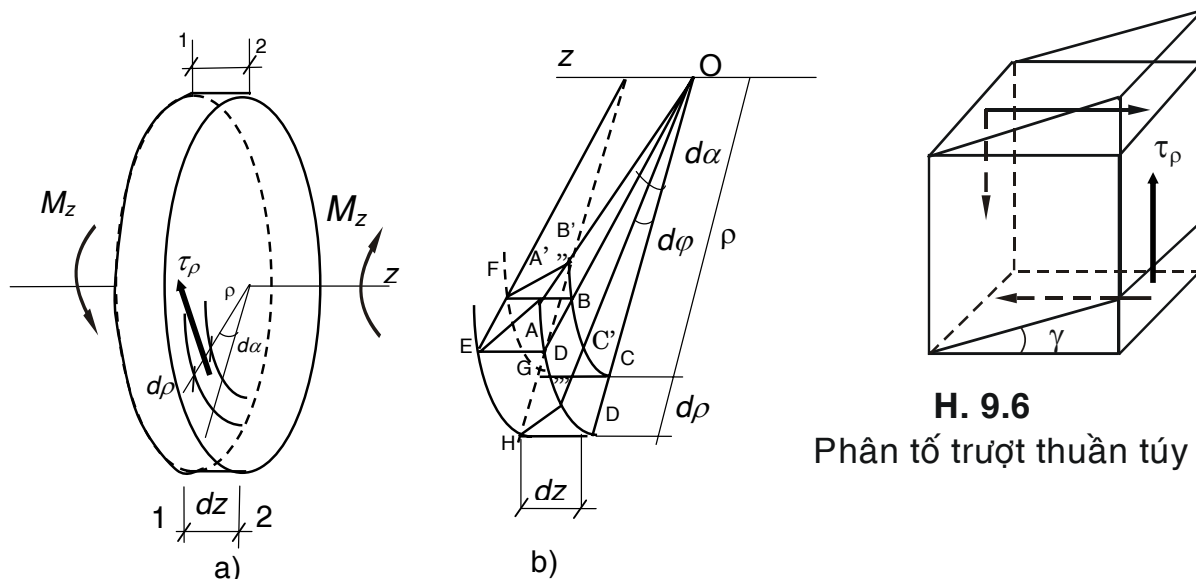
Ta tính ứng suất tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang có bán kính ρ (H.9.1).

Có thể nhận thấy, theo thí nghiệm trên, biến dạng của thanh chịu xoắn thuần túy chỉ là sự xoay tương đối giữa các mặt cắt ngang quanh trục.

Để xét biến dạng xoắn của một phân tử tại một điểm bất kỳ bán kính trong thanh, ta tách phân tử bằng ba cặp mặt cắt như sau:



H. 9.1



H. 9.6
Phân tử trượt thuần túy

H. 9.5 Biến dạng của phân tử chịu xoắn

- Hai mặt cắt (1-1) và (2-2) thẳng góc với trục cách nhau đoạn dz (H.9.5.a).
- Hai mặt cắt chứa trục hợp với nhau một góc $d\alpha$ bé (H.9.5.b).
- Hai mặt cắt hình trụ đồng trục z (trục thanh) bán kính ρ và $\rho + d\rho$ (H.9.5.a).

Theo các giả thiết, trong quá trình biến dạng, so với các điểm E, F, G, H thuộc mặt cắt (1-1), các điểm A, B, C, D của phân tử trên mặt cắt (2-2) di chuyển đến A', B', C', D' phải nằm trên cung tròn bán kính ρ và $\rho + d\rho$, đồng thời OA'B' và OC'D' phải thẳng hàng.

Gọi $d\varphi$ là góc giữa hai đường thẳng OAB và OA'B', đó là góc xoay của mặt cắt (2-2) so với mặt cắt (1-1) quanh trục z , $d\varphi$ cũng chính là góc xoắn tương đối giữa hai tiết diện lân cận cách nhau dz .

Đối với phân tử đang xét, góc A'EA biểu diễn sự thay đổi góc vuông của mặt bên phân tử gọi là biến dạng trượt (góc trượt) γ của phân tử.

Từ (H.9.5.b), ta có:

$$\tan \gamma \approx \gamma = \frac{AA'}{EA} = \rho \frac{d\varphi}{dz} \quad (a)$$

Theo giả thiết a) không có biến dạng dài theo phương dọc trục, theo giả thiết c) các thớ dọc không tác dụng với nhau nên không có ứng suất pháp tác dụng lên các mặt của phân tố.

Theo giả thiết a) các góc vuông của mặt CDHG và mặt BAEF không thay đổi nên không có ứng suất tiếp hướng tâm trên mặt A, B, C, D. Do giả thiết b), mọi bán kính vẫn thẳng nên không có ứng suất tiếp hướng tâm trên mặt A, B, E, F.

Như vậy, trên mặt cắt ngang của thanh chịu xoắn thuần túy chỉ tồn tại ứng suất tiếp theo phương vuông góc bán kính, gọi là τ_ρ và phân tố đang xét ở trạng thái trượt thuần túy (H.9.6).

Áp dụng định luật Hooke về trượt cho phân tố này, ta có:

$$\tau_\rho = G \gamma \quad \text{b)}$$

(a) vào (b) \Rightarrow

$$\tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dz} \quad \text{(c)}$$

Gọi dF là một diện tích vô cùng bé bao quanh điểm đang xét, thì $\tau_\rho \cdot dF$ là lực tiếp tuyến tác dụng trên diện tích đó và $\tau_\rho \cdot dF \cdot \rho$ là mômen của lực $\tau_\rho \cdot dF$ đối với tâm O. Tổng các mômen này phải bằng M_z , nên ta có thể viết:

$$M_z = \int_F \tau_\rho \cdot dF \cdot \rho \quad \text{(d)}$$

$$\text{(c) vào (d)} \Rightarrow M_z = \int_F G\rho \frac{d\varphi}{dz} \cdot dF \cdot \rho \quad \text{(e)}$$

Vì $G \cdot d\varphi/dz$ là hằng số đối với mọi điểm thuộc mặt cắt F , nên ta có thể đưa ra ngoài dấu tích phân, khi đó tích phân $\int_F \rho^2 \cdot dF$ chính là mômen quán tính cực J_ρ của mặt cắt ngang đối với tâm O, ta được:

$$M_z = G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 \cdot dF = G \frac{d\varphi}{dz} J_\rho \quad \text{(f)}$$

$$\text{từ (f) ta có:} \quad \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_\rho} \quad \text{(g)}$$

Có thể thấy rằng, $d\varphi/dz$ chính là góc xoắn trên một đơn vị chiều dài (còn gọi là **góc xoắn tỉ đối**) (rad/m). Đặt $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$, ta có:

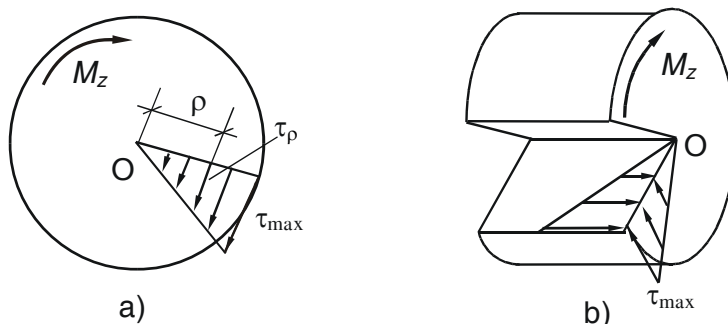
$$\theta = \frac{M_z}{GJ_\rho} \quad \text{(9-3)}$$

thay (g) vào (c) ta được công thức tính ứng suất tiếp:

$$\tau_{\rho} = \frac{M_z}{J_{\rho}} \rho \quad (9.4)$$

Ứng suất tiếp thay đổi theo quy luật bậc nhất, bằng không tại tâm O và cực đại tại những điểm trên chu vi.

Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp tại mọi điểm trên mặt cắt ngang thể hiện trên H.9.7.a. Trên H.9.7.b, thể hiện ứng suất tiếp đối ứng trên các mặt cắt chứa trục.



H.9.7. Phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt
Và ứng suất tiếp đối ứng

Ứng suất tiếp cực đại ở các điểm trên chu vi ($\rho =$ bán kính R)

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_{\rho}} R$$

đặt: $W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{R}$; W_{ρ} gọi là **mômen chống xoắn** của mặt cắt ngang

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_{\rho}} \quad (9.5)$$

* Với tiết diện tròn đặc và D là đường kính tiết diện:

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3 \quad (9.6)$$

* Với tiết diện tròn rỗng:

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{R} = \frac{\pi D^4(1-\eta^4)}{32} \frac{1}{R} = \frac{\pi D^3}{16}(1-\eta^4) \approx 0,2D^3(1-\eta^4) \quad (9.7)$$

trong đó: η là tỷ số giữa đường kính trong và đường kính ngoài ($\eta = d/D$).

4- Công thức tính biến dạng khi xoắn

Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau dz là $d\varphi = \frac{M_z}{GJ_\rho} dz$ (g)

⇒ Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một đoạn dài L là:

$$\varphi = \int_0^L d\varphi = \int_0^L \frac{M_z}{GJ_\rho} dz \quad (9.8)$$

* Khi đoạn thanh có M_z/GJ_ρ là hằng số $\Rightarrow \varphi = \frac{M_z L}{GJ_\rho}$ (9.9)

* Khi thanh gồm nhiều đoạn, mỗi đoạn có M_z/GJ_ρ là hằng số:

$$\varphi = \sum_i \left(\frac{M_z L}{GJ_\rho} \right)_i \quad (9.10)$$

Góc xoắn φ được quy ước dương theo chiều dương của M_z .

5- Tính toán thanh tròn chịu xoắn thuần túy:

Điều kiện bền:

$$+ \tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau_o}{n} \quad (9.11)$$

với: τ_o - là ứng suất tiếp nguy hiểm của vật liệu, xác định từ thí nghiệm
 n - là hệ số an toàn.

+ Theo thuyết bền ứng suất tiếp (chương 5):

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad (9.12)$$

+ Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng (chương 5):

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \quad (9.13)$$

Điều kiện cứng:

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \quad (9.14)$$

$[\theta]$: Góc xoắn tỷ đối cho phép, được cho từ các sổ tay kỹ thuật, đơn vị của $[\theta]$ là (radian/ đơn vị chiều dài)

Ba bài toán cơ bản:

- Kiểm tra bền, cứng (bài toán kiểm tra)
- Xác định tải trọng cho phép
- Xác định đường kính (bài toán thiết kế).

6- Thế năng biến dạng đàn hồi

Thế năng riêng tích lũy trong một đơn vị thể tích là:

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

Thanh chịu xoắn thuần túy, TTUS trượt thuần túy với ứng suất tiếp τ , nên $\sigma_1 = |\tau|$; $\sigma_2 = 0$ và $\sigma_3 = -|\tau|$, ta được:

$$u = \frac{1+\mu}{E} \tau^2 \quad (a)$$

với: $E = 2G/(1 + \mu)$, thay vào (a), ta được:

$$u = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \quad (b)$$

Thế năng tích lũy trong một đoạn dz là:

$$dU = \int_V u dV = \int_F u dF dz \quad (c)$$

thay (b) vào (c), ta được:

$$dU = \int_F \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} = \int_F \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{J_p^2} \rho^2 \frac{dF \cdot dz}{G} = \frac{1}{2G} \frac{M_z^2}{J_p^2} dz \int_F \rho^2 dF$$

hay:
$$dU = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{GJ_p} dz \quad (d)$$

Vậy thế năng trên đoạn thanh có chiều dài L là:

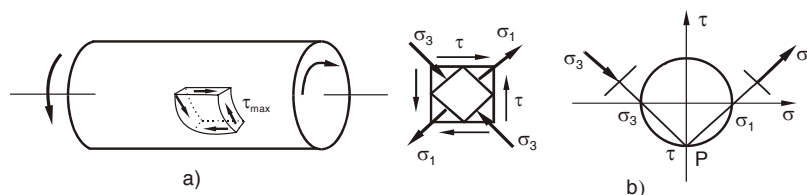
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_z^2}{GJ_p} dz \quad (9.15)$$

+ Khi đoạn thanh có M_z/GJ_p là hằng số $\Rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{M_z^2 L}{GJ_p} \quad (9.16)$

+ Khi thanh gồm nhiều đoạn, mỗi đoạn có M_z/GJ_p là hằng số

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{M_z^2 L}{GJ_p} \right)_i \quad (9.17)$$

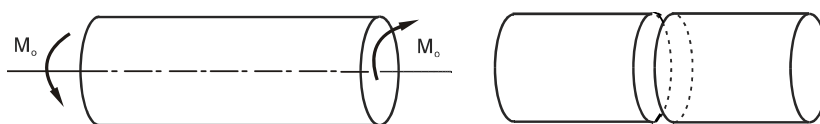
7- Dạng phá hỏng của các vật liệu



H. 9.8 Trạng thái ứng suất tại một điểm trên mặt ngoài của thanh chịu xoắn

Nghiên cứu trạng thái ứng suất của trục tròn chịu xoắn, ta thấy tại một điểm trên mặt ngoài, phân tử ở trạng thái trượt thuần túy chịu ứng suất tiếp cực đại τ_{max} (H.9.a), ở trạng thái này, theo hai phương nghiêng 45° so với trục có ứng suất kéo chính và ứng suất nén chính $\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|$ (H.9.8.b).

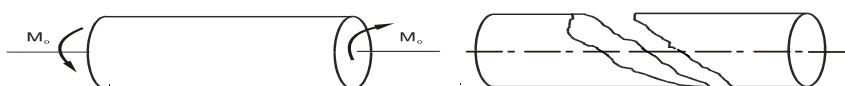
Mặt khác, qua thí nghiệm, ta cũng biết rằng vật liệu dẻo (như



H. 9.9 Dạng nứt gãy của vật liệu dẻo

thép) chịu kéo, chịu nén tốt như nhau, còn chịu cắt thì kém hơn, do đó, khi một trục thép bị xoắn sẽ bị gãy theo mặt cắt ngang, do ứng suất tiếp τ_{max} trên mặt cắt ngang (H.9.9).

Với vật liệu giòn như gang, chịu nén và chịu cắt rất tốt, còn chịu



H. 9.10 Dạng nứt gãy của vật liệu giòn

kéo rất kém nên khi xoắn sẽ bị gãy theo mặt nghiêng 45° so với trục do ứng suất kéo chính σ_1 (H.9.10).

Với vật liệu có cấu tạo thớ như gỗ, chịu cắt dọc thớ rất kém nên khi xoắn sẽ bị nứt dọc theo đường sinh do ứng suất ứng suất tiếp đối ứng với ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang (H.9.11).



H. 9.11 Dạng nứt gãy của gỗ chịu xoắn

Thí dụ 9.3 Một động cơ công suất 10kW, truyền một mômen xoắn lên một trục tròn đường kính D tại tiết diện A, vận tốc trục $n = 1400$ vg/phút. Giả sử hiệu suất truyền là 100%. Khi đó tại tiết diện B, C nhận được công suất truyền 3kW và 7kW (H.9.12.a). Định đường kính D , sau đó tính góc xoắn φ_{AC} . Biết: $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$; $[\theta] = 0,25^0/\text{m}$; $a = 50\text{cm}$; $G = 8.10^3 \text{ kN/cm}^2$.

Giải.

♦ Gọi ngẫu lực xoắn tác dụng tại A, B, C lần lượt là M_1, M_2, M_3 . Áp dụng công thức chuyển đổi, ta được:

$$M_1 = 9740 \times 10 / 1400 = 69,57 \text{ N.m} = 6957 \text{ Ncm}$$

$$M_2 = 9740 \times 3 / 1400 = 20,87 \text{ N.m} = 2087 \text{ Ncm}$$

$$M_3 = 9740 \times 7 / 1400 = 48,70 \text{ N.m} = 4870 \text{ Ncm}$$

Sơ đồ tính của trục ở (H.9.12.b), biểu đồ mômen vẽ ở (H.9.12.c).

♦ Định đường kính D:

+ Theo điều kiện bền $\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \Rightarrow \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{0,2D^3} \leq [\tau] \Rightarrow D \geq \sqrt[3]{\frac{M_z}{0,2.[\tau]}}$

với: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = 8 \text{ kN/cm}^2$;

$M_z = 4870 \text{ Ncm}$

$\Rightarrow D \geq 14,49 \text{ cm}$ (a)

+ Theo điều kiện cứng:

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \Rightarrow \frac{M_z}{GJ_p} = \frac{M_z}{G.0,1D^4} \leq [\theta]$$

$$\Rightarrow D \geq \sqrt[4]{\frac{M_z}{G.0,1.[\theta]}}$$

với: $[\theta] = 0,25^0/\text{m}$

$$= \frac{0,25 \times \pi}{180 \times 10^{-2}} \text{ rad/cm};$$

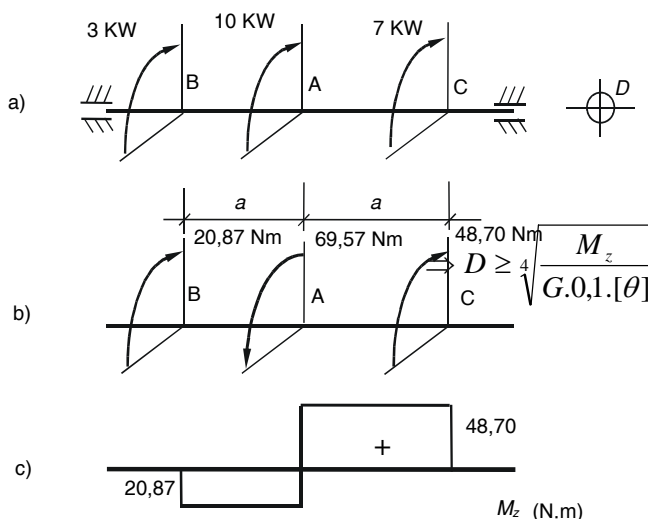
$M_z = 4870 \text{ Ncm}$;

$G = 8.10^3 \text{ kN/cm}^2 \Rightarrow D \geq 11,17\text{cm}$ (b)

Để thỏa cả hai yêu cầu (a), (b), ta chọn $D = 15 \text{ cm}$.

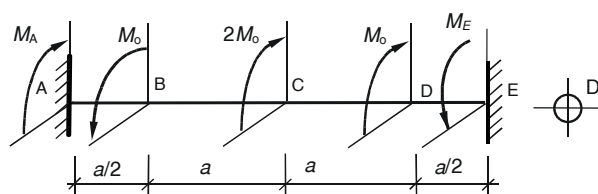
♦ **Tính góc xoắn φ_{AC} :** Áp dụng công thức (9.6), ta được:

$$\varphi_{AC} = \sum_i \left(\frac{M_z L}{GJ_p} \right)_i = \frac{4870 \times 50}{8 \times 10^3 \times 0,1 \times 15^4} = 0,006 \text{ rad}$$



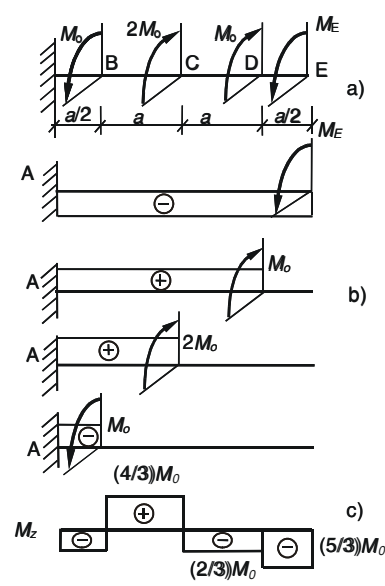
H. 9.12

Thí dụ 9.4 Một thanh tiết diện tròn đường kính D hai đầu ngàm chịu lực như (H.9.13). Vẽ biểu đồ M_z và định giá trị M_o theo điều kiện bền.



H. 9.13

Giải: Ngoại lực là mômen xoắn trong mặt phẳng thẳng góc với trục thanh thì phản lực phát sinh tại các liên kết ngàm A và E phải là các mômen xoắn M_A, M_E trong các mặt phẳng thẳng góc với trục thanh. Giả sử M_A, M_E có chiều như trên H.9.13.



H.9.15

Để xác định mômen phản lực, viết phương trình cân bằng $\sum M/z = 0$, ta có:

$$M_A - M_o + 2M_o + M_o - M_E = 0 \quad (a)$$

Phương trình (a) không đủ để định được phản lực M_A, M_E : **Bài toán siêu tĩnh.**

Cần bổ sung một (hay nhiều) phương trình thiết lập từ điều kiện biến dạng của bài toán (**phương trình điều kiện biến dạng**).

Thường cách giải như sau:

+ Tưởng tượng bỏ ngàm E, thay bằng phản lực tương ứng M_E (H.9.15.a).

+Viết phương trình điều kiện biến dạng: $\varphi_E = 0$ (Tại E liên kết ngàm \Rightarrow do đó góc xoay $\varphi_E = 0$)

+Tính φ_E : Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, biểu đồ mômen xoắn do từng trường hợp tải gây ra được vẽ ở H.9.15.b. Tính φ_E theo (9.10) như sau:

$$\varphi_E = \varphi_{EA} = \sum_i \left(\frac{M_i L_i}{GJ_p} \right) = -\frac{M_E \cdot 3a}{GJ_p} + \frac{M_o \cdot 5a}{GJ_p} + \frac{2M_o \cdot 3a}{GJ_p} - \frac{M_o \cdot a}{GJ_p}$$

+ Cho $\varphi_E = 0$, ta được : $M_E = \frac{5}{3} M_o$

Kết quả dương, M_E đúng chiều chọn.

+ Xác định được M_E , ta vẽ được biểu đồ mômen xoắn M_z như H.9.15.c. Từ biểu đồ nội lực M_z , ta thấy: $M_{z,max} = (5/3)M_o$.

Từ điều kiện bền, ta có: $\tau_{max} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{M_{z,max}}{0,2.D^3} \leq [\tau]$

$$\Rightarrow \frac{5M_o}{3,0,2.D^3} \leq [\tau] \Rightarrow M_o \leq [\tau] \frac{3,0,2.D^3}{5}$$

III. XOẮN THANH THẲNG TIẾT DIỆN CHỮ NHẬT

Thí nghiệm xoắn thanh tiết diện chữ nhật, biến dạng của thanh như (H.9.16).

Lý thuyết đàn hồi cho các kết quả như sau:

♦ **Ứng suất:** Trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất tiếp.

+ Tại tâm và các góc, ứng suất tiếp bằng không.

+ Tại điểm giữa cạnh dài, ứng suất tiếp đạt giá trị lớn

nhất :
$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha hb^2} \quad (9.18)$$

+ Tại điểm giữa cạnh ngắn, ứng suất τ_1

bé hơn: $\tau_1 = \gamma \tau_{\max} \quad (9.19)$

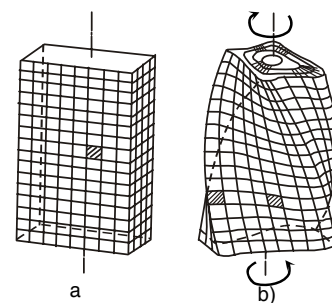
+ Phân bố ứng suất tiếp tại các điểm trên các trục đối xứng, các cạnh tiết diện và các đường chéo được biểu diễn ở H.9.17.

♦ **Góc xoắn tương đối:**

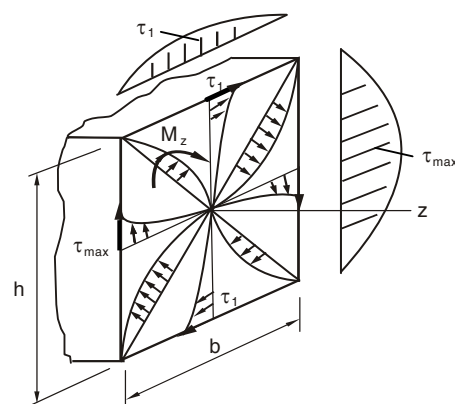
$$\theta = \frac{M_z}{\beta hb^3} \quad (9.20)$$

trong đó: α, γ, β là các hệ số phụ thuộc

tỷ số (cạnh dài h / cạnh ngắn b) được cho trong bảng 1.



H. 9.16 Sự vênh của tiết diện chữ nhật khi xoắn



H. 9.17 Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện chữ nhật

Bảng 9.1 Giá trị α, γ, β

| $\frac{h}{b}$ | 1 | 1,5 | 1,75 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 | ∞ |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| α | 0,203 | 0,231 | 0,239 | 0,246 | 0,258 | 0,267 | 0,282 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333 |
| β | 0,141 | 0,196 | 0,214 | 0,229 | 0,249 | 0,263 | 0,281 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333 |
| γ | 1,000 | 0,859 | 0,820 | 0,795 | 0,766 | 0,753 | 0,745 | 0,743 | 0,742 | 0,742 | 0,742 |

IV. TÍNH Lò XO HÌNH TRỤ BƯỚC NGẮN CHỊU LỰC DỌC TRỰC

Lò xo là một bộ phận được dùng rộng rãi trong kỹ thuật, được lắp đặt tại những chỗ cần giảm chấn do tải trọng động như đế móng thang máy, hệ thống nhún trong ô tô, để mô tơ công suất lớn...

Lò xo hình trụ được cấu tạo bằng cách quấn một sợi dây thép tiết diện vuông, chữ nhật hoặc tròn quanh một lõi hình trụ, ta chỉ tính lò xo chịu lực theo phương trục của hình trụ này; trục của hình trụ cũng là trục của lò xo, ngoài ra chỉ xét lò xo có các vòng gần nhau gọi là lò xo hình trụ bước ngắn (H.9.18.a).

1- Các đặc trưng của lò xo:

- + d: Đường kính dây lò xo.
- + D: Đường kính trung bình lò xo.
- + n: Số vòng làm việc của lò xo.
- + G: Mô đun đàn hồi trượt của vật liệu làm lò xo.

2- Ứng suất trong dây lò xo:

Dùng một mặt cắt chứa trục của lõi hình trụ cắt qua một sợi dây lò xo, tách lò xo làm hai phần, xét điều kiện cân bằng của một phần lò xo như trên H.9.18.b, ta được:

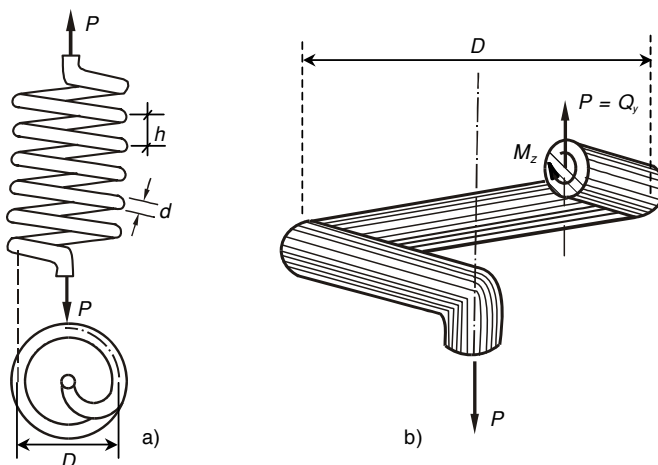
$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow Q_y = P$$

$$\Sigma M / o = 0 \Rightarrow M_z = P \cdot \frac{D}{2}$$

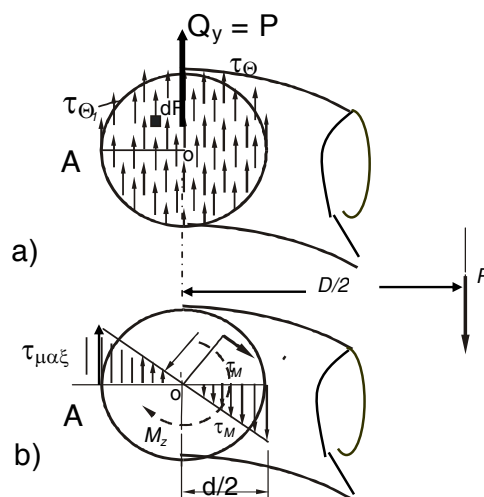
Trên mặt cắt đang xét (xem như mặt cắt ngang của dây lò xo) có lực cắt Q_y và mômen xoắn M_z , chúng đều gây ứng suất tiếp:

$$\tau = \tau_M + \tau_Q$$

Tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang, các thành phần ứng suất được biểu diễn như (H.9.19). Bỏ qua độ nghiêng của dây lò xo, coi tiết diện đang xét là tròn, có thể thấy



H. 9.18. a) Các đặc trưng của lò xo
b) Nội lực trên tiết diện dây lò xo



H. 9.19 Nội lực và ứng suất trên mặt cắt dây lò xo

rằng, tại mép trong của mặt cắt dây lò xo, điểm A trên H.9.19, ứng suất tiếp đạt giá trị cực đại, dù lực P là tác dụng kéo hay nén lò xo.

Một cách gần đúng, ứng suất tiếp tại điểm nguy hiểm có thể tính như sau:

$$\tau_{\max} = \tau_Q + \tau_M = \frac{Q_y}{F} + \frac{M_z}{W_p} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{P \frac{D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}}$$

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(\frac{d}{2D} + 1 \right) \approx \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (9.21)$$

Thực chất τ_Q không phân bố đều, còn công thức tính τ_M như trên không chính xác vì tiết diện không tròn do độ nghiêng của dây lò xo cũng như sợi dây lò xo không là thanh thẳng, cho nên trong tính toán thực hành, kể đến kết quả do thực nghiệm, ta có thể lấy:

$$\tau_{\max} = k \frac{P \frac{D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}} = k \frac{8PD}{\pi d^3} \quad \text{với} \quad k = \frac{\frac{D}{d} + 0,25}{\frac{D}{d} - 1} \quad (9.22)$$

2- Biến dạng của lò xo: Tính độ co, dãn λ của lò xo khi chịu lực dọc trục.

Dùng nguyên lý bảo toàn năng lượng, bỏ qua các mất mát năng lượng, **công ngoại lực T hoàn toàn biến thành thế năng biến dạng đàn hồi U .**

Ta có:

+ Công của ngoại lực P trên độ co, dãn λ của lò xo là: $T = \frac{1}{2} P \lambda$ (a)

+ Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong lò xo (bỏ qua thế năng do Q_y):

$$U = \frac{1}{2} \sum \frac{M_z^2 L}{GJ_p}$$

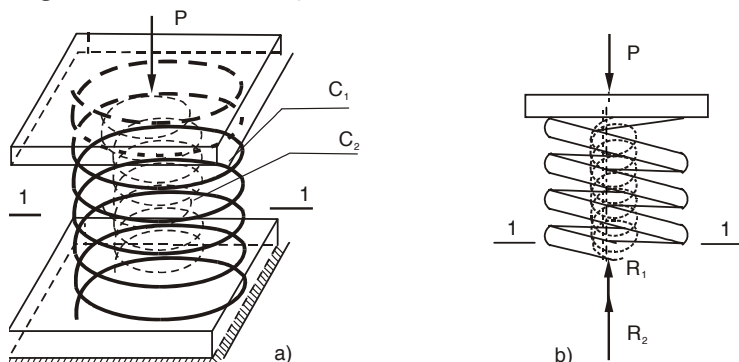
$$U = \frac{1}{2} \frac{P^2 D^2}{4} \frac{\pi D n}{G \pi d^4 / 32} = \frac{1}{2} \frac{8 P^2 D^3 n}{G d^4} \quad (b)$$

về giá trị, $T = U, \Rightarrow \lambda = \frac{8 P D^3 n}{G d^4} = \frac{P}{C}$ (9.24)

với: $C = \frac{G d^4}{8 D^3 n}$ (9.25)

trong đó: C - là độ cứng của lò xo

Thí dụ 9.5 Hai lò xo có độ cứng $C_1 = 8 \text{ kN/cm}$ và $C_2 = 5 \text{ kN/cm}$ cùng chiều cao H , được ghép đồng trục, cùng chịu lực $P = 50 \text{ kN}$ (H.9.20.a). Tính lực tác dụng trên từng lò xo, tính chuyển vị của điểm đặt lực.



H. 9.20 a) Hai lò xo ghép đồng trục
b) Nội lực trong lò xo

Giải.

Cắt 2 lò xo bằng mặt cắt (1-1), xét cân bằng phần trên, gọi nội lực của lò xo là R_1, R_2 , (H.9.20.b),

$$\sum Y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 = P \quad (a)$$

Một phương trình chứa hai ẩn số, ta gặp **bài toán siêu tĩnh**.

Điều kiện biến dạng: độ co ngắn của lò xo 1 phải bằng lò xo 2:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad (b)$$

$$\frac{R_1}{C_1} = \frac{R_2}{C_2} \Rightarrow R_1 = \frac{C_1}{C_2} R_2 \quad (c)$$

(c) và (a) \Rightarrow

$$R_2 = \frac{P}{1 + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} P \quad (d)$$

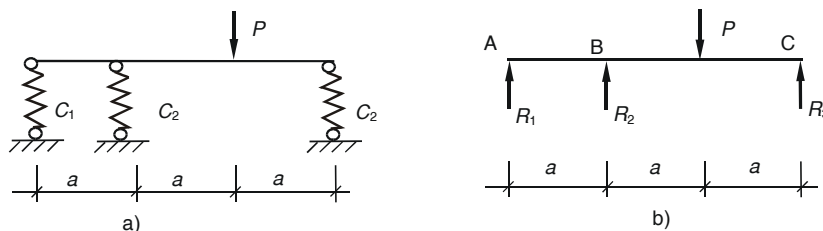
$$R_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} P$$

thay giá trị P, C_1, C_2 vào (d): $R_1 = 30,77 \text{ kN}; R_2 = 19,23 \text{ kN}$

Chuyển vị của điểm đặt lực chính là độ co của lò xo 1 hoặc lò xo 2

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = R_1 / C_1 = 30,77 / 8 = 3,85 \text{ cm.}$$

Thí dụ 9.6 Một thanh có EJ rất lớn được xem là bằng ∞ , được đặt trên ba lò xo có độ cứng lần lượt là $C_1 = 5 \text{ kN/cm}$, $C_3 = C_2 = 10 \text{ kN/cm}$ chịu tác dụng của lực $P = 50 \text{ kN}$ như trên H.9.21.a. Tìm lực tác dụng trên các lò xo, tính góc nghiêng của thanh ABC. Cho $a = 50 \text{ cm}$.



H. 9.21 a) Thanh ABC tuyệt đối cứng đặt trên ba lò xo
b) Ngoại lực và các phản lực của các lò xo

Giải.

Gọi phản lực của các lò xo lần lượt là R_1, R_2, R_3 (H.9.21.b).

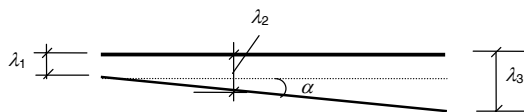
Điều kiện cân bằng:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow R_1 + R_2 + R_3 = P \quad (\text{a})$$

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow -R_2 \cdot a - R_3 \cdot 3a + P \cdot 2a = 0$$

hay: $R_2 + 3R_3 = 2P \quad (\text{b})$

Điều kiện biến dạng: giả sử, dưới tác dụng của ngoại lực, thanh ABC có vị trí mới như ở (H.9.22):



H. 9.22 Sơ đồ chuyển vị của thanh ABC và biến dạng của các lò xo

Ta có: $\lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_3 \Rightarrow \frac{R_2}{C_2} = \frac{2}{3}\frac{R_1}{C_1} + \frac{1}{3}\frac{R_3}{C_3} \quad (\text{c})$

Giải hệ (a), (b), (c), ta được phản lực của các lò xo, cũng chính là lực tác dụng lên các lò xo: $R_1 = \frac{P}{9}$; $R_2 = \frac{1}{3}P$; $R_3 = \frac{5}{9}P$

Từ đó, ta tính được biến dạng của các lò xo:

$$\lambda_1 = 1,11 \text{ cm}; \lambda_2 = 1,67 \text{ cm}; \lambda_3 = 2,78 \text{ cm}$$

Góc nghiêng của thanh ABC là:

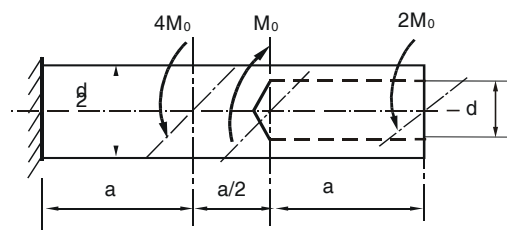
$$\tan \alpha \approx \alpha = (\lambda_3 - \lambda_1)/3a = 0,0111 \text{ rad}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 9

9.1 Vẽ biểu đồ mômen xoắn, tính ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn tại đầu tự do của thanh tiết diện tròn có khoan lỗ dọc trục như H.9.1. Cho:

$$M_0 = 360 \text{ Nm}; a = 50 \text{ cm};$$

$$G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2, d = 3 \text{ cm}.$$



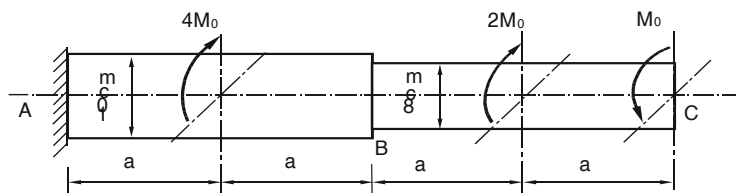
H. 9.1

9.2 Vẽ biểu đồ nội lực, kiểm tra độ bền và độ cứng của trục tròn (H.9.2). Biết: $a = 40 \text{ cm}$

$$[\tau] = 3000 \text{ N/cm}^2; [\theta] = 0,5^\circ/\text{m};$$

$$G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2; M_0 = 1 \text{ kNm};$$

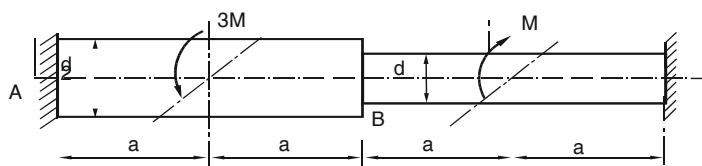
Tính góc xoắn tại B và C.



H. 9.2

9.3 Vẽ biểu đồ mômen xoắn và tính ứng suất tiếp lớn nhất trên các mặt cắt ngang nguy hiểm của trục tròn như trên H.9.3.

Cho: $G = \text{hằng số}.$



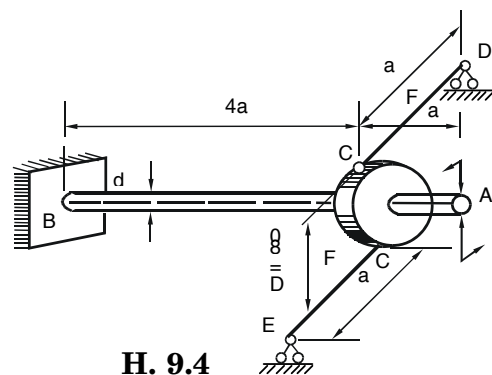
H. 9.3

9.3 Một trục chịu xoắn như H.9.4.

Xác định ứng suất tiếp τ_{\max} của trục AB, góc xoắn φ_{AB} , nội lực trong hai thanh CD và CE. Cho: $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2, G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2;$

$$M = 2 \text{ kNm}; a = 2 \text{ cm}; F = 4 \text{ m}^2; d = 6 \text{ cm}.$$

Xem puli tại C là tuyệt đối cứng.

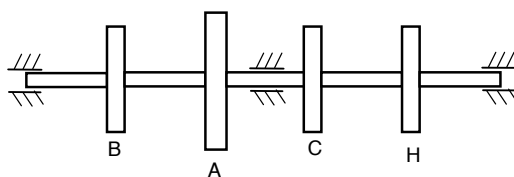


H. 9.4

9.5 Một trục truyền động tiết diện tròn, đường kính d . Tại puli A, trục nhận được công suất truyền 15 kW. Giả sử hiệu suất truyền là 1, khi đó tại các puli B, C, H trục truyền đi các công suất lần lượt là 4kW, 8kW và 3kW (H.9.5). Tính d theo điều kiện bền và điều kiện cứng.

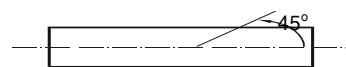
$$\text{Cho: } [\tau] = 2 \text{ kN/cm}^2; [\theta] = 0,4^\circ/\text{m};$$

$$G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2; \text{ tốc độ mô tơ } n = 150 \text{ vg/ph}.$$



H. 9.5

9.6 Trên mặt ngoài của một trục tròn chịu xoắn thuần túy, người ta dùng tấm điện trở và đo được biến dạng dài tương đối theo phương 45° so với trục là $\varepsilon = 30 \cdot 10^{-5}$ (H. 9.6)

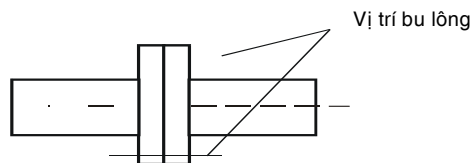


H. 9.6

Tính mômen xoắn tác dụng lên trục.

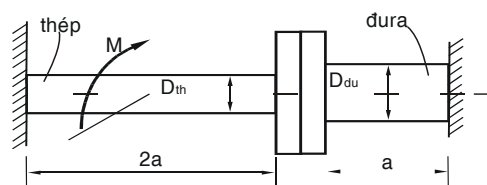
Cho: $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$.

9.7 Người ta nối hai trục cùng đường kính $D = 8 \text{ cm}$ bằng mặt bích và bốn bu lông $\phi 20$ bố trí đối xứng trên đường tròn đường kính 20 cm (H.9.7). Tính mômen xoắn lớn nhất có thể tác dụng lên trục theo điều kiện bền của trục và bu lông. Cho: $[\tau]_{tr} = 4 \text{ kN/cm}^2$; $[\tau]_{bl} = 2 \text{ kN/cm}^2$.



H. 9.7

9.8 Hai trục tròn bằng thép và duralumin nối với nhau bằng mặt bích và bu lông chịu một mômen xoắn M như (H.9.8). Tính mômen xoắn nội lực tác dụng lên hai trục.

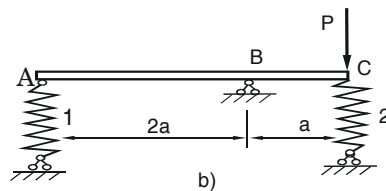
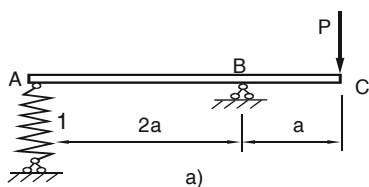


H. 9.8

Cho: $G_{th} = 2G_{dura}$; $D_{dura} = 1,5D_{th}$.

9.9 Hệ chịu lực như ở H.9.9.a,b

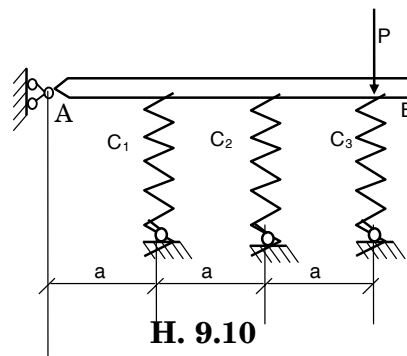
Tính ứng suất trong lò xo 1 và 2. Tính chuyển vị đứng tại C, xem thanh ABC là tuyệt đối cứng. Biết: $D_1 = 6 \text{ cm}$; $d_1 = 1 \text{ cm}$; $n_1 = 10$; $D_2 = 5 \text{ cm}$; $d_2 = 0,8 \text{ cm}$; $n_2 = 8$; $P = 1 \text{ kN}$; $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$



H. 9.9

9.10 Một thanh tuyệt đối cứng AB được đặt trên ba lò xo có cùng số vòng và chịu một lực P đặt ở đầu B như trên H.9.10. Tính lực tác dụng lên các lò xo. Tính chuyển vị đứng tại B. Cho:

$C_3 = 2C_2 = 2C_1 = 2 \text{ kN/cm}$; $P = \text{ kN}$; $a = 1 \text{ m}$.



H. 9.10

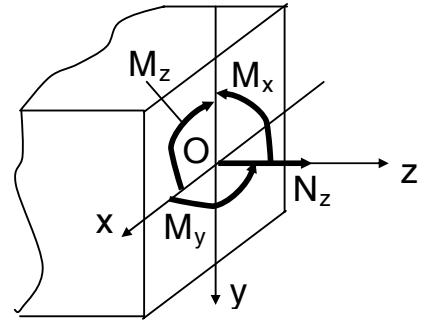
Chương 10 THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP

10.1 KHÁI NIỆM

◆ Định nghĩa

Thanh chịu lực phức tạp khi trên các mặt cắt ngang có tác dụng đồng thời của nhiều thành phần nội lực như lực dọc N_z , mômen uốn M_x, M_y , mômen xoắn M_z (H.10.1).

Khi một thanh chịu lực phức tạp, ảnh hưởng của lực cắt đến sự chịu lực của thanh rất nhỏ so với các thành phần nội lực khác nên trong tính toán không xét đến lực cắt.



H.10.1

2- Cách tính toán thanh chịu lực phức tạp

Áp dụng Nguyên lý cộng tác dụng

Nguyên lý cộng tác dụng: Một đại lượng do nhiều nguyên nhân đồng thời gây ra sẽ bằng tổng đại lượng đó do tác động của các nguyên nhân riêng lẻ (Chương 1)

10.2 THANH CHỊU UỐN XIÊN

1- Định nghĩa – Nội lực

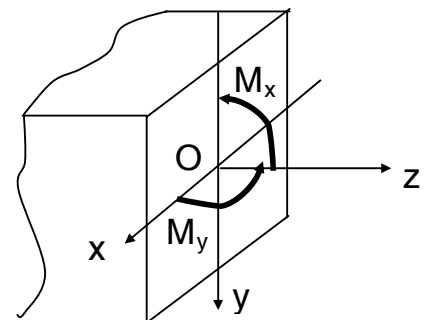
Thanh chịu uốn xiên khi trên mọi mặt cắt ngang chỉ có hai thành phần nội lực là mômen uốn M_x và mômen uốn M_y tác dụng trong các mặt phẳng yo_z và xo_z (H.10.2).

Dấu của M_x, M_y :

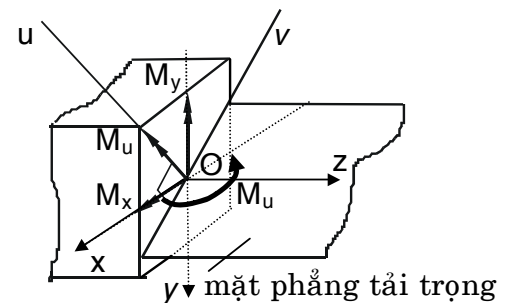
$M_x > 0$ khi căng thớ $y > 0$

$M_y > 0$ khi căng thớ $x > 0$

Theo Cơ học lý thuyết, ta có thể biểu diễn mômen M_x và M_y bằng các véc tơ mômen M_x và M_y (H.10.3); Hợp hai mômen này là mômen tổng M_u . M_u nằm trong mặt phẳng vo_z , mặt phẳng này thẳng góc với trục u (chứa véc tơ mômen M_u) và chứa trục thanh (H.10.3).



H.10.2



H.10.3 Mômen tổng và mặt phẳng tải trọng

Mặt phẳng tải trọng là mặt phẳng chứa M_u .

Giao tuyến của mặt phẳng tải trọng với mặt cắt ngang là **Đường tải trọng** (trục v)

Ký hiệu α : Góc hợp bởi trục x và đường tải trọng; Ta có

$$|M_u| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (10.1)$$

$$\tan \alpha = \frac{M_x}{M_y} \quad (10.2)$$

Định nghĩa khác của uốn xiên: Thanh chịu uốn xiên khi trên các mặt cắt ngang chỉ có một mômen uốn M_u tác dụng trong mặt phẳng chứa trục mà không trùng với **mặt phẳng quán tính chính trung tâm** yOz hay xOz .

Đặc biệt, đối với thanh tiết diện tròn, mọi đường kính đều là trục chính trung tâm (trục đối xứng), nên bất kỳ mặt phẳng chứa trục thanh nào cũng là mặt phẳng quán tính chính trung tâm. Do đó, mặt cắt ngang thanh tròn luôn luôn chỉ chịu uốn phẳng.

2- Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang

Theo nguyên lý cộng tác dụng, tại một điểm $A(x,y)$ bất kỳ trên tiết diện, ứng suất do hai mômen M_x, M_y gây ra tính theo công thức sau :

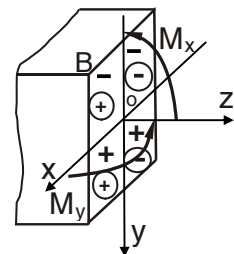
$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \quad (10.3)$$

Trong (10.3), số hạng thứ nhất chính là ứng suất pháp do M_x gây ra, số hạng thứ hai là ứng suất pháp do M_y gây ra

Công thức (10.3) là công thức đại số, vì các mômen uốn M_x, M_y và tọa độ điểm $A(x,y)$ có dấu của chúng

Trong tính toán thực hành, thường dùng công thức kỹ thuật như sau:

$$\sigma_z = \pm \frac{|M_x|}{J_x} |y| \pm \frac{|M_y|}{J_y} |x| \quad (10.4)$$



H.10.4 Biểu diễn các miền kéo, nén trên mặt cắt do M_x, M_y gây ra

Trong (10.4), lấy dấu cộng (+) hay (-) tùy theo điểm tính ứng suất nằm ở miền chịu kéo hay nén do từng nội lực gây ra

H.10.4 biểu diễn các miền kéo, nén trên mặt cắt do các mômen uốn M_x, M_y gây ra : + , - do M_x

(+), (-) do M_y

Thí dụ 1. Tiết diện chữ nhật $b \times h = 20 \times 40 \text{ cm}^2$ chịu uốn xiên (H.10.5), cho $M_x = 8 \text{ kNm}$ và $M_y = 5 \text{ kNm}$. Chiều hệ trục chọn như h.10.5a

Ứng suất pháp tại B ($x_B = +10 \text{ cm}$; $y_B = -20 \text{ cm}$)

+ Tính theo (10.3) như sau:

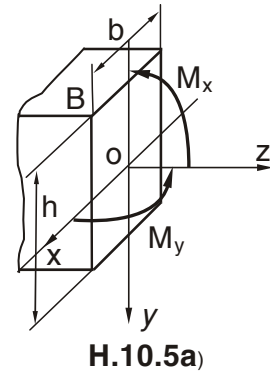
$$\sigma_B = \frac{800}{20(40)^3}(-20) + \frac{500}{40(20)^3}(10) \text{ kN/cm}^2$$

+ Tính theo (10.4) như sau:

M_x gây kéo những điểm nằm dưới Ox và gây nén những điểm trên Ox ; M_y gây kéo phía trái Oy và gây nén phía phải Oy .

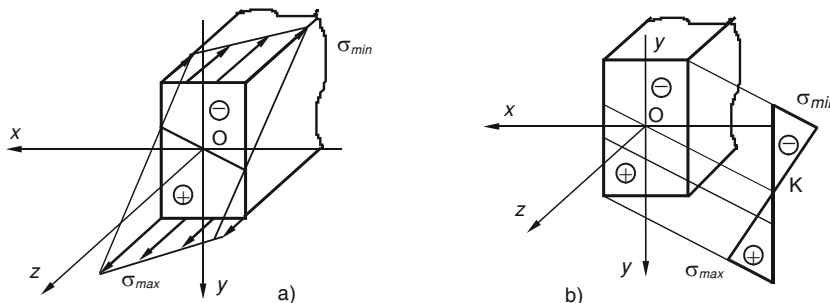
Biểu diễn vùng kéo bằng dấu (+) và vùng nén bằng dấu (-) trên tiết diện (H.10.4a) ta có thể thấy, tại điểm B; M_x gây nén; M_y gây kéo.

$$\Rightarrow \sigma_B = -\frac{800}{20(40)^3}(20) + \frac{500}{40(20)^3}(10) \text{ kN/cm}^2$$



3- Đường trung hòa và biểu đồ ứng suất

Công thức (10.3) là một hàm hai biến, nó có đồ thị là một mặt phẳng trong hệ trục $Oxyz$. Nếu biểu diễn giá trị ứng suất pháp σ_z cho ở (10.3) bằng các đoạn thẳng đại số theo trục z định hướng dương ra ngoài mặt cắt (H.10.6a), ta được một mặt phẳng chứa đầu mút các vectơ ứng suất pháp tại mọi điểm trên tiết diện, gọi là *mặt ứng suất* (H.10.6.a).



Hình 10.6

a) Mặt ứng suất; b) Biểu đồ ứng suất phẳng

Gọi giao tuyến của mặt ứng suất và mặt cắt ngang là **đường trung hòa**, ta thấy, **đường trung hòa là một đường thẳng và là quỹ tích của những điểm trên mặt cắt ngang có trị số ứng suất pháp bằng không.**

Cho biểu thức $\sigma_z = 0$, ta được phương trình đường trung hòa:

$$\frac{M_x}{J_x}y + \frac{M_y}{J_y}x = 0 \Rightarrow y = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \cdot x \quad (10.5)$$

Phương trình (10.5) có dạng $y = ax$, **đường trung hòa là một đường thẳng qua gốc tọa độ, và có hệ số góc tính theo công thức:**

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \quad (10.5)$$

Ta thấy:

- Đường trung hòa chia tiết diện làm hai miền: miền chịu kéo và miền chịu nén.

- Những điểm nằm trên những đường thẳng song song với đường trung hòa có cùng giá trị ứng suất.

- Càng xa đường trung hòa, trị số ứng suất của các điểm trên một đường thẳng vuông góc đường trung hòa tăng theo luật bậc nhất.

Dựa trên các tính chất này, có thể biểu diễn sự phân bố bằng biểu đồ ứng suất phẳng như sau.

Kéo dài đường trung hòa, vẽ đường chuẩn vuông góc với đường trung hòa tại K, ứng suất tại mọi điểm trên đường trung hòa ($\sigma_z = 0$) biểu diễn bằng điểm K trên đường chuẩn. Sử dụng phép chiếu thẳng góc, điểm nào có chân hình chiếu xa K nhất là những điểm chịu ứng suất pháp lớn nhất.

- Điểm xa nhất thuộc miền kéo chịu ứng suất kéo lớn nhất, gọi là σ_{\max} .

- Điểm xa nhất thuộc miền nén chịu ứng suất nén lớn nhất, gọi là σ_{\min} .

Tính σ_{\max} , σ_{\min} rồi biểu diễn bằng hai đoạn thẳng về hai phía của đường chuẩn rồi nối lại bằng đường thẳng, đó là biểu đồ ứng suất phẳng, trị số ứng suất tại mọi điểm của tiết diện trên đường thẳng song song với đường trung hòa chính là một tung độ trên biểu đồ ứng suất xác định như ở (H.10.6.b).

4- Ứng suất pháp cực trị và điều kiện bền

• **Ứng suất pháp cực trị:** Gọi $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ là hai điểm xa đường trung hòa nhất về phía chịu kéo và chịu nén, công thức (10.4) cho:

$$\begin{aligned} \sigma_A = \sigma_{\max} &= \frac{|M_x|}{J_x}|y_A| + \frac{|M_y|}{J_y}|x_A| \\ \sigma_B = \sigma_{\min} &= -\frac{|M_x|}{J_x}|y_B| - \frac{|M_y|}{J_y}|x_B| \end{aligned} \quad (10.6)$$

Đối với thanh có tiết diện chữ nhật ($b \times h$), điểm xa đường trung hoà nhất luôn luôn là các điểm góc của tiết diện, khi đó:

$$\begin{aligned} |x_A| = |x_B| &= \frac{h}{2}; \quad |y_A| = |y_B| = \frac{b}{2} \\ \sigma_{\max} &= \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y}; \quad \sigma_{\min} = -\frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} \end{aligned} \quad (10.7)$$

với:
$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{J_y}{b/2} = \frac{hb^2}{6}$$

• **Đối với thanh có tiết diện tròn**, khi tiết diện chịu tác dụng của hai mômen uốn M_x, M_y trong hai mặt phẳng vuông góc yOz, xOz , mômen tổng là M_u tác dụng trong mặt phẳng vOz cũng là mặt phẳng quán tính chính trung tâm, nghĩa là chỉ chịu uốn phẳng, do đó:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_u|}{W_u}; \quad M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}; \quad W_u = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3 \quad (10.8)$$

• **Điều kiện bền:** trên mặt cắt ngang của thanh chịu uốn xiên chỉ có ứng suất pháp, không có ứng suất tiếp, đó là trạng thái ứng suất đơn, hai điểm nguy hiểm là hai điểm chịu $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$, tiết diện bền khi hai điểm nguy hiểm thỏa điều kiện bền:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n \quad (10.9)$$

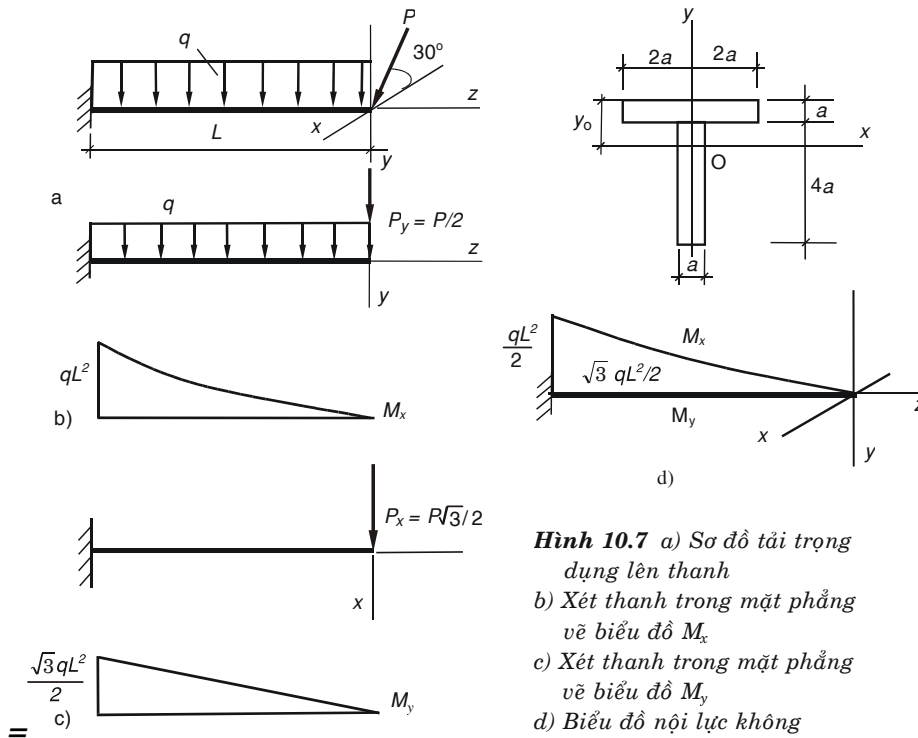
Đối với vật liệu dẻo: $[\sigma]_k = [\sigma]_n = [\sigma]$, điều kiện bền được thỏa khi:

$$\max |\sigma_{\max}, \sigma_{\min}| \leq [\sigma] \quad (10.8)$$

Thí dụ 2. Một dầm tiết diện chữ T chịu lực như trên H.10.7.a. Vẽ biểu đồ nội lực, xác định đường trung hoà tại tiết diện ngàm, tính ứng suất $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$. Cho: $q = 4 \text{ kN/m}; P = qL; L = 2 \text{ m}; a = 5 \text{ cm}$. Các đặc trưng của tiết diện chữ T được cho như sau: $y_o = 7a/4, J_x = 109a^4/6; J_y = 34a^4/6$.

Giải. Phân tích lực P thành 2 thành phần trên hai trục x và y , ta được:

$$P_x = P \cdot \cos 30^\circ = P\sqrt{3}/2 = qL\sqrt{3}/2; \quad P_y = P \cdot \sin 30^\circ = P/2$$



Hình 10.7 a) Sơ đồ tải trọng dụng lên thanh
 b) Xét thanh trong mặt phẳng vẽ biểu đồ M_x
 c) Xét thanh trong mặt phẳng vẽ biểu đồ M_y
 d) Biểu đồ nội lực không

Xét thanh chịu lực trong từng mặt phẳng riêng lẻ.

Trong mặt phẳng (yOz) , hệ chịu lực phân bố và lực tập trung P_y , biểu đồ mômen vẽ trên H.10.7.b, theo quy ước, biểu đồ này là M_x . Tương tự, trong mặt phẳng (xOz) , hệ chịu lực phân bố và lực tập trung P_y , biểu đồ mômen vẽ trên H.10.7.c, đó là M_y .

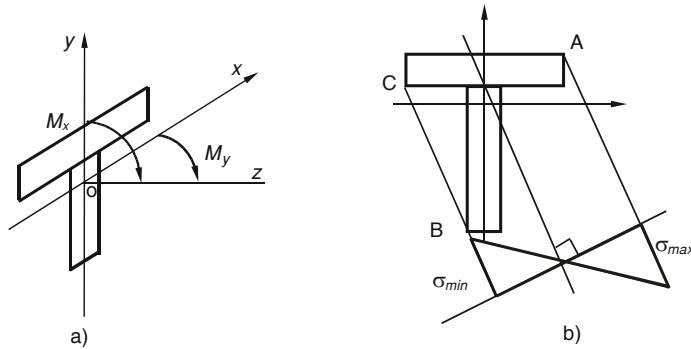
Phương trình đường trung hòa:
$$y = - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \cdot x \quad (a)$$

Tại tiết diện ngàm: $M_x = qL^2; M_y = \sqrt{3} qL^2/2$

Chiều M_x và M_y biểu diễn ở H.10.5.d, nếu chọn chiều dương của trục x và y như trên H.10.8.a thì trong (a), các mômen uốn đều có dấu +.

Ta có:
$$y = - \frac{\sqrt{3}qL^2/2}{qL^2} \cdot \frac{109a^4/6}{34a^4/6} x = -2,77 \cdot x \quad (b)$$

Biểu diễn tiết diện bằng hình phẳng theo tỷ lệ, từ (b) có thể vẽ chính xác đường trung hòa, áp dụng cách vẽ biểu đồ ứng suất, ta cũng vẽ được biểu đồ ứng suất phẳng (H.10.8.b).



Hình 10.8

- a) Chọn chiều dương của trục x, y .
 b) Đường trung hòa và biểu đồ ứng suất phẳng

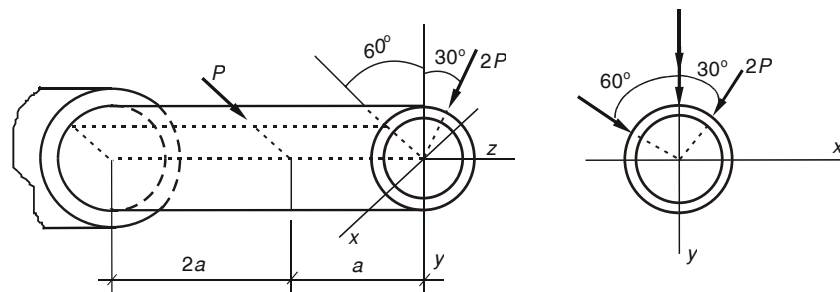
Dựa trên biểu đồ ứng suất ta có thể tìm thấy điểm chịu kéo nhiều nhất là điểm A ($|x_A| = 2a, |y_A| = 7a/4$), điểm chịu nén nhiều nhất là điểm C ($|x_C| = 2a, |y_C| = 3a/4$); điểm B ($|x_B| = a/2, |y_B| = 13a/4$) có chân hình chiếu khá gần C, cần tính ứng suất tại đây.

Áp dụng công thức (10.4), ta có:

$$\sigma_A = \sigma_{\max} = + \frac{qL^2}{I_x} \left(\frac{7a}{4} \right) + \frac{\sqrt{3}qL^2/2}{I_y} (2a) = 5,145 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

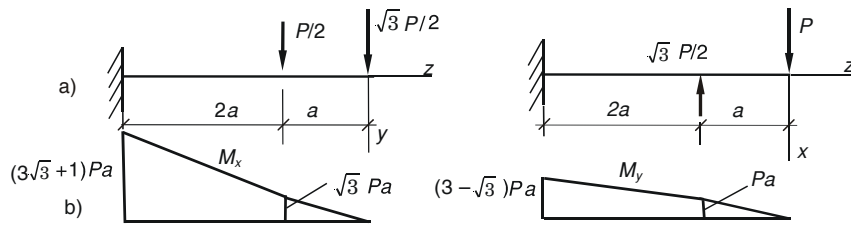
$$\sigma_C = \sigma_{\min} = + \frac{qL^2}{I_x} \left(\frac{3a}{4} \right) - \frac{\sqrt{3}qL^2/2}{I_y} (2a) = -3,384 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

Thí dụ 3. Một thanh tiết diện tròn rỗng chịu tác dụng của ngoại lực (H.10.9). Tính ứng suất pháp $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$, xác định đường trung hoà tại tiết diện ngầm.



Hình 10.9 Thanh tiết diện tròn rỗng chịu tải trong hai mặt phẳng khác

Giải. Phân tích lực $2P$ và lực P lên hai trục vuông góc x, y . Lần lượt xét sự làm việc của thanh trong từng mặt phẳng yOz, xOz , ta vẽ được biểu đồ mômen M_x, M_y tương ứng (H.10.10b).



Hình 10.10 Biểu đồ mômen biểu diễn trong hai mặt phẳng vuông góc

Với thanh tiết diện tròn, khi có hai mômen uốn M_x, M_y tác dụng trong hai mặt phẳng vuông góc yOz, xOz , ta có thể đưa về một mômen uốn phẳng M_u trong tác dụng mặt phẳng quán tính chính trung tâm vOz , với: M_u là mômen tổng của M_x và M_y .

Tại tiết diện ngàm, M_x, M_y có giá trị lớn nhất, ta có:

$$|M_u| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 9,475 Pa$$

Theo công thức của uốn phẳng, ta được:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_u|}{W_u} = \pm \frac{9,475 Pa}{\frac{\pi D^3}{32} (1 - \frac{d^4}{D^4})} = \pm \frac{9,475 Pa}{\frac{\pi \cdot 10^3}{32} (1 - \frac{8^4}{10^4})} = \pm 8,41 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

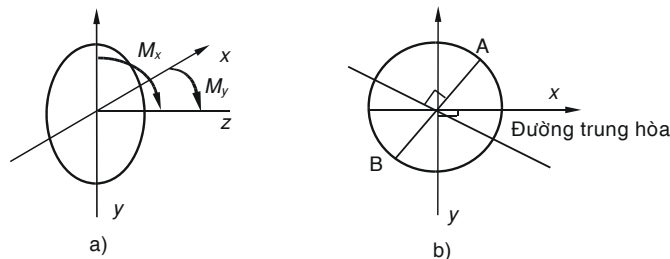
Phương trình đường trung hòa:

$$y = - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \cdot x \quad (a)$$

Tại tiết diện ngàm: $M_x = (3\sqrt{3} + 1)Pa = 6,196Pa$

chiều M_x và M_y biểu diễn ở H.10.11.a, nếu chọn chiều dương của trục x và y về phía gây kéo của M_y và M_x (H.10.11.a) thì trong (a), giá trị của các mômen uốn lấy trị tuyệt đối.

Ta có: $y = \frac{1.268Pa}{6,196Pa} \cdot (1) \cdot x = -0,204x$ (b)



Hình 10.11

a) Định hướng hệ trục x, y ; b) Vẽ đường trung hoà trên hình phẳng

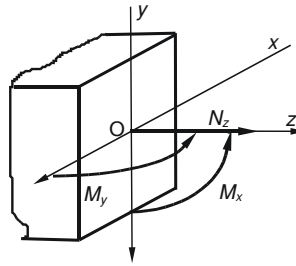
Đường trung hòa được vẽ trên hình phẳng (H.10.11b), nếu vẽ một đường thẳng qua tâm O , thẳng góc với đường trung hòa, giao điểm của đường này với chu vi là hai điểm chịu ứng suất kéo và nén lớn nhất.

10.3 THANH CHỊU UỐN CỘNG KÉO (HAY NÉN)

1- Định nghĩa

Thanh chịu uốn cộng kéo (hay nén) đồng thời khi trên các mặt cắt ngang nội lực là mômen uốn M_u và lực

M_u là mômen uốn tác dụng chứa trục z , luôn luôn có thể mômen uốn M_x và M_y trong mặt yOz và xOz (H.10.11).



Hình 10.11 Các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang

(hay nén) đồng có các thành phần dọc N_z .

trong mặt phẳng phân thành hai phẳng đối xứng

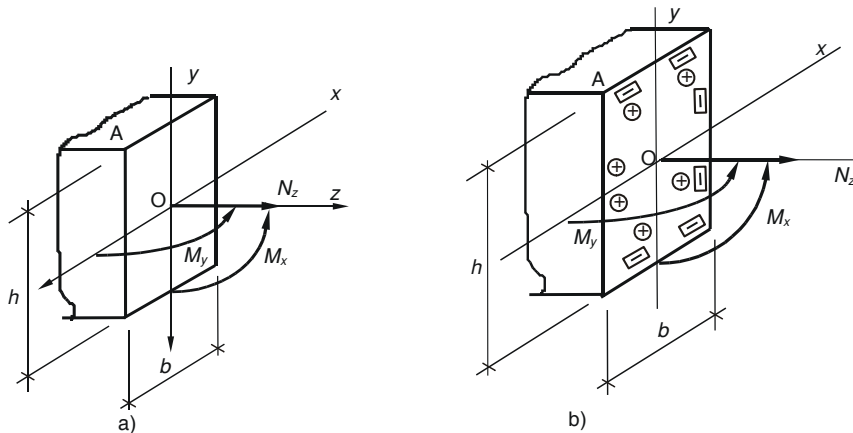
2- Công thức ứng suất pháp

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, ta thấy bài toán đang xét là tổ hợp của thanh chịu uốn xiên và kéo (hay nén) đúng tâm. Do đó, tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang có tọa độ (x,y) chịu tác dụng của ứng suất pháp tính theo công thức sau:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad (10.9)$$

Ứng suất pháp gây kéo được quy ước dương.

Các số hạng trong công thức (10.9) là số đại số, ứng suất do N_z lấy (+) khi lực dọc là kéo và ngược lại lực nén lấy dấu trừ; ứng suất do M_x, M_y lấy dấu như trong công thức (10.1) của uốn xiên, nếu định hướng trục y,x dương về phía gây kéo của M_x, M_y thì lấy theo dấu của y và x .



Hình 10.12

a) Định hướng hệ trục x,y khi dùng công thức (9.9)

b) Định dấu cộng trừ khi dùng công thức (9.10)

Khi tính toán thực hành, ta cũng có công thức kỹ thuật:

$$\sigma_z = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_x|}{I_x} |y| \pm \frac{M_y}{I_y} |x| \quad (10.10)$$

Trong công thức (10.10), ứng với mỗi số hạng, ta lấy dấu (+) nếu đại

lượng đó gây kéo và ngược lại.

Ví dụ, đối với tiết diện trên H.10.12.a, cho $M_x = 10$ kNm; $M_y = 5$ kNm; $N_z = 10$ kN; $h = 2b = 40$ cm, tính ứng suất tại A.

Sử dụng công thức (10.9), chọn chiều dương trục x, y như H.10.12.a, $x_A = 10$, $y_A = -20$, ta được:

$$\sigma_A = \frac{10}{20 \cdot 40} + \frac{1000}{20 \cdot 40^3 : 12} (-20) + \frac{500}{40 \cdot 20^3 : 12} \quad (10)$$

$$\sigma_A = 0,0125 - 0,1875 + 0,1875 = 0,0125 \text{ kN/cm}^2$$

Để áp dụng công thức (10.10), có thể biểu diễn tác dụng gây kéo, nén của các thành phần nội lực như ở (H.10.12.b), với $|x_A| = 10$, $|y_A| = 20$, ta được:

$$\sigma_A = \frac{10}{20 \cdot 40} - \frac{1000}{20 \cdot 40^3 : 12} (20) + \frac{500}{40 \cdot 20^3 : 12} \quad (10)$$

$$\sigma_A = 0,0125 - 0,1875 + 0,1875 = 0,0125 \text{ kN/cm}^2$$

3- Đường trung hòa và biểu đồ ứng suất pháp

Tương tự như trong uốn xiên, có thể thấy rằng phương trình (10.9) là một hàm hai biến $\sigma_z = f(x, y)$, nếu biểu diễn trong hệ trục $Oxyz$, với O là tâm mặt cắt ngang và σ_z định hướng dương ra ngoài mặt cắt, thì hàm (10.9) biểu diễn một mặt phẳng, gọi là mặt ứng suất, giao tuyến của nó với mặt cắt ngang là đường trung hòa. Dễ thấy rằng, đường trung hòa là một đường thẳng chứa tất cả những điểm trên mặt cắt ngang có ứng suất pháp bằng không. Từ đó, cho $\sigma_z = 0$, ta có phương trình đường trung hòa:

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x - \frac{N_z I_x}{A M_x} \quad (10.11)$$

Phương trình (10.11) có dạng $y = ax + b$, đó là một đường thẳng không qua gốc tọa độ, cắt trục y tại tung độ $b = -\frac{N_z I_x}{A M_x}$.

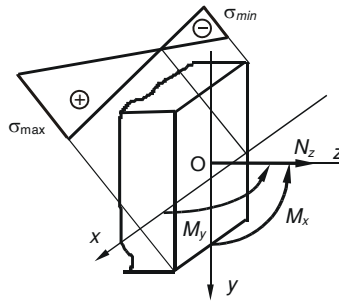
Để sử dụng (10.11) thuận lợi, ta nên định hướng trục x, y như khi sử dụng công thức (10.9), còn N_z vẫn lấy dấu theo quy ước lực dọc.

Mặt khác, do tính chất mặt phẳng ứng suất, những điểm nằm trên những đường song song đường trung hòa có cùng giá trị ứng suất, những điểm xa đường trung hòa nhất có giá trị ứng suất lớn nhất, ứng suất trên một đường vuông góc với đường trung hòa thay đổi theo quy luật bậc nhất.

Rõ ràng đường trung hòa chia tiết diện thành hai miền, miền chịu ứng suất kéo và miền chịu ứng suất nén. Nhờ các tính chất này, có thể biểu diễn

sự phân bố của ứng suất pháp trên mặt cắt ngang bằng *biểu đồ ứng suất phẳng* như sau.

Kéo dài đường trung hòa ra ngoài tiết diện, vẽ đường chuẩn vuông góc với đường kéo dài tại điểm O, đó cũng là điểm biểu diễn giá trị ứng suất pháp tại mọi điểm trên đường trung hòa. Sử dụng phép chiếu thẳng góc, chiếu mọi điểm trên những đường song song chuẩn, điểm có chịu ứng suất pháp



Hình 10.13 Định hướng hệ trục x,y khi dùng công thức 9.11

Điểm xa nhất về miền kéo lớn nhất, gọi là σ_{\max} , miền nén chịu ứng suất nén. Biểu diễn giá trị σ_{\max} , σ_{\min} về hai phía đường chuẩn rồi đường thẳng, ta được biểu đồ ứng suất phẳng (H.10.13).

kéo chịu ứng suất điểm xa nhất về lớn nhất, gọi là σ_{\min} . bằng các tung độ nổi chúng lại bằng

4. Ứng suất pháp cực trị và điều kiện bền

Gọi $A(x_A, y_A)$ và $B(x_B, y_B)$ là hai điểm xa đường trung hoà nhất về miền kéo và về miền nén, áp dụng (10.10), ta có công thức tính ứng suất pháp cực trị.

$$\begin{aligned} \sigma_A = \sigma_{\max} &= \pm \frac{|N_z|}{A} + \frac{|M_x|}{I_x} |y_A| + \frac{|M_y|}{I_y} |x_A| \\ \sigma_B = \sigma_{\min} &= \pm \frac{|N_z|}{A} - \frac{|M_x|}{I_x} |y_B| - \frac{|M_y|}{I_y} |x_B| \end{aligned} \quad (10.12)$$

Theo (10.12), ta thấy, khi ứng suất do lực dọc trái dấu với ứng suất do M_x , M_y và có trị số lớn hơn tổng trị số tuyệt đối các ứng suất do M_x , M_y , đường trung hoà nằm ngoài mặt cắt, trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất một dấu (chỉ chịu kéo hoặc chỉ chịu nén).

- Với thanh có tiết diện chữ nhật, các điểm nguy hiểm A, B luôn luôn là các điểm góc của tiết diện:

$$\begin{aligned} |x_A| = |x_B| &= b/2; \quad |y_A| = |y_B| = h/2 \\ \sigma_A = \sigma_{\max} &= \pm \frac{|N_z|}{A} + \frac{|M_x|}{W_x} + \frac{|M_y|}{W_y} \\ \sigma_B = \sigma_{\min} &= \pm \frac{|N_z|}{A} - \frac{|M_x|}{W_x} - \frac{|M_y|}{W_y} \end{aligned} \quad (10.13)$$

- Thanh có tiết diện tròn, mômen tổng của M_x , M_y là M_u gây uốn thuần túy phẳng, khi đó ta có công thức tính ứng suất pháp cực trị:

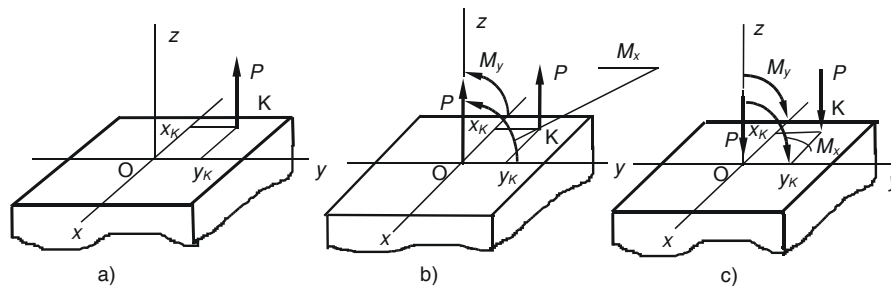
$$\begin{aligned}\sigma_A = \sigma_{\max} &= \pm \frac{|N_z|}{A} + \frac{|M_u|}{W_u} \\ \sigma_B = \sigma_{\min} &= \pm \frac{|N_z|}{A} - \frac{|M_u|}{W_u} \\ M_u &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\end{aligned}\quad (10.13)$$

Thanh chịu uốn cộng kéo hay nén đồng thời chỉ gây ra ứng suất pháp trên mặt cắt ngang, tại điểm nguy hiểm, phân tố ở trạng thái ứng suất đơn, do đó điều kiện bền của thanh là:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n \quad (10.14)$$

5- Thanh chịu kéo hay nén lệch tâm

Thanh chịu kéo hay nén lệch tâm khi ngoại lực hay nội lực tác dụng trên mặt cắt ngang tương đương một lực P song song trục thanh mà không trùng với trục thanh. Nếu lực P này hướng vào mặt cắt, thanh chịu nén lệch tâm, ngược lại, nếu lực P hướng ra, thanh chịu kéo lệch tâm (H.10.14.a).



Hình 10.14

a) Tiết diện bị kéo lệch tâm; b) Dời lực về tâm tiết diện

Trong thực tế, bài toán nén lệch tâm rất thường gặp trong tính toán cột, móng nhà công nghiệp hay dân dụng, trong tính toán trụ, móng cầu tháp...

Áp dụng nguyên lý dời lực, đưa lực kéo hay nén lệch tâm về tâm tiết diện, ta có thể chứng minh hai trường hợp này thực chất là bài toán uốn cộng kéo hay nén đồng thời. Trên H.10.14.a, gọi $K(x_K, y_K)$ là điểm đặt lực lệch tâm P , dời về tâm O , ta có:

$$\begin{aligned}N_z &= \pm |P|, \text{ lấy (+) khi } P \text{ là lực kéo, ngược lại, lấy (-).} \\ M_x &= P \cdot y_K \\ M_y &= P \cdot x_K\end{aligned}\quad (10.15)$$

Chiều của mômen lấy theo nguyên lý dôi lực.

Do đó, tất cả công thức đã được thiết lập cho bài toán uốn cộng kéo hay nén đồng thời đều áp dụng được cho bài toán kéo hay nén lệch tâm.

6- Lõi tiết diện

Đối với thanh chịu kéo hay nén lệch tâm, phương trình đường trung hoà có thể viết ở dạng khác. Cho biểu thức σ_z trong (10.9) bằng không, ta được phương trình đường trung hoà:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0$$

$$\text{Thay : } M_x = N_z \cdot y_K; \quad M_y = N_z \cdot x_K$$

$$\frac{N_z}{A} + \frac{N_z \cdot y_K}{I_x} y + \frac{N_z \cdot x_K}{I_y} x = 0$$

$$\frac{N_z}{A} [1 + \frac{y_K \cdot F}{I_x} y + \frac{x_K \cdot F}{I_y} x] = 0$$

$$\text{Đặt : } i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$1 + \frac{y_K \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_K \cdot x}{i_y^2} = 0$$

$$\text{Đặt: } a = -\frac{i_y^2}{x_K}; \quad b = -\frac{i_x^2}{y_K} \quad (10.16)$$

Ta thu được dạng khác của phương trình đường trung hoà :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (10.17)$$

Từ (10.16), (10.17), ta thấy đường trung hoà có các tính chất sau:

- Đường trung hoà cắt trục x tại a và trục tung tại b .
- Đường trung hoà không bao giờ qua phần tư chứa điểm đặt lực K vì a và b luôn trái dấu với x_K, y_K .

- Điểm đặt lực tiến gần tâm O của tiết diện thì đường trung hoà rời xa tâm vì x_K, y_K giảm thì a, b tăng.

- Khi đường trung hoà nằm ngoài tiết diện, trên tiết diện chỉ chịu ứng suất một dấu: kéo hoặc nén.

Gọi lõi tiết diện là khu vực bao quanh tâm sao cho khi lực lệch tâm đặt trong phạm vi đó thì đường trung hoà hoàn toàn nằm ngoài tiết diện.

Với một thanh chịu kéo hay nén lệch tâm, việc xác định lõi tiết diện có ý nghĩa thực tiễn. Trong thực tế có nhiều loại vật liệu chỉ chịu nén tốt như gạch, đá, gang, bê tông không thép..., nếu chúng chịu nén lệch tâm mà lực nén đặt ngoài lõi tiết diện, ứng suất kéo phát sinh có thể lớn hơn khả năng

chịu kéo của chúng, khi đó vật liệu sẽ bị phá hoại, để tận dụng tốt khả năng chịu lực của vật liệu cần thiết kể đặt lực nén trong lõi tiết diện.

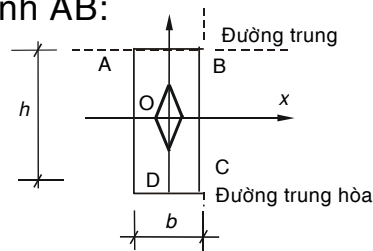
Có thể xác định lõi tiết diện theo cách sau:

Giả sử đường trung hòa tiếp xúc một cạnh tiết diện, từ (10.17) ta viết được phương trình đường trung hòa, rồi từ (10.16) ta suy ra tọa độ điểm đặt lực K tương ứng với vị trí đường trung hòa. Áp dụng cách tương tự đối với tất cả các cạnh còn lại, nối vị trí các điểm đặt lực, ta được lõi tiết diện. Để ý rằng, dù tiết diện là đa giác lõm thì lõi tiết diện luôn là một đa giác lồi.

Ví dụ: tiết diện chữ nhật (H.10.15).

Khi đường trung hòa trùng cạnh AB:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\infty} + \frac{y}{h/2} &= 1 \\ -\frac{i_y^2}{x_K} &= \infty \Rightarrow x_K = 0 \\ -\frac{i_x^2}{y_K} &= \frac{h}{2} \Rightarrow y_K = -\frac{h^2}{12 \cdot \frac{h}{2}} = -\frac{h}{6} \end{aligned}$$



Hình Lõi tiết diện chữ nhật

Khi đường trung hòa trùng cạnh BC:

$$\begin{aligned} \frac{x}{b/2} + \frac{y}{\infty} &= 1 \\ -\frac{i_y^2}{x_K} &= \frac{b}{2} \Rightarrow x_K = -\frac{b^2}{12 \cdot b/2} = -\frac{b}{6} \\ -\frac{i_x^2}{y_K} &= \infty \Rightarrow y_K = 0 \end{aligned}$$

Do tính đối xứng của tiết diện, khi đường trung hòa trùng cạnh CD, AD, ta xác định hai điểm K tương ứng có tọa độ lần lượt là:

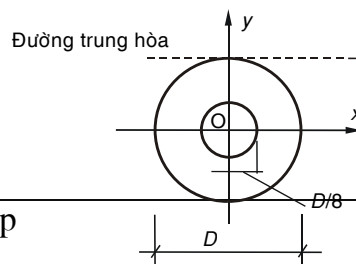
$$x_K = 0; y_K = \frac{h}{6} \text{ và } x_K = \frac{b}{6}; y_K = 0$$

Nối các điểm K, ta được lõi tiết diện của tiết diện chữ nhật là một hình thoi có đỉnh trên trục x,y (H.10.15).

- Tiết diện tròn (H.10.16)

Khi đường trung hòa là một tiếp tuyến với đường tròn tại A:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\infty} + \frac{y}{D/2} &= 1 \\ -\frac{i_y^2}{x_K} &= \infty \Rightarrow x_K = 0; \quad -\frac{i_x^2}{y_K} = D/2 \\ \Rightarrow y_K &= -\frac{\pi \cdot D^4}{64 \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \frac{D}{2}} = -\frac{D}{8} \end{aligned}$$



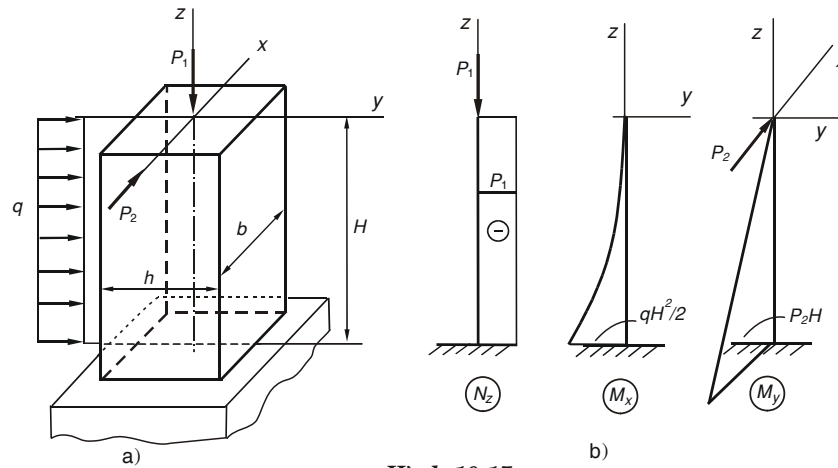
Do tính đối xứng của tiết

diện, ta thấy lõi

tiết diện là một đường tròn đồng tâm đường kính D/8.

Ví dụ 10.3 Một thanh tiết diện chữ nhật (b.h), chịu tác dụng của ngoại lực như H.10.17.a. Vẽ biểu đồ nội lực, tính σ_{\max} , σ_{\min} . xác định đường trung hòa tại ngàm.

Cho: $q = 5 \text{ kN/m}$, $P_1 = 100 \text{ kN}$, $P_2 = 6 \text{ kN}$, $H = 6 \text{ m}$, $h = 2b = 40 \text{ cm}$.



Hình 10.17

a) Thanh chịu nền cộng uốn; b) Biểu đồ nội lực

Giải:

Biểu đồ nội lực do từng nguyên nhân gây ra được vẽ trên H.10.17.b.

Tại ngàm, nội lực có giá trị lớn nhất:

$$N_z = -P_1 \text{ (nén); } M_x = qH^2/2; M_y = P_2.H$$

Áp dụng công thức (10.12):

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{P_1}{A} \pm \frac{q.H^2/2}{W_x} \pm \frac{P_2.H}{W_y}$$

Thay số, ta được:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max, \min} &= -\frac{100}{20.40} \pm \frac{5.6^2.100}{2. \frac{20.40^2}{6}} \pm \frac{6.6.100}{40.20^2} \\ &= -0.125 \pm 1,687 \pm 1,350 = \pm \begin{matrix} 2,912 \text{ kN/cm}^2 \\ 3,162 \text{ kN/cm}^2 \end{matrix} \end{aligned}$$

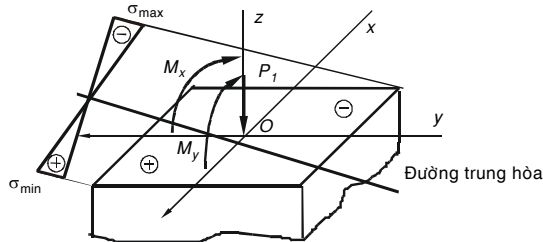
Phương trình đường trung hòa:

$$y = -\frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} .x - \frac{N_z}{A} \cdot \frac{I_x}{M_x} \quad (a)$$

Chọn hệ trục y, x dương về phía gây kéo của M_x và M_y , thay số vào (a) ta được:

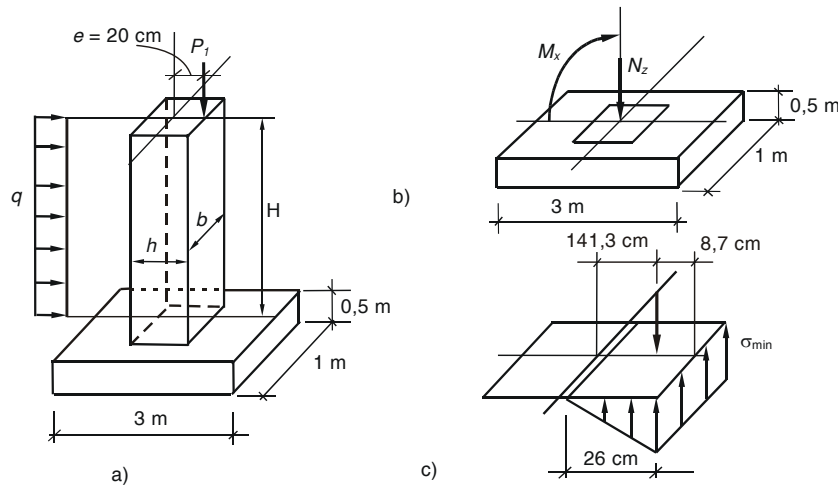
$$y = -\frac{6.6}{5 \cdot \frac{6^2}{2}} \frac{20.40^3/12}{40.20^3/12} \cdot x - \frac{-100}{20.40} \cdot \frac{20.40^3/12}{5 \cdot \frac{6^2}{2} \cdot 100} = -1,6x + 1,48$$

Đường trung hoà và biểu đồ ứng suất được vẽ trên H.10.18.



Hình 10.18 Đường trung hoà của thanh chịu nén uốn

Ví dụ 10.4 Một cột chịu nén lệch tâm và lực đẩy của gió như H.10.19.a. xem chân cột bị ngàm. Tính σ_{\max} , σ_{\min} . Nếu khối móng có kích thước $1\text{m} \times 3\text{m} \times 0,5\text{m}$ được đặt như H.10.19.a, hãy tính áp lực lớn nhất trên nền đất. Cho: $P_1 = 50 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$; $H = 6 \text{ m}$; $h = 2b = 40 \text{ cm}$; $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$.



Hình 10.19 a) Cột chịu nén lệch tâm

b) Nội lực tại tiết diện chân cột; c) Biểu đồ áp lực lên nền đất

Nội lực lớn nhất tại tiết diện ngàm:

$$N_z = -P_1 = -50 \text{ kN (nén)}$$

$$M_x = P_1 \cdot e + q \cdot H^2 / 2 = 50 \cdot 20 + 4 \cdot 6^2 \cdot 100 / 2 = 8200 \text{ kN.cm}$$

Áp dụng công thức (10.12), ứng suất pháp lớn nhất:

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{P_1}{A} \pm \frac{q \cdot H^2 / 2 + P_1 \cdot e}{W_x} =$$

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{50}{20 \cdot 40} \pm \frac{8200}{20 \cdot 40^2 / 6} = -0,0625 \pm 1,537 = \pm \frac{1,47 \text{ kN}}{1,60 \text{ cm}^2}$$

Dời lực về đáy móng, kể thêm trọng lượng bản thân móng và mômen do lực cắt qH, ta được:

$$N_z = -50 - 25.0,5.2.1 = -75 \text{ kN (nén)}$$

$$M_x = 10600 \text{ kNcm.}$$

Tại đáy móng, nếu vật liệu vẫn liên tục, ta có phương trình đường trung hòa:

$$y = -\frac{N_z}{A} \frac{I_x}{M_x} = -\frac{-75}{100.300} \cdot \frac{100.300^3}{12.10600} = 53,07 \text{ cm}$$

Theo (10.12), ta có ứng suất pháp lớn nhất:

$$\sigma_{\max, \min} = -\frac{75}{100.300} \pm \frac{10600}{100.300^2 / 6} = \pm \frac{0,0045 \text{ kN}}{0,0095 \text{ cm}^2}$$

Thực tế, tại đáy móng, vật liệu là đất chỉ chịu nén, không thể chịu ứng suất kéo, do đó, để đảm bảo điều kiện cân bằng, hợp lực của phản lực nền phải cân bằng với ngoại lực tác dụng.

Ngoại lực tại mặt đáy móng gồm một lực nén 75 kN và một mômen $M_x = 10600 \text{ kNcm}$ tương đương một lực nén 75 kN lệch tâm đặt trên trục y với độ lệch tâm là $e = 10600/75 = 141,3 \text{ cm}$, đặt cách mép chịu nén lớn nhất là $150 - 141,3 = 8,7 \text{ cm}$.

Để cân bằng với lực này, hợp lực của phản lực nền phải đối đẳng với lực nén 75 kN, giả sử *phản lực nền phân bố theo quy luật bậc nhất*, phản lực nền phải phân bố trên một diện tích mặt móng $100 \times (3 \times 8,7) = 100 \times 26 \text{ cm}^2$ tính từ mép chịu nén lớn nhất (H10.19.c).

Điều kiện cân bằng cho:

$$\sigma_{\min} \cdot 100 \cdot 26 / 2 = 75 \Rightarrow \sigma_{\min} = 0,0577 \text{ kN/cm}^2 = 5,77 \text{ kG/cm}^2$$

Kết quả này cho thấy, do mặt đế móng không được thiết kế sử dụng toàn bộ diện tích mặt móng nên ứng suất nén truyền lên nền tăng lên, móng thiết kế không hợp lý.

10.4 UỐN CỘNG XOẮN

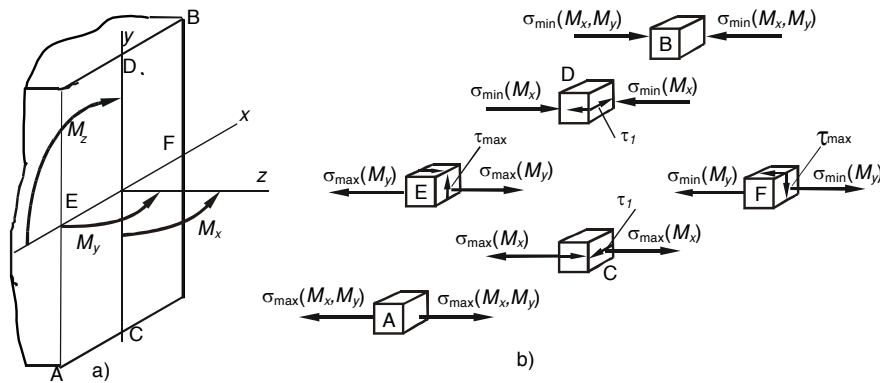
1- Định nghĩa

Thanh chịu uốn cộng xoắn khi trên các mặt cắt ngang có tác dụng đồng thời của mômen uốn M_u trong mặt phẳng chứa trục thanh và mômen xoắn M_z .

2- Thanh tiết diện chữ nhật

Uốn xoắn thanh tiết diện chữ nhật thường gặp trong công trình dân dụng như lan tô đỡ ô văng, dầm chịu lực ngoài mặt phẳng đối xứng, thanh chịu uốn trong hệ không gian...

Xét một tiết diện chữ nhật chịu uốn xoắn (H.10.20) trong đó mômen uốn M_u đã được phân tích thành hai mômen uốn M_x, M_y trong các mặt phẳng quán tính chính trung tâm yOz, xOz .



Hình 10.20 a) Các thành phần nội lực của thanh chịu uốn cộng xoắn
b) Trạng thái ứng suất của các phân tố

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng và lý thuyết về uốn, về xoắn, ta được các kết quả như sau (H.10.20.b):

Tại các góc tiết diện (A,B), chỉ có ứng suất pháp lớn nhất do M_x, M_y , phân tố ở trạng thái ứng suất đơn:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \quad (10.19)$$

Điều kiện bền: $\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n$

Tại điểm giữa cạnh ngắn (C,D), chịu ứng suất pháp lớn nhất do M_x và ứng suất tiếp τ_1 do M_z , phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_x|}{W_x}; \quad \tau_1 = \gamma \tau_{\max} \quad (10.20)$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

Theo thuyết bền thứ 4: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$

Tại điểm giữa cạnh dài (E,F), chịu ứng suất pháp lớn nhất do M_y và ứng suất tiếp $\tau_{1\max}$ do M_z , phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{|M_y|}{W_y}; \quad \tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha \cdot h \cdot b^2} \quad (10.21)$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

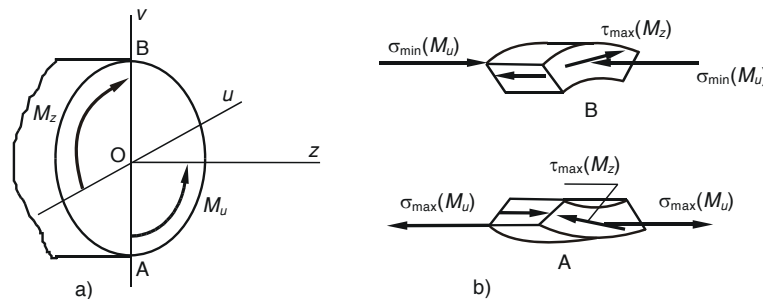
Theo thuyết bền thứ 4:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

3- Tiết diện tròn

Thanh tiết diện tròn chịu uốn xoắn đồng thời rất thường gặp khi tính trục truyền động vì quá trình truyền tác dụng xoắn qua các puli luôn kèm theo tác dụng uốn do lực căng dây đai, do trọng lượng bản thân trục, puli...

Xét một thanh tiết diện tròn chịu tác dụng của mômen uốn M_u và mômen xoắn M_z (H.10.21.a). Nếu có nhiều ngoại lực gây uốn tác dụng trong những mặt phẳng khác nhau, ta luôn luôn có thể phân tích chúng thành các thành phần tác dụng trong hai mặt phẳng vuông góc yOz , xOz , từ đó xác định M_x , M_y , sau đó xác định mômen tổng $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$.



Hình 10.21 a) Thanh tiết diện tròn chịu uốn xoắn
b) Trạng thái ứng suất phân tố

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng và lý thuyết về uốn, về xoắn, ta được các kết quả như sau (H.10.21.b):

Dưới tác dụng của mômen uốn M_u , hai điểm A, B chịu ứng suất pháp lớn nhất σ_{\max} , σ_{\min} , ngoài ra, do tác dụng của mômen xoắn M_z , tại hai điểm A, B còn chịu ứng suất tiếp τ_{\max} , đó là hai điểm nguy hiểm nhất trên tiết diện.

Ta có:
$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|M_u|}{W_u}; \quad M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (10.22)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$$

Phân tố đang xét vừa chịu ứng suất pháp vừa chịu ứng suất tiếp, đó là phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng.

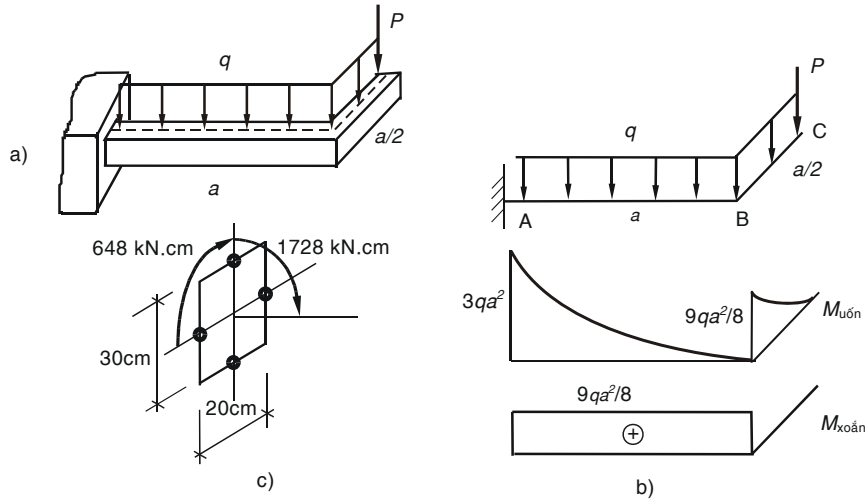
Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

Theo thuyết bền thứ 4:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$



Hình 10.22 a) Khung chịu uốn với tải trọng thẳng góc mặt phẳng khung

b) Sơ đồ tính khung và biểu đồ nội lực không gian vẽ theo nguyên lý cộng tác dụng

c) Các điểm nguy hiểm trên tiết diện

Ví dụ 10.5 Một thanh gẫy khúc ABC tiết diện chữ nhật (20cm × 30cm) chịu tác dụng của tải trọng như H.10.22.a. Vẽ biểu đồ nội lực, kiểm tra điều kiện bền tại tiết diện ngàm. Cho: $q = 4 \text{ kN/m}$; $P = 2qa$; $a = 1,2 \text{ m}$; $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$.

Giải. Biểu đồ nội lực được vẽ trên H.10.22.b, tại tiết diện ngàm chịu nội lực lớn nhất (H.10.22.c):

$$M_x = 3qa^2 = 3.4.(1,2)^2.100 = 1728 \text{ kN.cm}$$

$$M_z = 9qa^2/8 = 9.4.(1,2)^2.100/8 = 648 \text{ kN.cm}$$

Tại trung điểm cạnh ngắn, phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{1728}{20.30^2/6} = 0,576 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_1 = \gamma \cdot \tau_{\max} = \gamma \cdot \frac{M_z}{\alpha \cdot h \cdot b^2} = 0,859 \cdot \frac{648}{0,231 \cdot 30 \cdot 20^2} = 0,2 \text{ kN/cm}^2$$

Điều kiện bền:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{0,576^2 + 4 \cdot 0,2^2} = 0,7 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$$

Tại trung điểm cạnh dài, phân tố ở trạng thái trượt thuần túy:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha \cdot h b^2} = \frac{648}{0,231 \cdot 30 \cdot 20^2} = 0,233 \text{ kN/cm}^2$$

Điều kiện bền: $\tau_{\max} = 0,233 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma]/2 = 0,5 \text{ kN/cm}^2$

Ví dụ 10.6 Một trục tròn đường kính d , mang pu li chủ động đường kính D_1 và pu li bị động đường kính D_2 . Mô tơ truyền lực kéo T_1 lên một nhánh dây đai của pu li D_1 làm quay trục, kéo theo pu li D_2 . Coi hiệu suất truyền là 1, lực kéo trên một nhánh dây đai D_2 là $T_2 = T_1 \cdot D_1/D_2$. Ngoài ra, giả sử lực căng ban đầu trên dây đai bằng nửa lực kéo tác dụng lên dây đai. Tính đường kính trục d (H.10.23.a).

Cho: trọng lượng pu li $G_1 = G_2 = 1 \text{ kN}$; $D_1 = 50 \text{ cm}$; $D_2 = 30 \text{ cm}$; $T_1 = 5 \text{ kN}$; $[\sigma] = 12 \text{ kN/cm}^2$. Bỏ qua trọng lượng bản thân của trục.

Giải. Lực căng ban đầu trên dây đai của pu li D_1 là: $T_1/2 = 5/2 = 2,5 \text{ kN}$

Lực kéo truyền lên dây đai D_2 là: $T_2 = T_1 \cdot D_1/D_2 = 5 \cdot 50/30 = 8,33 \text{ kN}$

Lực căng ban đầu trên dây đai D_2 là: $T_2/2 = 8,33/2 = 4,17 \text{ kN}$

Dời lực trên dây đai về tâm của trục, ta có thể đưa ra sơ đồ tính của trục như trên H.10.23.b. Biểu đồ mômen uốn M_x , M_y và mômen xoắn M_z vẽ ở H.10.23.c.

Tại tiết diện đặt pu li D_2 chịu nội lực lớn nhất:

$$M_x = 20 \text{ kN.cm}, M_y = 150 \text{ kN.cm}; M_z = 125 \text{ kN.cm.}$$

Mômen uốn tổng $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = 151,32 \text{ kN.cm}$ gây ra ứng suất pháp lớn nhất là:

$$\sigma_z = \frac{M_u}{W_u} = \frac{151,32}{\pi \cdot D^3 / 32} = \frac{1542,1}{D^3}$$

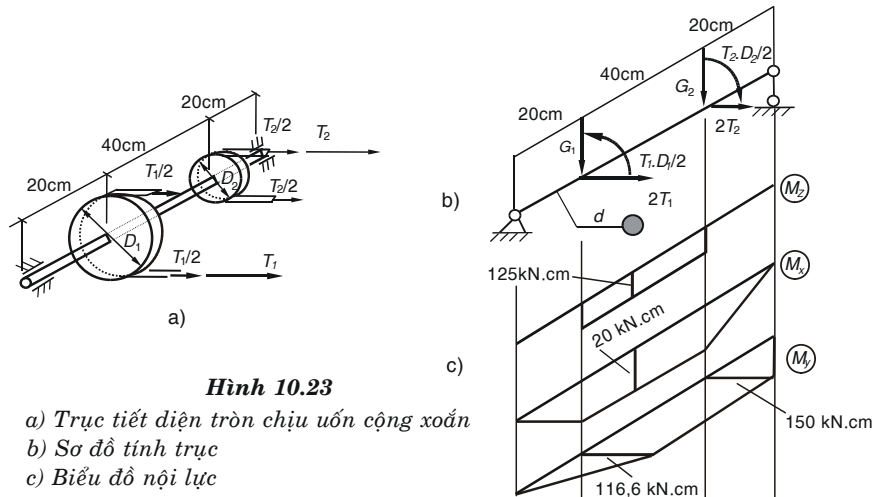
Mômen xoắn $M_z = 125 \text{ kNcm}$ gây ra ứng suất tiếp lớn nhất là:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{125}{\pi \cdot D^3 / 16} = \frac{636,9}{D^3}$$

Điều kiện bền theo thuyết bền thứ ba: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{1542,1^2}{(D^3)^2} + 4 \cdot \frac{636,9^2}{(D^3)^2}} \leq [\sigma] \Rightarrow \frac{2000}{D^3} \leq [\sigma] \Rightarrow D \geq 5,5 \text{ cm}$$

Có thể chọn đường kính trục là 55 mm.



Hình 10.23

10.5 THANH CHỊU LỰC TỔNG QUÁT

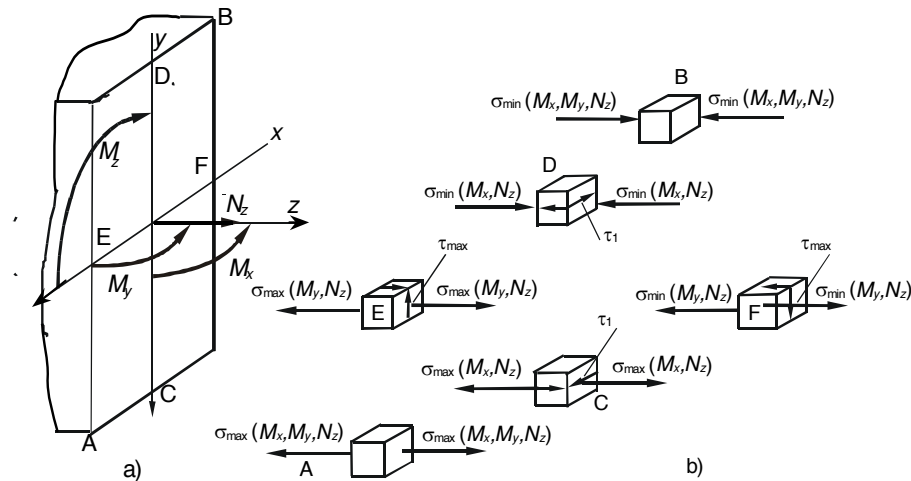
1. Định nghĩa

Thanh chịu lực tổng quát khi trên các mặt cắt ngang có tác dụng của lực dọc N_z , mômen uốn M_u và mômen xoắn M_x .

Thanh chịu lực tổng quát thường gặp khi tính các thanh chịu lực theo sơ đồ không gian.

1- Thanh có tiết diện chữ nhật

Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng và lý thuyết về kéo (nén), về uốn, và về xoắn, ta được các kết quả như sau (H.10.24.a,b):



Hình 10.24 a) Các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang
 b) Trạng thái ứng suất của các phân tố

Tại các góc tiết diện, chỉ có ứng suất pháp do N_z , M_x , M_y , phân tố ở trạng thái ứng suất đơn:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_y} \quad (10.23)$$

Điều kiện bền: $\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k$; $|\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n$

Tại điểm giữa cạnh dài, phân tố vừa chịu ứng suất pháp lớn nhất do M_y và lực dọc N_z , vừa chịu ứng suất tiếp lớn nhất do M_z , đó là phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_y|}{W_y}; \quad \tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha h b^2} \quad (10.24)$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

Theo thuyết bền thứ 4: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (10.25)$

Tại điểm giữa cạnh ngắn, phân tố vừa chịu ứng suất pháp lớn nhất do M_x và lực dọc N_z , vừa chịu ứng suất tiếp do M_z , phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng:

$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_x|}{W_x}; \quad \tau_1 = \gamma \tau_{\max} \quad (10.26)$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

Theo thuyết bền thứ 4: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$

2- Thanh có tiết diện tròn (H.10.25.a,b)

Điểm nguy hiểm nằm trên chu vi, đó là hai điểm A,B. hai điểm này vừa chịu ứng suất pháp lớn nhất do mômen M_u và lực dọc N_z , vừa chịu ứng suất tiếp lớn nhất do M_z , phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng.

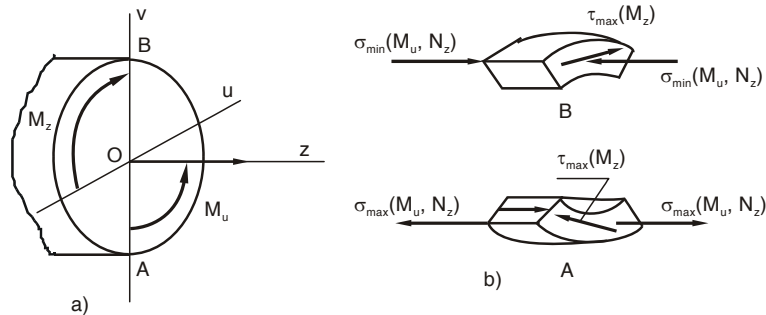
$$\sigma_{\max, \min} = \pm \frac{|N_z|}{A} \pm \frac{|M_u|}{W_u}; \quad M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \quad (10.27)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} \quad (10.28)$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3: $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

Theo thuyết bền thứ 4: $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$



Hình 10.25

- a) Các thành phần nội lực
b) Trạng thái ứng suất của các phân tố

Ví dụ 10.7 Có một thanh tiết diện tròn đường kính D chịu một hệ lực không gian như trên H.10.26.a. Vẽ biểu đồ nội lực. xác định đường kính D .

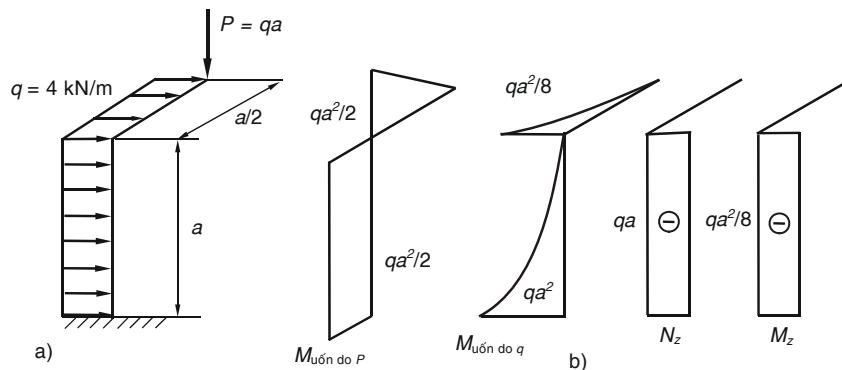
Cho: $q = 4 \text{ kN/m}$; $P = qa$; $a = 4 \text{ m}$; $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Giải. Biểu đồ nội lực được vẽ ở H.10.26.b.

Tại ngàm tiết diện chịu nội lực lớn nhất:

$$N_z = qa = 4 \cdot 4 = 16 \text{ kN (nén)}; M_x = qa^2 = 4 \cdot 4^2 \cdot 100 = 6400 \text{ kN.cm}$$

$$M_y = qa^2/2 = 4 \cdot 4^2 \cdot 100/2 = 3200 \text{ kN.cm}; M_z = qa^2/8 = 4 \cdot 4^2 \cdot 100/8 = 800 \text{ kN.cm}$$



Hình 10.26 a) Sơ đồ tính thanh chịu lực phức tạp
b) Biểu đồ nội lực vẽ theo nguyên lý cộng tác dụng

Ứng suất pháp lớn nhất:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|N_z|}{A} + \frac{|M_u|}{W_u}$$

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{6400^2 + 3200^2} = 7155,41 \text{ kN.cm}$$

$$|\sigma|_{\max} = \frac{16}{\pi \cdot D^2 / 4} + \frac{7155,4}{\pi \cdot D^3 / 32}$$

Ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{800}{\pi \cdot D^3 / 16}$$

Điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{16}{\pi.D^2/4} + \frac{7155,4}{\pi.D^3/32}\right)^2 + 4.\left(\frac{800}{\pi.D^3/16}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Trong tính toán thực hành, để thuận lợi cho việc giải bất phương trình trên, ban đầu chọn D theo uốn xoắn, bỏ qua ứng suất do lực dọc, sau đó kiểm tra lại, ta có:

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{7155,4}{\pi.D^3/32}\right)^2 + 4.\left(\frac{800}{\pi.D^3/16}\right)^2} \leq [\sigma] \Rightarrow D \geq 16,6 \text{ cm}$$

Ban đầu, chọn: $D = 168 \text{ mm}$.

Kiểm tra điều kiện bền:

Theo thuyết bền thứ 3:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

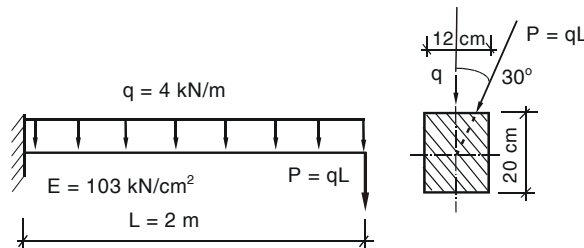
$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{16}{\pi.16,8^2/4} + \frac{7155,4}{\pi.16,8^3/32}\right)^2 + 4.\left(\frac{800}{\pi.16,8^3/16}\right)^2}$$

$$\sqrt{(0,072 + 15,38)^2 + 4.(0,86)^2} = 15,54 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

Vậy chọn: $D = 168 \text{ mm}$.

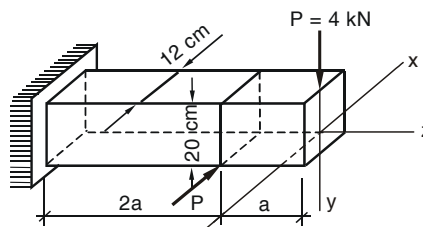
BÀI TẬP CHƯƠNG 10

10.1 Một thanh cong xon tiết diện chữ nhật chịu tác dụng của tải trọng như H.10.27. Vẽ biểu đồ nội lực, tính ứng suất pháp lớn nhất, xác định vị trí đường trung hoà tại mặt cắt ngầm.



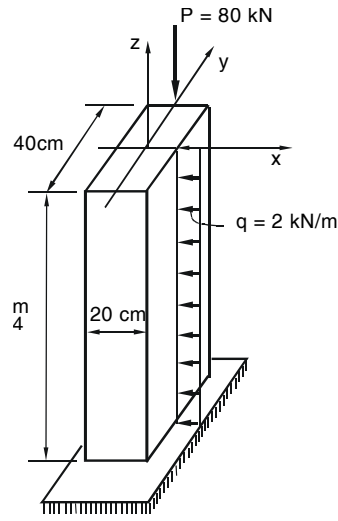
Hình 10.27

10.2 Xác định giá trị tuyệt đối lớn nhất của ứng suất pháp, vị trí đường trung hoà tại mặt cắt nguy hiểm của dầm (H.10.28), $a = 1 \text{ m}$.



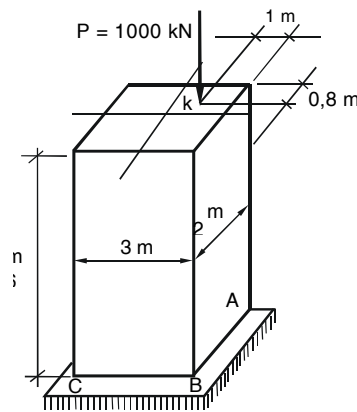
Hình 10.28

10.3 Xác định σ_{\max} , σ_{\min} và vị trí đường trung hoà tại mặt cắt nguy hiểm của cột H.10.29.



Hình 10.29

10.4 Một cột chịu tải trọng như H.10.30. Xác định ứng suất nén lớn nhất và nhỏ nhất tại mặt cắt chân cột. Cho trọng lượng riêng của vật liệu cột là: $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$.

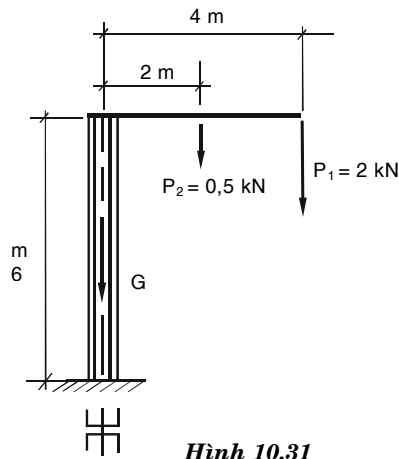


Hình 10.30

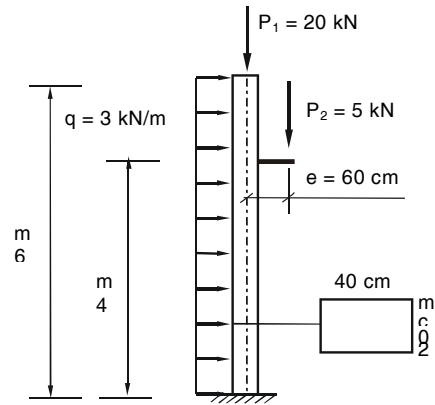
10.5 a. Một trụ đỡ có tiết diện gồm hai thép hình số hiệu [24 chịu tải trọng như H.10.31.

Xác định ứng suất kéo và nén lớn nhất tại mặt cắt chân cột có xét cả trọng lượng của cột.

b. Một cột chịu tải trọng như H.10.32. Tính ứng suất ứng suất kéo và nén lớn nhất.



Hình 10.31

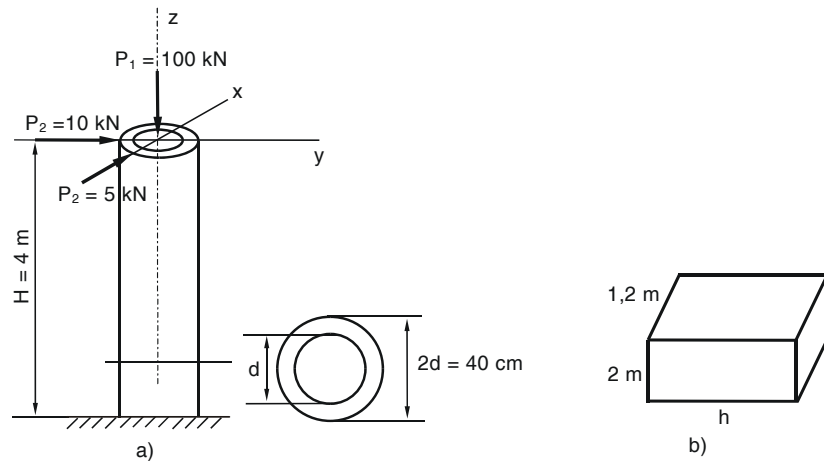


Hình 10.32

10.6 Một cột tròn rỗng chịu tác dụng của tải trọng như H.10.33.a.

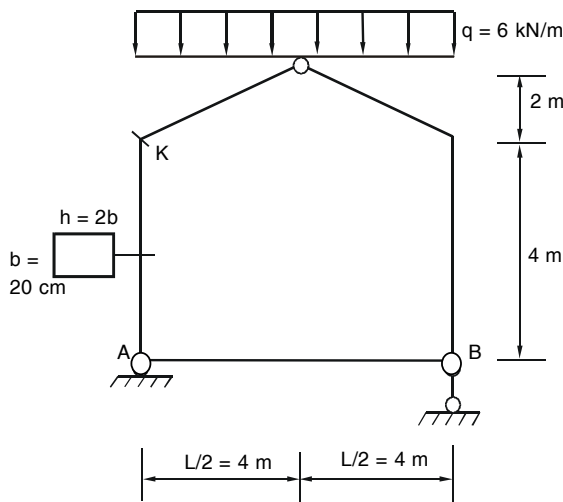
Tính ứng suất pháp σ_{\max} , σ_{\min} tại tiết diện chân cột, xác định vị trí và biểu diễn đường trung hoà tại tiết diện này.

Giả sử móng cột có kích thước $2 \text{ m} \times 1,2 \text{ m} \times h$, trọng lượng riêng $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$ (H.10.33.b) và trục cột được bố trí đi qua tâm móng. Hãy chỉ cách bố trí mặt bằng móng và tính kích thước h sao cho ở đáy móng không phát sinh ứng suất kéo.

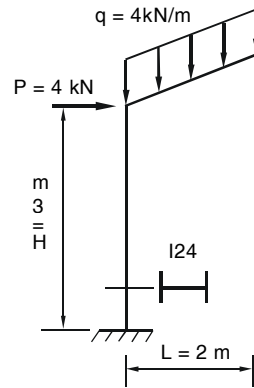


Hình 10.33

10.7 Một khung tiết diện chữ nhật đều, có thanh căng AB, chịu tác dụng của tải trọng như H.10.34. Vẽ biểu đồ nội lực của khung và nội lực kéo trong thanh AB. xác định ứng suất σ_{\max} , σ_{\min} và vị trí đường trung hoà tại mặt cắt ngang K.



Hình 10.34

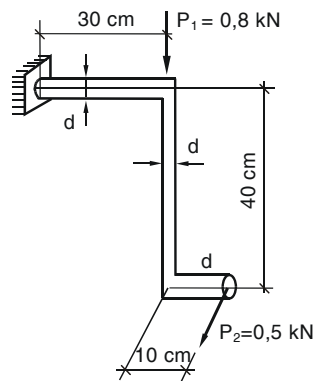


Hình 10.35

10.8 Một khung tiết diện chữ I24, chịu tác dụng của tải trọng như H.10.35. xác định nội lực tại tiết diện chân cột. Kiểm tra bền.

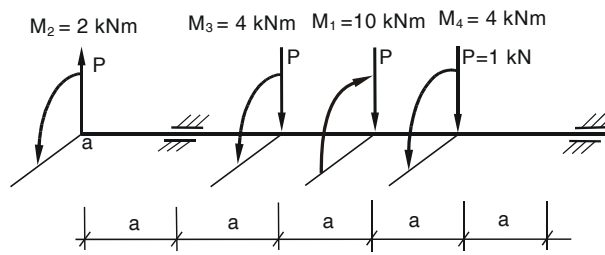
Cho $[\sigma]=16 \text{ kN/cm}^2$.

10.9 Một thanh gãy khúc tiết diện tròn đường kính d chịu lực như H.10.36. Vẽ biểu đồ nội lực, xác định đường kính d theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Cho $[\sigma] = 2,8 \text{ kN/cm}^2$.



Hình 10.36

10.10 Một trục truyền động tiết diện tròn đường kính d có sơ đồ tính như H.10.37. Vẽ biểu đồ nội lực, xác định đường kính d theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Cho $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$.



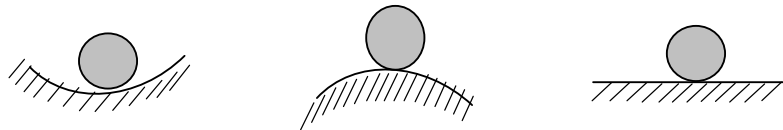
Hình 10.37

Chương 11

ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM**11.1 KHÁI NIỆM VỀ SỰ ỔN ĐỊNH CỦA TRẠNG THÁI CÂN BẰNG**

Để đáp ứng yêu cầu chịu lực bình thường, một thanh phải thỏa mãn điều kiện bền và cứng, như đã được trình bày trong các chương trước đây. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, thanh còn phải thỏa mãn thêm điều kiện **ổn định**. Đó là khả năng duy trì hình thức biến dạng ban đầu nếu bị **nhieũ**. Trong thực tế, **nhieũ** có thể là các yếu tố sai lệch so với sơ đồ tính như độ cong ban đầu, sự nghiêng hoặc lệch tâm của lực tác dụng...

Khái niệm ổn định có thể minh họa bằng cách xét sự cân bằng của quả cầu trên các mặt lõm, lồi và phẳng trên H.11.1.



H.11.1 Sự cân bằng về vị trí của quả cầu

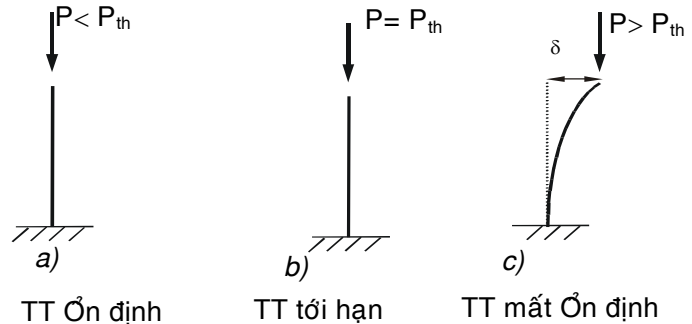
Nếu cho quả cầu một chuyển dịch nhỏ (gọi là **nhieũ**) từ vị trí ban đầu sang vị trí lân cận rồi bỏ **nhieũ** đi thì:

- Trên mặt lõm, quả cầu quay về vị trí ban đầu: sự cân bằng ở vị trí ban đầu là **ổn định**.
- Trên mặt lồi, quả cầu chuyển động ra xa hơn vị trí ban đầu: sự cân bằng ở vị trí ban đầu là **không ổn định**.
- Trên mặt phẳng, quả cầu giữ nguyên vị trí mới: sự cân bằng ở vị trí ban đầu là **phiếm định**.

Hiện tượng tương tự cũng có thể xảy ra đối với sự cân bằng về trạng thái biến dạng của hệ đàn hồi. Chẳng hạn với thanh chịu nén trên H.11.2. Trong điều kiện lý tưởng (thanh thẳng tuyệt đối, lực P hoàn toàn đúng tâm...) thì thanh sẽ giữ hình dạng thẳng, chỉ co ngắn do chịu nén đúng tâm. Nếu cho điểm đặt của lực P một chuyển vị bé δ do một lực ngang nào đó gây ra, sau đó bỏ lực này đi thì sẽ xảy ra các trường hợp biến dạng như sau:

+ Nếu lực P nhỏ hơn một giá trị P_{th} nào đó, gọi là **lực tới hạn**, tức là $P < P_{th}$, thì thanh sẽ phục hồi lại trạng thái biến dạng thẳng. Ta nói thanh làm việc ở **trạng thái ổn định**.

+ Nếu $P > P_{th}$ thì chuyển vị δ sẽ tăng và thanh bị cong thêm. Sự cân bằng của trạng thái thẳng ($\delta = 0$) là không ổn định. Ta nói thanh ở **trạng thái mất ổn định**. Trong thực tế thanh sẽ có chuyển vị δ và chuyển sang hình thức biến dạng mới bị uốn cong, khác trước về tính chất, bất lợi về điều kiện chịu lực.

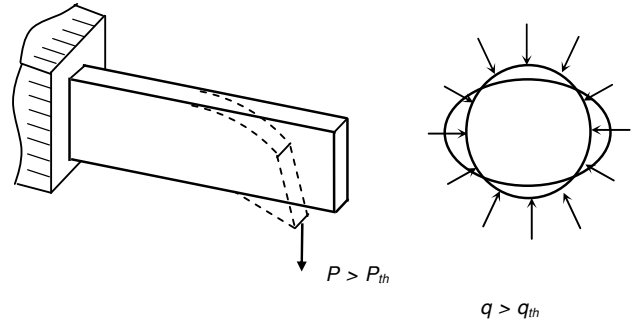


H. 11.2 Sự cân bằng của TT biến dạng

+ Ứng với $P = P_{th}$ thì thanh vẫn giữ nguyên chuyển vị δ và trạng thái biến dạng cong. Sự cân bằng của trạng thái thẳng là **phiếm định**. Ta nói thanh ở **trạng thái tới hạn**

H.11.3 giới thiệu thêm vài kết cấu có thể bị mất ổn định như dầm chịu uốn, vành tròn chịu nén đều...

Khi xảy ra mất ổn định dù chỉ của một thanh cũng dẫn tới sự sụp đổ của toàn bộ kết cấu. Tính chất phá hoại do mất ổn định là đột ngột và nguy hiểm. Trong lịch sử ngành xây dựng đã từng xảy ra những thảm họa sập cầu chỉ vì sự mất ổn định của một thanh dầm chịu nén như cầu Mekhelstein ở Thụy Sĩ (1891), cầu Lavrentia ở Mỹ (1907)... Vì vậy khi thiết kế cần phải **đảm bảo cả điều kiện ổn định**, ngoài điều kiện bền và điều kiện cứng đã nêu trước đây.



H. 11.3 Các dạng mất ổn định

$$\text{Điều kiện ổn định: } P \leq [P]_{\delta\delta} = \frac{P_{th}}{k_{\delta\delta}} \quad (11.1)$$

$$\text{Hay : } N_z \leq [P]_{\delta\delta} = \frac{P_{th}}{k_{\delta\delta}} \quad (11.2)$$

$k_{\delta\delta}$: Hệ số an toàn về mặt ổn định, do quy định, và thường lớn hơn hệ số an toàn về độ bền n .

P (hay N_z) : Lực nén (nội lực nén) thanh.

11.2 KHẢO SÁT ỔN ĐỊNH TRONG MIỀN ĐÀN HỒI

1- Tính lực tới hạn P_{th} thanh có kết khớp hai đầu (Bài toán Euler)

Xét thanh thẳng liên kết khớp hai đầu, chịu nén bởi lực tới hạn P_{th} . Khi bị nhiễu, thanh sẽ bị uốn cong và cân bằng ở hình dạng mới như trên H.11.4a.

Đặt hệ trục tọa độ (x,y,z) như H.11.4a

Xét mặt cắt có hoành độ z ;

Độ võng ở mặt cắt này là y .

Ta có phương trình vi phân đường đàn hồi:

$$y'' = -\frac{M}{EJ} \quad (a)$$

Với: mômen uốn $M = P_{th} y$ (b) (từ điều kiện cân bằng trên H.11.4b)

$$(b) \text{ vào } (a) \Rightarrow y'' = -\frac{P_{th}y}{EJ} \text{ hay } y'' + \frac{P_{th}}{EJ}y = 0$$

$$\text{Đặt: } \alpha^2 = \frac{P_{th}}{EJ} \Rightarrow y'' + \alpha^2 y = 0 \quad (c)$$

Nghiệm tổng quát của (c) là:

$$y = A \sin(\alpha z) + B \cos(\alpha z) \quad (d)$$

Các hằng số được xác định từ điều kiện biên $y(0) = 0$ và $y(L) = 0$.

$$\text{Với: } y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow A \sin(\alpha L) = 0$$

để bài toán có nghĩa $y(z) \neq 0 \Rightarrow A \neq 0, \Rightarrow \sin(\alpha L) = 0$

phương trình này có nghiệm $\alpha L = n\pi$, với $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\Rightarrow P_{th} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{L^2} \quad (e)$$

Thực tế, khi lực nén đạt đến giá trị tới hạn nhỏ nhất theo (e) ứng với $n = 1$ thì thanh đã bị cong. Vì vậy, các giá trị ứng với $n > 1$ không có ý nghĩa.

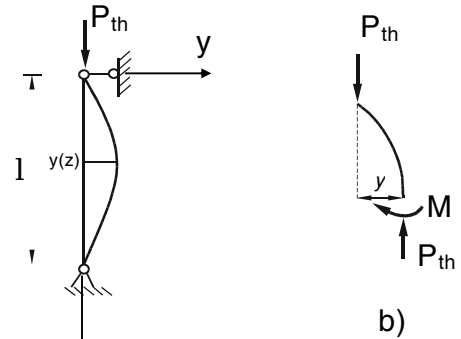
Ngoài ra, thanh sẽ cong trong mặt phẳng có **độ cứng uốn nhỏ nhất**. Do đó, công thức tính lực tới hạn của thanh thẳng hai đầu liên kết khớp là:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{L^2} \quad (11.3)$$

Đường đàn hồi tương ứng có dạng một nửa sóng hình sine:

$$y = A \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (11.4)$$

với: A là một hằng số bé, thể hiện độ võng giữa nhịp.



H. 11.4

2- Tính P_{th} thanh có các liên kết khác ở đầu thanh

Áp dụng phương pháp trên cho thanh có các liên kết khác nhau ở hai đầu, ta được công thức tính lực tới hạn có dạng chung:

$$P_{th} = \frac{m^2 \pi^2 EJ_{\min}}{L^2} \quad (11.5)$$

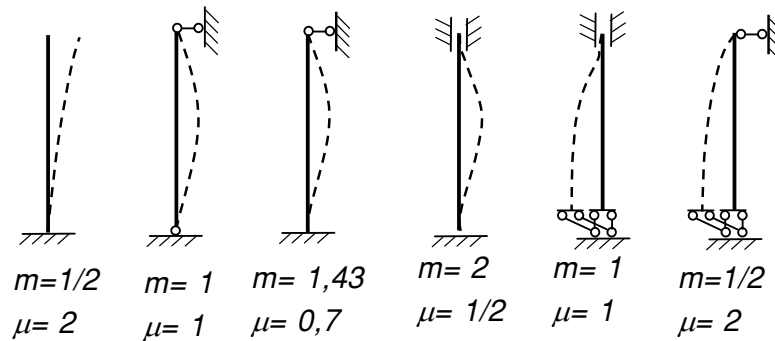
với: m - là số nửa sóng hình sine của đường đàn hồi khi mất ổn định.

Đặt $\mu = \frac{1}{m}$, gọi là hệ số quy đổi, (11.5) thành

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu L)^2} \quad (11.6)$$

(11.6) được gọi chung là **công thức Euler**

Dạng mất ổn định và hệ số μ của thanh có liên kết hai đầu khác nhau thể hiện trên H.11.5.



H. 11.5 Dạng mất ổn định và hệ số μ

3- Ứng suất tới hạn

Ứng suất trong thanh thẳng chịu nén đúng tâm bởi lực P_{th} gọi là ứng suất tới hạn và được xác định theo công thức:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu L)^2 F} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu L)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu L}{i_{\min}}\right)^2} \quad (11.7)$$

với: $i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}$ là bán kính quán tính nhỏ nhất của tiết diện .

Đặt $\lambda = \frac{\mu L}{i_{\min}}$: **độ mảnh của thanh** (11.8)

(11.7) thành: $\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ (11.9)

Độ mảnh λ không có thứ nguyên, phụ thuộc vào chiều dài thanh, điều kiện liên kết và đặc trưng hình học của tiết diện; thanh có độ mảnh càng lớn thì càng dễ mất ổn định.

4- Giới hạn áp dụng công thức Euler

Công thức Euler được xây dựng trên cơ sở phương trình vi phân đường đàn hồi, vì vậy chỉ áp dụng được khi vật liệu còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi, tức là ứng suất trong thanh nhỏ hơn giới hạn tỷ lệ:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{tl}$$

hay:
$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} \quad (f)$$

Nếu đặt:
$$\lambda_o = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} \quad (11.10)$$

thì điều kiện áp dụng của công thức Euler là:

$$\lambda \geq \lambda_o \quad (11.11)$$

trong đó: λ_o - được gọi là **độ mảnh giới hạn** và là một hằng số đối với mỗi loại vật liệu.

Thí dụ: Thép xây dựng thông thường $\lambda_o = 100$, gỗ $\lambda_o = 75$; gang $\lambda_o = 80$.

Nếu $\lambda \geq \lambda_o$ thì gọi là **độ mảnh lớn**.

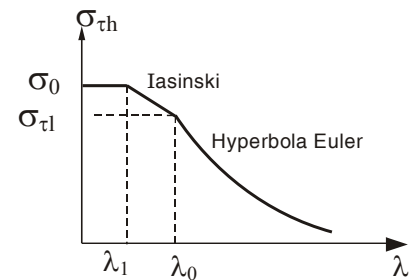
Như vậy, công thức Euler chỉ áp dụng được cho thanh có độ mảnh lớn.

11.3 ỔN ĐỊNH NGOÀI MIỀN ĐÀN HỒI

1- Ý nghĩa

Công thức Euler chỉ áp dụng được khi vật liệu đàn hồi. Đồ thị của phương trình (11.6) là một *hyperbola* như trên H.11.6, chỉ đúng khi $\sigma_{th} \leq \sigma_{tl}$.

Khi $\sigma_{th} > \sigma_{tl} \Leftrightarrow$ vật liệu làm việc ngoài miền đàn hồi, cần thiết phải có công thức khác để tính P_{th} .



H. 11.6 Ứng suất tới hạn

2- Công thức thực nghiệm lasinski

Công thức lasinski được đề xuất dựa trên nhiều số liệu thực nghiệm, phụ thuộc vào độ mảnh của thanh.

- **Thanh có độ mảnh vừa** $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_0$:

$$\sigma_{th} = a - \lambda b \quad (11.12)$$

với: a và b là các hằng số phụ thuộc vật liệu, được xác định bằng thực nghiệm: • Thép xây dựng: $a = 33,6 \text{ kN/cm}^2$; $b = 0,147 \text{ kN/cm}^2$

• Gõ: $a = 2,93 \text{ kN/cm}^2$; $b = 0,0194 \text{ kN/cm}^2$

độ mảnh λ_1 được xác định từ công thức:

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{tl}}{b} \quad (11.13)$$

thực nghiệm cho thấy phạm vi giá trị $\lambda_1 = 30 \div 40$

- **Thanh có độ mảnh bé** $\lambda < \lambda_1$: Khi này thanh không mất ổn định mà đạt đến trạng thái phá hoại của vật liệu. Vì vậy, ta coi:

$$\sigma_{th} = \sigma_0 = \sigma_b \quad \text{đối với vật liệu dòn}$$

$$\sigma_{th} = \sigma_0 = \sigma_{ch} \quad \text{đối với vật liệu dẻo} \quad (11.14)$$

$$\text{và Lực tới hạn của thanh : } P_{th} = \sigma_{th} \cdot F \quad (11.15)$$

Thí dụ 11.1 Tính P_{th} và σ_{th} của một cột làm bằng thép số 3 có mặt cắt ngang hình chữ I số 22. Cột có liên kết khớp hai đầu. Xét hai trường hợp:

- Chiều cao của cột 3,0 m
- Chiều cao của cột 2,25 m

Biết: $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\sigma_{tl} = 21 \text{ kN/cm}^2$; $\lambda_o = 100$

Các hằng số trong công thức lasinski : $a = 33,6 \text{ kN/cm}^2$, $b = 0,147 \text{ kN/cm}^2$

Giải.

Tra bảng thép định hình (phụ lục) ta có các số liệu của thép I N°22:

$i_{\min} = i_y = 2,27 \text{ cm}$; $F = 30,6 \text{ cm}^2$; theo liên kết của thanh thì ta có $\mu = 1$.

+ Trường hợp a)

$$\text{Độ mảnh : } \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 300}{2,27} = 132 > \lambda_o = 100$$

Thanh có độ mảnh lớn, áp dụng công thức Euler

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4}{132^2} = 11,88 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Rightarrow P_{th} = \sigma_{th} F = 11,88 \cdot 30,6 = 363,62 \text{ kN} .$$

+ Trường hợp b)

$$\text{Độ mảnh : } \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 225}{2,27} = 99,11 < \lambda_o$$

$$\lambda_1 = \frac{a - \sigma_{tl}}{b} = \frac{33,6 - 21}{0,147} = 85,7 \rightarrow \lambda_1 < \lambda < \lambda_o$$

Thanh có độ mảnh vừa, dùng công thức lasinski:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda = 33,6 - 0,147 \cdot 90 = 20,37 \text{ kN/cm}^2$$

$$P_{th} = \sigma_{th} F = 20,37 \cdot 30,6 = 623,32 \text{ kN} .$$

Chú ý: - Nếu liên kết của thanh trong hai mặt phẳng quán tính giống nhau trong các công thức đã có sẽ dụng J_{\min} và i_{\min} .

- Nếu liên kết của thanh trong hai mặt phẳng quán tính khác nhau thì khi mất ổn định thanh sẽ cong trong mặt phẳng có độ mảnh lớn và các đại lượng J , i sẽ lấy trong mặt phẳng này.

11.4 PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH TÍNH ỔN ĐỊNH THANH CHỊU NÉN

1- Phương pháp tính: Thanh chịu nén cần phải thỏa :

$$\diamond \text{ Điều kiện bền: } \sigma = \frac{P}{F_{th}} \leq [\sigma]_n; \text{ với: } [\sigma]_n = \frac{\sigma_o}{n} \quad (11.16)$$

trong đó: n - hệ số an toàn về độ bền

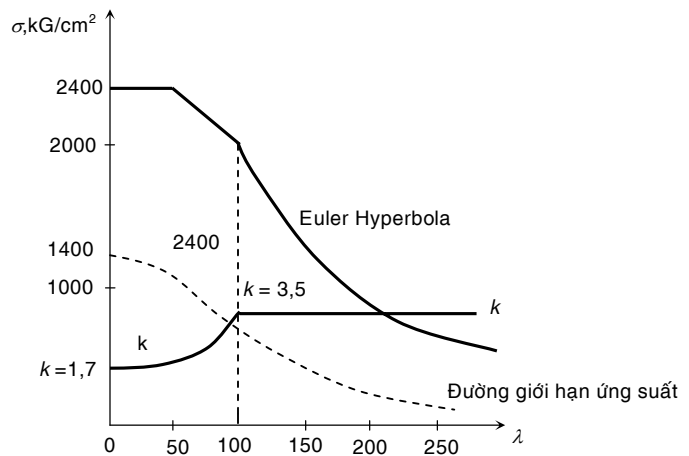
F_{th} - diện tích tiết diện giảm yếu (bị khoét lỗ); nếu không khoét lỗ thì $F_{th} = F$ là tiết diện nguyên

$$\diamond \text{ Điều kiện ổn định: } \sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{\text{ổđ}} ; \text{ với: } [\sigma]_{\text{ổđ}} = \frac{\sigma_{th}}{k_{\text{ổđ}}} \quad (11.17)$$

trong đó: $k_{\text{ổđ}}$ (hay k)- hệ số an toàn về ổn định.

Vì sự giảm yếu cục bộ tại một số tiết diện có ảnh hưởng không đáng kể đến sự ổn định chung của thanh.

Do tính chất nguy hiểm của hiện tượng mất ổn định và xét đến những yếu tố không tránh được như độ cong ban đầu, độ lệch tâm của lực nén ... nên chọn $k_{\text{ổđ}} > n$, và k thay đổi phụ thuộc vào độ mảnh. Thép xây dựng có $k_{\text{ổđ}} = 1,8 \div 3,5$ như minh họa trên H.11.7; gang $k_{\text{ổđ}} = 5 \div 5,5$; gỗ $k_{\text{ổđ}} = 2,8 \div 3,2$.



Hình.11.7 Hệ số an toàn $k_{\text{ổđ}}$ cho thép

Để thuận tiện cho tính toán thực hành, người ta đưa vào

khái niệm **hệ số uốn dọc** hoặc **hệ số giảm ứng suất cho phép** φ được định nghĩa như sau:

$$\varphi = \frac{[\sigma]_{\text{ổđ}}}{[\sigma]_n} = \frac{\sigma_{th}}{\sigma_o} \frac{n}{k}$$

$\varphi < 1$, vì cả hai tỉ số: $\frac{\sigma_{th}}{\sigma_o} < 1$ và $\frac{n}{k} < 1$

từ đó: $[\sigma]_{\text{ổđ}} = \varphi[\sigma]_n$, và điều kiện ổn định trở thành: $\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]_n \quad (11.18)$

hay: $\frac{P}{\varphi F} \leq [\sigma]_n ;$

hay: $P \leq [P]_{\text{ổđ}} = \varphi[\sigma]_n F \quad (11.19)$

Điều kiện ổn định (11.18) thỏa, điều kiện bền (11.16) không cần kiểm tra

Hệ số $\varphi = \varphi_{[E, \lambda, k]}$ được cho ở bảng 11.1

Bảng 11.1 Hệ số φ

| Độ mảnh λ | Trị số φ đối với | | | | |
|-------------------------|--------------------------|--------------|-------------|------|------|
| | Thép số 2,3,4 | Thép số 5 | Thép СПК | Gang | Gỗ |
| 0 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| 10 | 0,99 | 0,98 | 0,97 | 0,97 | 0,99 |
| 20 | 0,96 | 0,95 | 0,95 | 0,91 | 0,97 |
| 30 | 0,94 | 0,92 | 0,91 | 0,81 | 0,93 |
| 40 | 0,92 | 0,89 | 0,87 | 0,69 | 0,87 |
| 50 | 0,89 | 0,86 | 0,83 | 0,54 | 0,80 |
| 60 | 0,86 | 0,82 | 0,79 | 0,44 | 0,71 |
| 70 | 0,81 | 0,76 | 0,72 | 0,34 | 0,60 |
| 80 | 0,75 | 0,70 | 0,65 | 0,26 | 0,48 |
| 90 | 0,69 | 0,62 | 0,55 | 0,20 | 0,38 |
| 100 | 0,60 | 0,51 | 0,43 | 0,16 | 0,31 |
| 110 | 0,52 | 0,43 | 0,35 | | 0,25 |
| 120 | 0,45 | 0,36 | 0,30 | | 0,22 |
| 130 | 0,40 | 0,33 | 0,26 | | 0,18 |
| 140 | 0,36 | 0,29 | 0,23 | | 0,16 |
| 150 | 0,32 | 0,26 | 0,21 | | 0,14 |
| 160 | 0,29 | 0,24 | 0,19 | | 0,12 |
| 170 | 0,26 | 0,21 | 0,171 | | 0,11 |
| 180 | 0,23 | 0,19 | 0,15 | | 0,10 |
| 190 | 0,21 | 0,17 | 0,14 | | 0,09 |
| 200 | 0,19 | 0,16 | 0,13 | | 0,08 |

Vì $\varphi < 1$ nên thường chỉ cần kiểm tra điều kiện ổn định là đủ. Tuy nhiên, nếu thanh có giảm yếu cục bộ do liên kết bu lông, đinh tán... thì cần kiểm tra cả hai điều kiện bền và ổn định.

$$\text{- Điều kiện bền: } \sigma = \frac{P}{F_{th}} \leq [\sigma]_n \quad (11.20)$$

$$\text{- Điều kiện ổn định } \sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]_n \quad (11.21)$$

trong thực tế, nếu thỏa (11.21) thì thường cũng thỏa (11.20).

Đối với bài toán ổn định cũng có ba bài toán:

1. Kiểm tra ổn định:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma]_n \quad (11.22)$$

2. Xác định tải trọng cho phép:

$$[P] \leq \varphi F [\sigma]_n \quad (11.23)$$

Trong hai bài toán trên, vì tiết diện thanh đã biết nên có thể suy ra hệ số φ theo trình tự: $F, l \rightarrow \lambda = \frac{\mu l}{\sqrt{J/F}} \rightarrow \varphi$ (tra bảng 11.1)

3. Chọn tiết diện:

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma]_n} \quad (11.24)$$

việc tìm F phải làm đúng dần, vì trong (11.22) chứa hai biến: F và $\varphi(F)$. Trình tự như sau:

$$\text{- Giả thiết: } \varphi_o = 0,5; \text{ tính được: } F_o = \frac{P}{\varphi_o[\sigma]_n} \Rightarrow \lambda_o$$

$$\text{- Từ } \lambda_o \text{ tra bảng ta được } \varphi_o'. \text{ Nếu } \varphi_o' \neq \varphi_o \text{ thì lấy: } \varphi_1 = \frac{\varphi_o + \varphi_o'}{2}$$

$$\Rightarrow F_1 = \frac{P}{\varphi_1[\sigma]_n} \Rightarrow \lambda_1 \Rightarrow \varphi_1'$$

thường lặp lại quá trình tính khoảng 2 - 3 lần thì sai số tương đối giữa hai lần tính đủ nhỏ ($\leq 5\%$).

Thí dụ 11.3 Chọn số liệu thép I cho thanh dài 2,0m, liên kết khớp hai đầu và chịu lực nén $P = 230 \text{ kN}$. Biết vật liệu là thép số 2 có $[\sigma]_n = 14 \text{ kN/cm}^2$.

Giải:

a. Lần chọn thứ nhất

$$\text{Giả thiết } \varphi = 0,5, \Rightarrow F \geq \frac{P}{[\sigma]_n \varphi} = \frac{230}{14 \cdot 0,5} = 32,8 \text{ cm}^2$$

Tra bảng thép định hình ta chọn thép chữ I số 24 có $F = 34,8 \text{ cm}^2$, $i_y = i_{min} = 2,37 \text{ cm}$, ta có độ mảnh:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}} = \frac{1 \cdot 200}{2,37} = 84,4$$

Tra bảng quan hệ giữa λ và φ ta được $\varphi = 0,724$. Hệ số này khác với giả thiết ban đầu nên ta phải chọn lại.

b. Lần chọn thứ hai

$$\text{Giả thiết: } \varphi = \frac{0,5 + 0,724}{2} = 0,612 \Rightarrow F \geq \frac{230}{0,612 \cdot 14} = 26,84 \text{ cm}^2$$

Tra bảng thép định hình ta tìm được thép chữ I số 20 với $F = 26,8 \text{ cm}^2$, $i_{min} = 2,07 \text{ cm}$. Độ mảnh lúc đó bằng:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 200}{2,07} = 96,6$$

tra bảng ta tìm được $\varphi = 0,631$ gần đúng giá trị 0,625 theo giả thiết. Do đó, ta kiểm tra lại điều kiện ổn định:

$$\frac{P}{\varphi F} \leq [\sigma]_n ; \quad \frac{230}{0,631 \cdot 26,8} = 13,6 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$$

Vậy ta chọn thép chữ I số 20.

2- Chọn mặt cắt ngang và vật liệu hợp lý

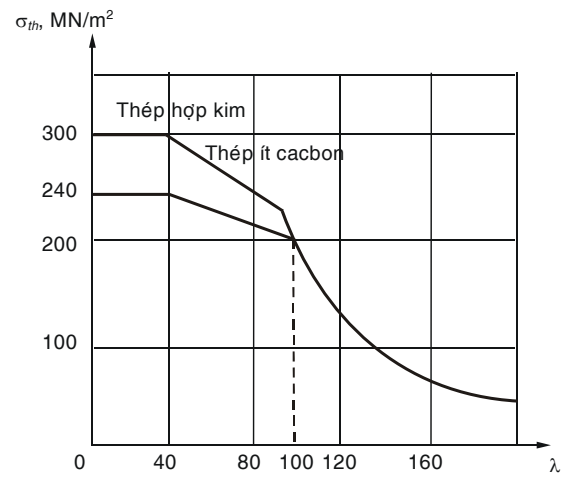
Khi thiết kế thanh chịu nén, người ta cố gắng làm cho khả năng chịu lực của thanh càng lớn càng tốt. Theo công thức (11.6) và (11.15) ta có lực tới hạn:

$$\text{- Trong miền đàn hồi: } P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (11.6)$$

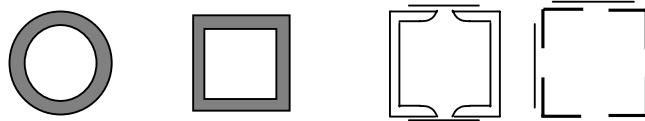
$$\text{- Ngoài miền đàn hồi: } P_{th} = \sigma_{th} \cdot F \quad (11.15)$$

Thường thì chiều dài và liên kết hai đầu thanh được cho trước. Vì vậy, để tăng P_{th} có hai cách:

1) Chọn vật liệu có môđun đàn hồi lớn, Ví dụ dùng thép thay cho bê tông. Tuy nhiên, chỉ dùng thép cường độ cao thay cho thép cường độ thấp khi thanh làm việc ngoài miền đàn hồi; còn trong miền đàn hồi thép có môđun đàn hồi giống nhau nên việc thay thế không có lợi về mặt chịu lực như đồ thị trên H.11.8 thể hiện.



2) Nếu hệ số liên kết μ giống nhau theo hai phương thì cấu tạo tiết diện có $I_x = I_y$, và thường làm tiết diện rộng để tăng mômen quán tính của mặt cắt nhưng phải có cấu tạo để không mất ổn định cục bộ. Tiết diện hợp lý của cột chịu nén trong thực tế thường có dạng như trên H.11.9



Hình 11.9 Dạng tiết diện hợp lý

Nếu liên kết hai phương khác nhau thì nên cấu tạo tiết diện sao cho có

$$\text{hay: } \lambda_{\max} = \lambda_{\min} \quad \frac{J_x}{\mu_x^2} = \frac{J_y}{\mu_y^2} \quad (11.25)$$

11.5 XÁC ĐỊNH LỰC TỐI HẠN BẰNG PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG

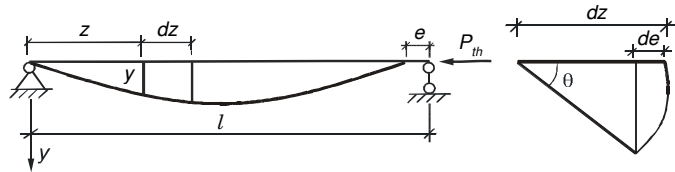
1- Khái niệm

Việc tìm lực tối hạn của thanh có độ mảnh lớn theo phương pháp tĩnh do Euler thực hiện là chính xác. Tuy nhiên, trong thực tế có những bài toán phức tạp hơn như thanh có độ cứng EJ thay đổi, lực phân bố dọc theo trục thanh... thì việc thiết lập và giải phương trình vi phân để tìm lực tối hạn trở nên phức tạp.

Trong trường hợp đó, người ta có thể dựa trên nguyên lý bảo toàn năng lượng để tìm nghiệm gần đúng.

2- Phương pháp năng lượng xác định lực tối hạn

Giả sử thanh chịu nén đúng tâm bởi lực P_{th} , như được minh họa trên H.11.10.



Hình 11.10 Xác định lực tối hạn

Dưới tác động của nhiễu, thanh bị uốn cong với phương trình $y(z)$, điểm đặt của lực P_{th} dịch chuyển một đoạn e . Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, công A của lực P_{th} bằng thế năng biến dạng uốn U của thanh:

$$A = U \quad (11.26)$$

trong đó: $A = P_{th}e \quad (11.27)$

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EJ} dz = \frac{1}{2} \int_0^l EJy'^2 dz \quad (11.28)$$

Để xác định độ co ngắn e của thanh do sự uốn cong gây ra, ta xét phân tố thanh dz trên H.11.11. Ta có:

$$de = dz - dz \cos \theta = dz(1 - \cos \theta) = dz(2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) = dz 2 \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 = \frac{\theta^2}{2} dz$$

hay: $de = \frac{y'^2}{2} dz \quad (11.29)$

Chú ý rằng, vì góc xoay θ là bé nên ở trên ta đã coi:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}; \quad \theta = \text{tg} \theta = y'$$

Tích phân (11.30) ta được:

$$e = \int_0^l \frac{y'^2}{2} dz = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dz \quad (11.30)$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{P_{th}}{2} \int_0^l y'^2 dz \quad (11.31)$$

Thế (11.31) và (11.28) vào (11.26) ta có:

$$\frac{P_{th}}{2} \int_0^l y'^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^l EI y''^2 dz$$

$$\text{hay: } P_{th} = \frac{\int_0^l EI y''^2 dz}{\int_0^l y'^2 dz} \quad (11.32)$$

Khi tìm lực P_{th} theo phương pháp năng lượng, ta chọn $y(z)$ thỏa điều kiện biên và thế vào (11.33). Vì thường $y(z)$ là gần đúng nên lực P_{th} cũng gần đúng. Sự sai lệch của đường đàn hồi $y(z)$ có ý nghĩa như là thanh được đặt thêm một hệ liên kết đàn hồi nào đó phân bố dọc theo trục thanh và làm cho thanh trở nên cứng hơn. Vì vậy, lực P_{th} tìm theo phương pháp năng lượng luôn lớn hơn giá trị thật (chỉ bằng giá trị thật khi đường đàn hồi được chọn chính xác).

Thí dụ 11.4 Tìm lực P_{th} cho thanh trên H.11.11 với $EJ = \text{hằng số}$

Giải.

Giả sử đường đàn hồi được chọn gần đúng theo dạng do lực phân bố đều gây ra như sau:

$$y = \alpha z(z^3 - 2lz^2 + l^3)$$

với α - là một hằng số bé.

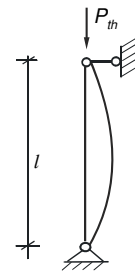
ta có: $y' = \alpha(4z^3 - 6lz^2 + l^3)$

$$y'' = 12\alpha(z^2 - lz)$$

thế vào (11.33) ta tìm được: $P_{th} = \frac{9,882EI}{l^2}$

So với nghiệm chính xác $P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{9,8696EI}{l^2}$ thì kết quả tính lớn hơn 0,25%.

Nếu đường đàn hồi chọn là một nửa sóng hình *sine*, tức là trùng với đường đàn hồi chính xác của bài toán Euler, thì P_{th} tìm theo phương pháp năng lượng cũng cho kết quả chính xác.

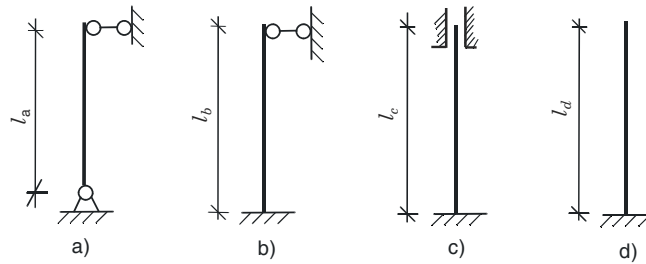


Hình 11.11
Tìm P_{th} bằng
phương pháp năng lượng

BÀI TẬP CHƯƠNG 11

11.1 Cho bốn thanh có mặt cắt ngang như nhau làm bằng cùng một loại vật liệu và có liên kết như trên H.11.1.

Nếu muốn chịu được cùng một lực nén đúng tâm thì chiều dài của mỗi thanh phải bằng bao nhiêu L_a . Giả thiết vật liệu mất ổn định trong miền đàn hồi và $EJ =$ hằng số.



Hình 11.1

11.2 Thanh có chiều dài $L = 3$ m, một đầu ngàm, một đầu khớp. Hãy xác định lực tới hạn của thanh trong ba trường hợp sau đây:

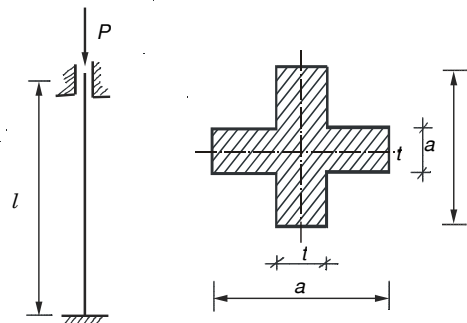
a. Mặt cắt hình tròn bán kính $R = 4$ cm, vật liệu là gang xám có: $\sigma_{Hl} = 17,8$ kN/cm²; $E = 1,15 \cdot 10^4$ kN/cm².

b. Mặt cắt hình tròn rỗng bán kính ngoài $R = 3$ cm và bán kính trong $r = 2$ cm, vật liệu là đura có $\sigma_{Hl} = 18$ kN/cm²; $E = 0,71 \cdot 10^4$ kN/cm².

c. Mặt cắt hình vuông cạnh 15 cm \times 15 cm, vật liệu bằng gỗ có: $\sigma_{Hl} = 1,7$ kN/cm²; $E = 0,1 \cdot 10^4$ kN/cm². Biết hai hệ số trong công thức lasinski là $a = 2,93$ kN/cm² và $b = 0,0194$ kN/cm²

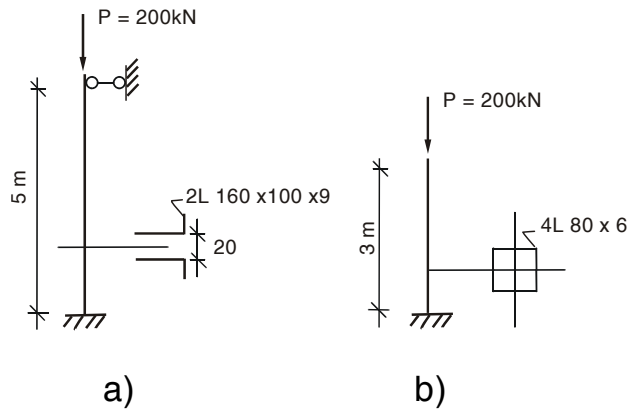
11.3 Cho thanh bằng gang có $l = 1,6$ m;

$a = 6$ cm; $t = 1$ cm như H.11.14. Xác định lực tới hạn và ứng suất tới hạn. Cho $\lambda_o = 80$; $a = 77,6$ kN/cm²; $b = 1,2$ kN/cm². Muốn thanh mất ổn định khi vật liệu còn làm việc trong giới hạn đàn hồi thì chiều dài của thanh phải bằng bao nhiêu?



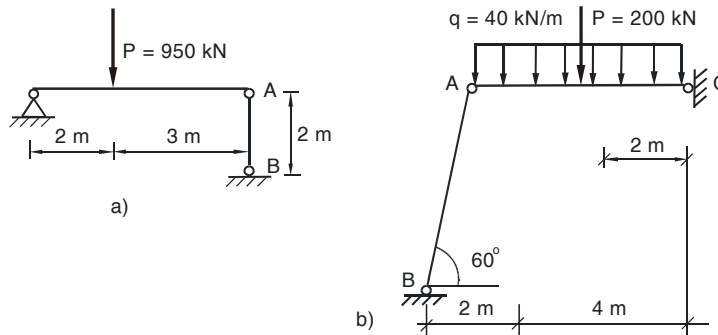
Hình 11.3

11.4 Kiểm tra ổn định của các thanh cho trên H.11.4, nếu $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$. Lực nén cho phép lớn nhất là bao nhiêu? Vật liệu của thanh thép là thép số 3.



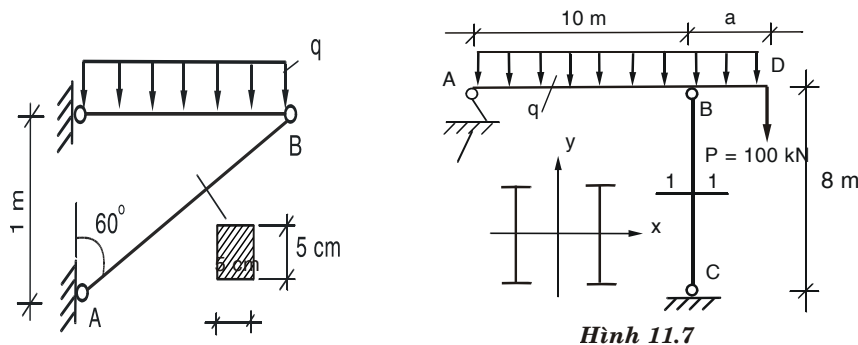
Hình 11.4

11.5 Cho hai hệ thanh chịu lực như trên H.11.5. Xác định số hiệu mặt cắt chữ I của thanh chống AB, biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$. Vật liệu là thép số 3. Xác định hệ số an toàn về ổn định của các thanh đó.



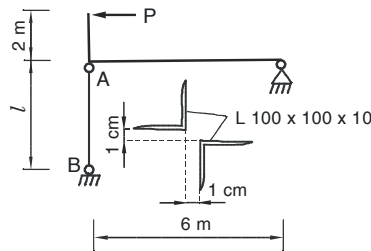
Hình 11.5

11.6 Một giá đỡ chịu tải trọng phân bố đều như trên H.11.6. Xác định trị số cho phép của cường độ tải trọng phân bố tác dụng lên giá. Thanh AB có mặt cắt hình vuông cạnh 5 cm x 5 cm làm bằng gỗ có $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$.

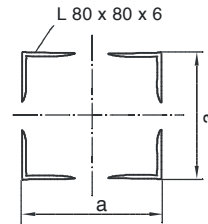


Hình 11.6

11.7 Một dầm cầu trục AD chịu lực như H.11.7. Cột BC làm bằng hai thép chữ I số 14 ghép lại sao cho mô men quán tính đối với hai trục bằng nhau. Xác định chiều dài tối đa của mút thừa a, biết rằng cột làm việc bất lợi nhất khi xe cầu trục mang một trọng lượng 100 kN đặt ở đầu mút thừa. Tải trọng phân bố $q = 4 \text{ kN/m}$.



Hình 11.8

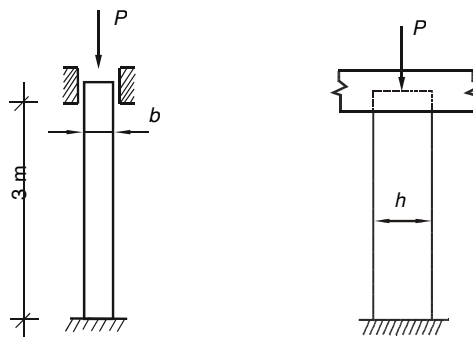


Hình 11.9

11.8 Hệ thanh chịu lực như H.11.8. Xác định chiều dài l của thanh chống AB làm bằng thép có $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$. Cho biết tải trọng $P = 300 \text{ kN}$.

11.9 Một thanh chịu nén đúng tâm được làm bằng bốn thép góc đều cạnh loại $80 \times 80 \times 6$ (H.11.9). Xác định kích thước a của mặt cắt. Biết thanh dài $l = 6 \text{ m}$ hai đầu liên kết khớp và chịu lực nén ở đầu cột $P = 200 \text{ kN}$. Vật liệu có $[\sigma] = 20 \text{ kN/cm}^2$.

11.10 Một cột gỗ dài $L = 3 \text{ m}$, mặt cắt hình chữ nhật $b \times h$. Đầu dưới của cột được chôn vào nền bê tông, đầu trên có thể trượt theo một khe nhỏ song song với phương chiều dài h của mặt cắt (H.11.10). Xác định kích thước của mặt cắt $b \times h$ sao cho mặt cắt là hợp lý nhất. Cho biết lực nén $P = 100 \text{ N}$, $[\sigma] = 1 \text{ kN/cm}^2$.



UỐN NGANG VÀ UỐN DỌC ĐỒNG THỜI

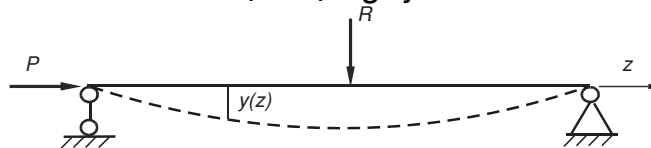
12.1 ĐẶC ĐIỂM BÀI TOÁN

Xét một thanh chịu uốn bởi tác động đồng thời của lực ngang R và lực nén dọc P như trên H.12.1. Nếu chuyển vị là đáng kể thì cần phải xét cân bằng của thanh trên sơ đồ biến dạng và mômen nội lực sẽ bao gồm ảnh hưởng của lực R và P :

$$M(z) = M_R + M_P = M_R + Py(z) \quad (12.1)$$

trong đó: M_R - mômen uốn do riêng tải trọng ngang gây ra

$Py(z)$ - mômen uốn do lực dọc gây ra.



Hình 12.1 Uốn ngang và uốn dọc đồng thời

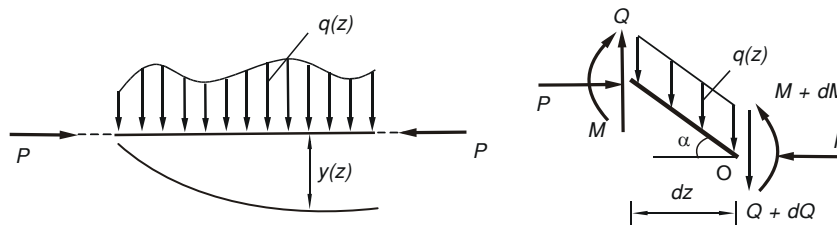
Bài toán như vậy được gọi là uốn ngang và uốn dọc đồng thời.

Đặc điểm của bài toán:

- Mômen $M(z)$ phụ thuộc vào độ võng $y(z)$
- Mômen $M(z)$ phụ thuộc phi tuyến vào lực P vì độ võng $y(z)$ cũng phụ thuộc vào P . Vì vậy, nguyên lý cộng tác dụng không áp dụng được cho loại bài toán này.

12.2 PHƯƠNG PHÁP CHÍNH XÁC

Để tìm được mômen uốn, trước hết cần thiết lập phương trình vi phân đường đàn hồi của dầm chịu lực nén P và tải trọng ngang.



Hình 12.2 Thanh chịu uốn nén

Xét cân bằng trên sơ đồ biến dạng của phân tố thanh dz như trên H.12.2

$$\sum M_o = 0: M + dM - M - Qdz - Pdz \operatorname{tg}\alpha = 0$$

chú ý rằng : $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dz}$

ta có:
$$\frac{dM}{dz} - P \frac{dy}{dz} = Q \quad (12.2)$$

lấy đạo hàm hai vế của (12.2), chú ý rằng $\frac{dQ}{dz} = -q(z)$, ta có phương trình:

$$\frac{d^2M}{dz^2} - P \frac{d^2y}{dz^2} = -q(z) \quad (12.3)$$

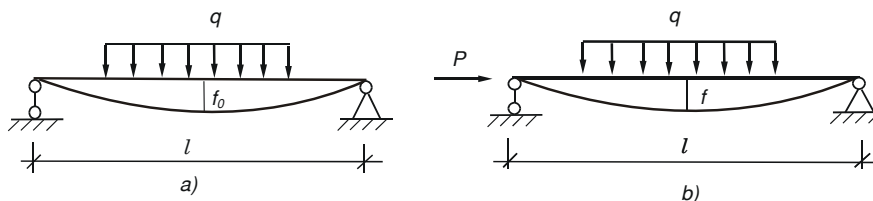
thế $M = -EIy''$ (*) vào (12.3) ta thu được:

$$EIy^{IV} + Py'' = q(z) \quad (12.4)$$

Đây là phương trình vi phân đường đàn hồi của dầm chịu nén uốn. Nếu biết tải trọng tác dụng và các điều kiện biên thì có thể giải (12.4) để tìm đường đàn hồi, từ đó suy ra mômen uốn theo phương trình (*). Trong thực tế, thường có nhiều quy luật tải trọng khác nhau trên chiều dài thanh nên việc giải phương trình (12.4) rất phức tạp. Vì vậy, người ta thường áp dụng phương pháp gần đúng dưới đây.

12.3 PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG

Xét dầm đơn giản chịu tải trọng đối xứng như H.12.3.



Hình 12.3 Đường đàn hồi đối xứng

Sơ đồ (a) chỉ chịu tải trọng ngang, với độ võng giữa nhịp f_0 .

Sơ đồ (b) chịu đồng thời tải trọng ngang và tải trọng dọc, có độ võng giữa nhịp f .

Giả thiết đường đàn hồi có dạng hình *sine* (giống dạng mất ổn định), ta có phương trình đường đàn hồi trong hai trường hợp như sau:

$$y_o = f_o \sin \frac{\pi z}{l}; \quad y = f \sin \frac{\pi z}{l}$$

Dạng phương trình này thỏa điều kiện biên $y = y'' = 0$ tại hai khớp. Mômen uốn nội lực tương ứng như sau:

$$M_o = -EIy_o'' = EI \frac{\pi^2}{l^2} f_o \sin \frac{\pi z}{l} = EI \frac{\pi^2}{l^2} y_o$$

$$M = -EIy'' = EI \frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi z}{l} = EI \frac{\pi^2}{l^2} y$$

Thế các kết quả này vào phương trình (12.1) ta có:

$$EI \frac{\pi^2}{l^2} y = EI \frac{\pi^2}{l^2} y_o + Py \quad (12.5)$$

từ đó suy ra:
$$y(z) = \frac{y_o(z)}{1 - P / \frac{\pi^2 EI}{l^2}}$$

hay:
$$y(z) = \frac{y_o(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.6)$$

với: $P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ là lực tới hạn của thanh khi mất ổn định trong mặt phẳng uốn.

đạo hàm hai vế của (12.6) và nhân với $-EI$ ta có:

$$-EIy''(z) = \frac{-EIy_o''(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}}$$

hay:
$$M(z) = \frac{M_o}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.7)$$

Chú ý: - Nếu tải không đối xứng nhưng cùng hướng về một phía thì các công thức trên kém chính xác hơn nhưng vẫn dùng được.

- Nếu thanh có liên kết hai đầu khác thì vẫn dùng được các công thức (12.6), (12.7) nhưng cần xét tới hệ số liên kết μ trong công thức P_{th} :

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (12.8)$$

12.4 ỨNG SUẤT VÀ KIỂM TRA BỀN

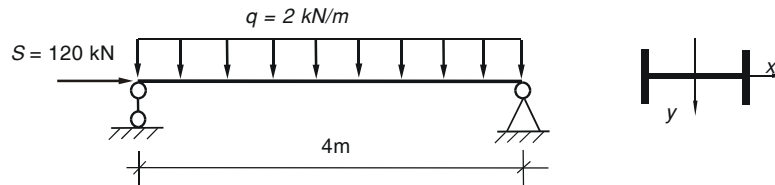
Ứng suất lớn nhất được tính theo công thức:

$$\max \sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} = \frac{P}{A} + \frac{M_o}{W(1 - \frac{P}{P_{th}})} \quad (12.9)$$

Vì ứng suất phụ thuộc phi tuyến vào tải trọng nên kiểm tra bền theo ứng suất cho phép không đảm bảo an toàn theo hệ số n dự kiến. Trong trường hợp này, người ta dùng điều kiện an toàn theo tải trọng như sau:

$$\frac{nP}{A} + \frac{nM_o}{W(1 - \frac{nP}{P_{th}})} \leq \sigma_o \quad (12.10)$$

Ví dụ 12.1 Tìm mômen uốn và độ võng lớn nhất của dầm thép chữ IN^o36 chịu lực như trên H.12.4.



Hình 12.4

Giải. Sử dụng bảng tra thép định hình, tương ứng với số hiệu **IN^o36** và các ký hiệu trên hình trên, ta có:

$$A = 61,9 \text{ cm}^2; \quad I_x = 516 \text{ cm}^4; \quad I_y = 13380 \text{ cm}^4; \quad E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$$

Trị số lớn nhất của mômen uốn, độ võng do tải trọng ngang gây ra tại giữa nhịp:

$$M_o = \frac{ql^2}{8} = \frac{2 \cdot 4^2}{8} = 4 \text{ kNm}$$

$$y_o = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI_x} = \frac{5}{384} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 400^4}{2,1 \cdot 10^4 \cdot 516} = 0,615 \text{ cm}$$

Trị số lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 516}{(1 \cdot 400)^2} = 668 \text{ kN}$$

Độ võng của dầm, theo công thức gần đúng:

$$y = \frac{y_o}{1 - \frac{S}{P_{th}}} = \frac{0,615}{1 - \frac{120}{668}} = 0,75 \text{ cm}, \quad \text{tăng } 22\% \text{ so với } y_o$$

Mômen uốn lớn nhất, theo công thức gần đúng thứ nhất:

$$M = M_o + Sy = 4 + 120 \cdot 0,075 = 4,9 \text{ kNm}$$

Mômen uốn lớn nhất, theo công thức gần đúng thứ hai:

$$M = \frac{M_o}{1 - \frac{S}{P_{th}}} = \frac{4}{1 - \frac{120}{668}} = 4,87 \text{ kNm} \quad \text{sai số } 0,5\% \text{ so với công thức gần đúng thứ}$$

nhất.

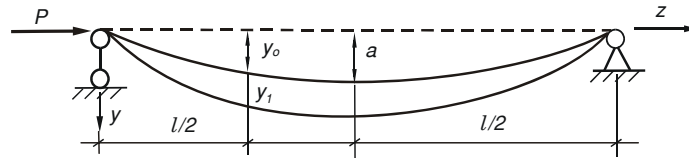
Giá trị mômen trong trường hợp uốn ngang và dọc tăng 22,5% so với mômen chỉ do lực ngang gây ra, tức là thiên về an toàn hơn.

12.5 THANH CÓ ĐỘ CONG BAN ĐẦU

1- Ảnh hưởng của độ cong ban đầu

Xét thanh có độ cong ban đầu, chịu lực nén P như trên H.12.5. Giả sử đường cong ban đầu có dạng:

$$y_o = a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.11)$$



Hình 12.5 Thanh có độ cong ban đầu

Do tác dụng của lực P , thanh bị võng thêm có phương trình $y_1(z)$. Độ võng toàn phần: $y = y_0 + y_1$

$$(12.12)$$

Mômen uốn do lực P gây ra:

$$M = Py = P(y_0 + y_1) \quad (12.13)$$

Phương trình vi phân độ võng thêm:

$$EIy_1'' = -M = -P(y_0 + y_1) \quad (12.14)$$

thế (12.11) vào (12.14) và đặt: $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ ta có:

$$y_1'' + \alpha^2 y_1 = -\alpha^2 a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.15)$$

Nghiệm của phương trình này có dạng:

$$y_1 = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z + \frac{1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.16)$$

Các điều kiện biên: $y_1(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
 $y_1(l) = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\text{Do đó: } y_1 = \frac{1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} a \sin \frac{\pi z}{l} = \frac{1}{\frac{P}{EI} l^2 - 1} a \sin \frac{\pi z}{l}$$

$$\text{hay: } y_1 = \frac{k}{1-k} a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.17)$$

$$\text{với: } k = \frac{P}{P_{th}} = \frac{P}{\frac{\pi^2 EI}{l^2}} \quad (12.18)$$

$$\text{Độ võng toàn phần: } y = y_0 + y_1 = \left(a + \frac{k}{1-k} a\right) \sin \frac{\pi z}{l} = \frac{a}{1-k} \sin \frac{\pi z}{l}$$

$$\text{hay: } y = \frac{y_0}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.19)$$

Mômen lớn nhất giữa nhịp:

$$M_{\max} = Py_{\max} = \frac{Pa}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.20)$$

Nếu đường cong ban đầu có dạng bất kỳ thì có thể phân tích thành chuỗi *Fourier* như sau: $y_0 = a_1 \sin \frac{\pi z}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi z}{l} + \dots$ (12.21)

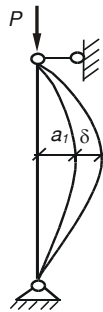
thế (12.13) vào (12.21) và giải ra y_1 ta có:

$$y_1 = k \left(\frac{a_1}{1-k} \sin \frac{\pi z}{l} + \frac{a_2}{2^2-k} \sin \frac{2\pi z}{l} + \dots \right) \quad (12.22)$$

vì: $k = \frac{P}{P_{th}} < 1$ nên khi P đủ lớn thì số hạng đầu trội hẳn và chỉ cần xét số hạng này.

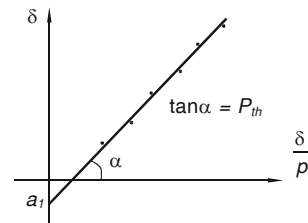
2- Xác định lực tới hạn bằng thực nghiệm thanh liên kết khớp hai đầu

Xét thanh chịu nén như trên H.12.6, trong thực tế thanh luôn có độ cong ban đầu.



Hình 12.6

Thanh có độ cong ban đầu chịu nén



Hình 12.7

Cách xác định lực tới hạn

Khi lực P đủ lớn thì dù thanh bị cong ban đầu thế nào, ta vẫn có quan hệ giữa δ và a_1 theo (12.17):

$$\delta = \frac{k}{1-k} a_1 = \frac{a_1}{\frac{P_{th}}{P} - 1}$$

hay: $\delta = P_{th} \left(\frac{\delta}{P} \right) - a_1$

Đây là phương trình bậc nhất của hai biến δ và δ/P nên có đồ thị là một đường thẳng như trên H.12.7.

Khi thí nghiệm, ứng với mỗi giá trị lực nén P_i , ta đo được chuyển vị δ_i và tính được δ_i/P_i , từ đó lập bảng kết quả thí nghiệm có dạng:

| | | | | |
|------------|----------------|----------------|-------|----------------|
| P | P_1 | P_2 | | P_n |
| δ | δ_1 | δ_2 | | δ_n |
| δ/P | δ_1/P_1 | δ_2/P_2 | | δ_n/P_n |

Từ đó xác định các điểm trên hệ trục $\delta/P - \delta$ và vẽ được đồ thị như trên H.12.7. Ta thường dùng phương pháp bình phương cực tiểu để xác định P_{th} và độ võng ban đầu lớn nhất a_1 .

12.6 CỘT CHỊU NÉN LỆCH TÂM

Xét cột mảnh chịu nén lệch tâm bởi lực P như trên H.12.8.

$$y_0 = a \sin \frac{\pi z}{l} \quad (12.11)$$

Do tác dụng của lực P , cột bị cong và có phương trình $y(z)$.

Mômen uốn tại một tiết diện do lực P gây ra:

$$M = P\{e + y(z)\} = Pe + Py(z) \quad (12.23)$$

trong đó: e - là độ lệch tâm ban đầu; y - là độ võng của trục cột.

Phương trình vi phân đường đàn hồi như sau:

$$y''(z) = -\frac{M}{EI} \quad (12.24)$$

Thế (12.23) vào (12.24) và đặt $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ ta

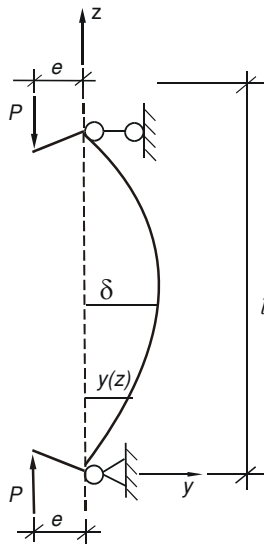
được:

$$y'' + \alpha^2 y = -\alpha^2 e \quad (12.25)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là tổng của nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng:

$$y = A \sin \alpha z + B \cos \alpha z - e \quad (12.26)$$

trong đó: A và B - là các hằng số của nghiệm thuần nhất; e - là nghiệm riêng.



Hình 12.8 Cột có độ cong ban đầu

Các điều kiện biên:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = e$$

$$y(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{e(1 - \cos \alpha l)}{\sin \alpha l} = e \tan \frac{\alpha l}{2}$$

Phương trình đường đàn hồi trở thành:

$$y = e \left(\tan \frac{\alpha l}{2} \sin \alpha z + \cos \alpha z - 1 \right) \quad (12.27)$$

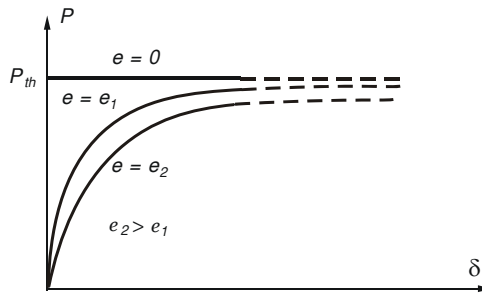
Độ võng lớn nhất tại giữa nhịp, tức $z = \frac{l}{2}$ là:

$$\delta = y_{\max} = e \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha l}{2}} - 1 \right) \quad (12.29)$$

(12.28)

Nếu $e = 0$ hoặc $P = 0$ thì $\delta = 0$.

Đồ thị quan hệ giữa $P - \delta$ được cho trong H.12.9. Đồ thị này chỉ có ý nghĩa khi vật liệu còn đàn hồi, tức là δ còn nhỏ và $P < P_{th}$.



Hình 12.9 Đồ thị quan hệ giữa $P - \delta$

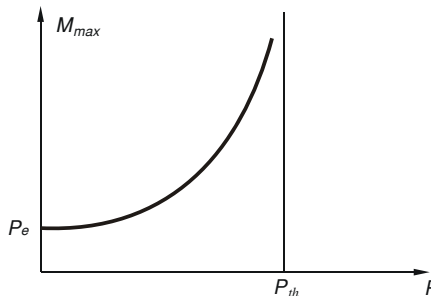
Mômen uốn lớn nhất tại giữa nhịp được tính:

$$M_{\max} = P(e + y_{\max}) = Pe \frac{1}{\cos \sqrt{\frac{P}{EI} \frac{l}{2}}} \quad (12.30)$$

Quan hệ $M_{\max} - P$ cho bởi H.12.10. Khi P nhỏ thì $M_{\max} \approx Pe$, nhưng khi P lớn thì M_{\max} tăng rất nhanh.

Từ các đồ thị này ta thấy quan hệ $P - \delta$ và $M_{\max} - P$ phi tuyến.

Trong thực tế, tính cột mảnh chịu nén lệch tâm cần thiết phải xét đặc điểm phi tuyến này để đảm bảo an toàn.



Hình 12.10 Quan hệ giữa $M_{\max} - P$

Ứng suất cực đại trong thanh:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}c}{I} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \frac{1}{\cos \sqrt{\frac{P}{EI} \frac{l}{2}}} \right] \quad (12.31)$$

với: A - diện tích tiết diện thanh; r - bán kính quán tính

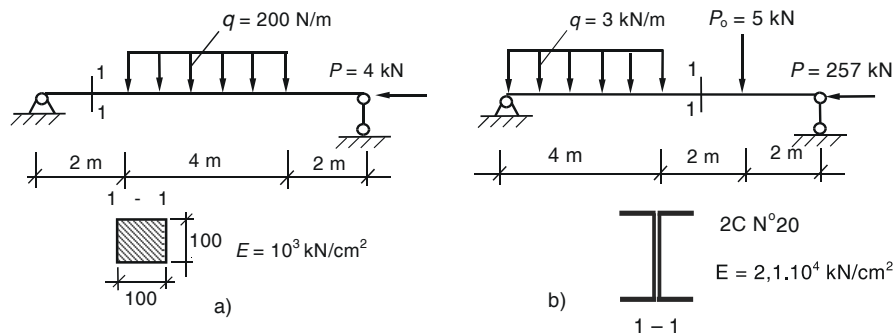
c - khoảng cách từ trục trung tâm đến mép xa nhất của tiết diện.

Vì ứng suất phụ thuộc phi tuyến vào tải trọng nên kiểm tra bền theo ứng suất cho phép không đảm bảo an toàn theo hệ số dự kiến. Trong

trường hợp này, người ta dùng điều kiện an toàn theo tải trọng như phương trình (12.10).

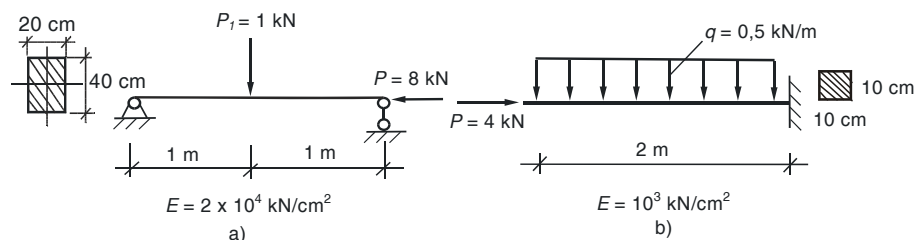
BÀI TẬP CHƯƠNG 12

12.1 Tính ứng suất nén lớn nhất theo phương pháp gần đúng của dầm chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời cho trên H.12.11.



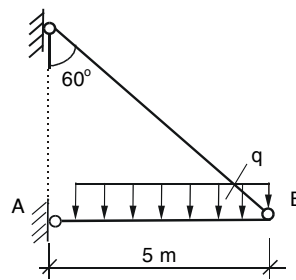
Hình 12.11

12.2 Cho dầm chịu lực như trên H.12.9. Hãy tính ứng suất pháp lớn nhất và hệ số an toàn n nếu $[\sigma] = 24 \text{ kN/cm}^2$. Tính độ võng lớn nhất.



Hình 12.12

12.3 Tính cường độ tải trọng cho dầm AB như trên H.12.10, biết độ bền $n = 1,6$. Dầm AB bằng sắt hình ống với đường kính đường kính ngoài $D = 10 \text{ cm}$, vật



Hình 12.13

phép tác dụng lên hệ số an toàn về thép số 3 có mặt trong $d = 6 \text{ cm}$ và liệu có $[\sigma] = 24$

Kiểm tra ổn định của dầm nếu lấy $k_{od} = 2$. Cho $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$.

Chương 13

TẢI TRỌNG ĐỘNG

13.1 KHÁI NIỆM

1- Tải trọng động

Trong các chương trước, khi khảo sát một vật thể chịu tác dụng của ngoại lực, ta coi ngoại lực tác dụng là *tĩnh*, tức là những tải trọng gây ra gia tốc chuyển động bé, vì vậy khi xét cân bằng có thể bỏ qua được ảnh hưởng của lực quán tính.

Tuy nhiên, cũng có những trường hợp mà tải trọng tác dụng không thể coi là tĩnh vì gây ra gia tốc lớn, ví dụ như sự va chạm giữa các vật, vật quay quanh trục, dao động... Khi này, phải xem tác dụng của tải trọng là *động*, và phải xét đến lực quán tính khi giải quyết bài toán.

2- Phương pháp nghiên cứu

Khi giải bài toán tải trọng động, người ta thừa nhận các giả thiết sau:

- Vật liệu đàn hồi tuyến tính
- Chuyển vị và biến dạng của hệ là bé.

Như vậy, nguyên lý cộng tác dụng vẫn áp dụng được trong bài toán tải trọng động.

Khi khảo sát cân bằng của vật thể chịu tác dụng của tải trọng động, người ta thường áp dụng nguyên lý d'Alembert. Tuy nhiên, trong trường hợp vật chuyển động với vận tốc thay đổi đột ngột như bài toán va chạm thì nguyên lý bảo toàn năng lượng được sử dụng.

Để thuận tiện cho việc tính hệ chịu tải trọng động, các công thức thiết lập cho vật chịu tác dụng của tải trọng động thường đưa về dạng tương tự như bài toán tĩnh nhân với một hệ số điều chỉnh nhằm kể đến ảnh hưởng của tác dụng động, gọi là hệ số động.

Trong chương này chỉ xét các bài toán tương đối đơn giản, thường gặp, có tính chất cơ bản nhằm mở đầu cho việc nghiên cứu tính toán động lực học chuyên sâu sau này.

13.2 THANH CHUYỂN ĐỘNG VỚI GIA TỐC LÀ HẰNG SỐ

Một thanh tiết diện A có chiều dài L và trọng lượng riêng γ , mang một vật nặng P , được kéo lên với gia tốc a như H.13.1.a.

Tưởng tượng cắt thanh cách đầu mút một đoạn x . Xét phần dưới như trên H.13.1.b, lực tác dụng gồm có: trọng lượng vật nặng P

Trọng lượng đoạn thanh γAx

Lực quán tính tác dụng trên vật P là $\frac{P \cdot a}{g}$

Lực quán tính của đoạn thanh là $\frac{\gamma Ax a}{g}$

Nội lực động N_d tại mặt cắt đang xét.

Theo nguyên lý d'Alembert, tổng hình chiếu của tất cả các lực tác dụng lên thanh theo phương đứng kể cả lực quán tính phải bằng không, ta được:

$$N_d - \gamma Ax - P - \frac{Pa}{g} - \frac{\gamma Ax a}{g} = 0$$

$$N_d = \gamma Ax + P + \frac{Pa}{g} + \frac{\gamma Ax a}{g}$$

$$\Rightarrow N_d = (\gamma Ax + P) \left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

Đại lượng $(\gamma Ax + P)$ chính là nội lực trong thanh ở trạng thái treo không chuyển động, gọi là nội lực tĩnh N_t .

$$\text{Ta được: } N_d = N_t \left(1 + \frac{a}{g}\right) \quad (13.1)$$

Ứng suất trong thanh:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{N_t}{A} \left(1 + \frac{a}{g}\right) = \sigma_t \left(1 + \frac{a}{g}\right) \quad (13.2)$$

$$\text{có thể đặt: } K_d = 1 + \frac{a}{g} \quad : \text{ Hệ số động} \quad (13.3)$$

$$\sigma_d = \sigma_t K_d \quad (13.4)$$

Ứng suất lớn nhất tại mặt cắt trên cùng của thanh:

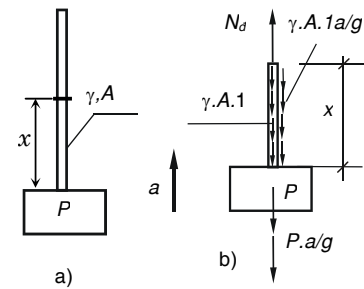
$$\sigma_{dmax} = \sigma_{t,max} \cdot K_d$$

$$\text{với: } \sigma_t = (\gamma AL + P)/A$$

Điều kiện bền trong trường hợp này là:

$$\sigma_{dmax} \leq [\sigma]_k \quad (13.5)$$

Ta thấy có hai trường hợp:



Hình 13.1

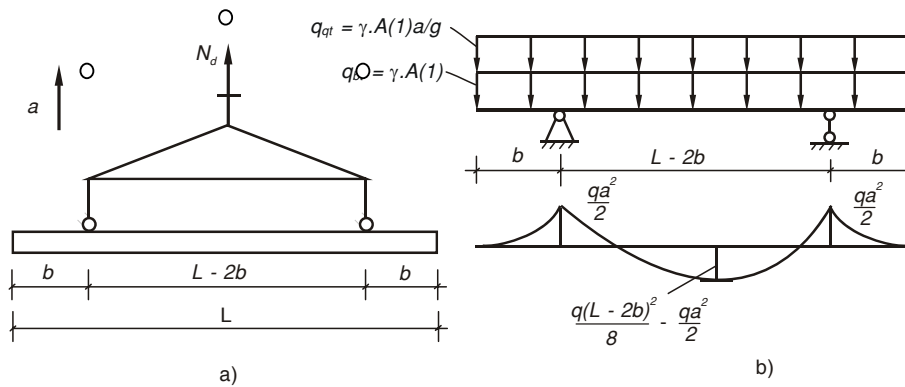
a) Vật chuyển động lên với gia tốc a
b) Nội lực và ngoại lực tác dụng lên phần thanh đang xét

- Khi chuyển động lên nhanh dần đều (gia tốc a cùng chiều chuyển động) và chuyển động xuống chậm dần đều (gia tốc a ngược chiều chuyển động) hệ số động $K_d > 1$, nội lực động lớn hơn nội lực tĩnh.

- Ngược lại, khi chuyển động lên chậm dần đều và chuyển động xuống nhanh dần đều thì $K_d < 1$, nội lực động nhỏ hơn nội lực tĩnh.

Dù vậy, khi một vật thể chuyển động như bài toán trên đây, phải tính toán thiết kế với $K_d > 1$.

Thí dụ 13.1 Một thanh dài 10m có tiết diện vuông 30 cm x 30 cm và trọng lượng riêng $\gamma = 2500 \text{ kG/m}^3$, được kéo lên với gia tốc $a = 5 \text{ m/s}^2$ (H.13.2). Xác định đoạn mút thừa b để mômen âm tại gối tựa bằng mômen dương tại giữa nhịp. Vẽ biểu đồ mômen, tính ứng suất pháp lớn nhất.



Hình 13.2

a) Thanh được kéo lên với gia tốc a ; b) Sơ đồ tính và biểu đồ mômen

Khi thanh được kéo lên với gia tốc a , thanh chịu tác dụng của lực quán tính, khi đó tải trọng tác dụng lên hệ là tải trọng phân bố đều, gồm có:

$$\begin{aligned} q &= q_{bt} + q_{qt} = \gamma A(1) + \gamma A(1).a/g \\ &= 2500(0,3.0,3) + 2500(0,3.0,3).5/10 = 337,5 \text{ KG/m} \end{aligned}$$

Sơ đồ tính của thanh và biểu đồ mômen cho ở H.13.2.b.

Để mômen tại gối bằng mômen giữa nhịp, ta có:

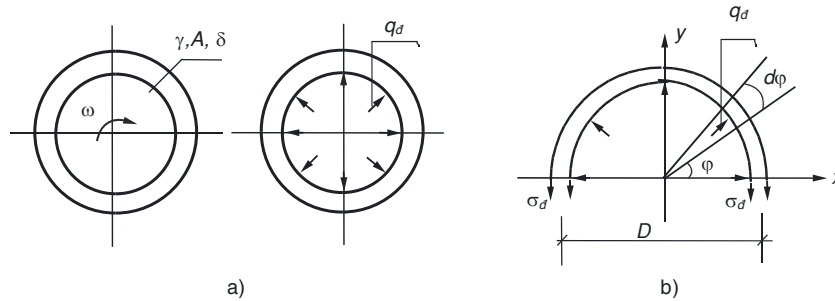
$$\frac{qb^2}{2} = \frac{q(L-2b)^2}{8} - \frac{qb^2}{2} \Rightarrow b = 0,206L$$

với $b = 0,206L$ thì mômen lớn nhất là:

$$\begin{aligned} M_{x,\max} &= \frac{qb^2}{2} = \frac{q(0,206L)^2}{2} = \frac{337,5(0,206.10)^2}{2} = 716,11 \text{ KG.m} \\ \Rightarrow \sigma_{\max} &= \frac{M_x}{W_x} = \frac{716,11.100.6}{30.30^2} = 15,9 \text{ KG/cm}^2 \end{aligned}$$

13.3 VÔ LĂNG QUAY ĐỀU

Một vô lăng có bề dày δ , đường kính trung bình D , tiết diện A , trọng lượng riêng γ , quay quanh trục với vận tốc góc không đổi ω (H.13.3.a).



Hình 13.3 a) Tải trọng tác dụng lên vô lăng
b) Tách vô lăng theo mặt cắt xuyên tâm

Với chuyển động quay đều, gia tốc góc $\dot{\omega} = 0$, gia tốc tiếp tuyến:
 $a_t = \dot{\omega} \frac{D}{2} = 0$ chỉ có gia tốc pháp tuyến hướng tâm là: $a_n = \omega^2 \frac{D}{2}$ (a)

Một đoạn dài đơn vị của vô lăng có khối lượng $\gamma A/g$ chịu tác dụng của lực quán tính ly tâm là: $q_d = \gamma \frac{A}{g} \cdot a_n = \gamma \frac{AD\omega^2}{2g}$ (b)

Để tính nội lực trong vô lăng, dùng mặt cắt tách vô lăng theo mặt cắt xuyên tâm, xét cân bằng của một phần (H.13.3.b), do đối xứng, trên mặt cắt vô lăng không thể có biến dạng uốn (do mômen), biến dạng trượt (do lực cắt) mà chỉ có biến dạng dài do lực dọc, nghĩa là chỉ có ứng suất pháp σ_d .

Vì bề dày δ bé, có thể xem σ_d là phân đều, lực ly tâm tác dụng trên chiều dài ds của vô lăng là $q_d ds$, phân tố ds định vị bởi góc φ , lấy tổng hình chiếu theo phương đứng, ta có:

$$2\sigma_d A = \int_0^\pi q_d ds \sin \varphi$$

thay: $q_d = \gamma AD\omega^2/2g$ và $ds = D d\varphi/2$ vào, ta được:

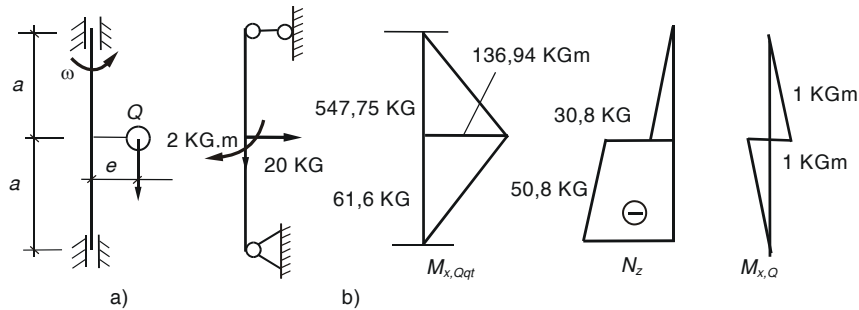
$$\sigma_d = \gamma \frac{D^2 \omega^2}{4g} \quad (13.6)$$

Vì ứng suất trong vô lăng là ứng suất kéo nên điều kiện bền vô lăng:

$$\sigma_d \leq [\sigma]_k \quad (13.7)$$

Chú ý. Khi tính vô lăng, ta đã bỏ qua ảnh hưởng của các nan hoa nối trục và vô lăng, nếu kể đến thì ứng suất kéo trong vô lăng sẽ giảm, độ phức tạp trong tính toán tăng lên nhiều, không cần thiết lắm trong tính toán thực hành.

Ví dụ 13.2 Một trục đứng đường kính $D = 10$ cm, trọng lượng riêng $\gamma = 7850$ kG/m³, mang một khối lượng lệch tâm $Q = 20$ kG (H.13.4.a), trục quay với vận tốc $n = 500$ vòng/phút. Kiểm tra bền trục, tính chuyển vị tại điểm đặt khối lượng. Cho: $[\sigma] = 1600$ kG/cm²; $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm², $a = 0,5$ m.



Hình 13.4

Giải. Vận tốc góc:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = 2(3,14)500/60 = 52,33 \text{ rad/s}$$

Lực quán tính ly tâm Q_{lt} do trọng lượng Q là:

$$Q_{qt} = \frac{Q}{g} \omega^2 e = 20 \cdot 52,33^2 \cdot 0,1 = 5476,85 \text{ N}$$

$$Q_{qt} = 547,68 \text{ KG}$$

Bỏ qua ảnh hưởng do tác dụng tĩnh của trọng lượng Q và trọng lượng bản thân của trục vì chúng nhỏ so với lực ly tâm Q_{lt} .

Mômen do lực ly tâm gây ra là (H.13.4.b):

$$M_{x_{\max}} = Q_{lt}L/4 = 547,68(1)/4 = 136,92 \text{ kGm}$$

Ứng suất lớn nhất của trục:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x_{\max}}}{W_x} = \frac{136,92 \cdot 100}{3,14(10)^2 / 32} = 1395,36 \text{ kG/cm}^2$$

Nếu kể đến trọng lượng bản thân trục và tác dụng tĩnh của Q , tại tiết diện giữa trục chịu tác dụng của các nội lực như sau (H.13.4.b)

$$N_z = 50,8 \text{ kG (nén); } M_x = 135,92 \text{ kGm.}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{N_z}{A} + \frac{M_{x_{\max}}}{W_x} = \frac{30,8}{3,14(10)^2 / 4} + \frac{136,92 \cdot 100}{3,14(10)^2 / 32} \\ &= 0,392 + 1395,75 \text{ kG/cm}^2 \end{aligned}$$

Trong trường hợp này, trọng lượng bản thân của trục và tác dụng tĩnh của Q có thể bỏ qua.

Chuyển vị do tác dụng của lực Q_{lt} có thể tính theo công thức sau:

$$y = \frac{QL^3}{48EI_x} = \frac{547,75 \cdot (100)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 3,14(10)^4 / 64} = 0,0116 \text{ cm}$$

13.4 DAO ĐỘNG CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

1- Khái niệm

Một hệ chuyển động qua lại một vị trí cân bằng xác định nào đó, Ví dụ quả lắc đồng hồ, gọi là hệ dao động. Khi *hệ chuyển từ vị trí cân bằng này sang vị trí cân bằng kế tiếp sau khi đã qua mọi vị trí xác định bởi quy luật dao động, ta gọi hệ đã thực hiện một dao động.*

Chu kỳ là thời gian hệ thực hiện một dao động, ký hiệu là T tính bằng giây (s).

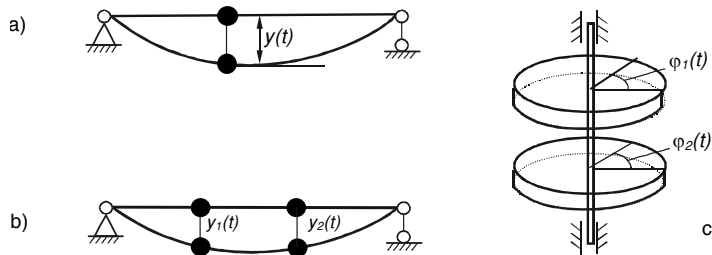
Tần số là số dao động trong một giây, ký hiệu là f , chính là nghịch đảo của chu kỳ, $f = 1 / T$ (1/s).

Số dao động trong 2π giây gọi là *tần số góc*, hay còn gọi là *tần số vòng*, ký hiệu là ω , ta thấy $\omega = 2\pi / T$ (1/s).

Bậc tự do là số thông số độc lập xác định vị trí của hệ đối với một hệ quy chiếu nào đó. Đối với một hệ dao động như trên H.13.5.a, vị trí của hệ xác định bởi độ dịch chuyển (y) theo thời gian (t), hệ quy chiếu sẽ là (t, y) .

Khi tính một hệ dao động, ta cần đưa về *sơ đồ tính*. Xác định sơ đồ tính của một hệ dựa trên điều kiện phải phù hợp với hệ thực trong mức độ gần đúng cho phép.

Xét dầm cho trên H.13.5.a, nếu khối lượng dầm không đáng kể, có thể xem dầm như một liên kết đàn hồi không khối lượng, vị trí của hệ quyết định do vị trí của khối lượng vật nặng, hệ có *một bậc tự do*, vì chỉ cần biết tung độ $y(t)$ của vật nặng là xác định được vị trí của hệ tại mọi thời điểm (t). Với hệ ở H.13.5.b, bậc tự do là hai, vì cần phải biết $y_1(t)$, $y_2(t)$. Đối với trục chịu xoắn (H.13.5.c), bậc tự do cũng là hai, vì cần phải biết góc xoắn $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$.



Hình 13.5 a) Hệ một bậc tự do; b), c) Hệ hai bậc tự do

Khi kể đến khối lượng của dầm trên H.13.5.a, hệ trở thành vô hạn bậc tự do, vì phải biết vô số tung độ $y(t)$ tại vô số điểm khối lượng suốt chiều dài dầm. Trong trường hợp này, cần chọn sơ đồ tính thích hợp, ví dụ nếu khối lượng dầm là nhỏ so với khối lượng vật nặng, có thể coi vật nặng đặt trên một liên kết đàn hồi không khối lượng, hệ có một bậc tự do.

Nếu không thể bỏ qua
có thể đưa về hệ hữu hạn bậc
xem khối lượng dầm gồm N
trên N điểm nút của thanh đàn hồi không khối lượng (H.13.6), N càng lớn,
độ chính xác tính toán càng cao.



Hình 13.6 Hệ hữu hạn bậc tự do

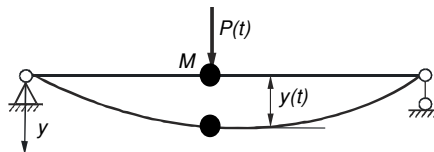
khối lượng dầm,
tự do, bằng cách
khối lượng m_i đặt

Một hệ đàn hồi có thể dao động tự do hay dao động cưỡng bức.

Dao động cưỡng bức là dao động của hệ khi chịu một tác động biến đổi theo thời gian, gọi là lực kích thích, tồn tại trong suốt quá trình hệ dao động như dao động của dầm mang một mô tơ điện khi nó hoạt động, khối lượng lệch tâm của rôto gây ra lực kích thích.

Dao động tự do là dao động do bản chất tự nhiên của hệ khi chịu một tác động tức thời, không tồn tại trong quá trình hệ dao động như dao động của dây đàn.

2- Phương trình vi phân dao động cưỡng bức của hệ một bậc tự do



Hình 13.7 Hệ một bậc tự do chịu dao động cưỡng bức

Xét hệ một bậc tự do chịu tác dụng một lực kích thích thay đổi theo thời gian $P(t)$ đặt tại khối lượng M (H.13.7), tại thời điểm (t) , độ võng của khối lượng M là $y(t)$. Giả thiết lực cản môi trường tỷ lệ bậc nhất với vận tốc chuyển động, hệ số tỷ lệ β .

Gọi δ là chuyển vị tại điểm đặt khối lượng M do lực đơn vị đặt tại đó gây ra. Chuyển vị $y(t)$ là kết quả của các tác động:

- Lực kích thích $P(t)$ gây ra chuyển vị $P(t)\delta$
- Lực quán tính $-M\ddot{y}(t)$ gây ra chuyển vị $-M\ddot{y}(t)\delta$
- Lực cản môi trường $-\beta\dot{y}(t)$ gây ra chuyển vị $-\beta\dot{y}(t)\delta$

ta được
$$y(t) = P(t)\delta + [-M\ddot{y}(t)\delta] + [-\beta\dot{y}(t)\delta] \quad (a)$$

$$M \delta \ddot{y}(t) + \beta \delta \dot{y}(t) + y(t) = P(t). \delta \quad (b)$$

Chia hai vế cho $M\delta$ và đặt:

$$\frac{\beta}{M} = 2\alpha; \quad \frac{1}{M\delta} = \omega^2 \quad (c)$$

phương trình (b) trở thành:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = P(t).\delta. \omega^2 \quad (13.8)$$

(13.8) là phương trình vi phân dao động cưỡng bức hệ một bậc tự do.

3- Dao động tự do

Khi không có lực kích thích và lực cản bằng không, hệ dao động tự do, phương trình (13.8) trở thành phương trình vi phân của dao động tự do:

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (13.9)$$

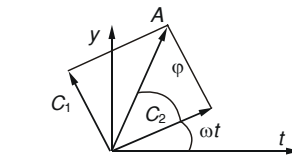
Tích phân phương trình (13.9), ta được nghiệm tổng quát có dạng:

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (d)$$

Sử dụng giản đồ cộng các vectơ quay (H.13.8), có thể biểu diễn hàm (a) dưới dạng:

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (e)$$

Hàm (e) là hàm sin, chứng tỏ dao động tự do là một dao động tuần hoàn, điều hòa. Biên độ dao động là $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, tần số góc ω , độ lệch pha φ . ω còn được tính theo công thức:



Hình 13.8 Giản đồ các vectơ quay

tỏ dao động hoàn, điều hòa. $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, tần số gọi là tần số riêng

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M\delta}} \quad (13.10)$$

Gọi P là trọng lượng của khối lượng M , ta có $M = P/g$, thay vào (13.10), ta được: $\omega = \sqrt{\frac{g}{P\delta}}$

Tích số $(P.\delta)$ chính là *giá trị chuyển vị tại điểm đặt khối lượng M do trọng lượng P của khối lượng dao động M tác dụng tĩnh gây ra*, gọi là Δt .

Công thức tính tần số của dao động tự do trở thành:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} \quad (13.11)$$

$$\text{Chu kỳ của dao động tự do: } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/\Delta t}} \quad (13.12)$$

4- Dao động tự do có cản

Trong (13.8), cho $P(t) = 0$, ta được phương trình vi phân của dao động tự do có cản, hệ một bậc tự do:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \quad (13.13)$$

Nghiệm của (13.13) tùy thuộc vào nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$K^2 + 2\alpha K + \omega^2 = 0$$

Khi: $\Delta = \alpha^2 - \omega^2 \geq 0$, phương trình đặc trưng có nghiệm thực:

$$K_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$$

Nghiệm tổng quát của (13.13) có dạng:

$$y(t) = C_1 e^{K_1 t} + C_2 e^{K_2 t}$$

Ta thấy hàm $y(t)$ không có tính tuần hoàn, do đó hệ không có dao động, ta không xét trường hợp này.

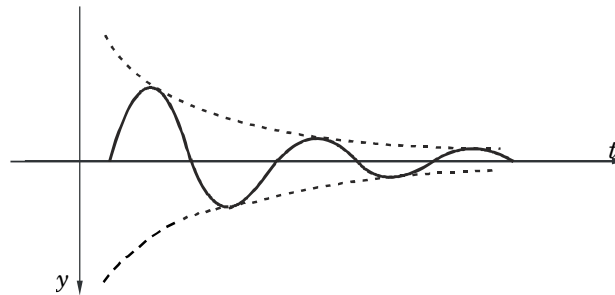
Khi: $\Delta = \alpha^2 - \omega^2 < 0$, đặt: $\omega_1^2 = \omega^2 - \alpha^2$, phương trình đặc trưng có nghiệm ảo: $K_{1,2} = -\alpha \pm i\omega_1$

Nghiệm tổng quát của (13.13) có dạng:

$$y(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Hàm $y(t)$ là một hàm sin có tính tuần hoàn, thể hiện một dao động với tần số góc ω_1 , độ lệch pha φ_1 , biên độ dao động là một hàm mũ âm $A_1 e^{-\alpha t}$, tắt rất nhanh theo thời gian.

Tần số dao động $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$, nhỏ hơn tần số dao động tự do ω (H.13.9).



Hình 13.9 Đồ thị hàm số dao động tự do có cản

4- Dao động cưỡng bức có cản

Từ phương trình vi phân dao động cưỡng bức có cản hệ một bậc tự do (13.8): $q \ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = P(t) \delta \omega^2$ (f)

Với các bài toán kỹ thuật thông thường, lực kích thích $P(t)$ là một hàm dạng sin, do đó có thể lấy $P(t) = P_0 \sin rt$, khi đó phương trình vi phân (f) có dạng:

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha \dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = \delta \omega^2 P_0 \sin rt \quad (13.14)$$

Nghiệm tổng quát của (13.14) có dạng:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

trong đó: $y_1(t)$ - là một nghiệm tổng quát của (13.14) không vế phải, chính là nghiệm của dao động tự do có cản (e):

$$y_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (g)$$

$y_2(t)$ - là một nghiệm riêng của (13.14) có vẻ phải, vì vẻ phải là một hàm sin, do đó có thể lấy $y_2(t)$ dạng sin:

$$y_2(t) = C_1 \cos rt + C_2 \sin rt$$

(h)

với: C_1 và C_2 - là các hằng số tích phân, xác định bằng cách thay $y_2(t)$ và các đạo hàm của nó vào (13.14), rồi đồng nhất hai vế. Sử dụng giản đồ vectơ quay biểu diễn (h) dưới dạng:

$$y_2(t) = V \sin(rt + \theta) \quad (i)$$

Như vậy, phương trình dao động của hệ là:

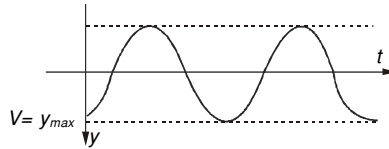
$$y(t) = A_1 e^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + V \sin(rt + \theta) \quad (j)$$

Phương trình (j) chính là độ võng $y(t)$ của dầm.

Số hạng thứ nhất của vế phải trong (j) là một hàm có biên độ tắt rất nhanh theo quy luật hàm mũ âm, sau một thời gian ngắn, hệ dao động theo quy luật:

$$y(t) = V \sin(rt + \theta) \quad (13.15)$$

Đó là một hàm sin biểu diễn một dao động tuần hoàn, điều hòa, tần số góc của dao động bằng tần số lực kích thích r , độ lệch pha θ , biên độ dao động V (H.13.10).



Hình 13.10 Đồ thị biểu diễn dao động cường bức có cân

Biên độ dao động chính là độ võng cực đại của dầm y_{max} , ta có:

$$V = y_{max} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad (k)$$

Tính các giá trị của C_1 và C_2 , thay vào (k), ta được độ võng cực đại của dầm:

$$y_{max} = \frac{P_o \delta}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}} \quad (h)$$

Tích số $P_o \delta$ chính là giá trị của chuyển vị tại điểm đặt khối lượng M do lực có giá trị P_o (biên độ lực kích thích) tác dụng tĩnh tại đó gây ra, đặt là y_t , ta có:

$$y_{max} = y_t \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}} \quad (13.16)$$

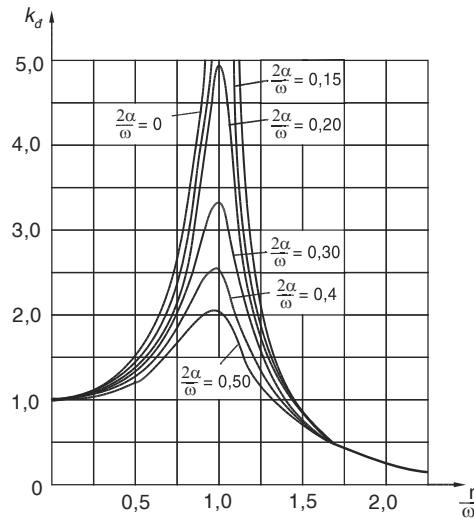
có thể viết là: $y_{max} = y_t K_d$

với:
$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}} \quad (13.17)$$

K_d được gọi là hệ số động, thể hiện ảnh hưởng của tác dụng động so với tác dụng tĩnh ứng với trị số của biên độ lực.

5- Hiện tượng cộng hưởng

Khảo sát sự biến động K_d ở công thức coi K_d là một hàm hai $(r/\omega, 2\alpha/\omega)$. Ứng với một ta vẽ được đồ thị biểu $(K_d, r/\omega)$ có dạng hình tại hoành độ $\frac{r}{w} = 1$, lần giá trị khác nhau ứng với dần, ta thấy đỉnh của đồ nhanh, với $\alpha = 0$, giá trị cực (H.13.11), nghĩa là vô cùng.



Hình 13.11 Đồ thị hàm số $K_d = f(r/w; 2a/w)$ với $2a/w$ là các hằng số cho trước

thiên của hệ số (13.17) bằng cách biến $K_d = f$ giá trị xác định $\frac{2\alpha}{\omega}$, diễn quan hệ chuồng mà đỉnh lượt cho $\frac{2\alpha}{w}$ nhiều hệ số cản α giảm thị (K_d) tăng của K_d tiến đến vô độ vồng dầm lớn

Hiện tượng biên độ dao động tăng đột ngột khi tần số lực kích thích bằng tần số riêng của hệ đàn hồi gọi là hiện tượng cộng hưởng. Trên đồ thị còn cho thấy khi hai tần số này xấp xỉ nhau ($r/\omega \in [0,75 - 1,5]$), biên độ tăng rõ rệt, người ta gọi là miền cộng hưởng. Hiện tượng cộng hưởng rõ ràng rất nguy hiểm cho chi tiết máy hay công trình làm việc trong miền cộng hưởng, do đó trong thiết kế, ta phải tính toán sao cho hệ dao động nằm ngoài miền cộng hưởng.

Đồ thị cho thấy nên chọn tỷ số r/ω lớn hơn 2, khi đó K_d nhỏ hơn 1, bài toán động ít nguy hiểm hơn bài toán tĩnh. Để có r/ω lớn, thường phải giảm ω , nghĩa là chuyển vị Δt phải lớn. Muốn vậy, phải giảm độ cứng của thanh đàn hồi, điều này nhiều lúc mâu thuẫn với yêu cầu độ bền của công trình. Để tránh làm giảm độ cứng công trình có thể đặt lò xo hay loại vật liệu có khả năng phát tán năng lượng đệm giữa khối lượng dao động và thanh đàn hồi.

Có trường hợp khi khởi động mô tơ, tốc độ mô tơ tăng dần đến tốc độ ổn định, một thời gian ngắn ban đầu công trình có thể ở trong miền cộng

hưởng, cần phải dùng loại động cơ tăng tốc nhanh để hiện tượng cộng hưởng nếu có xảy ra cũng chỉ trong thời gian rất ngắn.

Nếu khi hoạt động, công trình dao động với K_d lớn, cần tính toán kỹ để sử dụng các bộ giảm chấn làm tiêu hao năng lượng dao động hay tăng hệ số cản.

Trên H.13.11, ta thấy, khi tỷ số $r/\omega \notin [0,5 - 2]$, các đường cong K_d gần trùng nhau, hệ số cản xem như không ảnh hưởng, hoặc khi hệ số cản không đáng kể, có thể tính K_d theo công thức:

$$K_d = \frac{1}{\left|1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right|} \quad (13.18)$$

Vì các đại lượng như chuyển vị, nội lực hay ứng suất tỷ lệ bậc nhất với ngoại lực, ta có thể viết:

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \sigma_t K_d + \sigma_{t,ds} \\ \tau_d &= \tau_t K_d + \tau_{t,ds} \\ M_d &= M_t K_d + M_{t,ds} \end{aligned} \quad (13.19)$$

trong đó: σ_t, τ_t - là các ứng suất do tải trọng có giá trị bằng biên độ lực kích thích (P_o) tác dụng tĩnh

$\sigma_{t,ds}, \tau_{t,ds}$ - là các ứng suất do tải trọng tĩnh đặt sẵn, mà khi không có dao động nó vẫn tồn tại như trọng lượng bản thân mô-tơ.

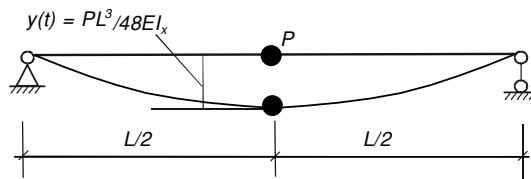
Điều kiện bền:

$$\sigma_{dmax} \leq [\sigma] \text{ hay } \tau_{dmax} \leq [\tau] \quad (13.20)$$

6- Phương pháp thu gọn khối lượng

Khi phải kể đến khối lượng dầm (các liên kết đàn hồi) ảnh hưởng quá trình dao động và không đòi hỏi độ chính xác cao, có thể tính gần đúng như hệ một bậc tự do theo *phương pháp thu gọn khối lượng* như sau.

Xét một dầm tựa đơn (H.13.12) khối lượng M tại giữa nhịp, giả sử khối lượng dầm đủ nhỏ để không làm thay đổi dạng dao động như khi chỉ có một khối lượng M , nếu gọi $y(t)$ là độ võng của M tại giữa nhịp, ta có:



Hình 13.12 Dầm đơn dao động có kể đến khối lượng dầm

Độ võng tại mặt cắt tại hoành độ z sẽ là:

$$y(z) = \frac{PL^2 z}{16EI_x} - \frac{Pz^3}{12EI_x} = y(t) \frac{Lz - 4z^3}{L^3}$$

Gọi q là trọng lượng 1 m dài của dầm, động năng của một phân tử khối lượng dài dz của dầm là:

$$dT = \frac{1}{2} \frac{qdz (3L^2z - 4z^3)^2}{g(L^3)^2} \frac{dy^2}{dt^2}$$

Động năng của toàn dầm là:

$$T = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{qdz(3L^2z - 4z^3)^2 dy^2}{g(L^3)^2 dt^2} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{35} \frac{qL}{g} \frac{dy^2}{dt^2} \quad (13.21)$$

Động năng của toàn dầm tương đương động năng của một khối lượng $m = (17/35)(qL/g)$ đặt tại giữa dầm. Như vậy, trên cơ sở tương đương động năng, có thể xem hệ là một bậc tự do với khối lượng dao động tại giữa dầm là:

$$M_1 = m + \frac{17}{35} \cdot \frac{qL}{g} \quad (13.22)$$

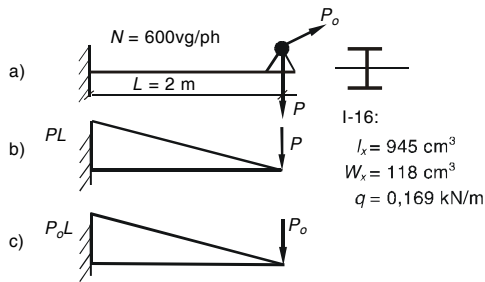
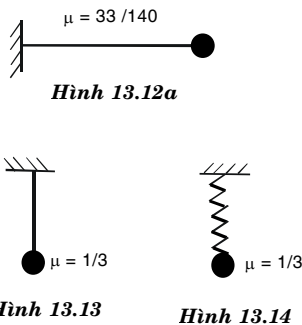
trong đó: qL/g - chính là khối lượng của toàn bộ dầm.

Gọi μ là hệ số thu gọn khối lượng. Ta có:

- Đối với dầm đơn (H.13.12), khối lượng thu gọn tại giữa nhịp, $\mu = 17/35$

- Đối với dầm cong xon (H.13.12a), khối lượng thu gọn tại đầu tự do, $\mu = 33/140$.

- Đối với lò xo dao động dọc, thanh thẳng dao động dọc (H.13.14), khối lượng thu gọn tại đầu tự do, $\mu = 1/3$.



Hình 13.15 a) Dầm công xon I-16 mang một mô tơ vận tốc 600 vòng/phút, khi hoạt động mô tơ sinh ra lực ly tâm 0,5 kN (H.13.15). Bỏ qua trọng lượng dầm, tính ứng suất lớn nhất, độ võng tại đầu tự do. Nếu kể đến trọng lượng dầm q , tính lại ứng suất và độ võng. Cho: $E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm²; hệ số cản $\alpha = 2(1/s)$.

Ví dụ 13.3 Một dầm công xon tiết diện I-16 mang một mô tơ trọng lượng $P = 2,5$ kN, vận tốc 600 vòng/phút, khi hoạt động mô tơ sinh ra lực ly tâm 0,5 kN (H.13.15). Bỏ qua trọng lượng dầm, tính ứng suất lớn nhất, độ võng tại đầu tự do. Nếu kể đến trọng lượng dầm q , tính lại ứng suất và độ võng. Cho: $E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm²; hệ số cản $\alpha = 2(1/s)$.

Giải. Theo số liệu đề bài, ta thấy khi mô tơ hoạt động thì dầm chịu tác dụng một lực kích thích dạng $\sin P(t) = P_o \sin rt$, với $P_o = 0,5$ kN và tần số góc r .

a) Không kể đến trọng lượng dầm

Ứng suất động: $\sigma_d = \sigma_{t,0}K_d + \sigma_{t,ds}$

Hệ số động:
$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{r^2}{\omega^2})^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}}$$

trong đó: $r = 2\pi n/60 = 2\pi 600/60 = 62,8 \text{ rad/s}; \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}}$

với: $g = 10 \text{ m/s}^2 = 1000 \text{ cm/s}^2$

$$\Delta t = \frac{PL^3}{3EI_x} = \frac{2,5(300)^3}{3.2.10^4.945} = 1,19 \text{ cm}$$

ta được: $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} = \sqrt{\frac{1000}{1,19}} = 29$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{62,8^2}{29^2})^2 + \frac{4.2^2.62,8^2}{29^4}}} = 0,27$$

Từ biểu đồ mômen do trọng lượng P (H.13.15), ta thấy tại ngàm mômen lớn nhất, do đó ứng suất lớn nhất do tải trọng đặt sẵn trên dầm là:

$$\sigma_{ds,max} = \frac{M_{x,max,P}}{W_x} = \frac{PL}{W_x} = \frac{2,5.3.100}{118} = 6,35 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất do P_o tác dụng tĩnh được tính tương tự:

$$\sigma_{t,max} = \frac{P_o L}{W_x} = \frac{0,5.3.100}{118} = 1,27 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_d = 1,27(0,27) + 6,35 = 6,69 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị do trọng lượng đặt sẵn tại đầu tự do là:

$$y_{t,P} = \Delta t = 1,19 \text{ cm}$$

suy ra chuyển vị do P_o tác dụng tĩnh tại đầu tự do là:

$$y_{t,P_o} = \frac{0,5}{2,5} 1,19 = 0,238 \text{ cm}$$

Chuyển vị động lớn nhất tại đầu tự do, ta có:

$$y_d = 0,238(0,27) + 1,19 = 1,25 \text{ cm}$$

b) Kế đến trọng lượng dầm

Để đưa hệ về một bậc tự do, ta dùng phương pháp thu gọn khối lượng. Coi dầm không trọng lượng và ở đầu tự do có đặt một khối lượng:

$$m = \frac{33}{140} \frac{\gamma AL}{g}$$

nghĩa là tại đó có thêm một trọng lượng bằng: $\frac{33}{140} \gamma AL = 0,119 \text{ kN}$

Chuyển vị tĩnh do khối lượng dao động là:

$$\Delta t = \frac{(P+0,119)L^3}{3EI} = \frac{(2,5+0,119)(300)^3}{3.2.10^4.945} = 1,247 \text{ cm}$$

ta được: $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} = \sqrt{\frac{1000}{1,247}} = 28,31$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{62,8^2}{28,31^2}\right)^2 + \frac{4 \cdot 2^2 \cdot 62,8^2}{28,31^4}}} = 0,25$$

Từ biểu đồ mômen do trọng lượng P (H.13.15), ta thấy tại ngàm mômen lớn nhất, ứng suất lớn nhất do tải trọng đặt sẵn trên dầm có kể thêm trọng lượng bản thân là:

$$\sigma_{ds,max} = \frac{M_{x,max,P}}{W_x} = \frac{(PL + qL^2/2)}{W_x}$$

$$\sigma_{ds,max} = \frac{(2,5 \cdot 3 + 0,169 \cdot 3^2/2) \cdot 100}{118} = 7 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất do P_o tác dụng tĩnh không khác phần trên là 1,27 kN/cm².

Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_d = 1,27(0,25) + 7 = 7,31 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị do trọng lượng đặt sẵn tại đầu tự do gồm trọng lượng mô tơ và phải kể thêm do trọng lượng bản thân là:

$$y_{t,P} = PL^3/3EI_x + ql^4/8EI_x = 1,19 + 0,307 = 1,497 \text{ cm}$$

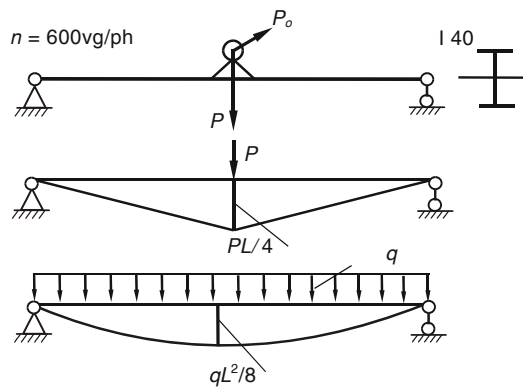
còn chuyển vị do P_o tác dụng tĩnh tại đầu tự do vẫn là 0,238 cm.

Chuyển vị động lớn nhất tại đầu tự do, ta có:

$$\sigma_d = 0,238(0,25) + 1,497 = 1,556 \text{ cm}$$

Ví dụ 13.4 Một dầm 40, mang một mô tơ 2,5 kN, vận tốc 600 hoạt động mô tơ sinh kN (H.13.16). Kể đến tính ứng suất lớn nhất,

Cho: $E = 2 \cdot 10^4$
 $\alpha = 2(1/s)$; thép I40 có $W_x = 947 \text{ cm}^3$, trọng $q = 0,56 \text{ kN/m}$.



Hình 13.16 a) Dầm đơn I40 mang một mô tơ b) và c) Sơ đồ tính và biểu đồ mômen do trọng lượng mô tơ P và trọng lượng bản thân

thép tiết diện I - trọng lượng P = vòng /phút, khi ra lực ly tâm 0,5 trọng lượng dầm, độ võng của dầm. kN/cm²; hệ số cản $I_x = 19840 \text{ cm}^4$, lượng mét dài

Giải. Theo số liệu đề bài, ta thấy khi mô tơ hoạt động thì dầm chịu tác dụng một lực kích thích dạng $\sin P(t) = P_o \sin rt$, với $P_o = 0,5 \text{ kN}$ và tần số góc r.

Ứng suất động: $\sigma_d = \sigma_{t,Q} K_d + \sigma_{t,ds}$

Hệ số động:
$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4\alpha^2 r^2}{\omega^4}}}$$

trong đó: $r = 2\pi n/60 = 2 \cdot \pi \cdot 600/60 = 62,8 \text{ rad/s}$; $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}}$

với: $g = 10 \text{ m/s}^2 = 1000 \text{ cm/s}^2$.

Độ võng tại giữa dầm do lực tập trung P là: $\Delta t = \frac{PL^3}{48EI_x}$

Kể đến trọng lượng dầm, phải đưa dầm về một bậc tự do, ta dùng phương pháp thu gọn khối lượng. Coi dầm không trọng lượng và ở giữa dầm có đặt một khối lượng: $m = \frac{17 \gamma AL}{35 g}$

nghĩa là tại đó có thêm một trọng lượng bằng:

$$\frac{17}{35} \gamma AL = 0,56(12) = 6,72 \text{ kN}$$

khi đó chuyển vị tĩnh do khối lượng dao động là:

$$\Delta t = \frac{(2,5 + 6,72)L^3}{48EI_x} = \frac{(9,22)(1200)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 18930} = 0,876 \text{ cm}$$

ta được: $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta t}} = \sqrt{\frac{1000}{0,876}} = 33,77$

$$K_d = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{62,8^2}{33,77^2}\right)^2 + \frac{4 \cdot 2^2 \cdot 62,8^2}{33,77^4}}} = 0,405$$

Từ biểu đồ mômen do trọng lượng P và do trọng lượng bản thân q (H.13.16), ta thấy tại giữa nhịp mômen lớn nhất, ứng suất lớn nhất do tải trọng đặt sẵn trên dầm có kể thêm trọng lượng bản thân là:

$$\sigma_{ds, \max} = \frac{M_{x, \max, P}}{W_x} = \frac{(PL/4 + qL^2/8)}{W_x}$$

$$\sigma_{ds, \max} = \frac{(2,5 \cdot 12/4 + 0,56 \cdot 12^2/8) \cdot 100}{947} = 1,856 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất do P_o tác dụng tĩnh là:

$$\sigma_{t, P_o} = \frac{P_o L}{4W_x} = \frac{0,5 \cdot (12)100}{4(947)} = 0,158 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_d = 0,158(0,405) + 1,856 = 1,92 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị do trọng lượng đặt sẵn tại giữa nhịp gồm trọng lượng mô tơ và phải kể thêm do trọng lượng bản thân là:

$$y_{t, P} = \frac{PL^3}{48EI_x} + \frac{5qL^4}{384EI_x} = 0,237 + 0,4 = 0,637 \text{ cm}$$

còn chuyển vị do P_o tác dụng tĩnh tại giữa nhịp là:

$$0,237 \times (0,5/2,5) = 0,0474 \text{ cm}$$

Chuyển vị động lớn nhất tại giữa nhịp, ta có:

$$y_d = 0,0474(0,405) + 0,637 = 0,656 \text{ cm}$$

13.5 TỐC ĐỘ TỐI HẠN CỦA TRỤC

Một trục quay mang một pu li khối lượng M , quay đều với vận tốc góc Ω , gọi độ võng của trục tại pu li là y , giả sử trọng tâm của pu li lệch tâm so với tâm trục là e (H.13.17).



Hình 13.17 Trục quay mang khối lượng lệch tâm

Lực ly tâm tác dụng lên trục:

$$F = M \Omega^2 (e + y)$$

Gọi δ là chuyển vị tại vị trí pu li do lực đơn vị gây ra, ta có, chuyển vị gây ra bởi lực ly tâm F là:

$$y = M \delta \Omega^2 (e + y) \quad (i)$$

suy ra
$$y = \frac{e \Omega^2}{\frac{1}{M \delta} - \Omega^2} \quad (13.23)$$

Theo công thức (13.23), độ võng trục cực đại khi $\Omega^2 = \frac{1}{M \delta}$, nghĩa là khi tốc độ của trục bằng tần số riêng $\omega = \sqrt{\frac{1}{M \delta}}$, gọi là *tốc độ tới hạn* của trục quay. Khi trục làm việc ở tốc độ gần tốc độ tới hạn, độ võng lớn, chi tiết máy có tiếng ồn, nên trong thiết kế phải tính toán sao cho tốc độ khác xa tốc độ tới hạn.

Nhận xét rằng, nếu tốc độ trục Ω^2 lớn hơn nhiều so với $(1/M \cdot \delta)$, công thức (13.23) chứng tỏ độ võng $y \approx -e$, trọng tâm của pu li gần trùng với tâm trục, trục ở trạng thái làm việc tốt nhất.

13.6 DAO ĐỘNG CỦA HỆ HAI BẬC TỰ DO

Xét một hệ có 2 bậc tự do như trên H.13.18. Nhiều bài toán thực tiễn có thể đưa về sơ đồ tính này.

Gọi $y_1(t)$, $y_2(t)$ là chuyển vị của M_1 , M_2 ; δ_{ij} là chuyển vị tại điểm i do lực đơn vị đặt tại điểm j gây ra. Có thể chứng minh $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Ta có: $y_1(t) = \delta_{11} (-M_1 y_1) + \delta_{12} (-M_2 y_2)$

$$y_2(t) = \delta_{21} (-M_1 y_1) + \delta_{22} (-M_2 y_2) \quad (a)$$

Nghiệm tổng quát của (a) có dạng: **Hình 13.18**

Hệ hai bậc tự do

$$y_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \quad (l)$$

thay (b) vào (a), ta được hệ phương trình thuần nhất:

$$A_1 (\delta_{11} M_1 \omega^2 - 1) + A_2 \delta_{12} M_2 \omega^2 = 0$$

$$A_1 \delta_{21} M_1 \omega^2 + A_2 (\delta_{22} M_2 \omega^2 - 1) = 0 \quad (c)$$

để A_1 , A_2 khác không thì định thức các hệ số của (c) phải bằng không:

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} M_1 \omega^2 - 1) & (\delta_{12} M_2 \omega^2) \\ (\delta_{21} M_1 \omega^2) & (\delta_{22} M_2 \omega^2 - 1) \end{vmatrix} = 0 \quad (d)$$

từ (d), và $\delta_{12} = \delta_{21}$, ta được:

$$\omega^4 M_1 M_2 (\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2) - \omega^2 (\delta_{11} M_1 + \delta_{22} M_2) + 1 = 0 \quad (e)$$

Phương trình (e) gọi là phương trình tần số, giải (e), ta xác định được hai tần số riêng xếp thứ tự từ nhỏ đến lớn ω_1 , ω_2 . Như vậy, hệ có hai bậc tự do sẽ có hai tần số riêng.

Ứng với tần số ω_1 , theo (b), phương trình dao động có dạng:

$$y_1(t) = A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

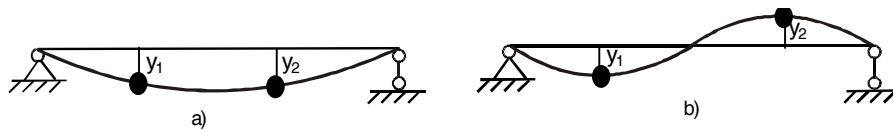
$$y_2(t) = A_{21}\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

Ứng với tần số ω_2 , theo (b), phương trình dao động có dạng:

$$y_1(t) = A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$y_2(t) = A_{22}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

- Khi hệ dao động với tần số ω_1 , ta có thể chứng minh hệ dao động điều hòa cùng pha (H.13.19.a), gọi là dạng dao động chính thứ nhất.



Hình 13.19 a) Dạng dao động chính thứ nhất
b) Dạng dao động chính thứ hai

- Khi hệ dao động với tần số ω_2 , ta có thể chứng minh hệ dao động điều hòa lệch pha 180° (H.13.19.b), gọi là dạng dao động chính thứ hai.

Dao động của cả hệ một dao động phức hợp có phương trình:

$$y_1(t) = A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$y_2(t) = \lambda_1 A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \lambda_2 A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (f)$$

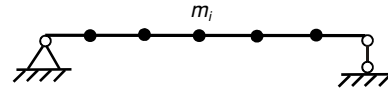
(f) không phải là một dao động điều hòa, nhưng có thể biểu diễn theo các dạng chính.

13.7 PHƯƠNG PHÁP RAYLEIGH

Đối với hệ nhiều bậc tự do, việc xác định tần số riêng bằng phương pháp chính xác rất phức tạp, do đó

trong một số trường hợp người ta dùng phương pháp gần đúng. Trong phần này, ta xét phương pháp Rayleigh.

Coi dầm như một thanh đàn hồi mang n khối lượng M_i , mỗi khối lượng bằng khối lượng của từng đoạn thanh dầm (H.13.20).



Hình 13.20 Hệ n bậc tự do

Giả sử hệ dao động tự do với các dạng chính, khi đó phương trình chuyển động của một khối lượng M_i là một hàm điều hòa, có thể viết:

$$y_i(t) = A_i \sin(\omega t + \varphi)$$

vận tốc của M_i là: $\frac{dy_i(t)}{dt} = A_i \omega \cos(\omega t + \varphi)$

Khi hệ ở vị trí cân bằng $y(t) = 0$, vận tốc cực đại, thế năng biến dạng đàn hồi lúc đó bằng không, động năng hệ lớn nhất có giá trị bằng:

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum M_i y_i^2$$

Khi hệ ở xa vị trí cân bằng nhất, vận tốc bằng không, thế năng cực đại. Gọi phương trình đường đàn hồi của dầm là $y(z)$.

$$\text{Vì: } y'' = \frac{-M}{EJ} \Rightarrow M = -EI y''$$

áp dụng công thức tính thế năng biến dạng đàn hồi của dầm, ta được:

$$U = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right)^2 dz$$

theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, $T = U$, ta được:

$$\frac{\omega^2}{2} \sum M_i y_i^2 = \frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right)^2 dz$$

tần số riêng là:
$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{2} \int EI \left(\frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right)^2 dz}{\sum M_i y_i^2} \quad (13.24)$$

Với dầm đơn, tiết diện đều, trọng lượng phân bố $q = \gamma A$, đường đàn hồi do tải trọng bản thân là:

$$y(z) = \frac{q}{24EI} (z^4 - 4Lz^3 + 6L^2z^2)$$

khi dầm dao động, có thể chọn dạng đa thức như trên:

$$y(z) = z^4 - 4Lz^3 + 6L^2 z^2$$

Áp dụng phương pháp Rayleigh ta tính được tần số của dao động chính thứ nhất là:
$$\omega_1 = \frac{3,49}{L^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}}$$

So với giá trị giải theo phương pháp chính xác là:

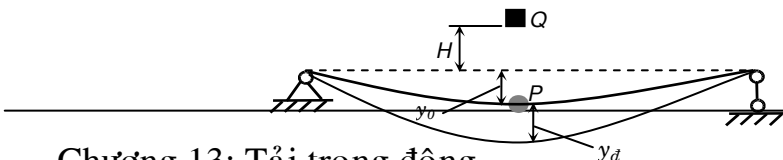
$$\omega_1 = \frac{3,52}{L^2} \sqrt{\frac{EIg}{\gamma A}}$$

thì sai số là 1% đủ nhỏ, chấp nhận được trong kỹ thuật.

13.8 VA CHẠM CỦA HỆ MỘT BẬC TỰ DO

1- Va chạm đứng

Xét một dầm mang vật nặng P và chịu va chạm bởi vật nặng Q , rơi theo phương thẳng đứng từ độ cao H vào vật nặng P như trên H.13.21. Trọng lượng bản thân của dầm được bỏ qua. Giả thiết khi vật Q va chạm P cả hai vật cùng chuyển động thêm xuống dưới và đạt chuyển vị lớn nhất y_d .



Chương 13: Tải trọng động
Hình 13.21 Hệ một bậc tự do chịu va chạm đứng

Chuyển vị của vật nặng P do trọng lượng bản thân của nó được ký hiệu là y_0 .

Gọi V_0 là vận tốc của Q ngay trước lúc chạm vào P , V là vận tốc của cả hai vật P và Q ngay sau khi va chạm. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng trước và ngay sau khi va chạm, ta được:

$$\frac{QV_0}{g} = \frac{(P+Q)}{g} V$$

hay
$$V = \frac{Q}{P+Q} V_0 \quad (a)$$

Trong bài toán này, ta dựa vào phương pháp năng lượng để tìm chuyển vị trong dầm.

Ta gọi trạng thái 1 tương ứng với khi vật Q vừa chạm vào vật P và cả hai cùng chuyển động xuống dưới với vận tốc V (lúc này chuyển vị là y_0). Trạng thái 2 tương ứng với khi Q và P đạt tới chuyển vị tổng cộng $y_0 + y_d$.

Động năng của vật P và Q ở trạng thái 1 ngay sau khi va chạm:

$$T_1 = \frac{1}{2} mV^2 = \frac{1}{2} \frac{(P+Q)}{g} \left(\frac{Q}{P+Q} V_0 \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_0^2$$

Động năng của vật P và Q ở trạng thái 2:

$$T_2 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{(P+Q)}{g} 0^2 = 0$$

Độ giảm động năng khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 là:

$$T = T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_o^2 \quad (b)$$

Độ thay đổi thế năng khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 là:

$$\pi = mgh = \frac{P+Q}{g} g(y_d + y_o - y_o) = (P+Q)y_d \quad (c)$$

Theo nguyên lý bảo toàn năng lượng, khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2, độ thay đổi cơ năng của vật P và Q sẽ chuyển thành thế năng biến dạng đàn hồi U tích lũy trong dầm.

$$U = T + \pi$$

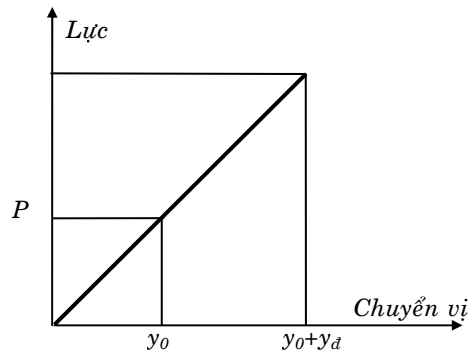
Tính U dựa vào quan hệ giữa lực và chuyển vị trong dầm như trên H.13.22. Ở trạng thái 1, trong dầm tích lũy một thế năng biến dạng đàn hồi U_1 được tính như sau:

$$U_1 = \frac{1}{2} P y_o$$

Đặt $\delta = \frac{y_o}{P}$ là chuyển vị tại điểm va chạm do lực đơn vị gây ra. Thế vào biểu thức trên ta có:

$$U_1 = \frac{1}{2\delta} y_o^2$$

Ở trạng thái 2, thế năng biến dạng đàn hồi U_2 trong dầm là:



Hình 13.22. Đồ thị tính TNBĐĐH

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{(y_d + y_0)^2}{\delta}$$

Như vậy khi hệ chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2, thế năng biến dạng đàn hồi trong dầm được tích lũy thêm một lượng:

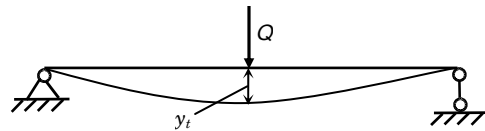
$$U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2\delta} \left\{ (y_d + y_0)^2 - y_0^2 \right\} = \frac{1}{2\delta} (y_d^2 + 2y_d y_0)$$

$$U = \frac{y_d^2}{2\delta} + P y_d \quad (d)$$

Thay các biểu thức (b), (c), (d) vào (13.25) ta có:

$$\frac{y_d^2}{2\delta} + y_d P = \frac{1}{2} \frac{Q^2 V_o^2}{g(P+Q)} + (P+Q)y_d$$

Gọi y_t là chuyển vị của dầm tại điểm va chạm do trọng lượng Q tác dụng tĩnh tại đó gây ra như trên H.13.23. Thay $y_t = Q\delta$ vào phương trình trên, ta được:



Hình 13.23. Sơ đồ tính chuyển vị y_t

$$y_d^2 - 2y_t y_d - \frac{y_t V_o^2}{g(1+P/Q)} = 0 \quad (e)$$

Nghiệm của phương trình bậc hai (e) là:

$$y_d = y_t \pm \sqrt{y_t^2 + \frac{y_t V_o^2}{g(1+\frac{P}{Q})}}$$

Vì $y_d > 0$, nên chỉ chọn nghiệm dương của (e), tức là:

$$y_d = y_t + \sqrt{y_t^2 + \frac{y_t V_o^2}{g(1+\frac{P}{Q})}} = y_t \left(1 + \sqrt{1 + \frac{V_o^2}{g y_t (1+\frac{P}{Q})}} \right) = K_d y_t \quad (13.26)$$

Do đó hệ số động được tính bởi:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{gy_t(1 + \frac{P}{Q})}} \quad (13.27)$$

Khi vật Q rơi tự do từ độ cao H xuống dầm, tức là $v_0 = \sqrt{2gH}$, thay vào (13.27):

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t(1 + \frac{P}{Q})}} \quad (13.28)$$

Khi tại điểm va chạm không có trọng lượng đặt sẵn $P = 0$, hệ số động tăng lên: $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t}}$ (

Khi $P = 0$, $H = 0$, nghĩa là trọng lượng Q đặt đột ngột lên dầm:

$$K_d = 2 \quad ($$

Theo (13.29), khi y_t càng lớn, nghĩa là độ cứng của thanh càng nhỏ, thì K_d càng nhỏ, do đó sự va chạm càng ít nguy hiểm.

Để đảm bảo điều kiện bền, người ta có thể làm tăng y_t bằng cách đặt tại điểm chịu va chạm những vật thể mềm như lò xo hay tấm đệm cao su...

Khi đã tính được K_d , có thể tính đại lượng S khác trong hệ tương tự như chuyển vị, nghĩa là:

$$S_p = K_d S_t^Q + S^P \quad (13.31)$$

S_t^Q là đại lượng cần tính (nội lực, ứng suất...) do Q coi như đặt tĩnh lên hệ tại mặt cắt va chạm gây ra.

S_t^P là đại lượng cần tính (nội lực, ứng suất...) do các tải trọng hoàn toàn tĩnh đặt lên hệ gây ra.

Điều kiện bền: $\sigma_{d,\max} \leq [\sigma]$

Chú ý:

Nếu chọn móc thế năng bằng không ở vị trí dầm không biến dạng, thì cơ năng ban đầu của hệ chính là thế năng:

$$\pi = QH$$

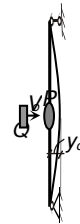
Ngay sau khi va chạm, P và Q cùng chuyển động xuống dưới với vận tốc V thì cơ năng của hệ chính là động năng:

$$T = \frac{1}{2} \frac{P+Q}{g} V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_0^2 = \frac{Q}{(P+Q)} QH < \pi$$

Như vậy đã có sự mất mát năng lượng tương ứng với giả thiết va chạm mềm tuyệt đối của 2 vật thể; năng lượng này làm cho 2 vật thể biến dạng hoàn toàn dẻo, áp sát vào nhau và chuyển động cùng vận tốc về phía dưới.

2- Va chạm ngang

Xét một dầm mang vật nặng P . Vật nặng Q chuyển động ngang với vận tốc V_0 và chạm vào vật nặng P như trên H.13.24. Trọng lượng bản thân của dầm được bỏ qua. Giả thiết khi vật Q va chạm P cả hai vật cùng chuyển động ngang và đạt chuyển vị lớn nhất y_d .



Hình 13.24. Hệ một bậc tự do chịu va chạm ngang

Lập luận như trường hợp va chạm đứng, ta cũng có:

Vận tốc của hai vật P , Q cùng chuyển động ngay sau khi va chạm là:

$$V = \frac{Q}{P+Q} V_o$$

Độ giảm động năng trong hệ: $T = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_o^2$

Vì hai vật chuyển động theo phương ngang, nên không có sự thay đổi thế năng, tức là:

$$\pi = 0$$

Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong hệ là:

$$U = \frac{y_d^2}{2\delta}$$

Nguyên lý bảo toàn năng lượng, $T + \pi = U$, ta được phương trình sau:

$$\frac{1}{2} \frac{Q^2}{g(P+Q)} V_o^2 = \frac{y_d^2}{2\delta}$$

Lấy giá trị nghiệm dương của y_d , ta được:

$$y_d = \sqrt{\frac{\delta Q V_o^2}{g \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}} \quad (13.32)$$

Ta lại có $\delta = \frac{y_t}{Q}$, với y_t là chuyển vị ngang của dầm tại điểm va chạm do trọng lượng Q tác dụng tĩnh nằm ngang tại đó. Thay vào phương trình (13.32) như sau:

$$y_d = y_t \frac{V_o}{\sqrt{g y_t \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}} = y_t K_d \quad (13.33)$$

Hệ số động:

$$K_d = \frac{V_o}{\sqrt{g y_t \left(1 + \frac{P}{Q}\right)}} \quad (13.34)$$

Khi không đặt sẵn trọng lượng chịu va chạm, tức $P = 0$, hệ số động là:

$$K_d = \frac{V_o}{\sqrt{gy_i}} \quad (13.35)$$

Khi đó, nội lực, ứng suất cũng được tính như sau:

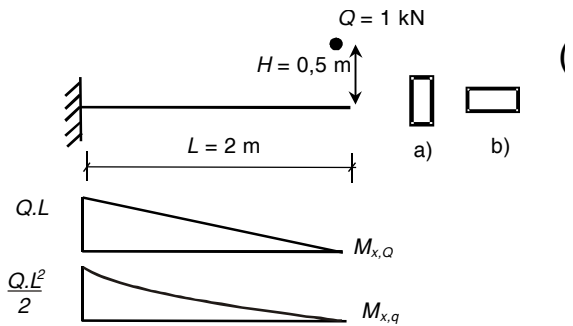
$$M_d = M_t \cdot K_d$$

$$\sigma_d = \sigma_t \cdot K_d$$

.....

Điều kiện bền: $\sigma_{d,max} \leq [\sigma]$

Ví dụ 13.5 Một dầm công xon tiết diện chữ nhật (20×40) cm chịu va chạm đứng bởi một trọng lượng $Q = 1$ kN rơi tự do từ độ cao $H = 0,5$ m



Hình 13.25 Dầm công xon chịu va chạm

(H.13.25.a). Bỏ qua trọng lượng bản thân dầm, tính ứng suất và độ võng lớn nhất của dầm. Nếu kể đến trọng lượng bản thân dầm q , tính lại ứng suất và độ võng. Nếu đặt tiết diện dầm như (H.13.25.b), tính lại ứng suất và độ võng. Cho: $E = 0,7 \cdot 10^3$ kN/cm²; $q = 0,64$ kN/m.

Giải. Ứng suất động:

$$\sigma_d = \sigma_{t,Q} K_d$$

với:
$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_i}}$$

Không kể trọng lượng bản thân dầm, ta có:

$$y_i = \frac{QL^3}{3EI_x} = \frac{1(200)^3}{3(0,7 \cdot 10^3) \frac{20 \cdot 40^3}{12}} = 0,0357 \text{ cm}$$

Hệ số động : $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,0357}} = 53,93$

Ứng suất lớn nhất tại ngàm (H.13.25):

$$\begin{aligned}\sigma_{d,\max} &= \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{M_{x,\max}}{W_x} K_d = \frac{Q.L}{W_x} K_d \\ &= \frac{1(200)}{20.40^2 / 6} (53,93) = 2,02 \text{ kN/cm}^2\end{aligned}$$

Độ võng lớn nhất tại đầu tự do:

$$y_{\max} = y_{t,\max,Q} K_d = 0,0357(53,93) = 1,92 \text{ cm}$$

Khi kể đến trọng lượng bản thân, có thể dùng phương pháp thu gọn khối lượng, khi đó coi như dầm không trọng lượng và tại đầu tự do có một trọng lượng là $(33/140)qL = 0,3 \text{ kN}$ (qL là trọng lượng dầm).

Hệ số động sẽ là:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t(1 + \frac{P}{Q})}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,0357(1 + \frac{0,3}{1})}} = 47,43$$

Ứng suất do va chạm là:

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,Q} K_d = \frac{1(200)}{20.40^2 / 6} . 47,43 = 1,78 \text{ kN/cm}^2$$

Kể thêm ứng suất do trọng lượng dầm:

$$\sigma_{d,\max} = \frac{M_{t,\max,q}}{W_x} = \frac{qL^2 / 2}{W_x} = \frac{0,64.2^2.100}{20.40^2 / 6} = 0,024 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất lớn nhất trong dầm là:

$$\sigma_{\max} = 1,78 + 0,024 = 1,804 \text{ kN/cm}^2$$

Khi kể đến trọng lượng dầm, ứng suất lớn nhất giảm.

Độ võng tại đầu tự do

Độ võng do trọng lượng bản thân:

$$y_t = \frac{qL^4}{8EI_x} = \frac{0,64.10^{-2}(200)^4}{8(0,7.10^3) \cdot \frac{20.40^3}{12}} = 0,017 \text{ cm}$$

Độ võng khi có va chạm:

$$y_{d,\max} = y_{t,\max,Q} K_d + y_{t,q} = 0,0357.47,43 + 0,017 = 1,71 \text{ cm}$$

Nếu đặt tiết diện dầm như (H.13.25.b), ta được:

• Không kể trọng lượng dầm:

$$y_t = \frac{QL^3}{3EI_x} = \frac{1.(200)^3}{3(0,7.10^3) \cdot \frac{40.20^3}{12}} = 0,143 \text{ cm}$$

$$\text{Hệ số động : } K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,143}} = 27,46$$

Ứng suất lớn nhất tại ngàm :

$$\begin{aligned} \sigma_{d,\max} &= \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{M_{x,\max}}{W_x} K_d = \frac{QL}{W_x} K_d \\ &= \frac{1.(200)}{40.20^2 / 6} (27,46) = 2,06 \text{ kN/cm}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Độ võng tại đầu tự do: } y_t = 0,143.(27,46) = 3,93 \text{ cm}$$

• Kể đến trọng lượng bản thân, ta dùng phương pháp thu gọn khối lượng, khi đó coi như dầm không trọng lượng và tại đầu tự do có một trọng lượng là $(33/140)qL = 0,3 \text{ kN}$ (qL là trọng lượng dầm).

Hệ số động sẽ là:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{y_t(1 + \frac{P}{Q})}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,143(1 + \frac{0,3}{1})}} = 24,21$$

Ứng suất do va chạm là:

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,Q} K_d = \frac{1(200)}{40.20^2 / 6} . 24,21 = 1,816 \text{ kN/cm}^2$$

Kể thêm ứng suất do trọng lượng dầm:

$$\sigma_{d,\max} = \frac{M_{t,\max,q}}{W_x} = \frac{qL^2 / 2}{W_x} = \frac{0,64.2^2 . 100}{40.20^2 / 6} = 0,096 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất lớn nhất trong dầm là:

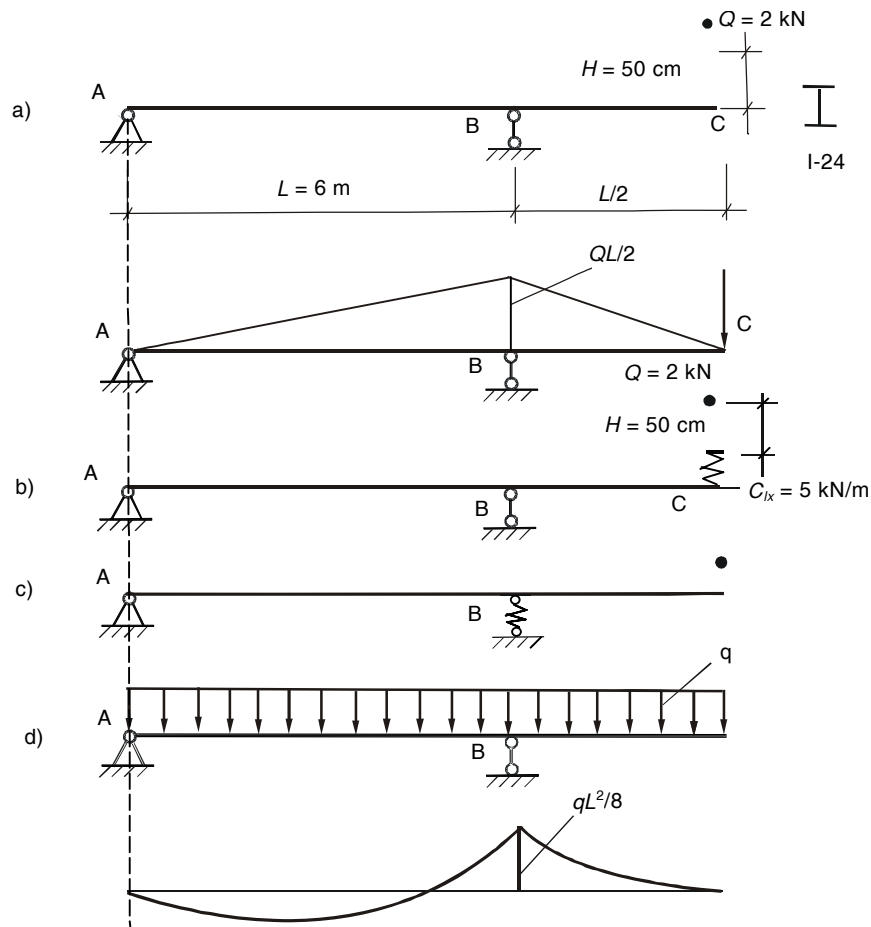
$$\sigma_{\max} = 1,816 + 0,096 = 1,912 \text{ kN/cm}^2$$

Khi kể đến trọng lượng dầm, ứng suất lớn nhất giảm.

Độ võng tại đầu tự do:

$$y_t = 0,143.(24,21) + 0,017 = 3,48 \text{ cm}$$

Ví dụ 13.6 Dầm ABC tiết diện I-24 chịu va chạm đứng bởi một trọng lượng $Q = 2 \text{ kN}$ rơi tự do từ độ cao $H = 50 \text{ cm}$ (H.13.26.a), bỏ qua trọng lượng bản thân dầm, tính σ_{\max} ; kiểm tra bền. Cho: I-24 có: $I_x = 3460 \text{ cm}^4$, $W_x = 289 \text{ cm}^3$, $q = 0,273 \text{ kN/m}$; $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.



Hình 13.24 a) Hệ chịu va chạm không có lò xo
b) và c) Hệ chịu va chạm có lò xo; d) Dầm chịu trọng lượng bản thân

Bây giờ, đặt một lò xo có $C_{lx} = 5 \text{ kN/m}$ tại C để đỡ vật va chạm Q (H.13.24.b), tính lại hệ số động và σ_{\max} ; xét lại điều kiện bền. Nếu không đặt ở C mà thay lò xo vào gối tựa tại B (H.13.26.c), hệ số động là bao nhiêu?

Cho: $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$.

Giải. Không kể trọng lượng bản thân dầm.

Chuyển vị do Q tác dụng tĩnh tại C là:

$$y_t = \frac{QL^3}{8EI_x} = \frac{1 \cdot (600)^3}{8(2 \cdot 10^4) \cdot 3460} = 0,39 \text{ cm}$$

Hệ số động:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,39}} = 17,04$$

Ứng suất lớn nhất tại B (H.13.21):

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{M_{x,\max}}{W_x} K_d = \frac{Q.L}{2.W_x} K_d$$

$$\sigma_{d,\max} = \frac{1.(600)}{2.289} (17,04) = 17,69 \text{ kN/cm}^2 > [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

Dầm không bền.

Chuyển vị tại C: $y_C = 0,39(17,04) = 6,64 \text{ cm}$

Xét trường hợp có lò xo đặt ngay tại điểm va chạm.

Chuyển vị do Q tác dụng tĩnh tại C là:

$$y_t = \frac{QL^3}{8EI_x} + \frac{Q}{C_{lx}} = \frac{1.(600)^3}{8(2.10^4).3460} + \frac{1}{5} = 0,39 + 0,2 = 0,59 \text{ cm}$$

Hệ số động :

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,59}} = 14,06$$

Ứng suất lớn nhất tại B (H.13.24):

$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{1.(300)}{289} 14,06 = 14,6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{d,\max} < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$

dầm thỏa điều kiện bền.

Chuyển vị của dầm tại C: $y_C = 0,39(14,06) = 5,48 \text{ cm}$

giảm so với trường hợp trên.

Xét trường hợp có lò xo đặt tại gối B.

Bây giờ, chuyển vị do Q tác dụng tĩnh tại C là:

$$y_t = \frac{QL^3}{8EI_x} + \frac{3(3Q/2)}{2C_{lx}} = \frac{1.(600)^3}{8(2.10^4).3460} + \frac{3}{2} \frac{1}{5} = 0,39 + 0,3 = 0,69 \text{ cm}$$

Hệ số động: $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2(50)}{0,69}} = 13,08$

Ứng suất lớn nhất tại B (H.10.21):

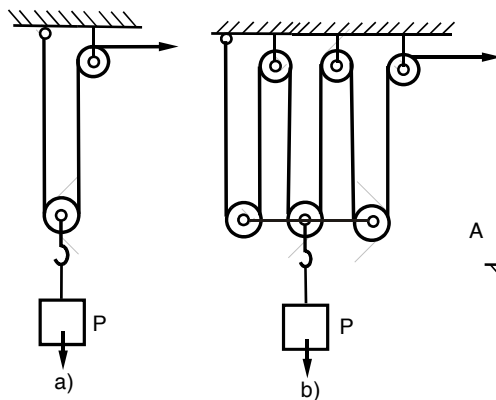
$$\sigma_{d,\max} = \sigma_{t,\max,Q} K_d = \frac{1 \cdot (300)}{289} 13,08 = 13,57 \text{ kN/cm}^2$$

Chuyển vị tại C: $y_C = 0,69(13,08) = 9,02 \text{ cm}$

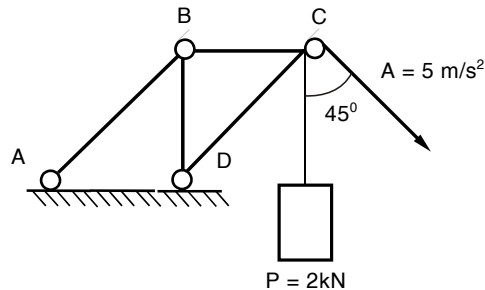
Trong trường hợp này, ứng suất giảm nhưng chuyển vị tăng so với khi đặt lò xo ở đầu tự do.

BÀI TẬP CHƯƠNG 13

- 13.1 Một vật nặng P được nâng lên cao với bằng hệ thống ròng rọc đơn giản như trên H.13.24.a. Nếu kéo dây cáp với gia tốc đều a, tính lực căng trên dây cáp. Nếu dùng hệ thống ba cặp ròng rọc và cũng kéo dây với gia tốc a thì lực căng là bao nhiêu?



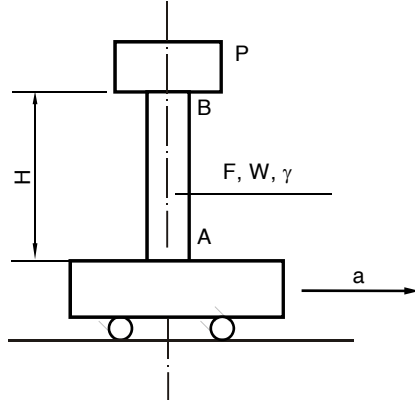
Hình 13.25



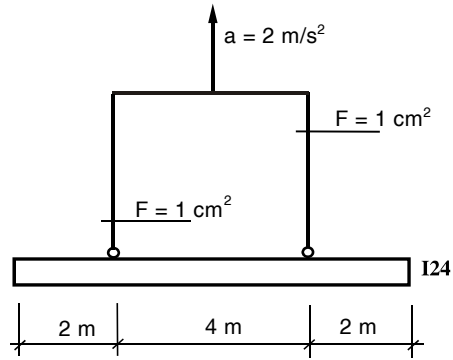
Hình 13.26

- 13.2 Một kết cấu nâng vật nặng P chuyển động lên với gia tốc a (H.13.26). Tính nội lực phát sinh trong các thanh AB, BC và CD.
- 13.3 Một trụ AB có chiều cao H, diện tích mặt cắt ngang là F, môđun chống uốn W, trọng lượng riêng là γ mang một vật nặng P. Trụ được gắn chặt vào một bộ vận chuyển theo phương ngang với gia tốc a (H.13.27).

Xem trụ bị ngàm tại tiết diện A vào bệ, xác định ứng suất pháp σ_{\max} , σ_{\min} tại mặt cắt nguy hiểm của trụ.



Hình 13.27

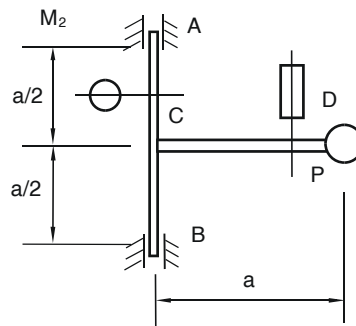


Hình 13.28

13.4 Xác định ứng suất pháp lớn nhất trong dây cáp và trong dầm I-24 do tác dụng đồng thời của trọng lực và lực quán tính khi hệ được kéo lên với gia tốc a (H.13.28).

13.5 Một trục tiết diện tròn AB đường kính D mang một thanh CD tiết diện chữ nhật $b.h$, đầu thanh CD có một vật nặng trọng lượng P , hệ quay quanh trục AB với vận tốc $n = 210$ vg/ph (H.13.29). Tính ứng suất lớn nhất trong thanh CD và trục AB.

Cho: $a = 1$ m; $D = 4$ cm; $h = 2b = 6$ cm; $P = 0,1$ kN.

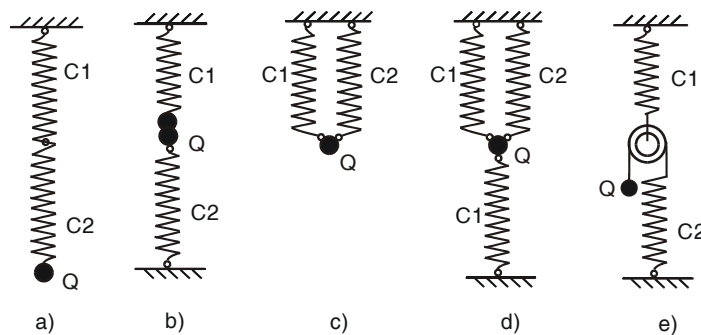


Hình 13.29

Chương 13: Tải trọng động

Bỏ qua trọng lượng bản thân của hệ.

13.6 Tính tần số góc và chu kỳ dao động của các hệ vẽ trên H.13.30, C_1 và C_2 là độ cứng của lò xo.



Hình 13.30

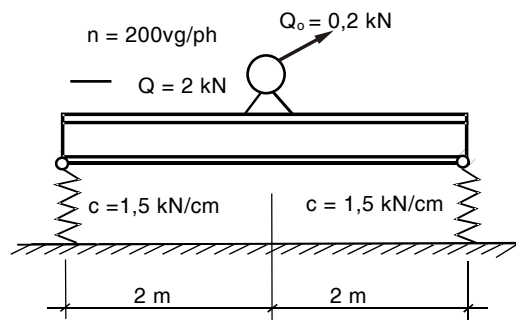
13.7 Một dầm đơn giản mặt cắt hình chữ I số 40 dài 8 m mang một trọng lượng 20 kN ở giữa nhịp. Tính tần số riêng ω của hệ khi có kể và khi không kể đến trọng lượng dầm.

13.8 Một dầm thép I24 mang một mô-tơ nặng 2 kN tốc độ 200 vg/ph, lực quán tính do khối lượng lệch tâm là 0,2 kN (H.13.31). Bỏ qua trọng lượng bản thân của dầm và lò xo, xác định ứng suất động lớn nhất trong dầm trong các trường hợp sau:

a) Dầm I24 đặt theo phương đứng (I)

b) Dầm I24 đặt theo phương ngang ().

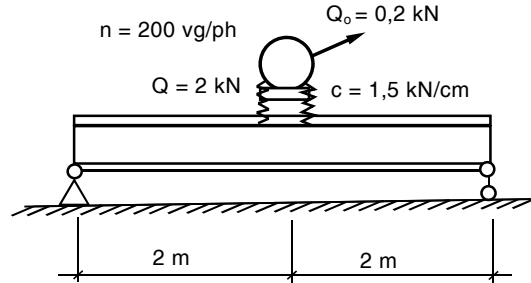
13.9 Giả sử hai gối tựa lò xo trên dầm ở



Hình 13.31

Chương 13: Tải trọng động

H.13.31 được thay bằng gối tựa cứng và đặt hai lò xo dưới đế môơ như ở H.13.32. Tính lại ứng suất và độ võng lớn nhất trong dầm theo cả hai trường hợp như trên. Cho: $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

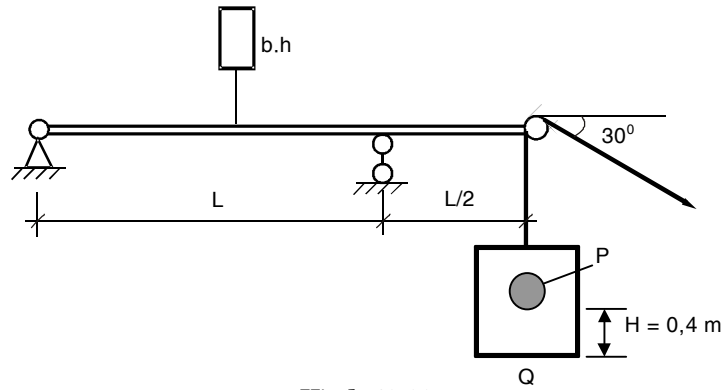


Hình 13.32

13.10 Một dầm gỗ tiết diện chữ nhật $b \cdot h$, có đầu mút thừa gắn một ròng rọc để đưa một thùng trọng lượng Q chứa vật nặng P lên cao. (H.13.33). Hãy xét hai trường hợp:

a) Vật nặng P được treo trong thùng và thùng được kéo lên với gia tốc $a = 2 \text{ m/s}^2$. Bỏ qua trọng lượng dầm, dây và ròng rọc, tính ứng suất lớn nhất của dầm. Cho: $P = 0,5 \text{ kN}$; $Q = 1 \text{ kN}$; $L = 4 \text{ m}$.

b) Trong quá trình dịch chuyển với gia tốc $a = 2 \text{ m/s}^2$ vật nặng P bị rơi xuống đáy thùng. Tính lại ứng suất của dầm. Cho: $H = 0,4 \text{ m}$.

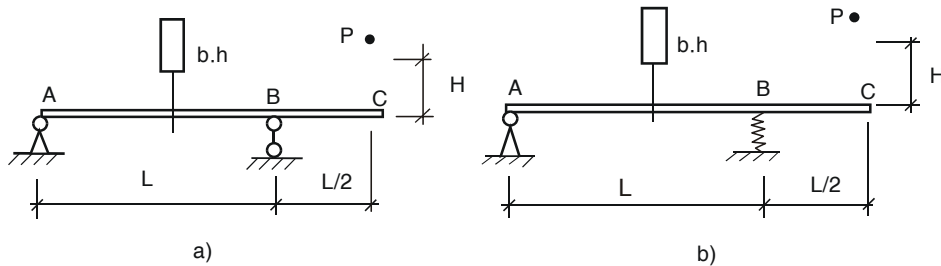


Hình 13.33

13.11 Một trọng lượng $P = 0,5 \text{ kN}$ rơi từ một độ cao $H = 10 \text{ cm}$ xuống đầu C của một dầm tiết diện chữ nhật $b \times h = 20 \times 40 \text{ cm}^2$, dài $L = 4 \text{ m}$ (H.13.34.a). Tính ứng suất và độ võng lớn nhất của dầm

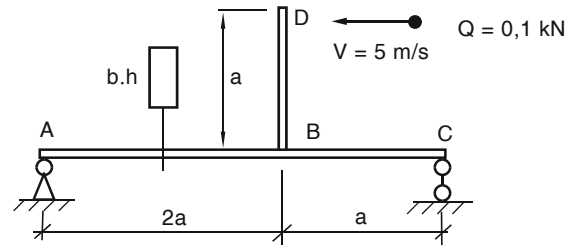
Nếu thay gối tựa B bằng một lò xo có đường kính $D = 100 \text{ mm}$, đường kính sợi thép $d = 10 \text{ mm}$, số vòng làm việc $n = 10$ (H.13.34.b). Tính ứng suất và độ võng lớn nhất của dầm.

Cho: $E_{\text{dầm}} = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $G_{\text{lò xo}} = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$.



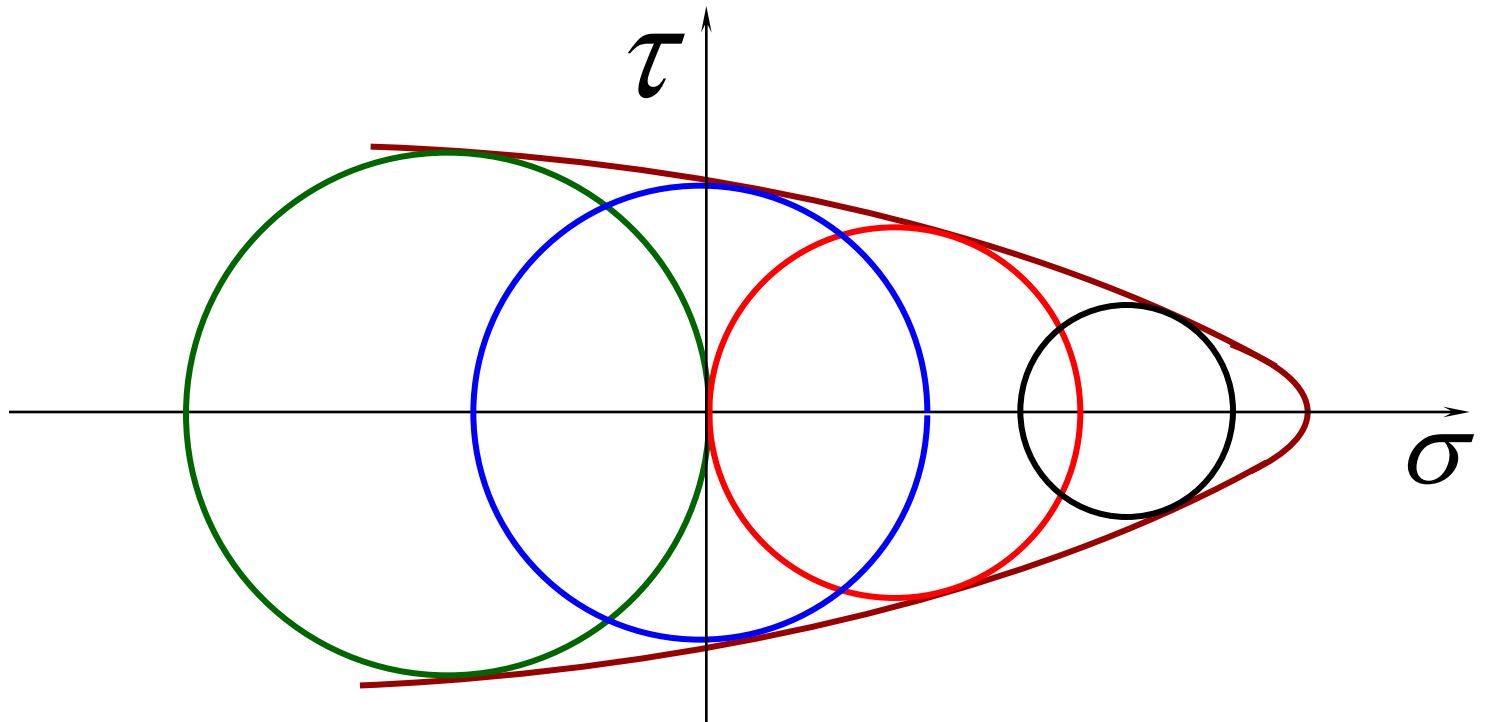
Hình 13.34

13.12 Xác định ứng suất của dầm khi vật bị va chạm ngang (H.13.35). Cho: $a = 2 \text{ m}$; $b.h = 20 \times 40 \text{ cm}^2$. Thanh DB tuyệt đối cứng.

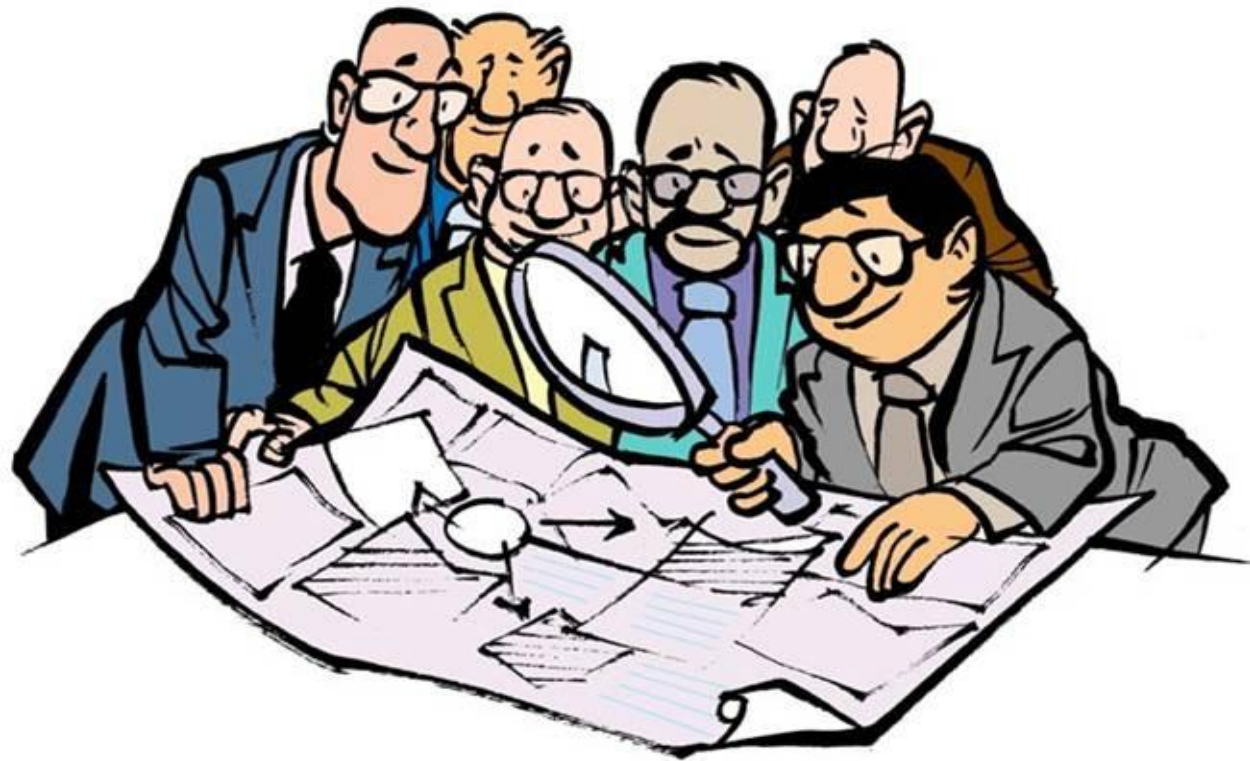


Hình 13.35

SỨC BỀN VẬT LIỆU



NAM ĐỊNH - 2009



Chương I

NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Nhiệm vụ của môn học Sức bền vật liệu (SBVL).

- *Tải trọng:*

- hỗn hợp khí lên đáy pítông ,
- trọng lượng hàng hoá vận chuyển lên satxi của xe tải,
- lực cản cắt,
- trọng lượng của đoàn xe di chuyển trên cầu,
- tác dụng của dòng nước chảy, của gió bão lên cầu v. v. .

ngoại lực .

Các bộ phận của máy móc, công trình cần:

- **đảm bảo đủ độ bền**
- **đảm bảo đủ độ cứng**
- **đảm bảo độ ổn định**

ng

Các môn khoa học nghiên cứu độ bền:
lý thuyết đàn hồi, lý thuyết dẻo, từ biến, cơ học phá huỷ vật liệu, **sức bền vật liệu (SBVL)...**

SBVL nghiên cứu các nguyên tắc chung, làm cơ sở cho việc tính toán các chi tiết, bộ phận của máy móc công trình theo **độ bền, độ cứng và độ ổn định.**

- **Đủ độ bền:** kết cấu có khả năng tiếp nhận tải trọng quy định mà không bị phá huỷ trong thời gian quy định của tuổi thọ.

- **Đủ độ cứng:** trong khi nhận và truyền tải trọng những thay đổi kích thước hình học không vượt quá giá trị cho phép nhằm đảm bảo cho việc sử dụng công trình một cách bình thường, đáp ứng được các yêu cầu công nghệ.

- **Ổn định** là khả năng bảo toàn được trạng thái cân bằng ban đầu của kết cấu trong quá trình chịu tải.

SBVL là môn khoa học được xây dựng trên cơ sở một số giả thuyết xuất phát từ những thực nghiệm cho phép đơn giản hoá nhiều vấn đề phức tạp, nhưng vẫn giữ được những tính chất cơ bản của hiện tượng được nghiên cứu.

Mục đích và động lực phát triển của SBVL

giải quyết mâu thuẫn giữa thoả mãn các yêu cầu về độ bền, độ cứng và độ ổn định với yêu cầu tiết kiệm nguyên vật liệu, giảm giá thành.

SBVL nghiên cứu độ bền, độ cứng và độ ổn định của các chi tiết máy dạng **thanh**.

Sử dụng các kết quả nghiên cứu của SBVL để tính toán các máy móc, công trình cụ thể làm bằng các vật liệu khác nhau là nhiệm vụ của các môn học kỹ thuật cụ thể như **Kết cấu kim loại, Kết cấu bê tông cốt thép, Máy nâng hạ và vận chuyển, Chi tiết máy...**

SBVL là môn học cơ sở kỹ thuật, là cầu nối giữa các môn học cơ bản như Toán, Vật lý. . . với các môn kỹ thuật cụ thể . Hiểu biết về SBVL là **một phần kiến thức quan trọng, không thể thiếu được** đối với các kỹ sư xây dựng, cơ khí.

- **1.2. Lực và biến dạng.**

Nội lực: lực liên kết giữa các phần tử của vật thể giữ cho vật thể tồn tại dưới hình dạng ta vẫn thấy.

Ngoại lực: tác động cơ học của các vật thể kế cận, của môi trường bên ngoài lên vật thể được xét làm thay đổi hình dáng, kích thước của vật thể, làm thay đổi nội lực nghĩa là gây ra **nội lực phụ**.

Tính chất của vật thể khôi phục lại hình dáng và kích thước ban đầu khi ngoại lực thôi tác dụng được gọi là **tính chất đàn hồi**.

Vật thể là **hoàn toàn đàn hồi** nếu sau khi bỏ tải vật thể hoàn toàn trở lại hình dáng và kích thước ban đầu

Biến dạng biến mất sau khi bỏ tải được gọi là
biến dạng đàn hồi.

Vật thể **không hoàn toàn đàn hồi**: Nếu ngoại lực tác dụng lên vật thể đã cho vượt quá một giới hạn nào đó, sau khi bỏ tải vật thể không hoàn toàn trở lại hình dáng và kích thước ban đầu mà tồn tại một lượng biến dạng nào đó (lớn hay nhỏ).

Phần biến dạng không biến mất sau khi bỏ tải gọi là
biến dạng dư hay biến dạng dẻo

- **1.3. Các giả thuyết cơ bản của SBVL.**

- **1. Trong giới hạn được xét vật liệu được coi là hoàn toàn đàn hồi,**

- 2. Trong giới hạn được xét hệ thức giữa lực và biến dạng của vật thể là bậc nhất (định luật Húc).**

- 3. Vật liệu cấu thành vật thể có tính chất liên tục, đồng nhất và đẳng hướng.**

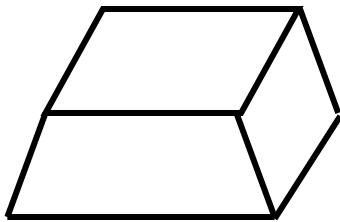
- 4. Biến dạng do ngoại lực gây ra rất nhỏ so với kích thước của vật thể nên có thể bỏ qua khi xác định tải trọng và phản lực liên kết.**

Lý thuyết SBVL - *lý thuyết tuyến tính và gần đúng*

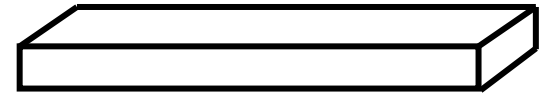
1.4. Phân loại các chi tiết của máy móc công trình và sơ đồ tính toán.

1.4.1. Phân loại các chi tiết của máy móc, công trình.

a/ Khối



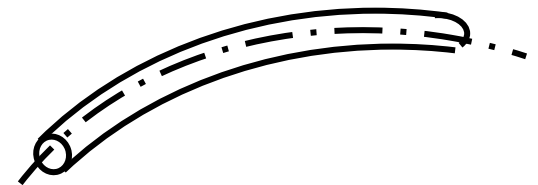
d/ Thanh thẳng



b/ Bản



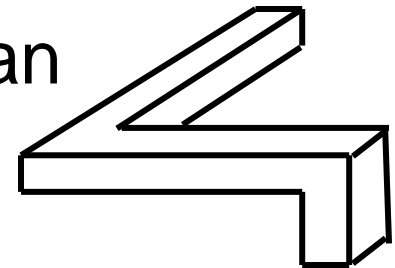
e/ Thanh cong



c/ Vỏ

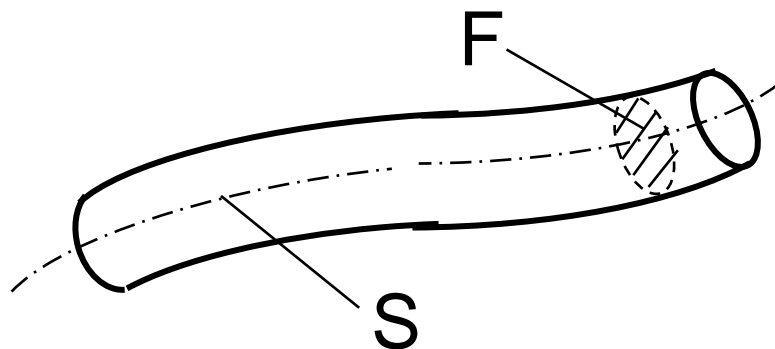


g/ Thanh không gian

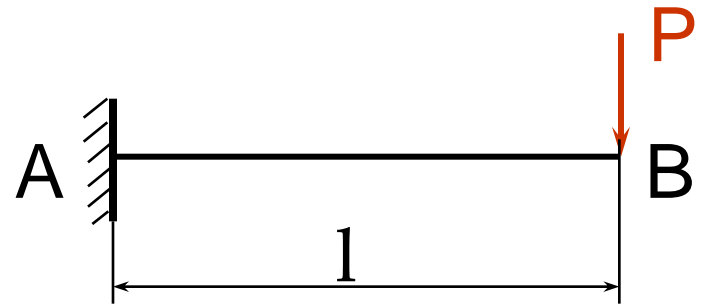
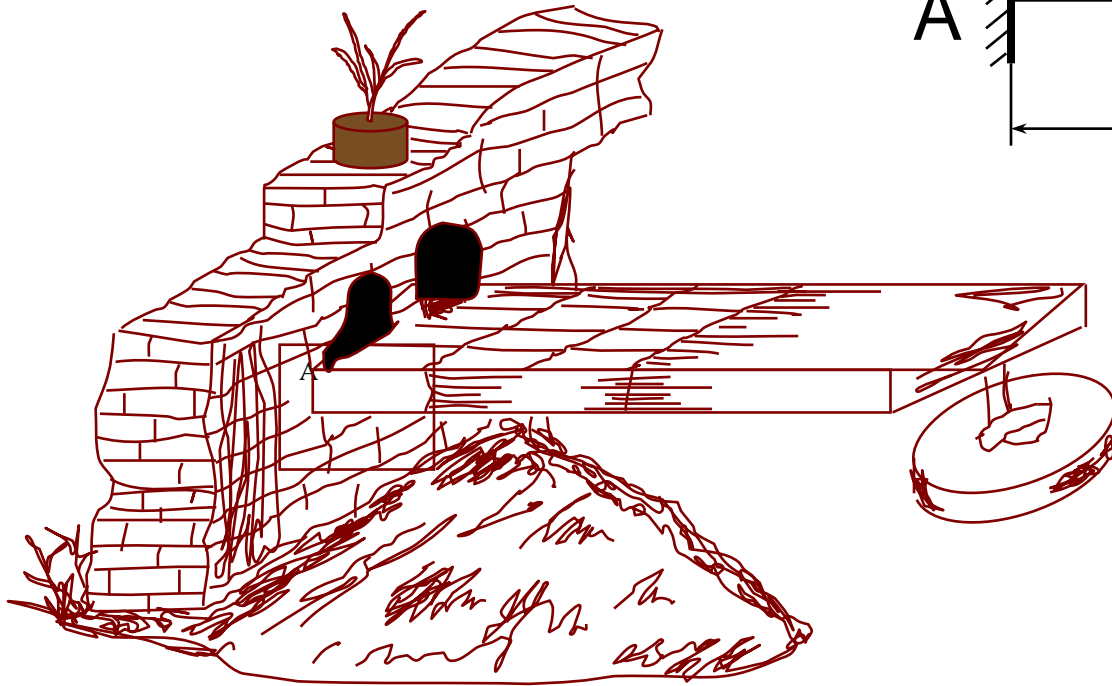


Thanh là một vật thể hình học được tạo thành bởi một hình phẳng F dịch chuyển dọc theo đường tựa S sao cho trọng tâm của F luôn nằm trên S và F luôn nằm trong mặt phẳng pháp tuyến của S .

S được gọi là trục thanh và F là mặt cắt ngang. Tùy theo hình dạng của trục thanh người ta phân biệt thanh thẳng (S là đường thẳng), thanh cong (S là đường cong) và thanh không gian (S là một đường bất kỳ trong không gian).



1.4.2. Sơ đồ tính toán.



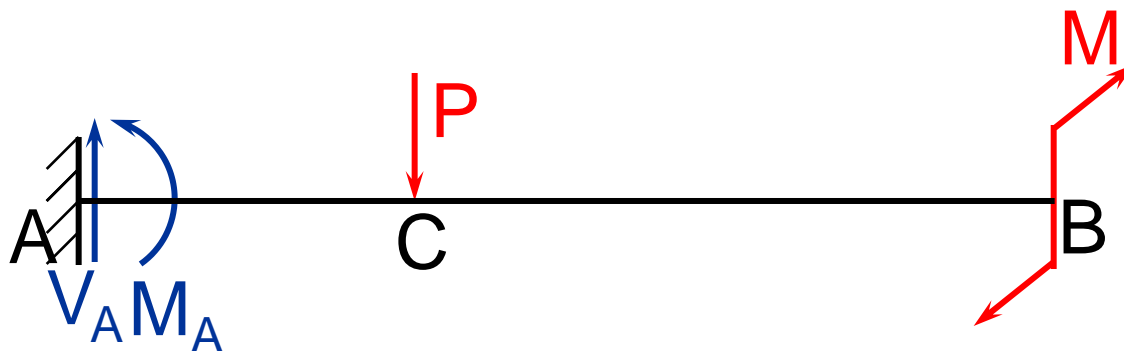
1. 5. Ngoại lực và nội lực.

Ngoại lực là những lực do môi trường, do các vật thể kế cận tác dụng lên vật thể được xét.

Ngoại lực = tải trọng , phản lực liên kết.

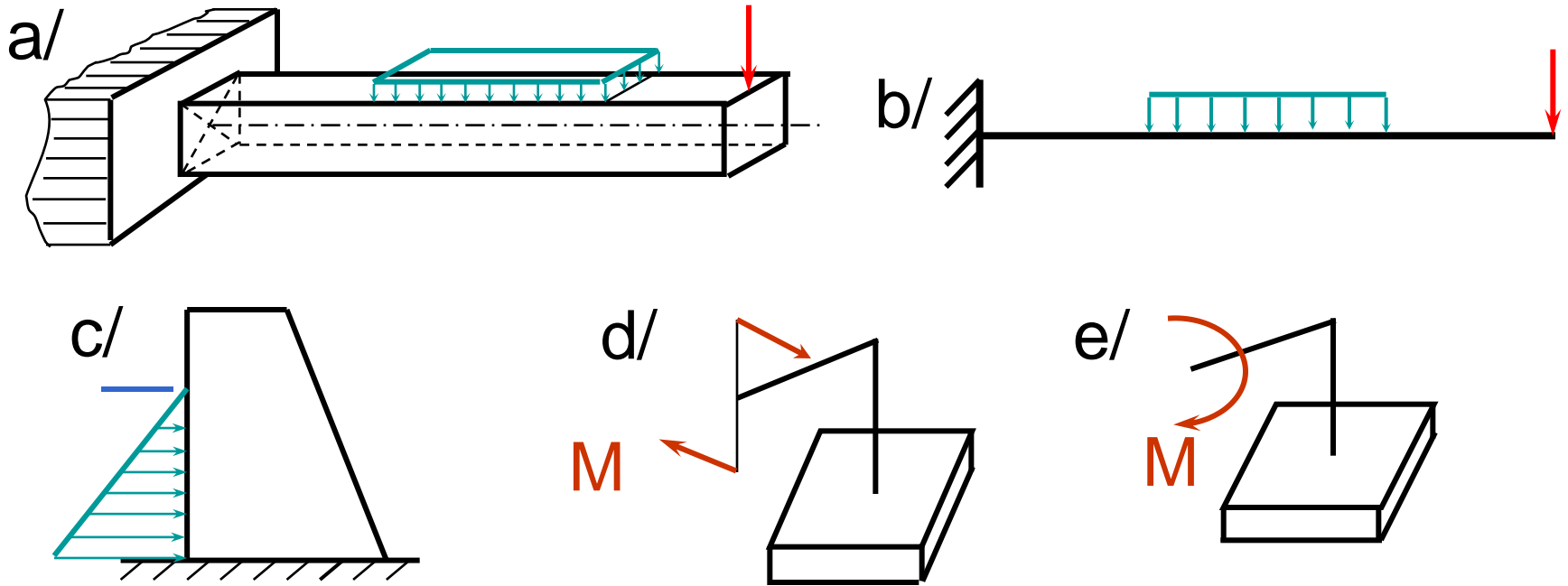
Tải trọng = lực chủ động.

Phản lực liên kết là những lực ở những vị trí liên kết giữa vật thể đang được xét với những vật thể xung quanh khi có tác dụng của tải trọng



Các loại tải trọng: *

Lực tập trung, lực phân bố, momen tập trung.



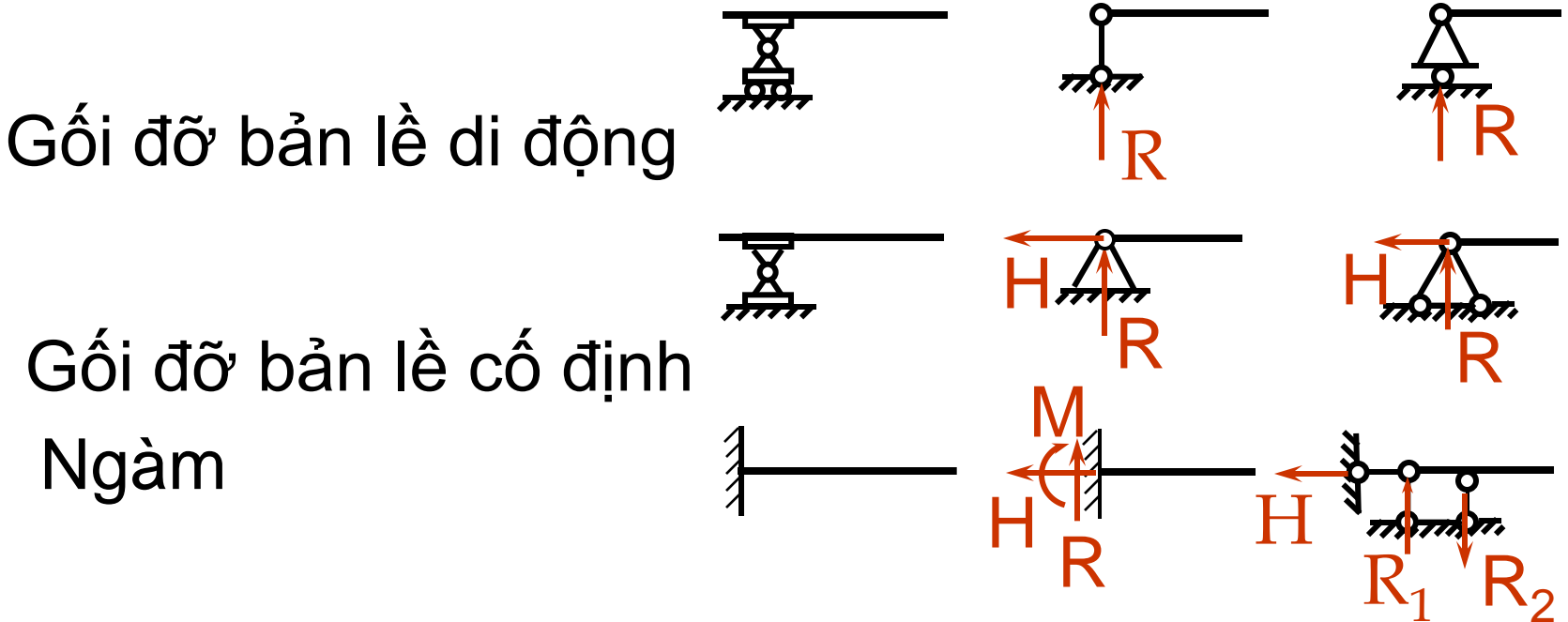
Đơn vị đo lực tập trung là $N, kN...$, đơn vị đo lực phân bố theo chiều dài là $N/m, kN/m...$, đo lực phân bố theo bề mặt là $N/m^2, kN/m^2...$, đo lực phân bố theo thể tích là $N/m^3, kN/m^3$, đo momen là $Nm, kNm...$

- ***Tải trọng tĩnh và tải trọng động.**

Tải trọng tĩnh tăng chậm theo thời gian cho đến khi đạt tới trị số cuối cùng sẽ dừng lại không thay đổi.

Tải trọng động gây ra gia tốc lớn vì thế không thể bỏ qua lực quán tính.

Ba loại liên kết thường gặp:



Xác định các thành phần phản lực từ điều kiện cân bằng.

Bài toán phẳng

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_A = 0.$$

(x, y không song song)

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C = 0.$$

(A, B, C không thẳng hàng)

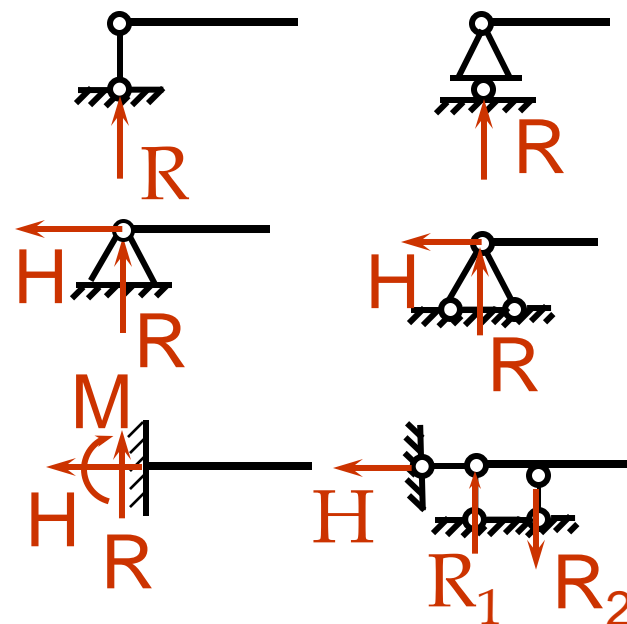
$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum X = 0.$$

(AB không vuông góc với x)

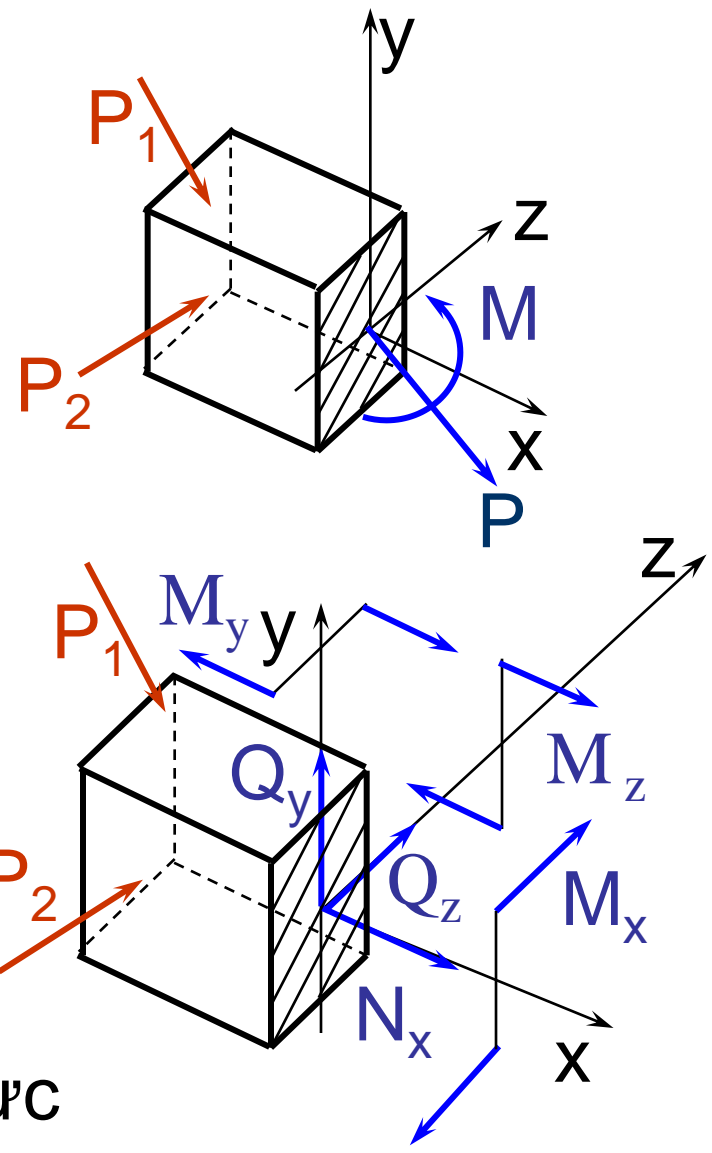
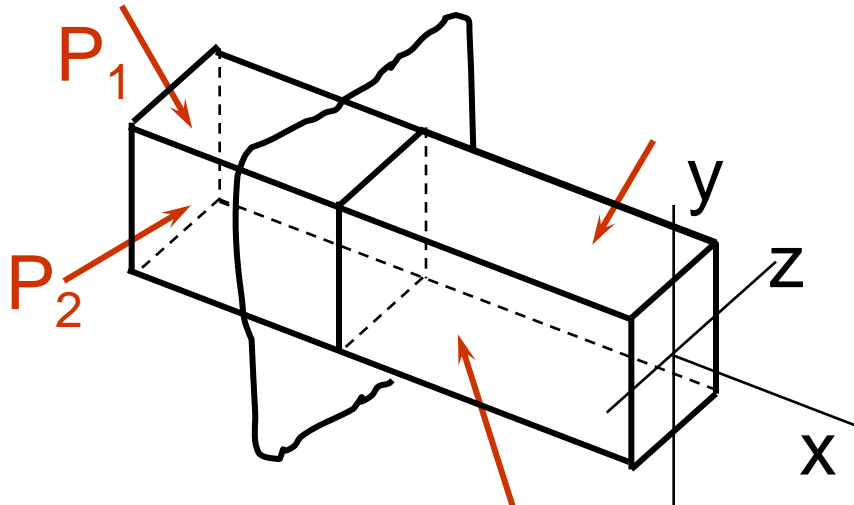
Bài toán không gian

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0;$$

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0.$$



• 1.6. Phương pháp mặt cắt.

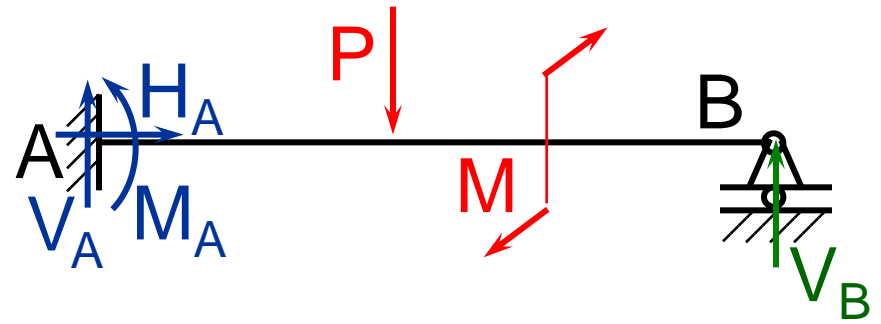
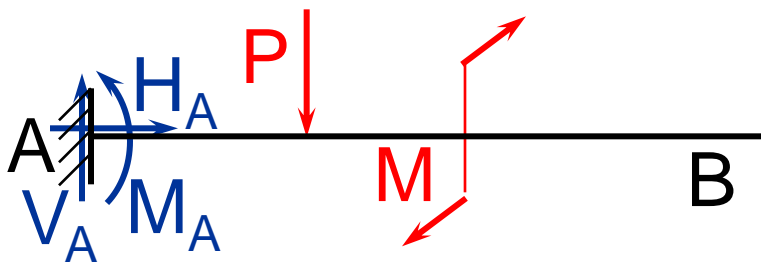


Sáu phương trình cân bằng xác định sáu thành phần nội lực :

$$N_x + \sum X_i = 0 \longrightarrow N_x = -\sum X_i.$$

$\sum X_i$ - tổng hình chiếu của ngoại lực ở một bên mặt cắt xuống trục x .

N_x - thành phần lực dọc của nội lực trên mặt cắt;



Bài toán tĩnh định: số thành phần phản lực liên kết bằng số phương trình cân bằng tĩnh học và nếu các liên kết được bố trí hợp lý thì có thể xác định được các thành phần phản lực liên kết bằng tĩnh học.

Bài toán siêu tĩnh : số thành phần phản lực liên kết lớn hơn số phương trình tĩnh học (cần phải lập thêm các phương trình bổ sung).

SBVL chỉ nghiên cứu phần **nội lực phụ** xuất hiện khi vật thể chịu tác dụng của ngoại lực

$$N_x + \sum X_i = 0; \quad N_x = -\sum X_i.$$

$$Q_y + \sum Y_i = 0; \quad Q_y = -\sum Y_i;$$

$$Q_z + \sum Z_i = 0; \quad Q_z = -\sum Z_i;$$

$$M_x + \sum M_{xi} = 0; \quad M_x = -\sum M_{xi};$$

$$M_y + \sum M_{yi} = 0; \quad M_y = -\sum M_{yi};$$

$$M_z + \sum M_{zi} = 0; \quad M_z = -\sum M_{zi}.$$

- **1.7. Biểu đồ nội lực.**

Quy ước về dấu của các thành phần nội lực



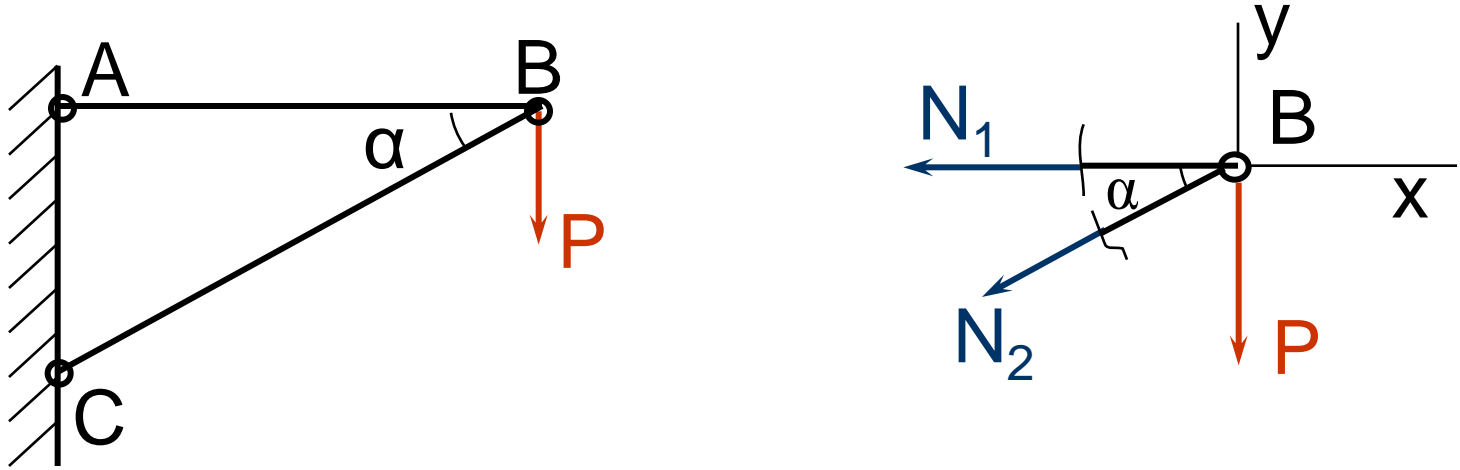
Lực dọc có giá trị dương khi gây ra biến dạng kéo và giá trị âm khi gây ra biến dạng nén;

Lực ngang Q có giá trị dương khi có tác dụng quay phần được xét theo chiều kim đồng hồ và giá trị âm khi quay phần được xét quay ngược chiều kim đồng hồ.

Momen uốn có giá trị dương nếu có tác dụng làm cho những thớ dọc phía trên chịu nén và có giá trị âm khi những thớ dọc phía trên chịu kéo.

Momen xoắn: dấu được lựa chọn tùy ý.

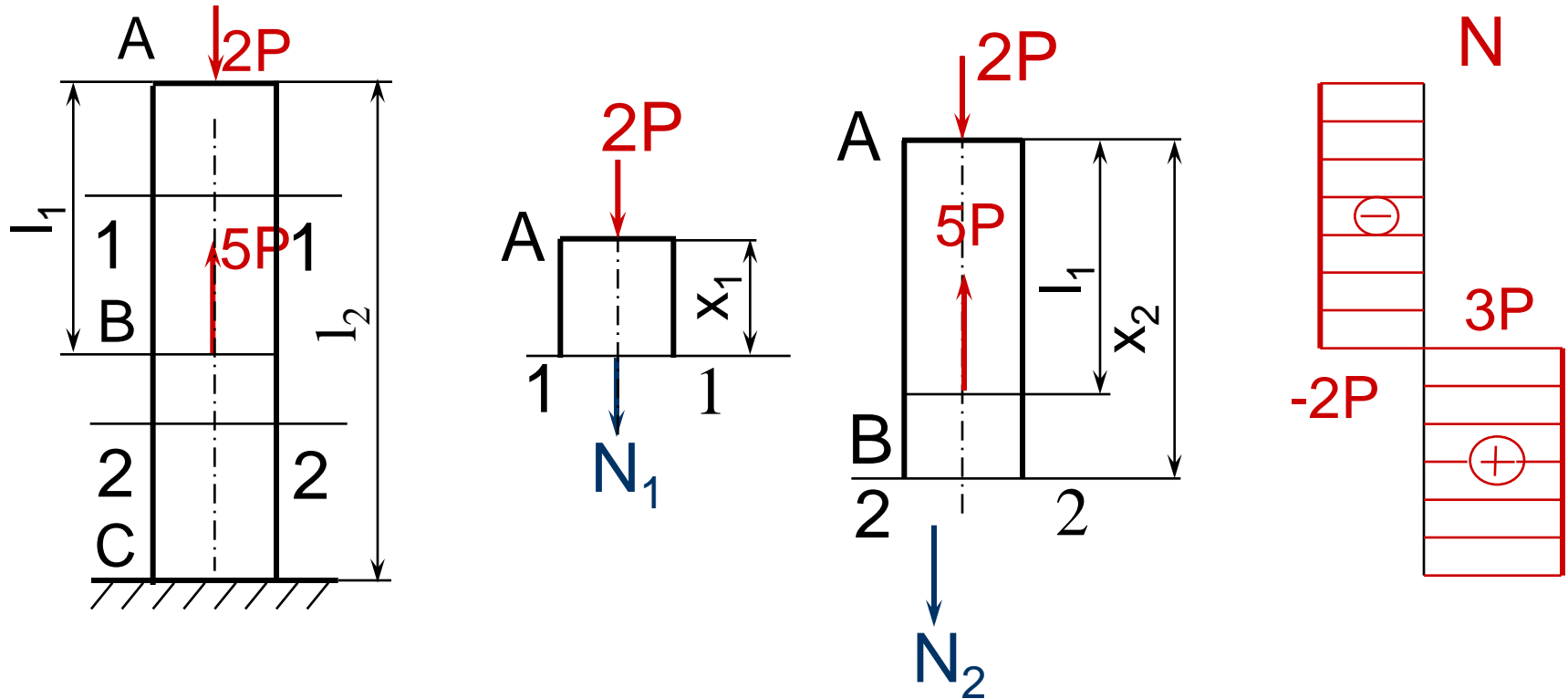
Thí dụ 1.1. Xác định nội lực trong các thanh 1 và 2 của hệ chịu lực P như hình vẽ khi $\alpha=30^\circ$.



$$-N_2 \sin \alpha - P = 0; \quad N_2 = -\frac{P}{\sin \alpha} = -2P;$$

$$N_1 = -N_2 \cos \alpha = -(-2P) \frac{\sqrt{3}}{2} = P\sqrt{3}.$$

- **Thí dụ 1. 2.** Vẽ biểu đồ nội lực của thanh chịu kéo, nén như hình vẽ.



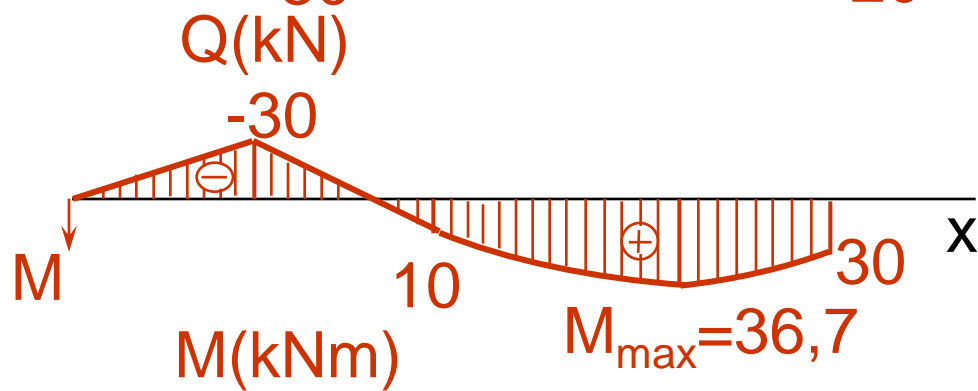
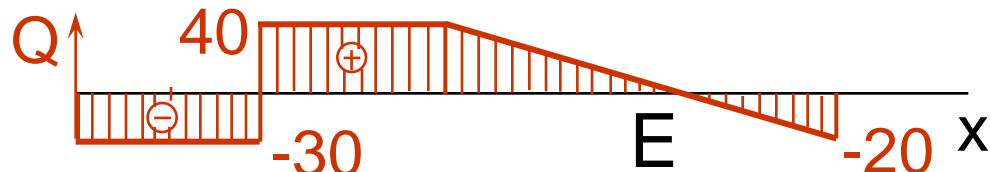
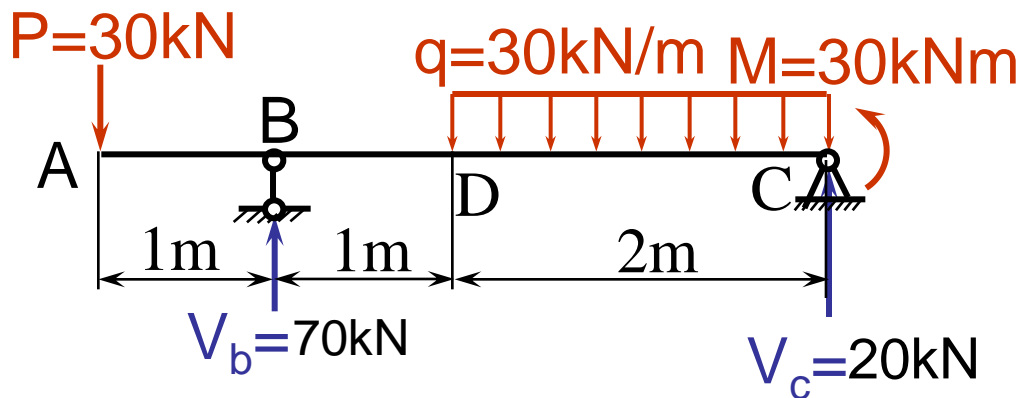
Đoạn AB: $0 \leq x_1 \leq l_1$; $N_1 = -2P$.

Đoạn BC $l_1 \leq x_2 \leq l_2$

$$N_2 = -2P + 5P = 3P.$$

• Thí dụ 1.3

ngang của dầm trên hình vẽ



Kiểm tra: $-P+V_b-q \cdot 2+V_c=0$.

t

$$\Sigma M_c=0=$$

$$P \cdot 4 - V_b \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1 + M;$$

$$V_b = \frac{4P + 2q + M}{3} =$$

$$\frac{4 \cdot 30 + 2 \cdot 30 + 30}{3} = 70\text{kN}.$$

$$\Sigma M_B=0=$$

$$P \cdot 1 - q \cdot 2 \cdot 2 + M + V_c \cdot 3;$$

$$V_c = \frac{4q - P - M}{3} =$$

$$\frac{4 \cdot 30 - 30 - 30}{3} = 20\text{kN}.$$

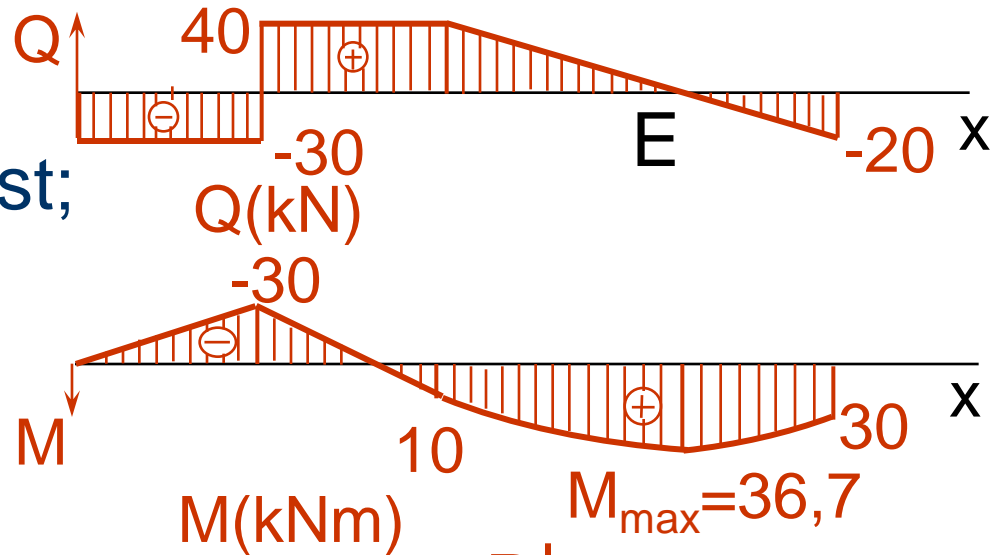
Đoạn AB ($0 \leq x_1 \leq 1\text{m}$)

$$Q_1 = -P = -30\text{kN} = \text{const};$$

$$M_1 = -Px_1;$$

$$\text{ở } A \ x_1=0; \ M_1=0;$$

$$\text{ở } B \ x_1=1\text{m}; \ M_1=-30\text{kNm}.$$



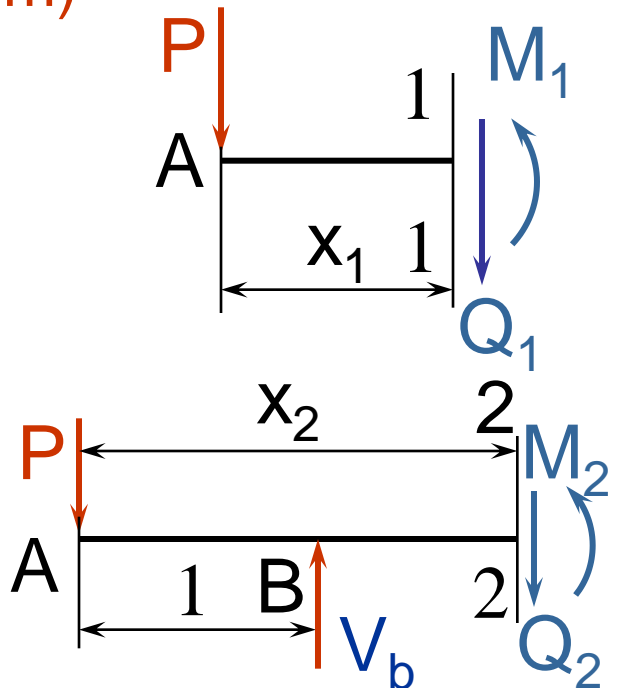
Đoạn BD ($1\text{m} \leq x_2 \leq 2\text{m}$)

$$Q_2 = -P + V_B = -30 + 70 = 40\text{ kN} = \text{const}.$$

$$M_2 = -Px_2 + V_b(x_2 - 1) = -30x_2 + 70(x_2 - 1).$$

$$\text{ở } B: \ x_2 = 1\text{m}; \ M_2 = -30\text{ kNm};$$

$$\text{ở } D: \ x_2 = 2\text{m}; \ M_2 = 10\text{ kNm}.$$



Đoạn DC ($2m \leq x_3 \leq 4m$)

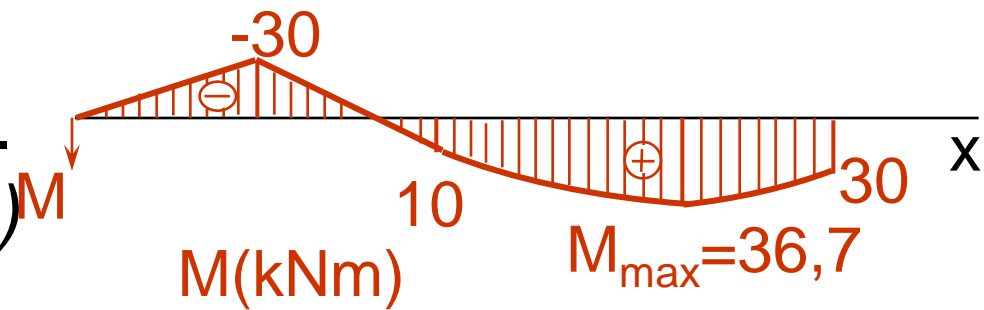
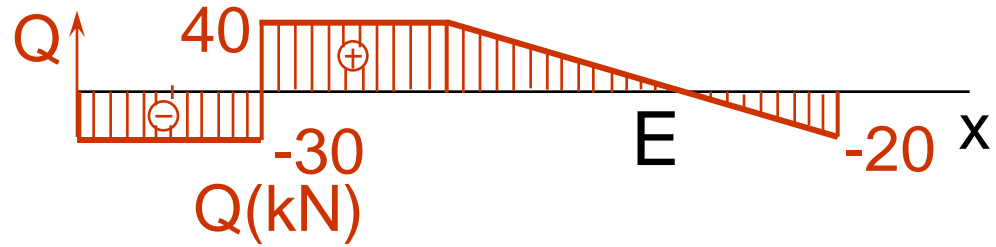
$$Q_3 = -P + V_B - q(x_3 - 2)$$

$$= 40 - 30(x_3 - 2).$$

ở D: $x_3 = 2m$; $Q_3 = 40 \text{ kN}$;

ở C: $x_3 = 4m$; $Q_3 = -20 \text{ kN}$.

ở E: $Q = 0 = 40 - 30(x_3 - 2)$
 $\rightarrow x_3 = 3,33m$



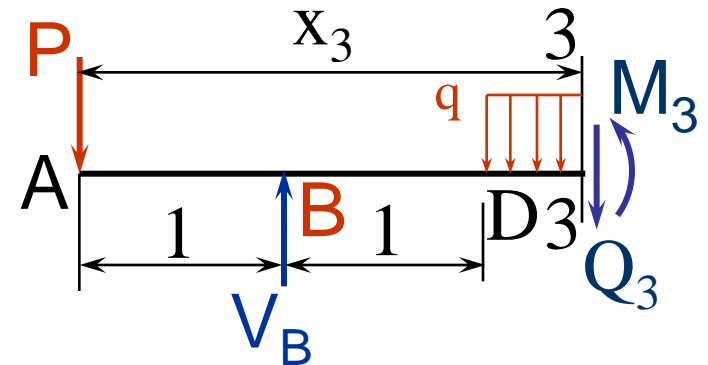
$$M_3 = -Px_3 + V_b(x_3 - 1) - q \frac{(x_3 - 2)^2}{2}$$

ở D $x_3 = 2m$; $M_3 = 10 \text{ kNm}$;

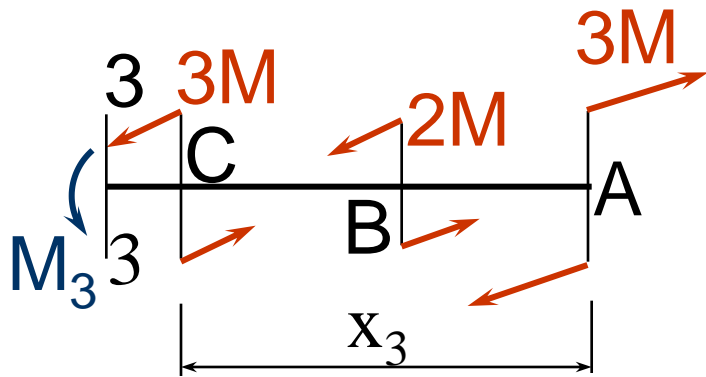
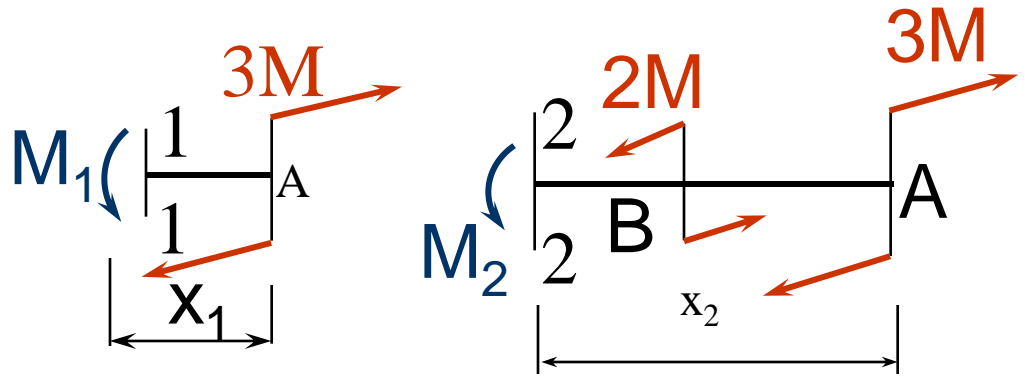
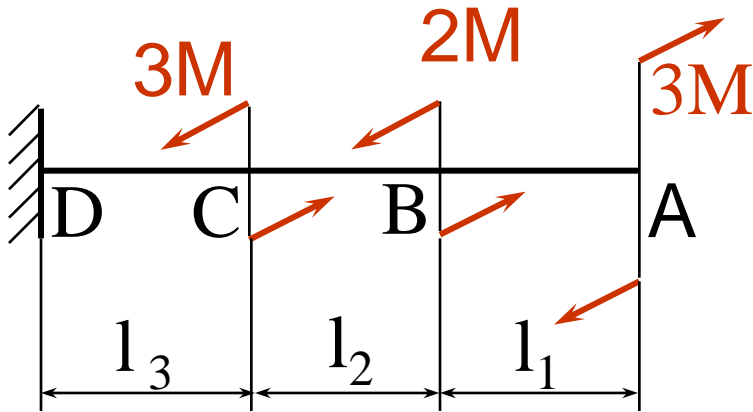
ở C $x_3 = 4m$; $M_3 = 30 \text{ kNm}$;

ở E $x_3 = 3,33m$;

$M_3 = M_{max} = 36,7 \text{ kNm}$.



Thí dụ 1. 4. Vẽ biểu đồ momen xoắn của thanh chịu lực như hình vẽ.



Đoạn AB $0 \leq x_1 \leq l_1$:

$$M_1 = 3M = \text{const.}$$

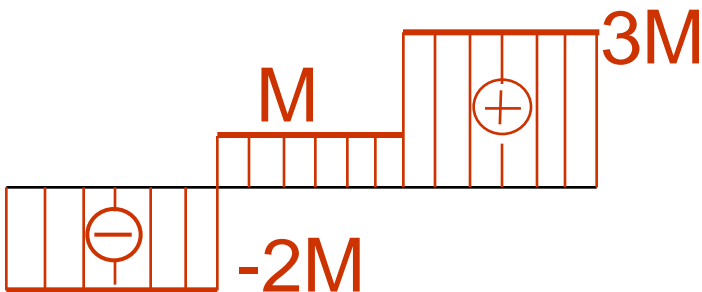
Đoạn BC $l_1 \leq x_2 \leq l_1 + l_2$;

$$M_2 = 3M - 2M = M = \text{const.}$$

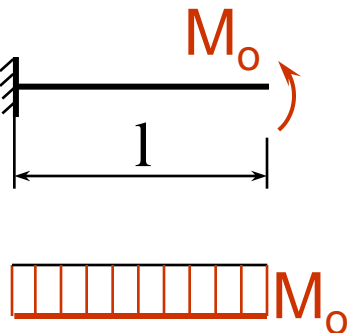
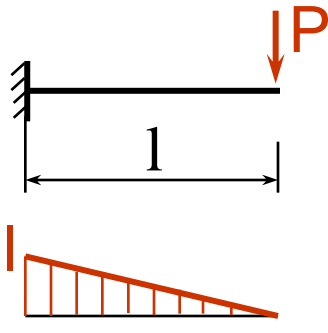
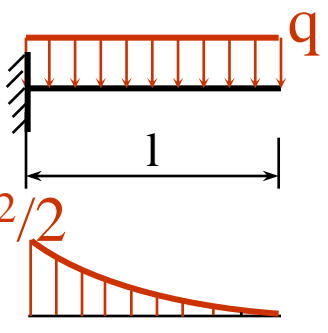
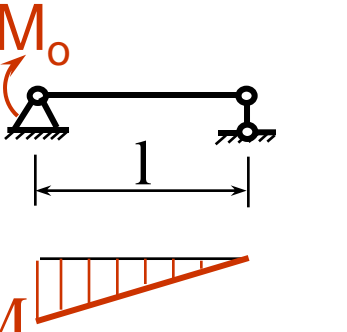
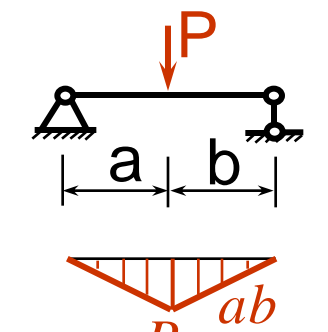
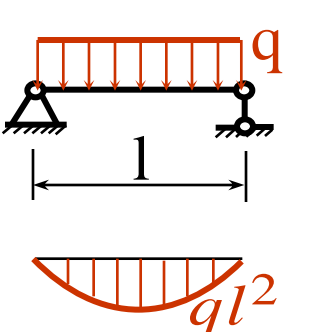
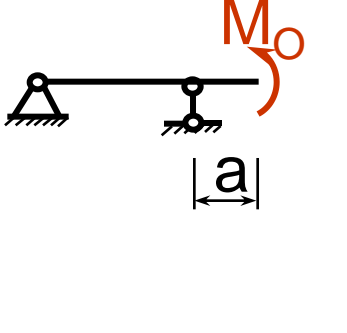
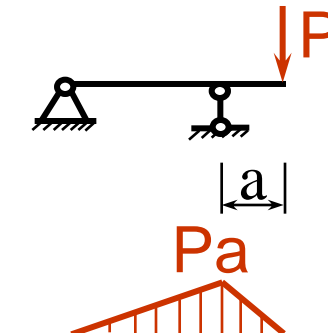
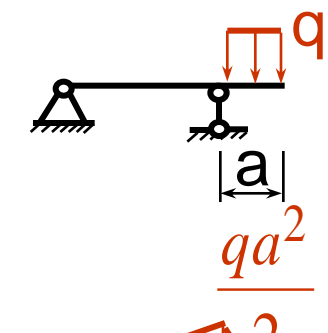
Đoạn CD $l_1 + l_2 \leq x_3 \leq l_1 + l_2 + l_3$.

$$M_3 = 3M - 2M - 3M$$

$$= -2M = \text{const.}$$



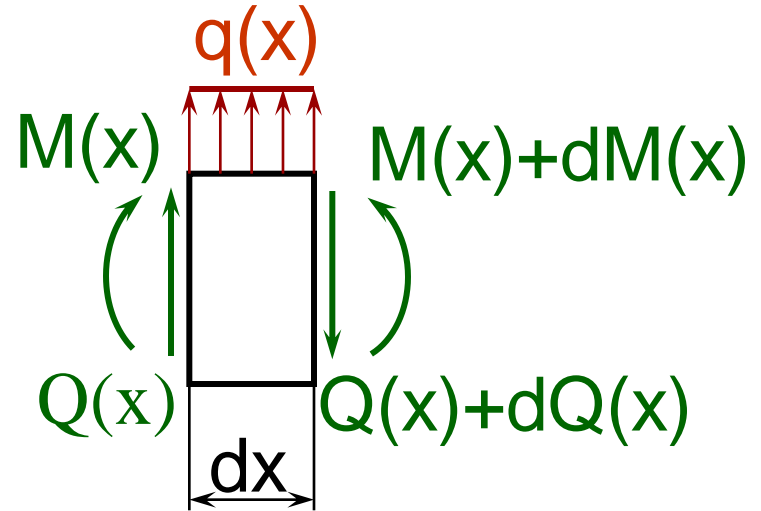
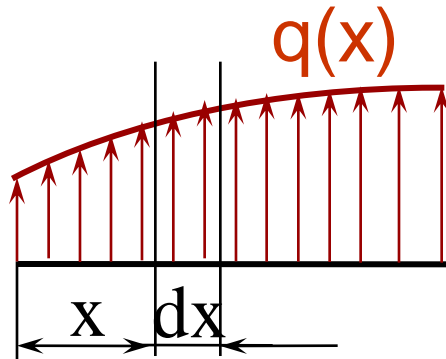
Bảng 1

| | | |
|--|--|---|
|  <p> M_o l M_o </p> |  <p> P l P </p> |  <p> q l $ql^2/2$ </p> |
|  <p> M_o l M_o </p> |  <p> P a b l $P \frac{ab}{a+b}$ </p> |  <p> q l $\frac{ql^2}{8}$ </p> |
|  <p> M_o a M_o </p> |  <p> P a Pa </p> |  <p> q a $\frac{qa^2}{2}$ </p> |

- 1.8. Quan hệ giữa cường độ tải trọng, lực cắt ngang và momen uốn.**

$$Q(x) + q(x)dx - [Q(x) + dQ] = 0$$

$$q(x) = \frac{dQ(x)}{dx}$$



$$- [Q(x) + dQ]dx + M(x) + dM(x) - M(x) + q(x)dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad q(x) = \frac{dQ(x)}{dx} = \frac{d^2M(x)}{dx^2} \quad (1.1)$$

Đạo hàm bậc hai của momen uốn theo hoành độ x bằng lực cắt ngang theo hoành độ x và bằng cường độ của lực phân bố.

Bước nhảy của biểu đồ momen uốn, lực cắt và các tải trọng tập trung.

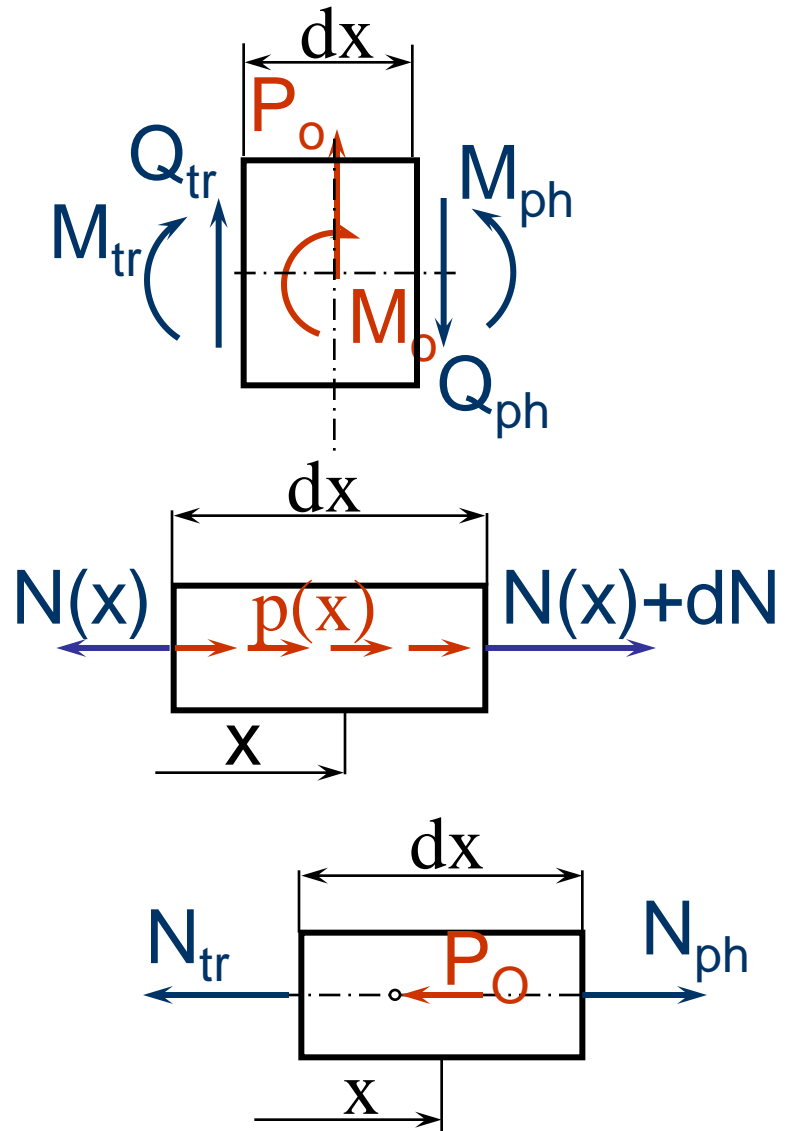
$$\Delta M = M_{ph} - M_{tr} = M_0; \quad (1.2)$$

$$\Delta Q = Q_{ph} - Q_{tr} = P_0.$$

$$-N(x) + p(x)dx + N(x) + dN = 0;$$

$$p(x) = \frac{dN}{dx}; \quad (1.3)$$

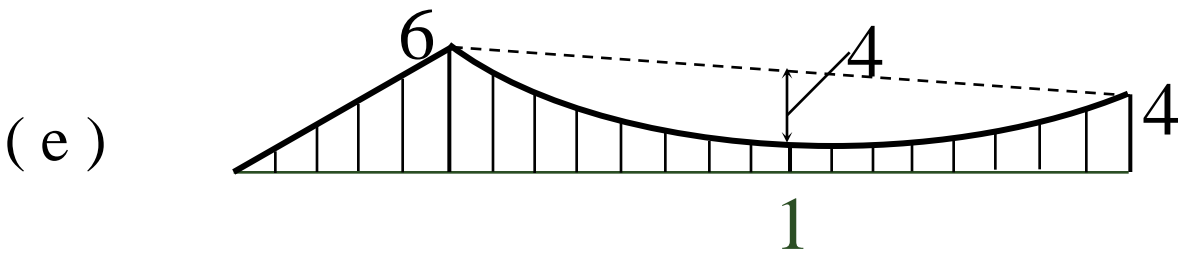
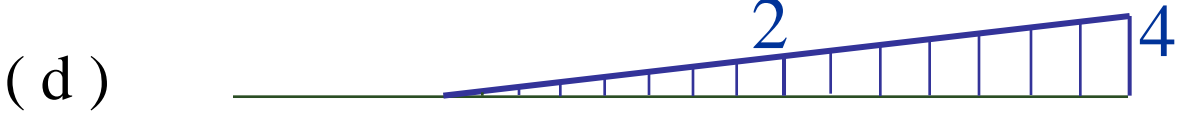
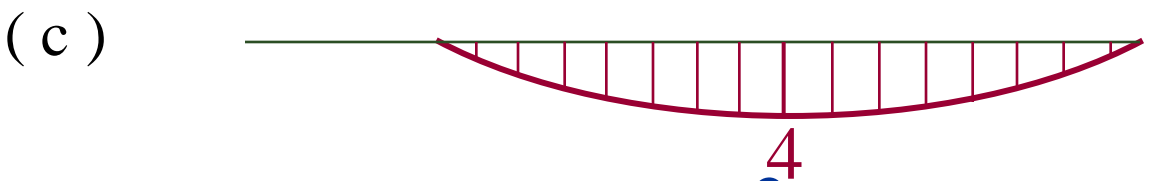
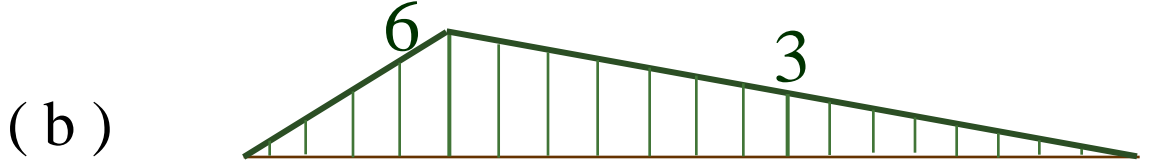
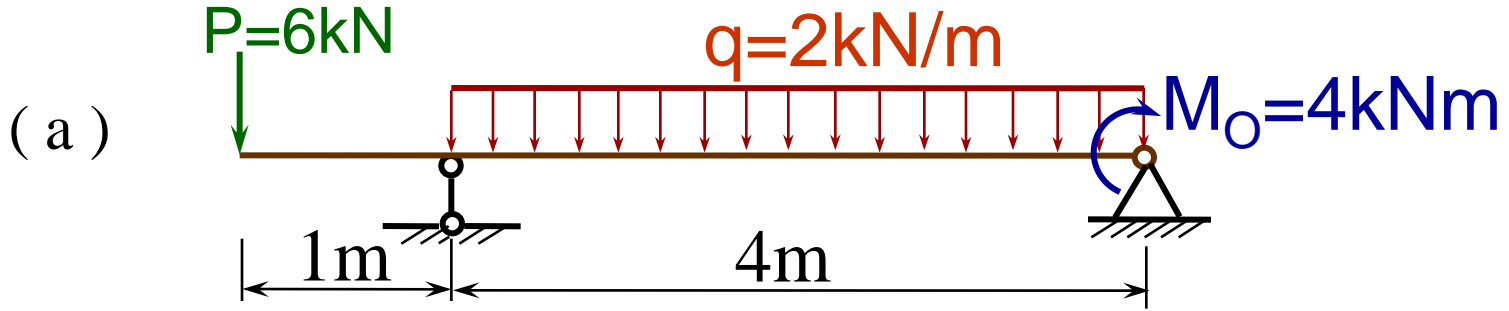
$$\Delta N = N_{ph} - N_{tr} = P_0. \quad (1.4)$$



• **1.9. Vẽ biểu đồ nội lực theo nhận xét**

1.9.1. Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng.

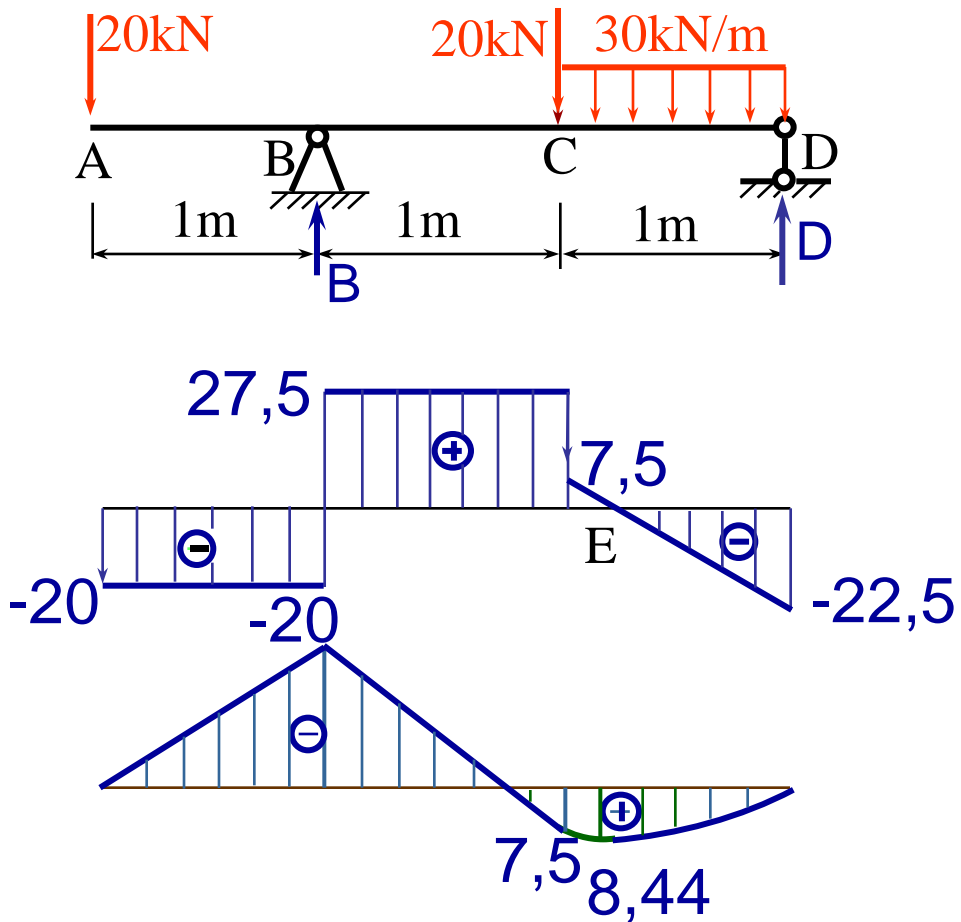
Thí dụ 1.5. Vẽ biểu đồ momen uốn của dầm.



• **1.9.2. Vẽ theo từng mặt cắt.**

Theo tải trọng đã cho và theo liên hệ vi phân (1. 1) sẽ nhận xét dạng của các biểu đồ và từ đó xác định số điểm cần thiết để vẽ được từng đoạn biểu đồ nội lực.

Thí dụ 1.6. Vẽ biểu đồ momen uốn và lực ngang của dầm chịu tải trọng như hình vẽ.



Thí dụ 1.6. Vẽ biểu đồ momen uốn và lực ngang của dầm chịu tải trọng như hình vẽ.

$$\Sigma M_B = 0; D = 22,5 \text{ kN};$$

$$\Sigma M_D = 0; B = 47,5 \text{ kN}.$$

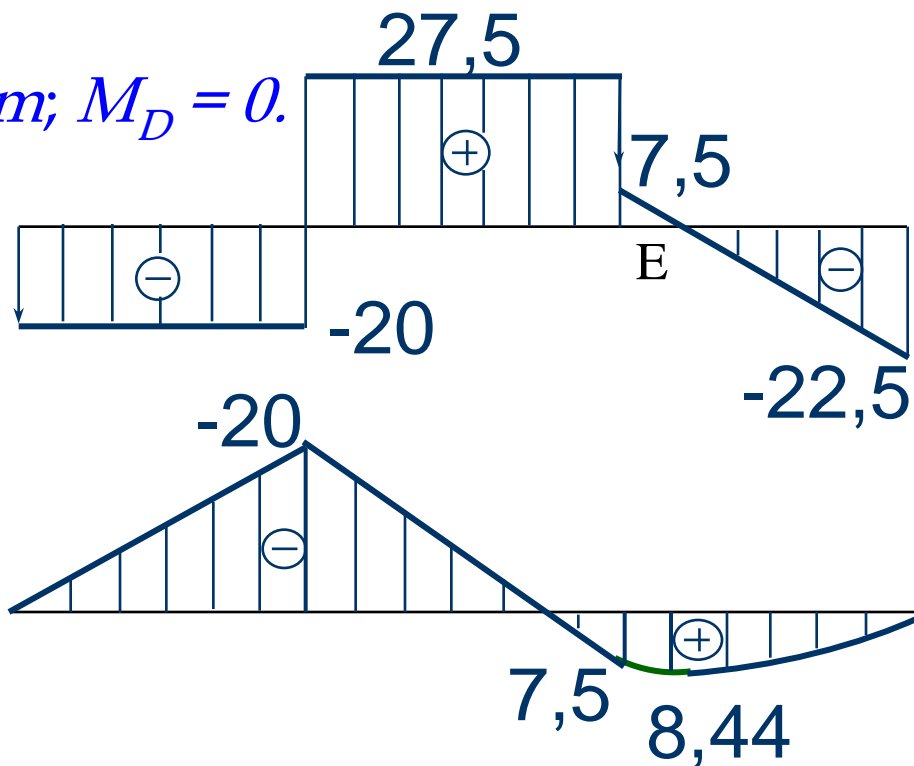
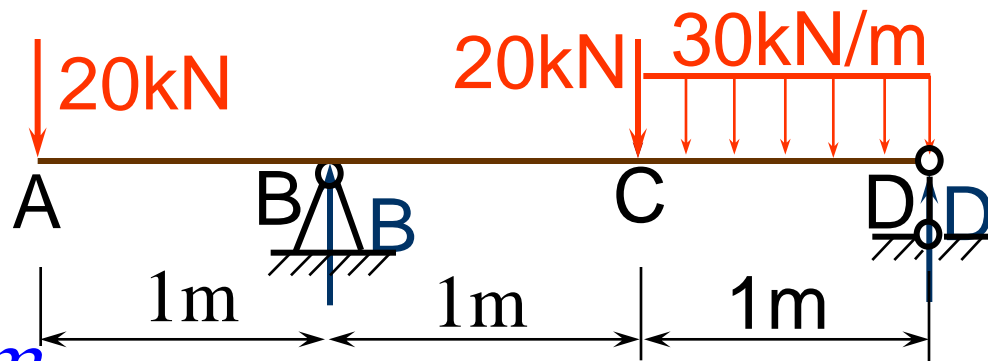
$$M_A = 0; M_B = -20 \cdot 1 = -20 \text{ kNm}.$$

$$M_C = -20 \cdot 2 + 47,5 \cdot 1 = 7,5 \text{ kNm}; M_D = 0.$$

$$Q = -D + qx_E = 0;$$

$$x_E = \frac{D}{q} = \frac{22,5}{30} = 0,75.$$

$$M_{max} = Dx_E - q \frac{x_E^2}{2} = 8,44 \text{ kNm}$$

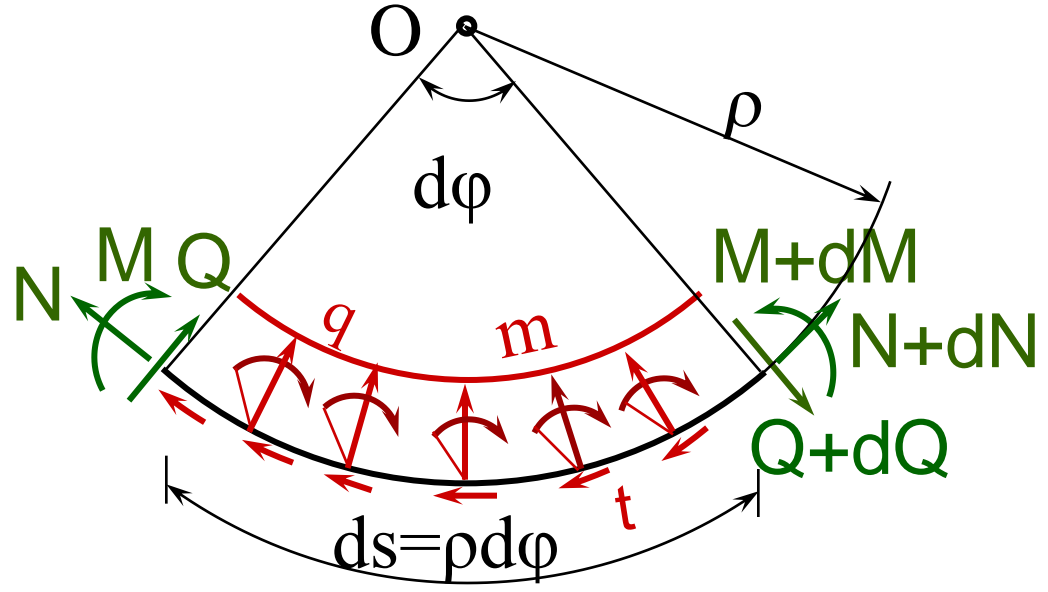


1.10. Quan hệ giữa tải trọng, lực cắt ngang và momen uốn trong thanh cong phẳng

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{Q}{\rho} + t;$$

$$\frac{dQ}{ds} = \frac{N}{\rho} + q;$$

$$\frac{dM}{ds} = Q + m.$$



ρ - bán kính cong của trục thanh;

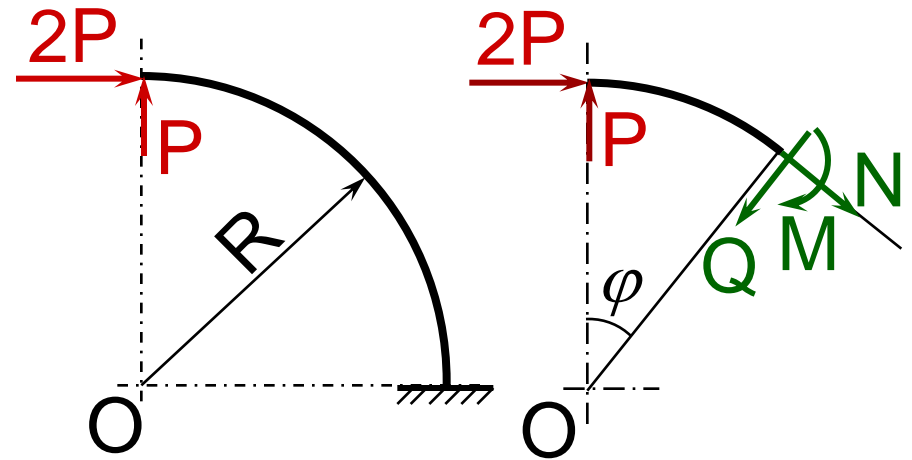
ds - chiều dài của đoạn trục thanh;

t, q, m - cường độ tải trọng ngang, dọc và momen uốn phân bố.

N, Q, M - lực dọc, lực ngang, momen uốn;

Đối với thanh thẳng, $\rho = \infty$, $ds = dx$,

Thí dụ 1.7. Vẽ biểu đồ lực ngang, lực dọc, momen uốn của thanh cong chịu tải như hình vẽ.



$$N + 2P\cos\varphi - P\sin\varphi = 0;$$

$$N = P(\sin\varphi - 2\cos\varphi);$$

$$Q - P\cos\varphi - 2P\sin\varphi = 0;$$

$$\rightarrow Q = P(2\sin\varphi + \cos\varphi);$$

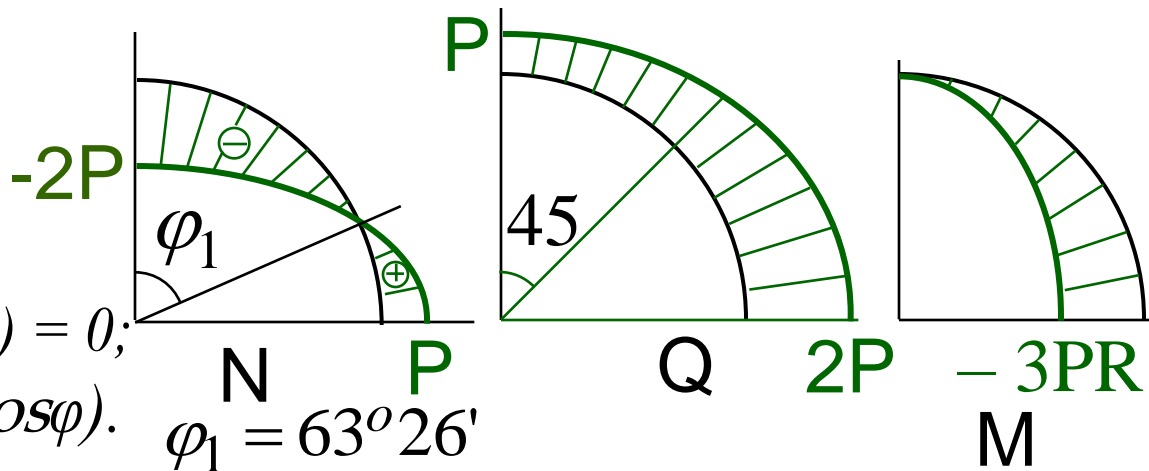
$$M + PR\sin\varphi + 2PR(1 - \cos\varphi) = 0;$$

$$M = -PR(2 + \sin\varphi - 2\cos\varphi).$$

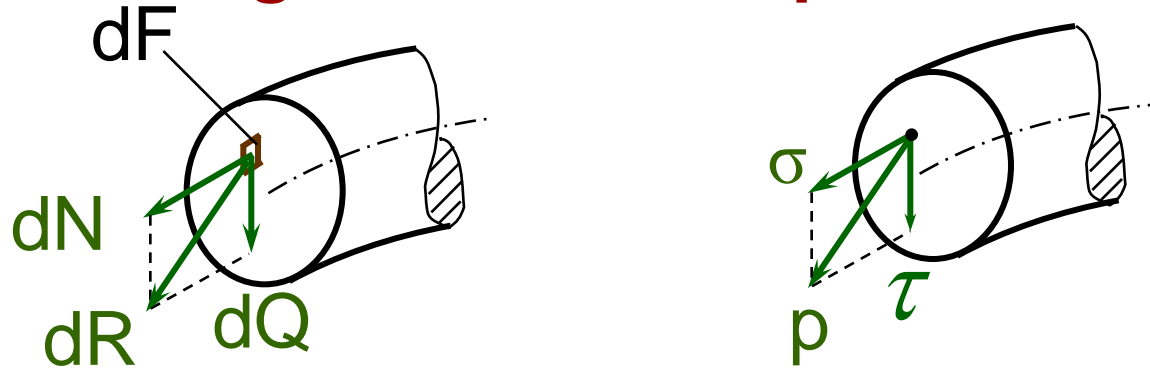
$$\varphi = 0; N = -2P; Q = P; M = 0;$$

$$\varphi = 45^\circ; N = -0,707P; Q = 2,12P; M = 1,29PR;$$

$$\varphi = 90^\circ; N = P; Q = 2P; M = -3PR; \quad \varphi = \varphi_1 = 63^\circ 26'; N = 0.$$



- **1.11. Ứng suất - Điều kiện bền.**



$$\sigma = \frac{dN}{dF}; \quad \tau = \frac{dQ}{dF}; \quad p = \frac{dR}{dF};$$

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}; \quad dR = \sqrt{dN^2 + dQ^2}.$$

(1.6)

Đơn vị đo lường của ứng suất là Pa (N/m^2) và MPa.

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \quad (1.7)$$

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (1.8)$$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{gh}}{n} \quad (1.9)$$

n - hệ số an toàn.

□ 1. 12. Biến dạng – điều kiện cứng.

Mọi cách làm biến đổi hình dáng và kích thước đều có thể quy về hai loại biến dạng: *biến dạng dài* và

Biến dạng góc

Δl – độ dãn tuyệt đối
(độ co tuyệt đối);

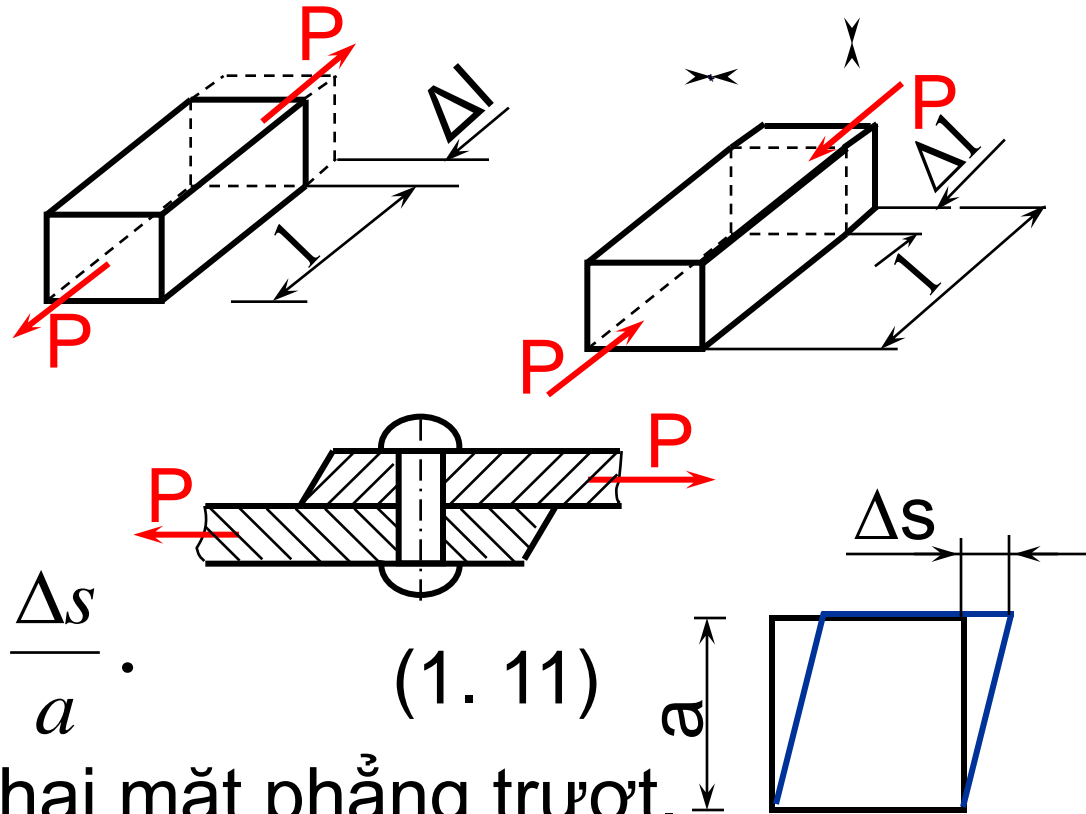
ε - độ dãn tương đối:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \cdot (1. 10)$$

Độ trượt tương đối $\gamma = \frac{\Delta s}{a} \cdot (1. 11)$

a – khoảng cách giữa hai mặt phẳng trượt.

Điều kiện cứng $\Delta l \leq [\Delta l]. (1. 12)$



Độ trượt tương đối :

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a} . \quad (1. 11)$$

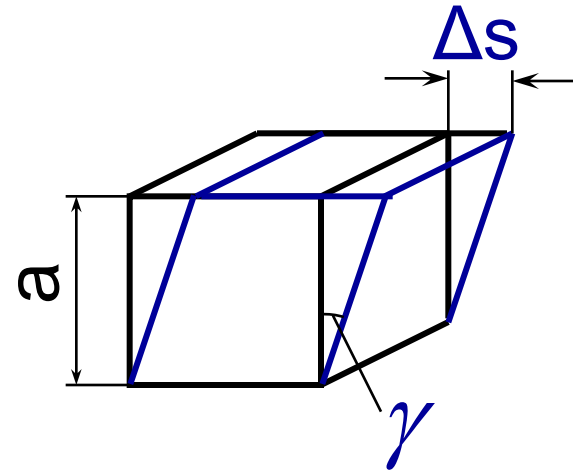
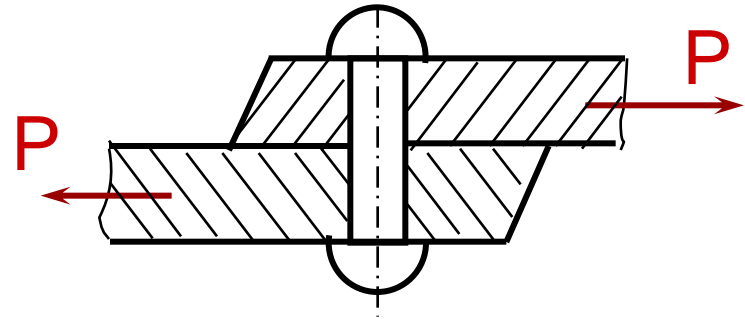
Δs - độ trượt tuyệt đối ;

a - khoảng cách giữa
hai mặt phẳng trượt .

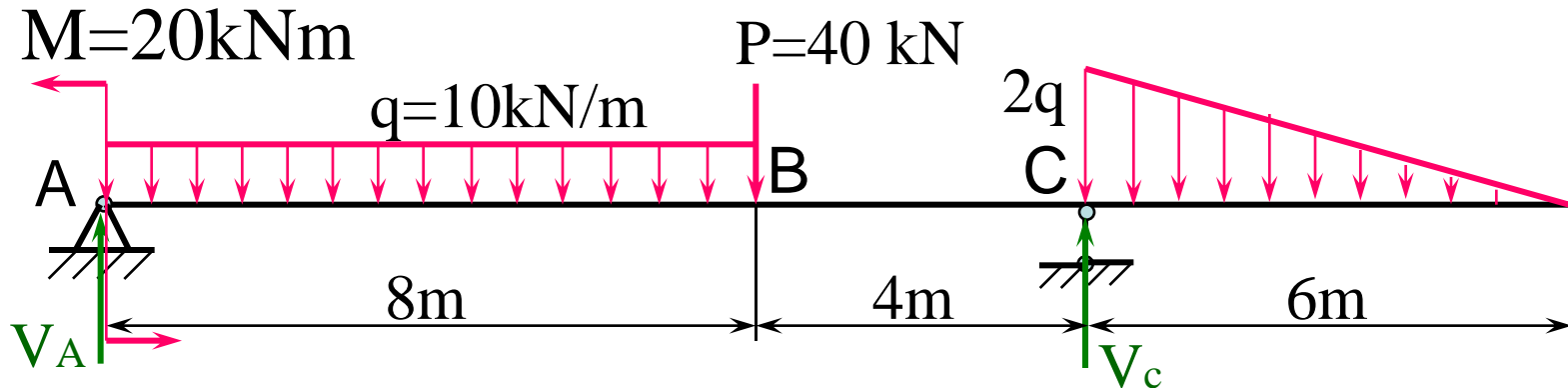
Điều kiện cứng :

$$\Delta l \leq [\Delta l] .$$
$$\gamma \leq [\gamma]$$

$$(1. 12)$$



BÀI TẬP SỐ 1A-VỀ BIỂU ĐỒ NỘI LỰC



$$\sum M_C = -20 + V_A \cdot 12 - 10 \cdot 8 \cdot 8 - 40 \cdot 4 + \frac{2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2}{2} = 0; V_A = 58,33\text{kN}.$$

$$\sum M_A = -20 + 10 \cdot 8 \cdot 4 + 40 \cdot 8 - V_C \cdot 12 + \frac{2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 14}{2} = 0; V_C = 121,67\text{kN}.$$

$$M_A = -20\text{kNm}; M_B = -20 - 10 \cdot 8 \cdot 4 + 58,33 \cdot 8 = 126,64;$$

$$Q_A = 58,33\text{kN};$$

$$Q_B = 58,33 - 10 \cdot 8 = -21,67\text{kN};$$

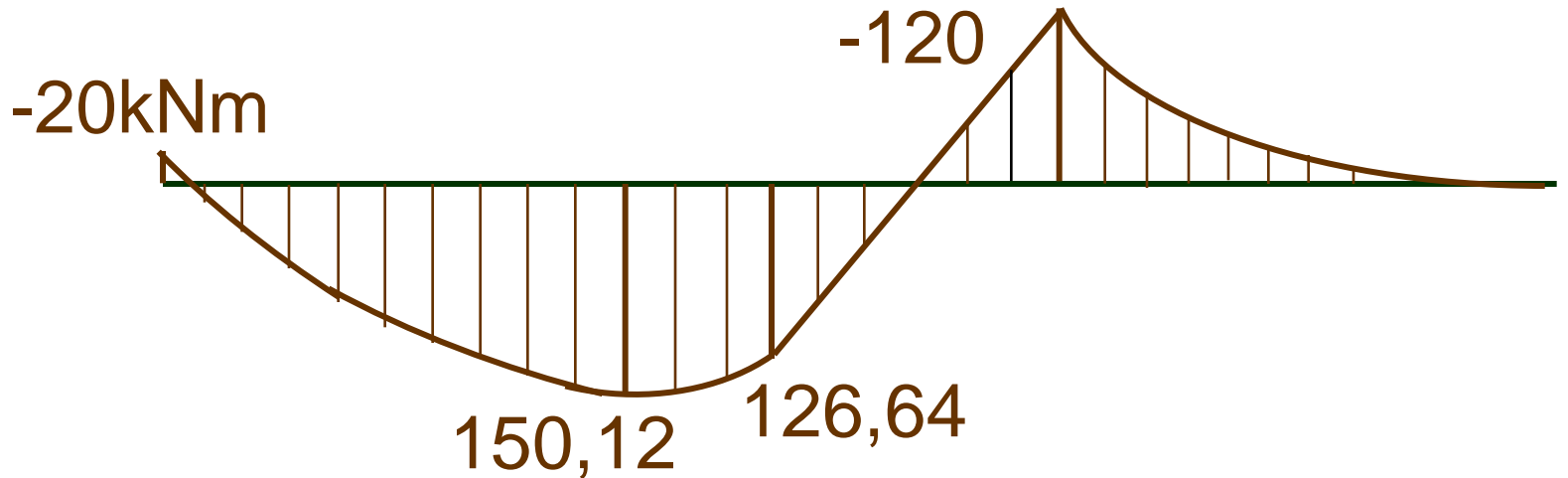
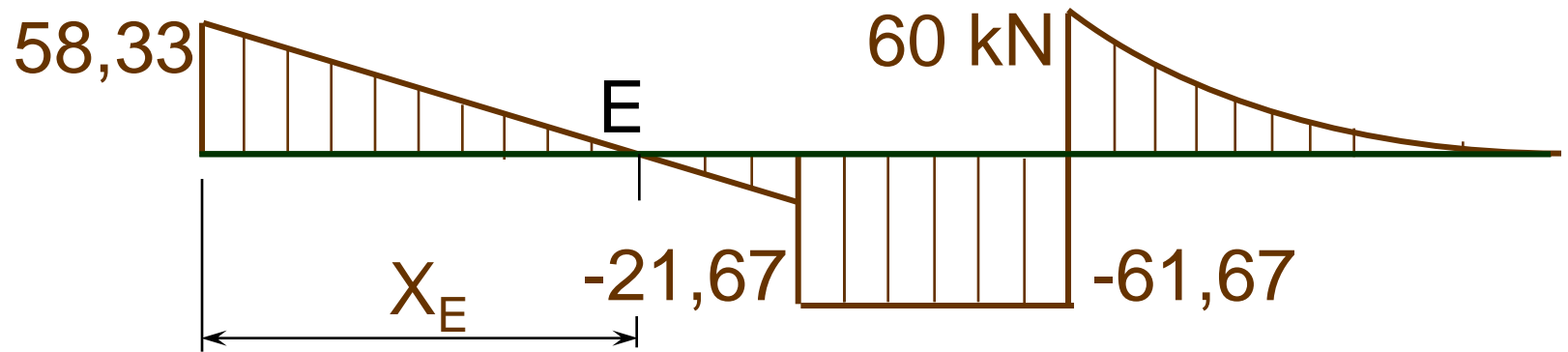
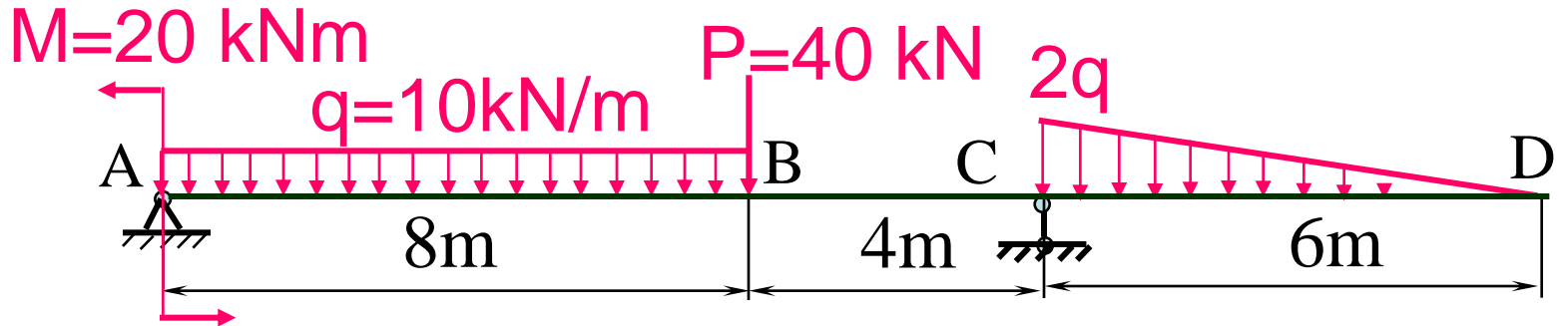
$$Q_C = \frac{2 \cdot 10 \cdot 6}{2} = 60\text{kN}.$$

$$Q_{B'} = 58,33 - 10 \cdot 8 - 40 = -61,67\text{kN}. \quad Q_E = V_A - qx_E = 0; \quad x_E = 5,833\text{m}$$

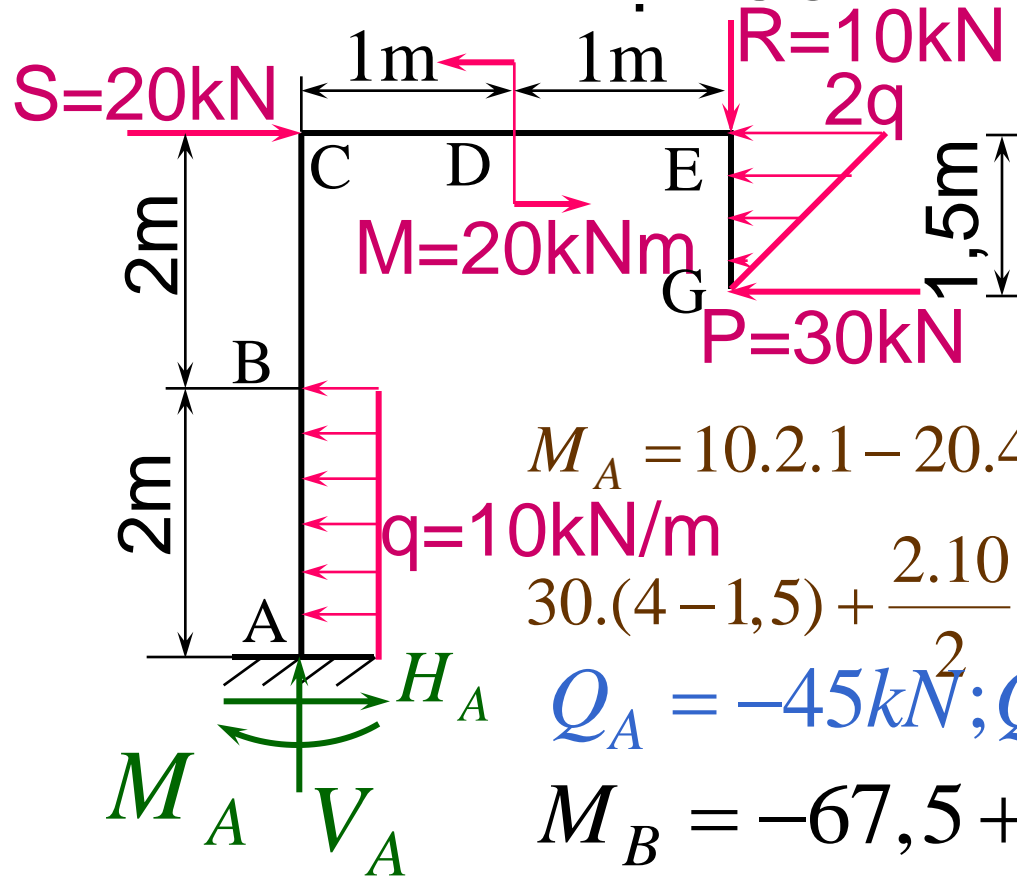
$$M_C = \frac{1}{2} \cdot 2q \cdot c \cdot \frac{c}{3} = -120\text{kNm}.$$

$$M_E = -M + V_A x_E - q \frac{x_E^2}{2} = 150,12\text{kNm};$$

BÀI TẬP SỐ 1A - VẼ BIỂU ĐỒ NỘI LỰC



BÀI TẬP SỐ 1B - VẼ BIỂU ĐỒ NỘI LỰC



$$H_A = 10.2 - 20 + 30 + \frac{2.10}{2} \cdot 1.5 = 45kN.$$

$$M_A = 10.2.1 - 20.4 + 20 - 10.2 + 30.(4 - 1.5) + \frac{2.10}{2} \cdot 1.5(4 - 0.5) = 67.5kNm;$$

$$V_A = 10kN;$$

$$Q_A = -45kN; Q_B = -45 + 10.2 = -25kN;$$

$$M_B = -67.5 + 45.2 - 10.2.1 = 2.5kNm;$$

$$M_C = -67.5 + 45.4 - 10.2.3 = 52.5kNm;$$

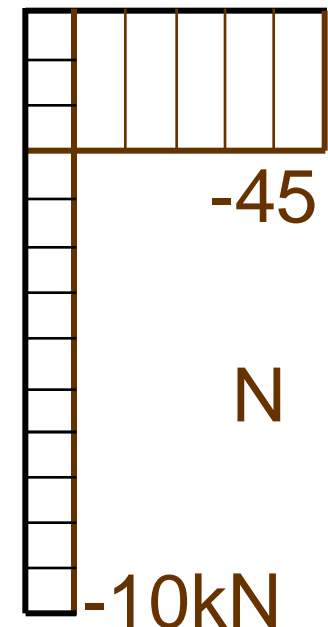
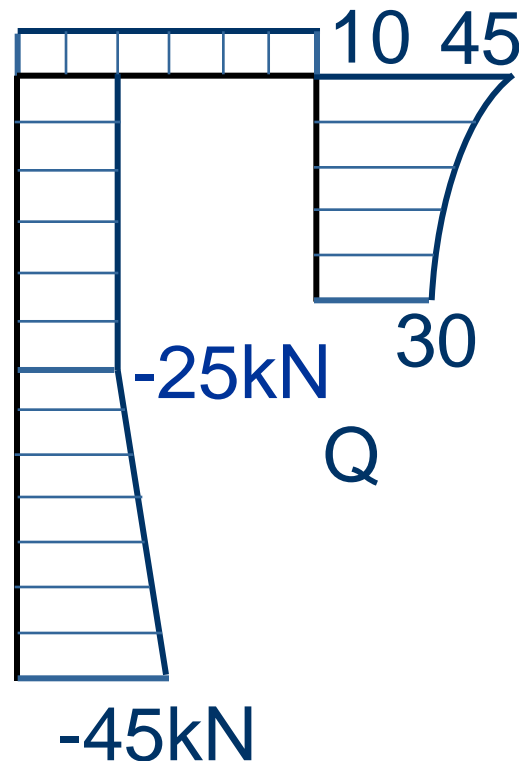
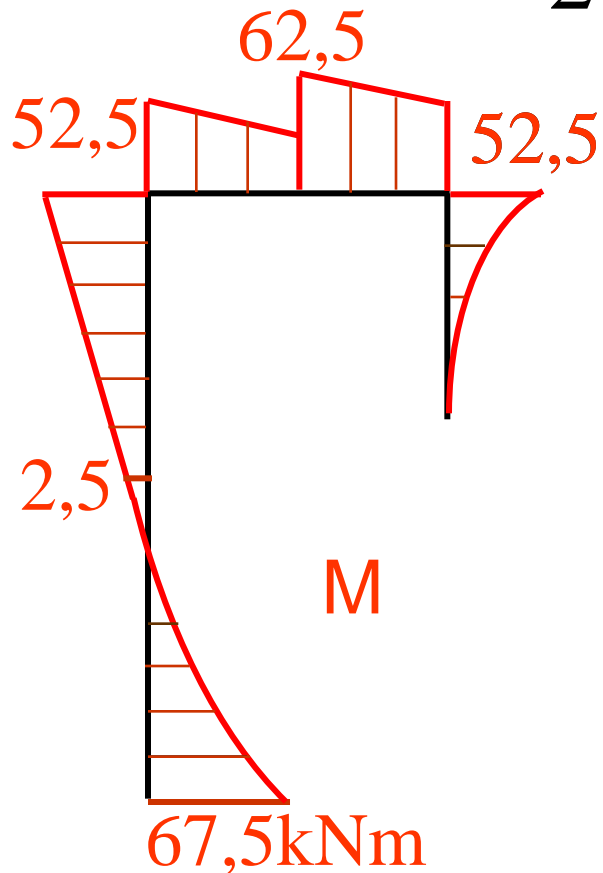
$$M_E = 30.1.5 + \frac{2.10}{2} \cdot 1.5.0.5 = 52.5kNm;$$

$$M_{D'} = 30.1.5 + \frac{2.10}{2} \cdot 1.5.0.5 + 10.1 = 62.5kNm;$$

$$Q_A = -45 \text{ kN} ; Q_B = -45 + 10.2 = -25 \text{ kN} ; Q_C = 10 \text{ kN} ;$$

$$Q_G = 30 \text{ kN} ; Q_E = 30 + \frac{2.10}{2} \cdot 1.5 = 45 \text{ kN} ;$$

$$N_D = -30 - \frac{2.10}{2} \cdot 1.5 = -45 \text{ kN} ; N_C = -10 \text{ kN} .$$

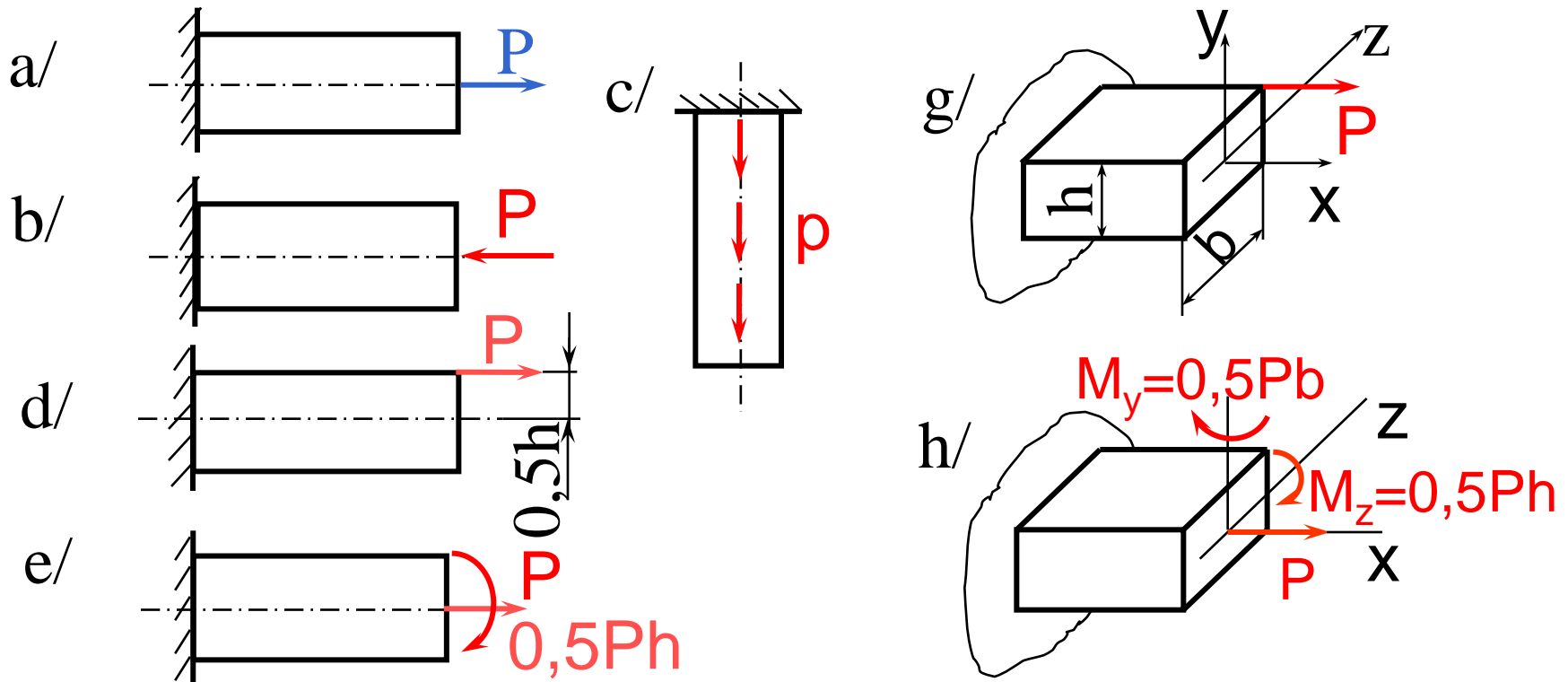


Chương 2

KÉO NÉN ĐÚNG TÂM

2. 1. Khái niệm .

Kéo (hay nén) đúng tâm là loại biến dạng trong đó trên mặt cắt ngang chỉ có **một thành phần lực dọc** (kéo hay nén) không có các thành phần nội lực khác .



• **2.2. Biểu đồ lực dọc N.**

Đoạn I: $0 < x_1 < 1m$

$$\sum X_i = 0; -N_1 + 6P = 0;$$

$$N_1 = 6P$$

Đoạn II: $1 \leq x_2 \leq 1,75m;$

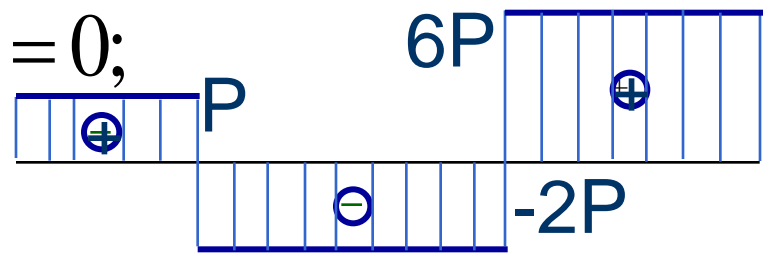
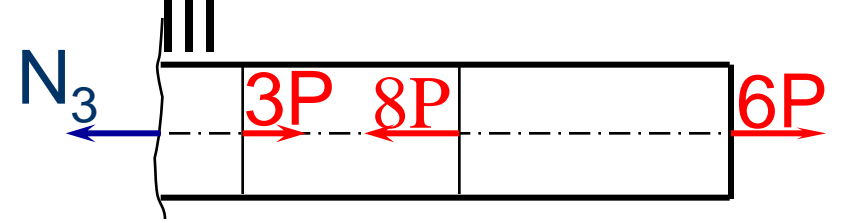
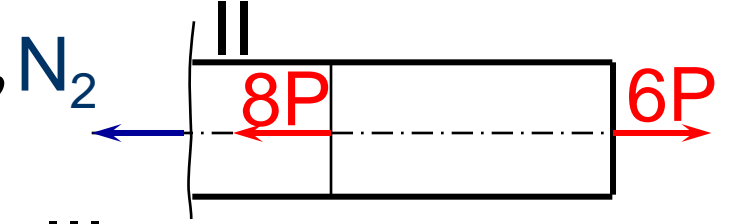
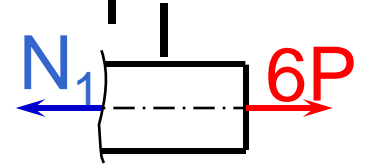
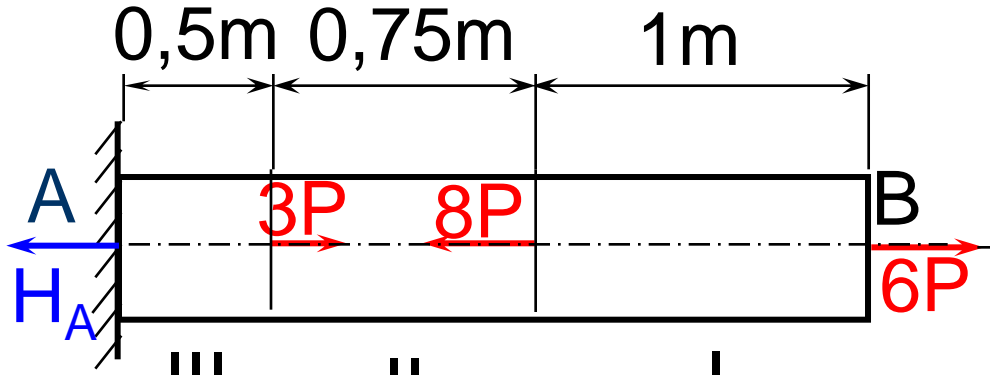
$$\sum X_i = 0; -N_2 - 8P + 6P = 0; N_2 = -2P$$

Đoạn III:

$1,75m \leq x_3 \leq 2,25m;$

$$\sum X_i = -N_3 + 3P - 8P + 6P = 0;$$

$$N_3 = P; A = P.$$



Thí dụ 2. 1. Vẽ biểu đồ lực dọc của thanh chịu lực như hình vẽ.

Đoạn I:

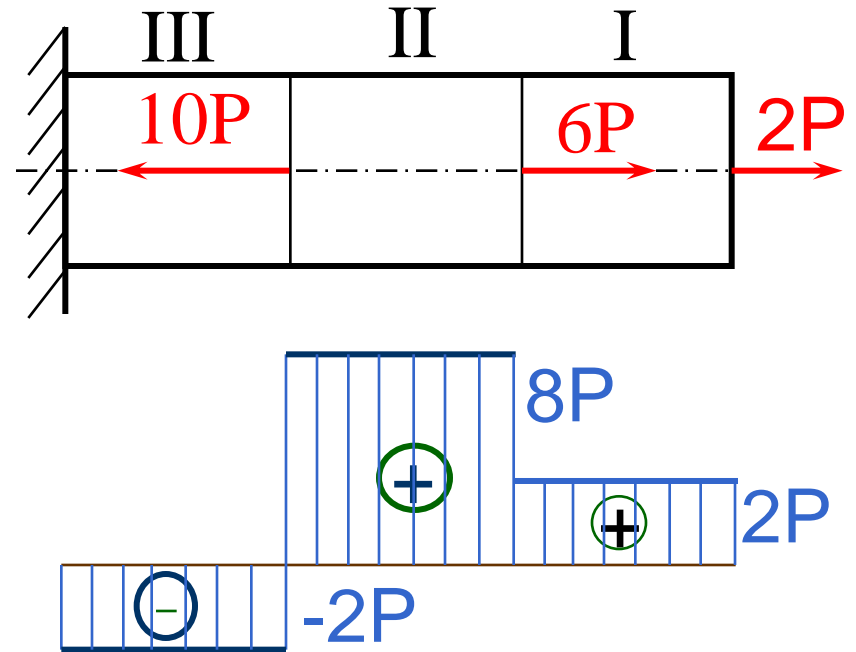
$$-N_1 + 2P = 0; N_1 = 2P.$$

Đoạn II:

$$-N_2 + 2P + 6P = 0; N_2 = 8P.$$

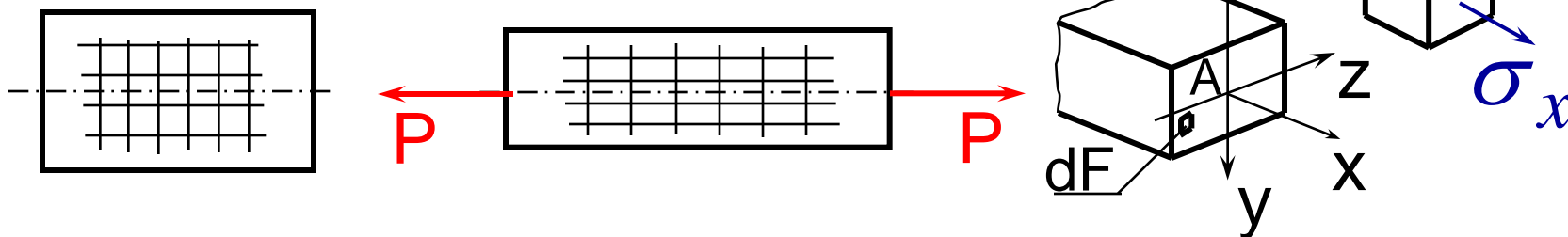
Đoạn III:

$$-N_3 + 2P + 6P - 10P = 0; N_3 = -2P.$$



• 2. 3. Ứng suất trên mặt cắt ngang.

Thí nghiệm và giả thuyết



1. Giả thuyết mặt cắt phẳng: mặt cắt ngang phẳng và vuông góc với trục thanh trước khi biến dạng thì sau khi biến dạng vẫn phẳng và vuông góc với trục thanh

2. Giả thuyết về các thứ dọc : trong quá trình biến dạng các thứ dọc không tác động tương hỗ lên nhau.

- trên mặt cắt ngang có ứng suất pháp.
- trên các mặt phân tử song song với trục thanh không có ứng suất pháp.

Phân tử được xét chịu kéo (hoặc nén) đơn do ứng suất pháp σ_x . Các thứ dọc dài nhau :

$$\varepsilon_x = \text{const} \quad ; \quad \sigma_x = E\varepsilon_x = \text{const.}$$

$$N_x = \int_F \sigma_x dF \quad . \quad \sigma_x = \frac{N_x}{F} \quad .$$

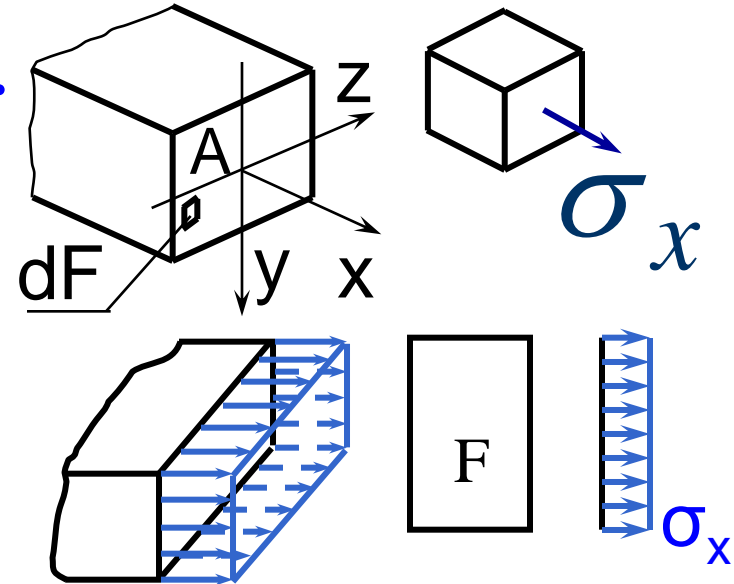
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \quad (2.1)$$

→ ba loại bài toán:

1. Kiểm tra độ bền (biết N, F):

2. Chọn mặt cắt ngang (biết N, $[\sigma]$)

3. Xác định tải trọng cho phép (biết F và $[\sigma]$):



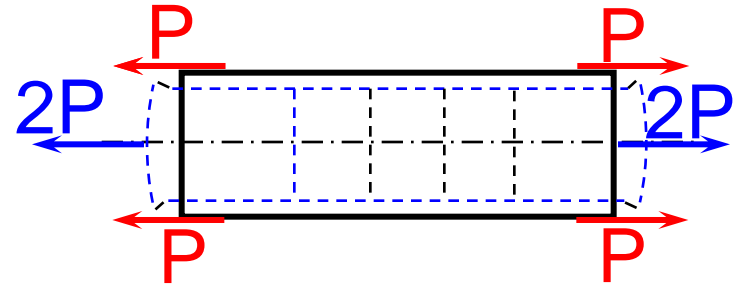
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \quad .$$

$$F \geq [F] = \frac{N}{[\sigma]} \quad .$$

$$[P] \leq N = [\sigma]F \quad .$$

Nguyên lý Xanh Vơ năng :

Sự phân bố của ứng suất và biến dạng của vật thể tại những miền xa nơi đặt lực sẽ không thay đổi nếu thay lực đã cho bằng một hệ lực tương đương.

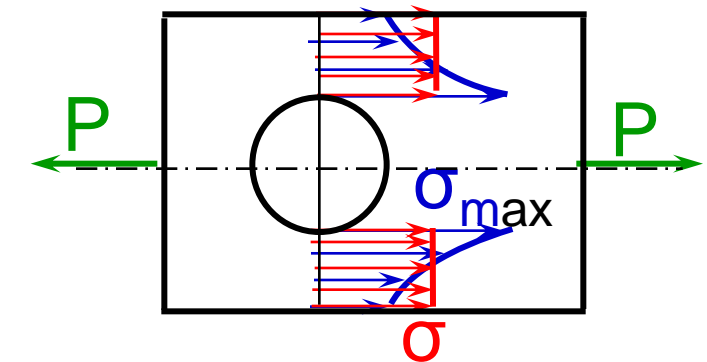


• Ứng suất tập trung.

$$\sigma = \frac{N_x}{F_0} \cdot \quad (N_x = P)$$

k - hệ số tập trung ứng suất.

F_0 - diện tích của mặt cắt bị giảm yếu;



$$\sigma_{\max} = k\sigma; \quad (2.2)$$

Điều kiện bền của thanh làm bằng vật liệu dẻo:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]; \quad (2.3)$$

Điều kiện bền đối với vật liệu giòn:

$$|\sigma_n| \leq [\sigma]_n; \quad \sigma_k \leq [\sigma]_k. \quad (2.4)$$

- **2.4. Biến dạng của thanh.**

- 2.4.1. Biến dạng dài dọc trục**

Biến dạng dài tương đối dọc trục:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EF}. \quad (2.5)$$

Biến dạng dài tuyệt đối

$$\Delta l = \int_l \varepsilon \cdot dx = \int_l \frac{N}{EF} dx. \quad (2.6) \quad \Delta l = \frac{N \cdot l}{EF}. \quad (2.7)$$

- 2.4.2. Biến dạng dài theo phương ngang.**

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (2.8)$$

ε' – biến dạng dài tương đối theo phương ngang;

μ – hệ số biến dạng ngang (hệ số Poatxông).

2.4.3. Các hằng số đàn hồi của vật liệu.

Xác định E và μ bằng thực nghiệm.

E đặc trưng độ cứng của vật liệu [lực/(chiều dài)²].

μ không thứ nguyên $0 \leq \mu \leq 0,5$.

| Vật liệu | E (kN/cm²) | μ |
|-----------------|---|-------------------------|
| Thép cán | $2,1 \cdot 10^4$ | 0,30 - 0,05 |
| Hợp kim nhôm | $7,0 \cdot 10^3$ | 0,30 |
| Đồng | $1,0 \cdot 10^4$ | 0,32 |
| Bê tông | $2,4 \cdot 10^3$ | 0,20 |
| Gỗ dọc thớ | $1,0 \cdot 10^3$ | 0,48 |
| Gỗ ngang thớ | $4,0 \cdot 10$ | 0,02 |
| Gạch | $7,0 \cdot 10^2$ | 0,25 |
| Cao su | 0,7 | 0,50 |

2.4.4. Chuyển vị của mặt cắt.

$$(2.7) \quad \longrightarrow \quad \Delta l = \frac{Pl}{EF} = \Delta_n \quad (N = P)$$

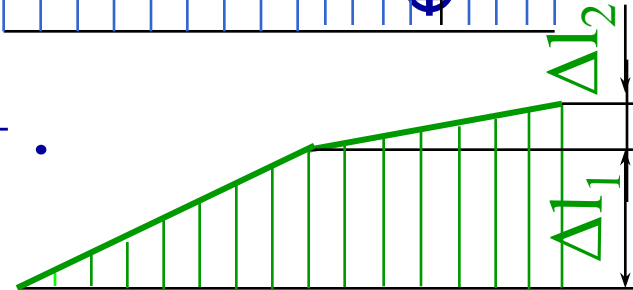
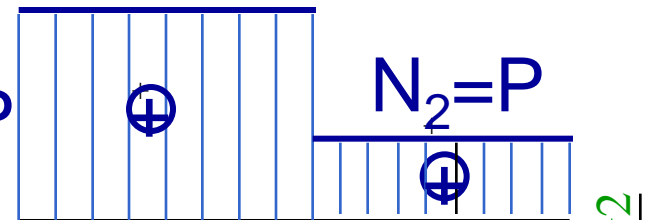
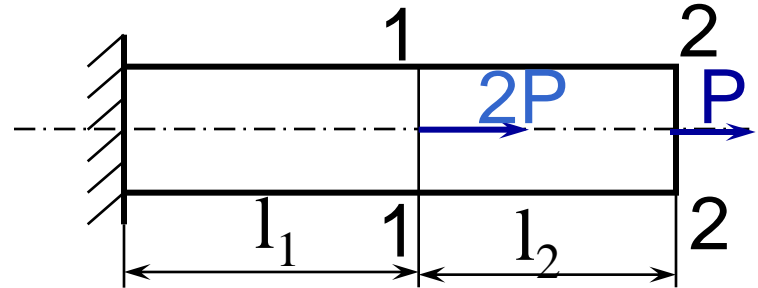
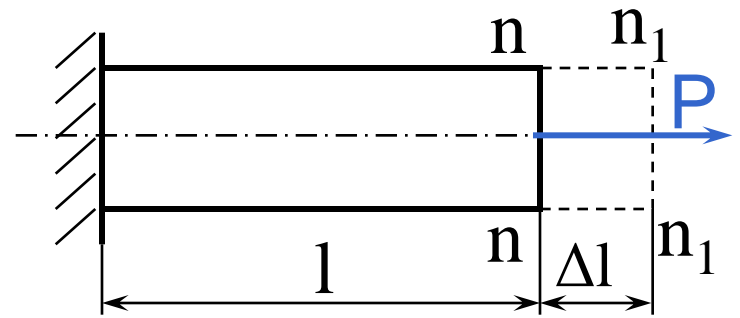
Đoạn thanh l_1 : $\Delta l_1 = \frac{3Pl_1}{EF}$.

Đoạn thanh l_2 : $\Delta l_2 = \frac{Pl_2}{EF}$.

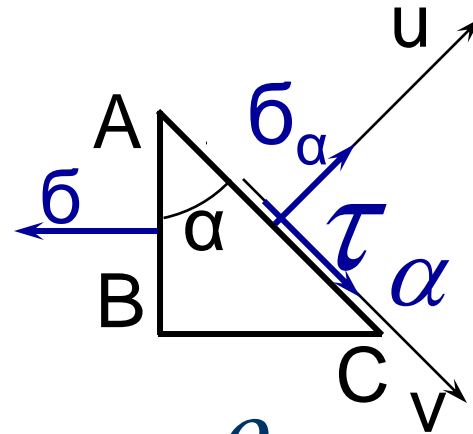
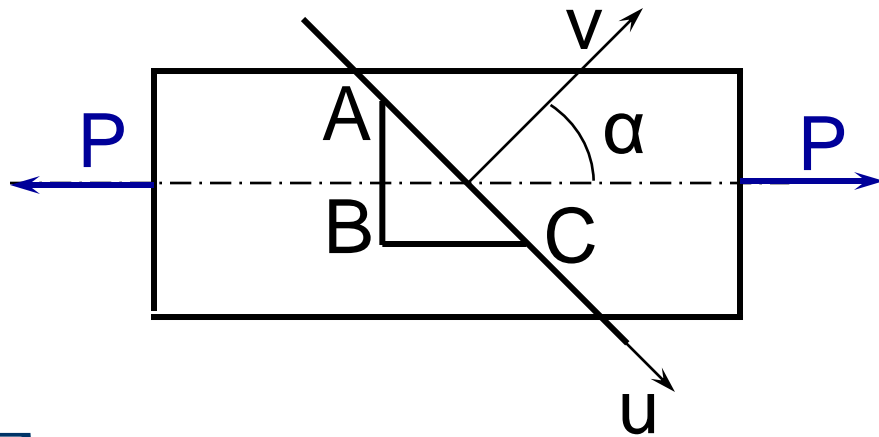
Chuyển vị của mặt cắt 1 - 1 : $\Delta_1 = \Delta l_1 = \frac{3Pl_1}{EF}$.

của mặt cắt 2 - 2 :

$$\Delta_2 = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{3Pl_1}{EF} + \frac{Pl_2}{EF} = \frac{P(3l_1 + l_2)}{EF}$$



• 2.5. Ứng suất trên mặt cắt nghiêng.



$$\sum u = \sigma_{\alpha} \cdot dF_{AC} - \sigma \cdot dF_{AB} \cos \alpha = 0,$$

$$\sum v = \tau_{\alpha} \cdot dF_{AC} - \sigma \cdot dF_{AB} \sin \alpha = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{dF_{AB}}{dF_{AC}};$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma \cos^2 \alpha; \tau_{\alpha} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha; \quad (2.9)$$

$$\alpha = 0, \quad \sigma_{\max} = \sigma = \frac{N}{F} \quad \alpha=45^{\circ} \text{ và } \alpha=135^{\circ}; \quad \tau_{\max} = \sigma/2$$

(2.10)

Ứng suất tiếp trên hai mặt nghiêng vuông góc với nhau có cùng trị số nhưng ngược dấu.

- **2.6. Đặc trưng cơ học của vật liệu.**

- 2.6.1. Nhận xét.**

Quy ước phân các vật liệu thực thành
vật liệu dẻo và vật liệu giòn.

Vật liệu dẻo khi bị phá huỷ có biến dạng lớn, quan sát được bằng mắt như thép, đồng, chất dẻo, nhôm, gỗ v. v . . .

Vật liệu giòn khi bị phá huỷ biến dạng hầu như còn nhỏ, không thấy được bằng mắt thường như gạch, đá, gang, bê tông v. v . . .

2.6.2. Mẫu thí nghiệm

Mặt cắt hình tròn đường kính ban đầu d_0 và chiều dài tiêu chuẩn ban đầu l_0 .

Mẫu thử dài $l_0 = 10 d_0$, mẫu thử ngắn $l_0 = 5 d_0$.

Mặt cắt ngang hình chữ nhật $F_0 = ab$ ($a/b = 1 \div 5$).

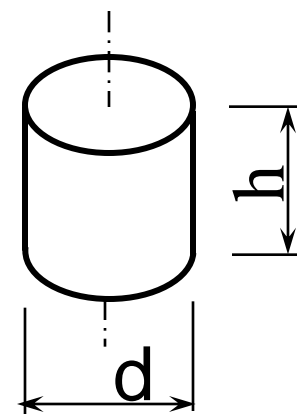
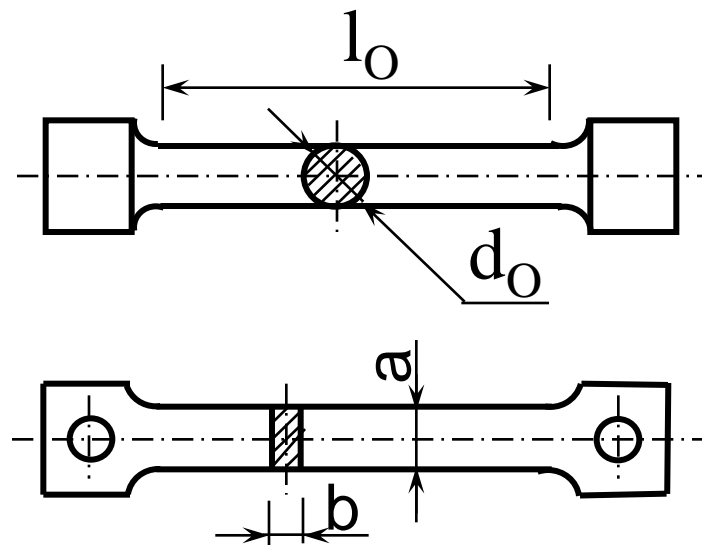
Mẫu thử dài $l_0 = 11,3\sqrt{F_0}$, mẫu thử ngắn $l_0 = 5,65\sqrt{F_0}$.

Mẫu thử nén (thép, gang): $h \leq 3d$

Mẫu thử nén (bê tông):

-hình lập phương cạnh 15;20cm

-hình trụ ngắn đường kính 10cm.



2.6.3. Kéo vật liệu dẻo.

- Giai đoạn tỷ lệ OA:

Giới hạn tỷ lệ :

$$\sigma_{tl} = \frac{P_{tl}}{F_0} \quad (2.11)$$

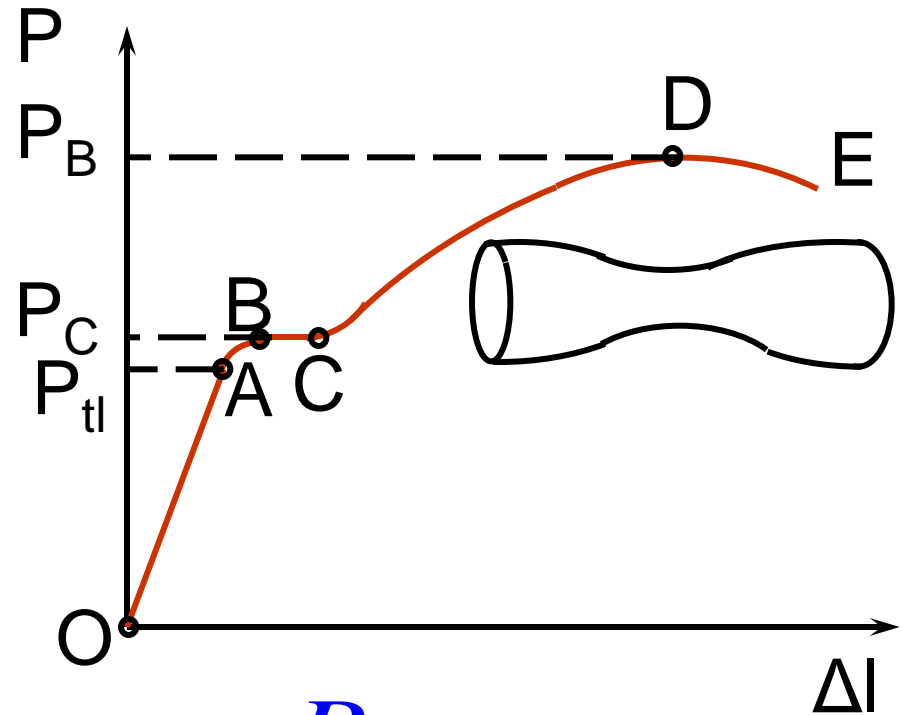
- Giai đoạn chảy BC.

Giới hạn chảy

- Giai đoạn củng cố CD.

Giới hạn bền

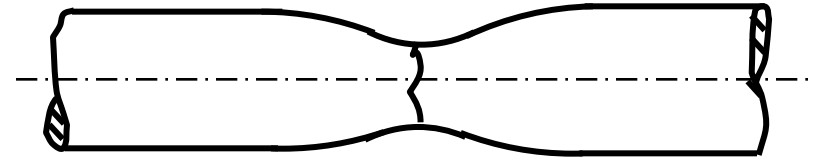
- Giai đoạn thắt eo DE



$$\sigma_c = \frac{P_c}{F_0} \quad (2.12)$$

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0} \quad (2.13)$$

- **-Biểu đồ ứng suất quy ước-biểu đồ ứng suất thực**



Độ dẫn dài tương đối

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100\% ; \quad (2. 14)$$

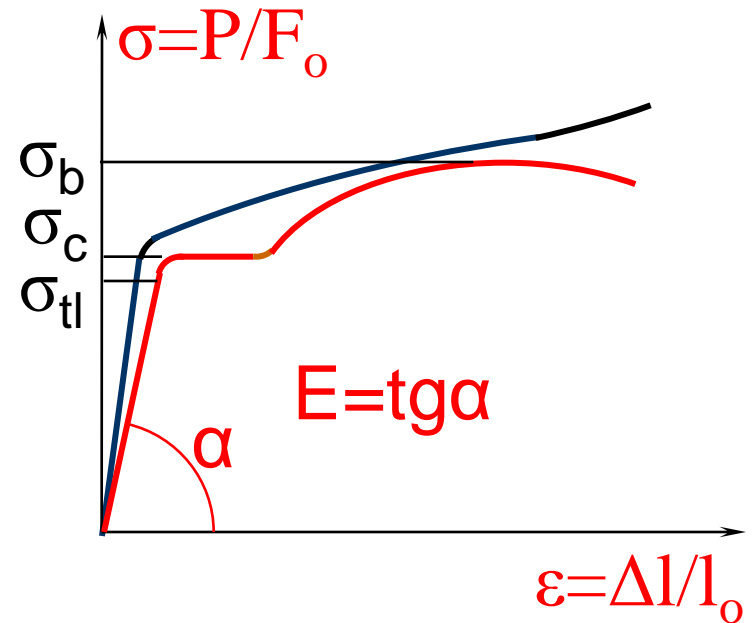
Độ thắt tương đối

$$\psi = \frac{F_1 - F_0}{F_0} 100\% . \quad (2. 15)$$

l_0, F_0 - chiều dài và diện tích ban đầu của mẫu thử;

l_1 - chiều dài của mẫu thử sau khi đứt (đã chấp lại);

F_1 - diện tích mặt cắt ở chỗ cổ eo.

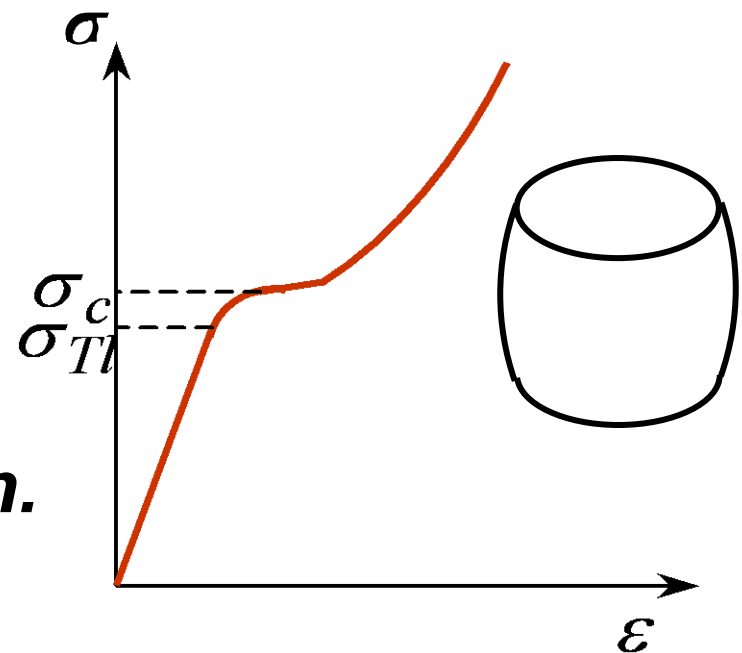


— Biểu đồ ứng suất quy ước

— Biểu đồ ứng suất thực

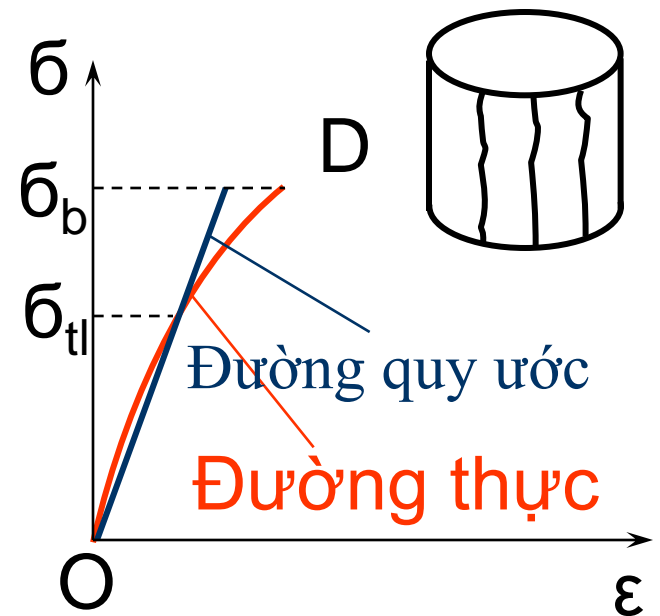
2.6.4. Nén vật liệu dẻo.

Đồ thị quy ước ứng suất - biến dạng.



2.6.5. Kéo và nén vật liệu giòn.

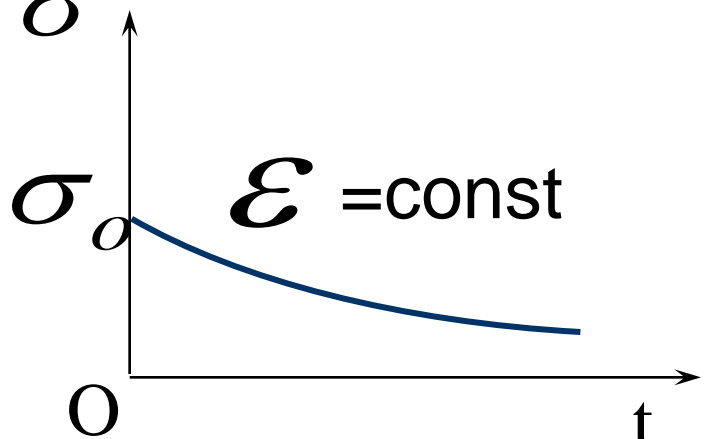
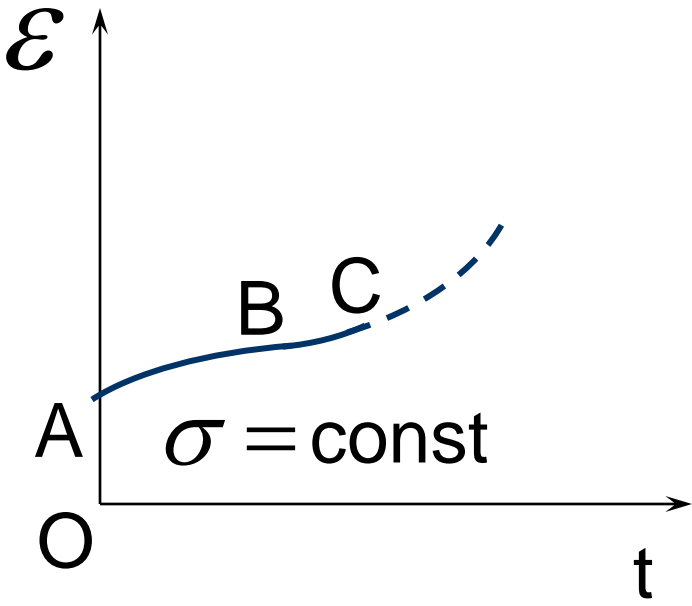
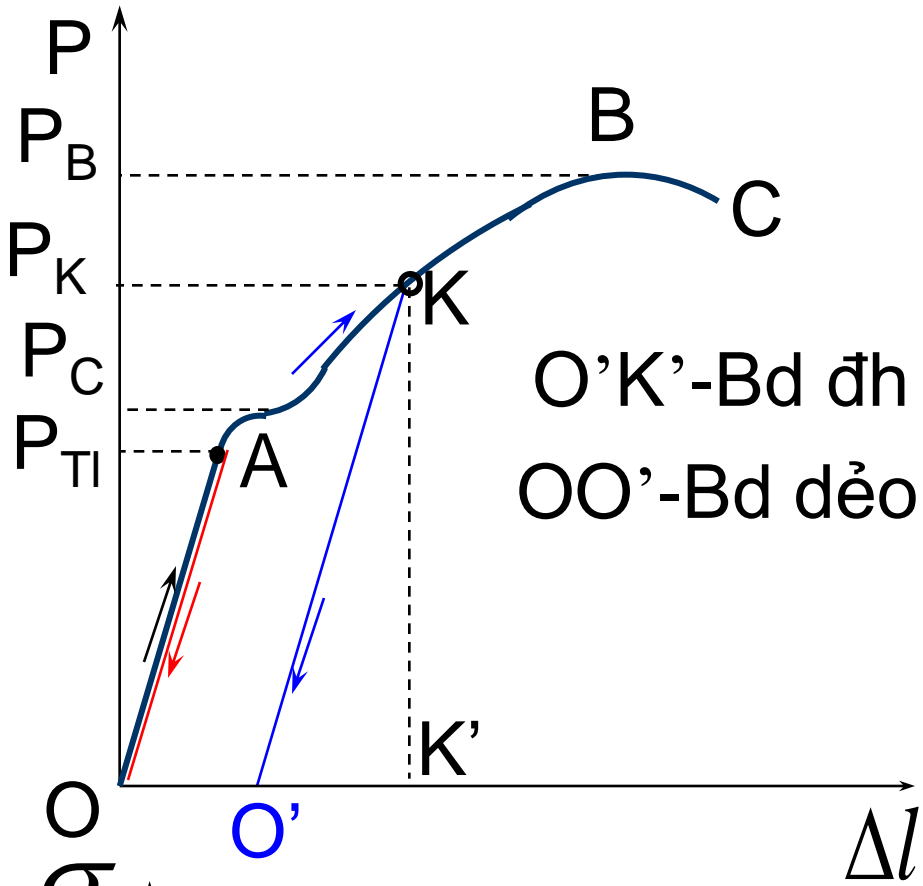
Đồ thị quy ước ứng suất – biến dạng của mẫu thử bằng vật liệu giòn chỉ có một giai đoạn, đường biểu diễn có độ cong bé, gần như thẳng và kết thúc tại D khi mẫu thử chịu kéo đứt đột ngột hoặc mẫu thử chịu nén nứt vỡ.



• 2.7. Một số hiện tượng trong thí nghiệm vật liệu.

a/Biến cứng nguội

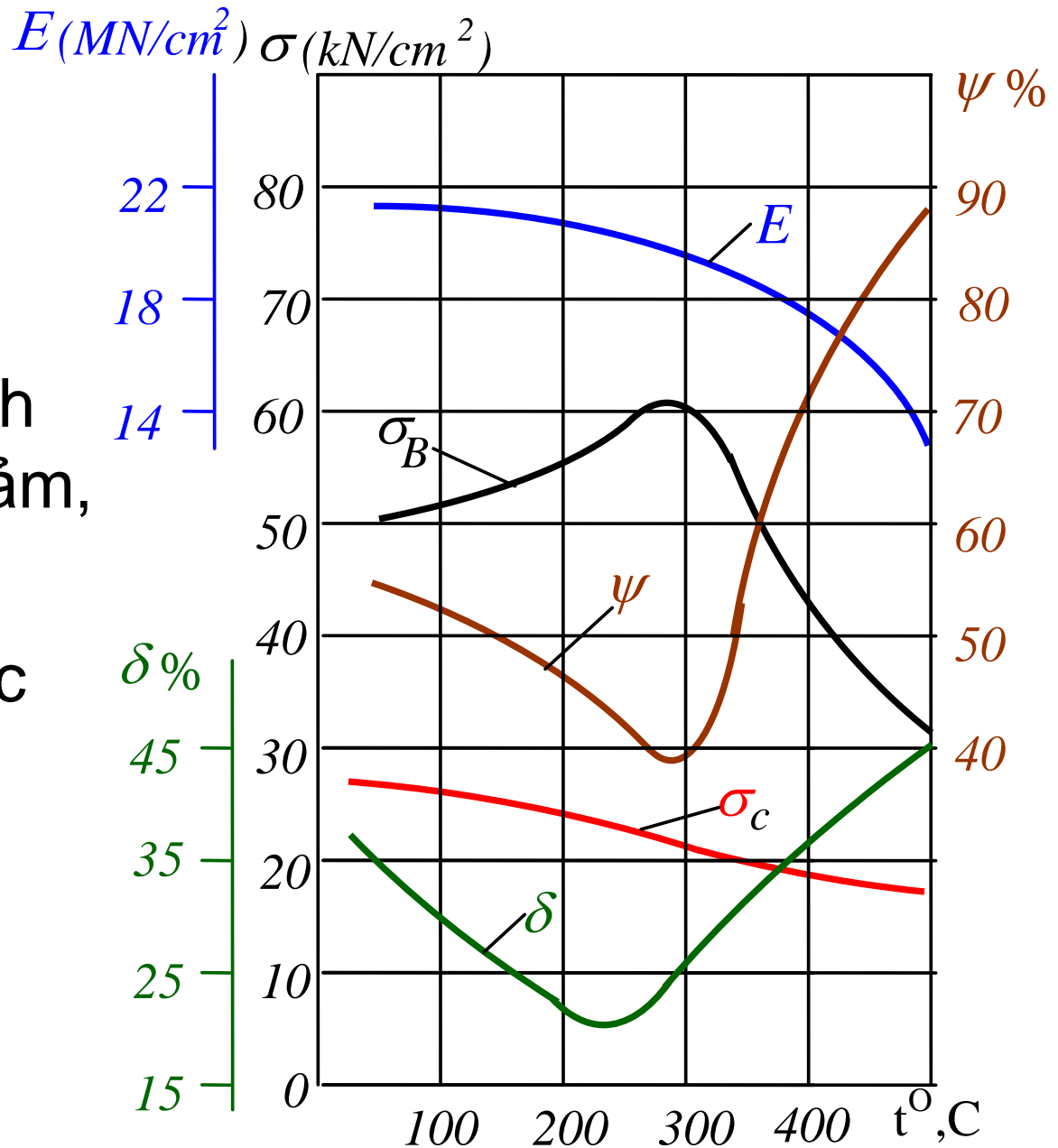
b/Ảnh hưởng của thời gian: Hiện tượng rã - từ biến



c/Ảnh hưởng của nhiệt độ đến độ bền của vật liệu:

Ở nhiệt độ thấp tính dẻo của vật liệu giảm, tính giòn tăng.

Ở nhiệt độ cao các đặc trưng cơ học của phần lớn vật liệu giảm.



2.8. Ứng suất cho phép - Hệ số an toàn.

Vật liệu dẻo: ứng suất nguy hiểm $\sigma_0 = \sigma_c$,
vật liệu giòn $\sigma_0 = \sigma_B$.

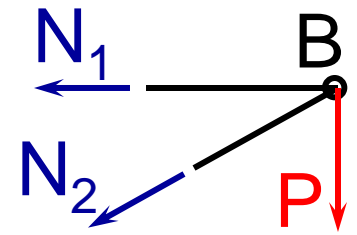
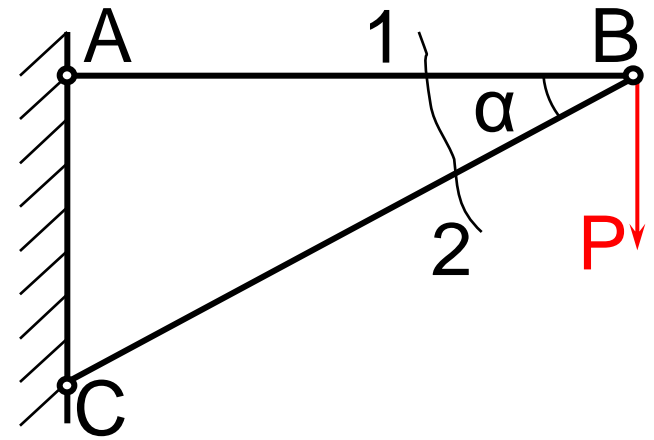
Kết cấu chỉ có thể làm việc ở trị số $[\sigma] < \sigma_0$ Ứng suất cho phép $[\sigma]$ thường được xác định theo công thức :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n} \quad (2.16)$$

(với hệ số an toàn $n > 1$)

Giá trị của hệ số an toàn n được lựa chọn trong mỗi trường hợp cụ thể tùy thuộc chất lượng vật liệu và điều kiện làm việc: Tải trọng tĩnh, với thép rèn $n = 1,25 - 1,5$; thép đúc $1,5 - 2,0$ (theo giới hạn chảy), gang và gỗ là $2,5 - 3,0$ (theo giới hạn bền).

- **Thí dụ 2. 2.** Xác định tải trọng
- cho phép của hệ theo độ bền
- của thanh AB biết $d_1 = 2,5 \text{ cm}$, $[\sigma]_1 = 16 \text{ kN/cm}^2$, $\alpha = 30^\circ$. Xác định đường kính d_2 của thanh
- BC, biết $[\sigma]_2 = 20 \text{ kN/cm}^2$



$$N_1 = [\sigma] \pi \frac{d_1^2}{4} = 16 \cdot \pi \cdot \frac{2,5^2}{4} = 78,54 \text{ kN};$$

$$N_1 \sin \alpha - P \cos \alpha = 0. \quad P = N_1 \operatorname{tg} \alpha = N_1 \operatorname{tg} 30^\circ = 45,35 \text{ kN}$$

$$P = 78,5 \operatorname{tg} 30^\circ = 45,35 \text{ kN};$$

$$N_2 \sin \alpha + P = 0. \quad N_2 = -\frac{P}{\sin \alpha} = -\frac{45,35}{\sin 30^\circ} = -90,70 \text{ kN}.$$

Đường kính của thanh BC

$$[\sigma]_2 \frac{\pi d_2^2}{4} \geq 90,70 \quad \longrightarrow \quad d_2 \geq \sqrt{\frac{90,70 \cdot 4}{\pi \cdot 20}} \cong 2,4 \text{ cm}.$$

- 2.9 . Ảnh hưởng của trọng lượng bản thân,
- thanh có độ bền đều.

2.9.1. Ứng suất và biến dạng khi có tính đến ảnh hưởng của trọng lượng bản thân.

Vật liệu làm thanh có trọng lượng riêng là γ , mặt cắt ngang của thanh là F

$$N_x = P + \gamma Fx \quad (a); \quad \sigma_x = \frac{P}{F} + \gamma \cdot x \quad (b)$$

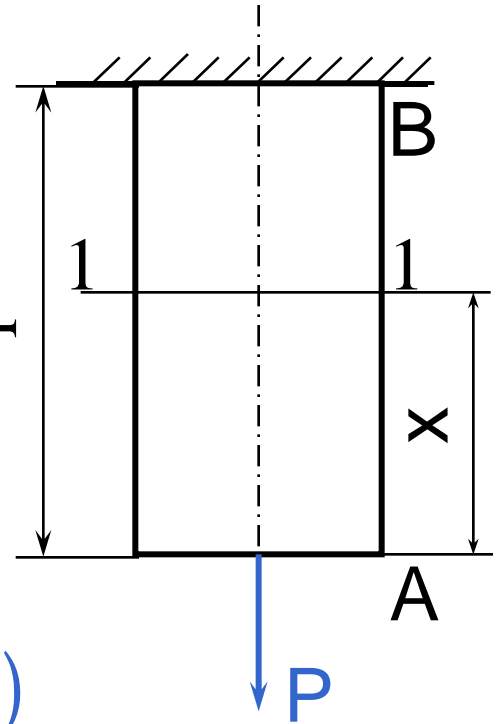
Tại ngàm B: $x = l$; $\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma \cdot l \quad (c)$

Biến dạng dài của thanh:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_x dx}{EF} = \int_0^l \frac{P + \gamma \cdot Fx}{EF} dx$$

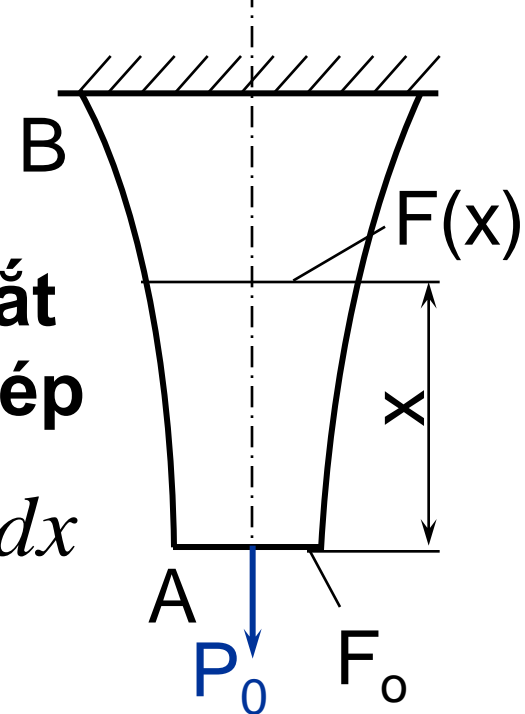
$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{Ql}{2EF} \quad (2.17)$$

$Q = \gamma Fl$ –
trọng lượng của thanh,



- 2.9.2. Thanh có độ bền đều.

Thanh bền đều : ứng suất ở mọi mặt cắt đều đạt tới giá trị của ứng suất cho phép



$$F(x)[\sigma] = P_0 + \gamma \int_0^x F(x) dx; \quad [\sigma] dF(x) = \gamma F(x) dx$$

$$\frac{dF(x)}{F(x)} = \frac{\gamma}{[\sigma]} dx; \quad \ln F(x) = \frac{\gamma}{[\sigma]} x + C;$$

$$x = 0, F(x) = F_0; \quad \ln F_0 = C;$$

$$\ln \left[\frac{F(x)}{F_0} \right] = \frac{\gamma}{[\sigma]} x. \quad F(x) = F_0 e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} x}; \quad F_0 = \frac{P_0}{[\sigma]}.$$

Quy luật biến đổi của diện tích mặt cắt dọc theo trục x:

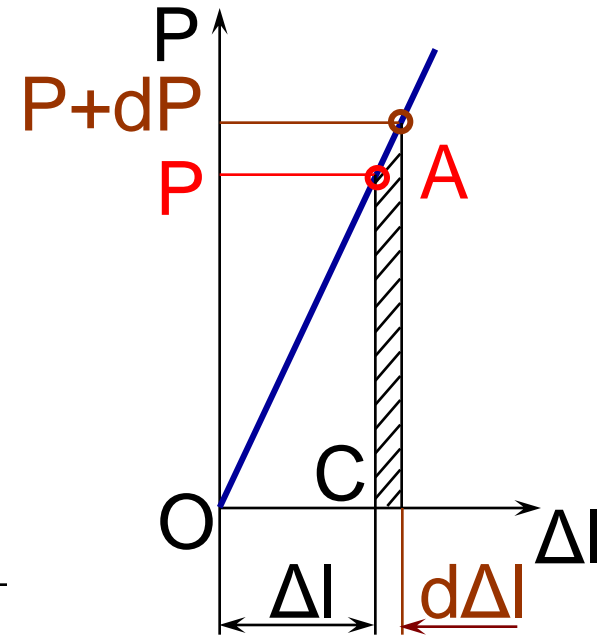
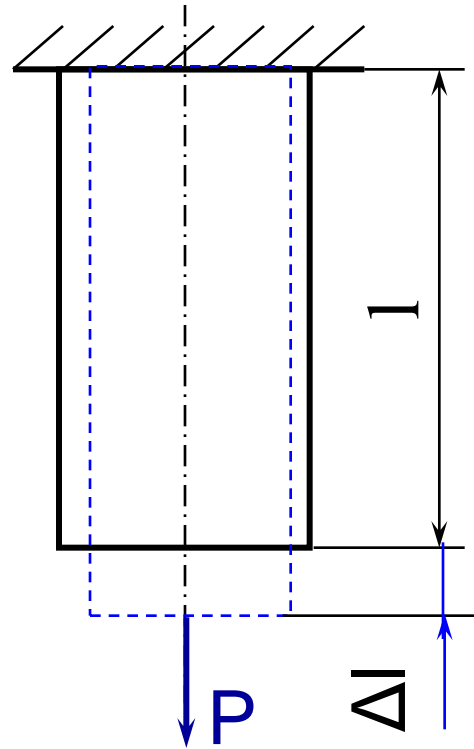
$$F(x) = \frac{P_0}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma}{[\sigma]} x}. \quad (2.18)$$

- **2.10. Thế năng biến dạng đàn hồi.**

$$dA = 0,5(P + P + dP)d\Delta l = P \cdot d\Delta l + 0,5dP \cdot d\Delta l.$$

$$dA = P d\Delta l.$$

$$U = A = \frac{P\Delta l}{2} = \frac{P^2 l}{2EF} \quad (2.19)$$



$$u = \frac{U}{V} = \frac{U}{Fl} = \frac{\sigma_x^2}{2E} = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2}.$$

$$(2.20)$$

2.11. Bài toán siêu tĩnh.

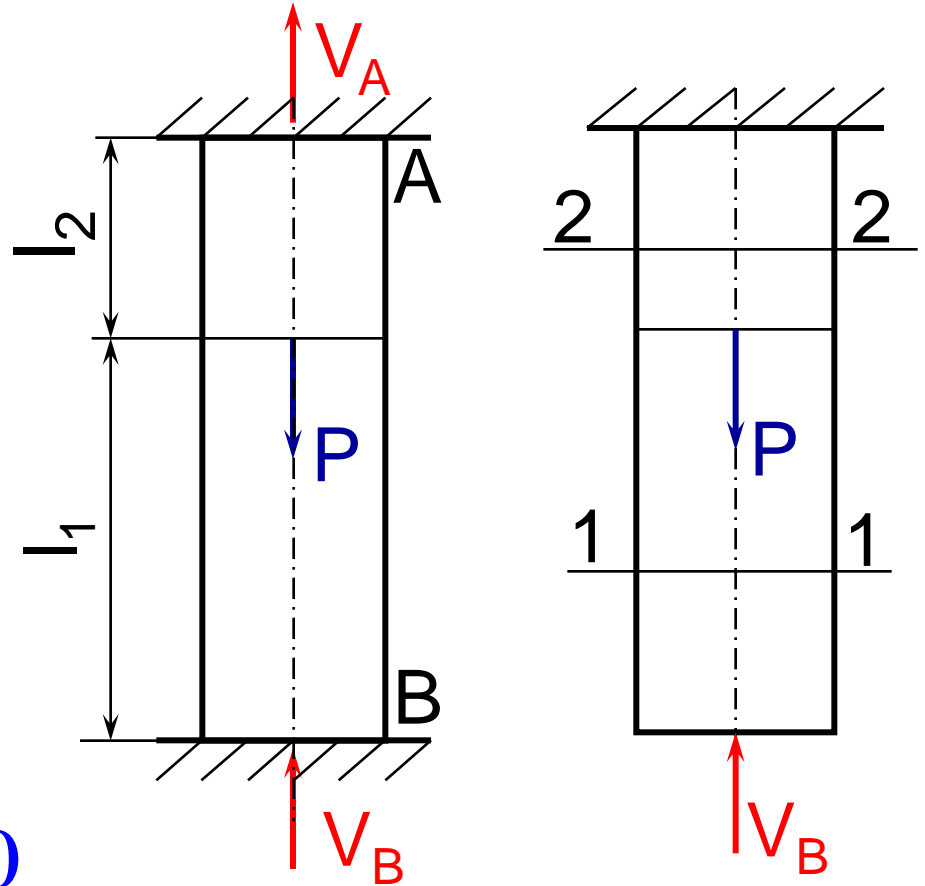
$$V_A + V_B - P = 0. \quad (a)$$

$$\Delta = \frac{N_1 l_1}{EF} + \frac{N_2 l_2}{EF} = 0. \quad (b)$$

$$N_1 = -V_B, \quad N_2 = P - V_B.$$

$$-\frac{V_B l_1}{EF} + \frac{P - V_B}{EF} l_2 = 0$$

$$\longrightarrow V_B = P \frac{l_2}{l_1 + l_2}; \quad V_A = P \frac{l_1}{l_1 + l_2}$$



Thí dụ 2.6. Vẽ biểu đồ lực dọc và ứng suất của thanh.

$$-V_A + P + 2P - V_B = 0 \quad (a)$$

$$\Delta l = \frac{N_1 l}{2EF} + \frac{N_2 l}{EF} + \frac{N_3 l}{EF} = 0. \quad (b)$$

$$N_1 = V_A; \quad N_2 = V_A - P;$$

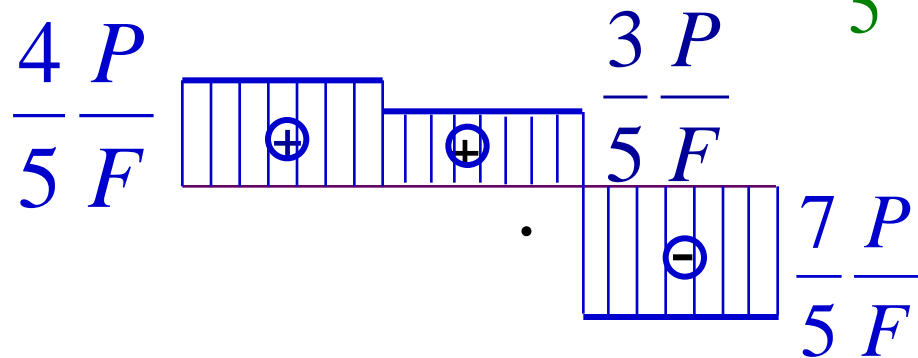
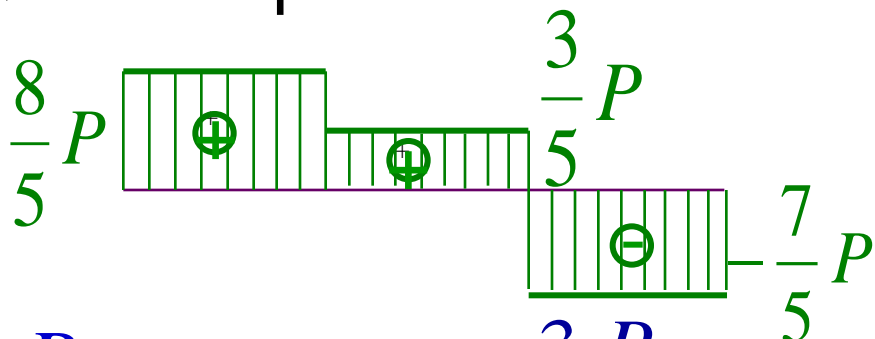
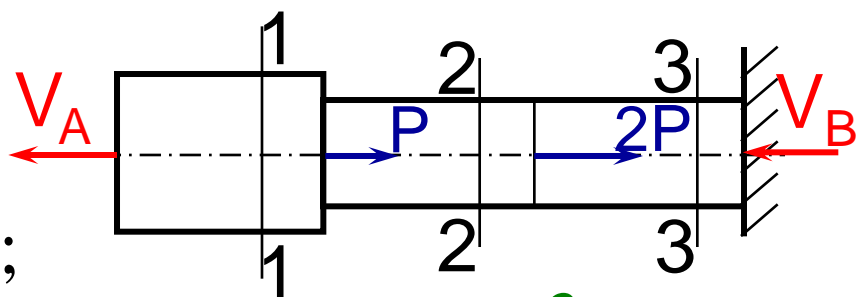
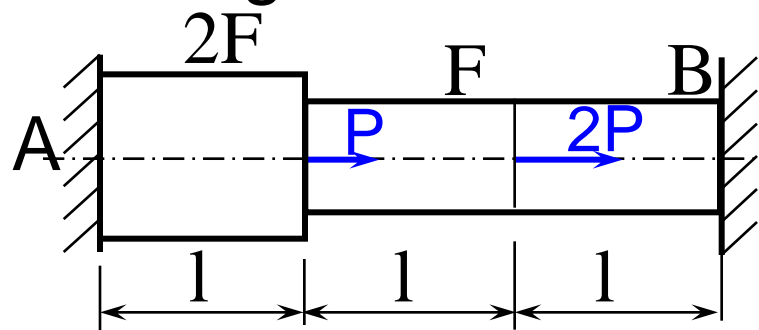
$$N_3 = V_A - P - 2P = V_A - 3P.$$

$$\frac{V_A l}{2EF} + \frac{(V_A - P)l}{EF} + \frac{(V_A - 3P)l}{EF} = 0;$$

$$V_A = \frac{8P}{5} = N_1; \quad N_2 = \frac{3P}{5}; \quad N_3 = -\frac{7P}{5}.$$

$$\sigma_1 = \frac{8P}{5 \cdot 2F} = \frac{4P}{5F};$$

$$\sigma_2 = \frac{3P}{5F} \quad \sigma_3 = -\frac{7P}{5F}$$



• 2. 12. Các quan điểm tính toán độ bền kết cấu.

2.12.1. Tính toán theo ứng suất cho phép.

Ứng suất hoặc tổ hợp ứng suất tại điểm nguy hiểm nào đó gọi là ứng suất nguy hiểm:

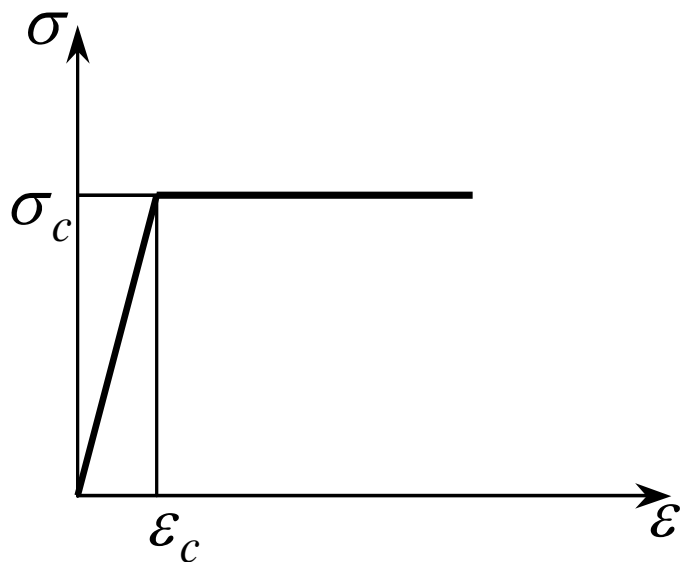
$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (2.21) \quad [\sigma] = \frac{\sigma_o}{n} \quad (2.22)$$

2.12.2. Tính toán theo tải trọng giới hạn.

$$P_{\max} \leq [P] = \frac{P_{gh}}{n} \quad (2.23)$$

* n là hệ số an toàn (giống như đối với ứng suất cho phép).

Khi xác định tải trọng giới hạn của vật thể làm bằng vật liệu dẻo ta dùng sơ đồ bên.



Thí dụ 2.7. Xác định tải trọng cho phép P_{cp} theo ứng suất cho phép và theo tải trọng giới hạn biết các thanh 1, 2 và 3 có chiều dài l_0 . Các thanh 1, 2 có mặt cắt ngang F , thanh 3 có mặt cắt ngang $2F$. Vật liệu làm các thanh có modun đàn hồi E , có giới hạn chảy σ_c , hệ số an toàn n .

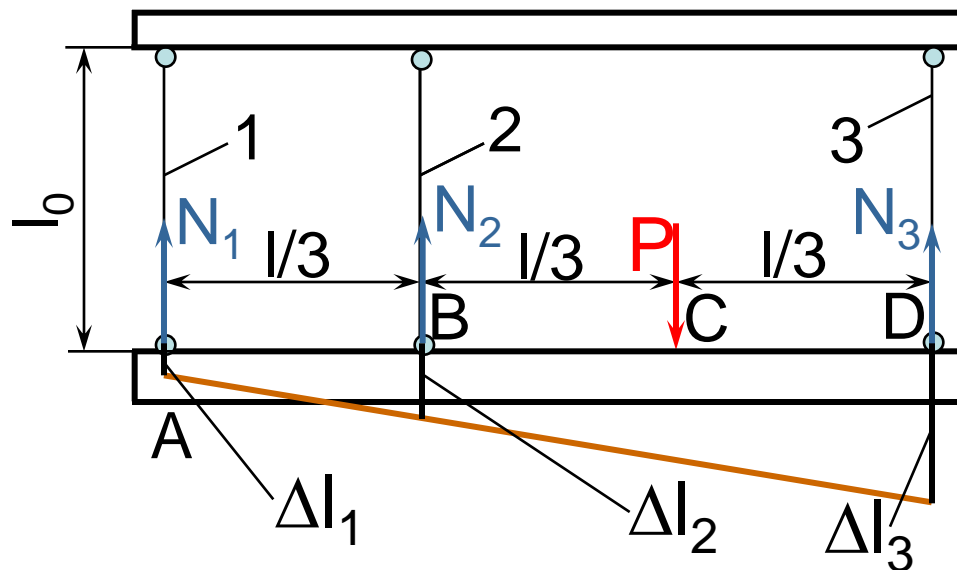
Phương trình cân bằng:

$$N_1 + N_2 + N_3 - P = 0;$$

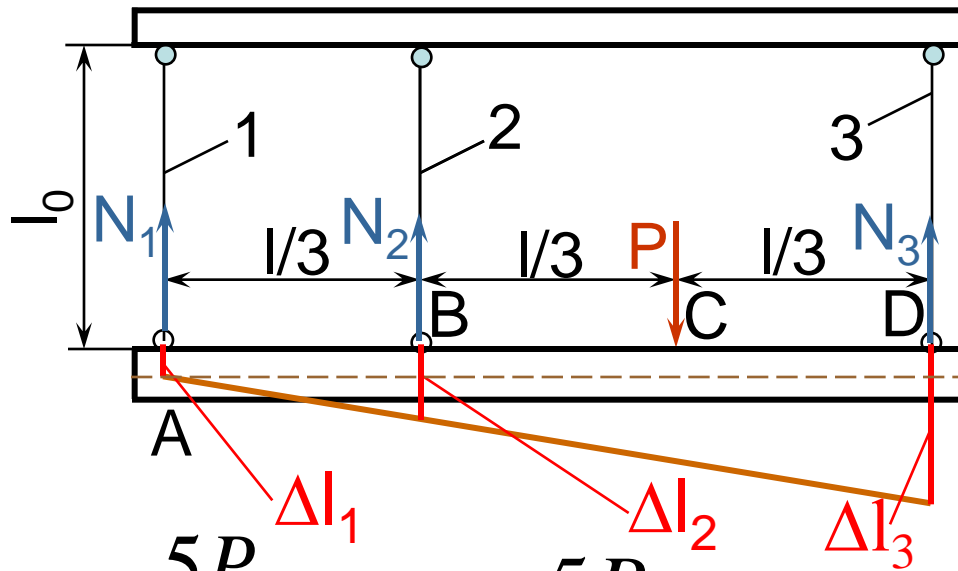
$$N_1 \frac{l}{3} + P \frac{l}{3} - N_3 \frac{2l}{3} = 0.$$

Phương trình bổ sung:

$$\frac{N_2 l_0}{EF} - \frac{N_1 l_0}{EF} = \frac{1}{3}.$$



Giai đoạn 1



Phương trình cân bằng:

$$N_1 + N_2 + N_3 - P = 0;$$

$$N_1 \frac{l}{3} + P \frac{l}{3} - N_3 \frac{2l}{3} = 0.$$

Phương trình bổ sung:

$$\frac{\frac{N_2 l_0}{EF} - \frac{N_1 l_0}{EF}}{\frac{N_3 l_0}{E2F} - \frac{N_1 l_0}{EF}} = \frac{1}{3}.$$

$$N_1 = \frac{5P}{27} \quad \sigma_1 = \frac{5P}{27F}; \quad N_3 = \frac{16}{27}P;$$

$$N_2 = \frac{6P}{27} \quad \sigma_2 = \frac{6P}{27F}; \quad \sigma_3 = \frac{8P}{27F}$$

$$P_{gh1} = \frac{27F\sigma_c}{8};$$

$$P_{cp1} = \frac{27F\sigma_c}{8n}$$

$$\sigma_2^1 = \frac{6P_{gh1}}{27F} = \frac{6 \cdot 27F\sigma_c}{27F \cdot 8} = \frac{3\sigma_c}{4}; \quad \sigma_1^1 = \frac{5\sigma_c}{8}.$$

Giai đoạn 2

$$\Delta N_1 + \Delta N_2 - \Delta P = 0 ;$$

$$\Sigma M_A = \Delta N_2 \cdot 1/3 - \Delta P \cdot 2 \cdot 1/3 = 0 .$$

$$\Delta N_2 = 2\Delta P ; \Delta N_1 = -\Delta P$$

$$N_{12} = N_1 - \Delta P ; N_{22} = N_2 + 2\Delta P .$$

$$\sigma_c = \sigma_2^1 + \frac{2\Delta P}{F} = \frac{3}{4}\sigma_c + \frac{2\Delta P}{F} ;$$

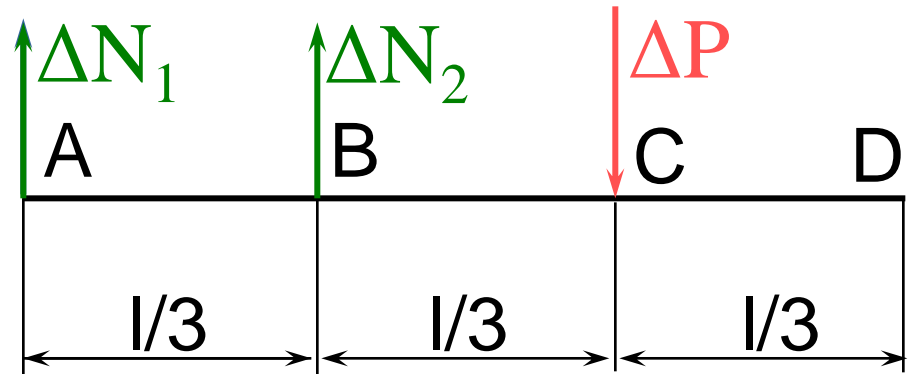
$$\sigma_1^1 = \frac{5}{8}\sigma_c ; \sigma_2^1 = \frac{3}{4}\sigma_c .$$

$$\Delta P_{gh} = \frac{\sigma_c F}{8} .$$

$$P_{gh2} = P_{gh1} + \Delta P_{gh} = \frac{27\sigma_c F}{8} + \frac{\sigma_c F}{8} = \frac{7\sigma_c F}{2} ;$$

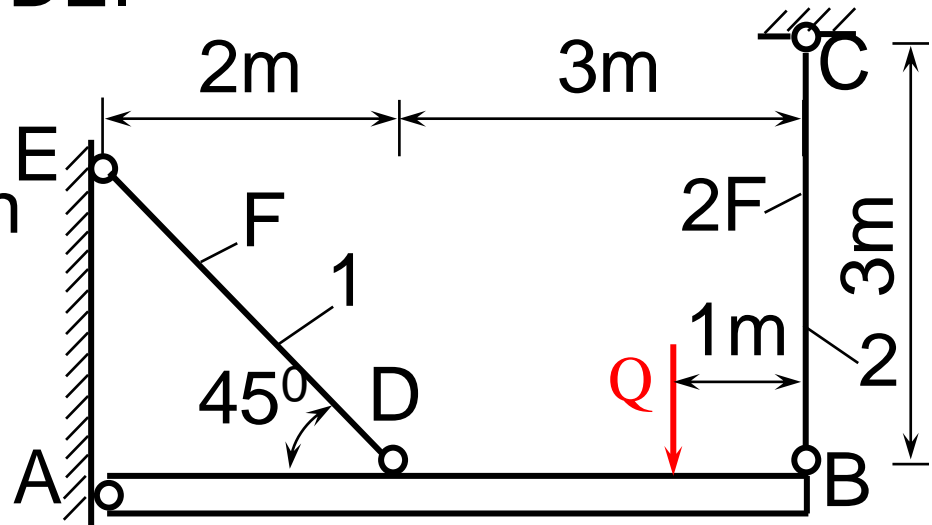
$$P_{cp2} = \frac{7\sigma_c F}{2n}$$

$$P_{cp1} = \frac{27F\sigma_c}{8n}$$



Thí dụ 2. 8. Dầm tuyệt đối cứng AB chịu tác dụng của lực Q và được giữ bằng khớp bản lề A và các thanh treo BC và DE.

1. Xác định nội lực và ứng suất trong các thanh treo theo tải trọng Q khi $F = 10^{-3} \text{ m}^2$;

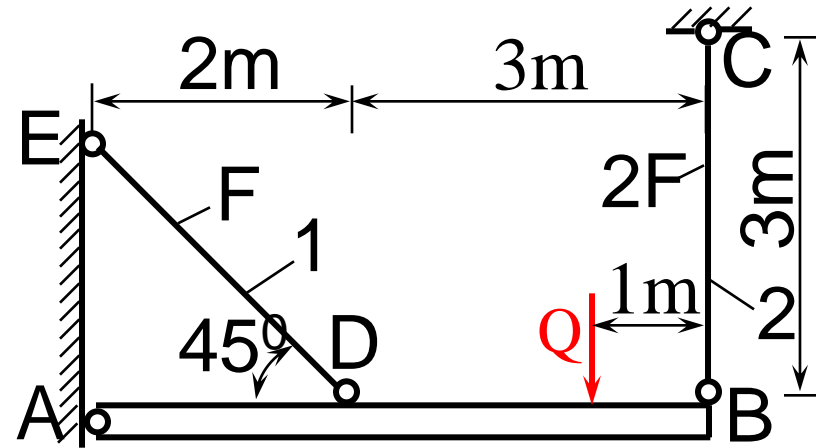


2. Xác định [Q] theo ứng suất cho phép khi $[\sigma] = 16 \text{ kN} / \text{cm}^2$;

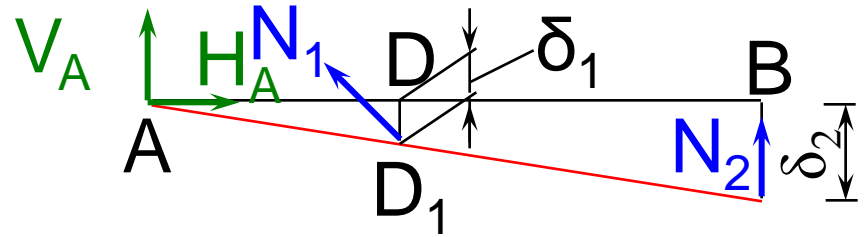
3. Xác định Q_{gh} và Q_{cp} nếu $\sigma_c = 23,5 \text{ kN} / \text{cm}^2$ và hệ số an toàn $n = 1,5$ (tính theo tải trọng giới hạn).

$$\Sigma M_A = N_1 \cdot 2 \cdot \cos 45^\circ + N_2(2 + 3) - Q(2+3-1) = 0$$

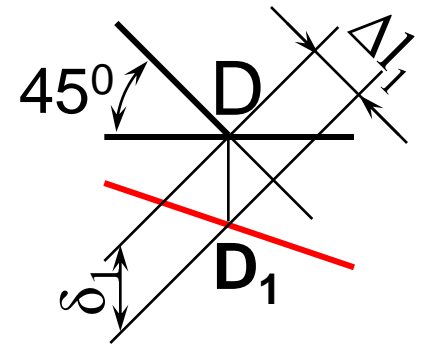
$$N_1 \sqrt{2} + 5N_2 - 4Q = 0. (a)$$



$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{2}{5}; (b)$$



$$\delta_1 = \frac{\Delta l_1}{\cos 45^\circ} = \Delta l_1 \sqrt{2}; \delta_2 = \Delta l_2.$$



$$1/ \quad \Delta l_1 = \frac{N_1 2\sqrt{2}}{EF}; \Delta l_2 = \frac{N_2 3}{2EF}; \quad + (b) \rightarrow$$

$$\frac{N_1 2\sqrt{2} \sqrt{2} 2EF}{EF N_2 3} = \frac{2}{5}; \quad N_1 = \frac{3}{10} N_2; \quad (c)$$

2/

$$(a) + (c) \rightarrow \quad N_1 = 0,1153Q; \quad N_2 = 0,769Q.$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = 115,3Q; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F} = 384,5Q.;$$

$$(F = 10^{-3} \text{m}^2)$$

$$384,5[Q] \leq [\sigma]; \quad [Q] = \frac{16 \cdot 10^4}{384,5} = 416 \text{ kN}.$$

3/ Tải trọng giới hạn Q_{gh} được xác định từ phương trình (a) khi thay N_1 và N_2 bằng các giá trị giới hạn :

$$N_{1gh} = \sigma_c F = 23,5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 = 235 \text{ kN};$$

$$N_{2gh} = \sigma_c 2F = 23,5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 = 470 \text{ kN}.$$

$$(a) \longrightarrow 235 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot 470 - 4Q_{gh} = 0. \longrightarrow Q_{gh} = 671 \text{ kN}.$$

$$Q_{cp} = \frac{Q_{gh}}{n} = \frac{671}{1,5} = 447 \text{ kN}.$$

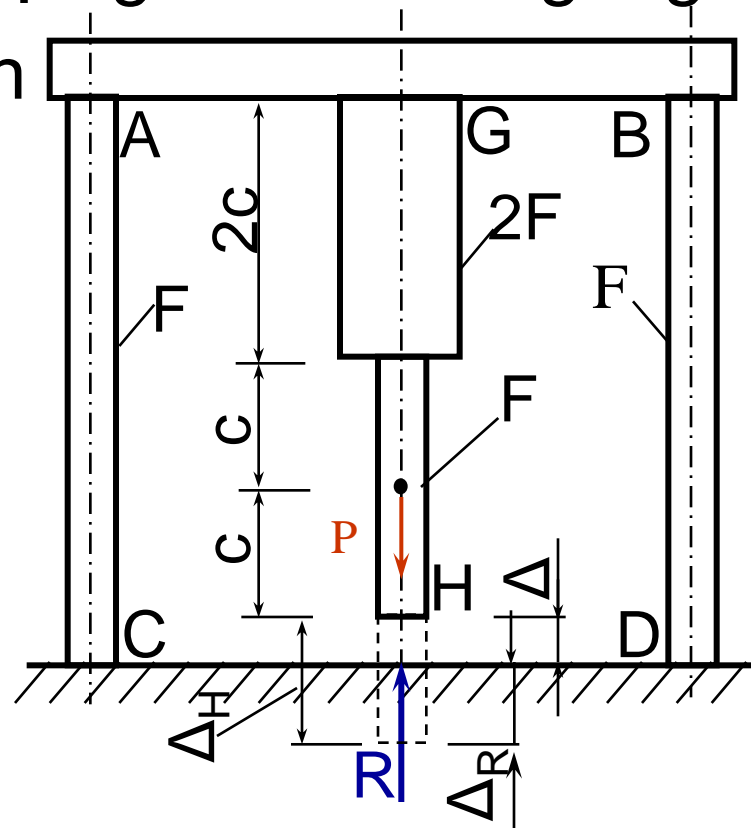
$$\frac{Q_{cp}}{[Q]} = \frac{447}{416} = 1,1.$$

- **Thí dụ 2.9.** Một xà ngang tuyệt đối cứng AB đặt trên
- hai thanh thép AC và BD có diện tích mặt cắt ngang
- F. Thanh thép có 2 bậc GH được gắn vào xà ngang
- và có khe hở $\Delta = \beta c$ so với nền

1. Xác định lực P khi mặt dưới H của thanh giữa vừa chạm vào nền.

2. Tìm phản lực của nền tác dụng lên thanh giữa, nội lực và ứng suất trong các thanh bên khi $P = 200 \text{ kN}$; $\beta = .10^{-4}$; $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$.

3. Cần phải hạ nhiệt độ của thanh giữa xuống bao nhiêu độ để phản lực của nền lên thanh giữa bằng không khi giữ nguyên giá trị của P, biết $\alpha = 125 \cdot 10^{-7} \text{ 1/độ}$.



Nội lực và biến dạng trong 2 thanh bên là như nhau.

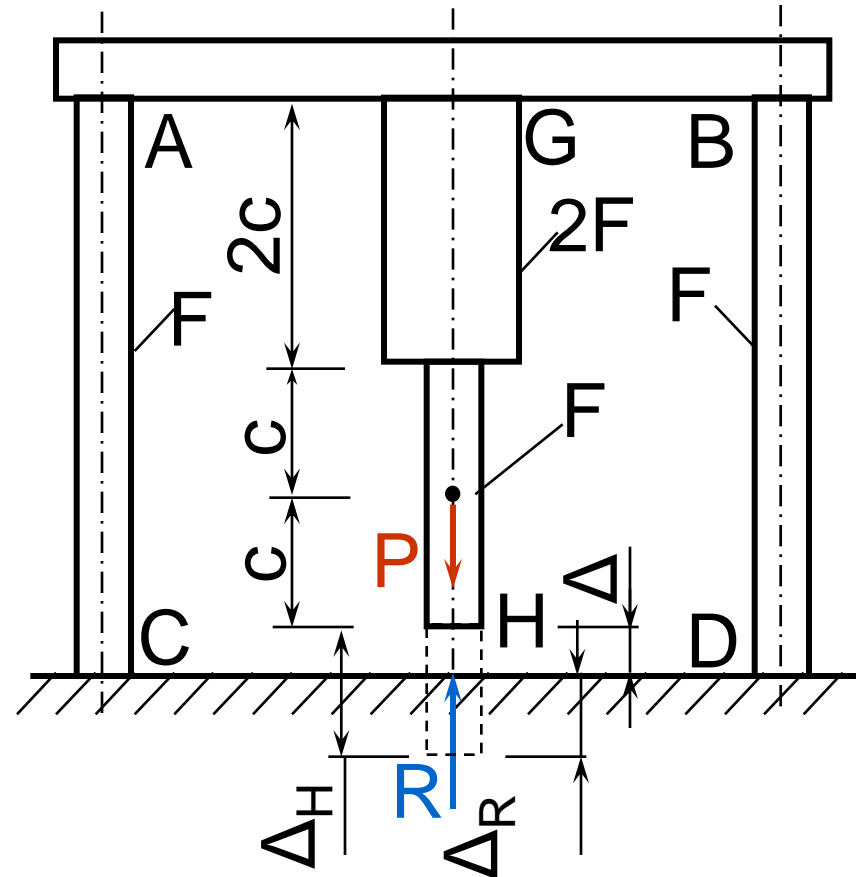
Δ'_H - chuyển vị của mặt dưới H của thanh giữa khi mặt này vừa chạm vào nền

$$\Delta'_H = \Delta \quad R = 0.$$

R - phản lực của nền lên thanh giữa.

Chuyển vị Δ_H phụ thuộc vào biến dạng thanh giữa và thanh cạnh.

P_0 - giá trị của lực P khi mặt dưới H chạm vào nền.



$$\Delta = \Delta'_H = \frac{P_o \cdot 2c}{2EF} + \frac{P_o \cdot c}{EF} + \frac{P_o \cdot 4c}{2EF} = 4 \frac{P_o \cdot c}{EF}, \Delta = \beta c;$$

$$\frac{4P_o c}{EF} = \beta c; \quad P_o = \frac{\beta EF}{4}. \quad P_o = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{10}{4} = 10 \text{ kN.}$$

Δ_H -chuyển vị của mặt dưới thanh giữa do lực $P=200\text{kN}$ gây ra khi giả định mặt nền không cản trở biến dạng của hệ;
 Δ_R -chuyển vị của mặt đáy H do phản lực R của nền gây ra

$$\Delta_H - \Delta_R = \Delta. \quad \Delta_H = \frac{4Pc}{EF}; \quad \Delta_R = \frac{R2c}{2EF} + \frac{R2c}{EF} + \frac{R4c}{2EF} = \frac{5Rc}{EF};$$

$$\frac{4Pc}{EF} - \frac{5Rc}{EF} = \beta c;$$

$$R = \frac{4P - \beta EF}{5} = \frac{4(P - P_o)}{5}; \quad R = \frac{4(200 - 10)}{5} = 152 \text{ kN.}$$

$$N_1 = N_2 = N = \frac{P - R}{2} = \frac{200 - 152}{2} = 24 \text{ kN};$$

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{24}{10} = 2,4 \text{ kN/cm}^2.$$

- Khi $R = 0$ do hạ nhiệt độ, lực trong thanh bên
- $N = P/2$.
- Độ hạ nhiệt độ Δt được xác định từ điều kiện:

$$\Delta_H - \alpha \Delta t \cdot 4c = \Delta = \beta c; \quad \frac{P4c}{EF} - 4\Delta t4c = \beta c .$$

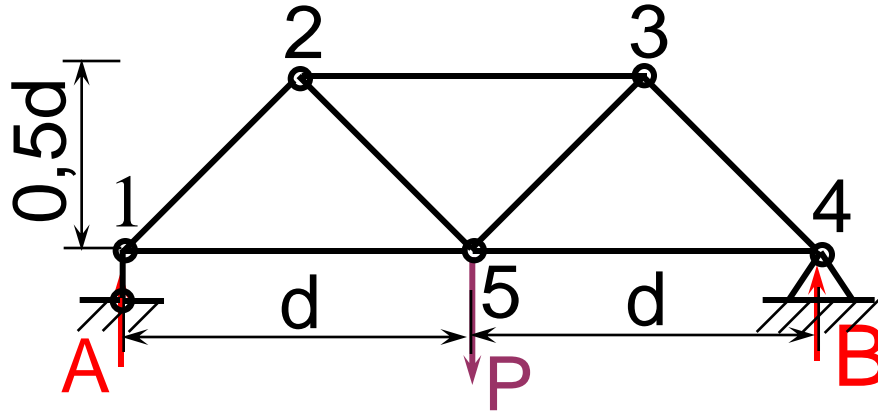
$$\Delta t = \left(\frac{4P}{EF} - \beta \right) \frac{1}{4\alpha},$$

$$\Delta t = \left(\frac{4 \cdot 200}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} - 2 \cdot 10^{-4} \right) \frac{1}{125 \cdot 10^{-7} \cdot 4};$$

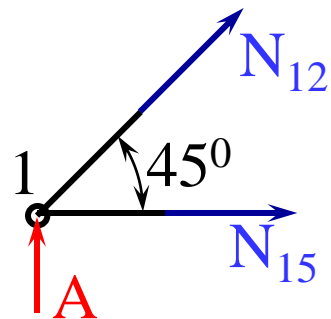
$$\Delta t = 76^\circ.$$

Thí dụ 2.10 Xác định lực trong các thanh có cùng độ cứng EF của dàn chịu tải như hình vẽ.

a/

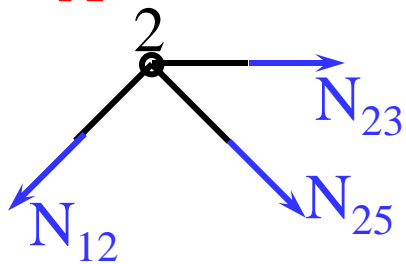


$$A = B = 0,5P$$



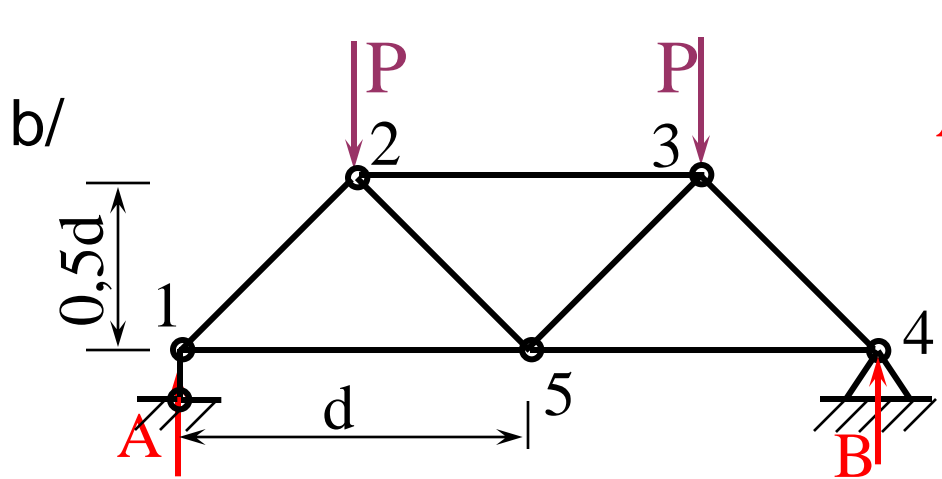
$$A + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{12} = 0 \quad N_{12} = -P \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$N_{15} + N_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad N_{15} = 0,5P$$

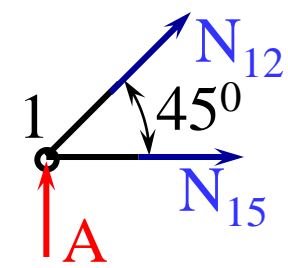


$$-N_{12} + N_{23} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0; N_{23} = -P$$

$$N_{25} + N_{23} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad N_{25} = P \frac{\sqrt{2}}{2}$$

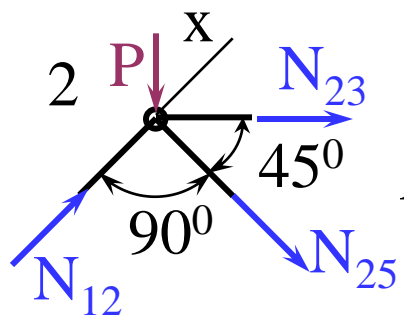


$$A = B = P$$



$$A + N_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0; N_{12} = -P\sqrt{2}$$

$$N_{15} + N_{12} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0; N_{15} = P$$



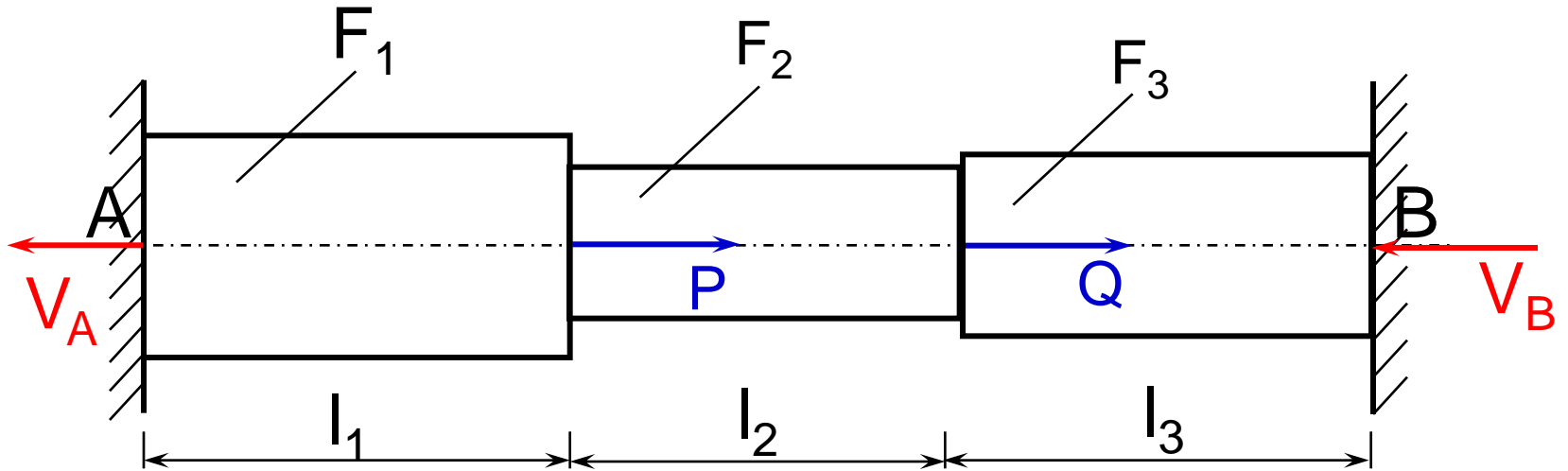
$$N_{12} + N_{23} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P\sqrt{2}}{2} = 0 \quad N_{23} = -P$$

$$N_{25} + N_{23} \frac{\sqrt{2}}{2} + P \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$N_{25} = 0$$

| Thanh | a | b |
|----------|-----------------|--------------|
| 1-2, 3-4 | $-0,5P\sqrt{2}$ | $-P\sqrt{2}$ |
| 1-5, 4-5 | $0,5P$ | P |
| 2-5, 3-5 | $0,5P\sqrt{2}$ | 0 |
| 2-3 | $-P$ | $-P$ |

Vẽ biểu đồ nội lực và ứng suất của thanh dưới đây.



$$-V_A + P + Q - V_B = 0 ; (1) \quad \Delta l_{AB} = 0 ; (2)$$

$$\frac{N_1 l_1}{EF_1} + \frac{N_2 l_2}{EF_2} + \frac{N_3 l_3}{EF_3} = 0 ; (3)$$

$$N_1 = V_A ; N_2 = V_A - P ; N_3 = V_A - P - Q ; (3) \Rightarrow V_A ; N_1 ; N_2 ; N_3 ;$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} ; \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} ; \sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} .$$

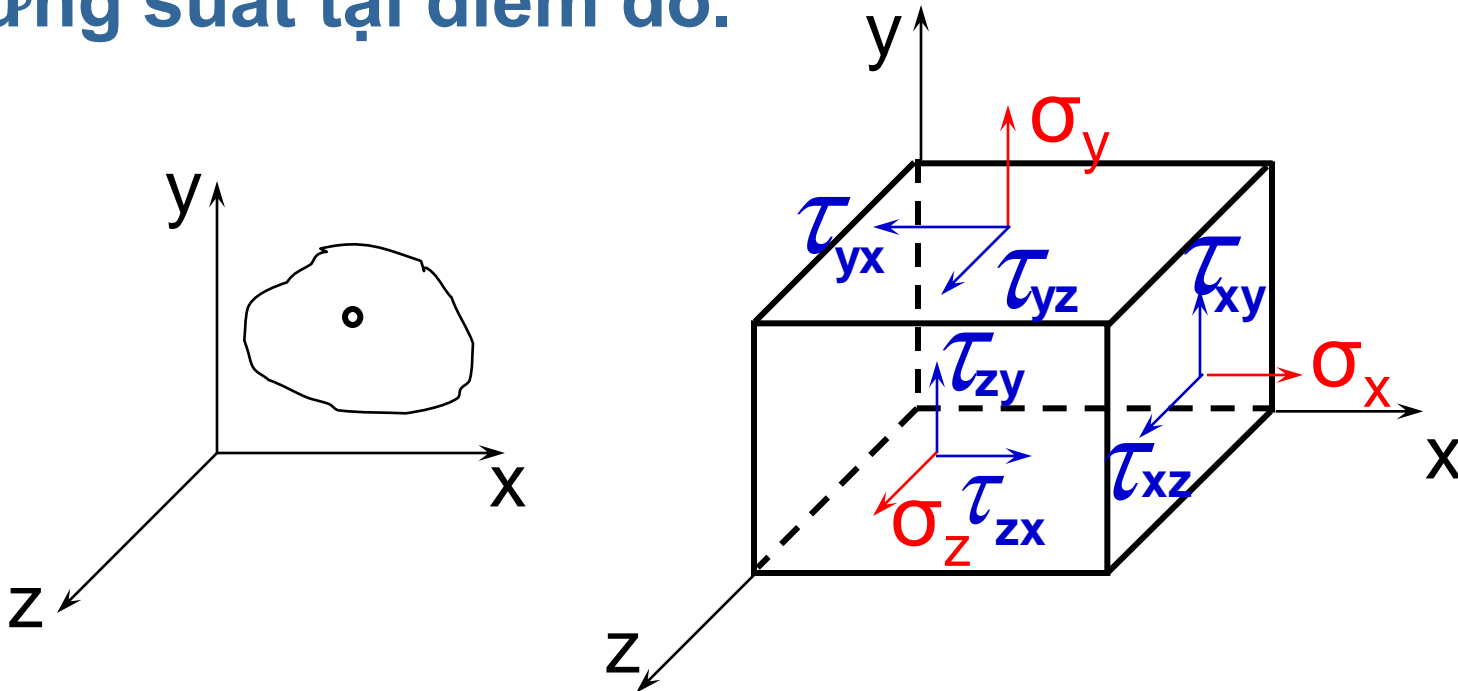
Chương 3

TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT VÀ THUYẾT BỀN

3.1. Khái niệm.

3.1.1. Trạng thái ứng suất ở một điểm.

Tập hợp các ứng suất trên các mặt cắt khác nhau đi qua một điểm được xét là trạng thái ứng suất tại điểm đó.

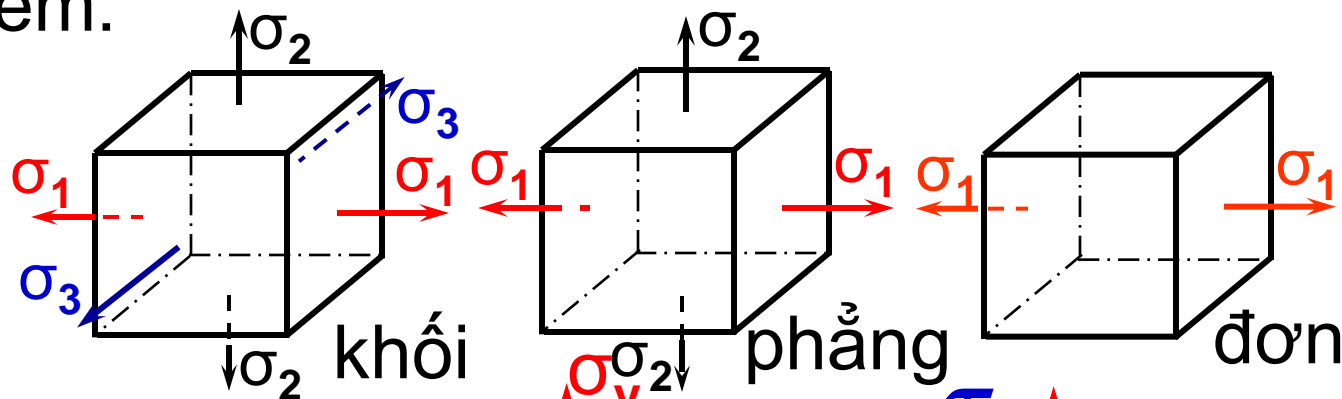


• 3.1.2. **Mặt chính, phương chính, ứng suất chính.**

Định nghĩa mặt chính, phương chính, ứng suất chính.

Quy ước $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ đặc trưng cho trạng thái ứng suất tại một điểm:

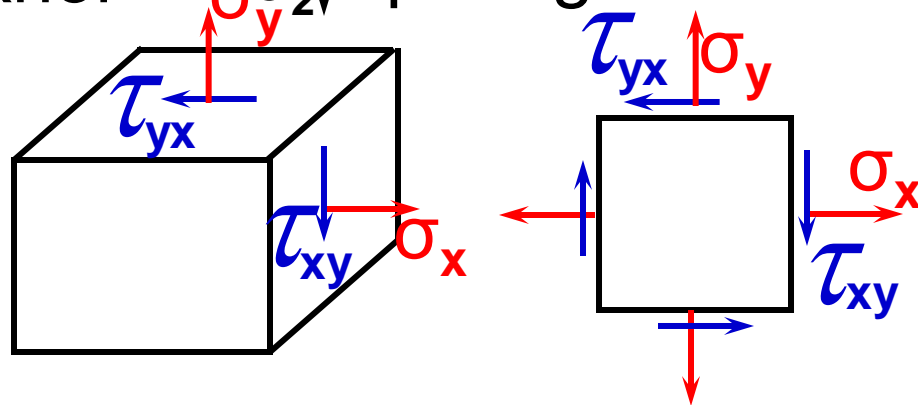
Trạng thái ứng suất



3.2. Trạng thái ứng suất phẳng.

3.2.1. **Định lý đối ứng của ứng suất tiếp.**

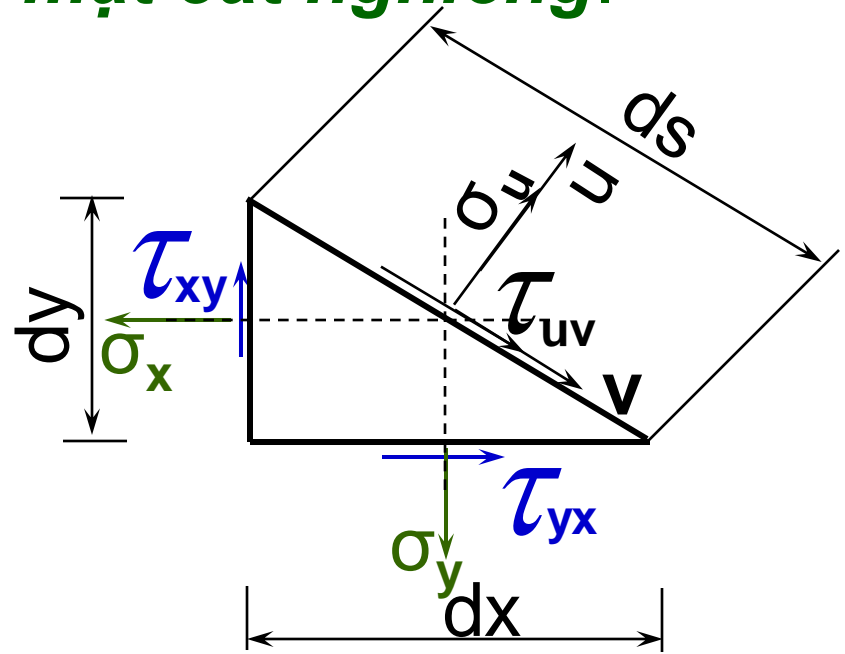
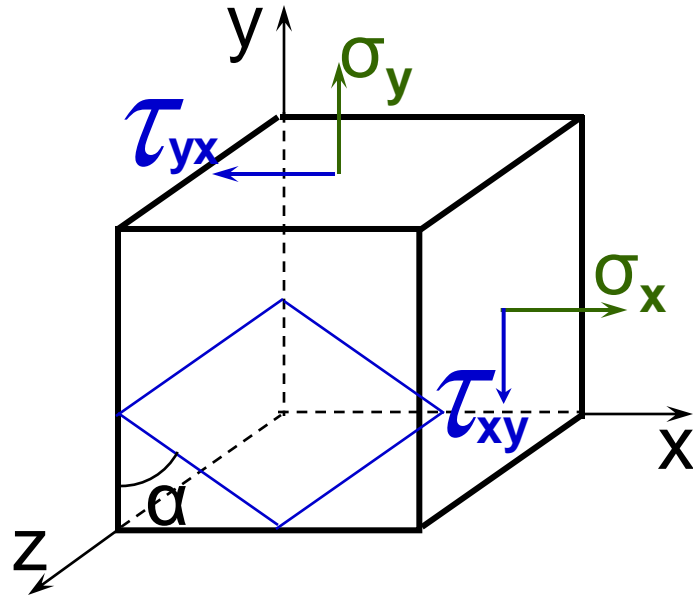
Quy ước về dấu của σ , τ tiếp



$$\sum m_z = -\tau_{xy} dydzdx + \tau_{yx} dx dydz = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (3.1)$$

Định lý đối ứng : ứng suất tiếp trên hai mặt vuông góc với nhau có cùng trị số nhưng ngược dấu.

- 3.2.2. Ứng suất trên mặt cắt nghiêng.



$$\Sigma u = \sigma_u ds dz - \sigma_x dy dz \cos \alpha - \sigma_y dx dz \sin \alpha + \tau_{xy} dy dz \sin \alpha + \tau_{yx} dx dz \cos \alpha = 0$$

$$dx = ds \cdot \sin \alpha; \quad dy = ds \cdot \cos \alpha; \quad |\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|, \quad (3.2)$$

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha.$$

$$\Sigma v = \tau_{uv} ds dz - \sigma_x dy dz \sin \alpha + \sigma_y dx dz \cos \alpha - \tau_{xy} dy dz \cos \alpha + \tau_{yx} dx dz \sin \alpha = 0 ;$$

$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha . \quad (3.3)$$

3.2.3. Ứng suất chính.

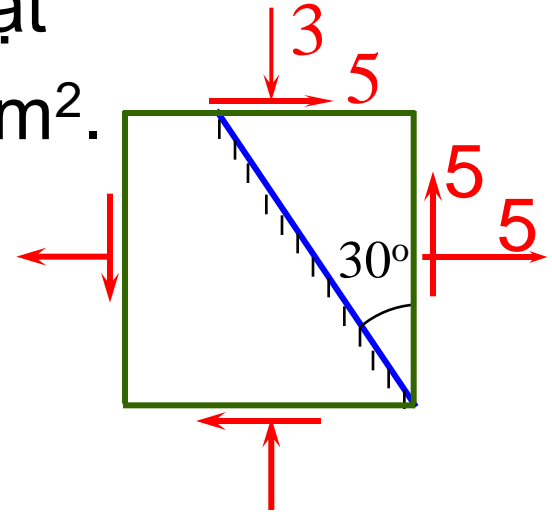
$$\tau_{uv} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0 .$$

Trên mặt chính:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad \sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} .$$

- **Thí dụ 3. 1.** Xác định giá trị ứng suất trên mặt cắt nghiêng, các ứng suất chính và các mặt chính. Các ứng suất có đơn vị là kN/cm².

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 5 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_y = -3 \text{ kN/cm}^2; \\ \tau_{xy} &= -5 \text{ kN/cm}^2; \quad \alpha = 30^\circ. \end{aligned}$$



$$(3.2), (3.3), (3.4) \longrightarrow$$

$$\sigma_u = \frac{5 + (-3)}{2} + \frac{5 - (-3)}{2} \cos 60^\circ - (-5) \sin 60^\circ = 7,3 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\tau_{uv} = \frac{5 - (-3)}{2} \sin 60^\circ + (-5) \cos 60^\circ = 0,96 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{5 + (-3)}{2} + \sqrt{\left(\frac{5 - (-3)}{2}\right)^2 + (-5)^2} = 11,4 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\min} = \frac{5 + (-3)}{2} - \sqrt{\left(\frac{5 - (-3)}{2}\right)^2 + (-5)^2} = -5,4 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 11,4 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -5,4 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_o = -\frac{2(-5)}{5 - (-3)}; \quad \alpha_{o1} = 0,448 \text{ rad}; \quad \alpha_{o2} = 2,019 \text{ rad}.$$

- **3.3. Vòng tròn Mo ứng suất.**

- 3.3.1. Phương trình vòng tròn Mo ứng suất**

(3.2), (3.3) \longrightarrow

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \right)^2 ;$$

$$\tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right)^2 .$$

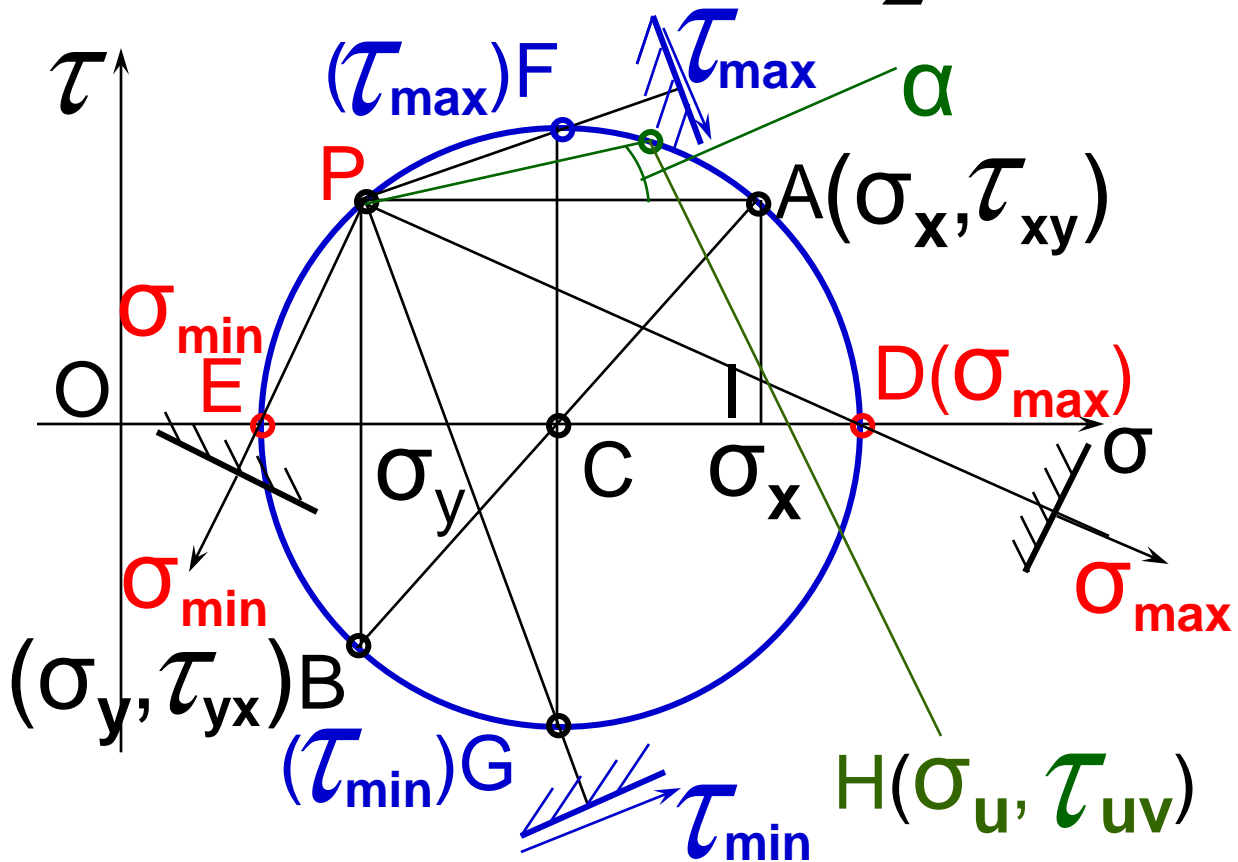
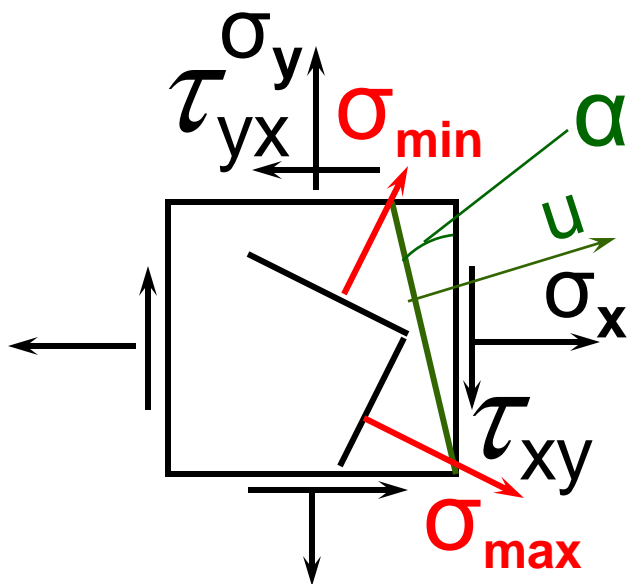
$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} . \quad x_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} .$$

$$\left(\sigma_u - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{uv}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$x_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



- **3.3.2. Ứng suất trên mặt cắt nghiêng bất kỳ.**

$$OI = OC + CI = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + CH \cos(2\alpha + 2\alpha_1);$$

$$OI = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma_u .$$

$$IH = CH \sin(2\alpha_1 + 2\alpha) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = \tau_{uv} .$$

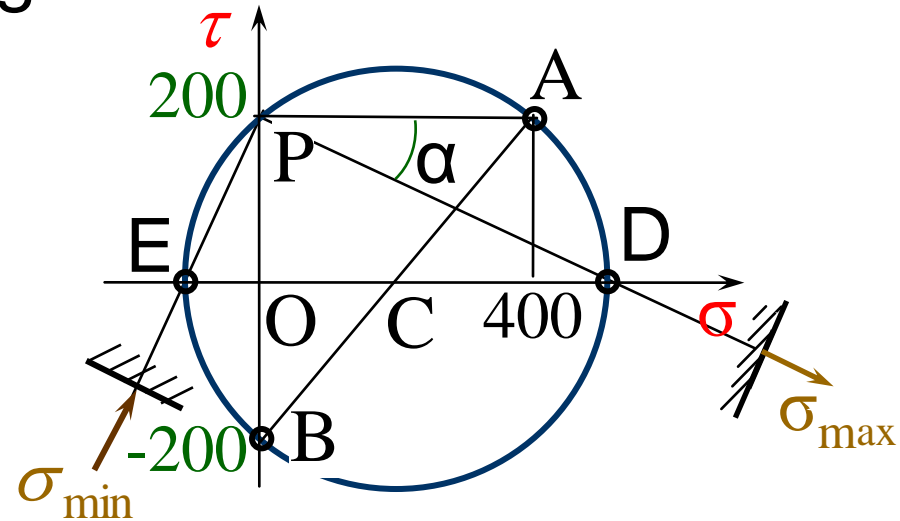
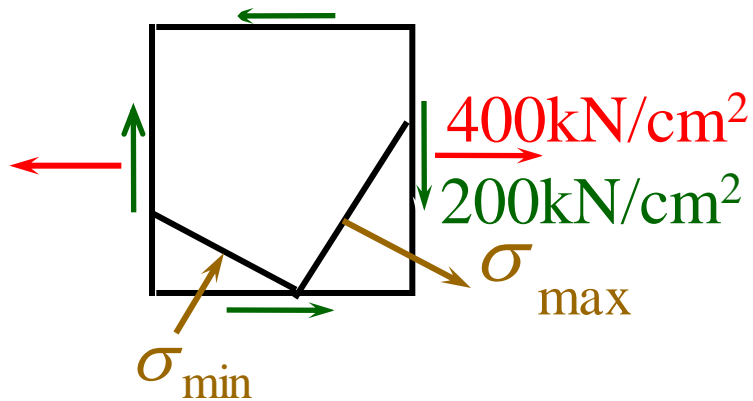
$$OD = OC + CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\max} .$$

$$OE = OC + CE = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\min}$$

Các điểm F và G diễn tả các ứng suất tiếp cực đại và cực tiểu:

$$\tau_{\max} = CF = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \quad \tau_{\min} = CG = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} .$$

Thí dụ 3.2 Xác định ứng suất chính và mặt chính của phân tử ở trạng thái căng như hình vẽ.



$$\sigma_x = 400 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_y = 0; \quad \tau_{xy} = 200 \text{ kN/cm}^2;$$

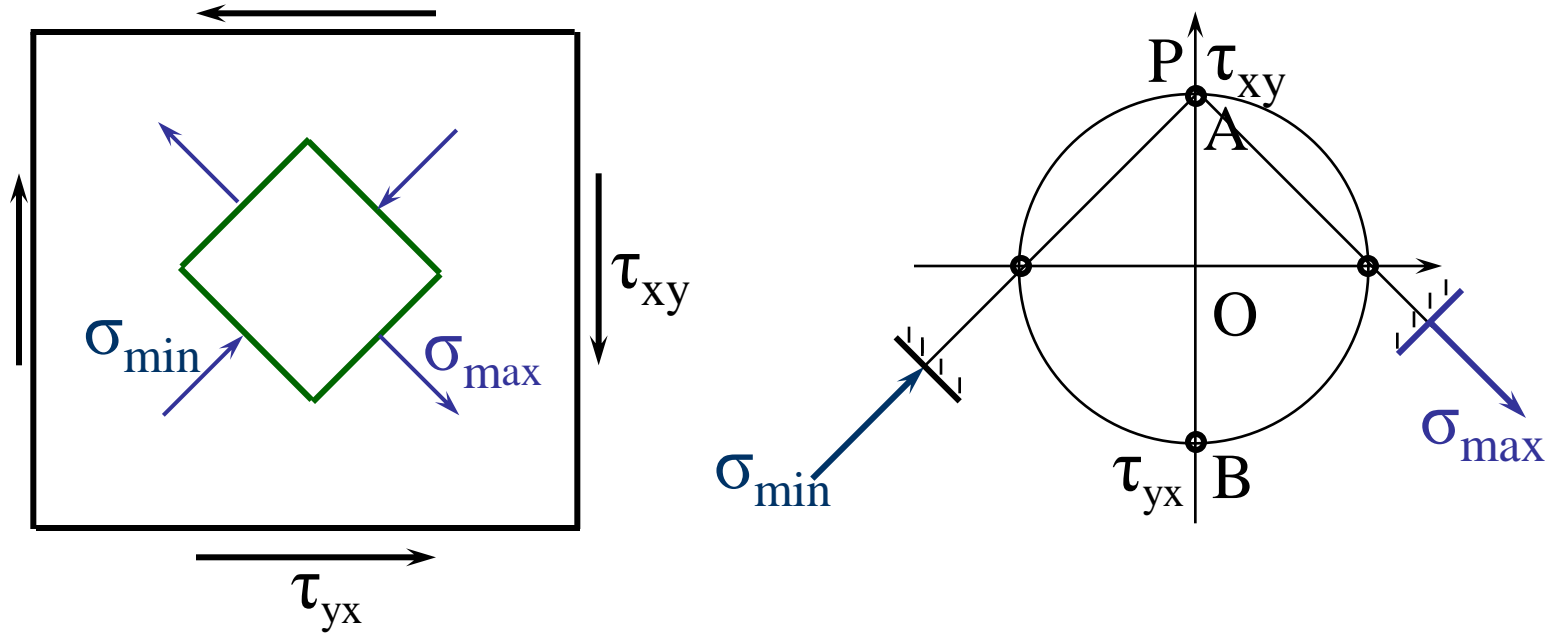
$$\sigma_{\max/\min} = \frac{400}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{400}{2}\right)^2 + 200^2}; \quad \sigma_{\max} = kOD = 483 \text{ kN/cm}^2;$$

$$\sigma_{\min} = k.OE = -83 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\sigma_{\max} = 483 \text{ kN/cm}^2; \quad \sigma_{\min} = -83 \text{ N/cm}^2.$$

$$\alpha_1 = 0,5 \arctg\left(-\frac{200 \times 2}{400}\right) = -22^\circ 3'$$

3.2.3. Trạng thái ứng suất trượt thuần túy



$$\sigma_{\max} = \tau_{xy}$$
$$\sigma_{\min} = -\tau_{xy}$$

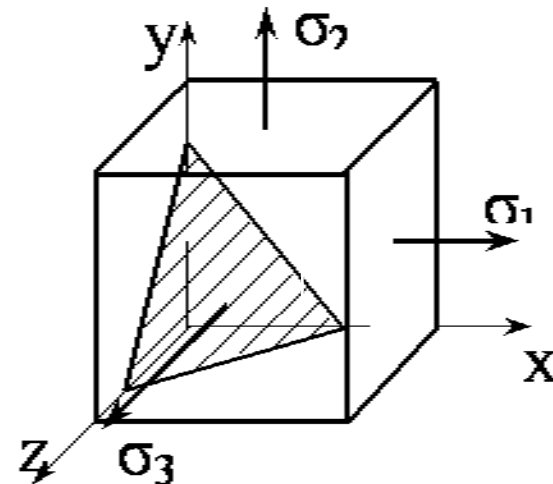
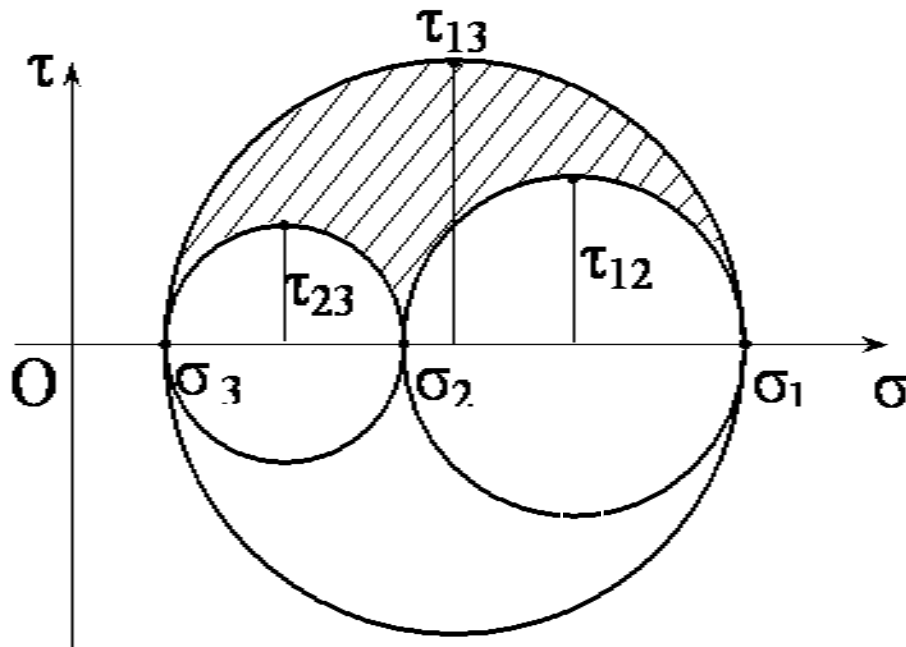
3.4. Khái niệm về trạng thái ứng suất khối

- Ba vòng tròn ứng suất tâm C_1, C_2, C_3 ứng với các cặp: $(\sigma_1, \sigma_2); (\sigma_2, \sigma_3); (\sigma_3, \sigma_1)$

*Ứng suất trên một mặt nghiêng bất kỳ ứng với các tọa độ của điểm nằm trong vùng gạch chéo giữa ba vòng tròn Mo.

Ứng suất tiếp cực đại: $\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$

(3. 5)



• 3.5. Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng. Định luật Húc

3.5.1. Trạng thái ứng suất kéo (nén) đơn.

Biến dạng dài tương đối theo phương dọc:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3.6)$$

Biến dạng tương đối theo phương ngang:

$$\varepsilon' = -\mu \frac{\sigma}{E} \quad (3.7)$$

μ - hệ số Poatxông;

Ứng suất pháp không gây ra biến dạng góc.

3.5.2. Trạng thái ứng suất trượt thuần túy.

Phân tử được xét chỉ có biến dạng góc, không có biến dạng dài.

$$\gamma = \frac{\tau}{G} ; \quad (3.8)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} ; \quad (3.9)$$

G - môđun trượt;

- 3.5.3. Trạng thái ứng suất tổng quát.

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \left(-\mu \frac{\sigma_y}{E}\right) + \left(-\mu \frac{\sigma_z}{E}\right). \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

(3. 10)

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \quad (3. 11)$$

Biến dạng thể tích tương đối θ .

Trước biến dạng: dx, dy, dz , $dV = dxdydz$.

Sau biến dạng:

$$dx(1 + \varepsilon_x); \quad dy(1 + \varepsilon_y); \quad dz(1 + \varepsilon_z);$$

$$dV_1 = dxdydz(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z).$$

$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \frac{dxdydz[(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1]}{dxdydz};$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.12)$$

$$+ (3.10) \longrightarrow \theta = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (3.13)$$

(3.10), (3.11), (3.13) \longrightarrow **định luật Húc tổng quát.**

• 3.6. Thế năng biến dạng đàn hồi.

Thế năng riêng biến dạng đàn hồi (trạng thái ứng suất đơn):

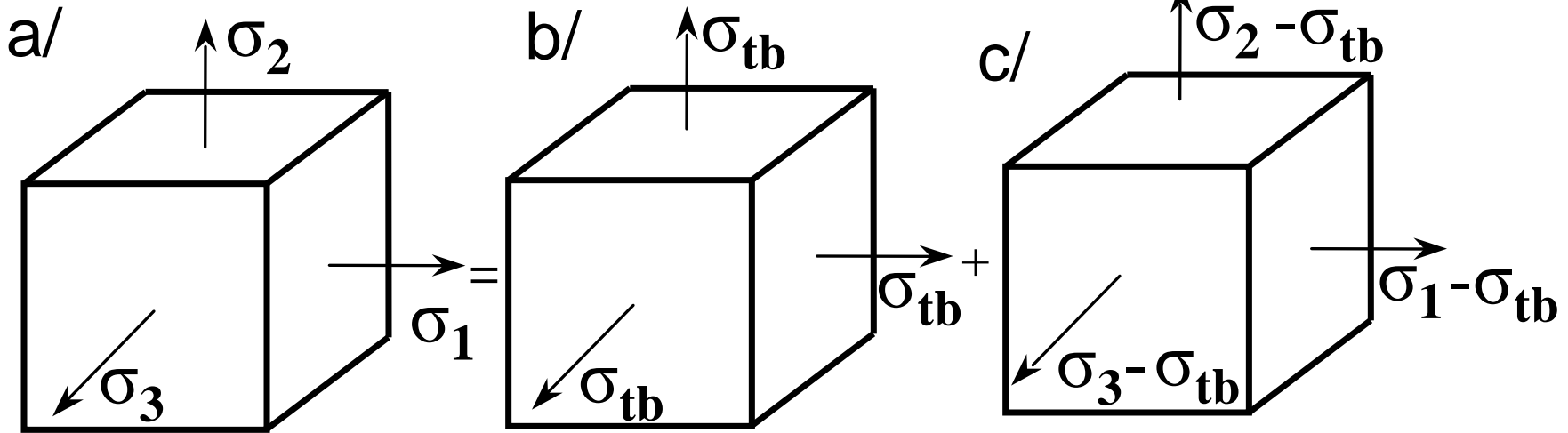
$$u = \frac{\sigma \varepsilon}{2}$$

Trạng thái ứng suất khối với

các ứng suất chính $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: $u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ xác định theo công thức (3. 10) \longrightarrow

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]. \quad (3. 14)$$



$$\sigma_{tb} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

* Phân tố trên hình b/ chịu kéo đều theo ba phương với σ_{tb} sẽ không thay đổi hình dáng, chỉ thay đổi kích thước các cạnh, nghĩa là chỉ thay đổi thể tích.

* Phân tố trên hình c/:

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_{tb}, \quad \sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_{tb},$$

$$\sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_{tb}. \quad \sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3\sigma_{tb} = 0;$$

+ (3. 12) \longrightarrow chỉ biến dạng hình dáng

$$\longrightarrow \quad u = u_{tt} + u_{hd}.$$

$$(3.14) \quad \longrightarrow \quad u = u_{tt} + u_{hd}.$$

$$u_{tt} = \frac{1}{2E} \left[\sigma_{tb}^2 + \sigma_{tb}^2 + \sigma_{tb}^2 - 2\mu(\sigma_{tb}\sigma_{tb} + \sigma_{tb}\sigma_{tb} + \sigma_{tb}\sigma_{tb}) \right];$$

$$u_{tt} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (3.15)$$

$$u_{hd} = u - u_{tt};$$

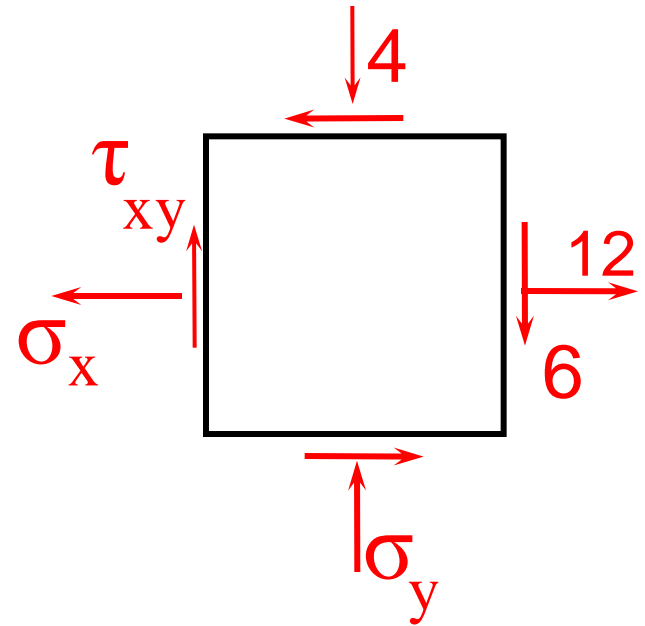
$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{3E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right].$$

$$(3.16)$$

Thí dụ 3. 3. Một phân tử hình lập phương làm bằng thép ở trạng thái ứng suất phẳng (đơn vị tính kN/cm^2).

Xác định :

1. Trị số và phương của các ứng suất chính;
2. Ứng suất tiếp cực đại;
3. Biến dạng dài tương đối;
4. Biến đổi thể tích tương đối;
5. Thế năng biến đổi hình dáng riêng.



Biết $\mu = 0,3$; $E = 2 \cdot 10^4 kN / cm^2$.

1. (3. 4) \longrightarrow

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \tau_{xy} = \frac{12 + 4}{2} + 6 = 14$$
$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \tau_{xy} = \frac{12 + 4}{2} - 6 = 0$$
$$\sigma_1 = 14 \text{ kN/cm}^2; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -6 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 14 \text{ kN/cm}^2; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -6 \text{ kN/cm}^2.$$

$$(3. 4) \longrightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_o = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2 \cdot 6}{12 - 4} = -0,75;$$

$$2\alpha_o = -37^\circ; \alpha_o = -18^\circ 30'.$$

$$2. \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2}(14 + 6) = 10 \text{ kN/cm}^2.$$

$$3. \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) = \frac{1}{2 \cdot 10^4}[12 - 0,3(-4)] = 6,6 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = \frac{1}{2 \cdot 10^4}(-4 - 0,3 \cdot 12) = -3,8 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\mu}{E}(-\sigma_x - \sigma_y) = \frac{0,3}{2 \cdot 10^4}[-12 - (-4)] = -1,2 \cdot 10^{-4}.$$

$$4. \quad \theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 10^{-4}(6,6 - 3,8 - 1,2) = 1,6 \cdot 10^{-4}$$

$$\theta = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1 - 2 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^5}(12 - 4) = 1,6 \cdot 10^{-4}.$$

$$5. \quad \longrightarrow u_{hd} = \frac{1 + \mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3) =$$
$$= \frac{1 + 0,3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5}[14^2 + (-6)^2 - 14 \cdot (-6)] = 68 \text{ kN/cm}^2.$$

• 3.7. Khái niệm về các thuyết bền.

Điều kiện bền ở trạng thái ứng suất đơn:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma]_k; \quad |\sigma_{\min}| = |\sigma_3| \leq [\sigma]_n. \quad (3.17)$$

$$[\sigma]_k = \frac{\sigma_c}{n_c}; \quad [\sigma]_n = \frac{\sigma_B}{n_B}. \quad (3.18)$$

n_B và n_C là hệ số an toàn theo giới hạn chảy hay giới hạn bền.

• Vượt qua những khó khăn bằng các giả thuyết về nguyên nhân phá huỷ của vật liệu (các *thuyết bền*).

* Các yếu tố ảnh hưởng đến độ bền của vật liệu: ứng suất pháp, ứng suất tiếp, biến dạng dài, thế năng biến dạng . . . có thể được chọn làm tiêu chí để đánh giá độ bền của vật liệu .

3.8. Thuyết ứng suất pháp lớn nhất (thuyết bền thứ nhất).

Vật liệu ở trạng thái ứng suất phức tạp (phẳng hay khối) bị phá huỷ khi giá trị lớn nhất của ứng suất pháp đạt tới giá trị giới hạn của ứng suất kéo (hay nén) của phân tử ở trạng thái ứng suất đơn.

$$\begin{aligned}\sigma_{td1} &= \sigma_1 \leq [\sigma]_k; \\ \sigma_{td2} &= |\sigma_3| \leq [\sigma]_n.\end{aligned}\tag{3. 19}$$

3. 9. Thuyết bền biến dạng dài tương đối lớn nhất (thuyết bền thứ hai).

Vật liệu ở trạng thái ứng suất phức tạp (phẳng, khối) bị phá hủy khi biến dạng dài tương đối lớn nhất đạt tới giá trị giới hạn của biến dạng dài tương đối ở trạng thái ứng suất đơn: $\varepsilon_1 \leq [\varepsilon]$.

Ở trạng thái ứng suất khối :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Trường hợp ứng suất đơn: $[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$

$$\longrightarrow \sigma_{td2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (3. 20)$$

Thuyết bền thứ hai tương đối phù hợp với vật liệu giòn.

3. 10. Thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (thuyết bền thứ ba).

Vật liệu dẻo bị phá huỷ khi ứng suất tiếp lớn nhất của phân tố ở trạng thái ứng suất phức tạp đạt tới giá trị của ứng suất tiếp nguy hiểm của phân tố ở trạng thái ứng suất đơn:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$
$$(3. 5) \quad \longrightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} ;$$
$$(2. 8) \quad \longrightarrow \quad [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} .$$
$$\sigma_{td3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] . \quad (3. 21)$$

- **3. 11. Thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng**
(thuyết bền thứ tư).

Vật liệu bị phá huỷ khi thế năng biến đổi hình dáng của phân tử ở trạng thái ứng suất phức tạp đạt tới giá trị nguy hiểm của thế năng biến đổi hình dáng của phân tử ở trạng thái ứng suất đơn:

$$u_{hd} \leq [u_{hd}].$$

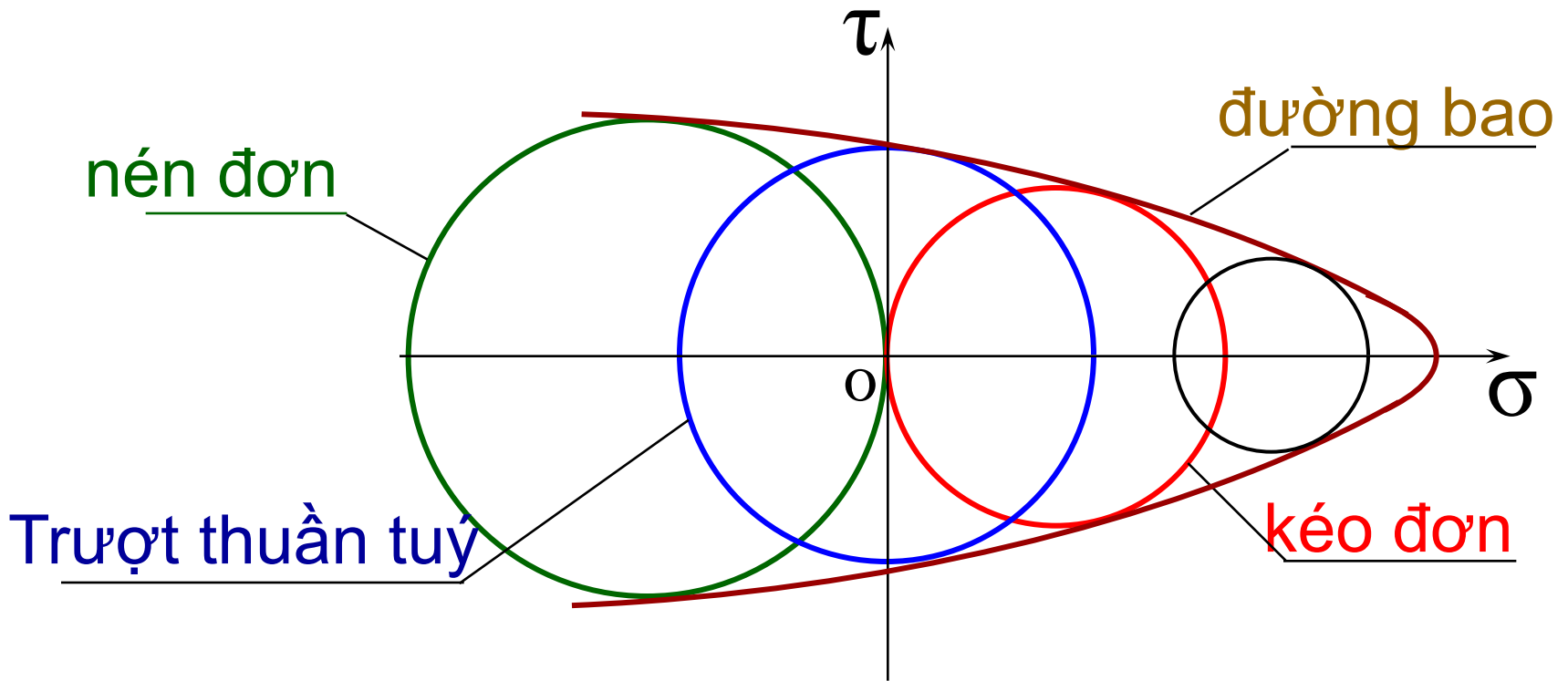
$$(3. 16) \rightarrow [u_{hd}] = \frac{1+\mu}{E} [\sigma]^2;$$

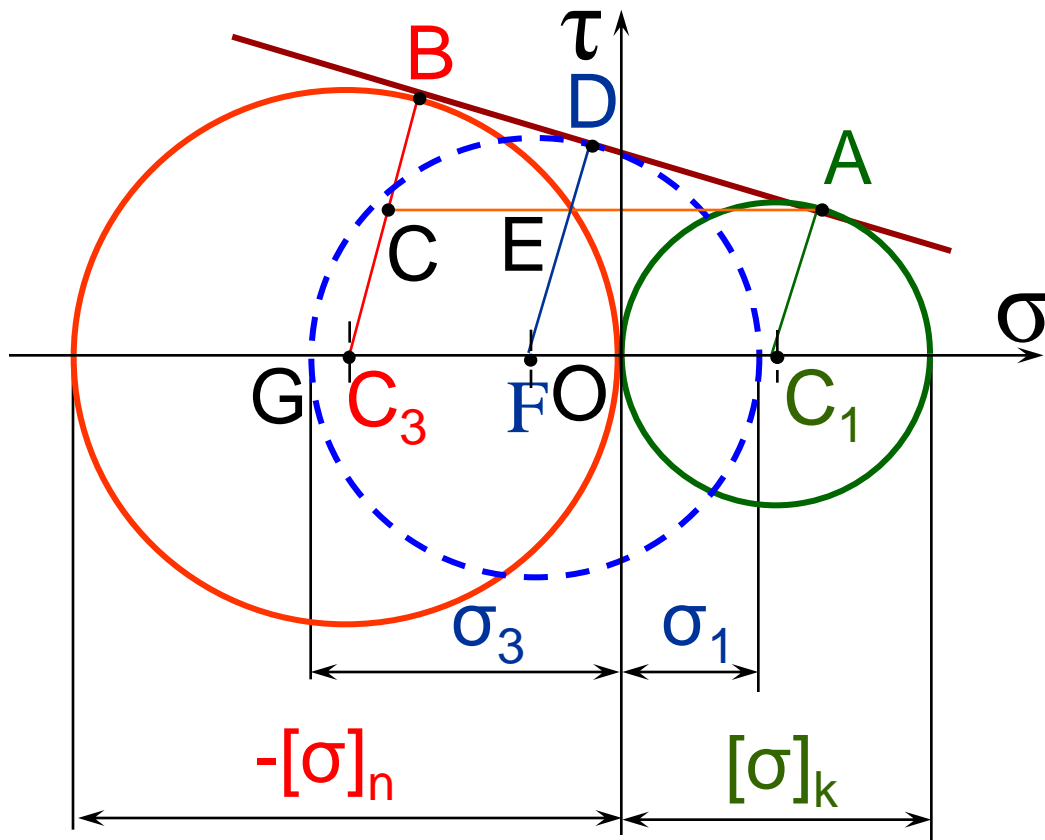
$$u_{hd} = \frac{1+\mu}{E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1);$$

$$\sigma_{td4} = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)} \leq [\sigma]. \quad (3. 22)$$

Thuyết bền này phù hợp với vật liệu dẻo và được dùng rộng rãi trong chế tạo máy, trong xây dựng.

3.11. Thuyết bền Mo (thuyết trạng thái ứng suất giới hạn).





$$EA = FC_1 = FO + OC_1;$$

$$FO = GO - GF;$$

$$= -\bar{\sigma}_3 - 0,5(\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)$$

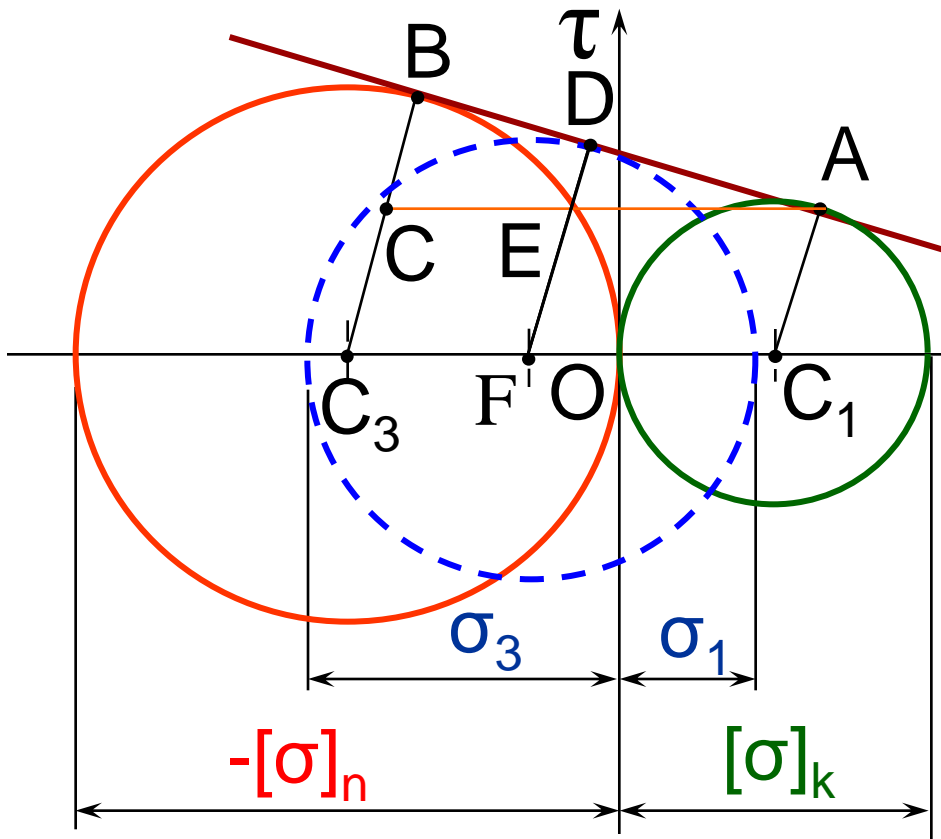
$$= -0,5(\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_3);$$

$$OC_1 = 0,5[\bar{\sigma}].$$

$$AE = 0,5([\bar{\sigma}] - \bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3)$$

$$BC = \frac{1}{2}([\sigma]_n - [\sigma]_k); \quad DE = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3 - [\sigma]_k);$$

$$CA = C_3C_1 = \frac{1}{2}([\sigma]_k + [\sigma]_n); \quad EA = \frac{1}{2}([\sigma]_k - \sigma_1 - \sigma_3).$$



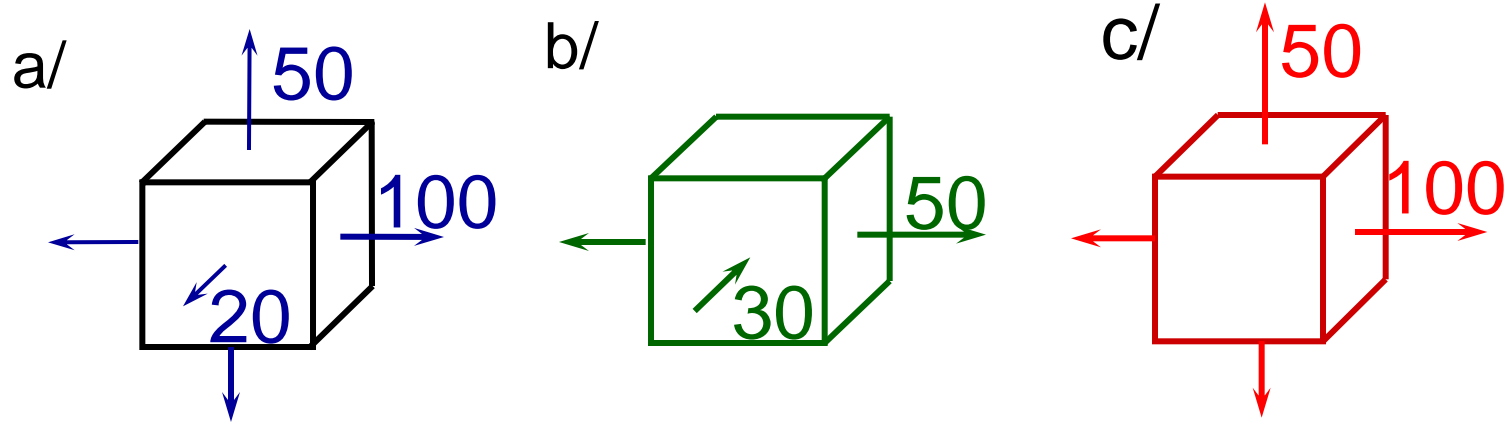
$$\frac{BC}{CA} = \frac{DE}{EA} \quad (a)$$

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} \sigma_3 = [\sigma]_k \quad (b)$$

$$k = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} ; \sigma_1 - k\sigma_3 = [\sigma]_k \quad \sigma_{tdM} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq [\sigma]_k .$$

(3. 23)

- **Thí dụ 3. 4.** Tìm phân tử làm bằng vật liệu dẻo ở trạng
- thái ứng suất nguy hiểm của phân tử (đơn vị đo kN/cm²)



Vật liệu dẻo chịu kéo, nén như nhau nên có thể sử dụng thuyết bền ba để xác định ứng suất tương đương:

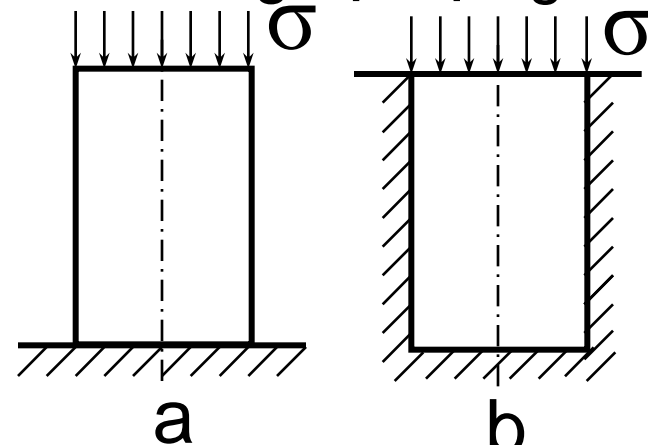
$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$a/ \quad \sigma_{td} = 100 - 20 = 80 \text{ kN} / \text{cm}^2;$$

$$b/ \quad \sigma_{td} = 50 - (-30) = 80 \text{ kN} / \text{cm}^2;$$

$$c/ \quad \sigma_{td} = 100 - 0 = 100 \text{ kN} / \text{cm}^2;$$

- **Thí dụ 3. 5.** Dùng thuyết bền Mo so sánh các ứng suất
- tương đương trong hai khối lăng trụ làm bằng vật liệu giòn
- ở hai trường hợp
 a/Nén tự do;
 b/Nén trong ổ cứng không cho phép nở ngang.



a. Các ứng suất chính:

$$\sigma_1 = 0; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \sigma. \quad \sigma_{td} = \sigma_1 - k\sigma_3 = -k\sigma. \quad (a)$$

b. Ứng suất theo phương ngang của lăng trụ (σ'):

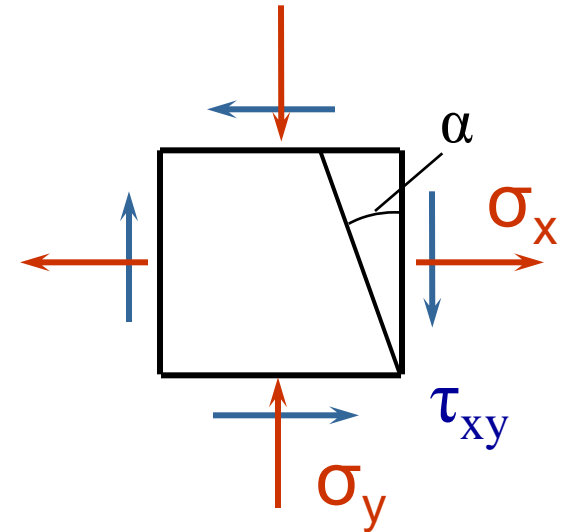
$$\varepsilon' = \frac{[\sigma' - \mu(\sigma + \sigma')]}{E} = 0; \quad \sigma' = \frac{\mu\sigma}{1 + \mu} = \sigma_1 = \sigma_2; \quad \sigma_3 = \sigma;$$

$$\sigma_{tdM} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \left(\frac{\mu}{1 + \mu} - k \right) \sigma. \quad (b)$$

So sánh (a) và (b) ta thấy ứng suất tương đương giảm.

BÀI TẬP SỐ 4 - TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

Xác định trị số và phương của các ứng suất chính, ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt nghiêng α bằng công thức giải tích và bằng cách vẽ.



1/ Phương pháp giải tích

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \rightarrow \alpha_1; \alpha_2. \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\sigma_x = 12 \text{ kN/cm}^2; \sigma_y = -6 \text{ kN/cm}^2; \tau_{xy} = 6 \text{ kN/cm}^2; \alpha = 20^\circ.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{16-6}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(12+6)^2 + 4.6} = 13,82 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\sigma_{\min} = \frac{12-6}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(12+6)^2 + 4.6} = -7,82 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\sigma_1 = 13,82 \text{ kN/cm}^2; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = -7,82 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\tau_{\max} = \frac{13,82 + 7,82}{2} = 10,82 \text{ kN/cm}^2.$$

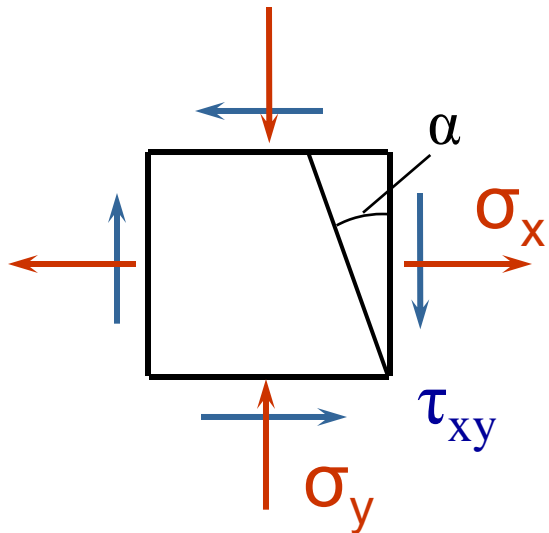
$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{2.6}{12+6} = -\frac{2}{3}; \alpha_{11} = -16^\circ 50'; \alpha_{12} = 73^\circ 10'.$$

$$\sigma_\alpha = 12 \cos^2 20^\circ - 6 \sin^2 20^\circ - 6 \sin 40^\circ = 6,04 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\tau_\alpha = \frac{12+6}{2} \sin 40^\circ + 6 \cos 40^\circ = 10,38 \text{ kN/cm}^2.$$

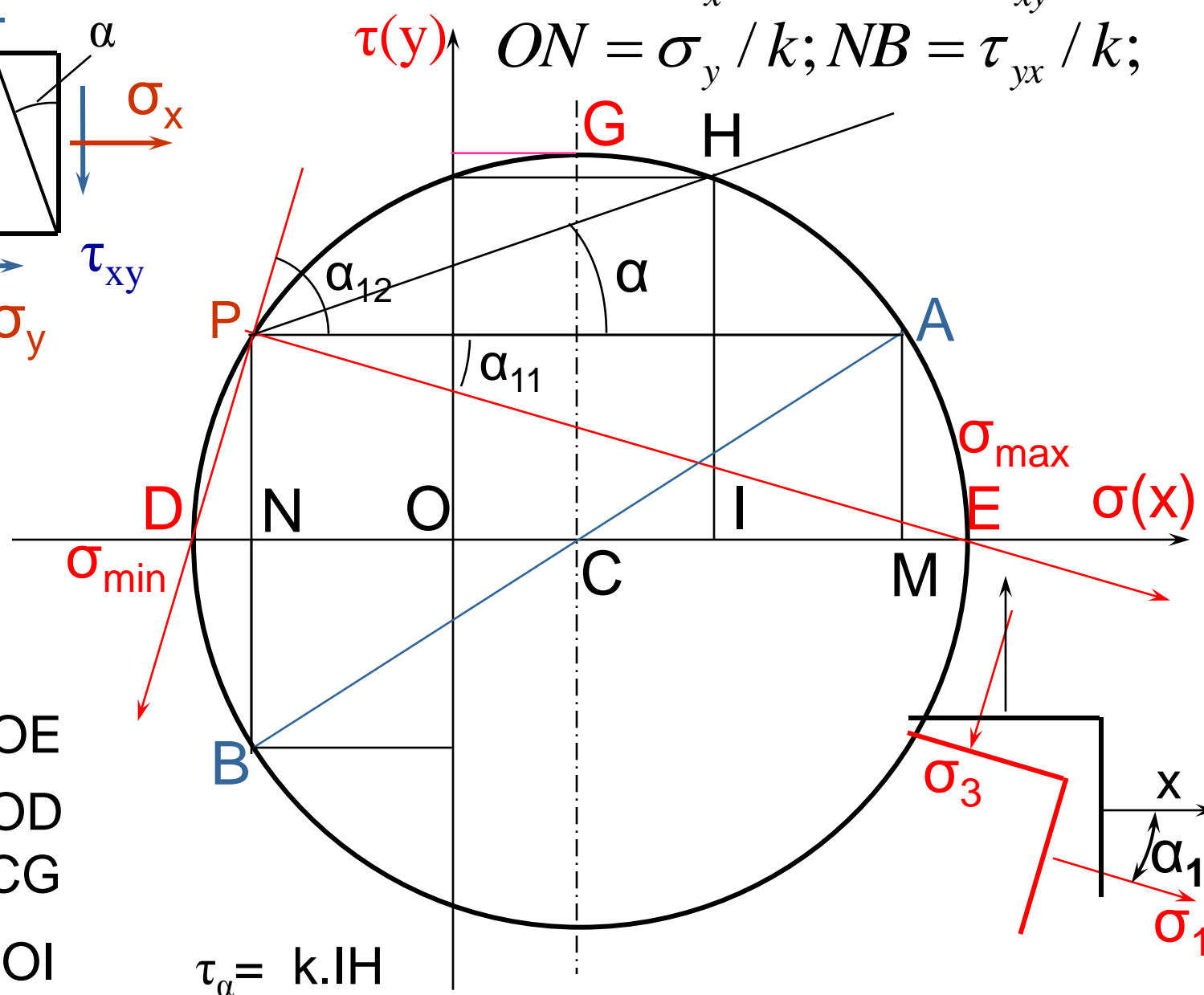
2. Phương pháp vẽ

- Chọn tỷ lệ xích, vẽ hệ tọa độ.
- Vẽ vòng tròn ứng suất đường kính $A(\sigma_x, \tau_{xy}), B(\sigma_y, \tau_{yx})$.
- Tìm $\sigma_{\max}(E), \sigma_{\min}(D), \tau_{\max}(G)$.
- Tìm cực P, phương của ứng suất chính(α_{11}), mặt chính.
- Tìm điểm $H(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$.



$$OM = \sigma_x / k; MA = \tau_{xy} / k;$$

$$ON = \sigma_y / k; NB = \tau_{yx} / k;$$



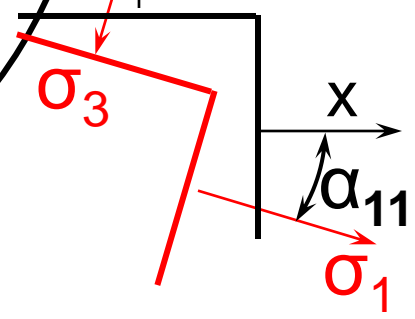
$$\sigma_{\max} = k \cdot OE$$

$$\sigma_{\min} = k \cdot OD$$

$$\tau_{\max} = k \cdot CG$$

$$\sigma_{\alpha} = k \cdot OI$$

$$\tau_{\alpha} = k \cdot IH$$



CHƯƠNG 4

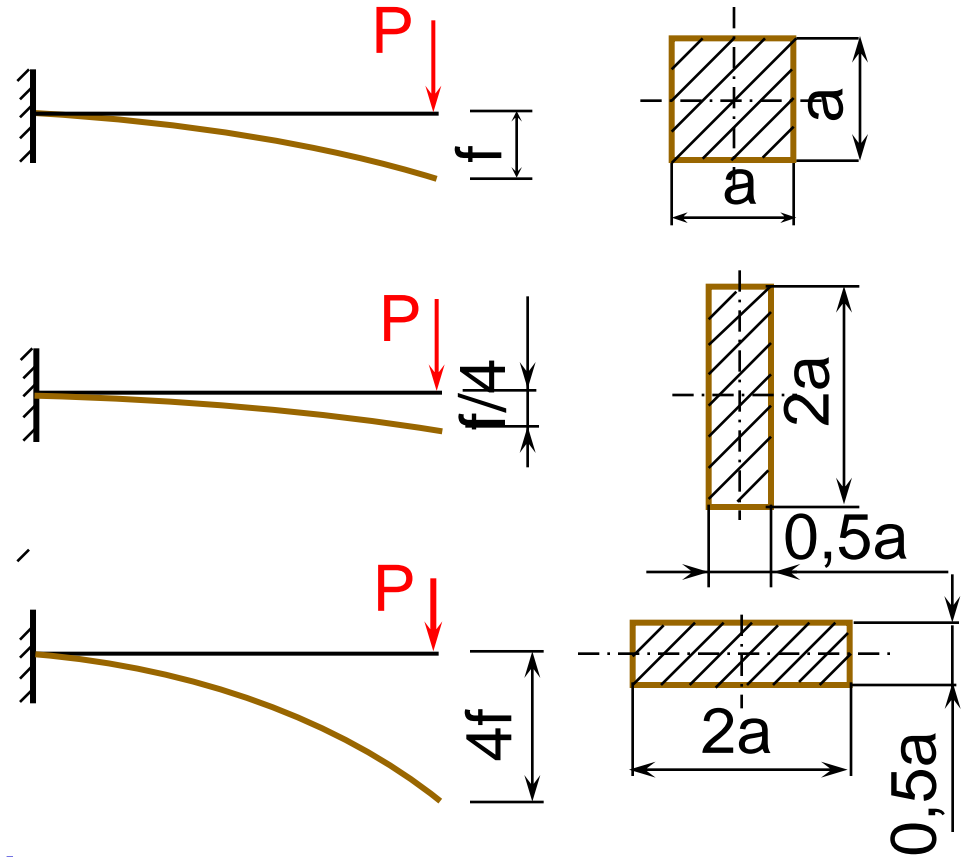
ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT

4.1. Khái niệm.

Khả năng chịu lực và biến dạng của vật thể phụ thuộc:

- diện tích mặt cắt ngang

- sự phân bố của mặt cắt so với phương tác dụng của lực .



4.2. Momen tĩnh.

Diện tích của hình $F = \int_F dF$ (4. 1)

Momen tĩnh của hình đối với các trục x và y $S_x = \int_F y dF$; $S_y = \int_F x dF$. (4. 2)

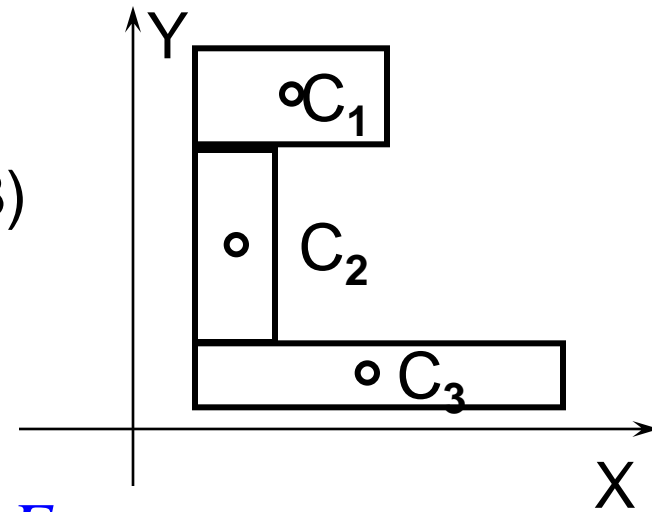
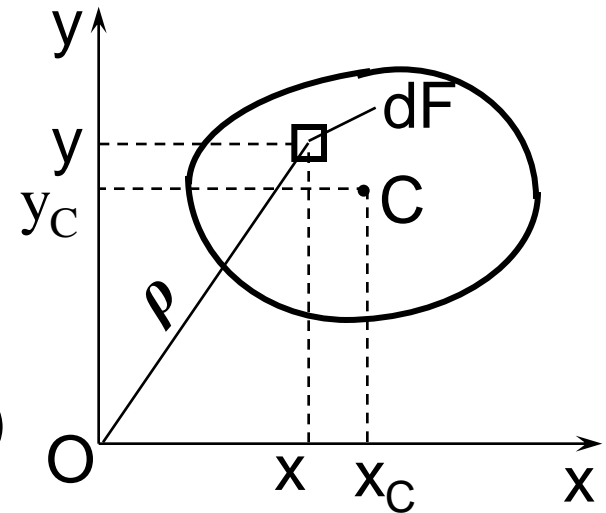
Momen tĩnh có thứ nguyên **[chiều dài]³** và có giá trị dương, âm hay bằng không.

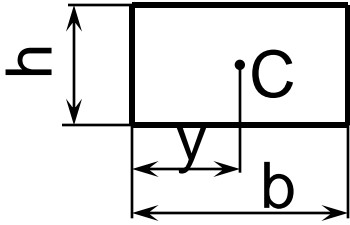
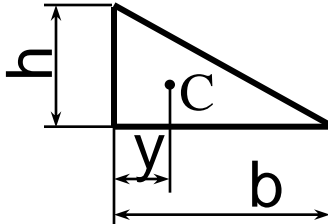
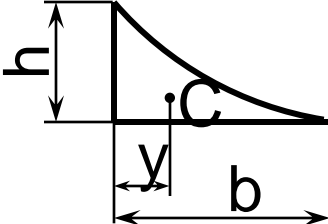
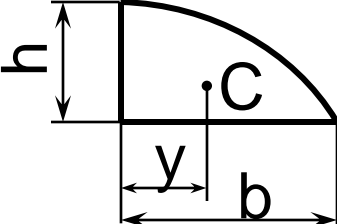
Định lý Varinhông $x_c = \frac{S_y}{F}$; $y_c = \frac{S_x}{F}$. (4. 3)

Trường hợp hình phẳng được ghép từ nhiều phần

$$x_c = \frac{\sum F_i \cdot x_{ci}}{\sum F_i}; \quad y_c = \frac{\sum F_i \cdot y_{ci}}{\sum F_i}; \quad (4. 4)$$

F_i, x_{ci}, y_{ci} - diện tích và tọa độ trọng tâm của từng phần hình phẳng.



| Hình | Diện tích | Trọng tâm |
|---|-------------|------------|
|  | $F = bh$ | $y = b/2$ |
|  | $F = bh/2$ | $y = b/3$ |
|  | $F = bh/3$ | $y = b/4$ |
|  | $F = 2bh/3$ | $y = 3b/8$ |

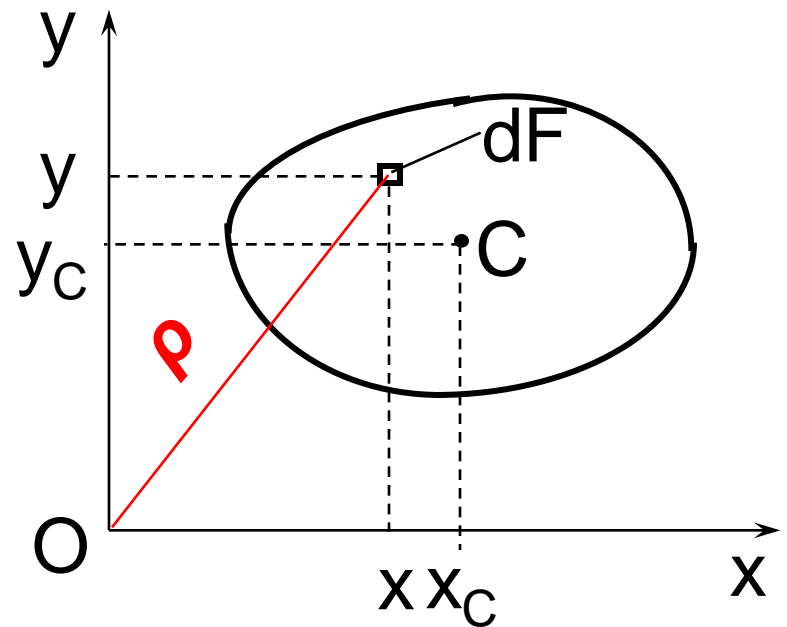
Momen quán tính trục

$$I_x = \int_F y^2 dF; \quad I_y = \int_F x^2 dF. \quad (4.5)$$

4.3. Momen quán tính.

Momen quán tính ly tâm

$$I_{xy} = \int_F xy dF. \quad (4.6)$$



Momen quán tính cực đối
với một điểm (cực) O :

$$I_p = \int \rho^2 dF = I_x + I_y. \quad (4.7)$$

Trục trung tâm - trục đi qua trọng tâm;

Trục chính – momen quán tính ly tâm $I_{xy} = 0$;

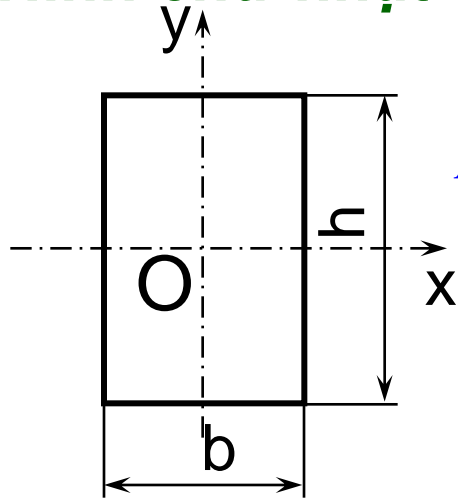
Momen quán tính trục của hình phẳng đối với hai trục
chính trung tâm **có giá trị cực đại hay cực tiểu**

Trục đối xứng - trục chính trung tâm;

Hình phẳng có trên hai trục đối xứng: **mọi trục trung tâm
đều là trục chính**

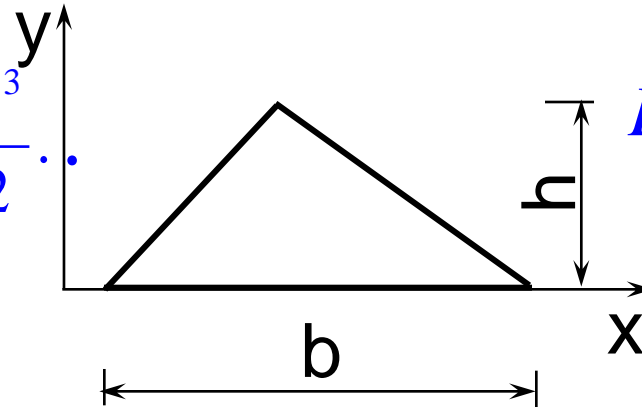
• 4.4. Momen quán tính của một số hình đơn giản.

Hình chữ nhật



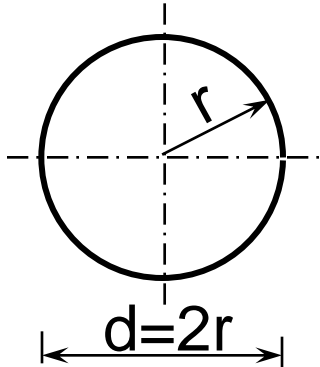
$$I_x = \frac{bh^3}{12}; I_y = \frac{hb^3}{12} \quad (4.8)$$

Hình tam giác



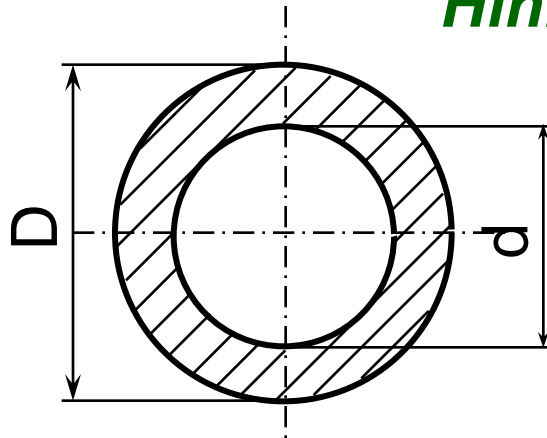
$$I_x = \frac{bh^3}{12} \quad (4.9)$$

Hình tròn



$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4 \quad (4.10)$$

Hình vành khăn.



$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4); ,$$

$$I_x = I_y \approx 0,05D^4 (1 - \alpha^4)$$

$$\alpha = d/D \quad (4.11)$$

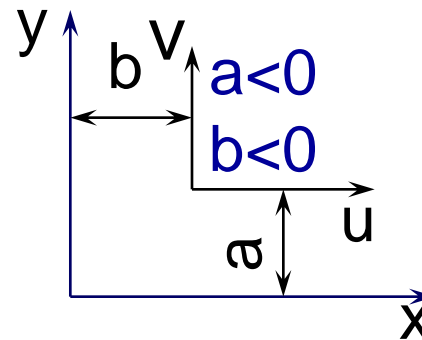
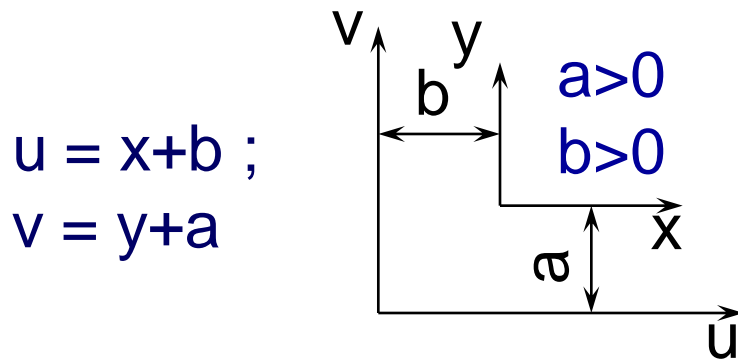
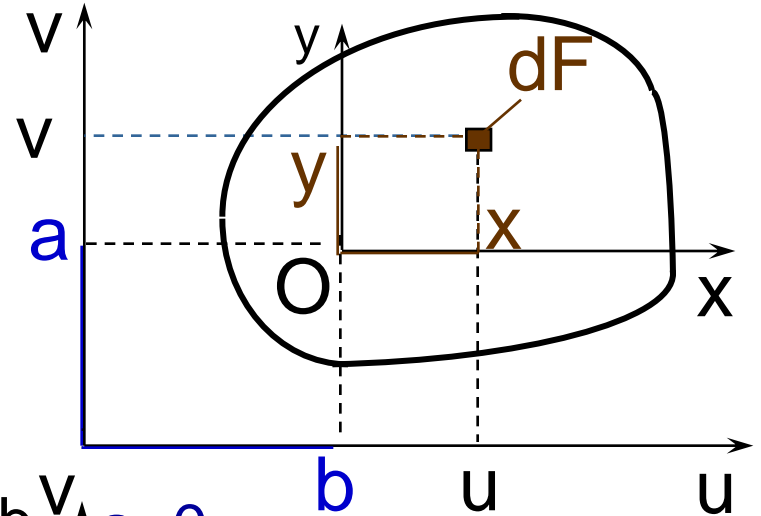
• 4.5. Công thức biến đổi hệ trục tọa độ.

4.5.1. Công thức chuyển trục song song.

$$I_u = I_x + 2aS_x + a^2F;$$

$$I_v = I_y + 2bS_y + b^2F; \quad (4.12)$$

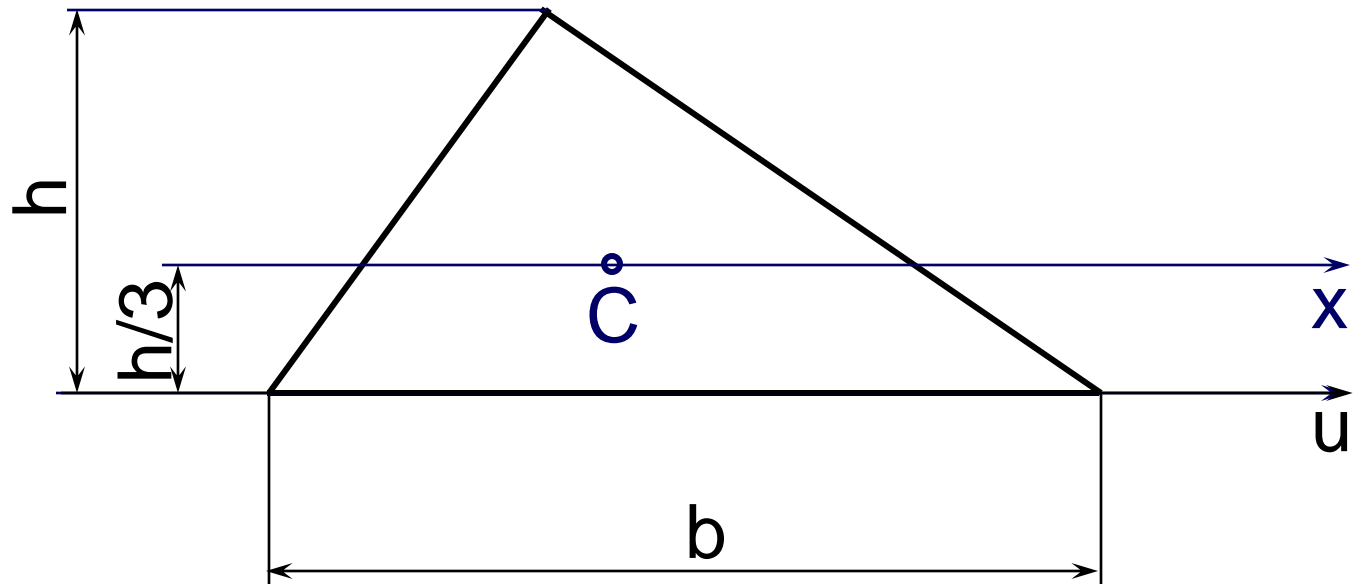
$$I_{uv} = I_{xy} + bS_x + aS_y + abF.$$



Nếu các trục x, y là trục trung tâm $S_x = S_y = 0$

$$I_u = I_x + a^2F; \quad I_v = I_y + b^2F; \quad I_{uv} = I_{xy} + abF. \quad (4.13)$$

Thí dụ 4.1.



C- trọng tâm của tam giác

$$I_u = \frac{bh^3}{12} = I_x + a^2 F = I_x + \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2};$$

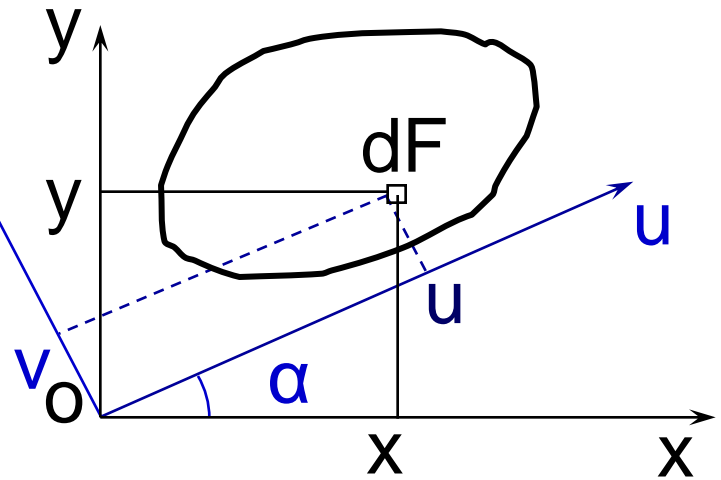
$$I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}.$$

• **4.5.2. Công thức xoay trục.**

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.14)$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (4.15)$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (4.16)$$



• **4.5.3. Trục quán tính chính. Momen quán tính chính.**

Vị trí của trục quán tính chính

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (4.17)$$

Momen quán tính chính

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (4.18)$$

4.5.4. Vòng tròn Mo quán tính.

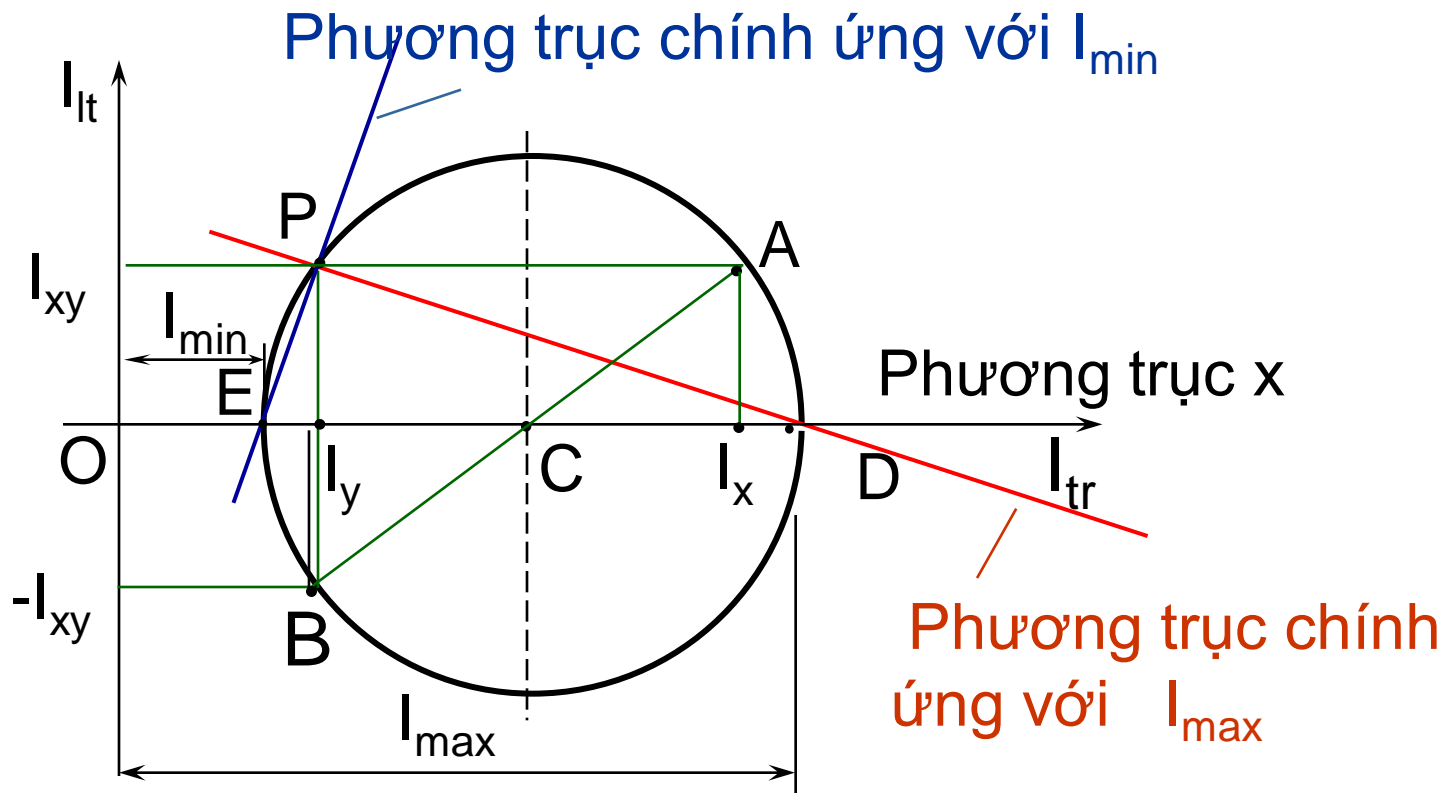
Tỷ lệ xích $k \left(\frac{cm^4}{cm} \right)$

$A(I_x, I_{xy})$

$B(I_y, -I_{xy})$

$D(I_{max}, 0)$

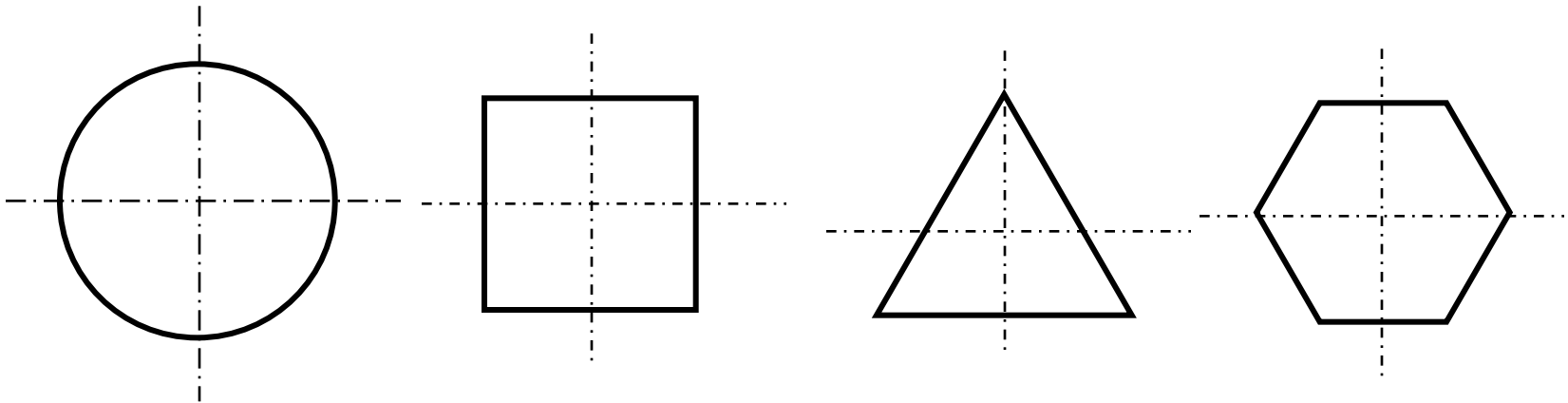
$E(I_{min}, 0)$



4.5.5. Bán kính quán tính.

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}; \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{F} \cdot r_x^2 + r_y^2} = \frac{I_x + I_y}{F} = \text{Const.}$$

Thí dụ 4.1 Xác định vị trí của các trục quán tính chính trung tâm của các hình dưới đây.



Thí dụ 4.2 Xác định vị trí của các trục quán tính chính trung tâm và trị số của các momen quán tính chính trung tâm của hình phẳng. Kích thước của hình được đo bằng cm.

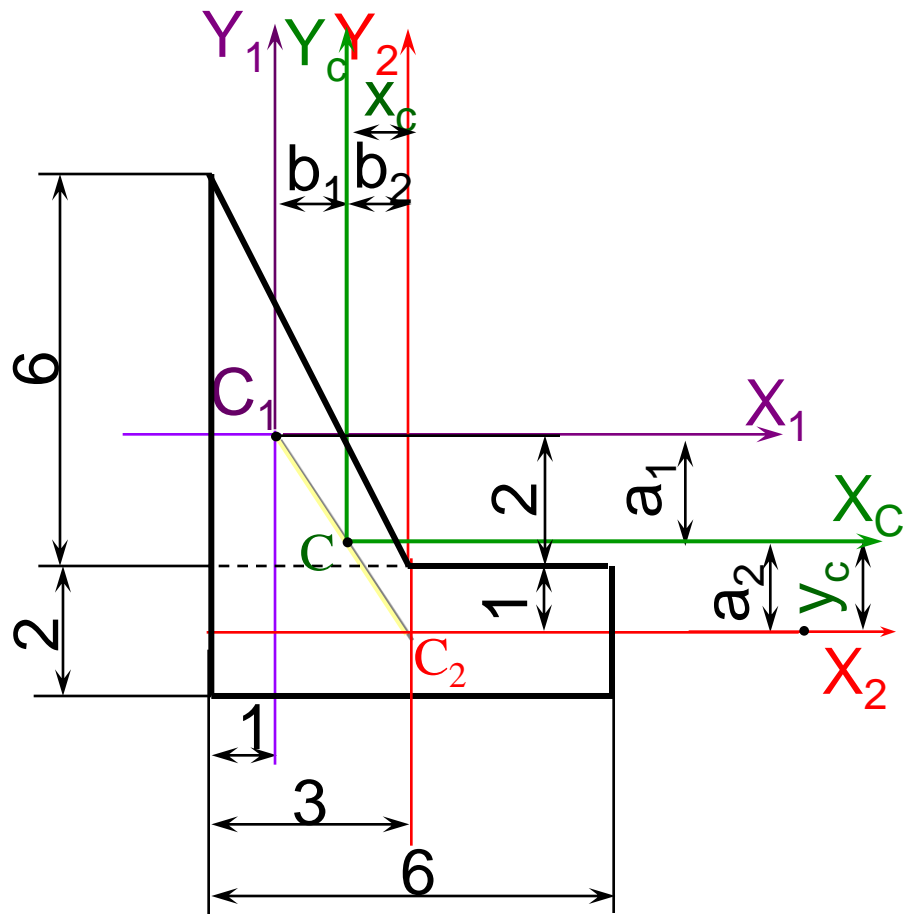
$$x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} =$$

$$\frac{0,5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot (-2) + 6 \cdot 2 \cdot 0}{0,5 \cdot 3 \cdot 6 + 6 \cdot 2}$$

$$= -0,857 \text{ cm}$$

$$y_C = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} =$$

$$\frac{0,5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \cdot 0}{0,5 \cdot 3 \cdot 6 + 6 \cdot 2} = 1,29 \text{ cm}$$



$$J_{x_c} = J_{x_1}^I + F_1 a_1^2 + J_{x_2}^{II} + F_2 a_2^2 = \frac{3 \cdot 6^3}{36} + 0,5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1,71^2 + \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 6 \cdot 3 \cdot (-1,29)^2 = 68,3 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_c} = J_{y_1}^I + F_1 b_1^2 + J_{y_2}^{II} + F_2 b_2^2$$

$$= \frac{6.3^3}{6} + 0,5.3.6.(-1,14)^2 +$$

$$\frac{2.6^3}{12} + 6.2.0,857^2 = 61,1 \text{ cm}^4$$

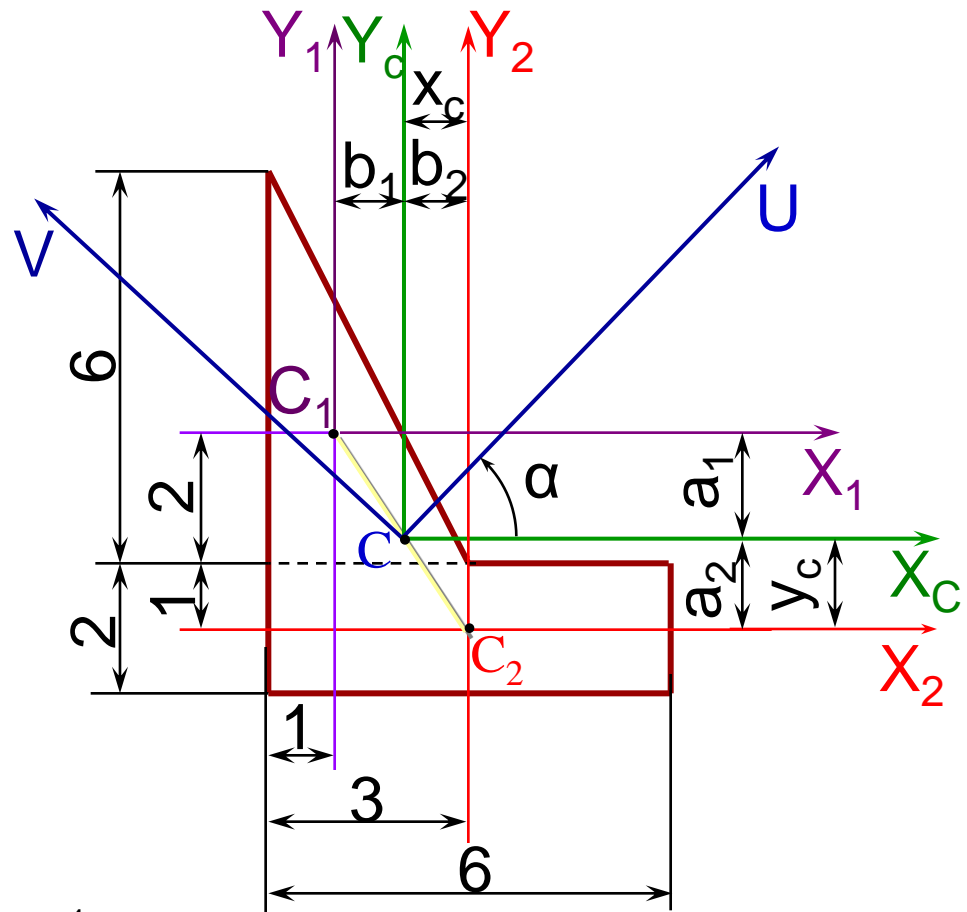
$$J_{x_2 y_c} = J_{x_1 y_1}^I + F_1 a_1 b_1 + J_{x_2 y_2}^{II} +$$

$$F_2 a_2 b_2$$

$$= -\frac{3^2.6^3}{72} + 0,5.3.6.1,71.(-1,14)$$

$$+ 0 + 2.6(-1,29).0,875 = -35,4 \text{ cm}^4$$

- $a_1 = y_1 - y_c = 3 - 1,29 = 1,71 \text{ cm}$; $b_1 = x_1 - x_c = -2 + 0,857 =$
- $-1,14 \text{ cm}$; $a_2 = -y_c = -1,29$; $b_2 = -x_c = 0,857 \text{ cm}$.



$$J_{y_c} = J_{y_1}^I + F_1 b_1^2 + J_{y_2}^{II} + F_2 b_2^2$$

$$= \frac{6.3^3}{6} + 0,5.3.6.(-1,14)^2 +$$

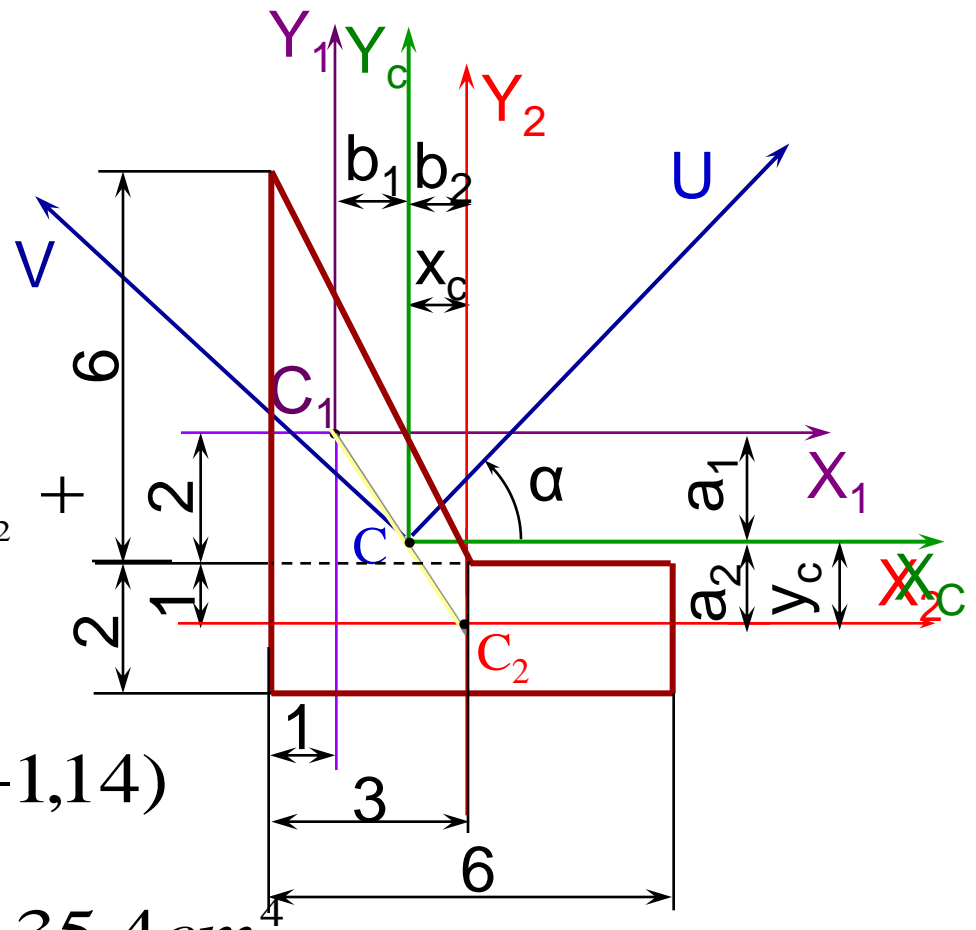
$$\frac{2.6^3}{12} + 6.2.0,857^2 = 61,1 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_c y_c} = J_{x_1 y_1}^I + F_1 a_1 b_1 + J_{x_2 y_2}^{II} +$$

$$F_2 a_2 b_2$$

$$= -\frac{3^2 \cdot 6^3}{72} + 0,5.3.6.1,71.(-1,14)$$

$$+ 0 + 2.6(-1,29).0,875 = -35,4 \text{ cm}^4$$



- $a_1 = y_1 - y_c = 3 - 1,29 = 1,71 \text{ cm}$; $b_1 = x_1 - x_c = -2 + 0,857 =$
- $-1,14 \text{ cm}$; $a_2 = -y_c = -1,29 \text{ cm}$; $b_2 = -x_c = 0,857 \text{ cm}$.

$$a_1 = y_1 - y_C = 3 - 1,29 = 1,71 \text{ cm}; \quad b_1 = x_1 - x_C = -2 + 0,857 = -1,14 \text{ cm};$$

$$a_2 = -y_C = -1,29; \quad b_2 = -x_C = 0,857 \text{ cm}.$$

Kiểm tra

$$\frac{|a_1|}{|a_2|} = \frac{|b_1|}{|b_2|} = \frac{F_2}{F_1}; \quad \frac{1,71}{1,29} = \frac{1,14}{0,857} = \frac{12}{9} = 1,33$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2J_{x_c y_c}}{J_{y_c} - J_{x_c}} = \frac{2(-35,4)}{61,1 - 68,3} = 9,83$$

$$2\alpha = 84^\circ 12'; \quad \alpha = 42^\circ 6'$$

$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\frac{(J_{x_c} - J_{y_c})^2}{4} + J_{x_c y_c}^2}$$

$$= \frac{68,3 + 61,1}{2} \pm \sqrt{\frac{(68,3 - 61,1)^2}{4} + (-35,4)^2}$$

$$J_{\max} = 100,3 \text{ cm}^4; \quad J_{\min} = 29,1 \text{ cm}^4.$$

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_{\max} + J_{\min}$$

$$68,3 + 61,1 = 100,3 + 29,1 = 129,4 \text{ cm}^4$$

Thí dụ 4.3 Cho dầm ghép gồm thép hình chữ UN⁰10 và thép góc đều cạnh N⁰8 .

- Xác định vị trí trọng tâm hình ghép;
- Xác định momen quán tính của mặt cắt đối với hai trục trung tâm, - Xác định vị trí của các trục quán tính chính trung tâm và trị số của các momen quán tính chính trung tâm;
- Vẽ mặt cắt có ghi rõ kích thước và vị trí của các trục

Các kích thước của thép chữ UN⁰10

$$h_1^I = 10cm; F_1^I = 10,9cm^2; J_{x_1}^I = 174cm^4; \\ J_{y_1}^I = 20,4cm^4; z^I = 1,44cm^4.$$

Các kích thước của thép góc N⁰8

$$b^{II} = 8cm; F^{II} = 9,38cm^2; J_{x_2}^{II} = J_{y_2}^{II} = 57cm^4; \\ J_{x_2y_2}^{II} = 33,4cm^4; z^{II} = 2,19cm.$$

Các kích thước của thép chữ UN⁰10

$$h_1^I = 10\text{cm}; F_1^I = 10,9\text{cm}^2; J_{x_1}^I = 174\text{cm}^4;$$

$$J_{y_1}^I = 20,4\text{cm}^4; z^I = 1,44\text{cm}.$$

Các kích thước của thép góc N⁰8

$$b^{II} = 8\text{cm}; F^{II} = 9,38\text{cm}^2; J_{x_2}^{II} = J_{y_2}^{II} = 57\text{cm}^4;$$

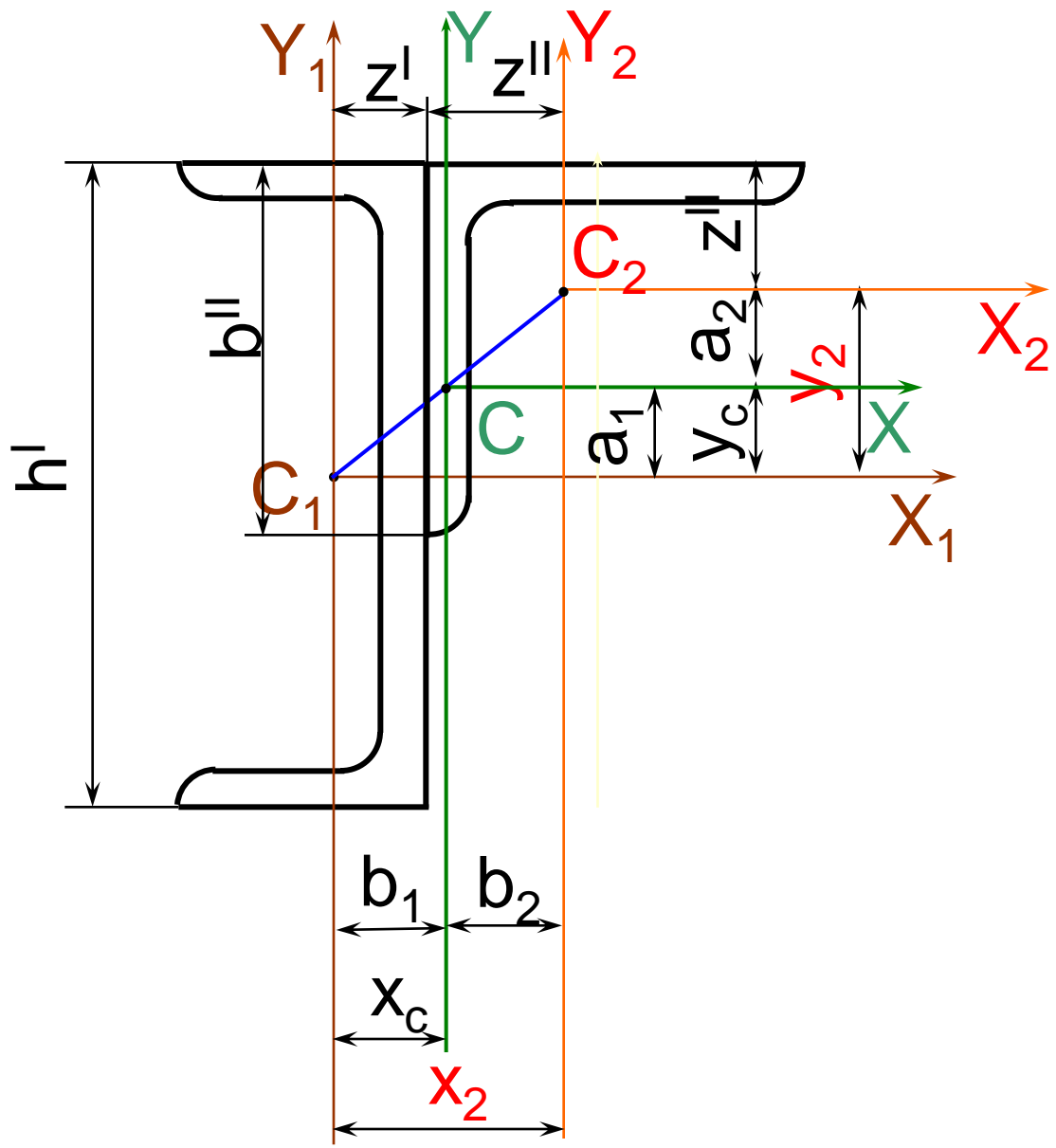
$$J_{x_2 y_2} = 33,4\text{cm}^4; z^{II} = 2,19\text{cm}.$$

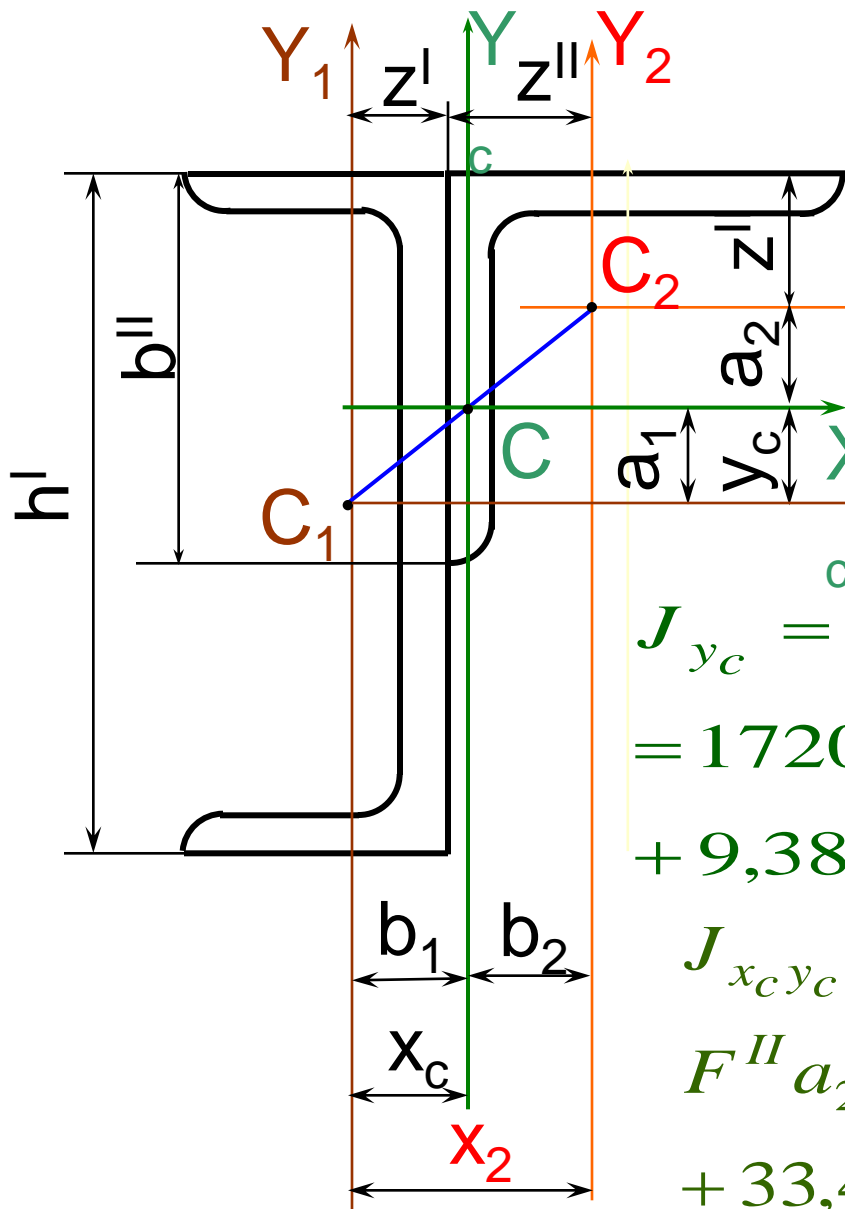
$$x_c = \frac{F^I x_1 + F^{II} \cdot x_2}{F^I + F^{II}} = \frac{10,9 \cdot 0 + 9,38 \cdot 3,63}{10,9 + 9,38} = 1,68\text{cm};$$

$$y_c = \frac{F^I y_1 + F^{II} y_2}{F^I + F^{II}} = \frac{10,9 \cdot 0 + 9,38 \cdot 2,81}{10,9 + 9,38} = 1,30\text{cm};$$

$$x_2 = z^I + z^{II} = 1,44 + 2,19 = 3,63 \text{ cm};$$

$$y_2 = \frac{h^I}{2} - z^{II} = \frac{10}{2} - 2,19 = 2,81\text{cm}.$$





$$\begin{aligned}
 J_{x_c} &= J_{x_1}^I + F^I a_1^2 + J_{x_2}^{II} + F^{II} a_2^2 = \\
 &= 174 + 10,9(-1,3)^2 + 57 + 9,38(1,51)^2 = \\
 &= 271 \text{ cm}^4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{y_c} &= J_{y_1}^I + F^I b_1^2 + J_{y_2}^{II} + F^{II} b_2^2 = \\
 &= 1720,4 + 10,9(-1,68)^2 + 57 \\
 &+ 9,38(1,95)^2 = 144 \text{ cm}^4;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{x_c y_c} &= J_{x_1 y_1}^I + F^I a_1 b_1 + J_{x_2 y_2}^{II} + \\
 &F^{II} a_2 b_2 = 0 + 10,9(-1,3)(-1,68) \\
 &+ 33,4 + 9,38(1,51)(1,95) = 84,8 \text{ cm}^4;
 \end{aligned}$$

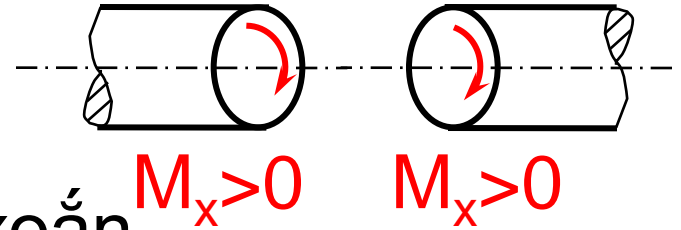
trong đó $a_1 = -y_c = -1,30 \text{ cm}$.

Chương 5

Xoắn và cắt

5.1. Biểu đồ momen xoắn

Chiều dương của momen xoắn



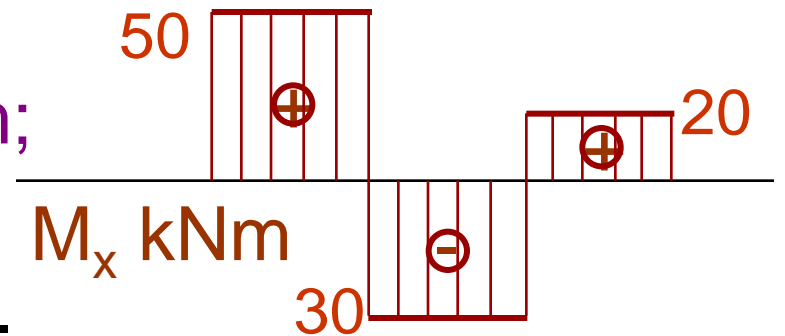
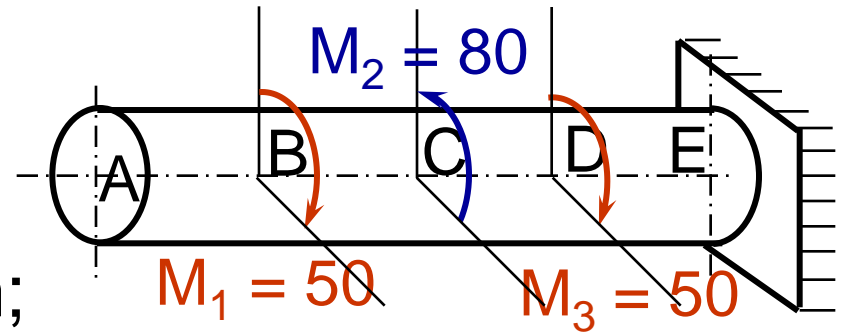
Thí dụ 5. 1. Vẽ biểu đồmomen xoắn

Trên đoạn AB: $M_x = 0$;

trên đoạn BC: $M_x = 50$ kNm;

trên đoạn CD: $M_x = - 30$ kNm;

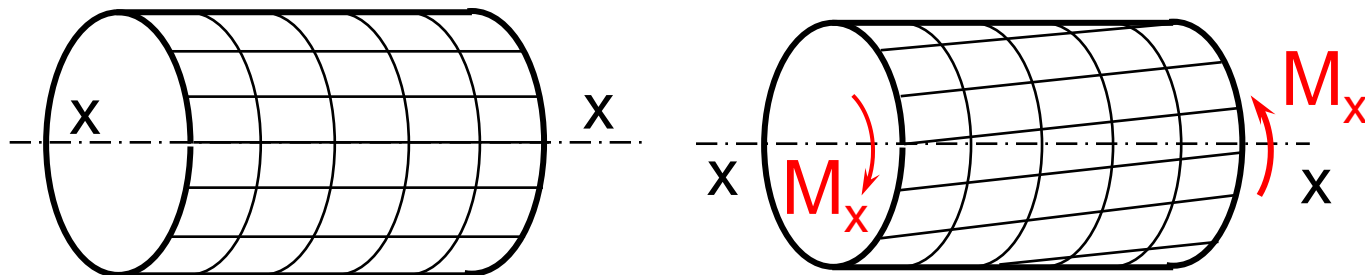
trên đoạn DE : $M_x = 20$ kNm.



- **5.2. Xoắn thanh có mặt cắt ngang hình tròn**

- **5.2.1. Giả thuyết .**

Thí nghiệm



1. Đường kính và khoảng cách giữa các mặt cắt không thay đổi

2. Các lớp vật liệu dọc trục không kéo hoặc đẩy nhau nghĩa là không có ứng suất pháp trên các mặt song song với trục thanh.

3. Mặt cắt thanh hình tròn vẫn phẳng và quay quanh trục thanh, bán kính mặt cắt quay quanh trục thanh nhưng vẫn thẳng.

Kết luận

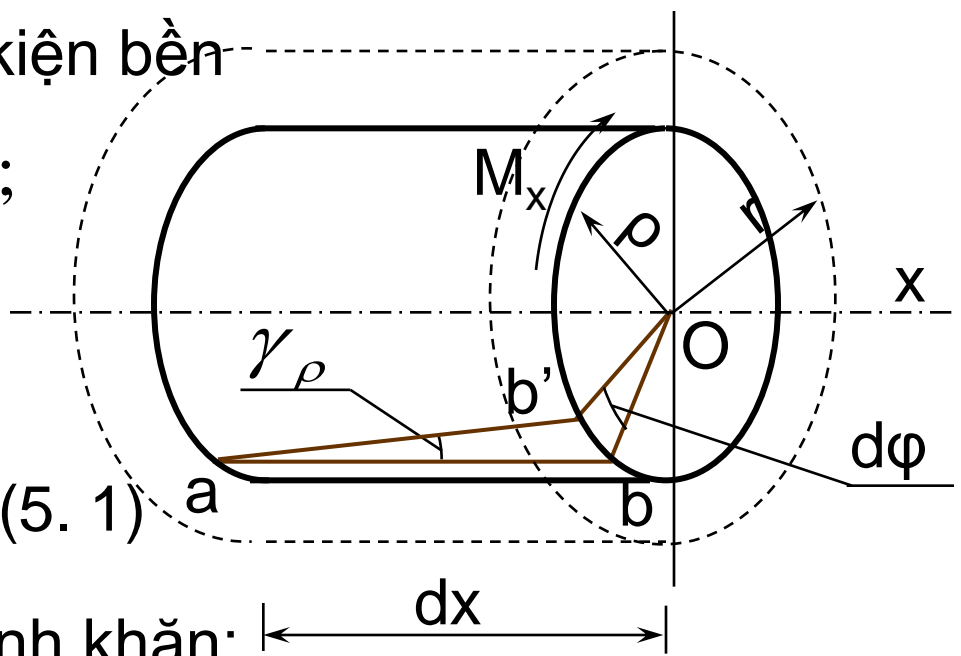
- Sự xoắn thanh hình trụ là kết quả của biến dạng trượt do các mặt cắt ngang quay tương đối quanh trục x.
- Trong mặt cắt ngang xuất hiện ứng suất tiếp có phương vuông góc với bán kính tương ứng.
- Không có ứng suất pháp trên các mặt cắt ngang và dọc
- Trạng thái ứng suất là trạng thái trượt thuần túy.

Xác định ứng suất, điều kiện bền

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dx}; \quad \tau_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dx};$$

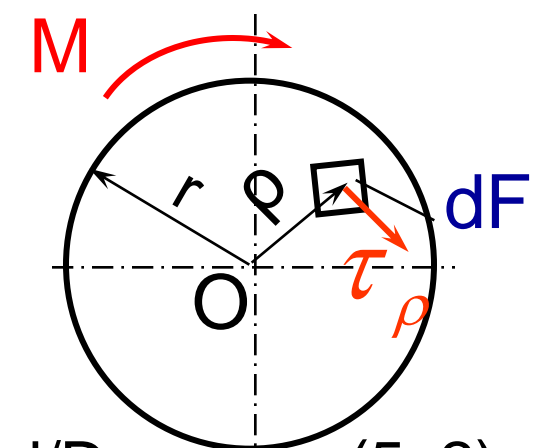
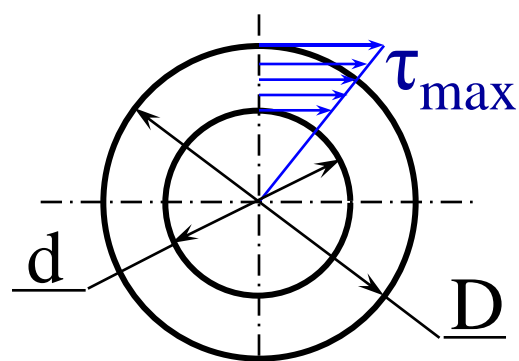
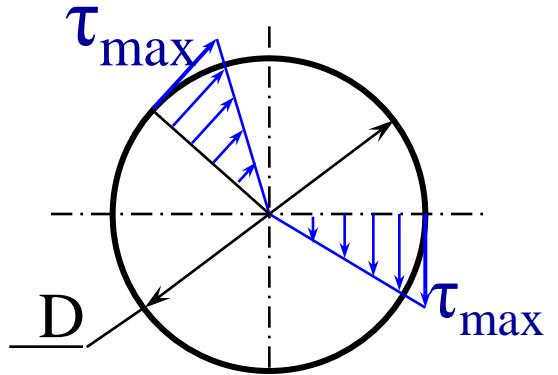
$$\tau_\rho = \frac{M_x \rho}{I_p};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p}; \quad W_p = \frac{I_p}{r}; \quad (5.1)$$



• Hình tròn:

Hình vành khăn:



$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2 D^3 W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2 D^3 (1 - \alpha^4) \quad d/D = \alpha.$$

$$(5.2)$$

Điều kiện bền

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} \leq [\tau].$$

$$(5.3)$$

5.3. Biến dạng của thanh chịu xoắn.

$$\varphi = \frac{M_x l}{GI_p} \quad (5.6)$$

G – modun trượt của vật liệu (N/m^2)
 $I_p \approx 0,1D^4$ - momen q.t. cực của hình tròn

Điều kiện cứng

$$\varphi = \frac{M_x l}{GI_p} \leq [\varphi]. \quad (5.7) \quad \theta = \frac{M_x}{GI_p} \leq [\theta]; \quad (5.8)$$

Góc xoắn tương đối.

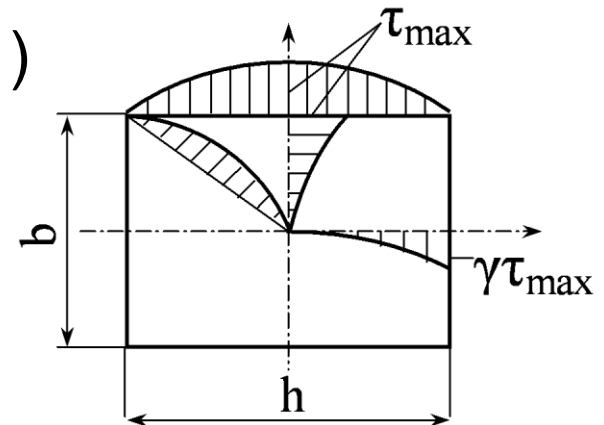
$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_x}{GI_p} \quad (5.9)$$

5.4. Xoắn thanh có mặt cắt không tròn

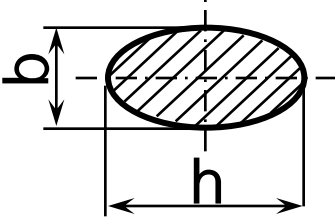
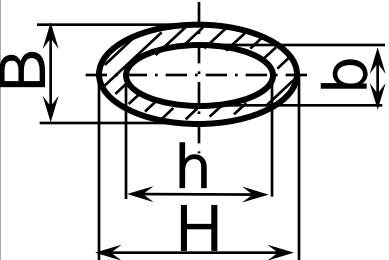
$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \quad (5.10) \quad W_x = \beta b^3 \quad (5.11)$$

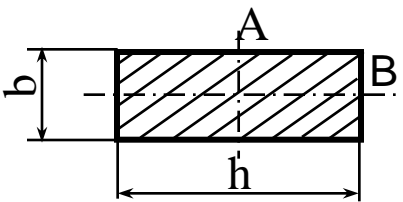
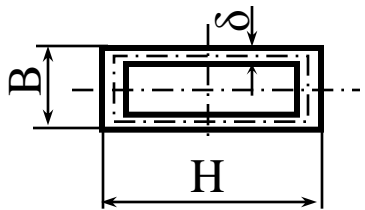
$$\tau_1 = \gamma \tau_{\max} \quad (5.12)$$

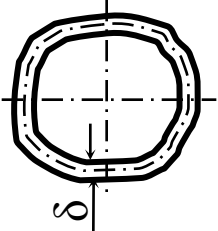
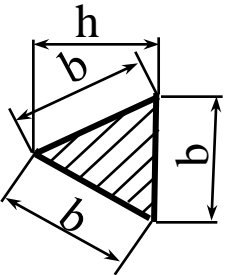
$$\varphi = \frac{M_x l}{GI_x}; \quad (5.13) \quad I_x = \alpha b^4. \quad (5.14)$$



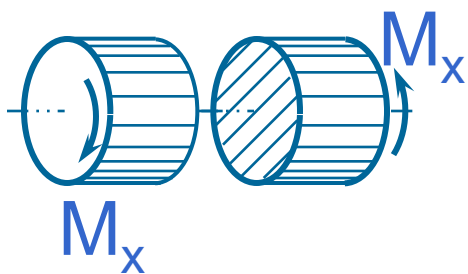
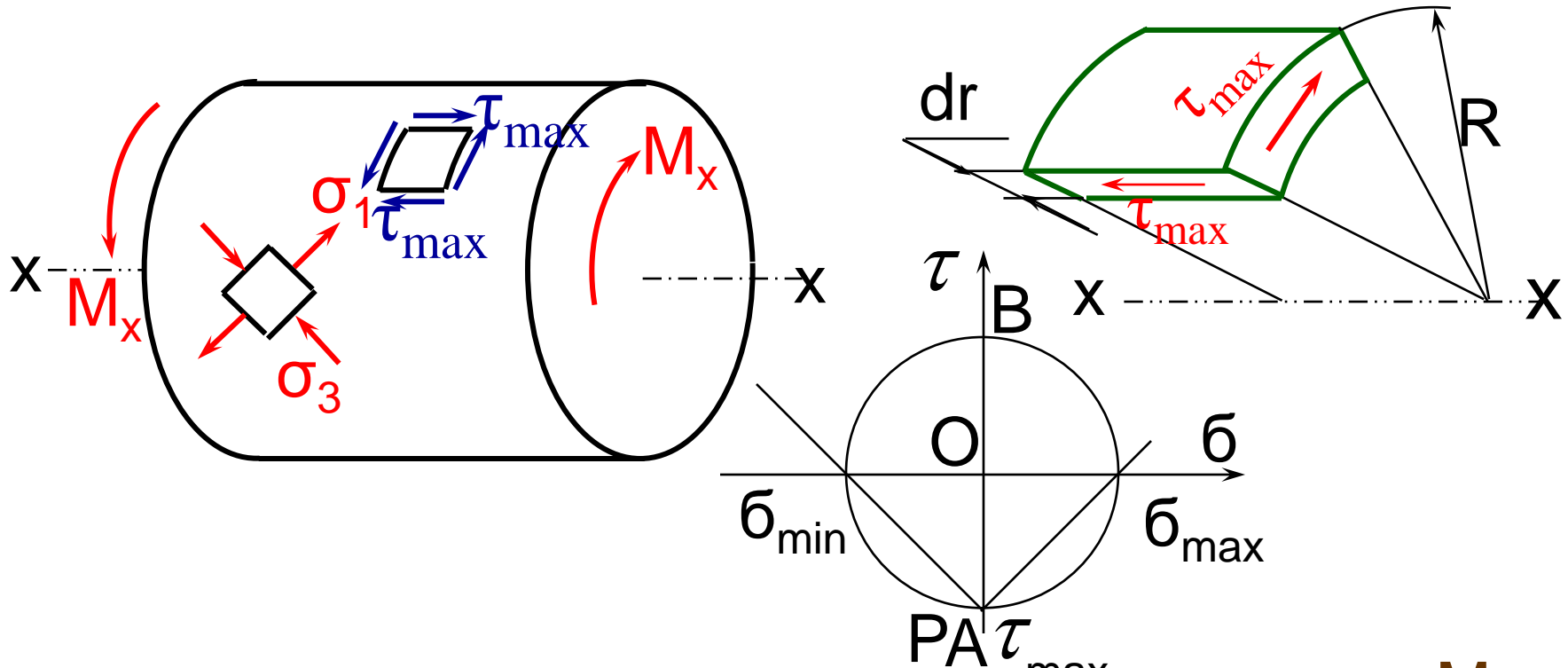
Ba bài toán cơ bản của SBVL về độ cứng

| Mặt cắt | $W_x \text{ cm}^3$ | Điểm có ứng suất tiếp cực đại | $J_x \text{ cm}^4$ |
|--|---|---|--|
|  | $n = \frac{h}{b}; n > 1$ $W_x = \frac{\pi b^3 n}{16}$ $W_x = \frac{\pi b^2 h}{16}$ | <p>Đầu trục ngắn</p> $\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$ <p>Đầu trục dài</p> $\tau = \frac{\tau_{\max}}{n}$ | $J_x = \frac{\pi b^4}{16} \cdot \frac{n^3}{n^2 + 1}$ |
|  | $\frac{h}{b} = \frac{H}{B} = n > 1$ $W_x = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{B^2 H - b^2 h}{B}$ $W_x = \frac{\pi \cdot n B^3}{16} (1 - \alpha^4)$ $\alpha = \frac{h}{H} = \frac{b}{B}$ | <p>Đầu trục ngắn</p> $\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$ <p>đầu trục dài</p> $\tau = \frac{\tau_{\max}}{n}$ | $J_x = \frac{\pi}{16} \frac{B H^3 - b h^3}{n^2 + 1}$ $J_x = \frac{\pi B^4}{16} \frac{n^3 (1 - \alpha^4)}{n^2 + 1}$ |

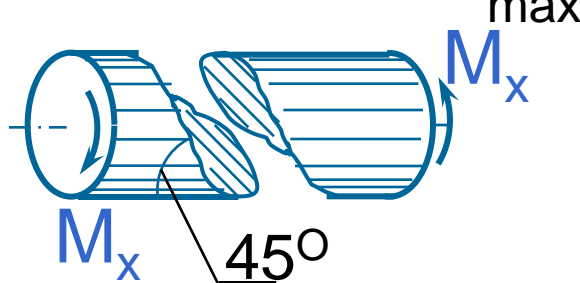
| Mặt cắt | | $W_x \text{ cm}^3$ | | Điểm có ứng suất tiếp cực đại | | | $J_x \text{ cm}^4$ | |
|--|--------|--|--------|---|--------|--------|-----------------------------------|--------|
|  | | $\frac{h}{b} = n > 1$ $W_x = \beta \cdot b^3$ | | $\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$ $\tau_B = \gamma \tau_{\max}$ | | | $J_x = \alpha b^4$ | |
| n | 1 | 1,5 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| β | 0,208 | 0,346 | 0,493 | 0,801 | 1,150 | 1,789 | 2,456 | 3,123 |
| α | 0,1404 | 0,2936 | 0,4572 | 0,7899 | 1,1232 | 1,789 | 2,456 | 3,123 |
| γ | 1,0 | 0,8588 | 0,7952 | 0,7533 | 0,7447 | 0,7426 | 0,7425 | 0,7425 |
|  | | $W_x = 2BH \delta$ | | Trung điểm cạnh dài bên ngoài $\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$ | | | $J_x = \frac{2B^2H^2\delta}{B+H}$ | |

| Mặt cắt | $W_x \text{ cm}^3$ | Điểm có ứng suất tiếp cực đại | $J_x \text{ cm}^4$ |
|--|---|--|---|
|  | $W_x = 2F \delta$ F – diện tích nằm trong đường trung bình | Điểm ở trên chu vi ngoài gần tâm nhất $\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$ | $J_x = \frac{4F^2 \delta}{l}$ F và l – diện tích và chiều dài của đường trung bình |
|  | $W_x = 0,05b^3$ $= \frac{h^3}{12,99}$ | Trung điểm của các cạnh $\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$ | $J_x = \frac{b^4}{46,188}$ $= \frac{h^4}{25,981}$ |

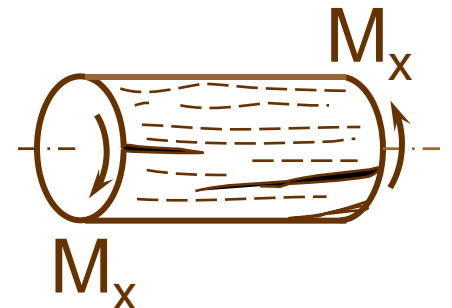
5.5. Các dạng phá huỷ của thanh chịu xoắn.



Vật liệu: dẻo



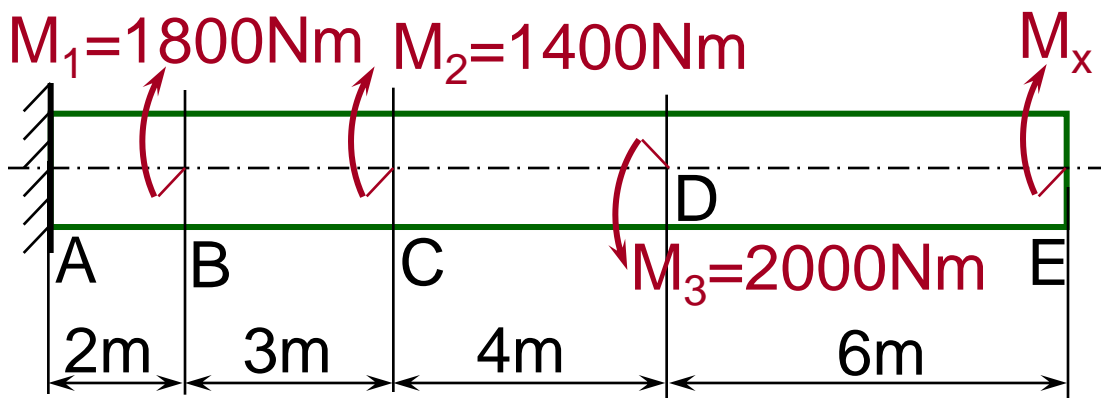
giòn



gỗ

Thí dụ 5.2. Một trục thép có mặt cắt ngang hình tròn chịu tác dụng của các momen xoắn $M_1 = 1800 \text{ Nm}$, $M_2 = 1400 \text{ Nm}$, $M_3 = 2000 \text{ Nm}$ và M_x .

1. Xác định M_x khi góc quay của mặt cắt ở đầu bên phải trục bằng không.

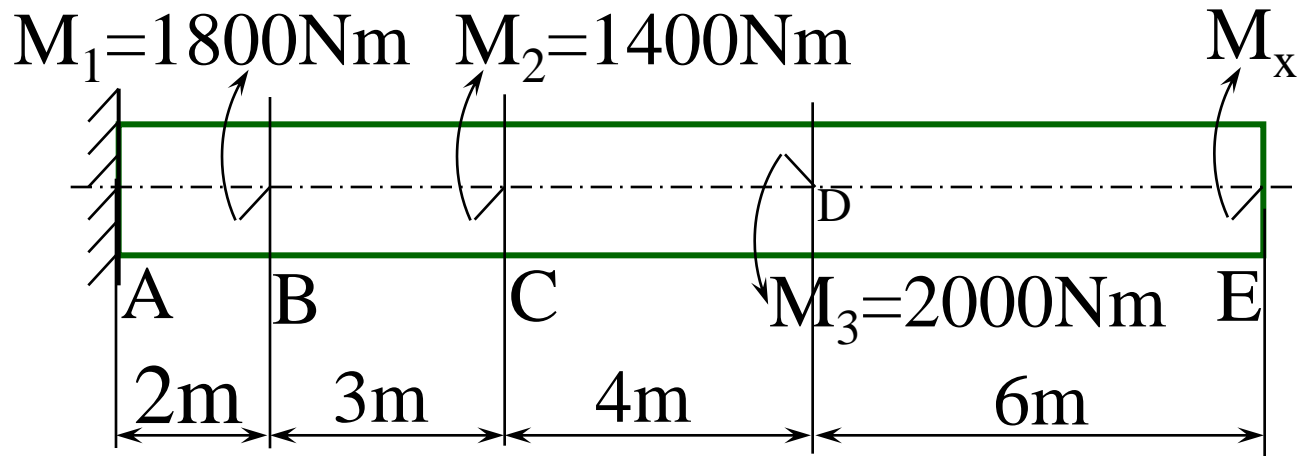


2. Vẽ biểu đồ momen xoắn với giá trị tìm được của M_x .

3. Vật liệu có ứng suất cho phép $[\tau] = 60 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$. Xác định đường kính của trục theo độ bền (lấy tròn theo giá trị gần nhất 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200 mm.)

4. Vẽ biểu đồ góc xoắn.

5. Tìm góc xoắn tương đối lớn nhất. Biết môđun trượt của thép là $8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.



$$1/ \quad \varphi_E = \varphi_{EM_1} + \varphi_{EM_2} + \varphi_{EM_3} + \varphi_{EM_x} = 0;$$

$$\varphi_{EM_1} = \frac{1800 \cdot 2,0}{GI_p}; \quad \varphi_{EM_2} = \frac{1400(2+3)}{GI_p}; \quad \varphi_{EM_3} = -\frac{2000(2+3+4)}{GI_p};$$

$$\varphi_{EM_x} = \frac{M_x(2+3+4+6)}{GI_p};$$

$$M_x = \frac{18000 - 3600 - 7000}{15} = 493,33\text{ Nm}.$$

2/ Đoạn DE:

$$M_4 = 493,33 \text{ Nm};$$

Đoạn CD: $M_3 = 493,33$
 $- 2000 = -1506,67 \text{ Nm};$

Đoạn BC: $M_2 = 493,33$
 $-2000 + 1400 =$

$$-106,67 \text{ Nm};$$

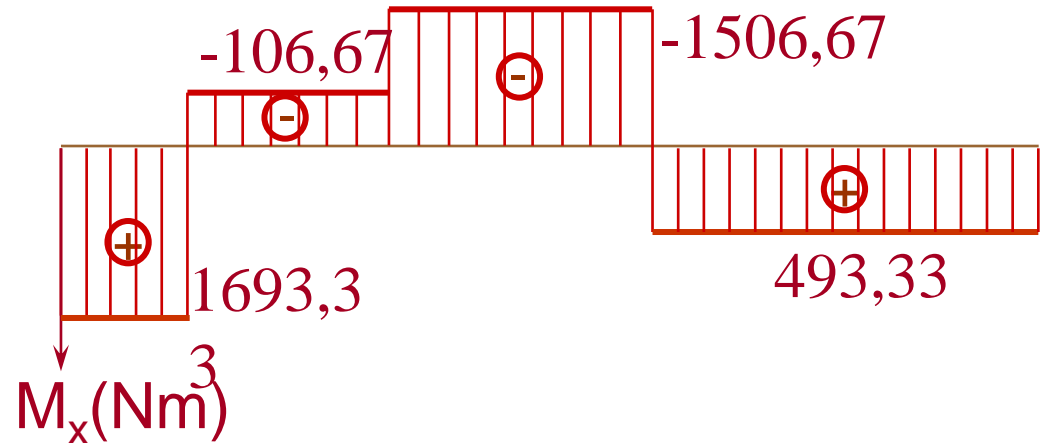
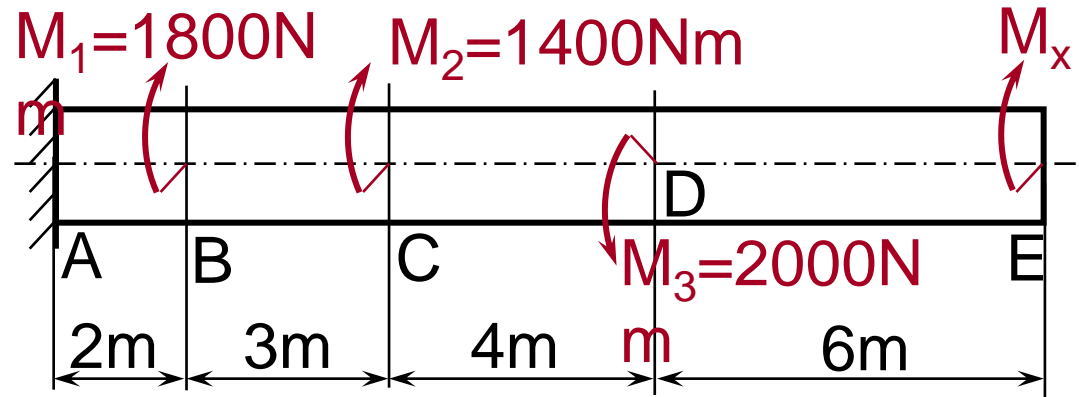
Đoạn AB: $M_1 = 493,33$
 $-2000 + 1400 + 1800$
 $= 1693,33 \text{ Nm}.$

3/ $M_{x\max} = 1693,33 \text{ Nm},$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_p} \leq [\tau];$$

với $W_p = \frac{\pi D^3}{16};$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{x\max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1693,33}{3,14 \cdot 60 \cdot 10^6}} = 0,0524 \text{ m} = 52,4 \text{ mm}.$$



$$4/ \quad \varphi_A = 0.$$

$$GI_p = 8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{\pi}{32} \cdot 6^4 \cdot 10^{-8}$$

$$= 101,710^3 \text{ Nm}$$

$$\varphi_B = \varphi_{BA} = \frac{1693,33.2}{101,7 \cdot 10^3};$$

$$= 0,0333 \text{ rad}$$

$$\varphi_{CB} = -\frac{106,67.3}{101,7 \cdot 10^3} = -0,0031 \text{ rad}$$

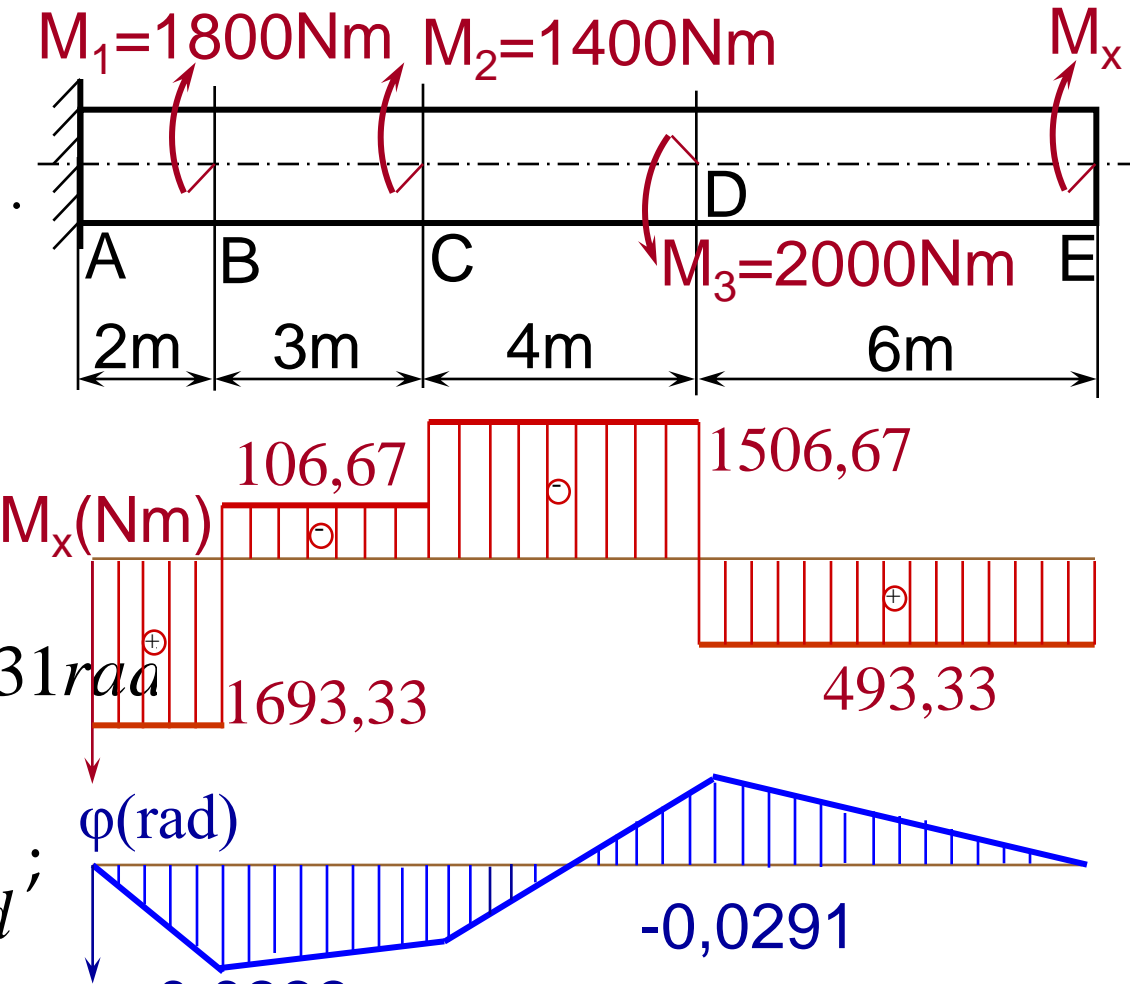
$$; \varphi_C = \varphi_B + \varphi_{CB} =$$

$$0,0333 - 0,0031 = 0,0302 \text{ rad};$$

$$\varphi_{DC} = -\frac{1506,67.4}{101,7 \cdot 10^3} = -0,0593 \text{ rad};$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \varphi_{DC} = 0,0302 - 0,0593 = -0,0291 \text{ rad};$$

$$\varphi_E = 0. \quad 5/ \quad \theta_{\max} = \frac{M_{x \max}}{GI_p} = \frac{1693,33}{101,7 \cdot 10^3} = 0,0166 \text{ rad/m}.$$



5.6. Tính toán quy ước theo cắt và dập

$$\tau = \frac{Q}{F} \quad (5.1) \quad \tau = \frac{Q}{F} \leq [\tau] \quad (5.15)$$

Mỗi đỉnh chịu cắt theo hai mặt a - a và b - b.

Tổng diện tích chịu cắt : $F = ni \frac{\pi d^2}{4}$

n - số đỉnh tán; **i** - số mặt chịu cắt của một đỉnh;

d - đường kính đỉnh tán.

(n = 4; i = m - 1 = 3 - 1 = 2)

m - số tấm nối;

tổng lực cắt $Q = T$

Điều kiện bền cắt:

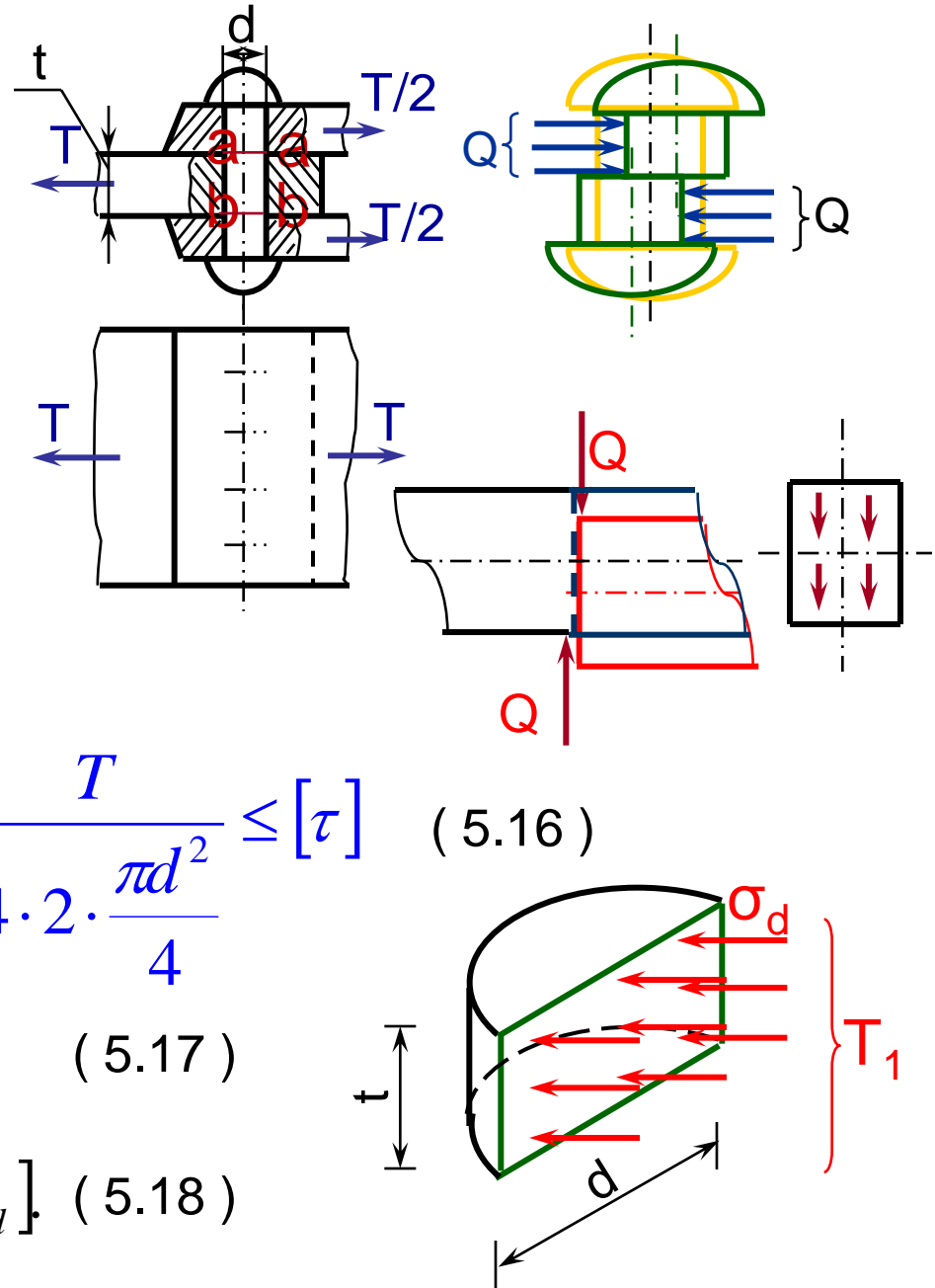
$$\tau = \frac{Q}{ni \frac{\pi d^2}{4}} = \frac{T}{4 \cdot 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau] \quad (5.16)$$

Ứng suất dập

$$\sigma_d = \frac{T_1}{F} = \frac{T_1}{td}; \quad (5.17)$$

Điều kiện bền dập :

$$\sigma_d = \frac{T}{ntd} \leq [\sigma_d]. \quad (5.18)$$



5. 6. Tính toán gần đúng lò xo xoắn ốc hình trụ.

$$Q = P; \quad M_x = P \frac{D}{2}; \quad F = \frac{\pi d^2}{4}$$

d - đường kính dây lò xo.

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p} = \frac{PD \cdot 16}{2\pi d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3}$$

Ứng suất tiếp tổng cộng cực đại:

$$\tau_{\Sigma \max} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{2D}\right)$$

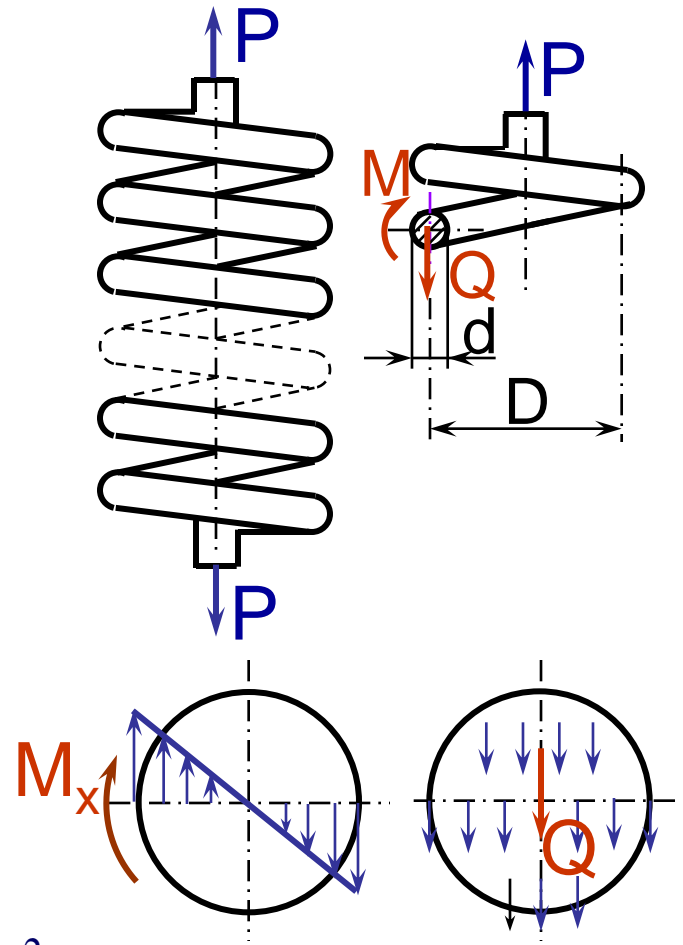
$\frac{d}{2D} = \frac{1}{20} \div \frac{1}{40}$ thường có thể bỏ qua

$$\rightarrow \tau_{\max} \cong \frac{8PD}{\pi d^3} \leq [\tau]; \quad (5. 19)$$

$$A_{ng} = A_n \quad \frac{P\lambda}{2} = \frac{M_x \varphi}{2}; \quad \varphi = \frac{M_x l}{GI_p}; \quad P\lambda = \frac{M_x^2 l}{GI_p}$$

lấy gần đúng $l \cong \pi D n;$ n - số vòng tính toán của lò xo.

$$D - \text{đường kính lò xo. } M_x = \frac{PD}{2} \rightarrow P\lambda = \frac{P^2 D^2 \pi D n \cdot 32}{4G \pi d^4}$$



Biến dạng của lò xo:

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4}$$

Điều kiện cứng của lò xo:

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} \leq [\lambda] \quad (5.20)$$

Khi tính toán những lò xo có vị trí quan trọng người ta đưa thêm hệ số hiệu chỉnh vào công thức xác định ứng suất tiếp cực đại. Khi đó điều kiện bền có dạng:

$$\frac{k8PD}{\pi d^3} \leq [\tau] \quad (5.21)$$
$$k = \frac{4c-1}{4c-4} + \frac{0,615}{c} \quad \text{với} \quad c = \frac{D}{d}$$

Thí dụ 5.3

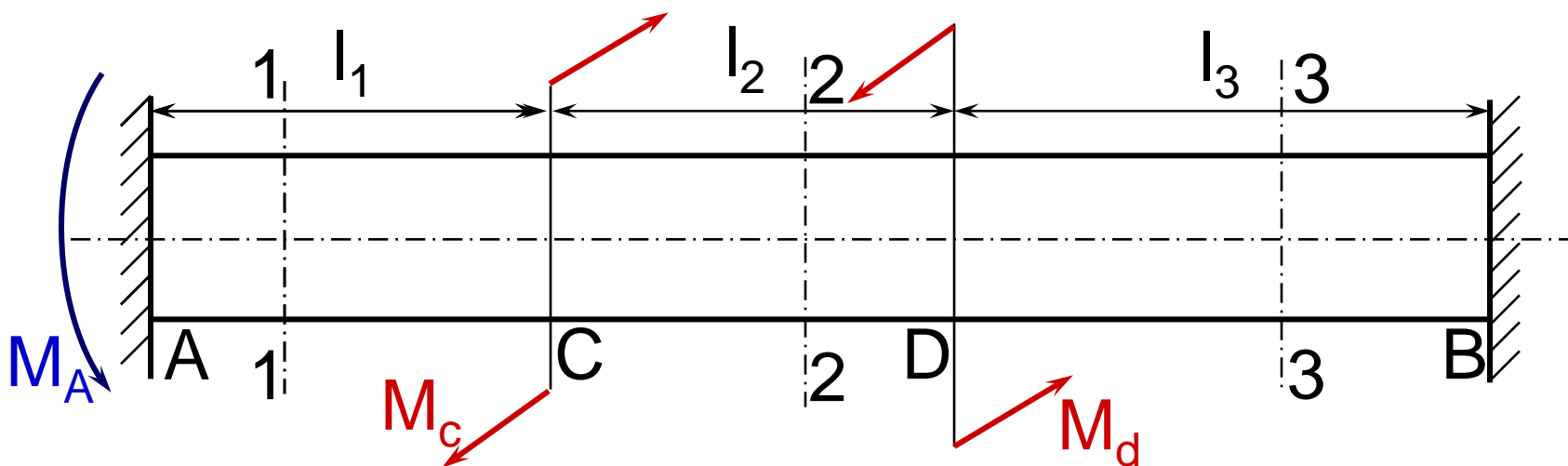
Một trục có đường kính $d = 4 \text{ cm}$, quay với vận tốc $\omega = 80 \text{ rad}$. Vật liệu làm trục có modun trượt $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MN/m}^2$; ứng suất cho phép $[\tau] = 60 \text{ MN/m}^2$. Góc xoắn cho phép $[\varphi] = 2 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}$. Xác định công suất truyền qua trục theo điều kiện bền và điều kiện cứng.

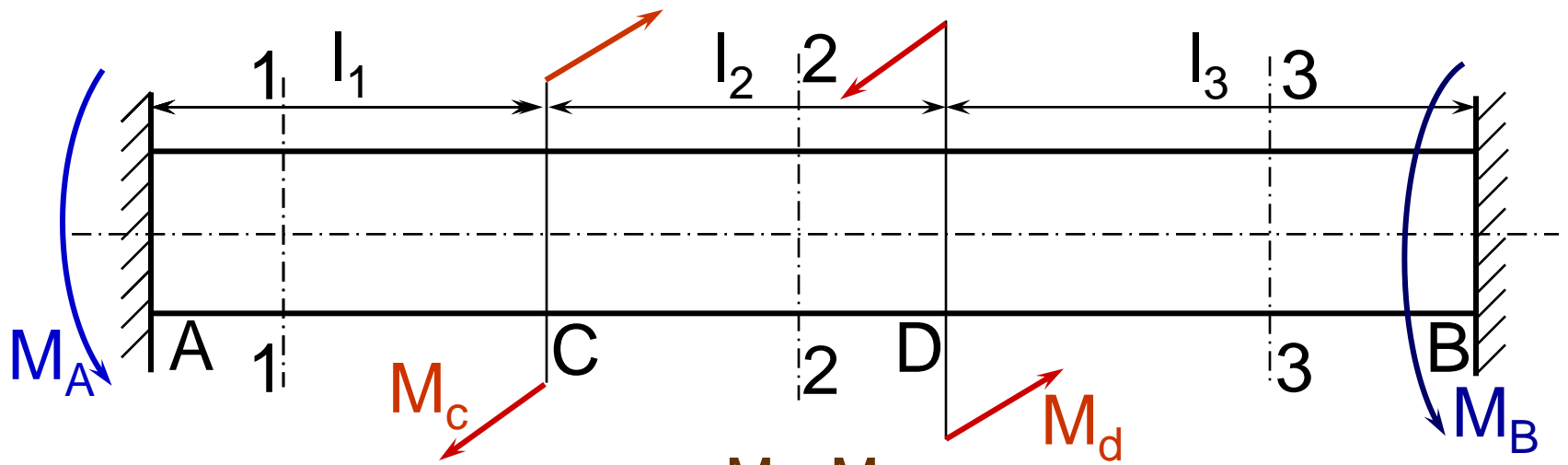
$$1. \quad N = M\omega = [\tau]W_P\omega = \frac{60 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 0,04^3 \cdot 80}{16} = 60300 \text{ w} = 60,3 \text{ kw.}$$

$$2. \quad N = M\omega = \frac{[\varphi] \cdot G \cdot I_p}{l} \omega = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot \pi \cdot 0,04^4 \cdot 80}{32 \cdot 1} = 32200 \text{ W} = 32,2 \text{ kW.}$$

Chọn $N = 32,2 \text{ kW}$

Thí dụ 5.4. Một trục gồm ba đoạn: AC và DB có mặt cắt ngang hình vuông cạnh $d = 4 \text{ cm}$ và CD có mặt cắt ngang hình tròn đường kính d , Chiều dài của các đoạn trục $l_1 = l_2 = 40 \text{ cm}$, $l_3 = 60 \text{ cm}$. Trục chịu tác dụng của các momen $M_c = 80 \text{ kNcm}$ và $M_d = 40 \text{ kNcm}$. Modun trượt của vật liệu $G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$. Vẽ biểu đồ momen xoắn; xác định ứng suất trong các đoạn trục. Xác định góc xoắn φ_{AC}





$$M_A + M_B - M_C + M_D = 0;$$

$$\varphi_{AB} = 0 = \varphi_{AC} + \varphi_{CD} + \varphi_{DB};$$

$$\frac{M_A l_1}{GI_x} + \frac{(M_A - M_C) l_2}{GI_p} + \frac{(M_A - M_C + M_D) l_3}{GI_x} = 0.$$

$$M_A = M_1 = 44,1 \text{ kNcm}, M_2 = -35,9 \text{ kNcm}; M_3 = 4,1 \text{ kNcm}$$

$$\varphi_{AC} = \frac{M_1 l_1}{GI_x} = \frac{44,1 \cdot 40}{8 \cdot 10^3 \cdot 0,1404 \cdot 4^4} = 0,00615 \text{ rad};$$

$$M_1 = M_A$$

$$M_2 = M_A - M_C$$

$$M_3 = M_A - M_C + M_D;$$

$$J_p = 0,1 d^4;$$

$$J_x = \alpha d^4;$$

$$W_p = 0,2 d^3;$$

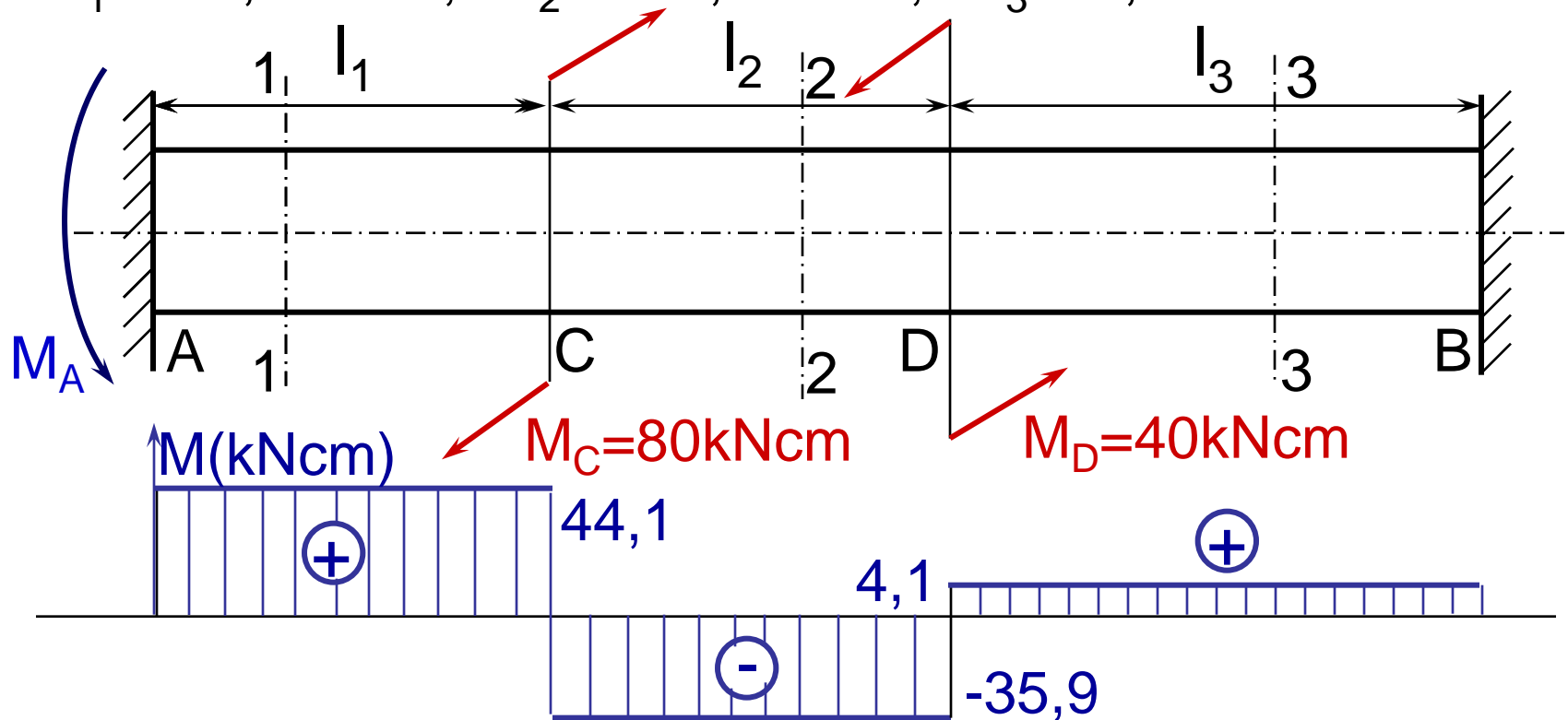
$$W_x = \beta d^3;$$

$$n = 1$$

$$\alpha = 0,1404$$

$$\beta = 0,208$$

$$M_1 = 44,1 \text{ kNcm}; \quad M_2 = -35,9 \text{ kNcm}; \quad M_3 = 4,1 \text{ kNcm}$$



$$\tau_1 = \frac{44,1}{0,208 \cdot 4^3} = 3,31 \text{ kN} / \text{cm}^2;$$

$$\tau_2 = \frac{-35,9}{0,2 \cdot 4^3} = -2,8 \text{ kN} / \text{cm}^2;$$

$$\tau_3 = \frac{4,1}{0,208 \cdot 4^3} = 0,31 \text{ kN} / \text{cm}^2.$$

Chương 6

Uốn ngang phẳng

a định nghĩa :

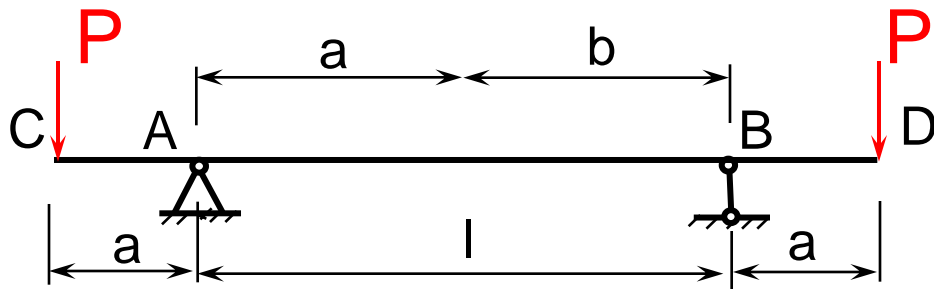
một trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang ng) và

ng .

ng

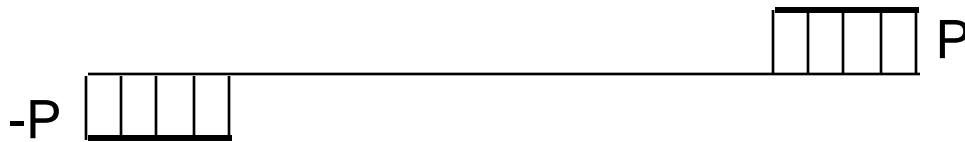
Thanh chủ yếu chịu uốn được gọi là dầm

y.



m CA
n

ngang

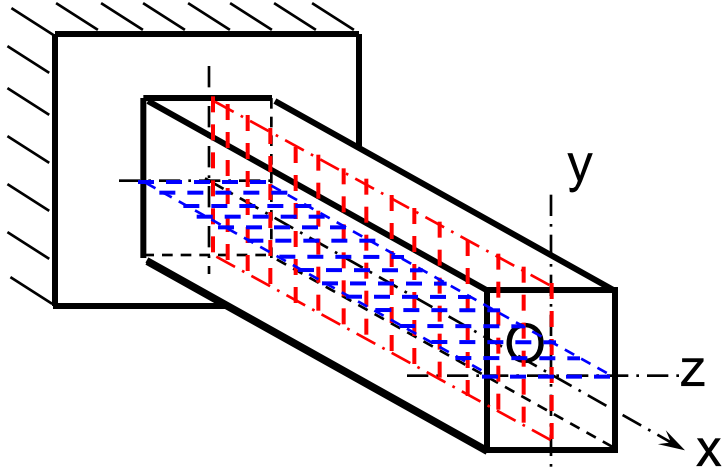


u



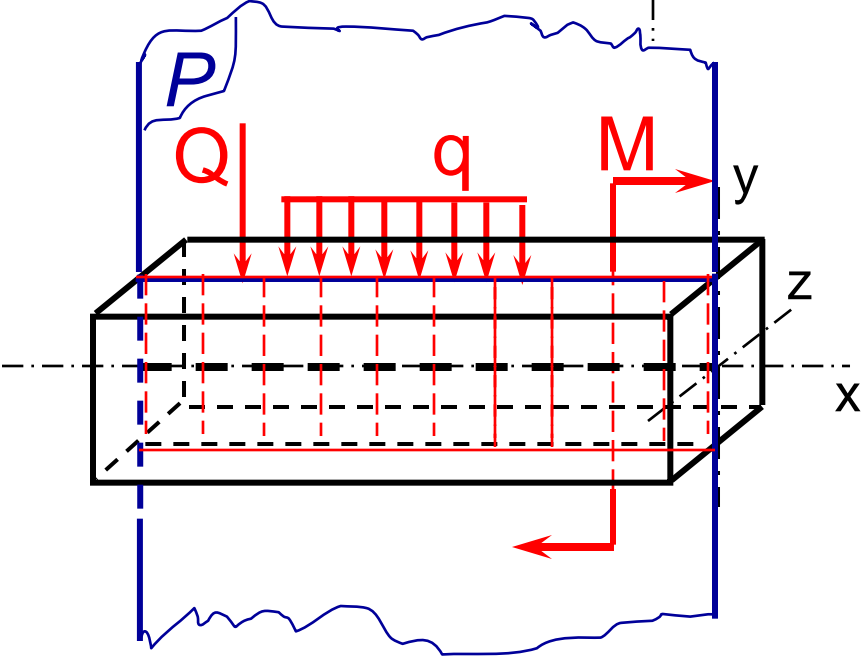
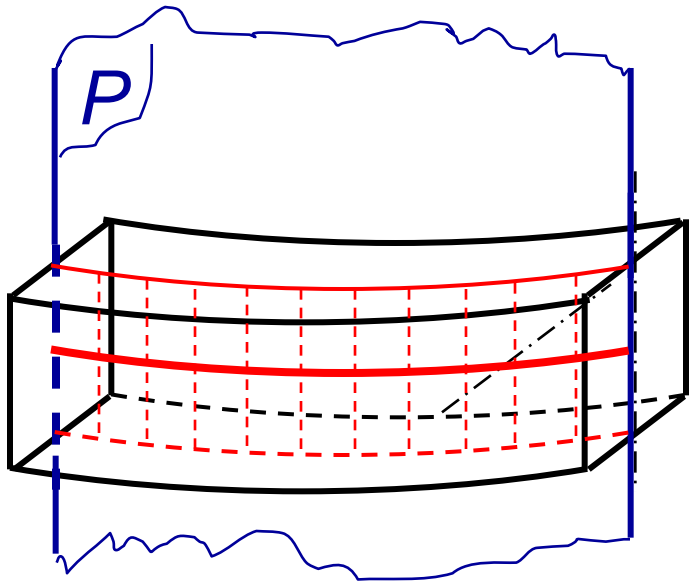
y

ng.



c
ng
nh
i
ng
gây ra

ng.



n sau :

1. Trục dầm là một đường thẳng, mặt cắt ngang có trục đối xứng. Dầm có mặt phẳng đối xứng do trục dầm và trục đối xứng của mặt cắt ngang tạo ra.

2. Ngoại lực (lực tập trung hay lực phân bố) nằm trong mặt phẳng đối xứng và vuông góc với trục dầm, các momen tác dụng trong mặt phẳng đối xứng của dầm.

3. Chỉ tính đến những ứng suất trong mặt cắt ngang của dầm, ứng suất pháp giữa các thớ dọc có giá trị không đáng kể và được bỏ qua. Sơ đồ tính của dầm là đoạn thẳng trùng với trục dầm chịu tác dụng của ngoại lực.

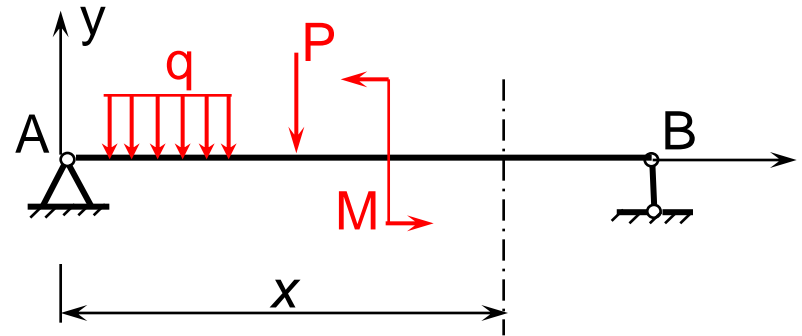
4. Tải trọng tác dụng lên dầm là tải trọng tĩnh.

Nội lực và biểu đồ nội lực

Lực cắt ngang Q_y và momen uốn M_z tại một mặt cắt ngang bất kỳ được xác định bằng phương pháp mặt cắt:

$$Q_y(x) = \Sigma P_{i(y)}$$

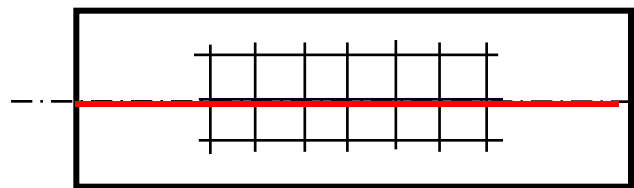
$$M_z(x) = \Sigma m(P_i)$$



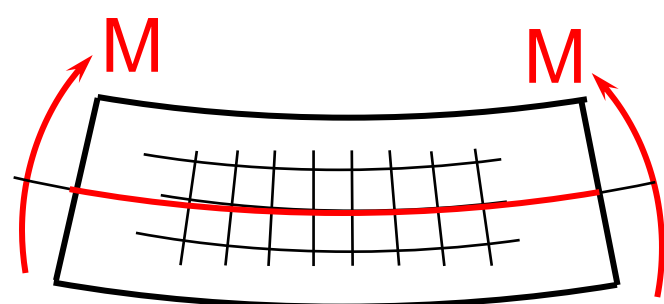
$\Sigma P_{i(y)}$ - Tổng đại số hình chiếu tất cả ngoại lực (tập trung, phân bố) tác dụng trên phần dầm ở một bên mặt cắt lên trục y

$\Sigma m(P_i)$ - Tổng đại số momen của tất cả các ngoại lực (tập trung, phân bố, momen tập trung) tác dụng trên phần dầm ở một bên mặt cắt **đối với trọng tâm của mặt cắt**

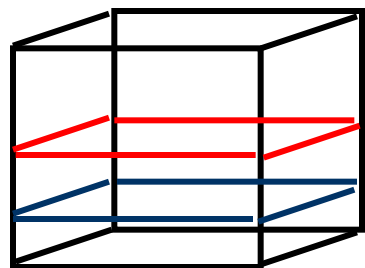
y m u



t
c
ng
n



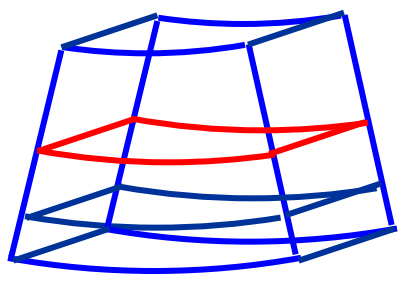
ng.



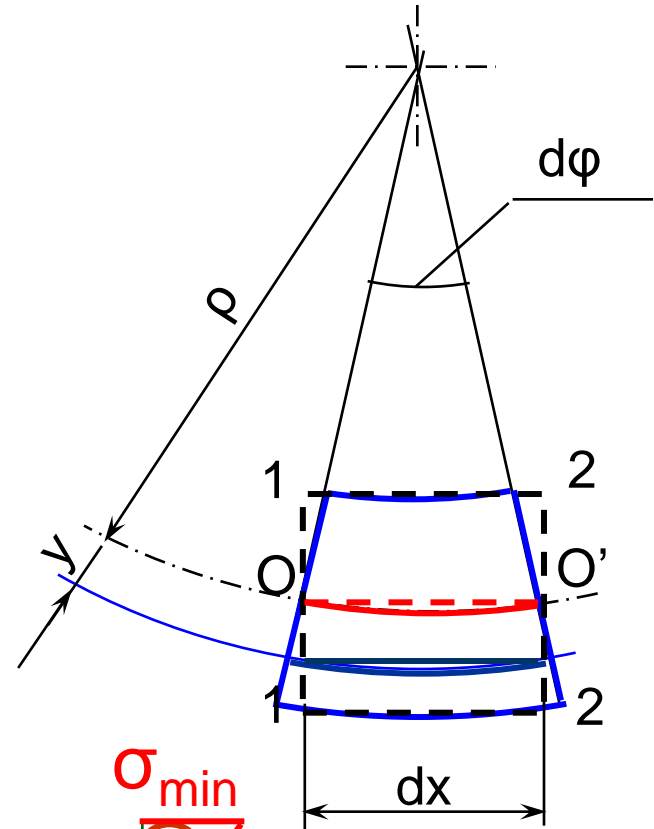
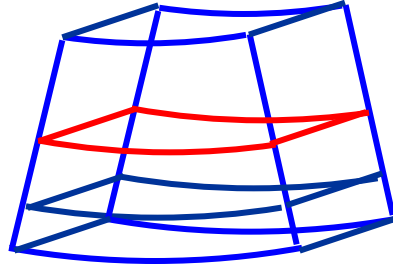
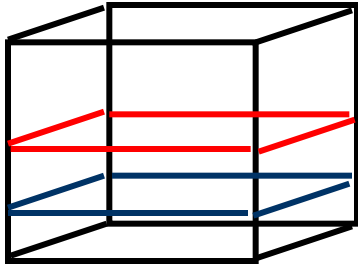
p
c thay

c không thay
a. Giao
t ngang

o

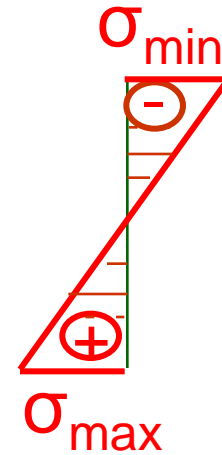
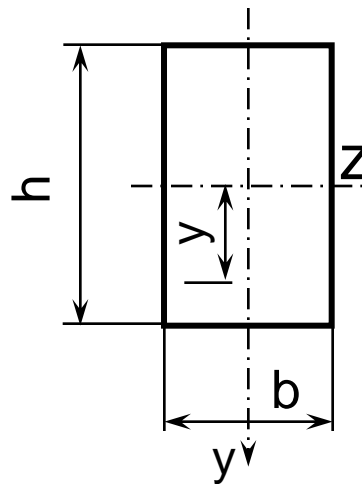


a.



$$\varepsilon_y(x) = \frac{y}{\rho}; \quad \sigma_y(x) = E \frac{y}{\rho};$$

$$\sigma_y = \frac{M_z y}{J_z};$$



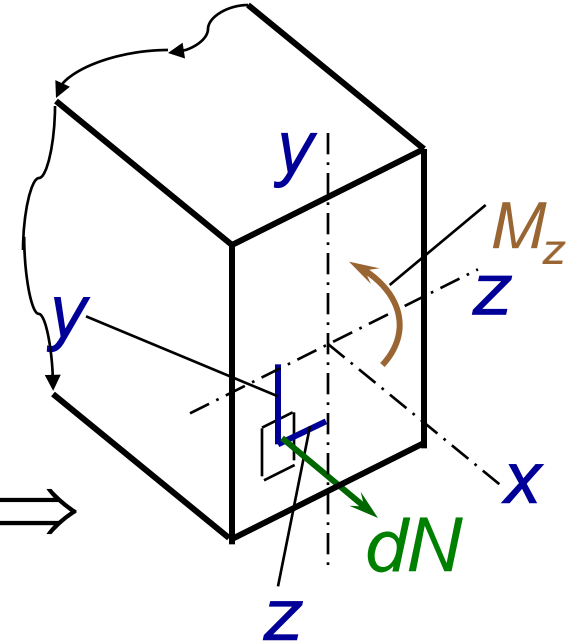
$$N = \int_F \sigma_y dF = 0 \Rightarrow S(z) = 0 \Rightarrow$$

a đi qua

t

$$M_y = \int_F \sigma_y z dF = 0 \Rightarrow \int_F yz dF = 0 \Rightarrow$$

$$S_{yz} = 0 \Rightarrow$$



$$dN = \sigma_y dF$$

nh trung tâm.

$$M_z = \int_F \sigma_y y dF \Rightarrow \sigma_y = \frac{M_z y}{I_z}.$$

$$\sigma_y = \frac{M_z y}{J_z}; \quad (6.1)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z y_{\max}}{J_z} = \frac{M_z}{W_z}; \quad W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}; \quad (6.2)$$

Hình chữ nhật : $W_z = \frac{bh^2}{6}; \quad J_z = \frac{bh^3}{12}; \quad (6.3)$

Hình tròn: $W_z = \frac{\pi d^3}{32}; \quad J_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad (6.4)$

Hình chữ I, chữ U : tra bảng.

6.1.4. Điều kiện bền. Dạng hợp lý của mặt cắt ngang.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_k \leq [\sigma]_k; \quad (6.5)$$
$$|\sigma_{\min}| = \left| \frac{M_z}{I_z} y_n \right| \leq [\sigma]_n$$

Mặt cắt nguy hiểm cần được kiểm tra là mặt cắt có momen uốn dương (hoặc âm) có trị số tuyệt đối lớn nhất.

Vật liệu dẻo (ứng suất cho phép theo kéo và nén như nhau):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma] \quad (6.6)$$

Mặt cắt có hình dáng hợp lý phải tận dụng được cao nhất khả năng làm việc của vật liệu .

Các ứng suất ở các điểm nguy hiểm đồng thời đạt tới giá trị của ứng suất kéo và ứng suất nén cho phép.

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{I_z} y_k = [\sigma]_k ; \quad |\sigma_{min}| = \left| \frac{M_z}{I_z} y_n \right| = [\sigma]_n \quad (6.7)$$

$$\left| \frac{y_k}{y_n} \right| = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} = \alpha.$$

Vật liệu giòn $\alpha < 1$; $y_k < |y_n|$

Vật liệu dẻo $\alpha = 1$; $y_k = |y_n|$

Thép I N^o30; $F = 46,5 \text{ cm}^2$, $W_z = 472 \text{ cm}^3$; mặt cắt hình vuông cùng diện tích $W_z = 52,9 \text{ cm}^3$ (nhỏ hơn gần 9 lần).

$$\beta = \frac{W}{\sqrt[3]{F}} \quad \text{đánh giá khả năng chống uốn của mặt cắt.}$$

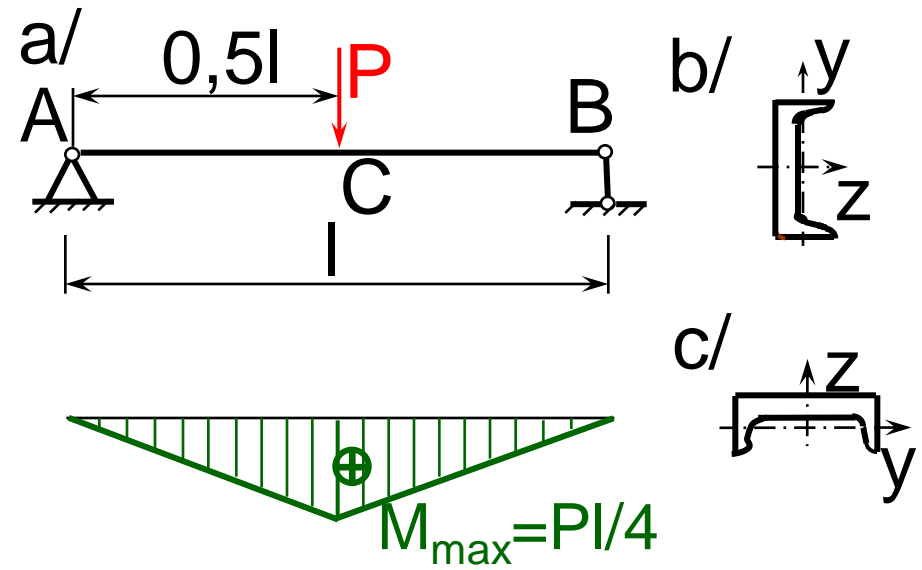
I N^o 30 $\beta = 131,26$; hình vuông cùng diện tích $\beta = 14,70$.

Thí dụ 6.1. Xác định tải trọng cho phép P đặt trên dầm $\square N^{\circ} 20$ có gối đỡ bản lề ở hai đầu cho hai trường hợp đặt dầm khác nhau như trên hình vẽ. Biết $l=8m$; vật liệu có ứng suất cho phép $[\sigma]=16kN/cm^2$. $\square N^{\circ} 20: W_z=152 cm^3$, $W_y = 20,5 cm^3$.

Điều kiện bền của dầm:

$$\frac{M_{\max}}{W} = \frac{Pl}{4W} \leq [\sigma]$$

$$P \leq \frac{4W[\sigma]}{l}$$

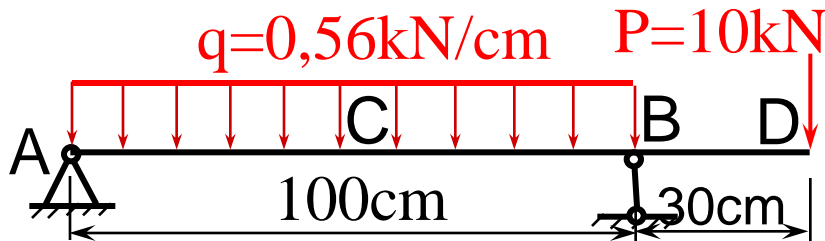


b/ $[P]_1 = \frac{4 \cdot 152 \cdot 16}{8} = 1216 kN$

c/ $[P]_2 = \frac{4 \cdot 20,5 \cdot 16}{8} = 164 kN$

$[P1]/[P2] = 1216/164 = 7,41$

Thí dụ 6. 2. Kiểm tra độ bền theo ứng suất pháp của dầm chịu tải trọng như hình vẽ. Vật liệu có ứng suất cho phép $[\sigma]_k = 4,2kN/cm^2$; $[\sigma]_n = 10kN/cm^2$.



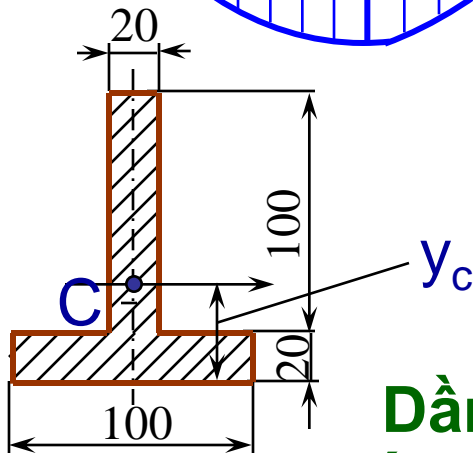
$$M_B = -300kNcm, M_C = 550kNcm$$

$$\sigma_{kc} = \frac{550.4}{533,34} = 4,125kN/cm^2;$$

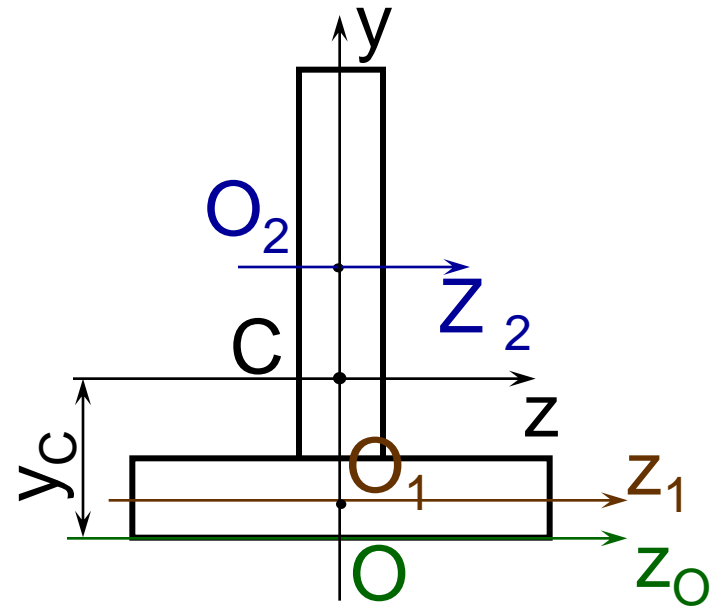
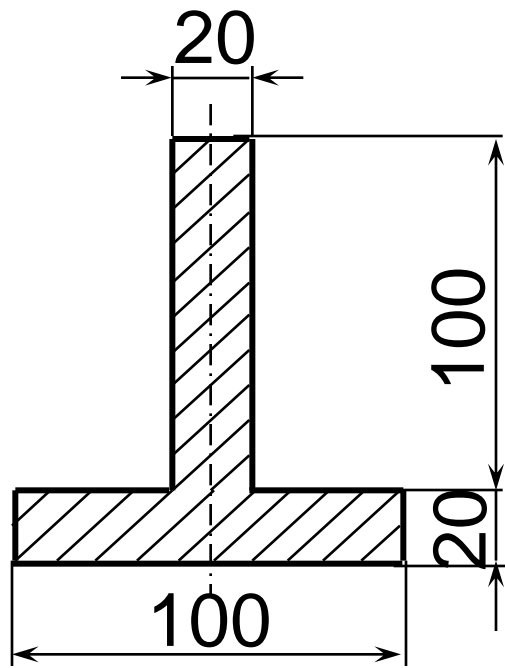
$$\sigma_{nc} = \frac{550.8}{533,34} = 8,25kN/cm^2;$$

$$\sigma_{kB} = \frac{300.8}{533,34} = 4,5kN/cm^2 > [\sigma]_k$$

$$\sigma_{nB} = \frac{300.4}{533,34} = 2,25kN/cm^2.$$



Dầm không đủ bền ở mặt cắt B, tại đó momen uốn có giá trị tuyệt đối không phải là lớn nhất.



Mômen tĩnh của mặt cắt đối với trục z_0 :

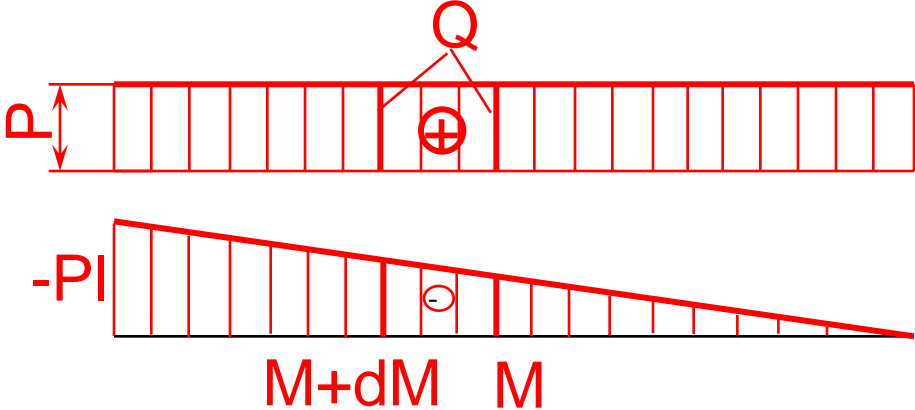
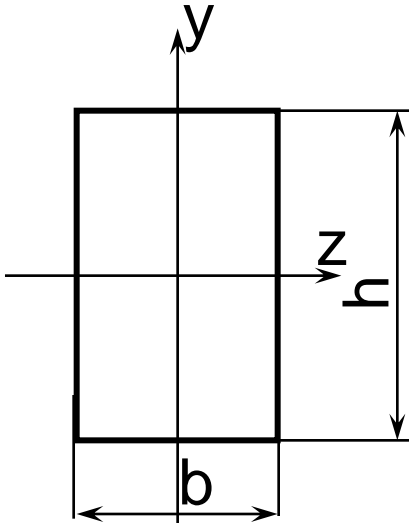
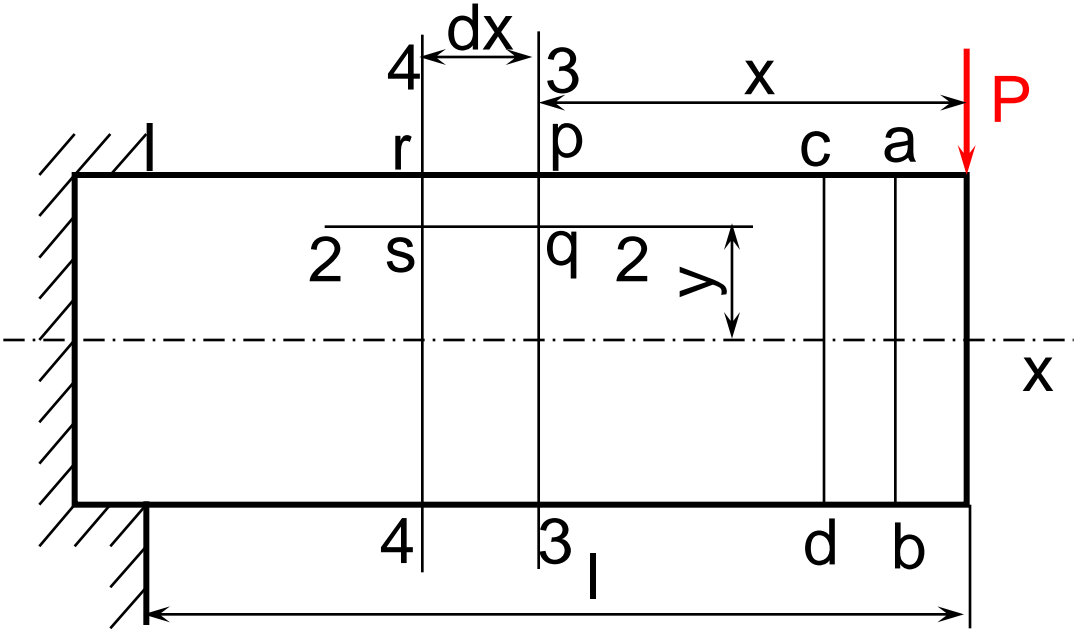
$$S_{z_0} = 10 \times 2 \times 1 + 2 \times 10 \times 7 = 160 \text{ cm}^3.$$

$$y_C = \frac{S_{z_0}}{F} = \frac{160}{10 \times 2 + 2 \times 10} = 4 \text{ cm}$$

$$I_z = \frac{10 \cdot 2^3}{12} + 10 \cdot 2 \cdot 3^2 + \frac{2 \cdot 10^3}{12} + 10 \cdot 2 \cdot 3^2 = 533,34 \text{ cm}^4;$$

6.2. Uốn ngang phẳng.

ng



t :

-

n cong ;

-

ng

t trên ca

i db ;

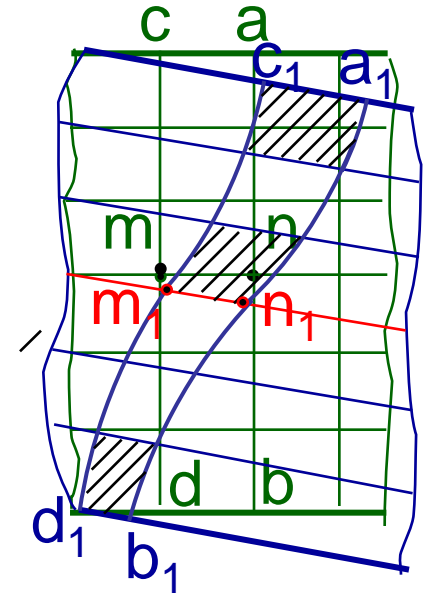
-

a mn

t ;

t

a.



6.2.2. Xác định ứng suất.

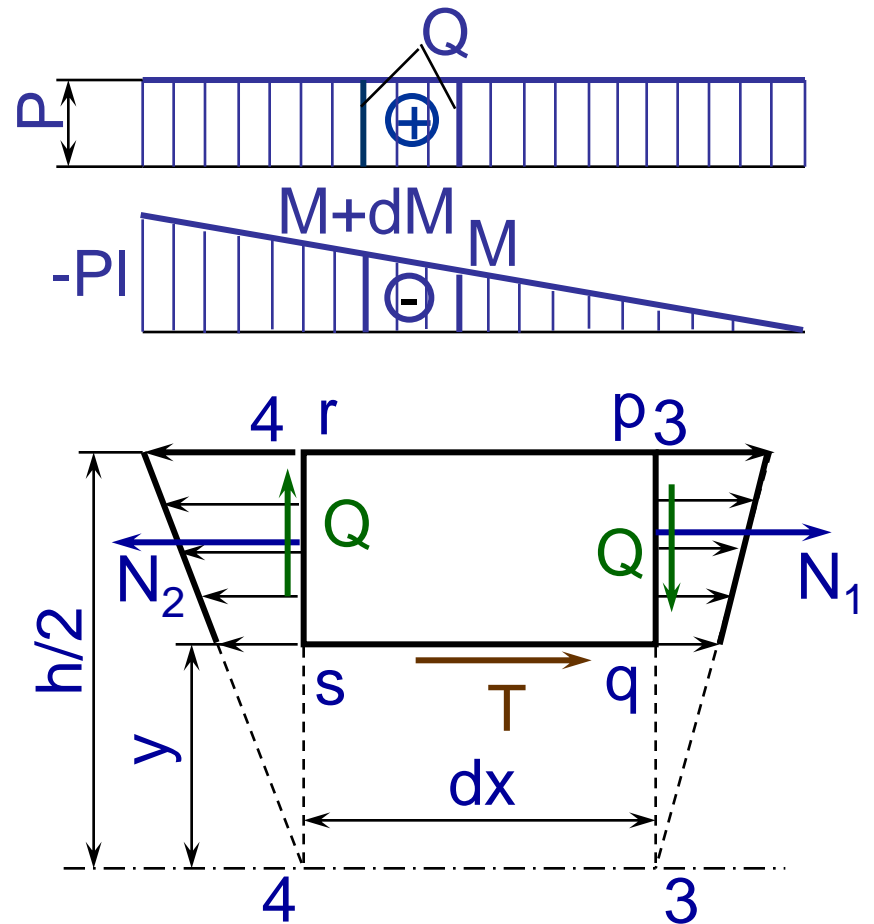
$$\sigma_y = \frac{M_z y}{I_z};$$

$$T = \tau_y b dx;$$

$$N_1 = \frac{MS_y(z)}{I_z};$$

$$N_2 = \frac{(M + dM)S_y(z)}{I_z};$$

$$\tau_y = \frac{QS_y(z)}{b_y I_z}; \quad (6.8)$$



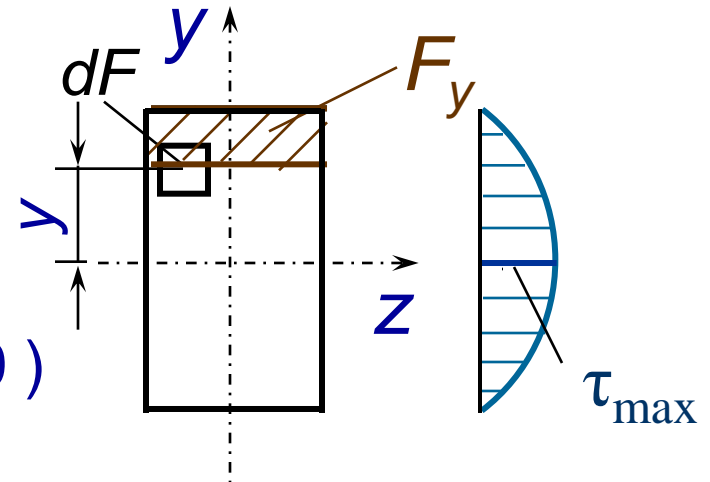
6.2.3 Biểu đồ ứng suất tiếp (mặt cắt hình chữ nhật).

$$\tau_y = \frac{QS_y(z)}{bI_z}; \quad S_y(z) = F_y y_C;$$

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2F}; \quad (6.9)$$

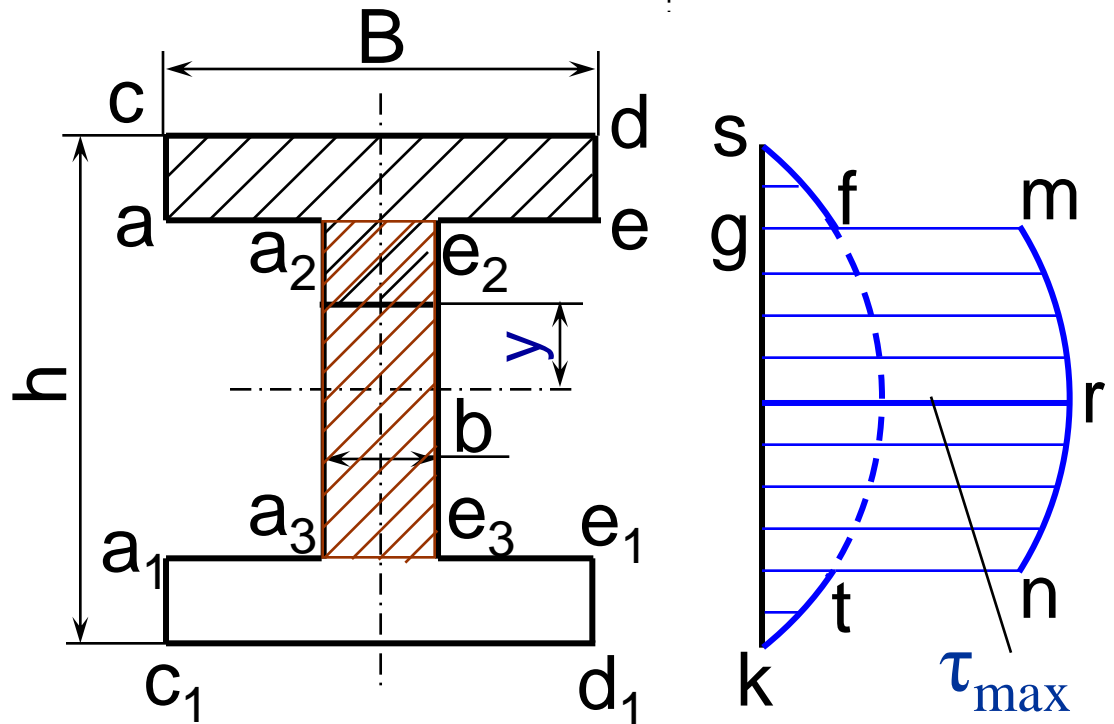
$$= \frac{4Q}{3F}; \quad (6.10)$$

Mặt cắt hình tròn



$$\tau_{\max} = \frac{Q}{F_t}; \quad (6.11)$$

F_t - diện tích mặt
cắt ngang phần
thành chữ I
($a_2 e_2 e_3 a_3$).



n

- **tại A và D** trên mặt cắt có momen uốn lớn nhất.

Đối với dầm làm bằng vật liệu dẻo

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma]; \quad (6.12)$$

Dầm bằng vật liệu giòn

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_k ; |\sigma_{\min}| \leq [\sigma]_n \quad (6.13)$$

- **tại điểm B** (trượt thuần túy) trên mặt cắt có lực cắt lớn nhất:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (6.14)$$

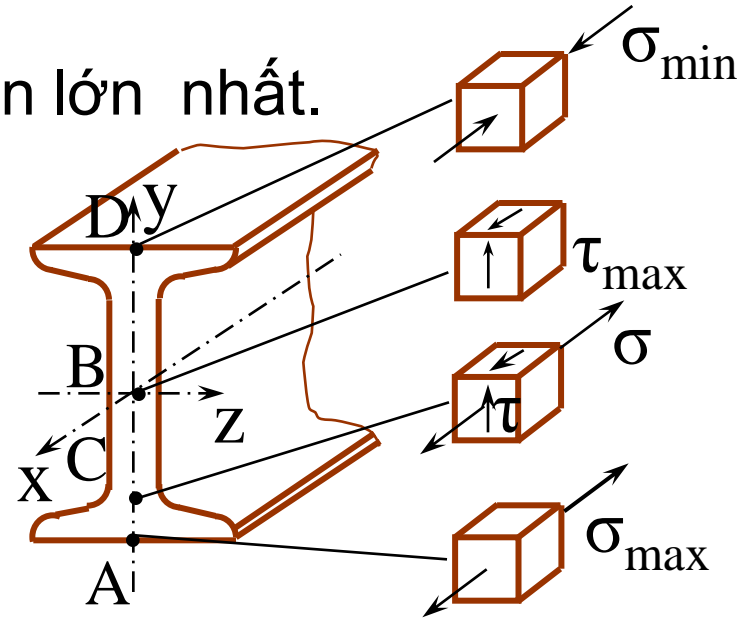
vật liệu dẻo $[\tau] = [\sigma] / 2$ (thuyết bền thứ ba);

vật liệu giòn: thuyết bền Mo.

- **tại C** (trạng thái căng phẳng): mặt cắt có Q và M có giá trị lớn. Kiểm tra điểm có ứng suất σ , τ có giá trị khá lớn.

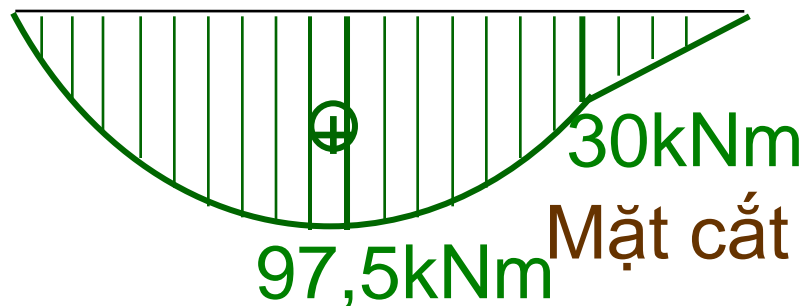
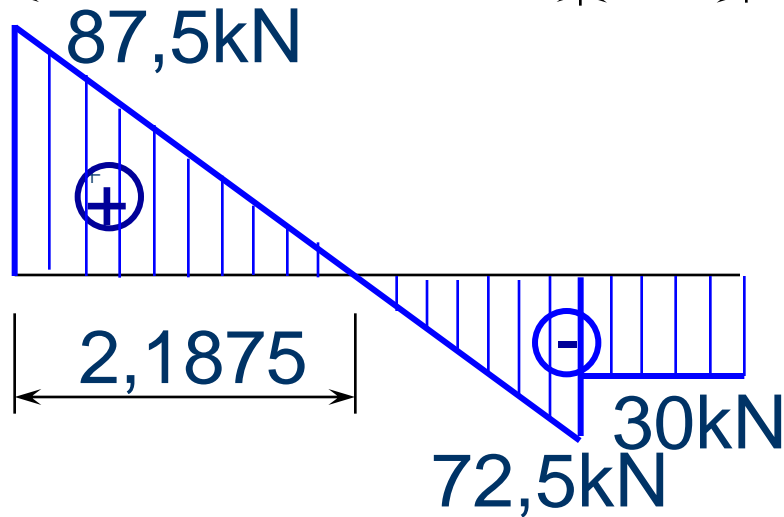
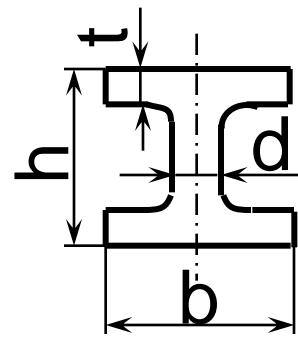
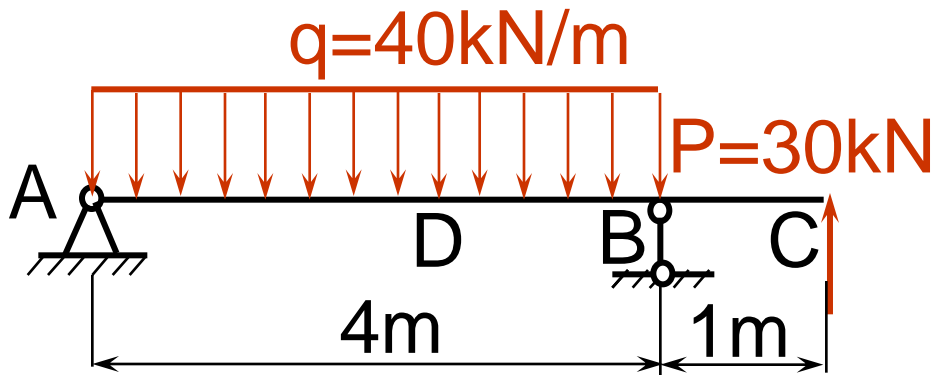
$$\text{Vật liệu dẻo dung thuyết bền ba : } \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma],$$

n Mo.



Thí dụ 6. 3. Chọn và kiểm tra toàn phần độ bền của dầm chữ T cho phép

$$[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2.$$



$$\sum M_A = 40 \cdot 4 \cdot 2 - B \cdot 4 - 30 \cdot 5 = 0;$$

$$B = \frac{40 \cdot 4 \cdot 2 - 30 \cdot 5}{4} = 42,5 \text{ kN}.$$

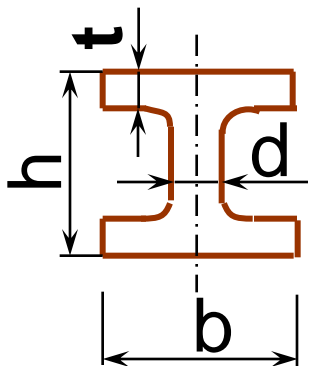
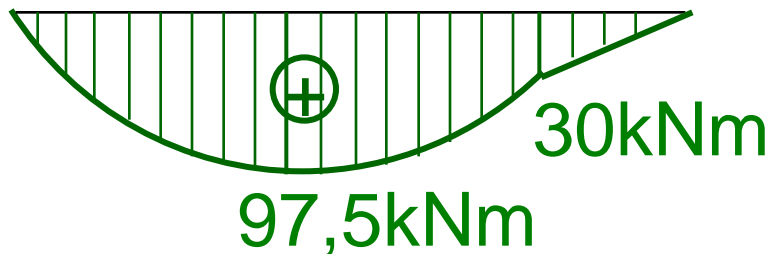
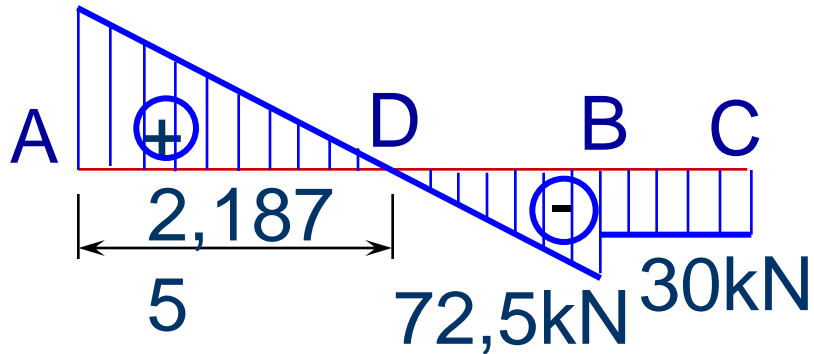
$$A = 40 \cdot 4 - 42,5 - 30 = 87,5 \text{ kN}.$$

Mặt cắt D: $M_{\max} = 97,5 \text{ kNm}$.

Mặt cắt A $Q_{\max} = 87,5 \text{ kN}$.

Mặt cắt B: $M = 30 \text{ kNm}$ và $Q = 72,5 \text{ kN}$.

87,5kN



Tại D: $M_{\max} = 97,5 \text{ kNm}$.

Tại A: $Q_{\max} = 87,5 \text{ kN}$.

Tại B: $M = 30 \text{ kNm}$;
 $Q = 72,5 \text{ kN}$.

Chọn số hiệu của dầm chữ I theo ứng suất pháp cực đại (tại D):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma];$$

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{9570}{16} = 598 \text{ cm}^3.$$

Chọn thép chữ I N^o 33 có $I_z = 9840 \text{ cm}^4$;
 $S(z) = 339 \text{ cm}^3$; $W_z = 597 \text{ cm}^3$;
 $h = 33 \text{ cm}$; $d = 0,7 \text{ cm}$; $t = 1,12 \text{ cm}$.

Phân tử ở trạng thái trượt thuần túy (mặt cắt A):

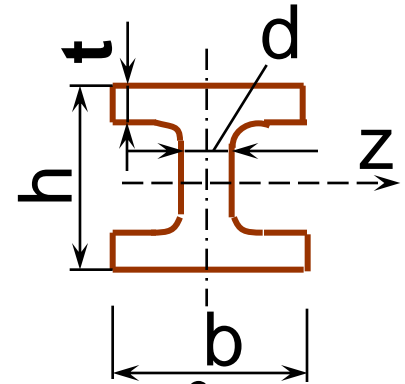
$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S(z)}{I(z)d} = \frac{87,5 \cdot 339}{9840 \cdot 0,7} = 4,31 \text{ kN/cm}^2; \tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{16}{2} = 8 \text{ kN/cm}^2$$

Phân tử ở trạng thái ứng suất phẳng (mặt cắt B):

$$\sigma_y = \frac{M(z) \cdot y}{I_z} = \frac{3000 \left(\frac{33}{2} - 1,12 \right)}{9840} = 4,69 \text{ kN/cm}^2;$$

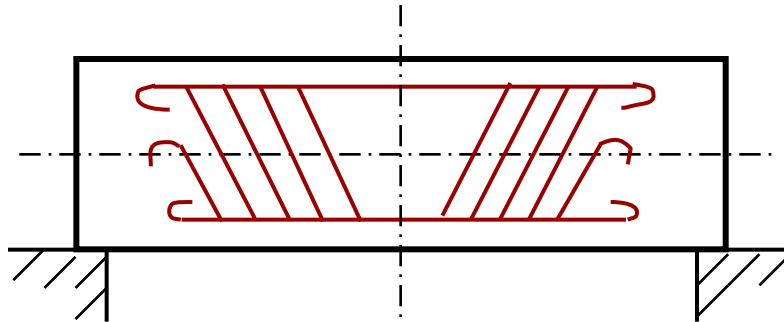
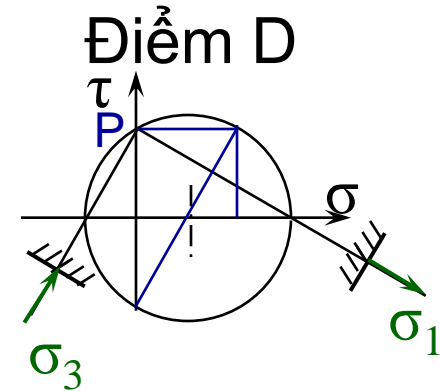
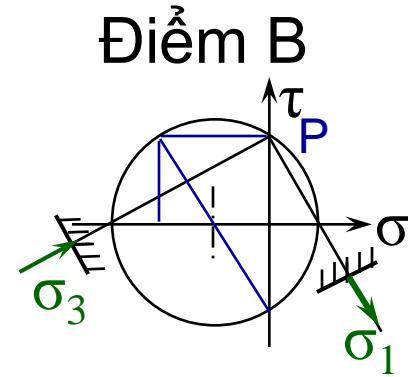
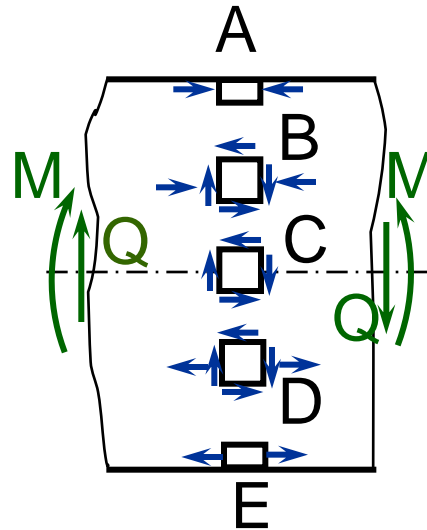
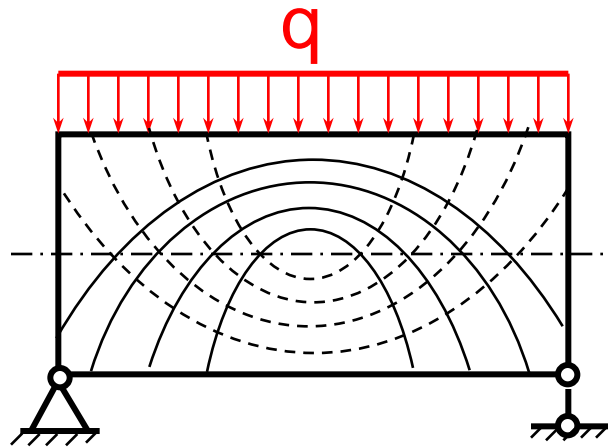
$$\tau_{xy} = \frac{Q}{I_z d} \left[S(z) - \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{72,5}{9840 \cdot 0,7} \left[339 - \frac{0,7}{2} \left(\frac{33}{2} - 1,12 \right)^2 \right] = 2,7 \text{ kN/cm}^2.$$



$$\sigma_{td} = \sqrt{4,69^2 + 3 \cdot 2,7^2} = 6,62 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma].$$

6.3. Quỹ đạo ứng suất chính khi uốn ngang.



6.4. Thế năng biến dạng đàn hồi của dầm chịu uốn.

Thế năng riêng biến dạng đàn hồi được xác định theo công thức (3.14):

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right].$$

Các phân tử vật liệu của dầm chịu uốn ở trạng thái ứng suất phẳng đặc biệt. Trị số của ứng suất chính được xác định theo công thức:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} > 0; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} < 0; \quad \sigma_2 = 0$$

(3.14) \longrightarrow

$$u = \frac{1}{2E} \left[\sigma^2 + 2(1 + \mu)\tau^2 \right] = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G}.$$

$$E = 2G(1 + \mu)$$

Thế năng biến dạng của toàn bộ dầm:

$$U = \int_V u dV = \int_V \left[\frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G} \right] dV ; \quad U = \int dx \int_F \left[\frac{\sigma^2}{2E} + \frac{\tau^2}{2G} \right] dF ;$$

$$U = \int_l dx \int_F \frac{M^2}{2EI^2} y^2 dF + \int_l dx \int_F \frac{Q^2 S_y^2(z)}{2GI^2 b^2} dF.$$

$$\int y^2 dF = I \quad \text{Đặt} \quad k = \frac{F}{I^2} \int_F \frac{S_y^2(z)}{b^2} dF$$

$$\rightarrow U = \int_l \frac{M^2}{2EI} dx + \int_l k \frac{Q^2}{2GF} dx \quad (6.15)$$

Mặt cắt hình chữ nhật:

$$k = 1,2$$

Mặt cắt hình tròn :

$$k = 1,1;$$

Thép chữ I:

$$k = 2,2 - 2,4 ;$$

Dầm có chiều dài lớn

$$U \approx \int_l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} ; \quad (6.16)$$

6.5. Biến dạng và chuyển vị của dầm chịu uốn.

6.5.1. Biến dạng của dầm chịu uốn.

Chuyển vị (độ võng, góc xoay).

Độ võng y của dầm là chuyển vị của trọng tâm mặt cắt theo phương vuông góc với trục dầm: $y = y(x)$.

Góc xoay của mặt cắt hay **chuyển vị góc** là góc giữa hai vị trí của mặt cắt trước và sau khi biến dạng. Dựa theo giả t phẳng ta có:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = y'$$

$$\text{Độ cong (6.3)} \longrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (6.17)$$

6.5.2. Phương trình vi phân của độ võng.

Độ cong của đường cong phẳng $y = y(x)$:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} \quad (6.18)$$

$$(6.3), (6.23) \longrightarrow \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = \pm \frac{M_z(x)}{EI_z(x)} \quad (6.19a)$$

Nếu chọn chiều dương của trục y hướng lên trên và chiều dương của trục x hướng sang phải thì dấu của độ cong và momen uốn trùng nhau, ta sẽ lấy dấu cộng trong biểu thức (6.19a) :

$$\frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}} = \frac{M_z(x)}{EI_z(x)} \quad (6.19b)$$

Phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi ($y' \approx 0$):

$$y'' = + \frac{M_z(x)}{EI_z} \Rightarrow EIy'' = M_z(x);$$

$M_z(x)$ - momen uốn đối với trục z ở mặt cắt có tọa độ x ;

$EI_z(x)$ - độ cứng chống uốn của dầm trong mặt phẳng yx tại mặt cắt có tọa độ x .

6.5.3. Phương pháp thông số ban đầu.

$$M(x) = M + Pp + q(k_1 - k_2) \left(\frac{k_1 + k_2}{2} \right);$$

$$M(x) = M + Pp + \frac{q}{2} (k_1^2 - k_2^2)$$

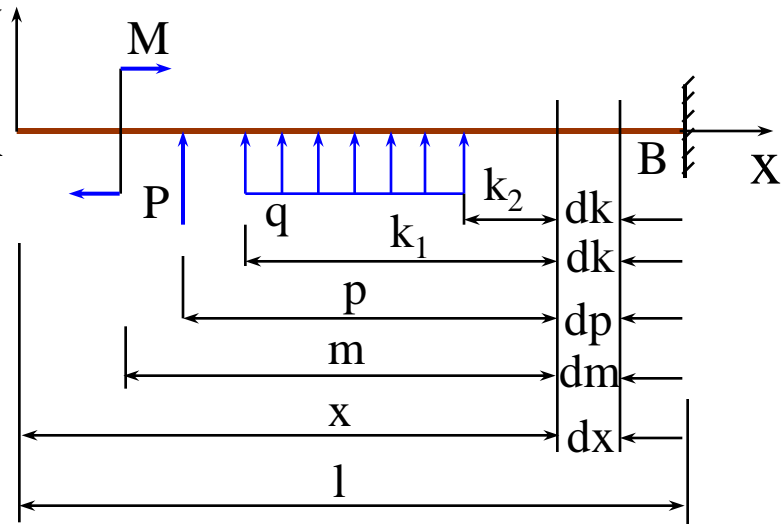
+(2. 5) \rightarrow

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = M + Pp + \frac{q}{2} (k_1^2 - k_2^2)$$

$$EI_z d\left(\frac{dy}{dx}\right) = Mdm + Ppdp + \frac{q}{2} (k_1^2 - k_2^2) dk.$$

$$EI_z \frac{dy}{dx} = C + Mm + \frac{P}{2} p^2 + \frac{q}{6} (k_1^3 - k_2^3).$$

$$EI_z \varphi_0 = C \Rightarrow EI_z \frac{dy}{dx} = EI \varphi + Mm + \frac{P}{2} p^2 + \frac{q}{6} (k_1^3 - k_2^3),$$



$$EI_z y = D + EI_z \varphi_0 x + \frac{M}{2} m^2 + \frac{P}{6} p^3 + \frac{q}{24} (k_1^4 - k_2^4).$$

$$EI_z y_0 = D \Rightarrow$$

$$EI_z y = EI_z y_0 + EI_z \varphi_0 x + \sum \frac{M}{2} m^2 + \sum \frac{P}{6} p^3 + \sum \frac{q}{24} (k_1^4 - k_2^4);$$

$$EI \varphi = EI \varphi_0 + \sum \frac{M}{1!} m + \sum \frac{P}{2!} p^2 + \sum \frac{q}{3!} (k_1^3 - k_2^3); \quad (6.20)$$

$$EI y = EI y_0 + EI \varphi_0 x + \sum \frac{M}{2!} m^2 + \sum \frac{P}{3!} p^3 + \sum \frac{q}{4!} (k_1^4 - k_2^4).$$

Các hằng số được xác định theo điều kiện liên kết của dầm.

$$f_{\max} \leq [f]. \quad (6.21)$$

Dầm cầu trục $[f] = \left(\frac{1}{600} \div \frac{1}{500} \right) l;$

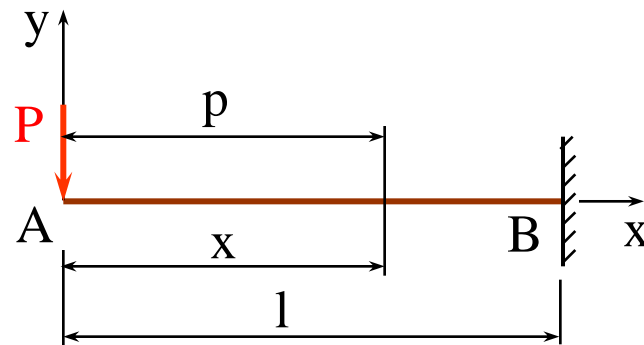
l - chiều dài của dầm.

Thí dụ. Xác định độ võng và góc xoay của mặt cắt A.

Phương trình góc xoay

$$EI\varphi = EI\varphi_0 - \frac{Px^2}{2}; \quad x = l, \varphi = 0;$$

$$\longrightarrow 0 = EI\varphi_0 - \frac{Pl^2}{2}; \quad EI\varphi_0 = \frac{Pl^2}{2}; \quad \varphi_0 = \frac{Pl^2}{2EI} \quad (6.22)$$



Phương trình độ võng

$$EI\varphi = \frac{Pl^2}{2} - \frac{Px^2}{2}$$

$$EIy = EIy_0 + \frac{Pl^2}{2}x - \frac{Px^3}{6}$$

Khi $x = l, y = 0 \longrightarrow$

$$0 = EIy_0 + \frac{Pl^3}{2} - \frac{Pl^3}{6}; \quad EIy_0 = -\frac{Pl^3}{3}; \quad y_0 = -\frac{Pl^3}{3EI} \quad (6.23)$$

$$\longrightarrow EIy = -\frac{Pl^3}{3} + \frac{Pl^2}{2}x - \frac{Px^3}{6}$$

Thí dụ 6.5. Xác định độ võng và góc xoay lớn nhất của dầm .

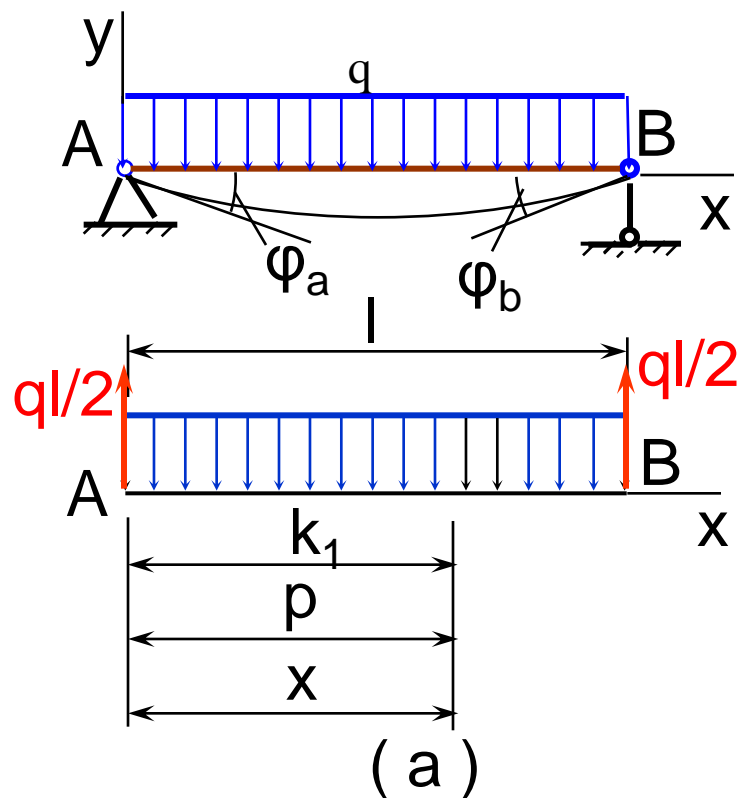
$$V_A = V_B = q \frac{l}{2} .$$

Các phương trình độ võng và góc xoay:

$$EI\varphi = EI\varphi_0 + \frac{ql}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{qx^3}{6} ;$$

$$EIy = EIy_0 + EI\varphi_0 \cdot x + \frac{ql}{2} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{qx^4}{24} . \quad (b)$$

Khi $x = 0$; $y = 0$; $y_0 = 0$; khi $x = l$; $y = 0$:



$$0 = EI\varphi_0 l + \frac{ql}{2} \frac{l^3}{6} - \frac{ql^4}{24};$$

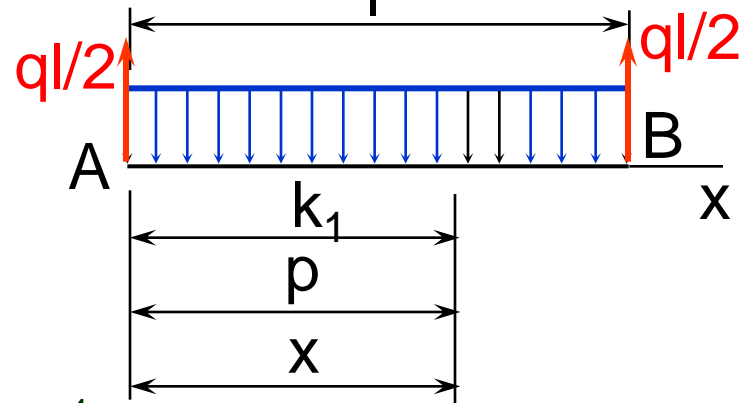
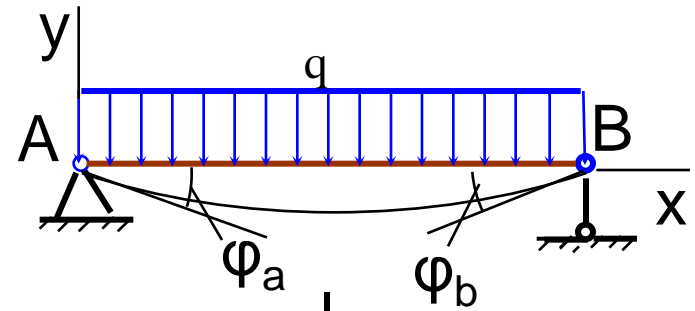
$$EI\varphi_0 = -\frac{ql^3}{12} + \frac{ql^3}{24}; |\varphi_a| = |\varphi_b| = \frac{ql^3}{24EI};$$

$$EIy = -\frac{ql^3}{24} \cdot x + \frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24}.$$

$$x = l/2 \quad \longrightarrow$$

$$EIy = -\frac{ql^3}{24} \cdot \frac{l}{2} + \frac{ql\left(\frac{l}{2}\right)^3}{12} - \frac{q\left(\frac{l}{2}\right)^4}{24} = -\frac{5}{384} ql^4.$$

$$f = |y|_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}. \quad (6.24)$$



Thí dụ 6. 6. Xác định độ võng và góc xoay lớn nhất của mặt cắt trên dầm

$$V_A = \frac{Pb}{l}; \quad V_B = \frac{Pa}{l}$$

$$EI\varphi = EI\varphi_0 + \frac{Pb}{2l}x^2 - \frac{Pp^2}{2}$$

$$Ely = Ely_0 + EI\varphi_0x + \frac{Pb}{6l}x^3 - \frac{Pp^3}{6}$$

$x = 0, p = 0$ và $y = 0$ nên $Ely_0 = 0$.

$x = l; p = l-a; y = 0$:

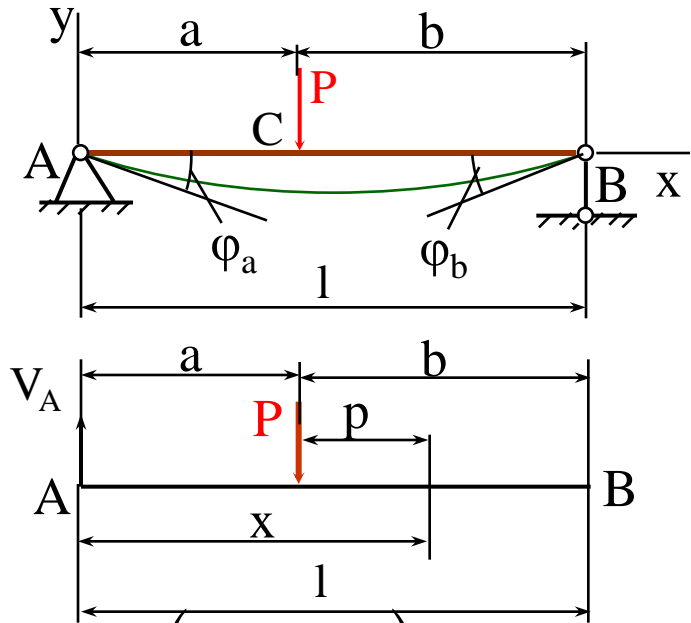
$$0 = EI\varphi_0l + \frac{Pbl^3}{6l} - \frac{Pb^3}{6};$$

$$EI\varphi_0 = -\frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l}$$

P đặt ở giữa dầm ($a = b = l/2$). $|\varphi_a| = |\varphi_b| = \frac{Pl^2}{16EI}$ (6. 25)

$$y = -\frac{Pl^3}{48EI}$$

$$f = \frac{Pl^3}{48EI} \quad (6. 26)$$



6.6. Phương pháp tải trọng giả tạo.

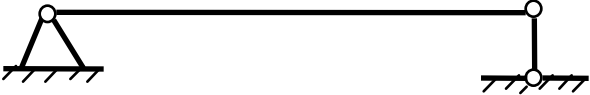
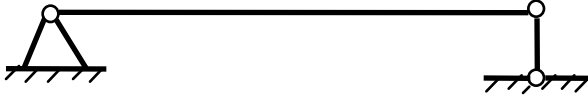
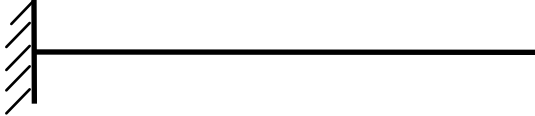
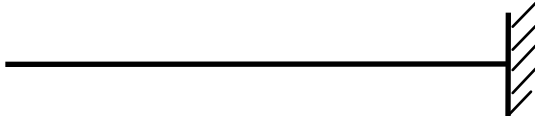

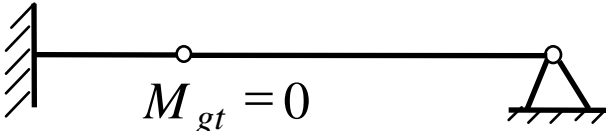
$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q; \quad (a) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (b)$$

t
ngang Q và momen uốn M từ cường độ của tải trọng phân bố

tải trọng giả
tạo trên dầm ta có thể dùng phương pháp mặt cắt để tìm các đại lượng chuyển vị góc và chuyển vị y như một loại t ngang giả tạo và momen uốn giả tạo:

$$q_{gt} = M/EI; \quad Q_{gt} = \varphi \quad \text{và} \quad M_{gt} = y.$$

Dầm giả tạo cần có các liên kết sao cho các thành phần nội lực giả tạo phù hợp với các chuyển vị ở các mặt cắt tương ứng trên dầm thực.

| Dầm thực | Dầm giả tạo |
|---|---|
|  <p> $y = 0$ $y = 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ </p> |  <p> $M_{gt} = 0$ $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ </p> |
|  <p> $y = 0$ $y \neq 0$ $\varphi = 0$ $\varphi \neq 0$ </p> |  <p> $M_{gt} = 0$ $M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ </p> |
|  <p> $y \neq 0$ $y = 0$ $y = 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ </p> |  <p> $M_{gt} \neq 0$ $M_{gt} = 0$ $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $\varphi \neq 0$ </p> |

Thí dụ 6. 7. Xác định độ võng và góc xoay tại đầu A của dầm

$$Q_{gt} = -\frac{1}{3} \frac{ql^2}{2EI} \cdot l = -\frac{ql^3}{6EI};$$

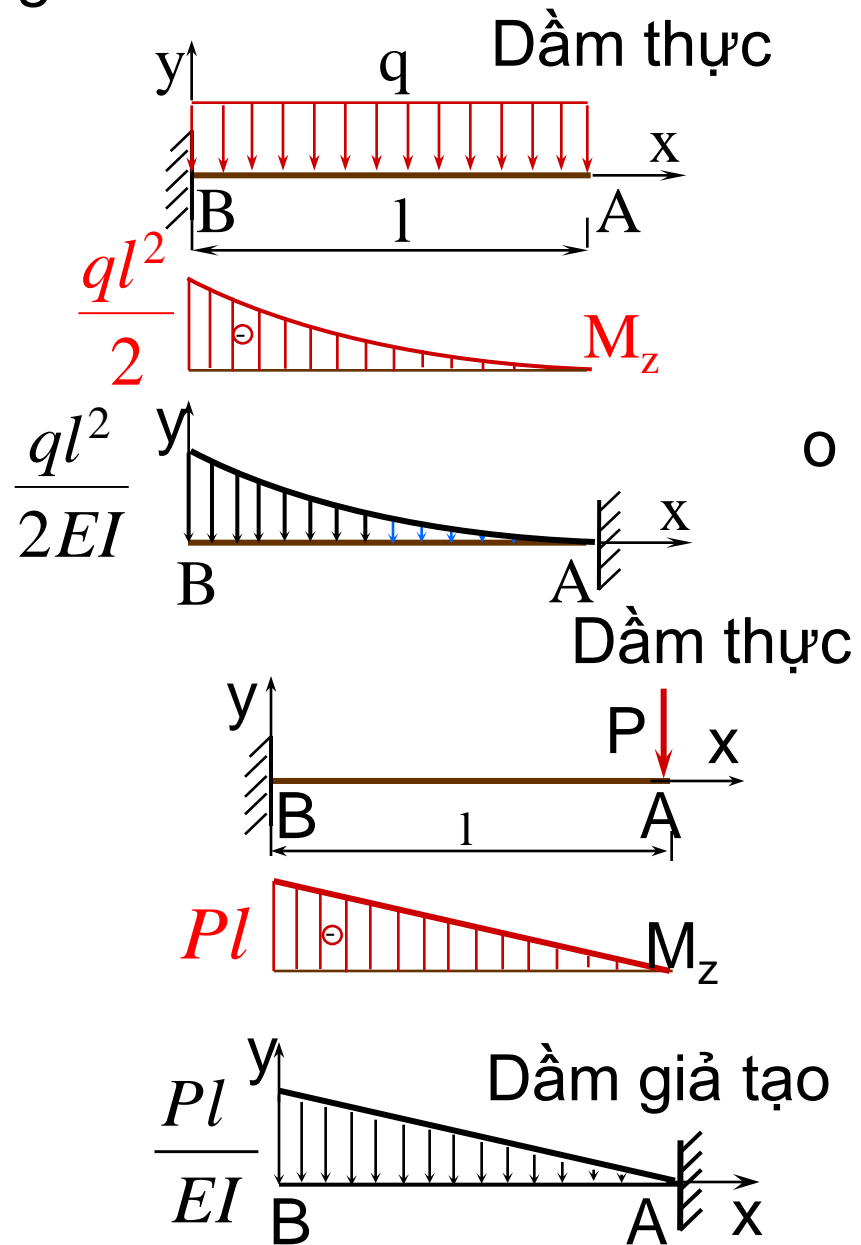
$$M_{gt} = -\frac{1}{3} \frac{ql^2}{2EI} l \cdot \frac{3}{4} l = -\frac{ql^4}{8EI};$$

$$y_A = -\frac{ql^4}{8EI}; \quad \varphi_A = -\frac{ql^3}{6EI}.$$

$$Q_{gt} = -\frac{1}{2} \frac{Pl}{EI} l = -\frac{Pl^2}{2EI};$$

$$M_{gt} = -\frac{1}{2} \frac{Pl}{EI} l \cdot \frac{2l}{3} = -\frac{Pl^3}{3EI};$$

$$y_A = -\frac{Pl^3}{3EI}; \quad \varphi_A = -\frac{Pl^2}{2EI}.$$



6.8. Bài toán siêu tĩnh.

Vẽ biểu đồ momen uốn và lực t ngang của dầm siêu tĩnh.

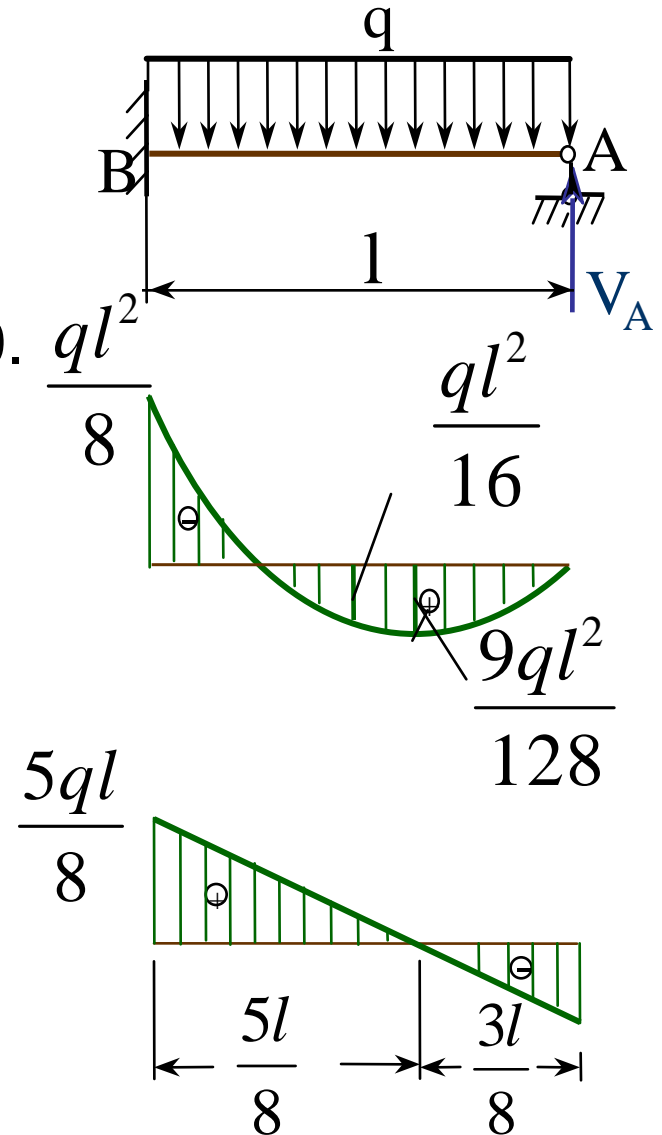
Thí dụ 6.7 + đ/k $y_A = 0 \longrightarrow$

Gối tựa A \equiv phản lực V_A + đ/k: $y_A = 0$.

$$-\frac{ql^4}{8EI} + \frac{V_A l^3}{3EI} = 0; V_A = \frac{3}{8} ql.$$

$$Q = -\frac{3}{8} ql + qx = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{8} l.$$

$$\Rightarrow M_{\max} = V_A \frac{3l}{8} - \frac{q}{2} \left(\frac{3l}{8} \right)^2 = \frac{9ql^2}{128}.$$



6.7. Dầm có mặt cắt biến đổi, ứng suất tập trung, xác định biến dạng.

6.7.1. Xác định ứng suất, điều kiện bền.

25°):

10 %).

n hơn
ng

qua.

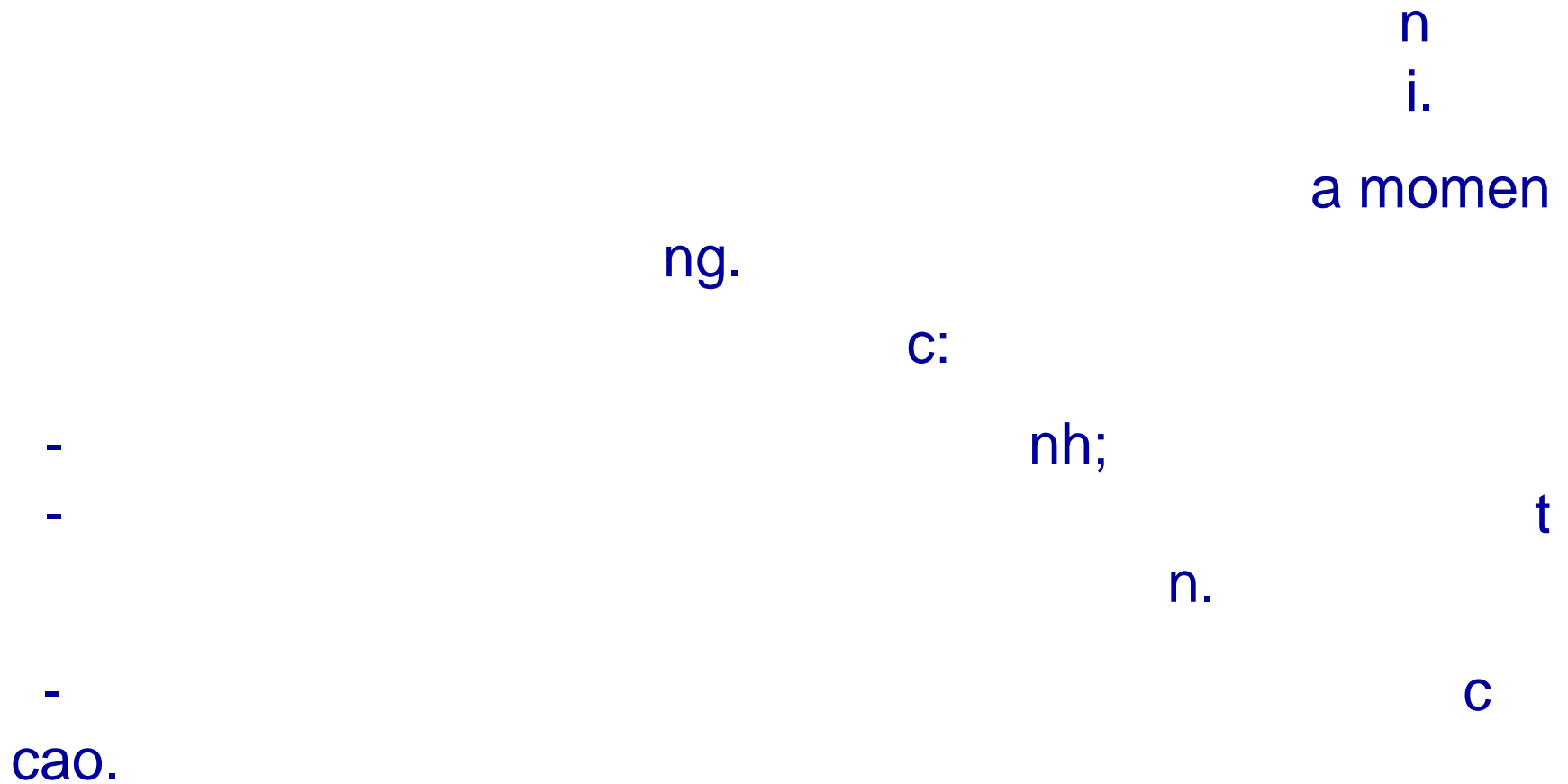
nh then):

ng hệ số tập trung ứng suất khi uốn α_σ
t :

nh

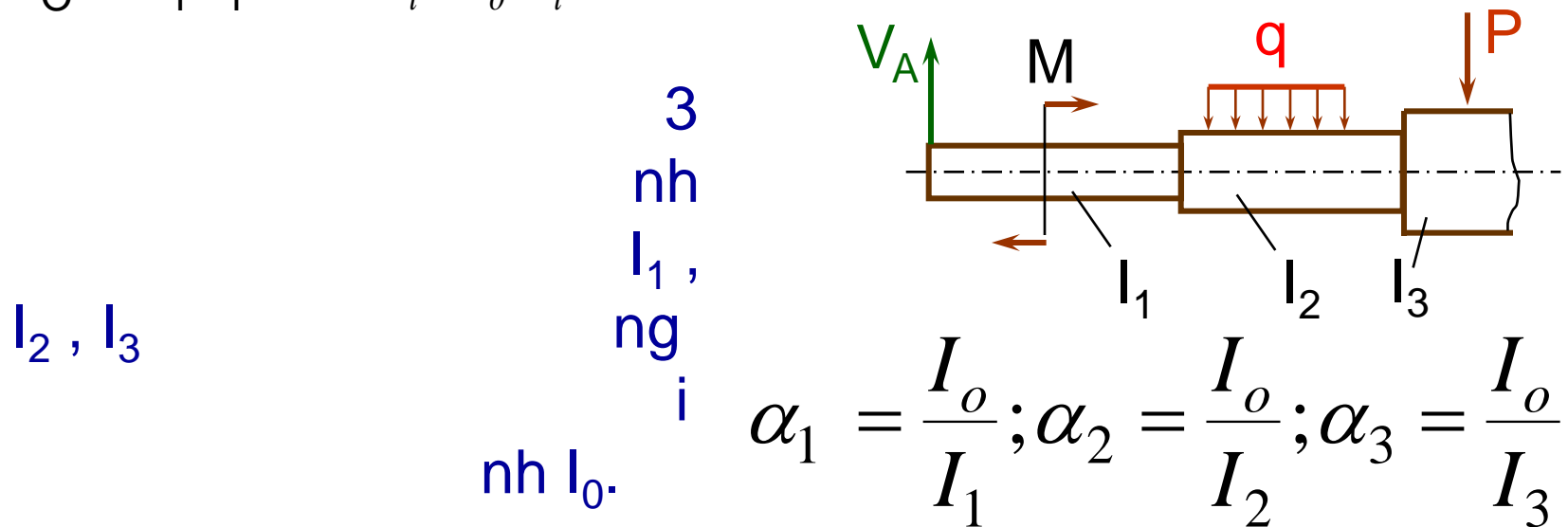
$$\frac{M_{\max}}{W_z} \alpha_\sigma \leq [\sigma]; \quad \frac{M_{\max}}{W_y} \alpha_\sigma \leq [\sigma]; \quad (6.27)$$

6.7.2. Xác định biến dạng.



ng sau :

biến dạng của một đoạn dầm có momen quán tính của mặt cắt là I_i và nội lực trong mặt cắt là momen uốn M_i và nội lực ngang Q_i sẽ giống biến dạng của đoạn dầm có momen quán tính của mặt cắt I_o và nội lực trong mặt cắt là $M_o = \alpha_i M_i$ và $Q_o = \alpha_i Q_i$ với $\alpha_i = I_o / I_i$.



-Phần lực bổ sung ΔQ_i và ΔM_i (vấn tuân thủ quy tắc về dấu): đi từ bên trái sang phải lực hướng lên là dương và momen theo chiều kim đồng hồ là dương).

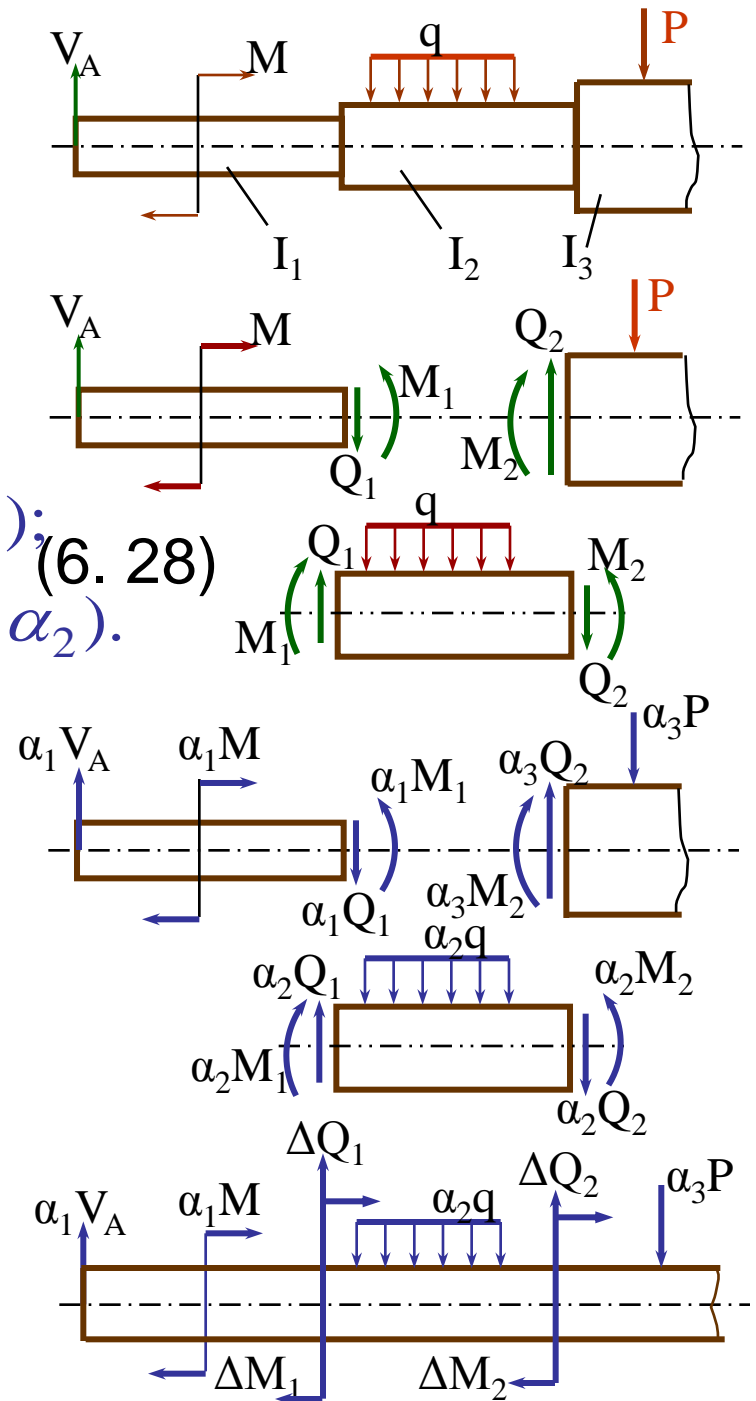
$$\Delta Q_1 = Q_1(\alpha_2 - \alpha_1); \Delta Q_2 = Q_2(\alpha_3 - \alpha_2); \quad (6.28)$$

$$\Delta M_1 = M_1(\alpha_2 - \alpha_1); \Delta M_2 = M_2(\alpha_3 - \alpha_2).$$

-Các thành phần lực bổ sung ΔQ_i và ΔM_i được đặt vào các mặt cắt chuyển tiếp.

-Có thể kiểm tra kết quả tính toán theo điều kiện cân bằng.

-Cuối cùng xác định biến dạng của dầm quy đổi theo các phương trình (6.20).



Thí dụ 6.9. Chọn kích thước mặt cắt ngang của dầm chữ I có tăng cường hai lá thép cho phần chịu tải lớn nhất Biết

$$[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2; [f] = 15 \text{ mm}.$$

$$V_A = 53,3 \text{ kN};$$

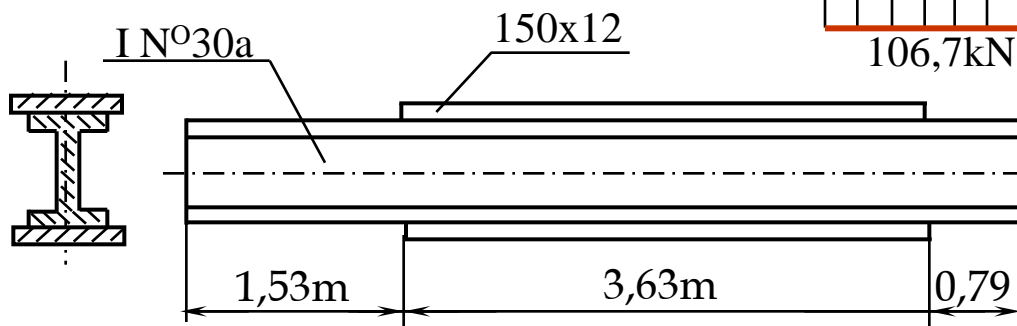
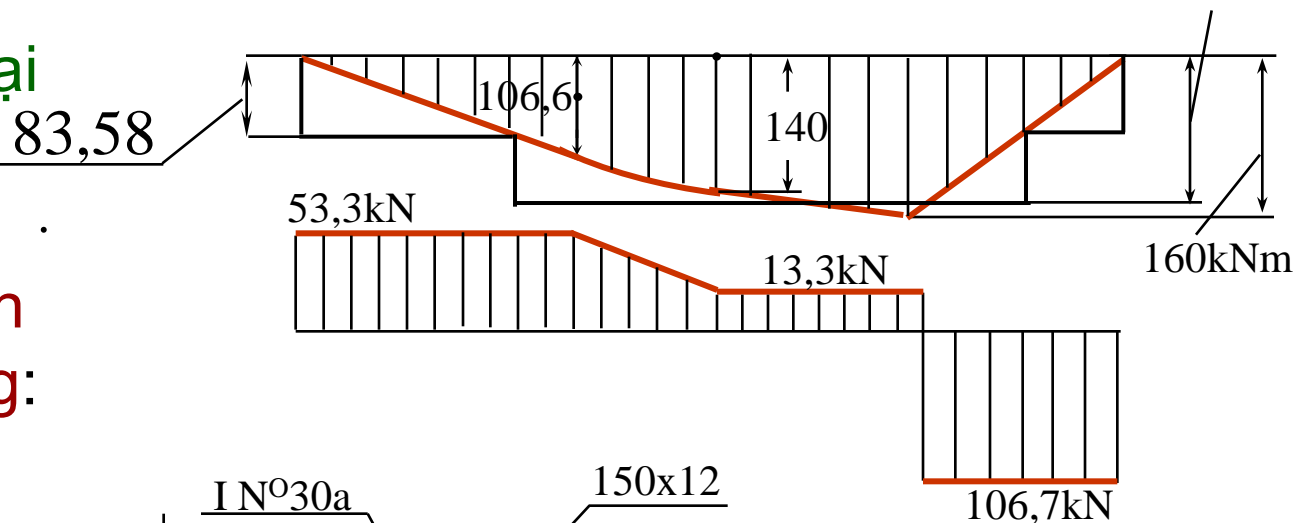
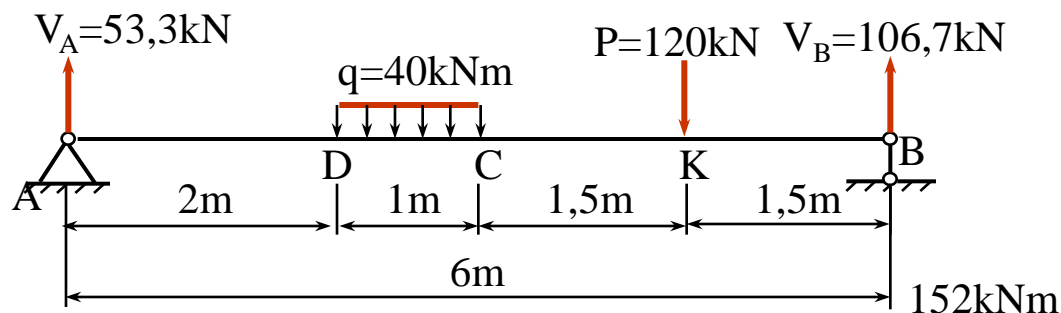
$$V_B = 106,7 \text{ kN}.$$

Momen uốn cực đại

$$M_{\max} = 160 \text{ kNm}$$

Momen chống uốn của mặt cắt ngang:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{160 \cdot 100}{14} = 1143 \text{ cm}^3.$$



Chọn dầm I có

$$W_{Iz} = 0,5 \cdot 1143 = 570 \text{ cm}^3.$$

I N° 30a có

$$W_{Iz} = 597 \text{ cm}^3.$$

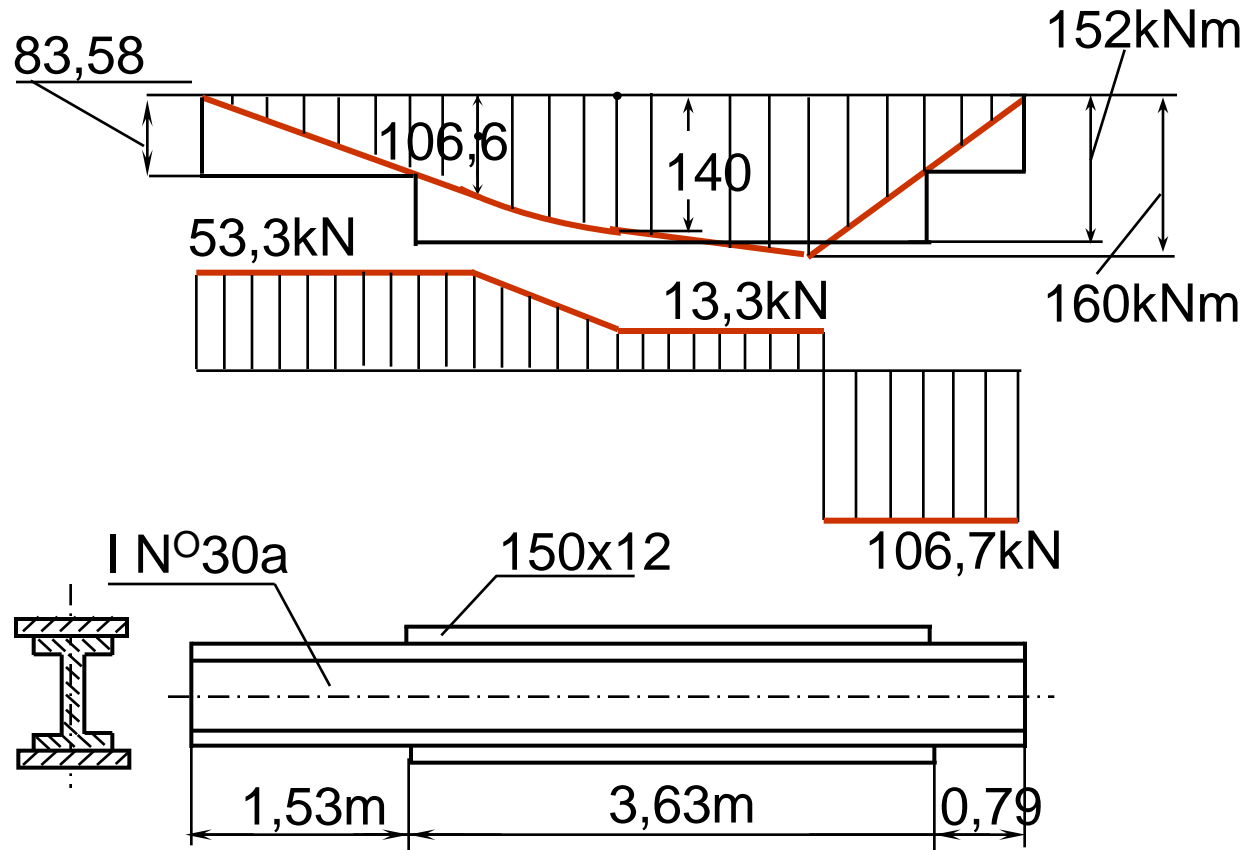
$$I_{Iz} = 8950 \text{ cm}^4.$$

c
m
ng

12x150 mm

$$I_{2z} = 2 \left(\frac{15 \cdot 1,2^3}{12} + 15 \cdot 1,2 \cdot 15,6^2 \right) \cong 8760 \text{ cm}^4.$$

$$I_z = 8950 + 8760 = 17710 \text{ cm}^4.$$



Momen uốn cho phép của thép chữ I có gia cường là

$$[M] = [\sigma] \frac{I_{1z} + I_{2z}}{y_{\max}} = 14 \frac{17710}{16,2};$$
$$[M] = 15200 \text{ kNcm} = 152 \text{ kNm}.$$

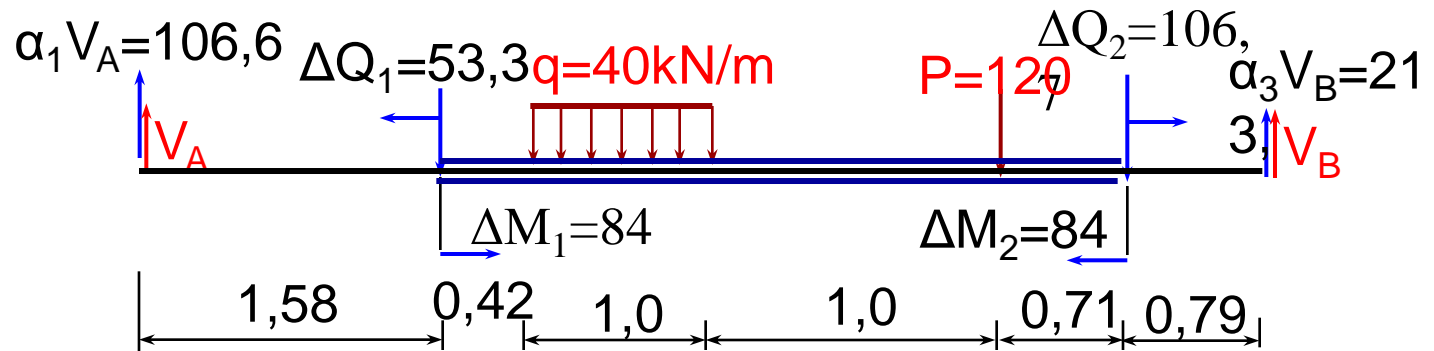
Sai lệch 5% so với momen uốn cực đại ($M_{\max} = 160 \text{ kNm}$).

Vẽ biểu đồ momen uốn cho phép của thép chữ I:

$$[M_1] = [\sigma] W_{1z} = 14.597 = 8400 \text{ kNcm} = 84 \text{ kNm}.$$

Tám thép gia cường có chiều dài $l_3 = 3,63 \text{ m}$ đặt cách đầu trái một khoảng $l_1 = 1,58 \text{ m}$ và cách đầu phải một khoảng $l_2 = 0,79 \text{ m}$.

Xác định biến dạng của dầm và kiểm tra độ cứng.



Dầm quy đổi có momen quán tính của mặt cắt

$$I_o = 17710 \text{ cm}^4.$$

$$\alpha_1 = \frac{I_o}{I_1} = \frac{17710}{8950} \cong 2;$$

$$\alpha_2 = \frac{17710}{17710} = 1;$$

$$\alpha_3 = \frac{17710}{8950} \cong 2$$

Các thành phần nội lực ở các mặt cắt phân chia các đoạn dầm : $M_1 = 84 \text{ kNm}$; $M_2 = 84 \text{ kNm}$; $Q_1 = 53,3 \text{ kN}$; $Q_2 = -106,7 \text{ kN}$.

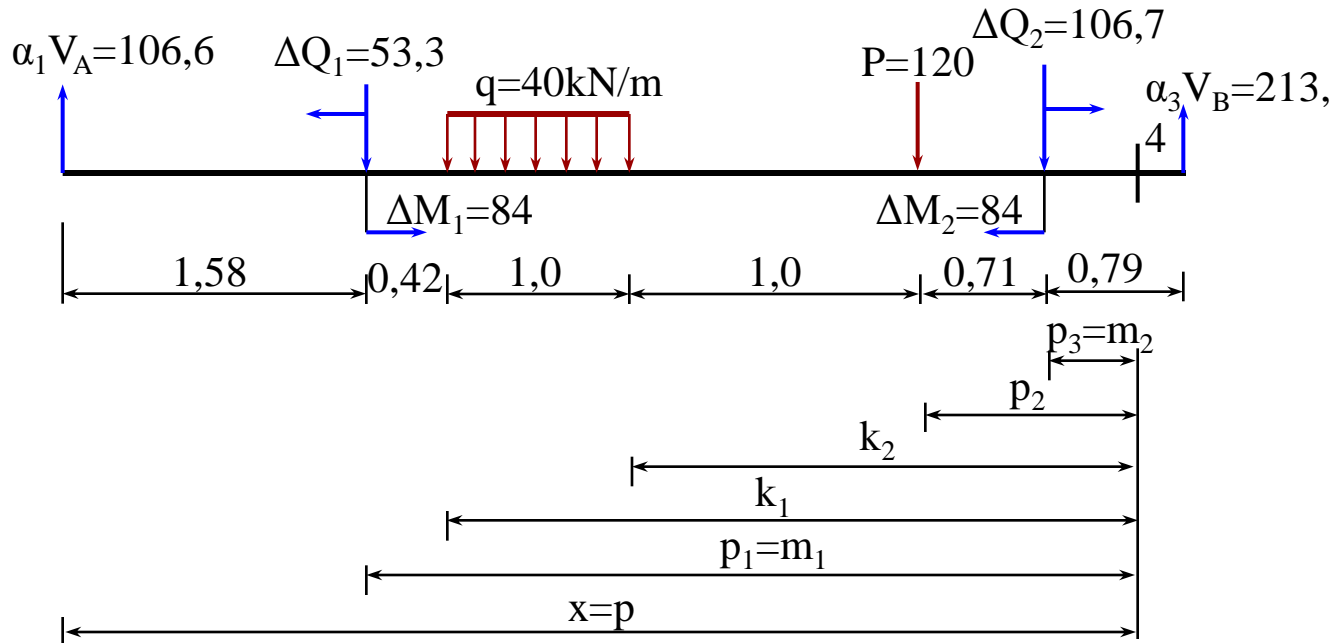
Các thành phần lực bổ sung:

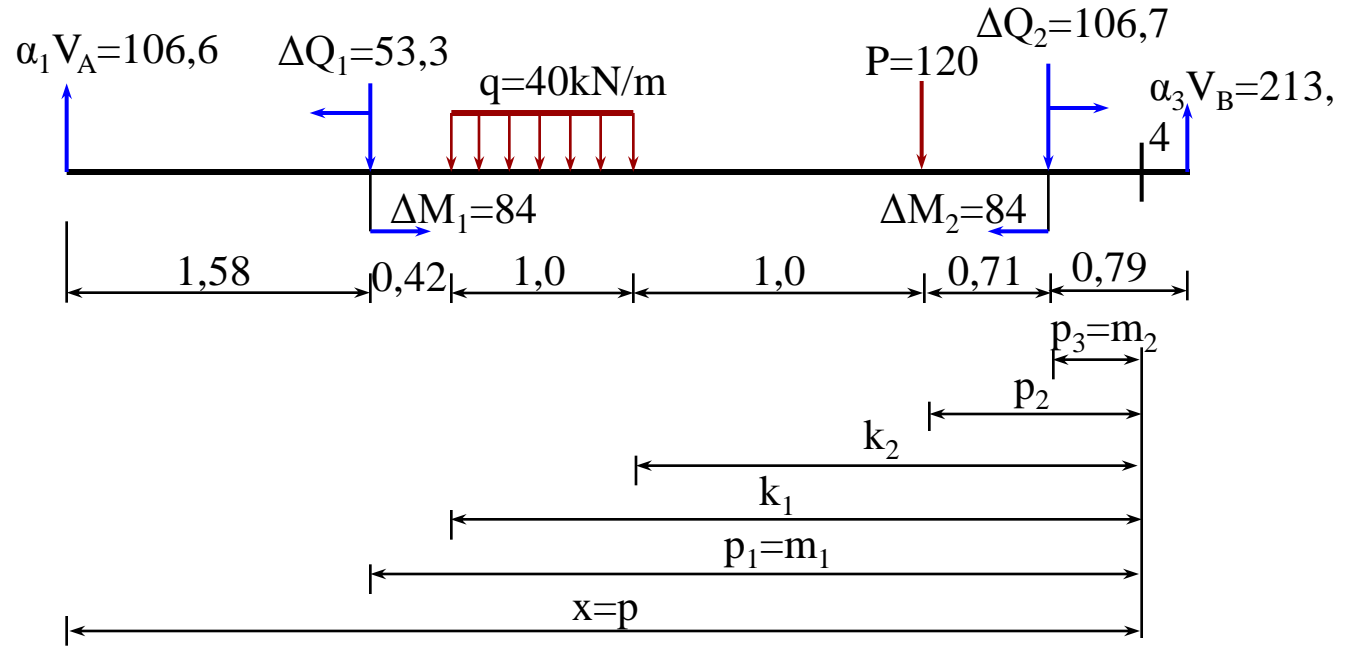
$$\Delta Q_1 = Q_1(\alpha_2 - \alpha_1) = 53,3(1 - 2) = -53,3 \text{ kN};$$

$$\Delta Q_2 = Q_2(\alpha_3 - \alpha_2) = -106,7(2 - 1) = -106,7 \text{ kN};$$

$$\Delta M_1 = M_1(\alpha_2 - \alpha_1) = 84(1 - 2) = -84 \text{ kN};$$

$$\Delta M_2 = M_2(\alpha_3 - \alpha_2) = 84(2 - 1) = 84 \text{ kN};$$





Phương trình độ võng cho mặt cắt ở đoạn cuối:

$$EI_z y = EI_z y_o + EI_z \varphi_o x + \alpha_1 V_A \frac{p^3}{6} - \Delta Q_1 \frac{p_1^3}{6} - \Delta M_1 \frac{m_1^2}{2} -$$

$$- q \frac{k_1^4 - k_2^4}{24} - P \frac{p_2^3}{6} - \Delta Q_2 \frac{p_3^3}{6} + \Delta M_2 \frac{m_2^2}{2}. \quad (\text{a})$$

Khi $x = 0; y = 0$; $\rightarrow y_0 = 0$. Khi $x = 6; y = 0; p = 6$;
 $p_1 = m_1 = 4,42; k_1 = 4; k_2 = 3; p_2 = 1,5; p_3 = m_2 = 0,79$.

Thay các giá trị này vào (a) ta xác định được

$$EI_z \varphi_0 = -318 \text{ kNm}^2$$

Mặt cắt giữa dầm : $x = 3\text{m}; p = 3\text{m}; p_1 = m_1 = 1,42 \text{ m};$
 $k_1 = 1\text{m}; k_2 = 0$.

\rightarrow (a) $\rightarrow EI_z y = 546 \text{ kNm}^3$.

$$y = f_c = \frac{546 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^6 \cdot 17710} = 1,54 \text{ cm} = 15,4 \text{ mm}$$

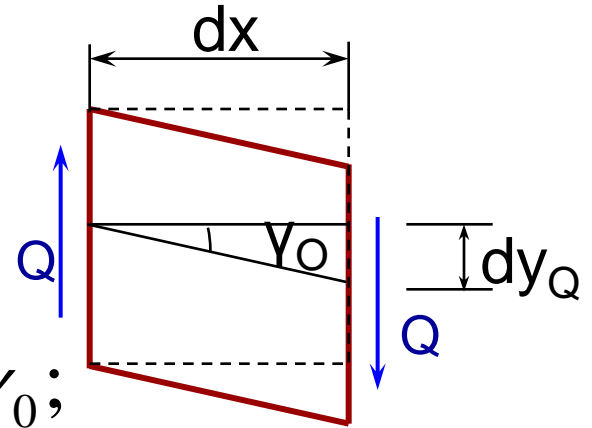
(vượt quá trị số cho phép 2,6%).

6.9. Ảnh hưởng của lực cắt đến độ võng của dầm chịu uốn.
 Phương trình vi phân gần đúng của đường
 đàn hồi (chỉ tính ảnh hưởng của momen uốn):

$$y'' = \frac{M_z(x)}{EI_z} \quad (6.29)$$

Do biến dạng trượt trục thanh sẽ quay đi một góc rất nhỏ γ_0 . Độ chênh

$$dy_Q = dx \operatorname{tg} \gamma_0, \Rightarrow \frac{dy_Q}{dx} = \operatorname{tg} \gamma_0 \approx \gamma_0;$$



$$\gamma_0 - \text{góc lệch của trục dầm: } \gamma_0 = -\frac{\tau_0}{G} \longrightarrow \frac{dy_Q}{dx} = -\frac{\tau_0}{G} \quad (a)$$

Trong (a) vế phải có dấu trừ vì khi ứng suất tiếp dương lại tạo ra góc trượt âm G - môđun trượt của vật liệu làm dầm.

τ_0 - ứng suất tiếp tại điểm nằm trên đường trung hoà, $\tau_0 = \alpha \frac{Q}{F}$

Mặt cắt hình chữ nhật $\alpha = 1,5$;

Mặt cắt hình tròn đặc $\alpha = 1,38$;
 hình chữ nhật rỗng $\alpha = F/F_t$;
 F - diện tích toàn bộ mặt cắt;
 F_t - diện tích phần thẳng đứng của mặt cắt.

$$(a) \longrightarrow \frac{dy_Q}{dx} = -\alpha \frac{Q}{GF} \quad (6.30) \quad \frac{d^2 y_Q}{dx^2} = -\frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \quad (6.31)$$

Độ võng tổng cộng : $y = y_M + y_Q$.

$$y'' = y''_M + y''_Q ;$$

$$y'' = \frac{M_z(x)}{EI_z} - \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dz} \quad (6.32)$$

Tích phân hai vế phương trình (6.32) và xác định các hằng
 c độ

võng và góc xoay.

Thí dụ 6. 10. Xét dầm đơn giản có gối đỡ bản lề ở hai đầu chịu tải trọng phân bố đều với cường độ q , chiều dài của dầm là l .

$$M_z(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2; Q = \frac{ql}{2} - qx;$$

$$y'' = \frac{q}{2EI_z}(xl - x^2) + \frac{\alpha q}{GF}.$$

$$y = \frac{q}{24EI_z}(-x^4 + 2lx^3) + \frac{\alpha q}{2GF}x^2 + C_1x + C_2.$$

n biên: $y(x = 0) = y(x = l) = 0 \rightarrow$

$$C_1 = -\frac{ql^3}{24EI_z} - \frac{\alpha ql}{2GF} \quad C_2 = 0.$$

(b) \longrightarrow

$$y = \frac{ql^4}{24FEI_z} \left(\frac{x}{l} \right) \left(\frac{-x^3}{l^3} + \frac{2x^2}{l^2} - 1 \right) - \frac{\alpha ql^2}{2GF} \left(\frac{x}{l} \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right) \quad (c)$$

$$y_{\max} \stackrel{x=0,5l}{=} - \frac{5ql^4}{384EI_z} - \frac{\alpha ql^2}{8GF} = - \frac{5ql^4}{384EI_z} \left(1 + \frac{48\alpha EI_z}{5GF l^2} \right).$$

Mặt cắt hình chữ nhật tỷ số $\frac{I_z}{Fl^2}$ có bậc của $\left(\frac{h}{l} \right)^2$

$h/l < 1/5$ bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt đến độ võng.

Dầm rỗng (mặt cắt rỗng: các mặt cắt ghép của cột điện cao thế, các tháp, các dầm dàn) $\frac{I_z}{Fl^2}$ có bậc xấp xỉ đơn vị, ảnh hưởng của lực cắt là đáng kể. Fl^2

6.10. Khái niệm về dầm bền đều.

Thay đổi kích thước của mặt cắt ngang của dầm dọc theo trục dầm tương ứng với sự thay đổi của momen uốn, ta có thể đạt được tình huống khi đó ứng suất ở những thớ ngoài cùng của dầm tại mọi mặt cắt đều đạt tới giá trị của ứng suất cho phép. Những dầm này được gọi là *dầm bền đều*.

Ứng suất ở những điểm nằm xa trục trung hoà nhất trong mọi mặt cắt của dầm có độ bền đều phải thoả mãn điều kiện:

$$\sigma = \frac{M_z(x)}{W_z(x)} = [\sigma] = \text{const}; \quad (a)$$

$M_z(x)$; $W_z(x)$ là momen uốn, momen chống uốn ở mặt cắt có hoành độ x .

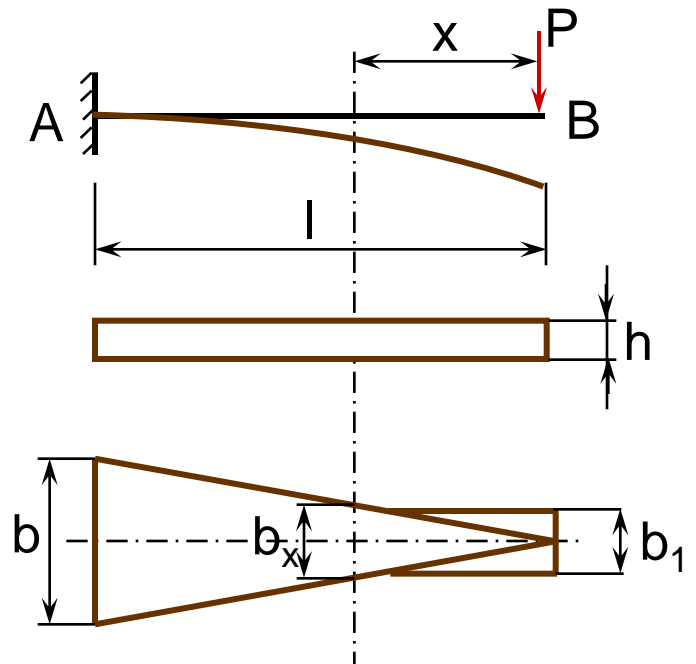
Mặt cắt hình chữ nhật

$$W_z(x) = \frac{M_z(x)}{[\sigma]} = \frac{Px}{[\sigma]} = \frac{b_x h_x^2}{6} \quad (b)$$

Có thể thoả mãn điều kiện này bằng cách biến đổi một hay cả hai kích thước b_x và h_x tương ứng với sự biến đổi của momen uốn dọc theo trục dầm.

Trường hợp mặt cắt hình chữ nhật có chiều cao không đổi và bề rộng biến đổi:

$$\frac{Px}{[\sigma]} = \frac{b_x h^2}{6}; \quad b_x = \frac{6Px}{h^2 [\sigma]}$$



Khi $x = 0$, $b_0 = 0$;

$$x = l \quad b = b_l = \frac{6Pl}{h^2[\sigma]}$$

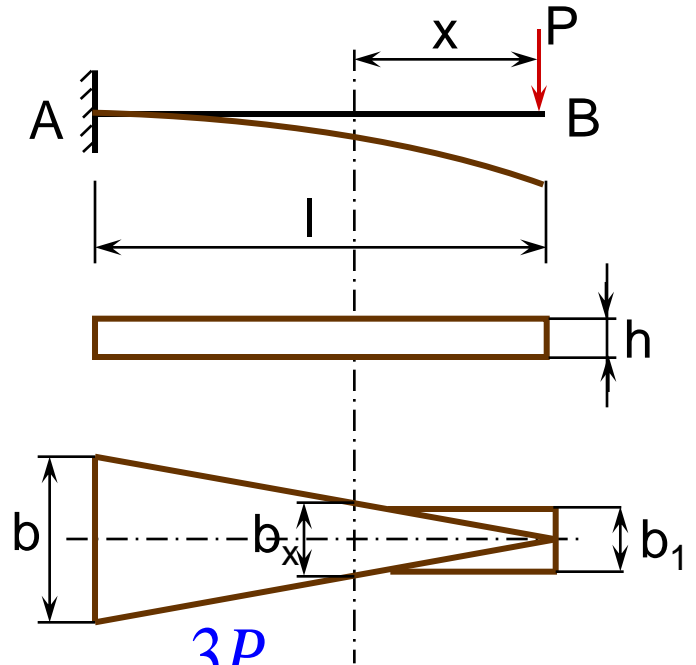
Bề rộng của mặt cắt ở đầu B của dầm cần xác định từ điều kiện bền cắt do tác dụng của lực ngang P.

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2F} = \frac{3P}{2F} = \frac{3P}{2b_1h} \leq [\tau]; \quad \rightarrow b_1 = \frac{3P}{2h[\tau]}$$

Phương trình đường đàn hồi:

$$b_x = b \rightarrow I_z(x) = \frac{bh^3}{12} \frac{x}{l} = I_z \frac{x}{l}; \quad I_z \text{ là momen quán tính cực đại}$$

Momen uốn của dầm cong xôn: $M_z(x) = -Px$.



$$EI_z \frac{x}{l} y'' = -Px, \Rightarrow EI_z y'' = -Pl = |M_{\max}| = \text{const};$$

Độ cong của cả hai dầm này là

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} = -\frac{Pl}{EI_z} = \text{const}$$

Dầm bền đều này được uốn cong theo cung tròn.

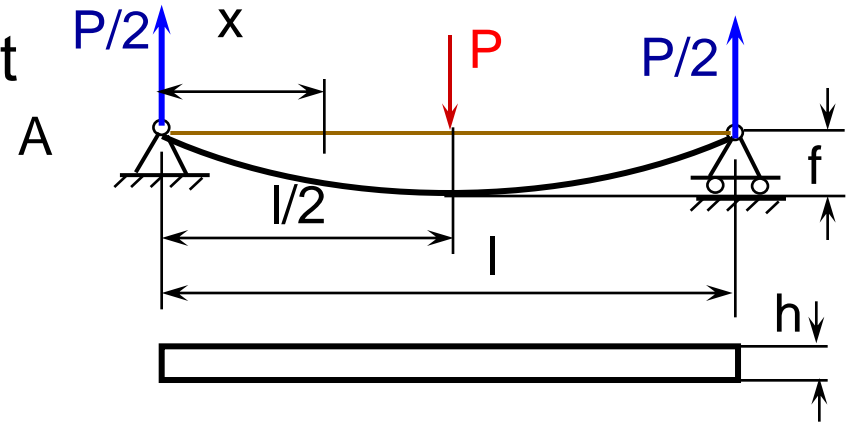
$$EI_z \varphi = EI_z \varphi_0 - Mm = EI_z \varphi_0 - Plx,$$

$$EI_z y = EI_z y_0 + EI_z \varphi_0 x - M \frac{m^2}{2} = EI_z y_0 + EI_z \varphi_0 x - Pl \frac{x^2}{2}$$

$$x = l, \varphi = 0 \text{ và } y = 0 \rightarrow EI_z \varphi_0 = Pl^2, \quad EI_z y_0 = -Pl \frac{l^3}{2},$$

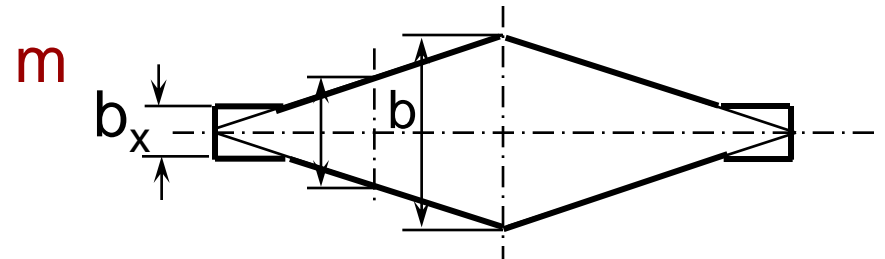
$$y_0 = -\frac{Pl^3}{2EI_z} \quad \text{hay} \quad f = \frac{Pl^3}{2EI_z}. \quad (6.33)$$

Dầm có mặt cắt hình chữ nhật



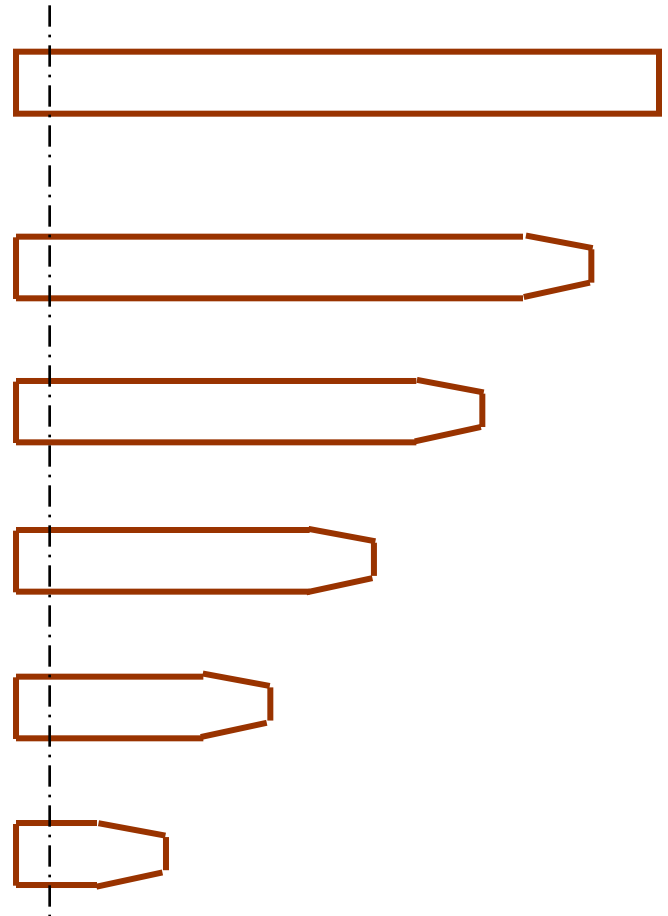
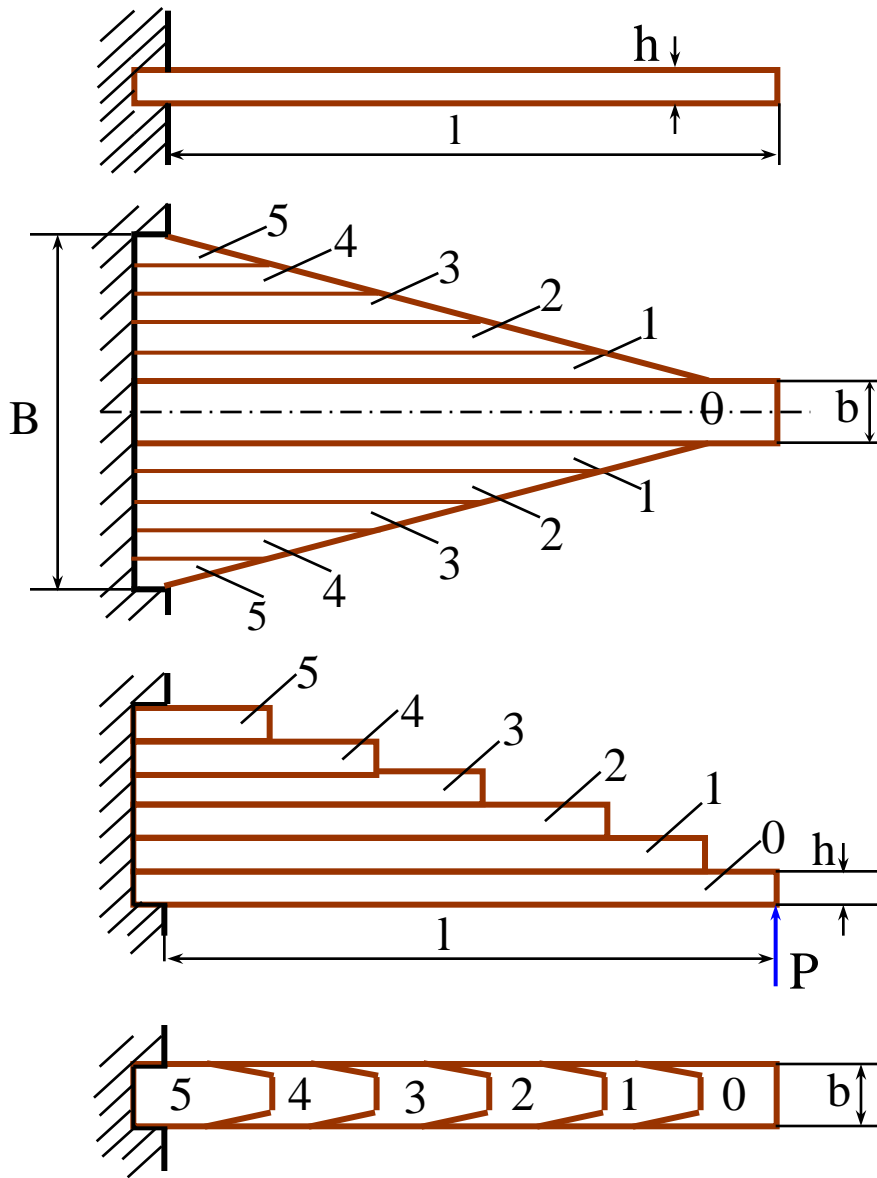
m.

các lò xo lá.



Có thể coi dầm bền đều gồm nhiều lá lò xo riêng biệt tách ra từ dầm bền đều và ghép lại như trên hình vẽ.

Độ võng của các lò xo lá được xác định gần đúng theo công thức $f = \beta f_1$ với $\beta = 1,25 - 1,4$ (f_1 - độ võng của dầm có mặt cắt không đổi).



Dầm bền đều có mặt cắt hình chữ nhật với bề rộng b không đổi và bề cao biến đổi .

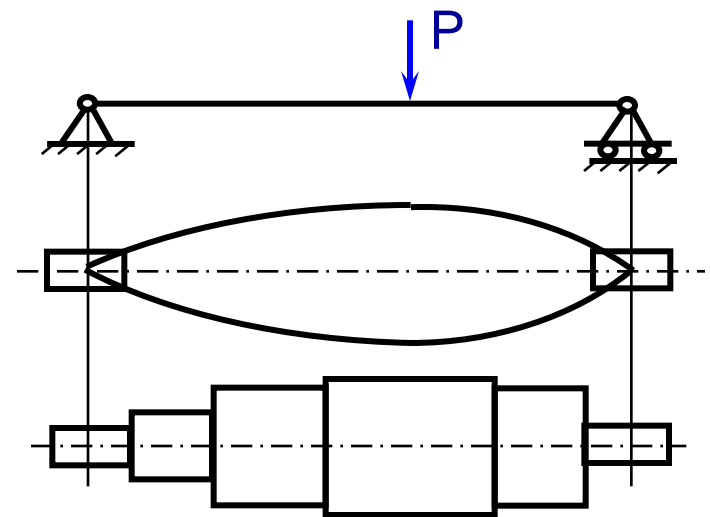
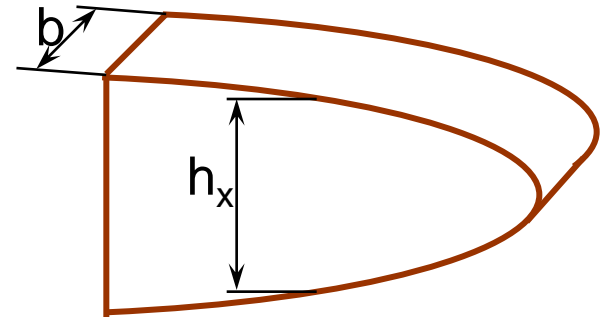
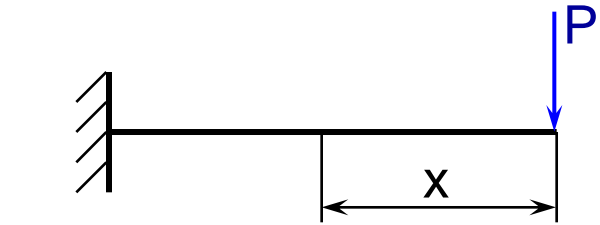
$$\frac{bh_x^2}{6} = \frac{Px}{[\sigma]}, \quad h_x^2 = \frac{6P}{b[\sigma]} x \quad (c)$$

Dầm có mặt cắt hình tròn:

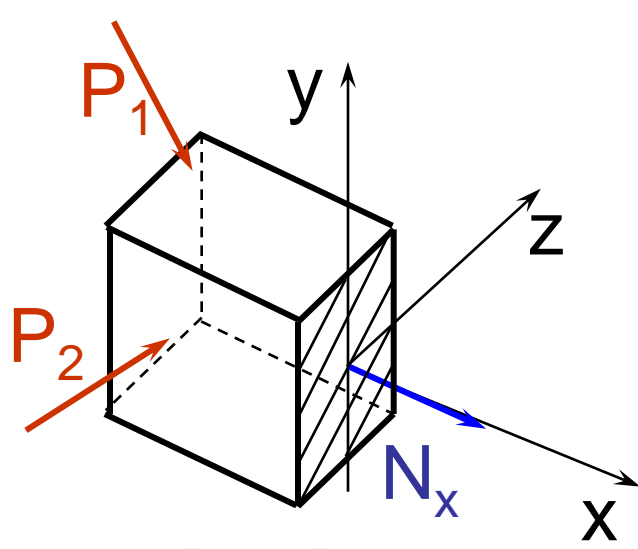
$$0,1d_x^3 = \frac{Px}{[\sigma]}$$

$$\rightarrow d_x^3 = \frac{Px}{0,1[\sigma]}$$

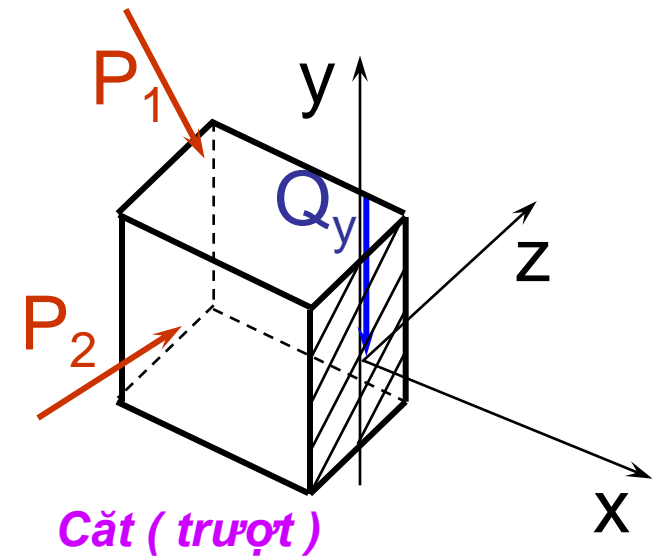
Đường kính của dầm biến đổi theo quy luật parabol bậc ba.



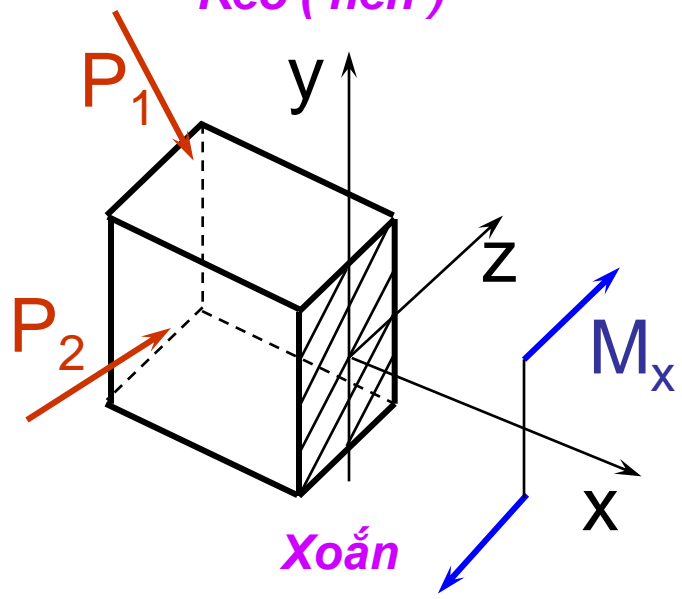
CÁC BIẾN DẠNG CƠ BẢN



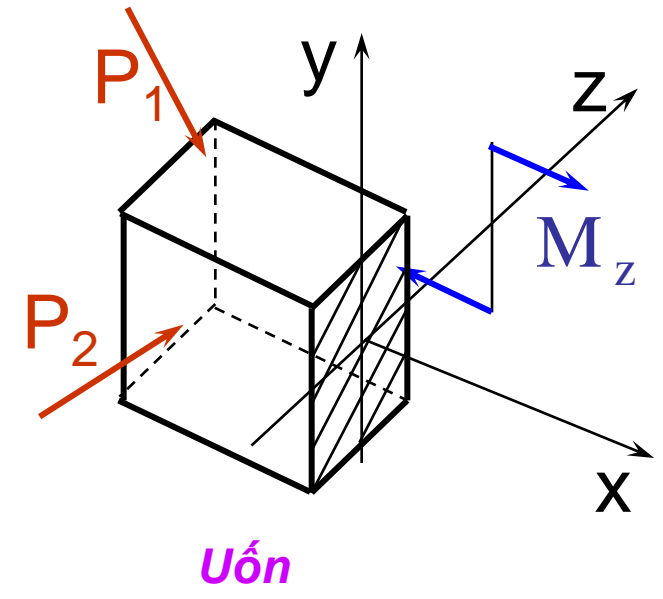
Kéo (nén)



Cắt (trượt)



Xoắn

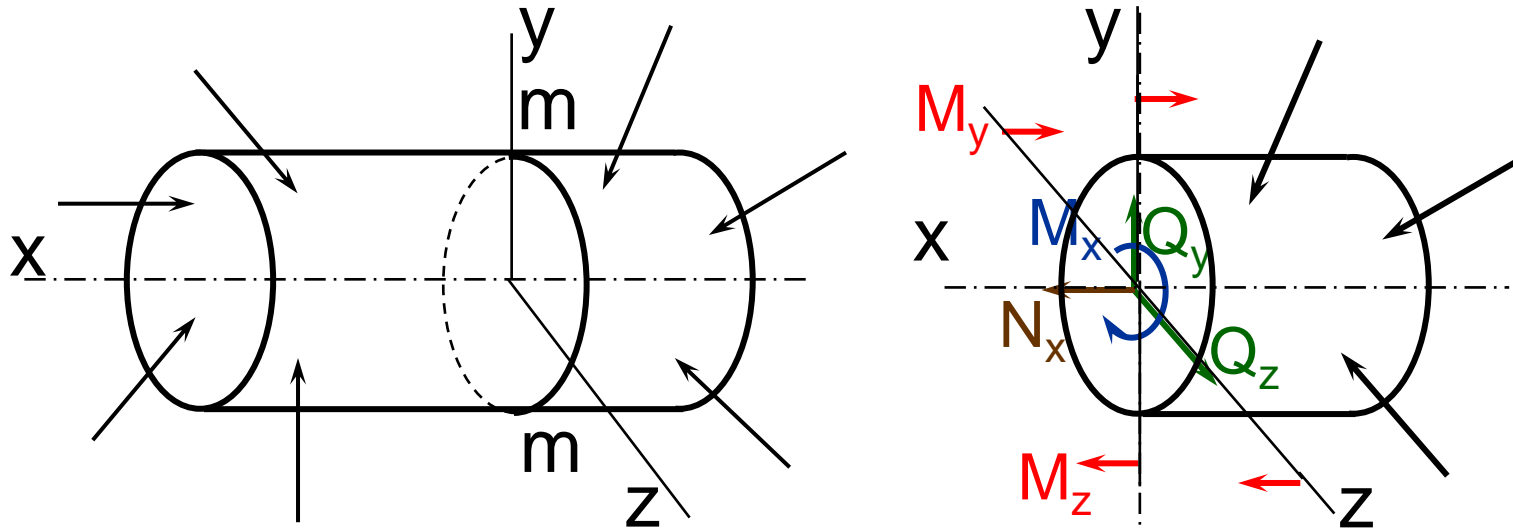


Uốn

Chương 7

Thanh chịu lực phức tạp

7. 1. Khái niệm.



Trường hợp tổng quát nhất:

- 1/ Biến dạng kéo (nén) do lực dọc N_x ;
- 2/ Hai biến dạng cắt do lực cắt ngang Q_y, Q_z ;
- 3/ Biến dạng xoắn do momen xoắn M_x ;
- 4/ Hai biến dạng uốn do momen uốn M_y, M_z .

Trong thực tế thường gặp các biến dạng phức tạp sau:

- 1/ Uốn xiên và uốn phức tạp;
- 2/ Uốn cộng kéo (nén);
- 3/ Uốn cộng xoắn;
- 4/Một số bài toán riêng biệt (thanh cong, ống thành dày, thùng chứa thành mỏng, thanh mảnh . . .).

Trình tự nghiên cứu:

1.Xác định tất cả các thành phần ngoại lực tác dụng lên thanh được xét. Đánh giá so sánh các thành phần này, loại bỏ các thành phần tương đối nhỏ, ít ảnh hưởng đến biến dạng và độ bền của thanh được xét. Theo các thành phần ngoại lực còn lại xác định trường hợp được xét thuộc loại biến dạng phức tạp nào.

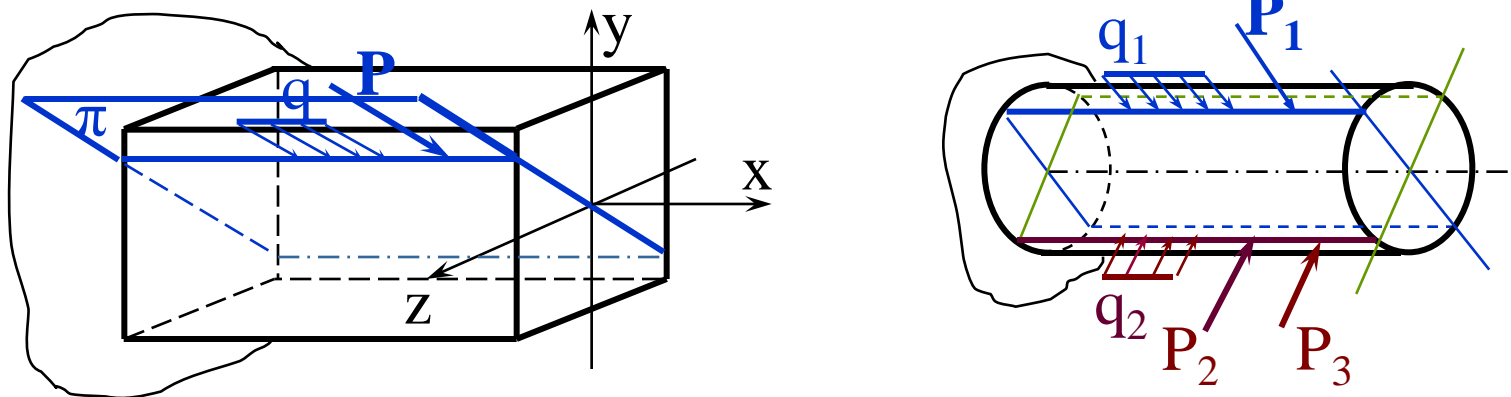
2. Vẽ biểu đồ các nội lực thành phần, tìm mặt cắt nguy hiểm.

3. Vẽ biểu đồ ứng suất trên mặt cắt nguy hiểm do từng thành phần nội lực gây ra; bỏ qua những ứng suất nhỏ, ảnh hưởng không đáng kể đến độ bền của thanh; tìm điểm nguy hiểm trên mặt cắt nguy hiểm; xác định ứng suất do từng thành phần nội lực gây ra và đặc điểm của trạng thái căng tại điểm nguy hiểm.

4. Xác định biểu thức giải tích của ứng suất tổng cộng cực đại tại phân tử được xét, tách ra từ điểm nguy hiểm. Lập điều kiện bền.

5. Xác định biến dạng do từng thành phần lực gây ra, tìm biến dạng tổng cộng và lập điều kiện cứng.

7.2. Uốn xiên và uốn phức tạp.

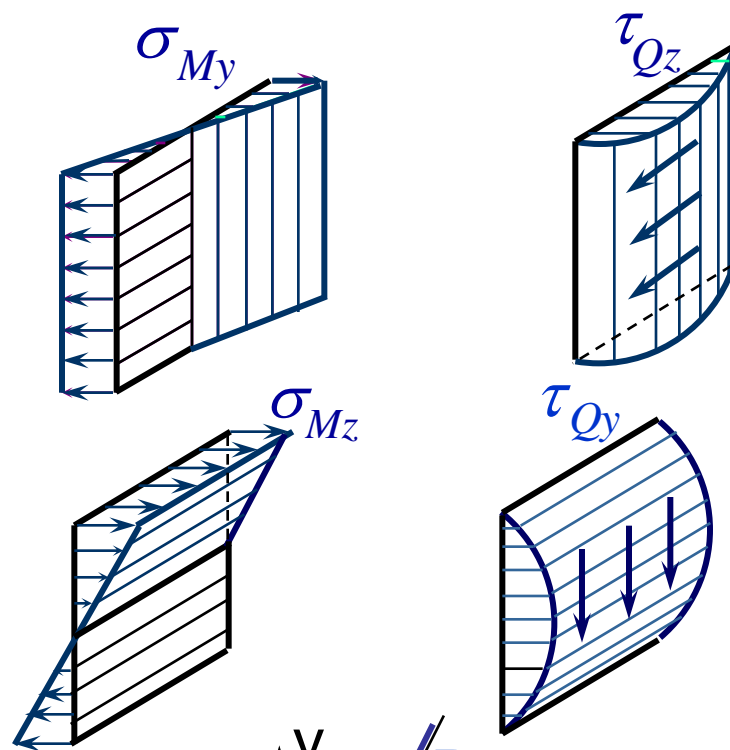
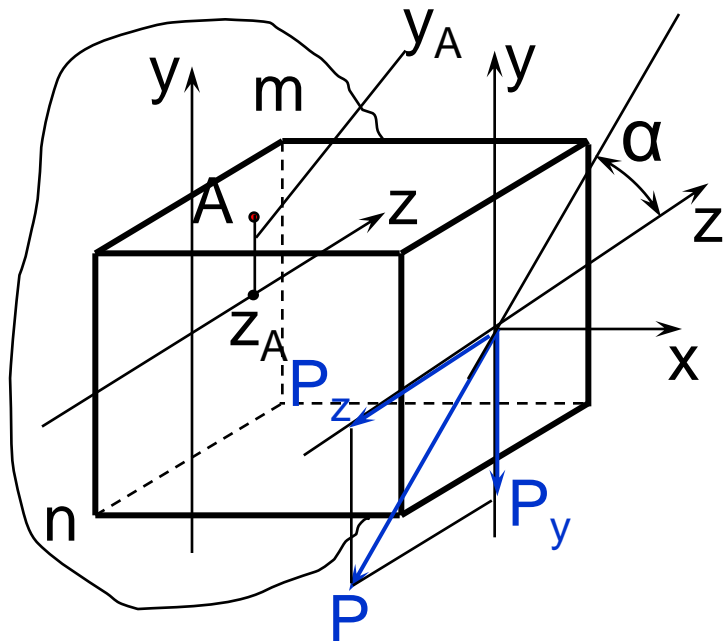


1/ Chiếu tất cả các ngoại lực xuống hai mặt phẳng quán tính chính trung tâm;

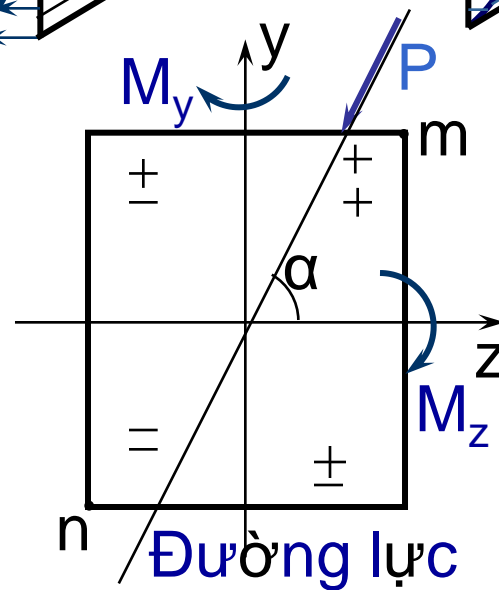
2/ Nghiên cứu biến dạng uốn phẳng trong từng mặt phẳng quán tính chính trung tâm nghĩa là vẽ biểu đồ momen uốn và lực ngang, xác định mặt cắt nguy hiểm và điểm nguy hiểm, xác định ứng suất cực đại và biến dạng cực đại;

3/ Sử dụng định luật tác dụng độc lập của các lực tìm ứng suất tổng cộng cực đại và biến dạng của dầm, kiểm tra điều kiện bền và điều kiện cứng hay là từ điều kiện bền và điều kiện cứng chọn mặt cắt của dầm.

7.2.1. Xác định ứng suất



$$\sigma_A = \frac{M_y z_A}{I_y} + \frac{M_z y_A}{I_z} \quad (7.1)$$



7.2.2. Đường trung hoà.

Phương trình đường trung hoà

$$\frac{M_y z_o}{I_y} + \frac{M_z y_o}{I_z} = 0 \quad (7.2)$$

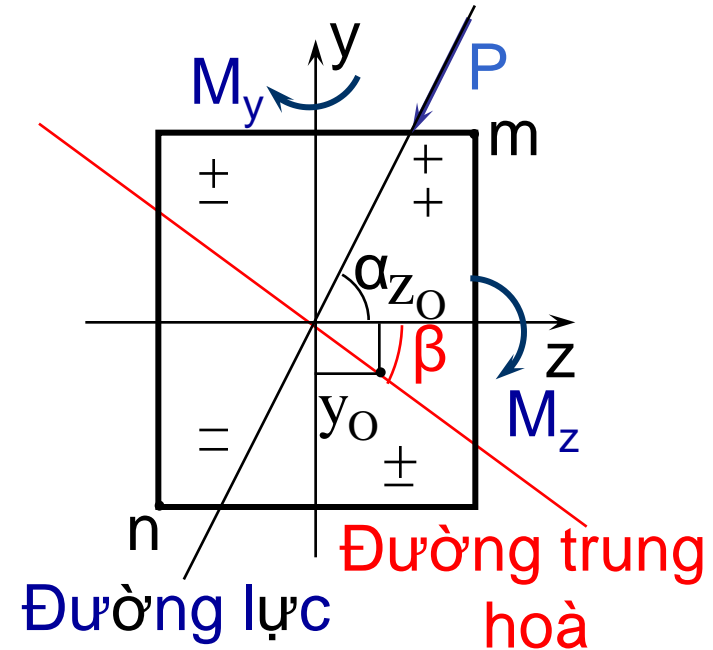
$$\frac{y_o}{z_o} = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} \quad (7.3)$$

Trường hợp đang xét

$$M_y = P \cos \alpha \cdot l \text{ và } M_z = P \sin \alpha \cdot l$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_o}{z_o} = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} \quad (7.4)$$

Nói chung $I_z \neq I_y$ nên $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \neq -1 \rightarrow$ trong biến dạng uốn xiên **đường trung hoà không vuông góc với đường lực.**



7.2.3. Ứng suất cực đại. Điều kiện bền.

Điểm nằm trên đường biên của mặt cắt ngang ở xa đường trung hoà nhất sẽ có ứng suất kéo (hoặc ứng suất nén) có giá trị tuyệt đối cực đại.. Điều kiện bền:

$$\sigma_{\max} = \left| \pm \frac{M_z y_{m,n}}{I_z} \pm \frac{M_y z_{m,n}}{I_y} \right| \leq [\sigma]_{k,n} \quad (7.5)$$

$y_{m,n}$; $z_{m,n}$ - toạ độ của điểm trên mặt cắt ở xa đường trung hoà nhất;

$[\sigma]_{k,n}$ - ứng suất cho phép theo kéo hay nén của vật liệu làm dầm.

Mặt cắt có hai trục đối xứng (mặt cắt hình chữ nhật, chữ I . .)

$$\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]$$

$$\frac{M_y \frac{W_z}{W_y} + M_z}{W_z} \leq [\sigma]$$

$$M_{qd} = M_y \frac{W_z}{W_y} + M_z \quad (7.6)$$

$$\text{Điều kiện bền: } \frac{M_{qd}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (7.7)$$

7.2.4. Xác định biến dạng.

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \quad (7.8)$$

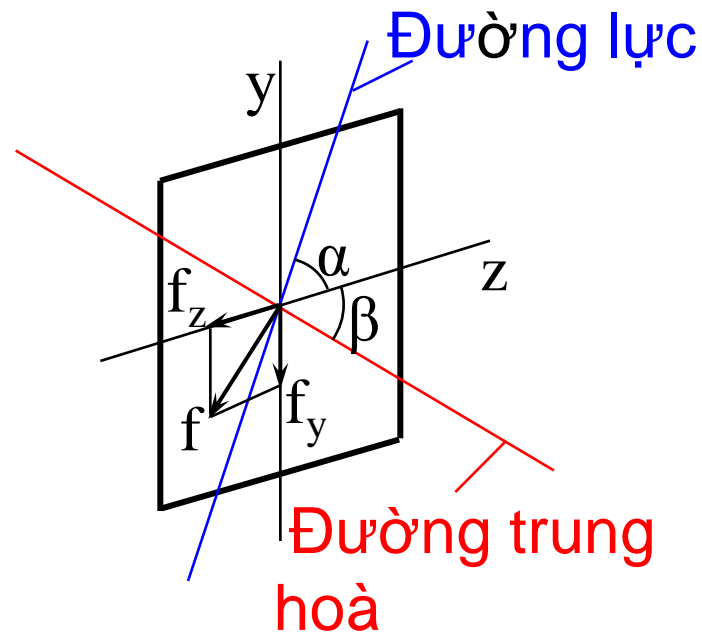
Trong trường hợp đang xét:

$$f_y = \frac{P \sin \alpha \cdot l^3}{3EI_z} ; f_z = \frac{P \cos \alpha \cdot l^3}{3EI_y} \quad (a)$$

$$\frac{f_y}{f_z} = \frac{P \sin \alpha \cdot l^3}{3EI_z} \cdot \frac{3EI_y}{P \cos \alpha \cdot l^3} = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_y}{I_z}$$

$$\frac{f_y}{f_z} \cdot \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_y}{I_z} \cdot \left(-\operatorname{ctg} \alpha \frac{I_z}{I_y} \right) = -1$$

Phương của độ võng vuông góc với đường trung hoà và không trùng với đường lực



Phương của độ võng càng gần với phương của trục z thì I_y càng nhỏ so với I_z hoặc f_z càng lớn so với f_y . Mặt cắt hình chữ nhật có cạnh $h = 20\text{cm}$, cạnh $b = 4\text{ cm}$, $\alpha = 85^\circ$:

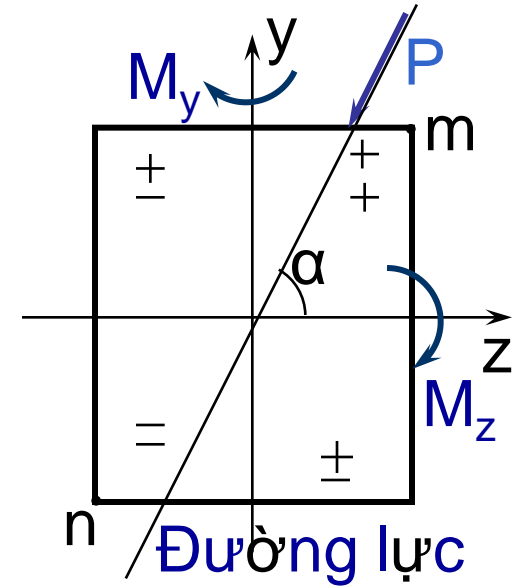
$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{bh^3 \cdot 12}{12hb^3} = -\operatorname{ctg} \alpha \frac{h^2}{b^2} = -\operatorname{ctg} 85^\circ \cdot \frac{20^2}{4^2} = -2,19; \quad \beta = -65^\circ 26'.$$

7.2.5. Điều kiện bền và điều kiện cứng

$$(7.1) \quad \longrightarrow \quad \sigma_A = \frac{M_y z_A}{I_y} + \frac{M_z y_A}{I_z}$$

$$\sigma_{\max} = \left| \pm \frac{M_z y_{m,n}}{I_z} \pm \frac{M_y z_{m,n}}{I_y} \right| \leq [\sigma]_{k,n}.$$

Mặt cắt có hai trục đối xứng (hình chữ nhật, chữ I...)



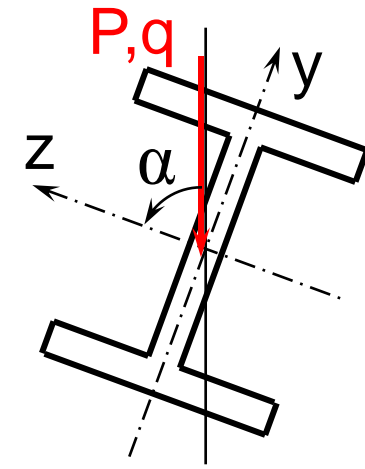
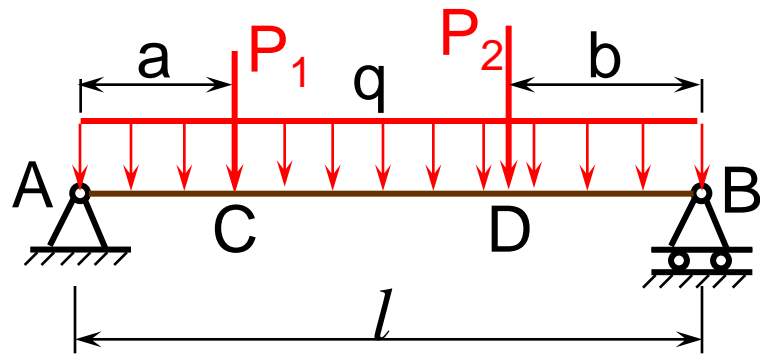
$$M_{qd} = M_y \frac{W_z}{W_y} + M_z \quad (7.6) \quad \text{Điều kiện bền: } \frac{M_{qd}}{W_z} \leq [\sigma] \quad (7.7)$$

$$\text{Điều kiện cứng: } \sqrt{f_y^2 + f_z^2} \leq [f] \quad (7.9)$$

Ví dụ 7. 1. Một dầm chữ I N^o 14 chịu tải trọng như hình vẽ.

Kiểm tra độ bền và độ cứng của dầm biết : $\sigma = 10 \text{ kN/cm}^2$;

$P_1 = 3 \text{ kN}$; $P_2 = 4 \text{ kN}$; $l = 4 \text{ m}$; $a = 0,7 \text{ m}$; $b = 0,8 \text{ m}$; $\alpha = 80^\circ$.



$$P_{1y} = 2,954 \text{ kN}; P_{1z} = 0,521 \text{ kN}; P_{2y} = 3,030 \text{ kN}; P_{2z} = 0,695 \text{ kN};$$

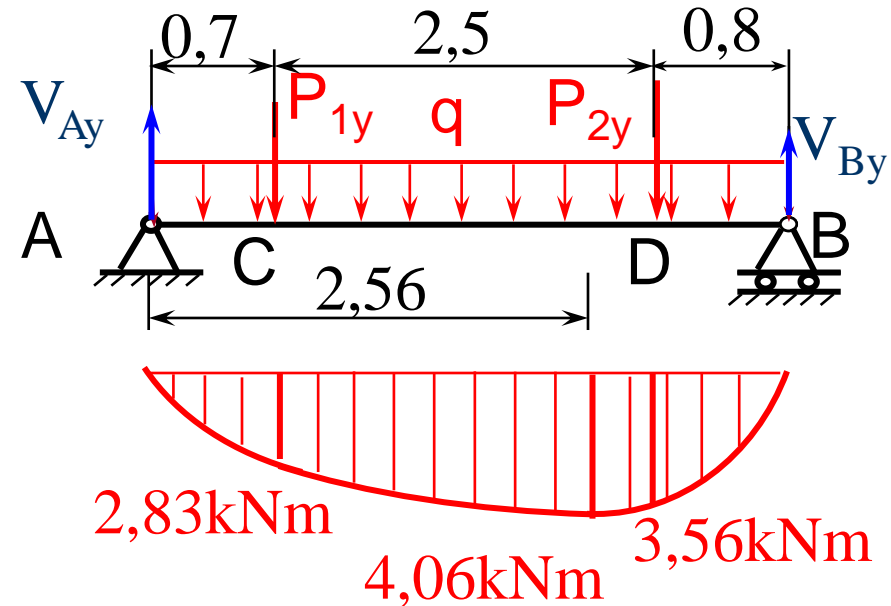
$$q_y = 0,492 \text{ kN/m}; q_z = 0,087 \text{ kN/m}.$$

Thép chữ I N^o 14 có $I_z = 712 \text{ cm}^4$; $I_y = 64,4 \text{ cm}^4$; $W_z = 102 \text{ cm}^3$;
 $W_y = 16,1 \text{ cm}^3$.

a/ Trong mặt phẳng xy.

$$V_{Ay} = 4,21 \text{ kN};$$

$$V_{By} = 4,65 \text{ kN}.$$



$$M_C = 4,21 \cdot 0,7 - 0,492 \cdot \frac{0,7^2}{2} = 2,83 \text{ kNm};$$

$$M_D = 4,65 \cdot 0,8 - 0,492 \cdot \frac{0,8^2}{2} = 3,56 \text{ kNm}.$$

$$Q = 4,21 - 2,954 - 0,492x = 0. \rightarrow x = 1,86 \text{ m}.$$

$$M_{z \max} = 4,21 \cdot 1,86 - 0,954(1,86 - 0,7) - 0,49 \frac{1,86^2}{2} = 4,06.$$

$$EI_z y = EI_z y_o + EI_z \varphi_o x + \frac{V_{Ay}}{6} p^3 - \frac{V_{1y}}{6} p_1^3 - \frac{V_{2y}}{6} p_2^3 - \frac{q_y}{24} k_1^4.$$

$$\vec{O}' A: x = 0; y = 0; p = 0; p_1 = 0; p_2 = 0; k_1 = 0 \longrightarrow EI_z y_o = 0.$$

$$\vec{O}' B: x = 4\text{m}; y = 0; p = 4\text{m}; p_1 = 3,3\text{m}; p_2 = 0,8\text{m}; k_1 = 4\text{m}$$

$$\longrightarrow EI_z \varphi_o = -5,4\text{kNm}^2$$

$$EI_z \varphi = EI_z \varphi_o + \frac{V_{Ay}}{2} p^2 - \frac{V_{1y}}{2} p_1^2 - \frac{q_y}{6} k_1^3 = 0.$$

$$p = x; p_1 = x - 0,7; k_1 = x, \longrightarrow x = 2,038\text{m}.$$

$$EI_z y_{\max} = EI_z \varphi_o \cdot 2,038 + \frac{4,21}{6} \cdot 2,038^3 - \frac{2,594}{6} (2,038 - 0,7)^3 - \frac{0,492}{24} \cdot 2,038^4 = -6,60\text{kNm}^3;$$

$$f_y = \frac{6,60 \cdot 10^6}{0,02 \cdot 10^6 \cdot 712} \cong 0,46\text{cm} = 4,6\text{mm}.$$

b/ Trong mặt phẳng xz.

$$V_{Az} = 0,74\text{kN}; V_{Bz} = 0,83\text{kN};$$

$$M_{Cy} = 0,5\text{kNm}; M_{Dy} = 0,63\text{kNm};$$

$$M_{y\max} = 0,66\text{kNm}; EI_y z_O = 0;$$

$$EI_y \varphi_O \cong -0,945\text{kNm}^2;$$

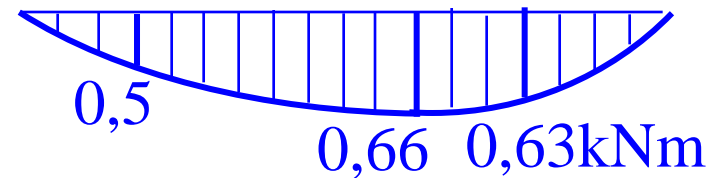
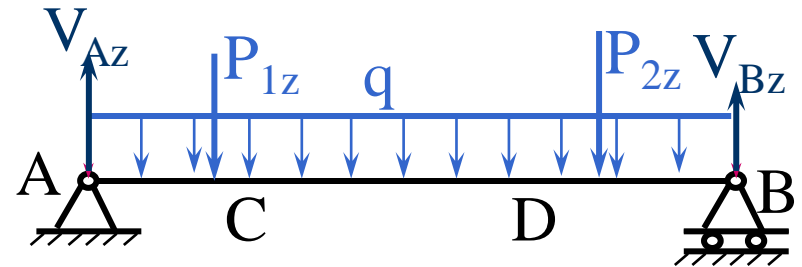
$$f_z = 0,92\text{cm}; = 9,2\text{mm}$$

Ứng suất pháp cực đại:

$$\frac{M_{y\max}}{W_y} + \frac{M_{z\max}}{W_z} = \frac{6,6}{16,1} + \frac{406}{102} \cong 8,10\text{kN/cm}^2$$

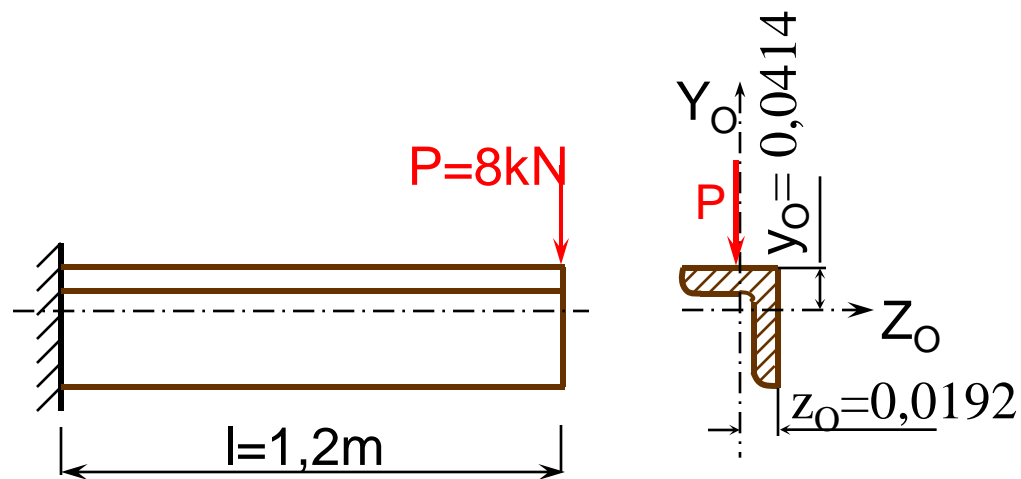
$$f_{\max} = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{9,2^2 + 4,6^2} \cong 10,3\text{mm}$$

Độ bền và độ cứng được đảm bảo.



Ví dụ 7. 2. Một dầm làm bằng thép góc không đều cạnh No 12, 5/8 chiều dày $\delta = 10\text{mm}$, có các thông số sau:
 $I_{z_0} = 312\text{cm}^4$; $I_{y_0} = 100\text{cm}^4$; $y_0 = 4,14\text{cm}$; $z_0 = 1,92\text{cm}$;
 $I_y = I_{\min} = 59,3\text{cm}^4$; $\alpha = 22^\circ$, $P = 8\text{kN}$.

Xác định ứng suất cực đại và độ võng cực đại của dầm.
Vẽ biểu đồ ứng suất pháp ở mặt cắt nguy hiểm.



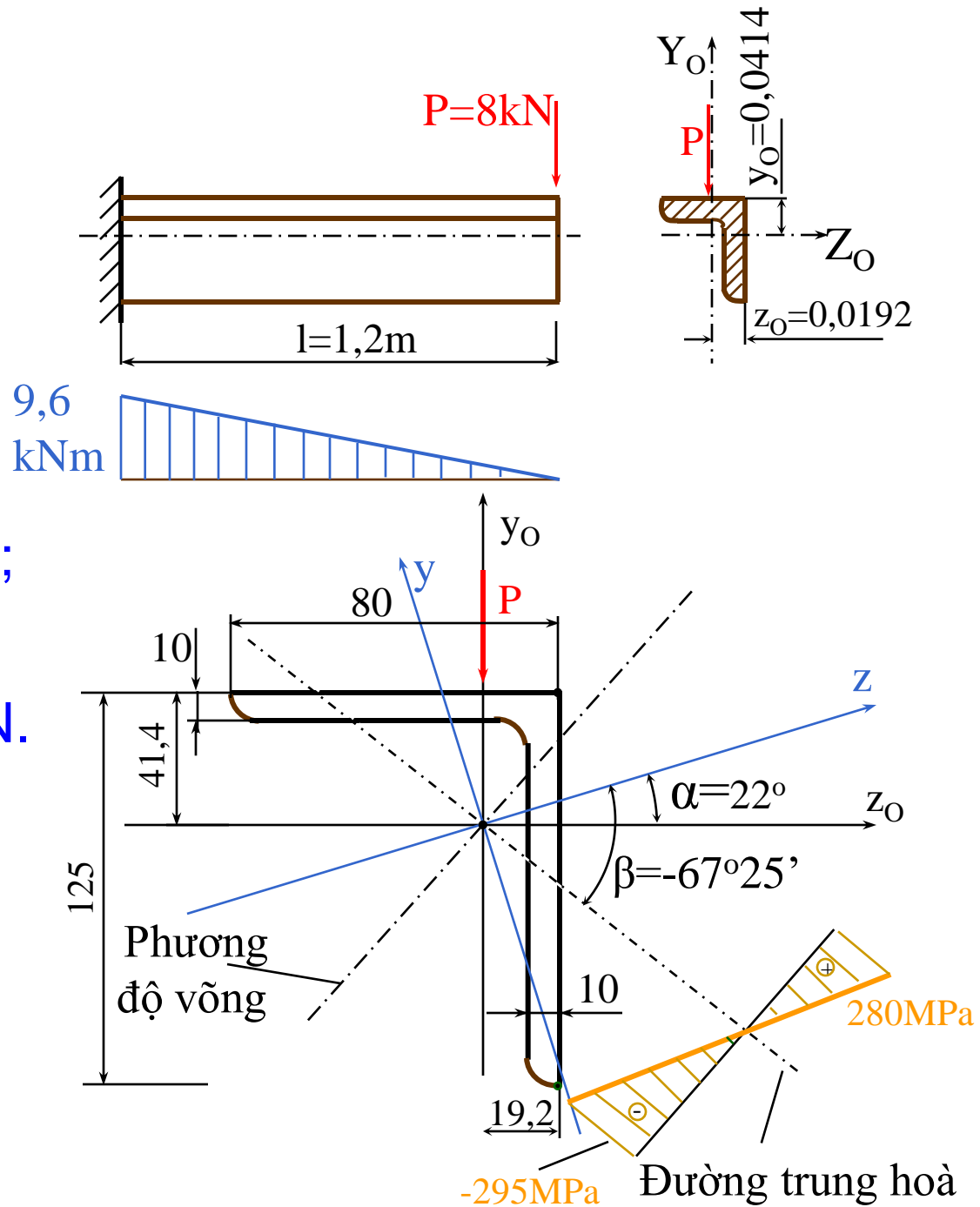
Hệ trục chính trung tâm Oyz nằm nghiêng một góc $\alpha = 22^\circ$ so với hệ trục trung tâm Oy_0z_0 .

$$P_y = P \cos \alpha = 8 \cdot \cos 22^\circ = 8 \cdot 0,927 = 7,4175 \text{ kN};$$

$$P_z = P \sin \alpha = 8 \sin 22^\circ = 8 \cdot 0,374 = 2,9967 \text{ kN}.$$

$$M_z = P_y l = 7,4175 \cdot 1,2 = 8,901 \text{ kNm};$$

$$M_y = P_z l = 2,9967 \cdot 1,2 = 3,596 \text{ kNm}.$$



Từ điều kiện $I_{\max} + I_{\min} = I_{z_0} + I_{y_0}$,

$$I_z = I_{\max} = I_{z_0} + I_{y_0} - I_{\min} = 312 + 100 - 59,3 = 352,7 \text{ cm}^4;$$

$$I_y = I_{\min} = 59,3 \text{ cm}^4.$$

Phương trình của đường trung hoà: $\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z = 0$.

Góc nghiêng của đường trung hoà so với trục z:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{z} = -\frac{M_y I_z}{I_y M_z} = \frac{-3,596 \cdot 352,7}{59,3 \cdot 8,901} = -2,403; \quad \beta = -67^\circ 25'.$$

Điểm nguy hiểm trên mặt cắt nguy hiểm là **A** (chịu kéo),
B (chịu nén).

Toạ độ của điểm **A**, **B** trong hệ toạ độ Oy_0z_0 :

$$z_{AO} = 1,92 \text{ cm}; \quad y_{AO} = 4,14 \text{ cm};$$

$$z_{BO} = 1,92 \text{ cm}; \quad y_{BO} = -(12,5 - 4,14) = -8,36 \text{ cm}.$$

Toạ độ của điểm **A**, **B** trong hệ toạ độ Oxy:

$$\begin{aligned}z_A &= z_{AO} \cos \alpha + y_{AO} \sin \alpha = \\ &= 1,92.0,927 + 4,41.0,374 = 3,326 \text{ cm};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_A &= y_{AO} \cos \alpha - z_{AO} \sin \alpha = \\ &= 4,14.0,927 - 1,92.0,374 = 3,112 \text{ cm}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_B &= z_{BO} \cos \alpha + y_{BO} \sin \alpha = \\ &= 1,92.0,927 - 8,36.0,374 = - 1,35 \text{ cm};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_B &= y_{BO} \cos \alpha - z_{BO} \sin \alpha = \\ &= - 8,36.0,927 - 1,92.0,374 = - 8,46 \text{ cm}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_A &= \frac{M_z}{I_z} y_A + \frac{M_y}{I_y} z_A = \frac{8,901.10^3}{352,7.10^{-8}} \cdot 3,112.10^{-2} + \frac{3,596.10^3}{59,3.10^{-8}} \cdot 3,326.10^{-2} \\ &= 280.10^6 \text{ N/m}^2 = 280 \text{ MPa};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \frac{M_z}{I_z} y_B + \frac{M_y}{I_y} z_B = \frac{8,901.10^3}{352,7.10^{-8}} \cdot (-8,46).10^{-2} + \frac{3,596.10^3}{59,3.10^{-8}} \cdot (-1,35).10^{-2} \\ &= - 295.10^6 \text{ N/m}^2 = 95 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

$$f_z = \frac{P_z l^3}{3EI_y} = \frac{2,997.10^3.1,2^3}{3.2.10^{11}.59,3.10^{-8}} = 0,0146m$$

$$f_y = \frac{P_y l^3}{3EI_z} = \frac{7,4175.10^3.1,2^3}{3.2.10^{11}.352,7.10^{-8}} = 0,0061m$$

$$E = 2.10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{0,61^2 + 1,46^2} = 1,58cm.$$

Phương của độ võng tổng cộng vuông góc với đường trung hoà.

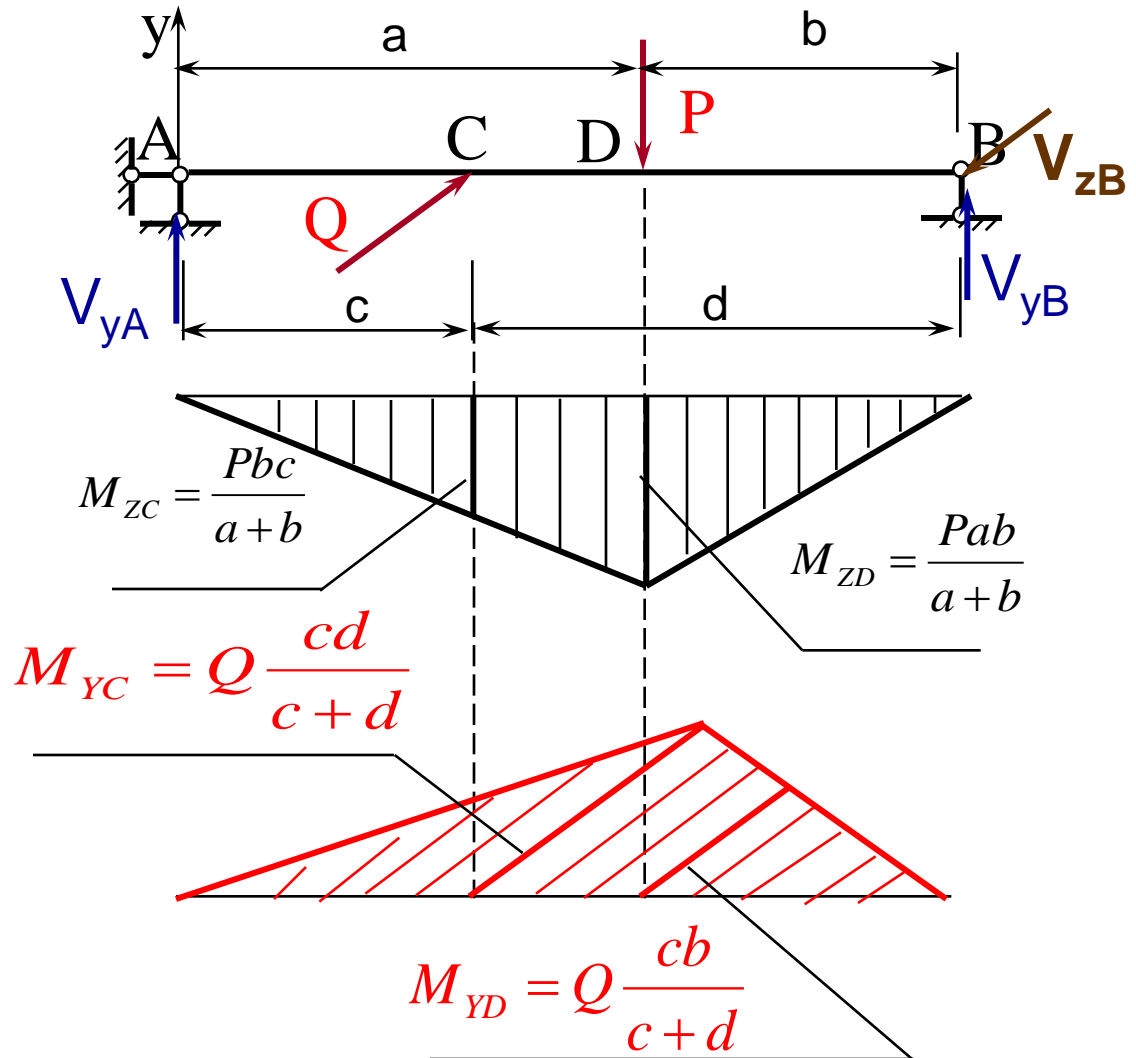
Thí dụ 7.2 Xác định momen uốn tương đương cực đại trong dầm biết mặt cắt ngang hình chữ nhật cạnh $H = \alpha B$

$$V_{yA} = \frac{Pb}{a+b};$$

$$V_{yB} = \frac{Pa}{a+b};$$

$$V_{zA} = \frac{Qd}{c+d};$$

$$V_{zB} = \frac{Qc}{c+d};$$



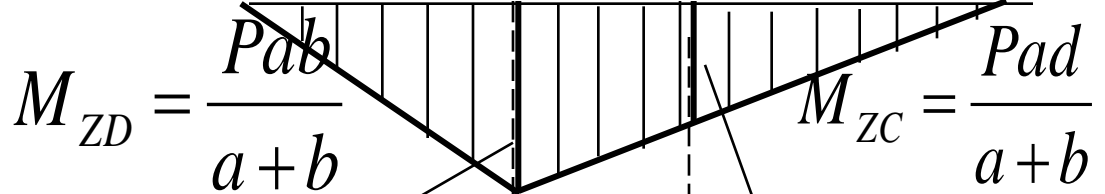
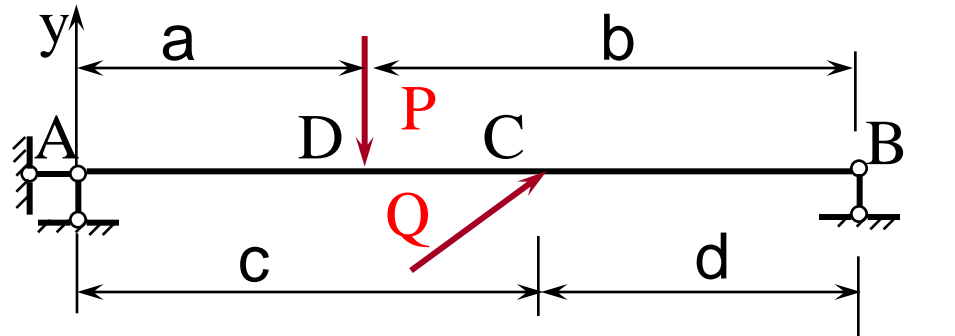
$$M_{TDD} = M_{ZD} + \alpha M_{YD}$$

$$M_{TDC} = M_{ZC} + \alpha M_{YC}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma];$$

$$W_z = \frac{M_{\max}}{[\sigma]};$$

$$W_z = \frac{BH^2}{6} = \frac{\alpha^2 B^3}{6};$$



$$M_{YD} = Q \frac{da}{c+d}$$

$$M_{YC} = Q \frac{cd}{c+d}$$

$$B = \sqrt[3]{\frac{6M_{\max}}{\alpha^2 [\sigma]}}; H = \alpha B.$$

7.3. Uốn cộng kéo.

Trường hợp dầm công xôn:

Mặt cắt nguy hiểm: ngàm.

Các thành phần nội lực:

* Lực dọc và lực ngang:

$$N = P_x;$$

$$Q_y = P_y; \quad Q_z = P_z;$$

* Momen uốn:

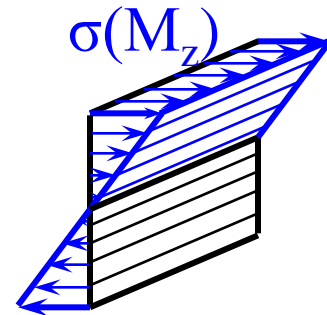
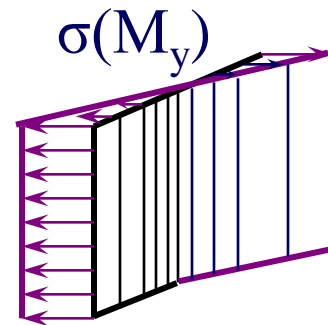
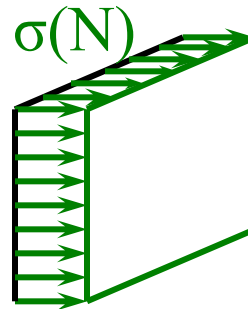
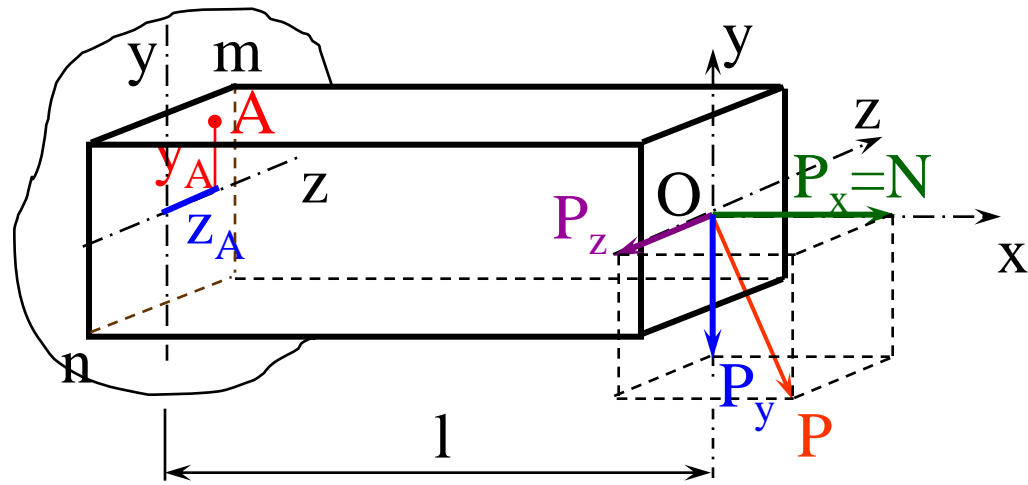
$$M_z = P_y l \text{ và } M_y = P_z l.$$

Ứng suất pháp tổng cộng tại điểm A bất kỳ trên mặt cắt ngang có tọa độ y_A và z_A :

$$\sigma_A = \frac{N_x}{F} + \frac{M_y}{I_y} z_A + \frac{M_z}{I_z} y_A \quad (7.10)$$

Trong trường hợp được xét, điểm m là điểm nguy hiểm,

điều kiện bền:
$$\frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma] \quad (7.11)$$



Đối với mặt cắt chỉ có một trục đối xứng hoặc hình dáng bất kỳ, trước hết cần xác định vị trí của đường trung hoà, phương trình:

$$\frac{N}{F} + \frac{M_y}{I_y} z_o + \frac{M_z}{I_z} y_o = 0$$

Hệ số góc của đường trung hoà $\operatorname{tg} \beta = \frac{y_o}{z_o} = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y}$.

Giao điểm của đường trung hoà và các trục tọa độ có tọa độ :

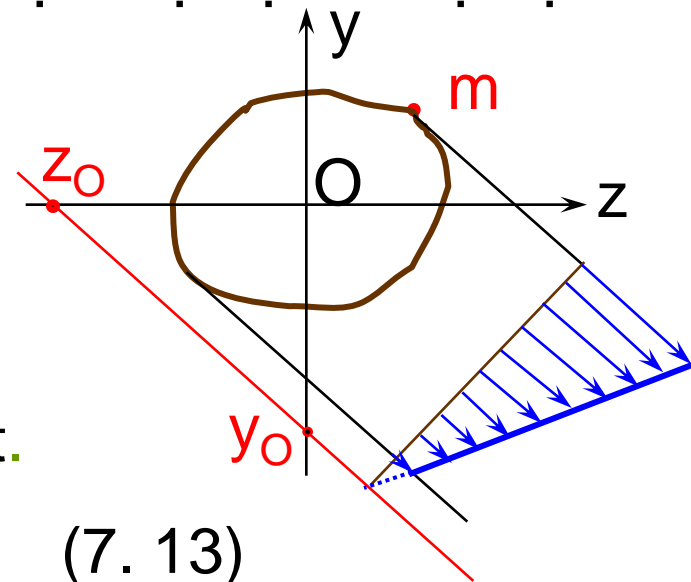
$$z_o = -\frac{I_y}{F} \frac{N}{M_y} = -r_y^2 \frac{N}{M_y} \quad (7.12)$$

$$y_o = -\frac{I_z}{F} \frac{N}{M_z} = -r_z^2 \frac{N}{M_z}$$

r_y và r_z - bán kính quán tính của mặt cắt.

$$\text{Điều kiện bền: } \frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} z_m + \frac{M_z}{W_z} y_m \leq [\sigma] \quad (7.13)$$

Đường trung hoà có thể cắt, tiếp xúc hay ở ngoài mặt cắt.



Trường hợp phối hợp giữa biến dạng uốn phẳng và biến dạng kéo (hay nén), đường trung hoà song song với một trục chính trung tâm. Khi đó chỉ cần xác định một toạ độ y_0 hay z_0 .

Khi chọn kích thước của mặt cắt cũng cần thực hiện theo phương pháp đúng dần như trong biến dạng uốn phức tạp.

$$\sigma_A = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p y_A}{r_z^2} + \frac{z_p z_A}{r_y^2} \right) \quad (7.14)$$

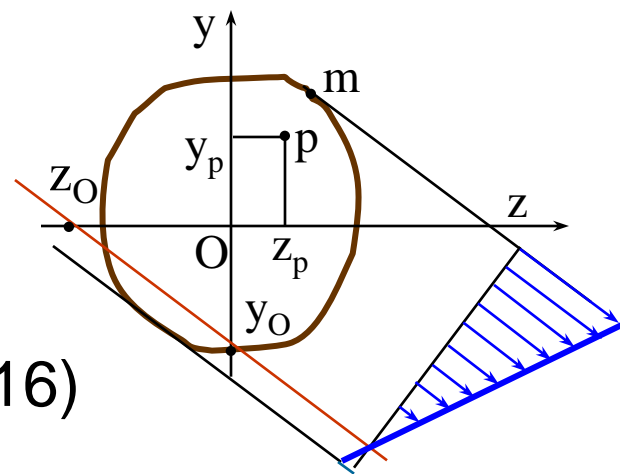
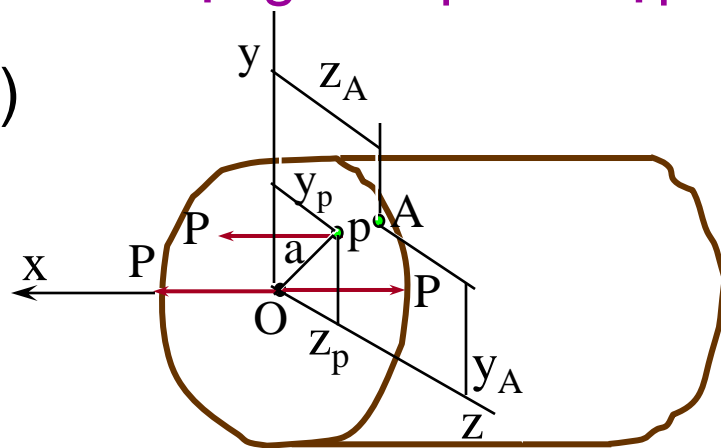
Kéo (nén) lệch tâm

$$(7.12) + (N = P; M_z = P y_p; M_y = P z_p)$$

$$\longrightarrow z_0 = \frac{-r_y^2}{z_p}; y_0 = \frac{-r_z^2}{y_p}. \quad (7.15)$$

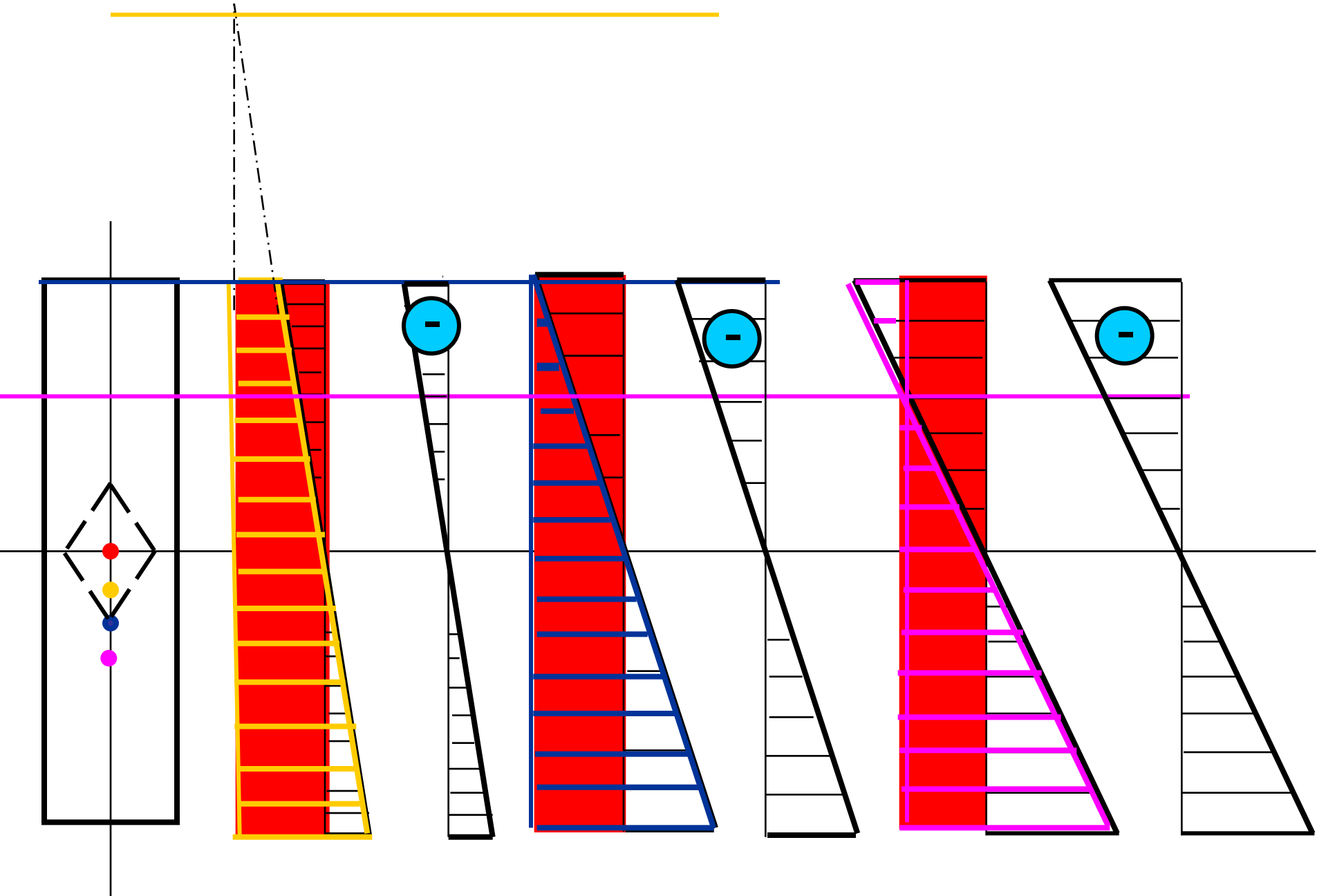
Gốc toạ độ nằm giữa đường trung hoà và điểm đặt lực P

$$\sigma_m = \sigma_{\max} = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p y_m}{r_z^2} + \frac{z_p z_m}{r_y^2} \right) \leq [\sigma]. \quad (7.16)$$



Khi đường trung hoà nằm ngoài hoặc tiếp xúc với mặt cắt mọi điểm trên mặt cắt chỉ chịu **một biến dạng kéo hoặc nén**'

Lõi mặt cắt là phần mặt cắt ở xung quanh trọng tâm thoả mãn điều kiện sau: ***nếu điểm đặt lực nằm ở trong hoặc trên đường viền của miền này thì mọi điểm trên mặt cắt của thanh chịu kéo (nén) lệch tâm chỉ chịu biến dạng kéo (hay nén)*** . Muốn vậy thì đường trung hoà tương ứng khi đó phải nằm ngoài hay tiếp xúc với mặt cắt.



Thí dụ 7. 3. Vẽ lõi của mặt cắt hình chữ nhật

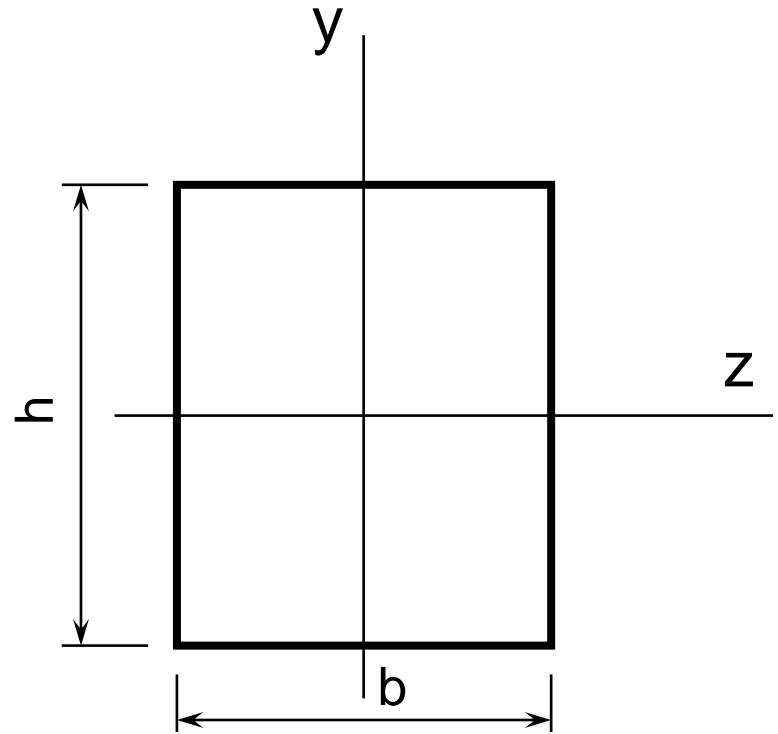
Vẽ các trục quán tính chính trung tâm y và z. Tính các bán kính quán tính;

$$F = bh;$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{hb^3}{12};$$

$$r_z^2 = \frac{I_z}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12};$$

$$r_y^2 = \frac{I_y}{F} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12}$$

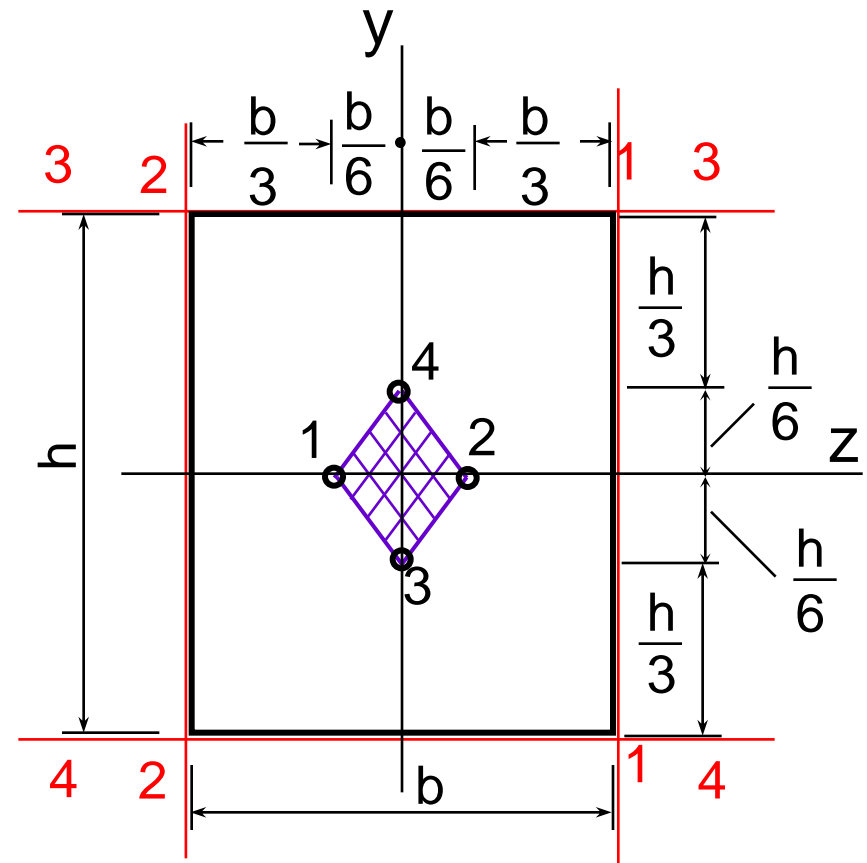


Vẽ tiếp tuyến 1-1 với mặt cắt .
 Tiếp tuyến này song song với trục y ($y_0 = \infty$) và cắt trục z ở điểm có hoành độ $z_0 = b/2$.

$$(7.15) \rightarrow$$

$$z_p = \frac{-r_y^2}{z_0} = \frac{-b^2 \cdot 2}{12b} = \frac{-b}{6};$$

$$y_p = \frac{-r_z^2}{y_0} = \frac{-h^2}{12 \cdot \infty} = 0.$$

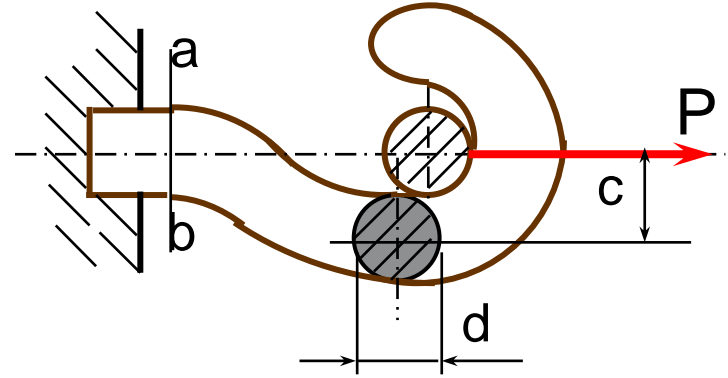


Như vậy điểm đặt lực phía trái của lõi mặt cắt nằm trên trục z và ở bên trái gốc tọa độ một khoảng bằng $b/6$.

Tương tự các điểm đặt lực ứng với các tiếp tuyến 2-2, 3-3, và 4-4 lần lượt có tọa độ $(b/6, 0)$; $(0, -h/6)$ và $(0, h/6)$.

Lõi mặt cắt là hình thoi 1-2-3-4.

Thí dụ 7. 4. Một móc thép có mặt cắt ngang hình tròn đường kính d chịu kéo bởi lực $P = 10\text{kN}$, độ lệch tâm $c = 40\text{mm}$. Vật liệu có ứng suất cho phép $[\sigma] = 14\text{kN/cm}^2$



Ở mặt cắt nguy hiểm móc chịu uốn cộng kéo. Điều kiện bền:

$$[\sigma] \geq \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \quad \text{Với } M = Pc.$$

Trong gần đúng thứ nhất ta chỉ tính với ứng suất do uốn gây ra với ứng suất cho phép hạ thấp $[\sigma_1] = 12\text{kN/cm}^2$.

$$\sigma = \frac{Pc}{0,1d^3} \leq [\sigma_1];$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{Pc}{0,1[\sigma_1]}} = \sqrt[3]{\frac{10.4}{0,1.12}} = 3,2\text{cm}$$

Kiểm tra theo ứng suất toàn phần:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} = \frac{10.4}{\pi \cdot 3,2^2} + \frac{10.4}{0,1 \cdot 3,2^3} = 13,44 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Sai lệch so với ứng suất cho phép:

$$\frac{14 - 13,44}{14} \cdot 100 = 4\%$$

Ứng suất ở mặt cắt ab:

$$\sigma = \frac{10.4}{\pi \cdot 3,2^2} = 1,24 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

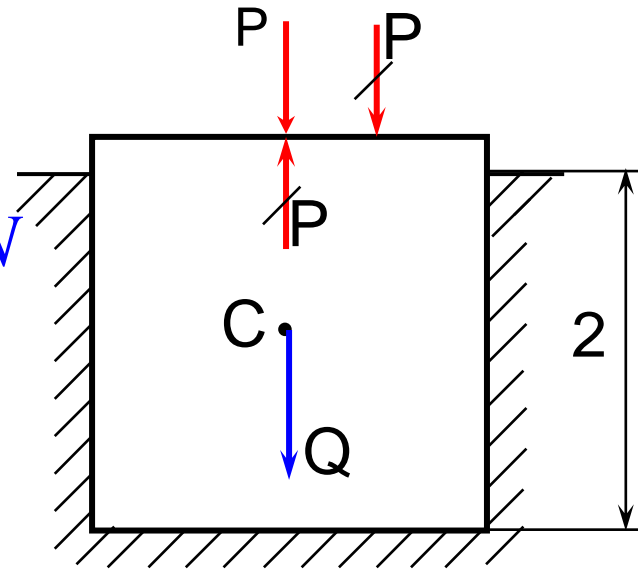
Thí dụ 7. 5. Tìm ứng suất có giá trị cực đại trong móng của một động cơ. Biết trọng lượng của động cơ $P = 80 \text{ kN}$, trọng lượng riêng của vật liệu làm móng $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$. Hình chiếu của trọng tâm động cơ xuống mặt phẳng yz có tọa độ $z_p = 0,2 \text{ m}$; $y_p = 0,1 \text{ m}$. Bỏ qua ảnh hưởng áp lực bên sườn móng.

$$N = -(P + Q) = - (P + \gamma Fh) =$$

$$= -(80 + 25 \cdot 1,2 \cdot 2) = - 200 \text{ kN}$$

$$M_y = 80 \cdot 0,2 = 16 \text{ kNm};$$

$$M_z = 80 \cdot 0,1 = 8 \text{ kNm}.$$



Vị trí của đường trung hoà:

$$y_o = -\frac{I_z}{Fy_p} = \frac{2.1,2^3}{12.2.1,2(-0,1)} = 1,2m$$

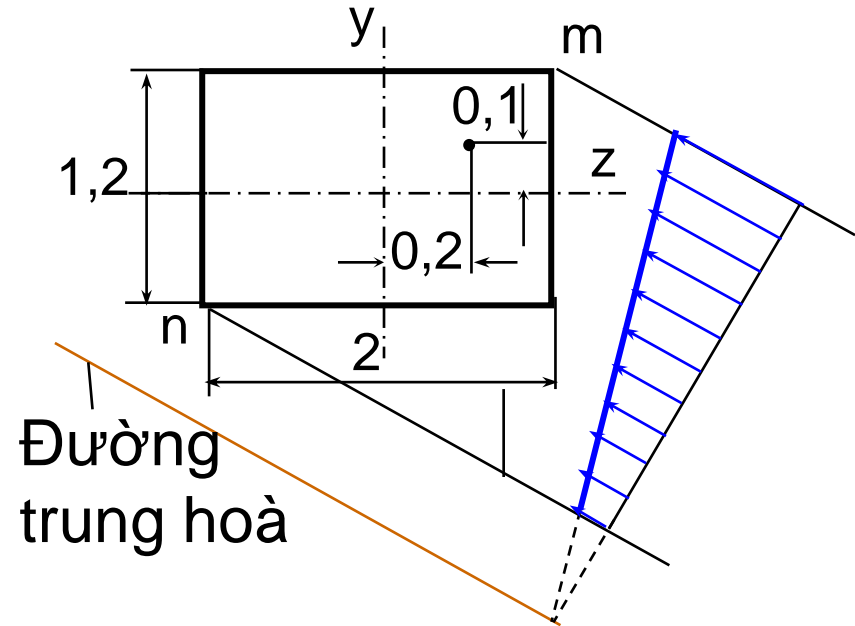
$$z_o = -\frac{I_y}{Fz_p} = \frac{2.3^3}{12.2.1,2(-0,2)} = 1,67m$$

$$\sigma_n = \frac{N}{F} - \frac{M_y}{W_y} - \frac{M_z}{W_z} =$$

$$= -\frac{2000000}{120.200} - \frac{16.10^5.6}{120.200^2} - \frac{8.10^5.6}{200.120^2} = -12N/cm^2;$$

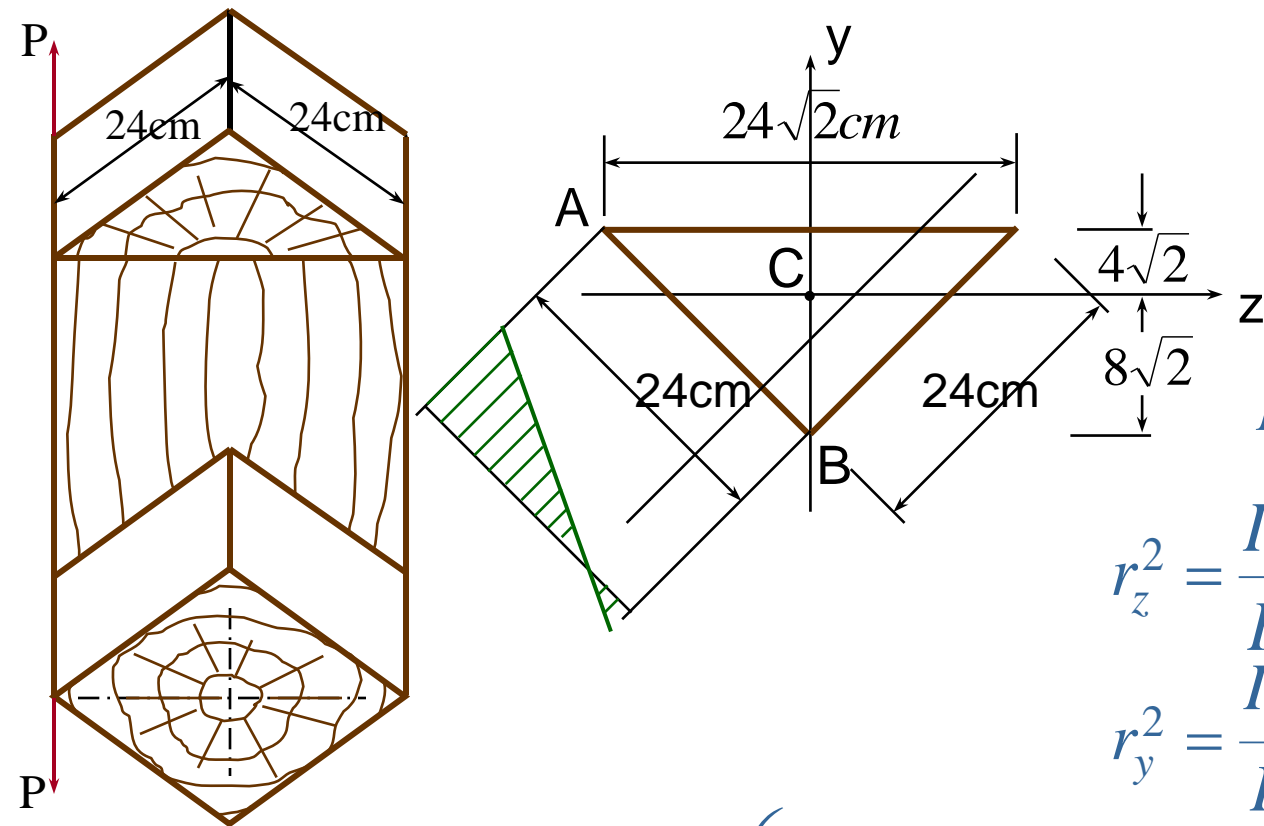
$$\sigma_m = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_z}{W_z} =$$

$$= -\frac{2000000}{120.200} + \frac{16.10^5.6}{120.200^2} + \frac{8.10^5.6}{200.120^2} = -4,6N/cm^2;$$



Thí dụ 7.6. Vẽ biểu đồ ứng suất pháp trên mặt cắt nguy hiểm của thanh gỗ

Toạ độ của điểm đặt lực P: $z_p = -12\sqrt{2}cm$; $y_p = 4\sqrt{2}cm$.



$$I_z = \frac{24 \cdot 24^3}{12 \cdot 2} - \frac{24 \cdot 24}{2} \cdot (4\sqrt{2})^2 = 4608cm^4;$$

$$I_y = \frac{24 \cdot 24^3}{12 \cdot 2} = 13824cm^4;$$

$$r_z^2 = \frac{I_z}{F} = \frac{4608 \cdot 2}{24 \cdot 24} = 16cm^2;$$

$$r_y^2 = \frac{I_y}{F} = \frac{13824 \cdot 2}{24 \cdot 24} = 4,8cm^2$$

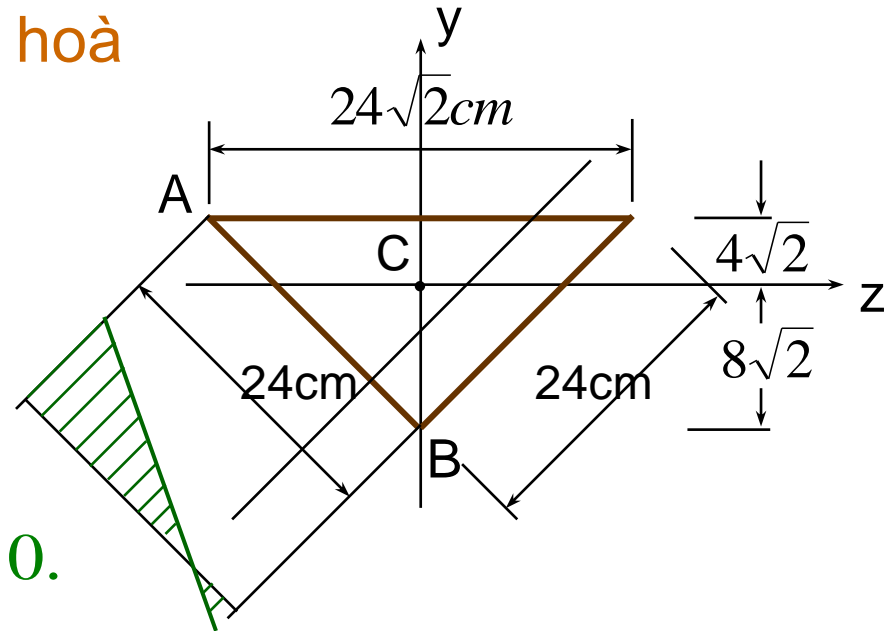
$$\sigma = \frac{N}{F} \left(1 + \frac{z_p}{r_y^2} z + \frac{y_p}{r_z^2} y \right).$$

Phương trình của đường trung hoà

$$1 + \frac{z_p}{r_y^2} z + \frac{y_p}{r_z^2} y = 0$$

$$1 + \frac{12\sqrt{2}}{48} z + \frac{4\sqrt{2}}{16} y = 0;$$

$$1 - 0,25\sqrt{2} \cdot z + 0,25\sqrt{2} \cdot y = 0.$$



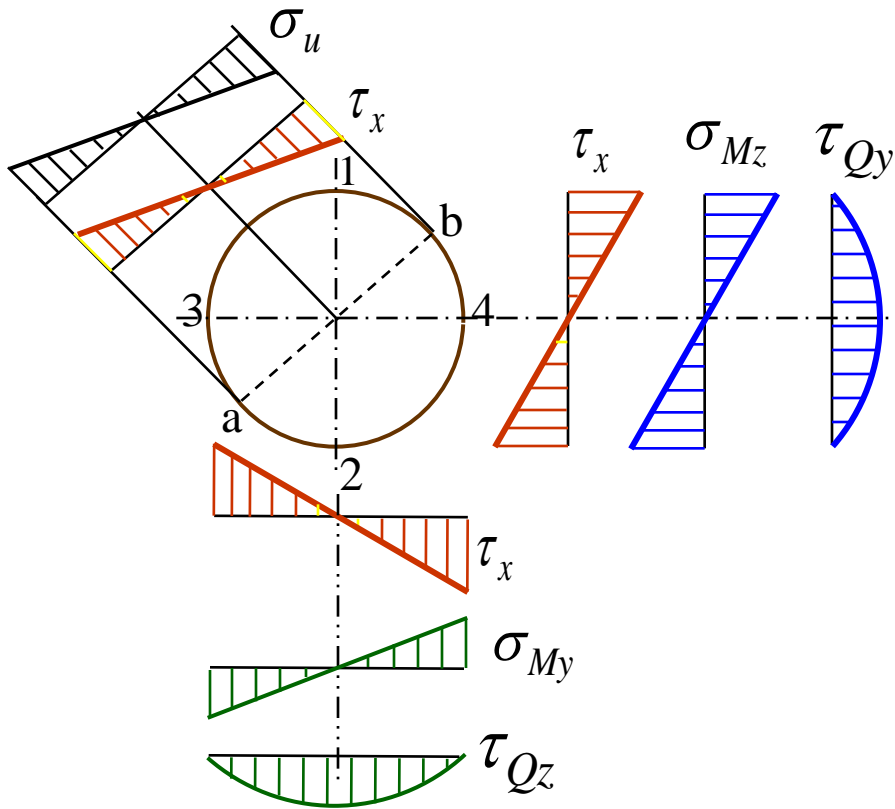
$$z_O = 0; y_O = -2\sqrt{2} \text{ cm} \quad \text{và} \quad z_O = 2\sqrt{2}; y_O = 0.$$

$$\sigma_A = \frac{32.2}{24.24} \left[1 - \frac{12\sqrt{2}}{48} (-12\sqrt{2}) + \frac{4\sqrt{2}}{16} \cdot 4\sqrt{2} \right] = 1 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\sigma_B = \frac{32.2}{24.24} \left[1 - \frac{12\sqrt{2}}{48} \cdot 0 + \frac{4\sqrt{2}}{16} \cdot (-8\sqrt{2}) \right] = -3,33 \text{ kN/cm}^2$$

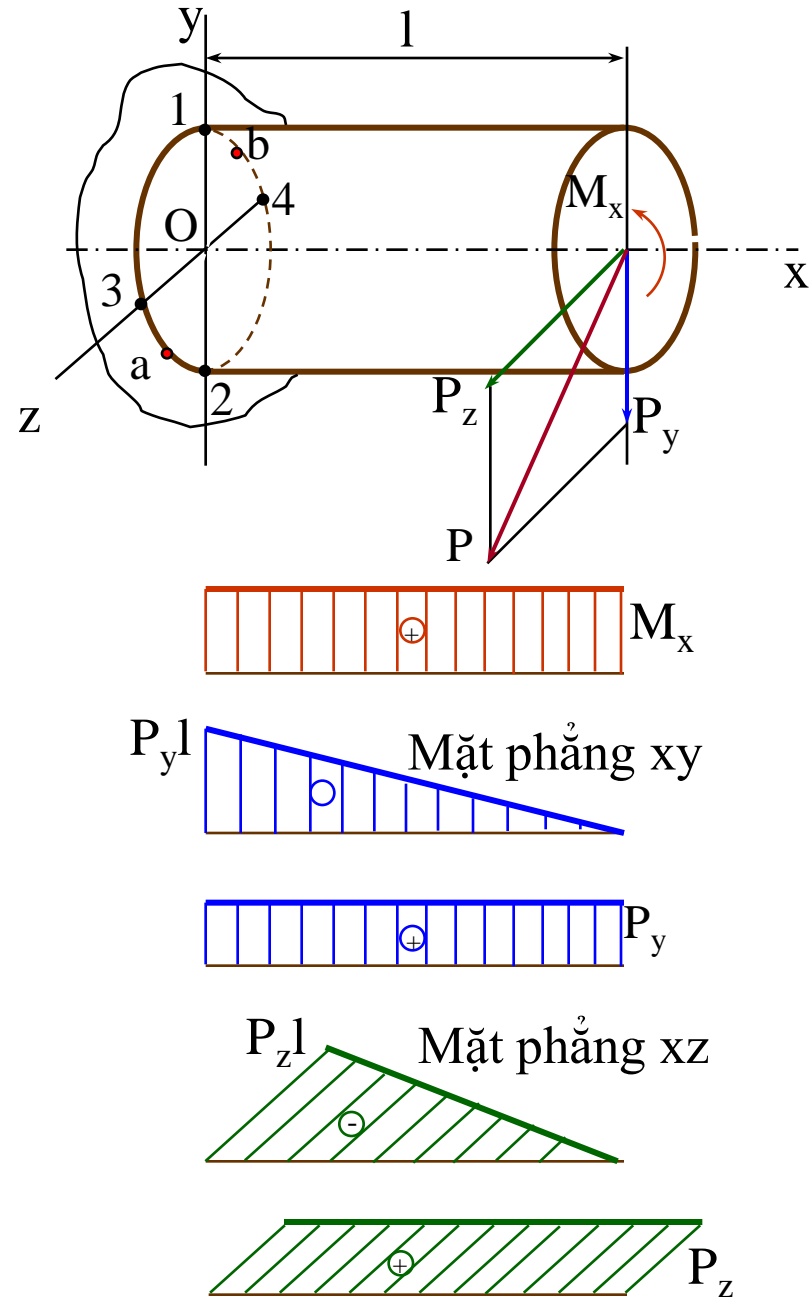
7. 4. Uốn cộng xoắn.

7.4.1. Thanh có mặt cắt tròn.



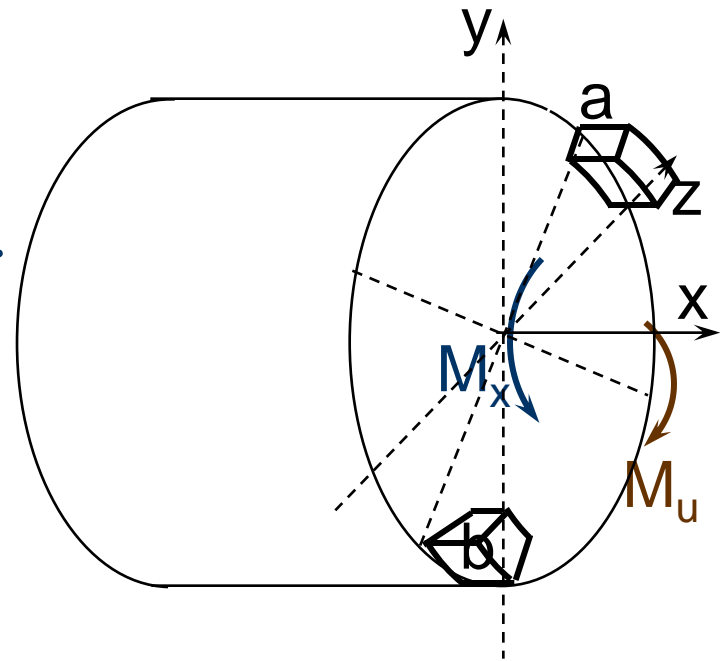
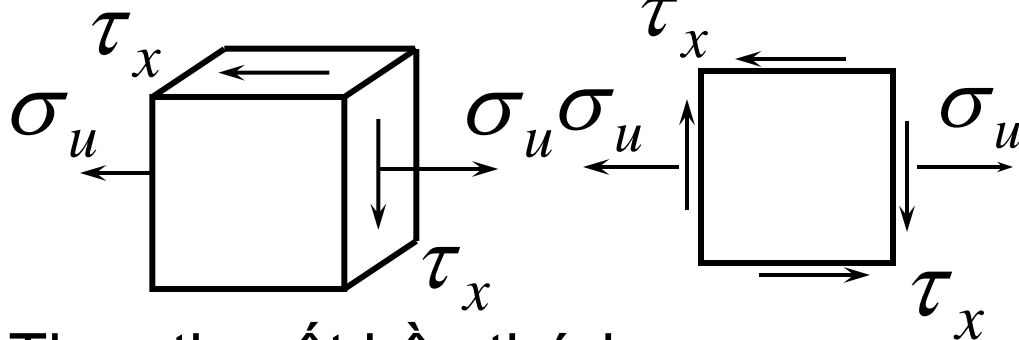
Momen uốn tổng cộng:

$$M_u = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}. \quad (6.17)$$



Các điểm nguy hiểm: a, b.:

$$\sigma_u = \frac{M_u}{W_u} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2}}{W_u}; \quad \tau_x = \frac{M_x}{W_x} = \frac{M_x}{2W_u}.$$



Theo thuyết bền thứ ba:

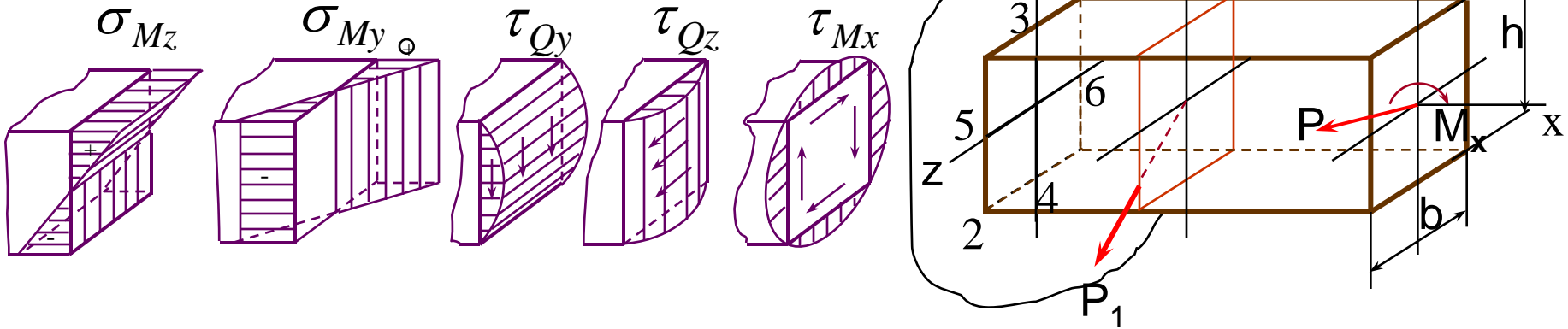
$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]; \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma_u^2 + 4\tau_x^2} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_u} \leq [\sigma] \quad (7.18)$$

Theo thuyết bền thứ tư:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma_u^2 + 3\tau_x^2} = \frac{\sqrt{0,75M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_u} \leq [\sigma] \quad (7.19)$$

7.4.2. Mặt cắt hình chữ nhật.



Phân tử được tách ra từ điểm 1 ở trạng thái kéo đơn.

$$\sigma_1 = \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y}$$

Điều kiện bền:
$$\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (7.20)$$

Điểm 2 ở trạng thái nén đơn. Giá trị của ứng suất cũng được tính theo công thức (7.20) nhưng có dấu âm. Các điểm 3 và 4 (trung điểm của các cạnh ngắn của hình chữ nhật ở trạng thái căng phẳng):

$$\sigma_{3,4} = \frac{M_z}{W_z}; \quad \tau_{3,4} = \gamma \tau_{\max} = \gamma \frac{M_x}{\beta b^3}.$$

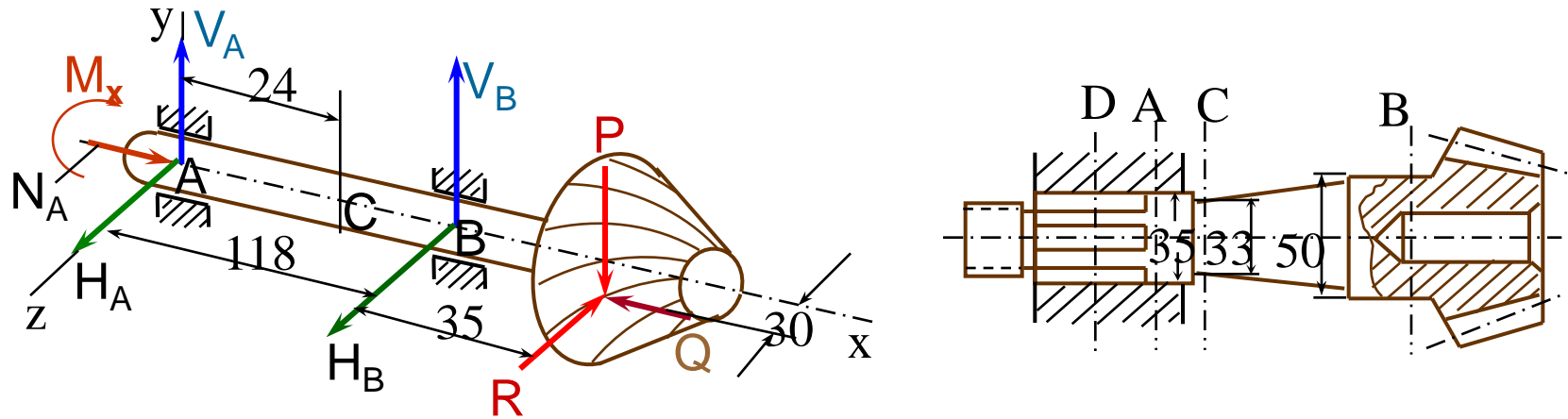
Điều kiện bền ở điểm này khi thanh làm bằng vật liệu dẻo theo thuyết bền thứ ba :

$$\sqrt{\left(\frac{M_z}{W_z}\right)^2 + 4\left(\gamma \frac{M_x}{\beta b^3}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (7.21)$$

Điểm 5 và 6:
$$\sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_x}{\beta b^3}\right)^2} \leq [\sigma] \quad (7.22)$$

Điểm nào nguy hiểm hơn trong số các điểm 1, 2, 3, 4 hay 5, 6 tùy thuộc vào từng trường hợp chịu lực cụ thể (tùy thuộc vào quan hệ giữa các momen M_x , M_y , M_z và quan hệ giữa chiều dài các cạnh b và h).

Thí dụ 7. 7. Kiểm tra độ bền của trục bánh răng chủ động của ô tô, biết $P = 36 \text{ kN}$, $Q = 19 \text{ kN}$, $R = 20 \text{ kN}$. Các kích thước cho trên hình vẽ.



$$\sum M_y = H_B \cdot 118 - R(118 + 35) + Q \cdot 30 = 0; \quad \rightarrow \quad H_B = \frac{153 \cdot 20 - 30 \cdot 19}{118} = 21,10 \text{ kN}.$$

$$\sum Z_i = H_A + H_B - R = 0; \quad \rightarrow \quad H_A = -H_B + R = -21,1 + 20 = -1,11 \text{ kN}$$

$$\sum M_z = V_B \cdot 118 - P(118 + 35) = 0; \quad \rightarrow \quad V_B = \frac{36 \cdot 153}{118} = 46,7 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = V_A + V_B - P = 0; \quad \rightarrow \quad V_A = P - V_B = 36 - 46,7 = -10,7 \text{ kN}.$$

$$\sum X_i = N_A - Q = 0; \quad \rightarrow \quad N_A = -19,0 \text{ kN}.$$

*** Xét mặt cắt A của trục :**

$M_u = 0$; $M_x = P \cdot 3 = 36 \cdot 3 = 108 \text{ kNcm}$; lực dọc $N_A = -19,0 \text{ kN}$.

Ứng suất pháp do nén: $\sigma_n = \frac{N_A \cdot 4}{\pi d^2} = \frac{-19,4}{3,14 \cdot 3,5^2} = -1,98 \text{ kN/cm}^2$

Ứng suất tiếp do xoắn: $\tau = \frac{M_x}{W_p} = \frac{108}{0,2 \cdot 3,5^3} = 12,5 \text{ kN/cm}^2$

Ứng suất tương đương theo thuyết bền ba:

$$\sigma_{Atd} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{1,98^2 + 4 \cdot 12,6^2} \cong 25,3 \text{ kN/cm}^2.$$

*** Mặt cắt D** có then hoa chỉ có momen xoắn $M_x = 108 \text{ kNcm}$.

Ứng suất tiếp danh nghĩa: $\tau = \frac{108}{0,2 \cdot 3,5^3} = 12,6 \text{ kN/cm}^2$

Lấy hệ số tập trung ứng suất ở then hoa $\alpha_\tau = 2,5$:

$$\tau_{\max} = 2,5 \cdot 12,6 = 31,5 \text{ kN/cm}^2.$$

* **Mặt cắt C** có các thành phần nội lực :

$$M_{C_y} = N_A \cdot 2,4 = 1,1 \cdot 2,4 = 2,64 \text{ kN/cm}^2;$$

$$M_{C_z} = V_A \cdot 2,4 = 10,70 \cdot 2,4 = 25,7 \text{ kN/cm}^2;$$

$$M_C = \sqrt{M_{C_y}^2 + M_{C_z}^2} = 25,84 \text{ kNcm}.$$

Ứng suất pháp do uốn: $\sigma_u = \frac{25,84}{0,1 \cdot 3,3^3} = \pm 7,19 \text{ kN/cm}^2.$

Ứng suất pháp do nén: $\sigma_n = \frac{Q \cdot 4}{\pi d^2} = \frac{19 \cdot 4}{3,14 \cdot 3,3^2} = -2,22 \text{ kN/cm}^2$

Ứng suất tiếp do xoắn: $\tau = \frac{M_x}{0,2 d^3} = \frac{108}{0,2 \cdot 3,3^2} \cong 15,0 \text{ kN/cm}^2$

Ứng suất tương đương cực đại ở mặt cắt C:

$$\sigma_{Ctd} = \sqrt{(\sigma_u + \sigma_n)^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(-7,19 - 2,22)^2 + 4 \cdot 15^2} = 31 \text{ kN/cm}^2$$

* **Mặt cắt B** có các thành phần nội lực sau:

Momen uốn : $M_{By} = R \cdot 3,5 - Q \cdot 3 = 20 \cdot 3,5 - 19 \cdot 3 = 13 \text{ kNcm};$

Momen uốn : $M_{Bz} = P \cdot 3,5 = 36 \cdot 3,5 = 126 \text{ kNcm}.$

Momen xoắn ; $M_{Bx} = P \cdot 3 = 36 \cdot 3 = 108 \text{ kNcm};$

Lực nén: $N_B = Q = -19 \text{ kN}.$

Ứng suất pháp do uốn :

$$\sigma_u = \pm \frac{\sqrt{M_{By}^2 + M_{Bz}^2}}{0,1d_1^3 \left[1 - \left(\frac{d_c}{d_1} \right)^4 \right]} = \pm \frac{\sqrt{13^2 + 126^2}}{0,1 \cdot 5^3 (1 - 0,4^4)} = \pm 10,4 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất pháp do nén :

$$\sigma_n = \frac{N_B}{F} = \frac{N_B \cdot 4}{\pi d_1^2 \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 \right]} = \frac{-19,4}{\pi \cdot 5^2 (1 - 0,4^2)} = -1,15 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất pháp tổng cộng do uốn và nén :

$$\sigma = \sigma_u + \sigma_n = -10,4 - 1,15 = -11,55 \text{ kN/cm}^2.$$

Ứng suất tiếp do xoắn :

$$\tau = \frac{M_x}{0,2d_1^3 \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 \right]} = \frac{108}{0,2 \cdot 5^3 (1 - 0,4^4)} = 4,43 \text{ kN/cm}_2.$$

Ứng suất tương đương theo thuyết bền ba:

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(-11,55)^2 + 4 \cdot 4,43^2} = 14,6 \text{ kN/cm}^2$$

Như vậy ứng suất tương đương ở mặt cắt C ($\sigma_{Ctd} = 31,0 \text{ kN/cm}^2$) so với giới hạn bền của vật liệu làm trục ($\sigma_B = 110 \text{ kN/cm}^2$) so với giới hạn bền của vật liệu làm trục ($\sigma_B = 110 \text{ kN/cm}^2$) hệ số an toàn là $n_B = 3,55$ là có thể chấp nhận, nhất là chế độ làm việc lùi xe chỉ xảy ra trong thời gian ngắn.

Thí dụ 7. 8. Kiểm tra độ bền ở các điểm 1, 2 và 3 trên mặt cắt 1-1 của thân cày

Biết $N = 6,5 \text{ kN}$; $T = 5,5 \text{ kN}$;
 $\alpha = 40^\circ$; thân cày có mặt cắt hình chữ nhật có $b = 10\text{mm}$; $h = 70\text{mm}$;
 $H = 560 \text{ mm}$; $a = 260\text{mm}$. Vật liệu thân cày có

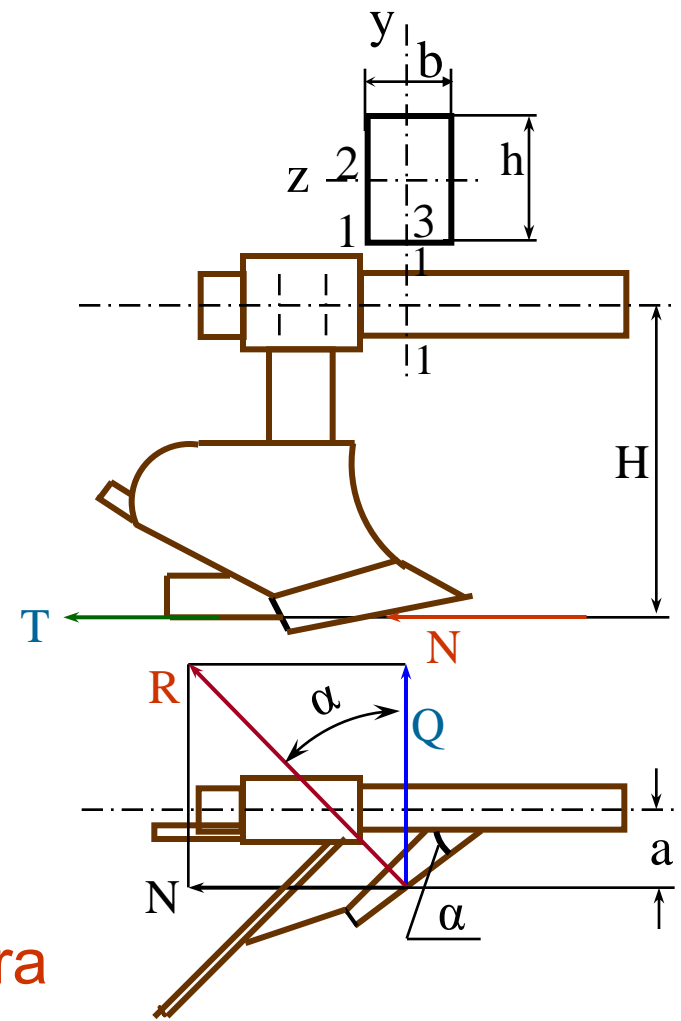
Tại mặt cắt 1-1 có các thành phần nội lực:

$$P = N + T; M_z = (N + T)H;$$

$$M_y = Na; M_x = QH = NctgaH.$$

Tại điểm 1 ứng suất tiếp do xoắn gây ra bằng không, ứng suất pháp tổng cộng có giá trị bằng:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N+T}{F} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{N+T}{F} + \frac{(N+T)H}{W_z} + \frac{Na}{W_y} \\ &= \frac{6,5+5,5}{6.7} + \frac{(6,5+5,5)56.6}{6.7^2} + \frac{6,5.26.6}{7.6^2} \cong 18\text{kN/cm}^2. \end{aligned}$$



Tại điểm 2 có ứng suất tiếp cực đại :

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{N \operatorname{ctg} \alpha \cdot H}{\beta b^3}.$$

Với tỷ số $n = b/h = 7/6 = 1,17$; $\beta = 0,213$.

$$\tau_{\max} = \frac{6,5 \cdot \operatorname{ctg} 40^\circ \cdot 56}{0,213 \cdot 6^3} \cong 9,43 \text{ kN/cm}^2.$$

Ứng suất pháp tại điểm 2:

$$\sigma = \frac{N + T}{F} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{6,5 + 5,5}{6 \cdot 7} + \frac{6,5 \cdot 26 \cdot 6}{7 \cdot 6^2} = 4,3 \text{ kN/cm}^2.$$

$$\sigma_{2td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{4,3^2 + 4 \cdot 9,43^2} = 19,3 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất tiếp tại điểm 3:

$$\tau = \gamma \frac{M_x}{W_x} = \gamma \tau_{\max} = 0,952 \cdot 9,43 = 8,98 \text{ kN/cm}^2.$$

Ứng suất pháp ở điểm 3:

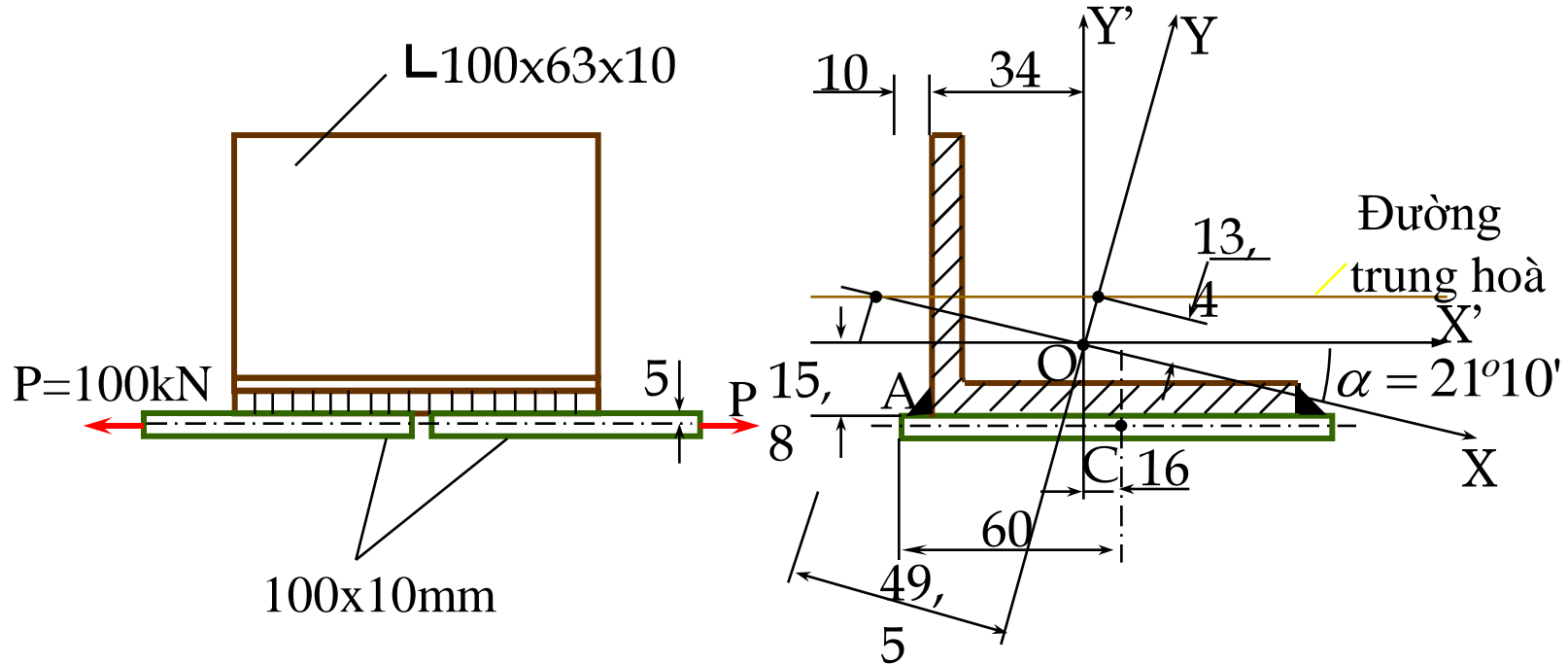
$$\sigma = \frac{N + T}{F} + \frac{M_z}{W_z} = \frac{6,5 + 5,5}{6.7} + \frac{(6,5 + 5,5).56.6}{6.7^3} = 14 \text{ kN/cm}^2.$$

Ứng suất tương đương tại điểm 3:

$$\sigma_{3td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{14^2 + 8,98^2} = 22,8 \text{ kN/cm}^2$$

Thép làm khung cày có giới hạn chảy $\sigma_c = 40 \text{ kN/cm}^2$, như vậy có thể coi là đủ độ bền ($n = 40/22,8 = 1,75$).

Thí dụ 7.9. Hai thanh thép lập là có mặt cắt ngang 120x10 mm được nối với nhau bằng cách hàn với tấm nối là thép góc 100x63x10 mm. So sánh độ bền của thanh lập là và thép góc nếu chúng được làm bằng cùng một vật liệu.



Các thông số của thép góc 100x63x10: $F = 15,5 \text{ cm}^2$; $I_{X'} = 47,1 \text{ cm}^4$;

$$I_{Y'} = 154 \text{ cm}^4; I_{X'} = 28,3 \text{ cm}^4; \operatorname{tg} \alpha = 0,387; \alpha = 21^\circ 10'$$

$$I_y = I_{X'} + I_{Y'} - I_{X'} = 172,8 \text{ cm}^4; i_x^2 = \frac{I_{X'}}{F} = 1,825 \text{ cm}^2; i_y^2 = \frac{I_y}{F} = 11,10 \text{ cm}^2;$$

Các thanh lập là chịu tải đúng đường tâm, ta dễ dàng xác định tâm áp lực C trong hệ tọa độ X'OY'.

$$X'_C = 6 - 1,0 - 3,4 = 1,6 \text{ cm}; Y'_C = - (1,58 + 0,5) = - 2,08 \text{ cm}.$$

Xác định tọa độ của điểm C trong hệ tọa độ XOY (XOY quay một góc $\alpha = 21^\circ 10'$ so với hệ tọa độ X'OY' theo chiều kim đồng hồ)

$$\begin{aligned} X_C &= X'_C \cos(-21^\circ 10') + Y'_C \sin(-21^\circ 10') = \\ &= 1,6 \cdot 0,9325 + 2,08 \cdot 0,361 = 2,245 \text{ cm}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_C &= - X'_C \sin(-21^\circ 10') + Y'_C \cos(-21^\circ 10') = \\ &= - 1,6 \cdot (-0,361) - 2,08 \cdot 0,9325 = - 1,364 \text{ cm}. \end{aligned}$$

(7. 14) \rightarrow ứng suất ở một điểm bất kỳ trên mặt cắt của thép góc:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{X_C}{i_y^2} x + \frac{Y_C}{i_x^2} y \right) = \frac{100 \cdot 10^3}{15,5 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{2,145 \cdot 10^{-2}}{11,1 \cdot 10^{-4}} x - \frac{1,364 \cdot 10^{-2}}{1,825 \cdot 10^{-4}} y \right)$$

Toạ độ của giao điểm của đường trung hoà và các trục toạ độ:

$$a = -\frac{1,1}{224,5} = -0,0495m;$$

$$b = -\frac{1,825}{136,4} = -0,013m;$$

Toạ độ của điểm A,B(xa đường trung hoà nhất) trong hệ toạ độ X'OY' :

$$X'_A = -3,4 \text{ cm}; X'_B = -2,4 \text{ cm}; Y'_A = -1,58 \text{ cm}; Y'_B = -4,72 \text{ cm}.$$

Toạ độ của A và B trong hệ toạ độ XOY:

$$\begin{aligned} X_A &= X'_A \cos 21^\circ 10' - Y'_A \sin 21^\circ 10' = \\ &= -3,4 \cdot 0,9325 + 1,58 \cdot 0,361 = -2,58 \text{ cm}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_A &= X'_A \sin 21^\circ 10' + Y'_A \cos 21^\circ 10' = \\ &= -3,4 \cdot 0,361 - 1,58 \cdot 0,9325 = -2,7 \text{ cm}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_B &= X'_B \cos 21^\circ 10' - Y'_B \sin 21^\circ 10' = \\ &= -2,4 \cdot 0,9325 - 4,7 \cdot 0,361 = -3,94 \text{ cm}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_B &= X'_B \sin 21^\circ 10' + Y'_B \cos 21^\circ 10' = \\ &= -2,4 \cdot 0,361 + 4,7 \cdot 0,9325 = 3,53 \text{ cm}. \end{aligned}$$

$$\sigma_A = \frac{100.10^3}{15,5.10^{-4}} \left[1 - \frac{1,364.10^{-4}}{1,825.10^{-4}} (-0,027) + \frac{2,245.10^{-2}}{11,1.10^{-4}} (-0,0258) \right]$$

$$\sigma_A = 161000000 N / m^2 = 161 MPa.$$

$$\sigma_B = \frac{100.10^3}{15,5.10^{-4}} \left[1 - \frac{1,364.10^{-4}}{1,825.10^{-4}} (0,0353) + \frac{2,245.10^{-2}}{11,1.10^{-4}} (-0,0394) \right]$$

$$\sigma_B = -157000000 N / m^2 = -157 MPa.$$

Ứng suất pháp trong thanh lập là:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{100.10^3}{0,01.0,12} = 83300000 N / m^2 = 83,3 MPa$$

Như vậy mặc dầu diện tích mặt cắt ngang của thép góc lớn hơn thanh lập là khoảng 30% nhưng ứng suất cực đại trong thép góc lại lớn hơn 93%.

Thí dụ 7.10. Một đập chắn nước bằng bê tông có chiều cao h , chiều rộng đỉnh đập a , chiều rộng chân đập b , trọng lượng riêng của bê tông γ . Hãy xác định trị số ứng suất pháp lớn nhất và nhỏ nhất tại mặt cắt chân đập khi hồ chứa đầy nước.

Xét một đoạn đập dài 1m .

$$p_{\max} = 10.h \text{ kN/m}^2;$$

$$Q = p_{\max} \cdot h \cdot 1/2 = 5h^2 \text{ kN};$$

$$P_1 = \gamma \cdot h \cdot a \cdot 1 = \gamma \cdot h \cdot a \text{ kN};$$

$$P_2 = \gamma \cdot h \cdot (b - a) \cdot 1/2 = 0,5\gamma \cdot h \cdot (b - a) \text{ kN};$$

$$N = - (P_1 + P_2);$$

$$M = Q \cdot h/3 - P_1 \cdot CC_1 + P_2 \cdot CC_2 ;$$

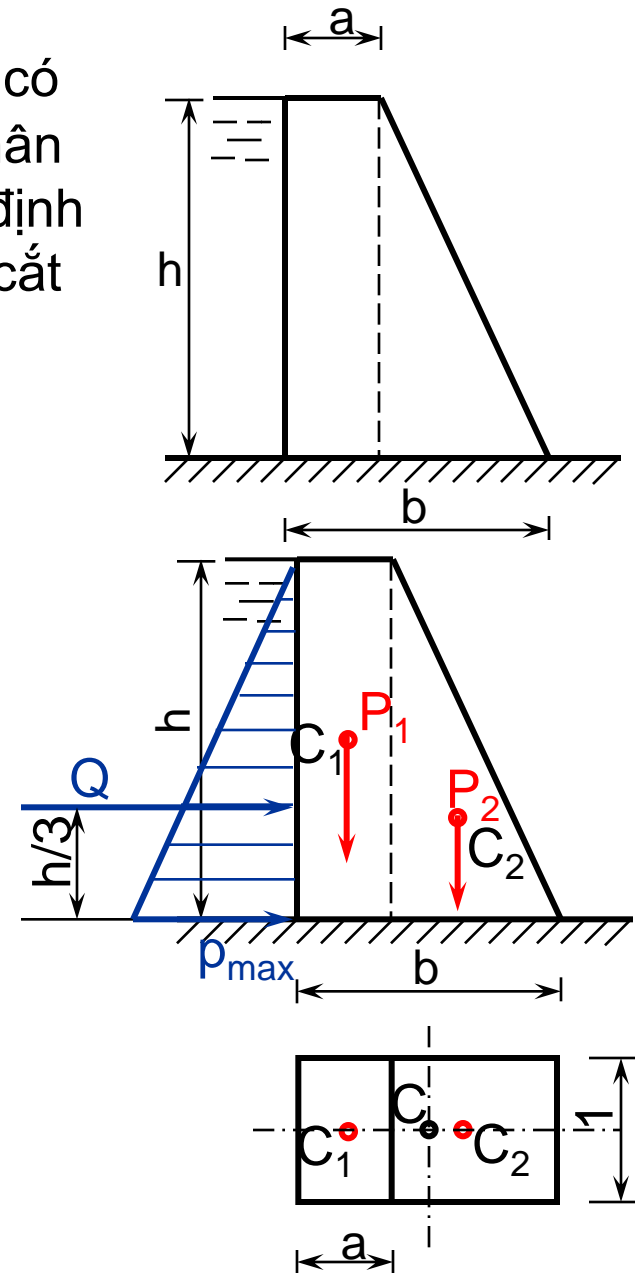
$$CC_1 = (b - a)/2 ;$$

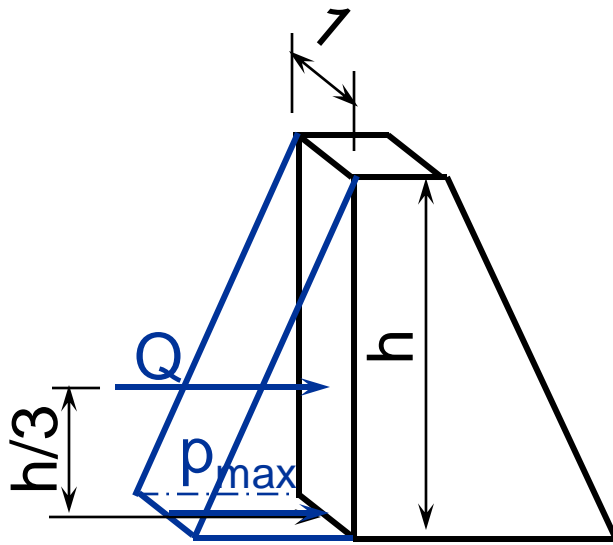
$$CC_2 = \frac{b}{2} - \frac{2}{3} (b - a);$$

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W_u};$$

$$F = 1 \cdot b ;$$

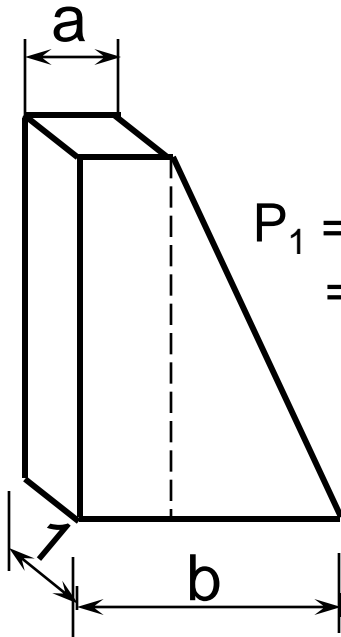
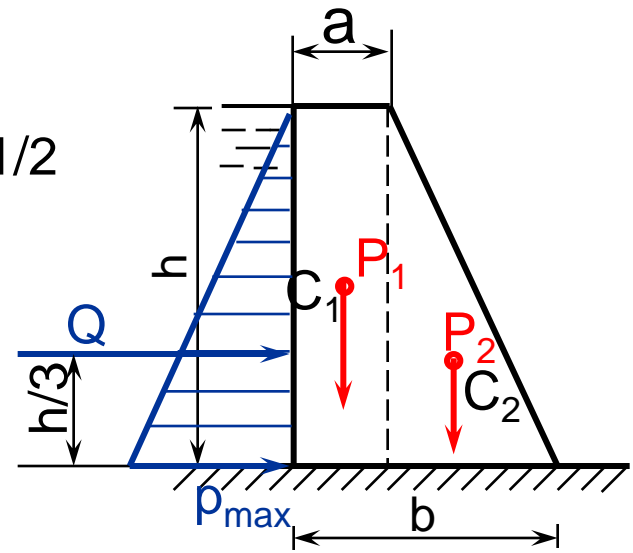
$$W_u = 1 \cdot b^2/6 .$$





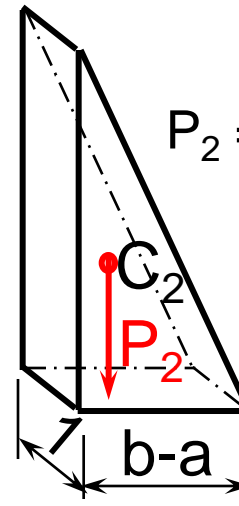
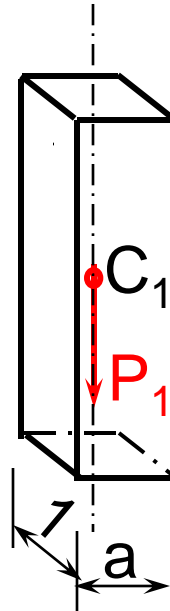
$$Q = p_{\max} \cdot h \cdot 1 \cdot 1/2$$

$$= 5h^2 \text{ kN};$$



$$P_1 = \gamma \cdot h \cdot a \cdot 1$$

$$= \gamma \cdot h \cdot a \text{ kN};$$



$$P_2 = \gamma \cdot h \cdot (b - a) \cdot 1/2$$

$$= 0,5\gamma \cdot h \cdot (b - a) \text{ kN};$$

$$b = 2a = 2\text{ m} ; h = 3\text{ m} ; \gamma = 25 \text{ kN/m}^3.$$

$$CC_1 = (b - a) / 2 = (2 - 1) / 2 = 0,5 \text{ m} ;$$

$$CC_2 = 0,5b - 2/3 \cdot (b - a) = 1 - 2/3 = 1/3 \text{ m} ;$$

$$F = 1 \cdot b = 2 \text{ m}^2 ; W_u = 1 \cdot 2^2 / 6 = 2/3 \text{ m}^3 ;$$

$$P_1 = 25 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 = 75 \text{ kN} ; P_2 = 0,5 \gamma h (b - a) \cdot 1 = 0,5 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 1 = 37,5 \text{ kN} ;$$

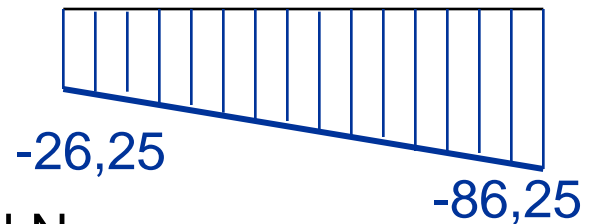
$$Q = p_{\max} \cdot h \cdot 1/2 = 10 \cdot h^2 \cdot 0,5 = 10 \cdot 3^2 \cdot 0,5 = 45 \text{ kN} ;$$

$$M = Q \cdot h/3 - P_1 \cdot CC_1 + P_2 \cdot CC_2$$

$$M = 45 \cdot 3/3 - 75 \cdot 0,5 + 37,5 \cdot 1/3 = 20 \text{ kNm}$$

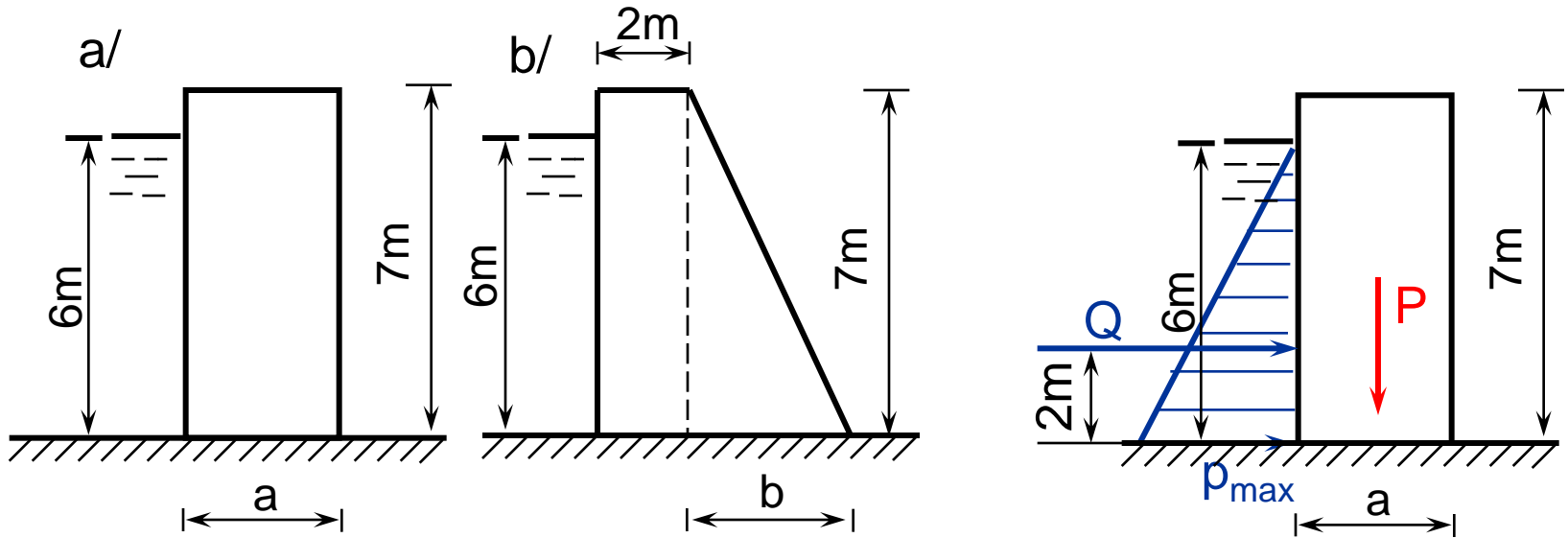
$$N = - (P_1 + P_2) = - (75 + 37,5) = - 112,5 \text{ kN} ;$$

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = \frac{-112,5}{2} \pm \frac{20 \cdot 3}{2}$$



$$\sigma_{\max} = - 26,25 \text{ kN/m}^2 ; \sigma_{\min} = - 86,25 \text{ kN/m}^2$$

3. Xác định chiều rộng của chân đập (sơ đồ a và b) sao cho không có ứng suất kéo ở mặt cắt đáy chân đập biết vật liệu làm đập có $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$.



$$p_{\max} = 10 \cdot h = 10 \cdot 6 = 60 \text{ kN/m}^2;$$

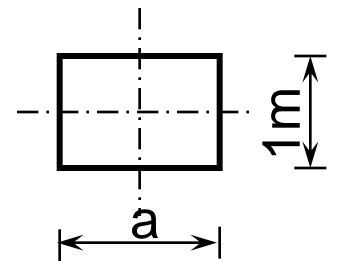
$$Q = p_{\max} \cdot h \cdot 1/2 = 60 \cdot 6 \cdot 0,5 = 180 \text{ kN};$$

$$P = \gamma h' \cdot 1 \cdot a = 20 \cdot 7 = 140a \text{ kN}$$

$$M = Q \cdot 2 = 180 \cdot 2 = 360 \text{ kNm} \quad N = -P = -140a \text{ kN};$$

$$F = 1 \cdot a \text{ m}; \quad W_u = 1 \cdot a^2/6;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M}{W_u} = -\frac{140a}{1 \cdot a} + \frac{360 \cdot 6}{1 \cdot a^2} = 0 \Rightarrow a = 3,93 \text{ m}.$$



$$p_{\max} = 10 \cdot h = 10 \cdot 6 = 60 \text{ kN/m}^2;$$

$$Q = p_{\max} \cdot h \cdot 1/2 = 5h^2 = 5 \cdot 6^2 = 180 \text{ kN};$$

$$P_1 = \gamma \cdot h' \cdot a \cdot 1 = \gamma \cdot h' \cdot a = 20 \cdot 7 \cdot 2 = 280 \text{ kN};$$

$$P_2 = \gamma \cdot h' \cdot b \cdot 1/2 = 0,5\gamma \cdot h' \cdot b = 0,5 \cdot 20 \cdot 7 \cdot b = 70b \text{ kN};$$

$$N = - (P_1 + P_2) = - (180 + 70b) \text{ kN};$$

$$M = Q \cdot h/3 - P_1 \cdot CC_1 + P_2 \cdot CC_2 ;$$

$$CC_1 = (b + 2) / 2 - 1 = b/2 \text{ m};$$

$$CC_2 = (b + 2) \cdot 1/2 + b \cdot 2/3 = 1 + b/3 \text{ m};$$

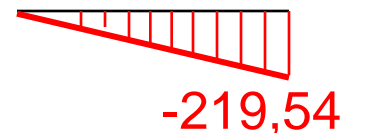
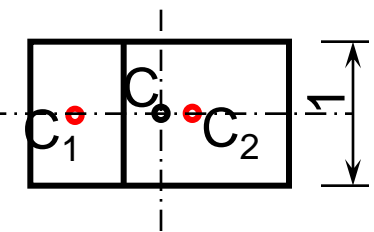
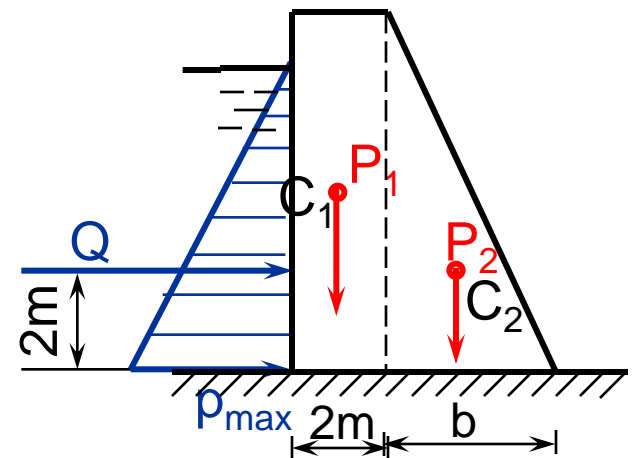
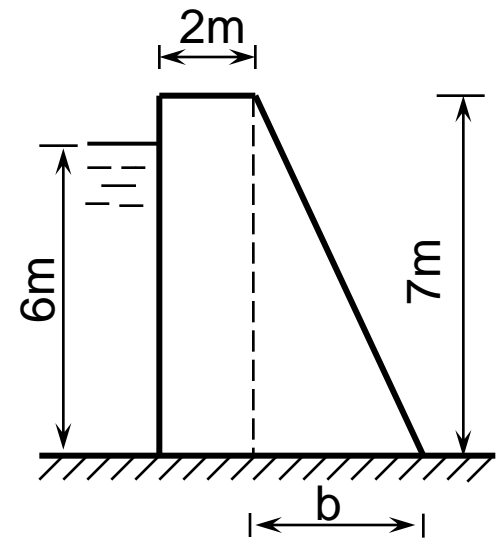
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M}{W_u} = 0$$

$$F = 1(2 + b) \text{ m}^2 ; W_u = 1 \cdot (2 + b)^2 / 6 \text{ m}^3 .$$

$$7b^2 + 42b - 80 = 0 \longrightarrow b = 1,52 \text{ m}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{F} - \frac{M}{W_u} = - \frac{180 + 70 \cdot 1,52}{(2 + 1,52)} - \frac{180 \cdot 2 - 280 \cdot 0,5 \cdot 1,52 + 70 \cdot 1,52 \left(1 - \frac{1,52}{6} \right)}{\frac{1 \cdot (2 + 1,52)^2}{6}}$$

$$\sigma_{\min} = - 219,54 \text{ kN/m}^2 .$$



Chương 8

PHƯƠNG PHÁP NĂNG LƯỢNG XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ

Một trong những nhiệm vụ cơ bản của SBVL là đánh giá độ cứng của công trình nghĩa là mức độ sai lệch về hình dáng và kích thước của nó do tác dụng của tải trọng.

Tính toán theo độ cứng nhằm đảm bảo điều kiện cứng:

$$\delta \leq [\delta], \quad \theta \leq [\theta]$$

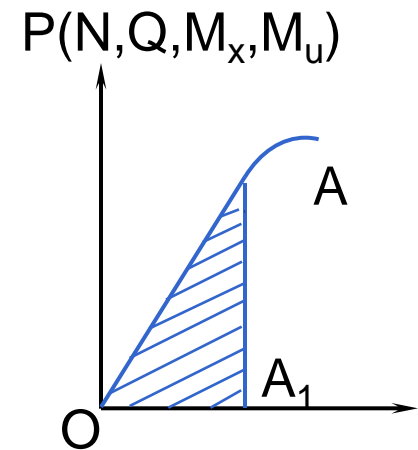
δ , θ là chuyển vị thẳng và chuyển vị góc của mặt cắt được xét;

$[\delta]$, $[\theta]$ là chuyển vị thẳng và chuyển vị góc cho phép.

8.1. Công của ngoại lực, công của nội lực, thế năng biến dạng đàn hồi.

8.1.1. Công của ngoại lực.

Trong giới hạn biến dạng tỷ lệ đồ thị công của ngoại lực trong mọi biến dạng cơ bản đều có dạng hình tam giác OAA_1 :



Công của ngoại lực cần thiết để gây ra mọi biến dạng trong giới hạn tỷ lệ đều có giá trị bằng nửa tích số của lực tác dụng thành phần và biến dạng tương ứng, nghĩa là:

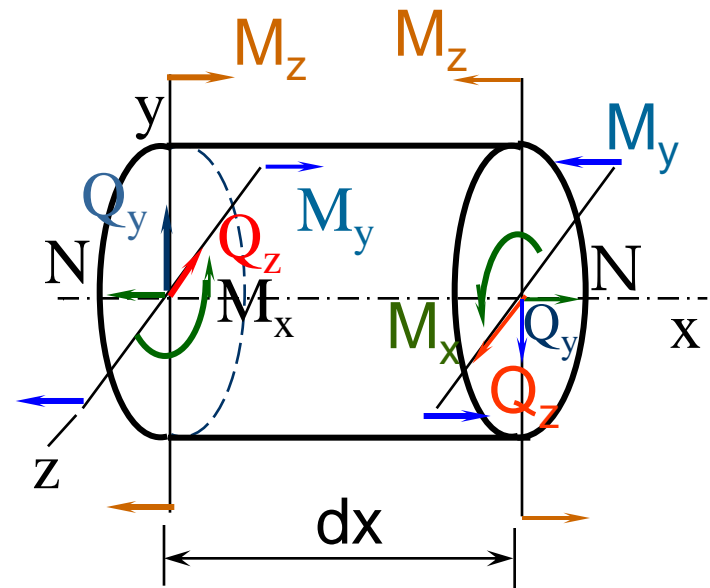
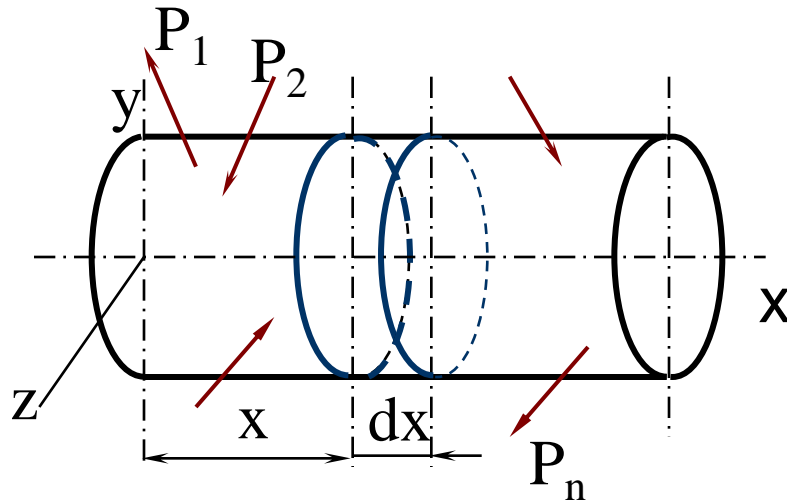
$$A = P \cdot \Delta / 2 . \quad (8. 1)$$

8.1.2. Công của nội lực và thế năng biến dạng.

Với tải trọng tĩnh và trong giới hạn biến dạng đàn hồi công của ngoại lực làm biến dạng vật thể sẽ hoàn toàn biến thành thế năng của nội lực hay còn gọi là thế năng biến dạng:

$$A = U.$$

(8. 2)

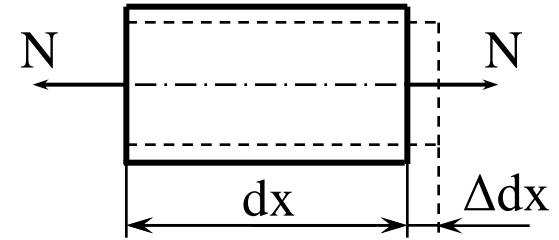


a/ Kéo giãn

$$dU_N = \frac{N \cdot \Delta dx}{2}; \quad \Delta dx = \frac{N \cdot dx}{EF};$$

$$dU_N = \frac{N^2 dx}{2EF}; \quad U_{1N} = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF};$$

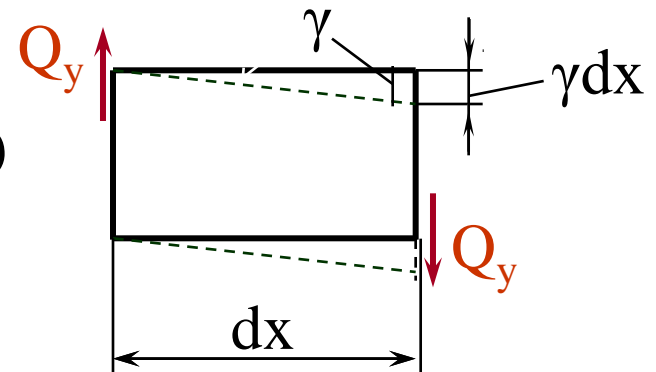
$$U_N = \sum_1^n \int_0^l \frac{N^2 \cdot dx}{2EF} \quad (a)$$



b/ Cắt.

$$dU_{Q_y} = \frac{Q_y \gamma dx}{2}; \quad \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Q_y}{FG} \quad (b)$$

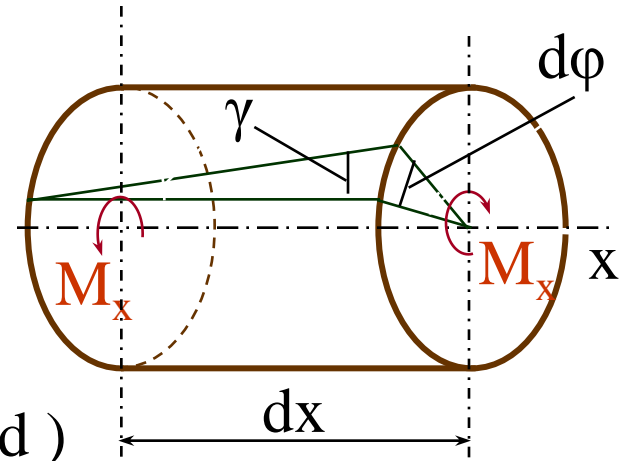
$$dU_{Q_y} = \frac{Q_y^2 dx}{2FG}; \quad U_{Q_y} = \sum_1^n \int_0^l \frac{Q_y^2 \cdot dx}{2GF} \quad (c)$$



c/ Xoắn.

$$dU_{M_x} = \frac{M_x \cdot d\varphi}{2}; \quad d\varphi = \frac{M_x \cdot dx}{GI_p};$$

$$dU_{M_x} = \frac{M_x^2 dx}{2GI_p}; \quad U_{M_x} = \sum_1^n \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2GI_p}; \quad (d)$$

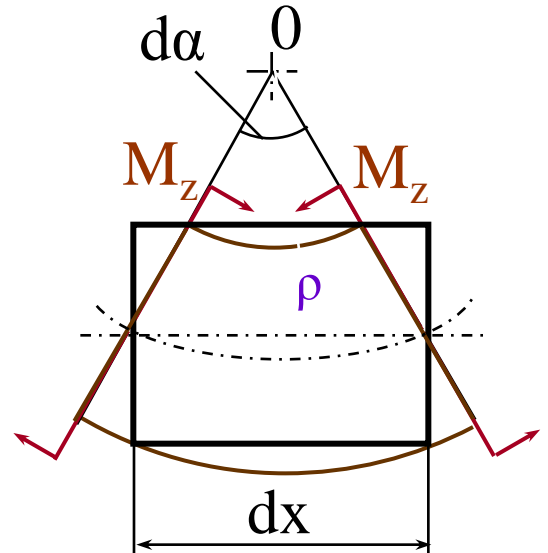


d/ Uốn

$$dU_{M_z} = \frac{M_z d\alpha}{2}; \quad d\alpha = \frac{dx}{\rho}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z};$$

$$dU_{M_z} = \frac{M_z^2 dx}{2EI_z}; \quad U_{M_z} = \sum_1^n \int_0^l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z}; \quad (e)$$

$$U_{M_y} = \sum_1^n \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y}. \quad (g)$$

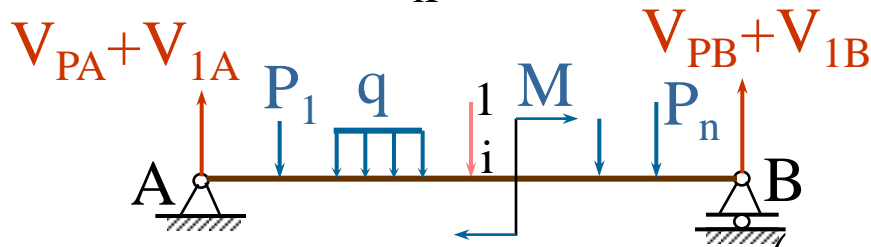
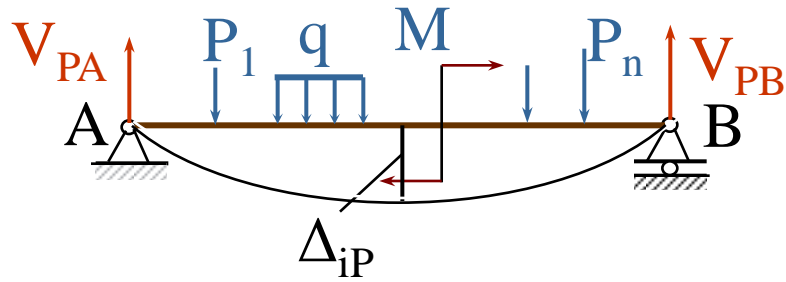


(a) + (b) + (c) + (d) + (e) + (g) \longrightarrow

$$U = \sum_1^n \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EF} + \sum_1^n \int_0^l \frac{Q_y^2 dx}{2GF} \mu_y + \sum_1^n \int_0^l \frac{Q_z^2 dx}{2GF} \mu_z$$
$$+ \sum_1^n \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{2GI_p} + \sum_1^n \int_0^l \frac{M_y^2 dx}{2EI_y} + \sum_1^n \int_0^l \frac{M_z^2 dx}{2EI_z} .$$

(8. 3)

8.2. Xác định chuyển vị theo phương pháp Mo.



$$U_P = \sum_1^n \int_0^l \frac{M_P^2 dx}{2EI};$$

$$U_i = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i^2 dx}{2EI};$$

\bar{M}_i - momen uốn do lực đơn vị đặt ở " i ".

$$U_{iP} = \sum_1^n \int_0^l \frac{(\bar{M}_i + M_P)^2 dx}{2EI};$$

$$U_{iP} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i^2 dx}{2EI} + \sum_1^n \int_0^l \frac{M_P^2 dx}{2EI} + \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EI};$$

$$1. \Delta_{ip} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i M_P dx}{EI}. \quad (8.4)$$

$$1. \Delta_{ip} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_P dx}{EI}. \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{iP} = & \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{N}_i N_P dx}{EF} + \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{Q}_{iy} Q_{Py} dx}{GF} \mu_y + \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{Q}_{iz} Q_{Pz} dx}{GF} \mu_z \\ & + \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_{ix} M_{Px} dx}{GI_P} + \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_{iy} M_{Py} dx}{EI_y} + \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_{iz} M_{Pz} dx}{EI_z}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Trình tự tiến hành:

a/ Chia dầm thành nhiều đoạn, lập biểu thức giải tích của các nội lực thành phần do tải trọng gây ra trên từng đoạn.

b/ Lập biểu thức giải tích của các thành phần nội lực trên các đoạn tương ứng do lực đơn vị gây ra.

Chú ý khi chia đoạn và xác định giới hạn của từng đoạn cần quan tâm đến quy luật biến đổi của từng thành phần nội lực do tải trọng đã cho và do lực đơn vị gây ra cũng như sự thay đổi kích thước mặt cắt ngang.

Lực đơn vị sẽ là lực cùng phương với chuyển vị thẳng cần xác định (độ võng, độ dẫn dài, độ trượt . . .).

Lực đơn vị là momen bằng đơn vị khi xác định chuyển vị góc (góc xoắn, góc xoay của mặt cắt khi uốn).

Hai lực đơn vị cùng phương ngược chiều hay hai momen đơn vị ngược chiều đặt vào hai mặt cắt khi cần xác định sự thay đổi khoảng cách hay góc quay tương đối giữa hai mặt cắt.

c/ Thay các biểu thức giải tích vào các tích phân tương ứng.

d/ Tính các tích phân và tính tổng số các số hạng nghĩa là xác định chuyển vị. Nếu kết quả tính có dấu cộng có nghĩa là chuyển vị cần xác định cùng chiều với lực đơn vị, nếu kết quả tính có dấu trừ thì ngược lại.

8.3. Phương pháp Vêrêsaghin

Tính tích phân $\Delta_{iP} = \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_P dx}{EI}$;

Khi dầm có độ cứng uốn $EI = \text{const}$, đưa EI ra ngoài dấu tích phân,

Tính tích phân dạng :

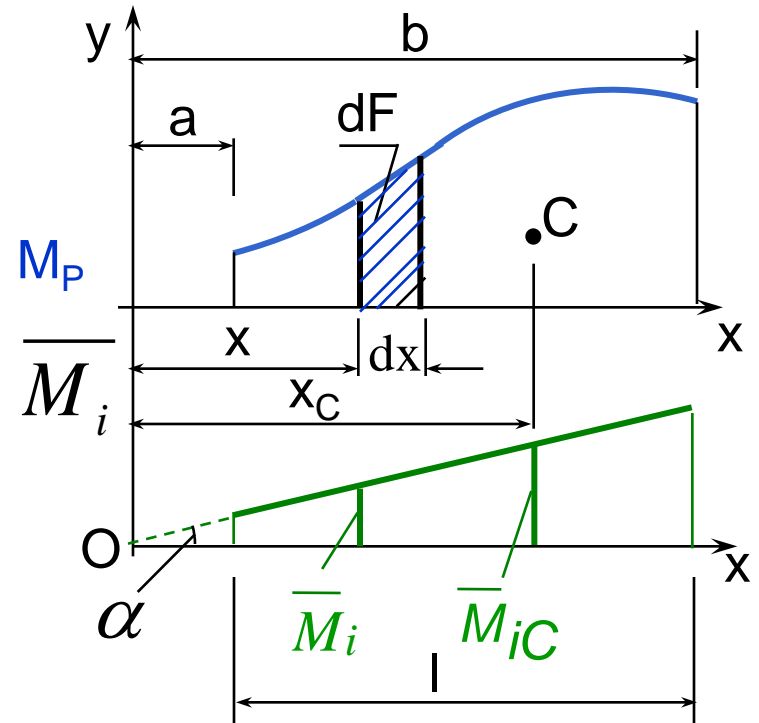
$$\int_0^l \overline{M}_i M_P dx;$$

$$\int_0^l \overline{M}_i M_P dx = \int_0^l x \text{tg } \alpha dF = \text{tg } \alpha \int_0^l x dF .$$

$$\overline{M}_i = x \text{tg } \alpha, M_P dx = dF$$

$$\int_F x dF = S_y$$

-momen tĩnh của diện tích biểu đồ M_P lấy đối với trục y .



$\int_0^l x dF = S_y = F_{MP} \cdot x_C$; -momen tĩnh của diện tích biểu đồ M_p lấy đối với trục y .

$$\int_0^l \overline{M}_i M_P dx = tg \alpha \cdot x_C \cdot F_{MP} = \overline{M}_{iC} F_{MP}$$

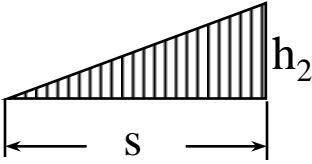
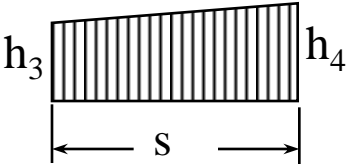
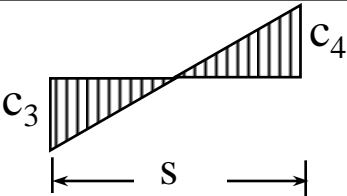
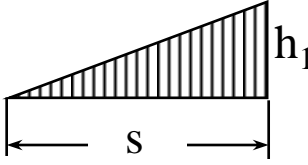
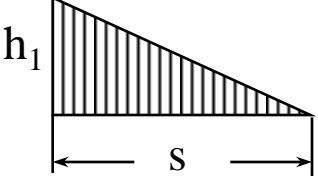
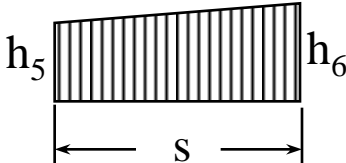
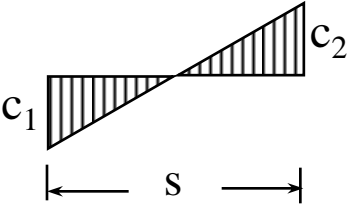
$$\Delta_{iP} = \sum_1^n \frac{F_{MP} \overline{M}_{iC}}{EI} \quad (8.6)$$

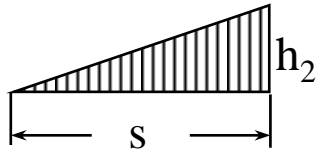
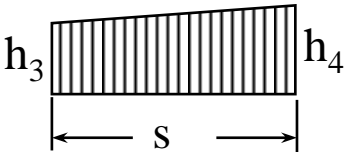
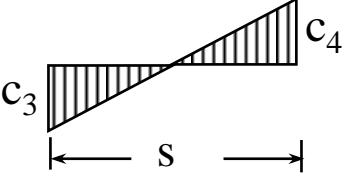
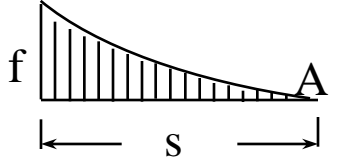
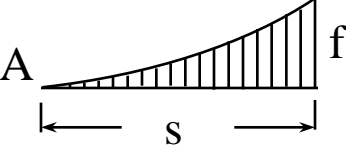
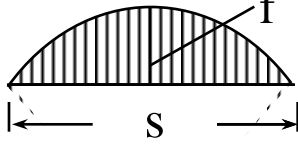
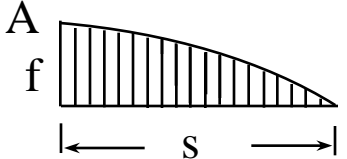
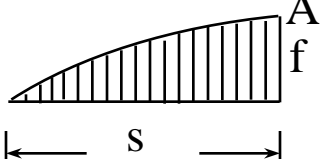
F_{MP} - diện tích của biểu đồ M_p ;

\overline{M}_{iC} - tung độ của biểu đồ \overline{M}_i tại vị trí ứng với trọng tâm C của biểu đồ M_p .

Qua cách chứng minh trên ta thấy rằng khi biểu đồ M_p cũng là đoạn thẳng ta có thể hoán vị hai số hạng ở tử số trong công thức (8.6):

$$\Delta_{iP} = \sum_1^n \frac{F_{\overline{M}_i} M_{PC}}{EI}$$

| <div style="text-align: center;">Biểu đồ \overline{M}_i</div> <div style="text-align: center;">Biểu đồ M_p</div> | 1 | 2 | 3 |
|--|---|--|---|
| |  |  |  |
|  | $\frac{sh_1h_2}{3}$ | $\frac{sh_1}{6}(2h_4 + h_3)$ | $\frac{sh_1}{6}(2c_4 - c_3)$ |
|  | $\frac{sh_1h_2}{6}$ | $\frac{sh_1}{6}(2h_3 + h_4)$ | $\frac{sh_1}{6}(-2c_3 + c_4)$ |
|  | $\frac{sh_2}{6}(2h_6 + h_5)$ | $\frac{s}{6}[h_5(2h_3 + h_4 + h_6(2h_4 + h_3))]$ | $\frac{s}{6}[h_5(-2c_3 + c_4 + h_6(2c_4 - c_3))]$ |
|  | $\frac{sh_2}{6}(2c_2 - c_1)$ | $\frac{s}{6}[-c_1(2h_3 + h_4 + c_2(2h_4 + h_3))]$ | $\frac{s}{6}[-c_1(-2c_3 + c_4 + c_2(2c_4 - c_3))]$ |

| <div style="text-align: center;">Biểu đồ \overline{M}_i</div> <div style="text-align: center;">Biểu đồ M_p</div> | 1 | 2 | 3 |
|--|--|--|--|
| |  |  |  |
|  | $\frac{sf \cdot h_2}{12}$ | $\frac{sf}{12}(3h_3 + h_4)$ | $\frac{sf}{12}(-3c_3 + c_4)$ |
|  | $\frac{sf \cdot h_2}{4}$ | $\frac{sf}{12}(3h_4 + h_3)$ | $\frac{sf}{12}(3c_4 - c_3)$ |
|  | $\frac{sf \cdot h_2}{3}$ | $\frac{sf}{3}(h_3 + h_4)$ | $\frac{sf}{3}(-c_3 + c_4)$ |
|  | $\frac{sf \cdot h_2}{4}$ | $\frac{sf}{12}(5h_3 + 3h_4)$ | $\frac{sf}{12}(-5c_3 + 3c_4)$ |
|  | $\frac{5}{12}sfh_2$ | $\frac{sf}{12}(5h_4 + 3h_3)$ | $\frac{sf}{12}(5c_4 - 3c_3)$ |
| A - đỉnh của các parabol | | | |

Thí dụ 8. 1. Xác định độ võng và góc xoay của mặt cắt ở đầu tự do của dầm côngxôn .

- Xác định chuyển vị tại A.

$$M_P = - \int_0^l P x \cdot \overline{M}_{xi} dx = -1 \cdot x;$$

$$\Delta_{iP} = \int_0^l \frac{EI}{EI} \overline{M}_{xi} dx;$$

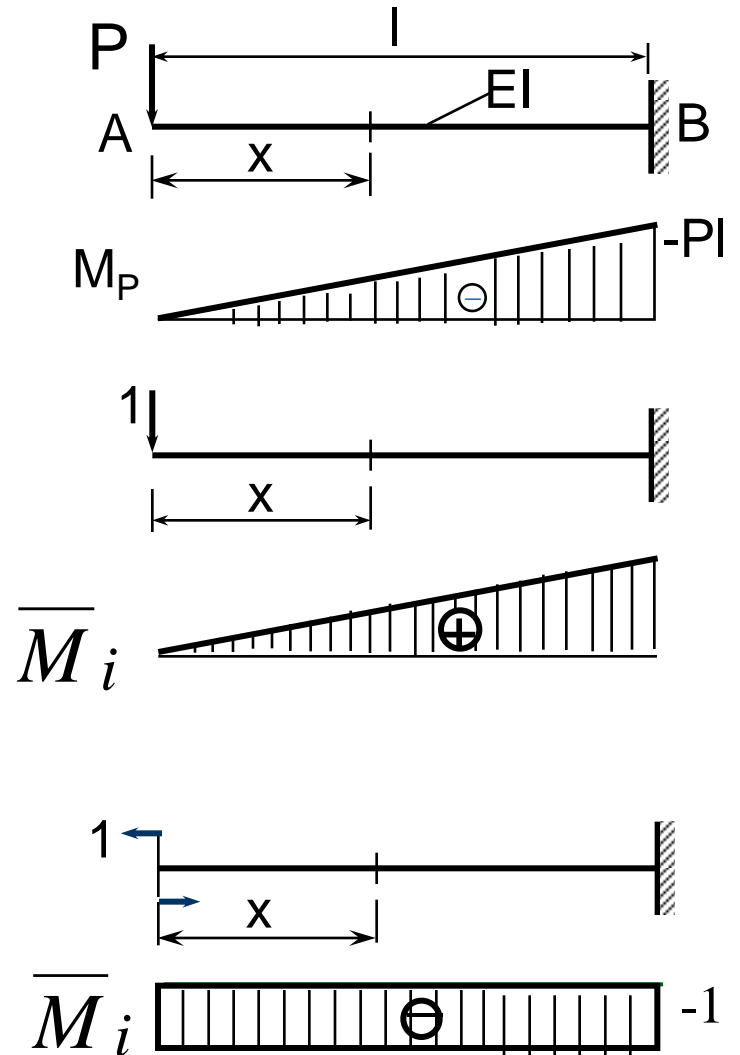
$$\Delta_{iP} = y_A = \frac{Pl^3}{3EI};$$

Độ võng y_A cùng chiều với lực đơn vị (hướng xuống phía dưới).

- Xác định góc xoay tại A.

Trong trường hợp hợp này biểu thức của \overline{M}_i có dạng

$$\overline{M}_i = -1 .$$



$$\varphi_A = \Delta_{iP} = \int_0^l \frac{-Px(-1)dx}{EI} = \frac{Pl^2}{2EI}.$$

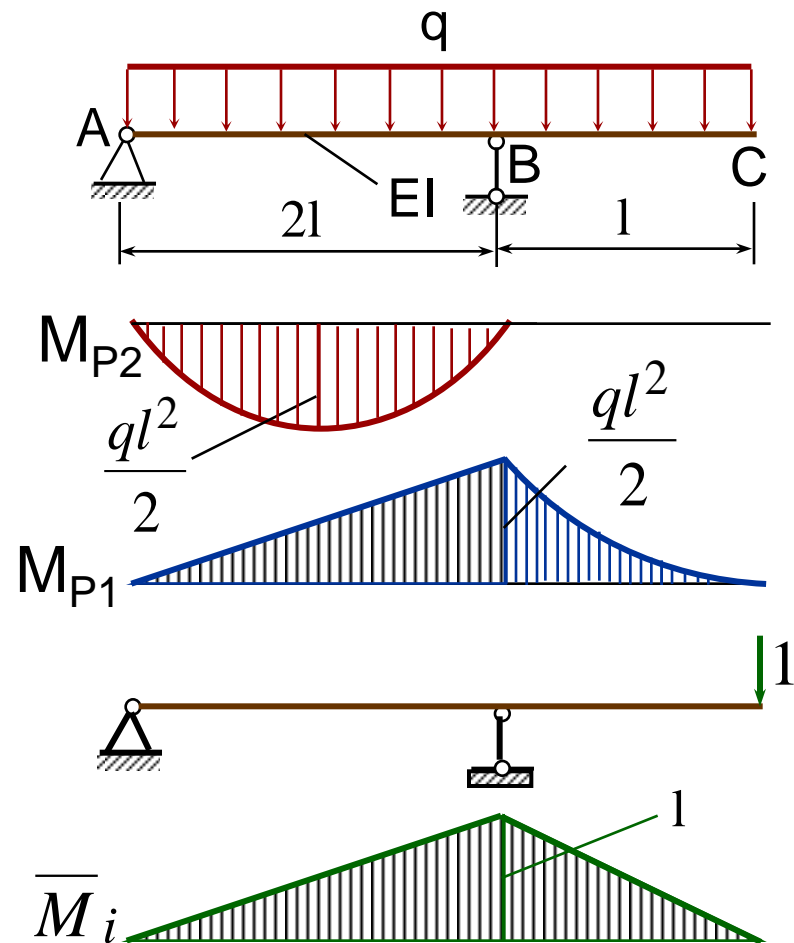
Chuyển vị góc hướng ngược chiều kim đồng hồ (giống như momen đơn vị đặt ở A).

Vẽ biểu đồ momen M_P và biểu đồ momen \overline{M}_i sử dụng phương pháp Vêrêxaghin ta có ngay :

$$y_A = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} l \cdot (-Pl) \cdot (-l) \right] = \frac{Pl^3}{3EI};$$

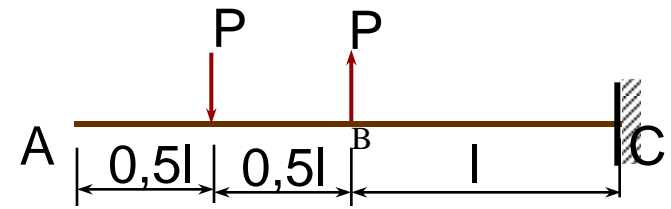
$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left[l \cdot (-Pl) \cdot (-1) \right] = \frac{Pl^2}{2EI}.$$

Thí dụ 8. 2. Xác định độ võng ở mặt cắt C của dầm trên hình vẽ.

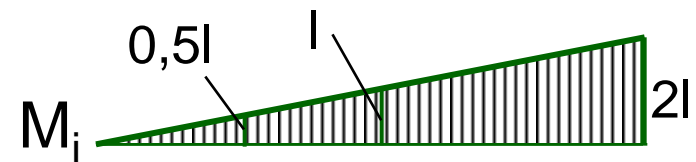
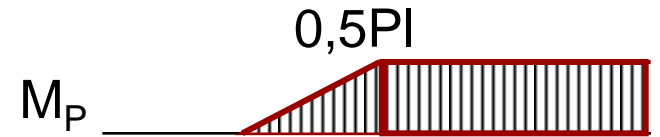


$$y_C = \frac{1}{EI} \left[\frac{l \cdot l \cdot \frac{ql^2}{2}}{4} + \frac{2l \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l}{3} - \frac{2l \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot l}{3} \right] = \frac{ql^4}{8EI}$$

Thí dụ 8.3. Xác định độ võng ở đầu tự do của dầm chịu tải trọng như hình vẽ. Độ cứng uốn của đoạn AB là EI và đoạn BC là $2EI$.



Vẽ biểu đồ momen uốn M_P và \overline{M}_i



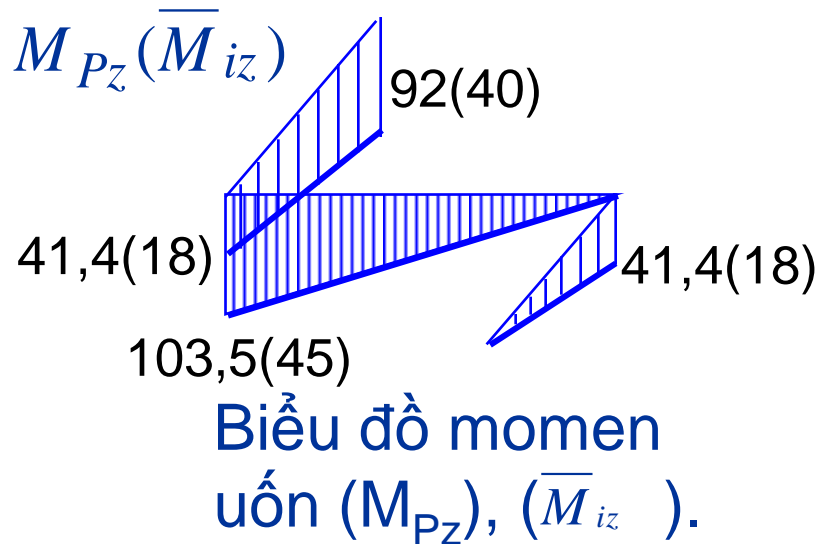
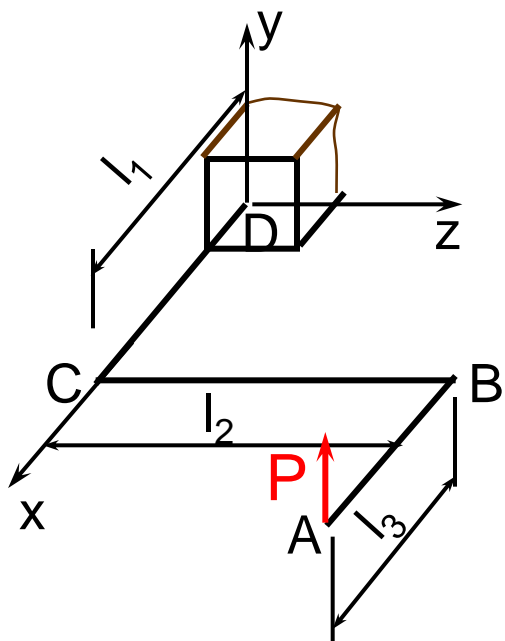
$$y_A = \frac{1}{EI} \frac{0,5l \cdot 0,5Pl}{6} (2l + 0,5l)$$

$$+ \frac{l}{6 \cdot 2EI} [l(2 \cdot 0,5l + 0,5l) + 2l(2 \cdot 0,5l + 0,5l)]$$

$$y_A = \frac{5Pl^3}{48EI} + \frac{3Pl^3}{8EI} = \frac{23Pl^3}{48EI}.$$

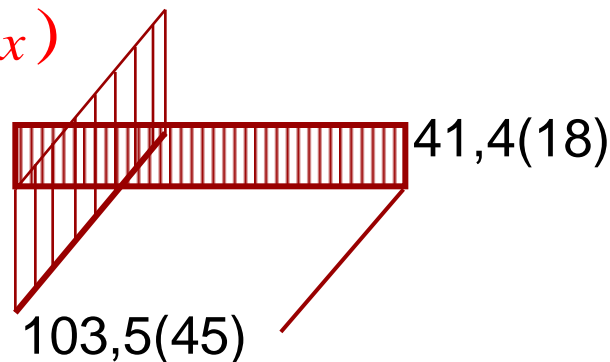
y

Thí dụ 8. 4. Xác định chuyển vị thẳng đứng của điểm A trên trục khuỷu biết đường kính trục $d = 45 \text{ mm}$, chiều dài của các đoạn $l_1 = 220 \text{ mm}$; $l_2 = 450 \text{ mm}$; $l_3 = 180 \text{ mm}$; lực $P = 2,3 \text{ kN}$. Vật liệu làm trục có môđun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; môđun trượt $G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$.

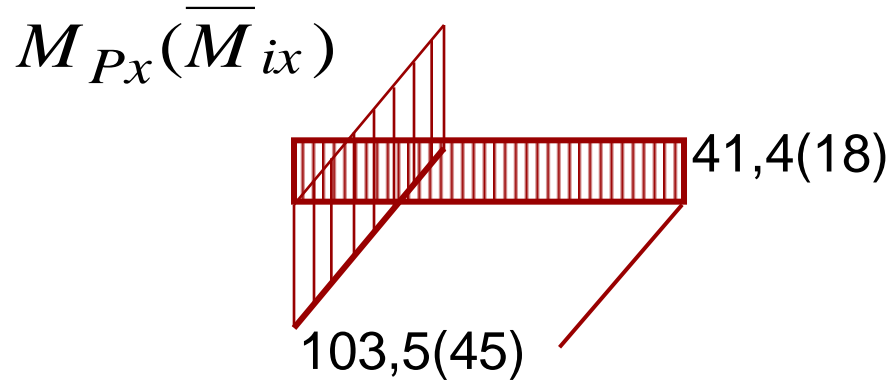
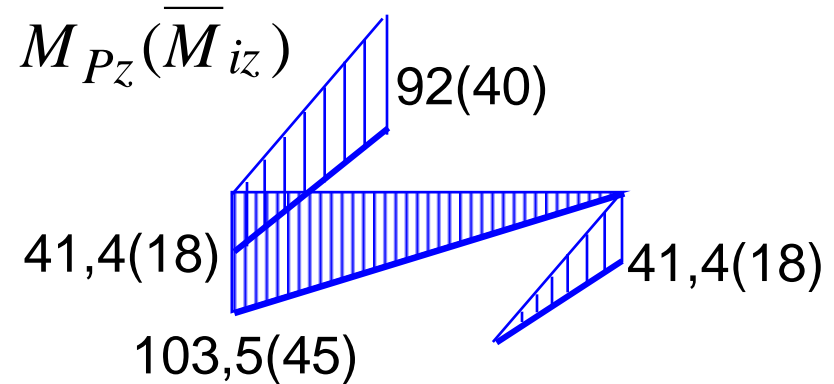
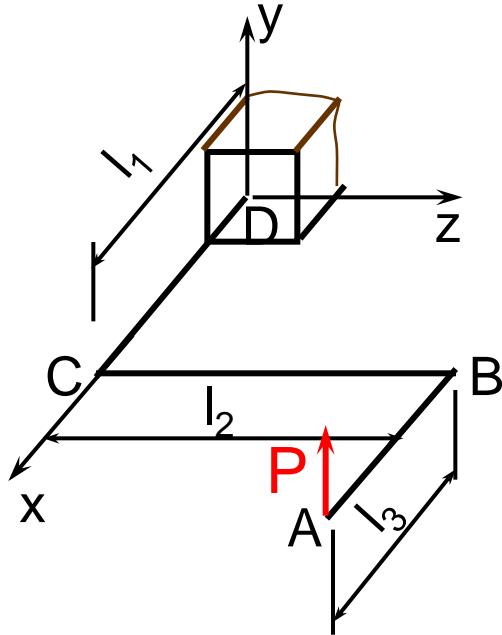


$M_{Px} (\overline{M}_{ix})$

Biểu đồ momen xoắn (M_{Px}), (\overline{M}_{ix}).



Xác định y_A theo phương pháp Vêrêsaghin:



$$y_A = \frac{1}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,05 \cdot 4,5^4} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{18 \cdot 41,4 \cdot 18}{3} + \frac{45 \cdot 103,5 \cdot 45}{3} + \frac{22}{6} [41,4 \cdot 92 \cdot 18 + 40] + 92(2 \cdot 40 + 18) \right\} +$$

$$+ \frac{(103,5 \cdot 22 \cdot 45) + (41,4 \cdot 45 \cdot 18)}{8 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 4,5^4} \cong 0,7 \text{ cm.}$$

Thí dụ 8. 5. Xác định độ võng tại trung điểm của dầm có các lá thép tăng cường trong thí dụ 6. 9 .

Lập biểu thức của momen M_P do tải trọng gây ra và biểu thức của momen \overline{M}_i do lực đơn vị đặt ở giữa dầm gây ra.

1. Đoạn I :

$$0 \leq x_1 \leq 1,58m;$$

$$I_z = 8950\text{cm}^4;$$

$$M_P = 53,3x_1;$$

$$\overline{M}_i = 0,5x_1.$$

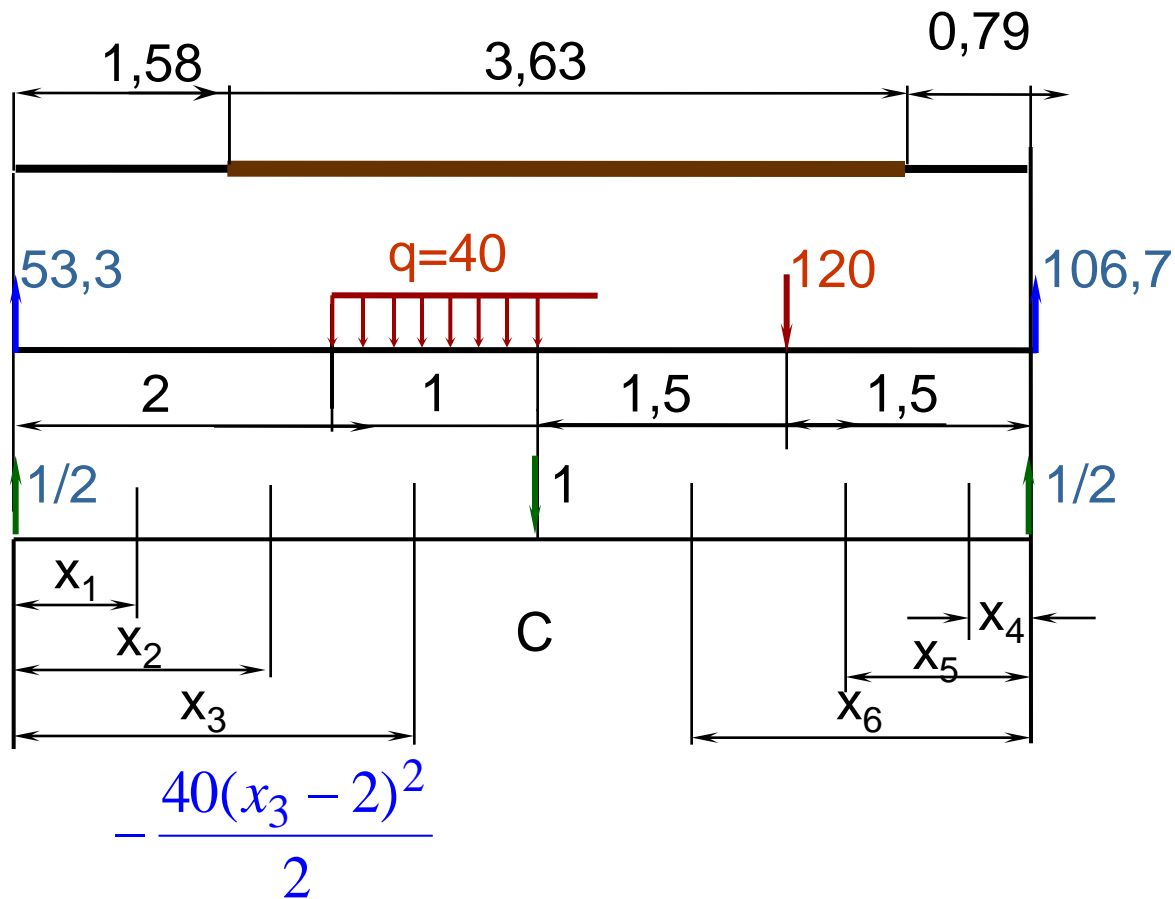
2. Đoạn II :

$$1,58 < x_2 < 2m;$$

$$I_z = 17710\text{cm}^4;$$

$$M_P = 53,3x_2$$

$$\overline{M}_i = 0,5x_2.$$



3. Đoạn III :

$$2 < x_3 < 3m;$$

$$I_z = 17710\text{cm}^4;$$

$$M_p = 53,3x_3$$

$$\frac{40(x_3 - 2)^2}{2}$$

$$M_i = 0,5x_3.$$

4. Đoạn IV :

$$0 < x_4 < 0,79m;$$

$$I_z = 8950\text{cm}^4;$$

$$M_p = 106,7x_4$$

$$M_i = 0,5x_4;$$

5. Đoạn V :

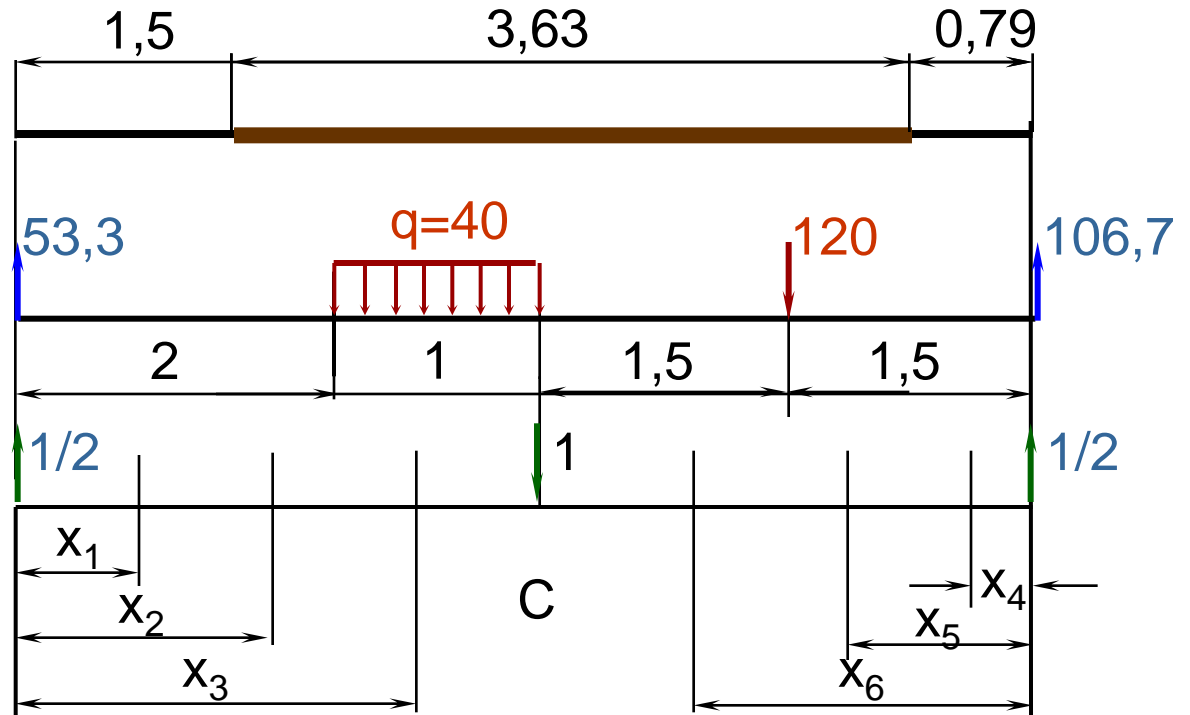
$$0,79 < x_5 < 1,5m; \quad I_z = 17710\text{cm}^4;$$

$$M_p = 106,7x_5; \quad M_i = 0,5x_5.$$

6. Đoạn VI :

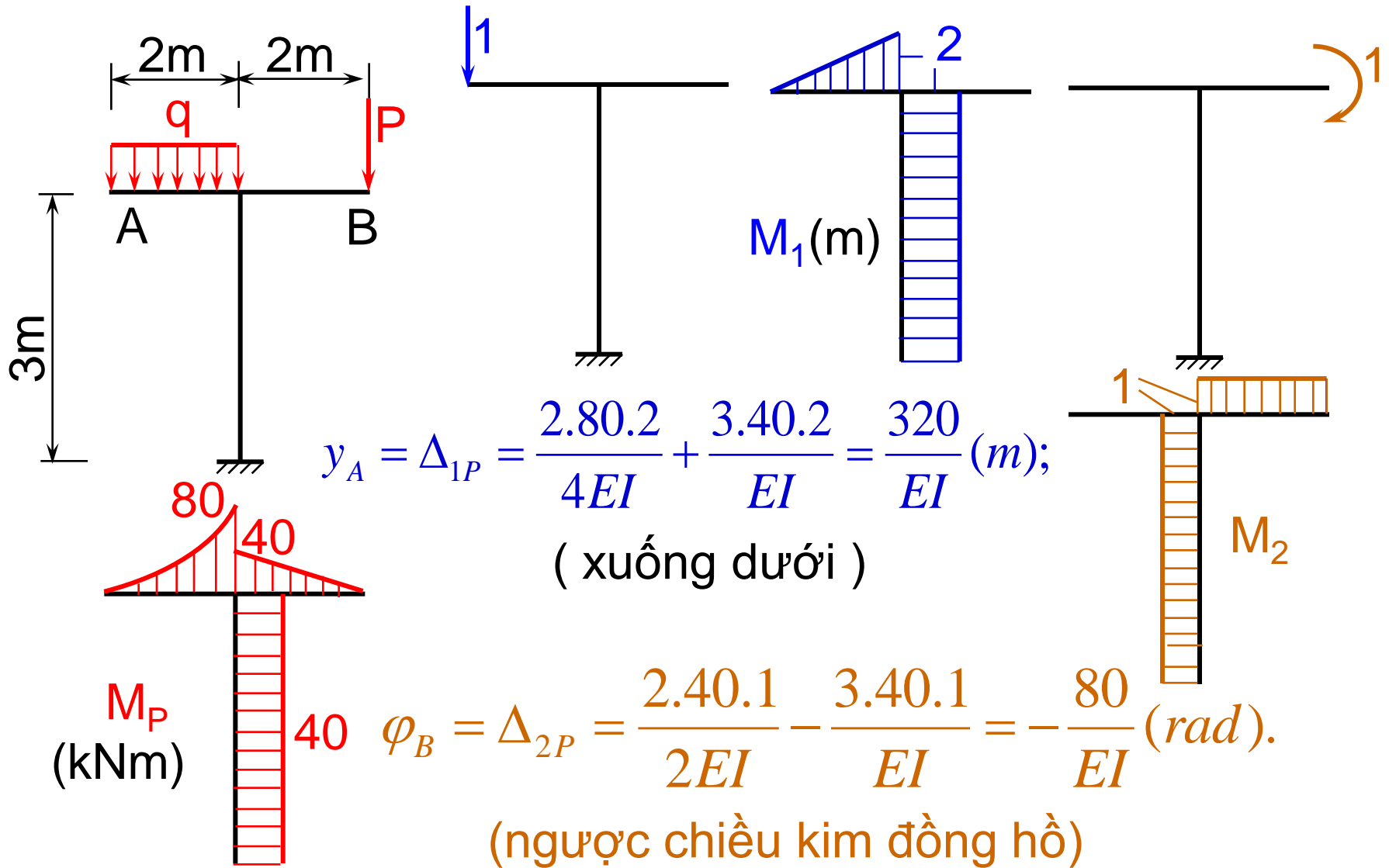
$$1,5 < x_6 < 3m; \quad I_z = 17710\text{cm}^4;$$

$$M_p = 106,7x_6 - 12(x_6 - 1,5); \quad M_i = 0,5x_6.$$

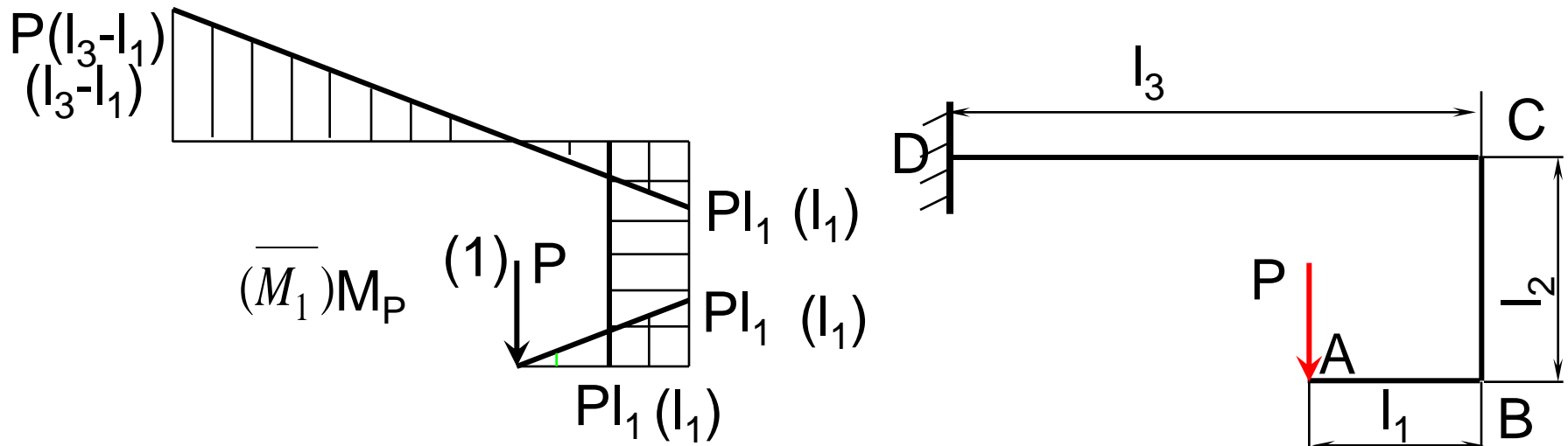


$$\begin{aligned}
\Delta_{iP} = f_d = & \int_0^{1,58} \frac{53,3x_1^2 dx_1 \cdot 10^6}{2.2 \cdot 10^4 \cdot 8950} + \int_{1,58}^2 \frac{53,3x_2^2 dx_2 \cdot 10^6}{2.2 \cdot 10^4 \cdot 17710} + \\
& \int_2^3 \frac{\left[53,3x_3 - \frac{40(x_3 - 2)^2}{2} \right] \frac{x_3}{2} dx_3 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^4 \cdot 17710} \\
& + \int_0^{0,79} \frac{106,7x_4^2 dx_4 \cdot 10^6}{2.2 \cdot 10^4 \cdot 8950} + \int_{0,79}^{1,5} \frac{106,7x_5^2 dx_5 \cdot 10^6}{2.2 \cdot 10^4 \cdot 17710} \\
& + \int_{1,5}^3 \frac{[106,7x_6 - 120(x_6 - 1,5)]x_6 dx_6 \cdot 10^6}{2.2 \cdot 10^4 \cdot 17710} = 1,54 \text{ cm.}
\end{aligned}$$

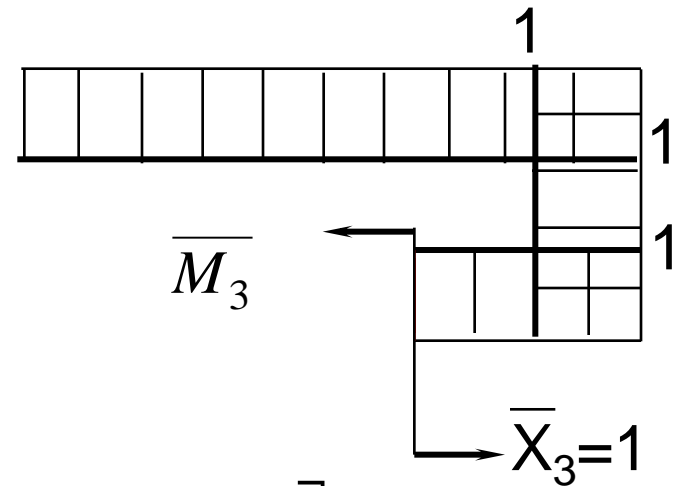
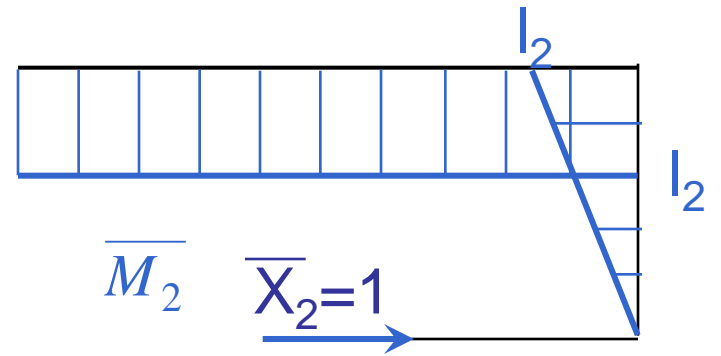
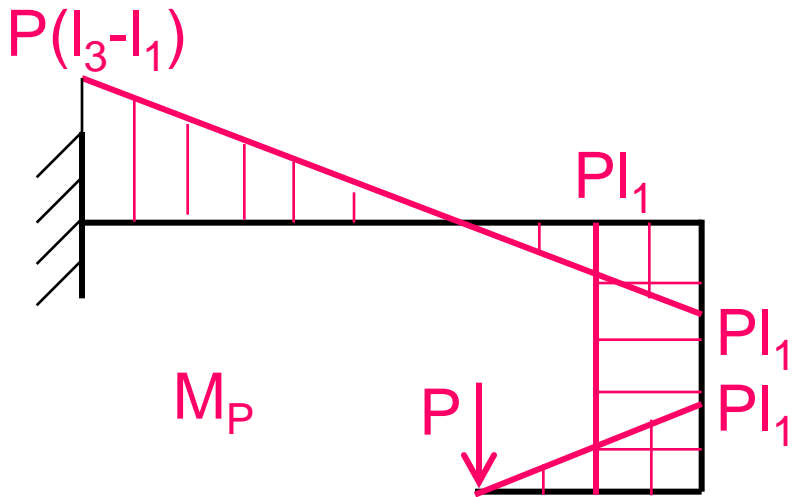
Thí dụ 8.6. Xác định chuyển vị thẳng đứng của A và góc quay của mặt cắt B biết xà và cột có cùng độ cứng uốn EI.



Bài tập số 8a. Xác định chuyển vị thẳng đứng, nằm ngang và chuyển vị góc của mặt cắt A. Các đoạn thanh có cùng mặt cắt có độ cứng uốn EI.



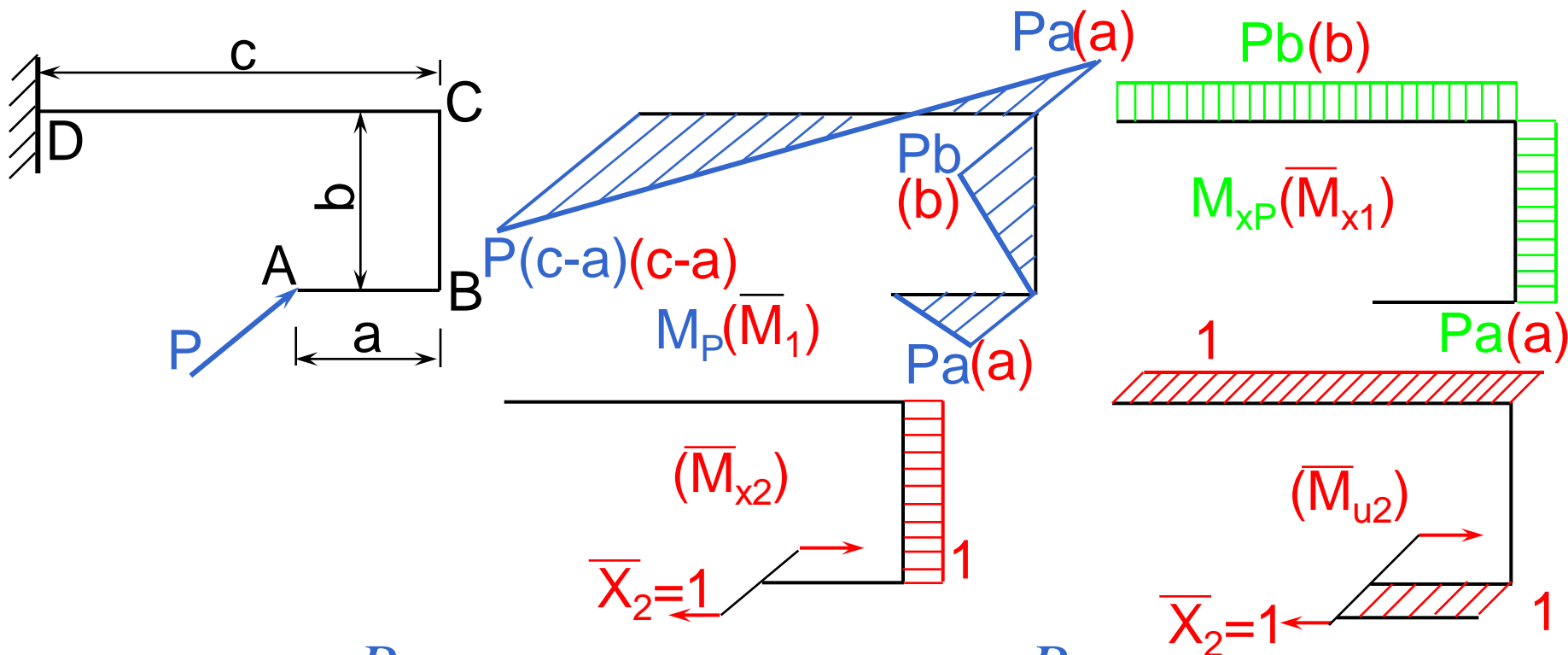
$$y_A = \frac{1}{EI} \left[2 \frac{1}{3} P l_1 \cdot l_1 \cdot l_1 + l_2 \cdot P l_1 \cdot l_1 + \frac{1}{3} P (l_3 - l_1) (l_3 - l_1) (l_3 - l_1) \right]$$



$$Z_A = \frac{P}{EI} \left[\frac{1}{2} l_2 \cdot l_2 \cdot l_1 + \frac{1}{2} l_1 \cdot l_1 \cdot l_2 - \frac{1}{2} (l_3 - l_1)^2 l_2 \right]$$

$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} P l_1 \cdot l_1 \cdot 1 + P l_1 \cdot l_2 \cdot 1 + \frac{1}{2} P l_1 \cdot l_1 \cdot 1 - \frac{1}{2} P (l_3 - l_1)^2 \cdot 1 \right]$$

BÀI SỐ 8B. Xác định chuyển vị ngang và chuyển vị góc của mặt cắt A trên khung ABCD. Khung có mặt cắt ngang hình tròn đường kính d vật liệu có modun trượt $G = 0,4E$.



$$Z_A = \frac{P}{3EI} [2a^3 + b^3 + (c-a)^3] + \frac{P}{GI_P} [a^2b + b^2c]$$

$$\varphi_A = \frac{1}{EI} \left[2 \frac{1}{2} Paa \cdot 1 - \frac{1}{2} P(c-a)(c-a) \cdot 1 \right] + \frac{Pab \cdot 1}{GI_P}$$

$$Z_A = \frac{P}{EI} \left\{ \frac{1}{3} \left[2a^3 + b^3 + (c-a)^3 \right] + \frac{1}{0,8} (a^2b + b^2c) \right\}$$

$$b = 2a ; c = 3a ; I_p = 2I ; G = 0,4E$$

$$Z_A = \frac{Pa^3}{EI} \left(6 + \frac{14}{0,8} \right) = 23,5 \frac{Pa^3}{EI}$$

$$\varphi_A = \frac{P}{EI} \left[a^2 - 2a^2 + \frac{2a^2}{0,8} \right] = \frac{1,5Pa^2}{EI}$$

Chương 9

TÍNH TOÁN HỆ SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

9.1. Khái niệm chung.

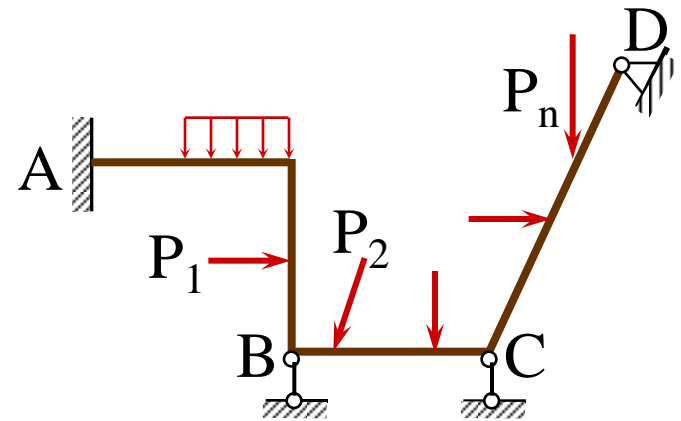
Các kết cấu hay hệ siêu tĩnh có số ẩn số lớn hơn số phương trình tĩnh học có thể lập được cho hệ đó. Có thể lập các phương trình còn thiếu để xác định số "ẩn số thừa" (so với các phương trình cân bằng tĩnh học) bằng cách lập các phương trình biến dạng hay phương trình chuyển vị.

9.2. Phương pháp lực.

Hệ này có tổng số phản lực : 7

Số phương trình tĩnh học : 3.

Số phản lực thừa : 4.



Phương pháp:

Thay thế hệ siêu tĩnh bằng một hệ tĩnh định tương đương được gọi là ***hệ cơ bản*** bằng cách tạm thời loại bỏ ***các liên kết thừa***.

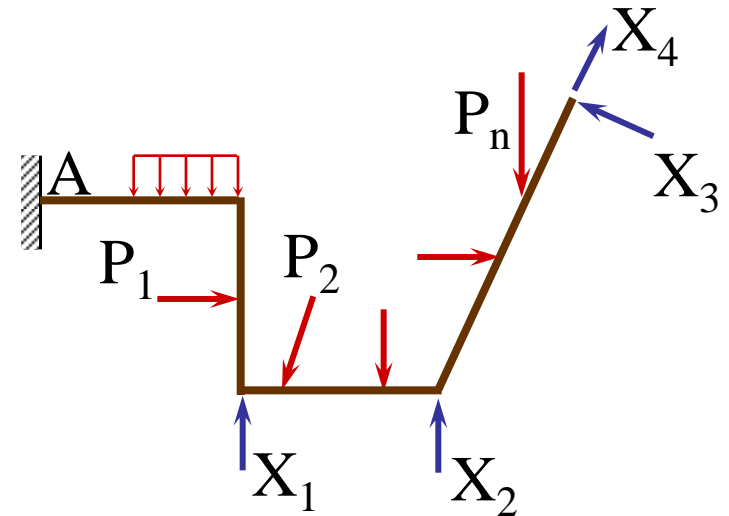
Để đảm bảo cho hệ cơ bản làm việc như hệ siêu tĩnh đã cho mỗi liên kết thừa đã bỏ đi được thay thế bằng một ***phản lực thừa tương ứng*** kèm theo điều kiện ***chuyển vị của điểm đặt lực theo phương phản lực thừa bằng không***.

Chú ý:

1. Hệ cơ bản phải là hệ tĩnh định, bất biến hình
2. Các phản lực thừa được chọn không được nằm trong số các phản lực có thể xác định ngay được bằng các phương trình cân bằng tĩnh học.

3. Số phản lực thừa phải bằng số liên kết thừa bị loại bỏ.

- Bỏ gối đỡ bản lề di động, thêm khớp bản lề vào giữa thanh là bỏ đi một liên kết;
- Bỏ khớp bản lề cố định là bỏ hai liên kết;
- Bỏ ngàm là bỏ đi ba liên kết.



Các phản lực thừa được xác định từ điều kiện

$$\Delta_i = 0.$$

Số lượng phương trình dạng này bằng số phản lực cần xác định .

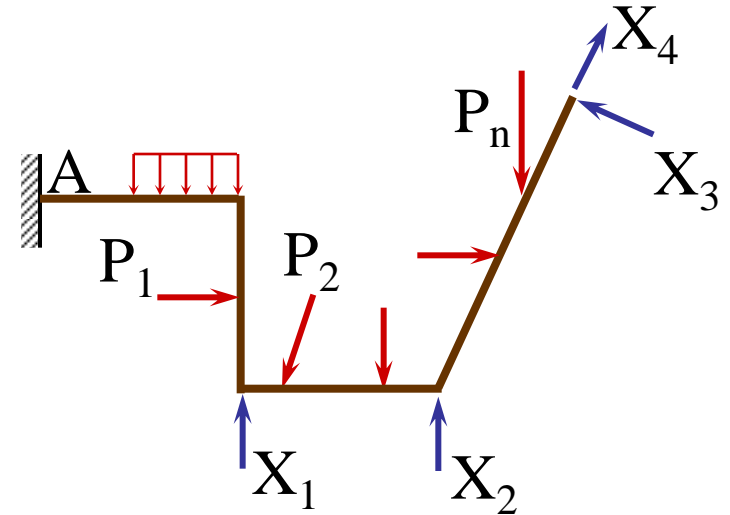
$$\Delta_i = 0.$$

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1m}X_m + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2m}X_m + \Delta_{2P} = 0;$$

.

$$\delta_{m1}X_1 + \delta_{m2}X_2 + \dots + \delta_{mm}X_m + \Delta_{mP} = 0.$$



(9. 1)

(hệ phương trình chính tắc tính toán hệ siêu tĩnh theo phương pháp lực)

Đối với các thanh chịu uốn

$$(8.4) \quad \longrightarrow \quad \Delta_{iP} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_i M_P dx}{EI}$$

$$\delta_{11} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1 dx}{EI}; \quad \delta_{12} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_2 dx}{EI}; \quad \dots$$

$$\delta_{21} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_1 dx}{EI}; \quad \delta_{22} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_2 \overline{M}_2 dx}{EI}; \quad \dots$$

$$\delta_{mm} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_m \overline{M}_m dx}{EI}; \quad \dots$$

$$\Delta_{1P} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_1 M_P dx}{EI}; \quad \dots \quad \Delta_{mP} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\overline{M}_m M_P dx}{EI}.$$

$\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_m$ -momen uốn do các lực đơn vị đặt tại các điểm tương ứng,

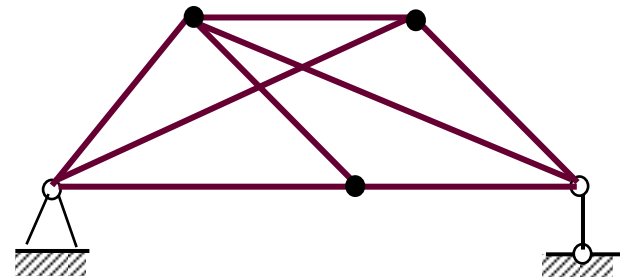
M_P -momen uốn do tải trọng gây ra.

1. $\delta_{11}, \delta_{22}, \dots, \delta_{mm}$ có giá trị dương;
2. $\delta_{ij} = \delta_{ji}$;
3. δ_{ij} (với $i \neq j$) và Δ_{iP} có giá trị âm, dương hay bằng không;

Hệ dàn:

$$\delta_{ij} = \sum_1^n \frac{\overline{N}_i \overline{N}_j l_i}{EF_i};$$
$$\Delta_{iP} = \sum_1^n \frac{\overline{N}_i \overline{N}_P l_i}{EF_i};$$

(9.3)



Trình tự giải bài toán siêu tĩnh

1. Tìm các phản lực tựa;
2. Lập hệ phương trình cân bằng tĩnh học của hệ. Xác định số phản lực thừa. Tìm các phản lực có thể xác định từ các phương trình cân bằng tĩnh học;
3. Chọn hệ cơ bản. Đặt tải trọng và các phản lực thừa lên hệ cơ bản;
4. Viết phương trình chính tắc (9. 1);
5. Xác định các biểu thức giải tích và vẽ biểu đồ nội lực trong hệ cơ bản do tải trọng gây ra;
6. Xác định biểu thức giải tích, biểu đồ nội lực do từng lực đơn vị gây ra;
7. Xác định các hệ số và số hạng tự do của hệ phương trình chính tắc bằng cách tích phân trực tiếp hoặc nhân biểu đồ;

8. Giải hệ phương trình chính tắc, tìm các giá trị của X_i

9. Xác định nội lực trong hệ siêu tĩnh theo công thức:

$$S = S_p + \sum S_i = S_p + \sum \bar{S}_i X_i \quad (9.4)$$

S - thành phần nội lực cần xác định trong hệ siêu tĩnh;

S_p - thành phần nội lực tương ứng trong hệ cơ bản do tải trọng gây ra;

S_i - thành phần nội lực tương ứng trong hệ cơ bản do X_i gây ra;

\bar{S}_i - thành phần nội lực tương ứng trong hệ cơ bản do $\bar{X}_i = 1$ gây ra.

Thí dụ với momen uốn

$$M = M_p + \sum \bar{M}_i X_i \quad (9.5)$$

Thí dụ 9.1. Vẽ biểu đồ momen uốn và lực cắt ngang của dầm

$$\delta_{11} = \frac{l \cdot l \cdot l}{3EI} = \frac{l^3}{3EI};$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{l \cdot ql^2 \cdot l}{2 \cdot 4EI}$$

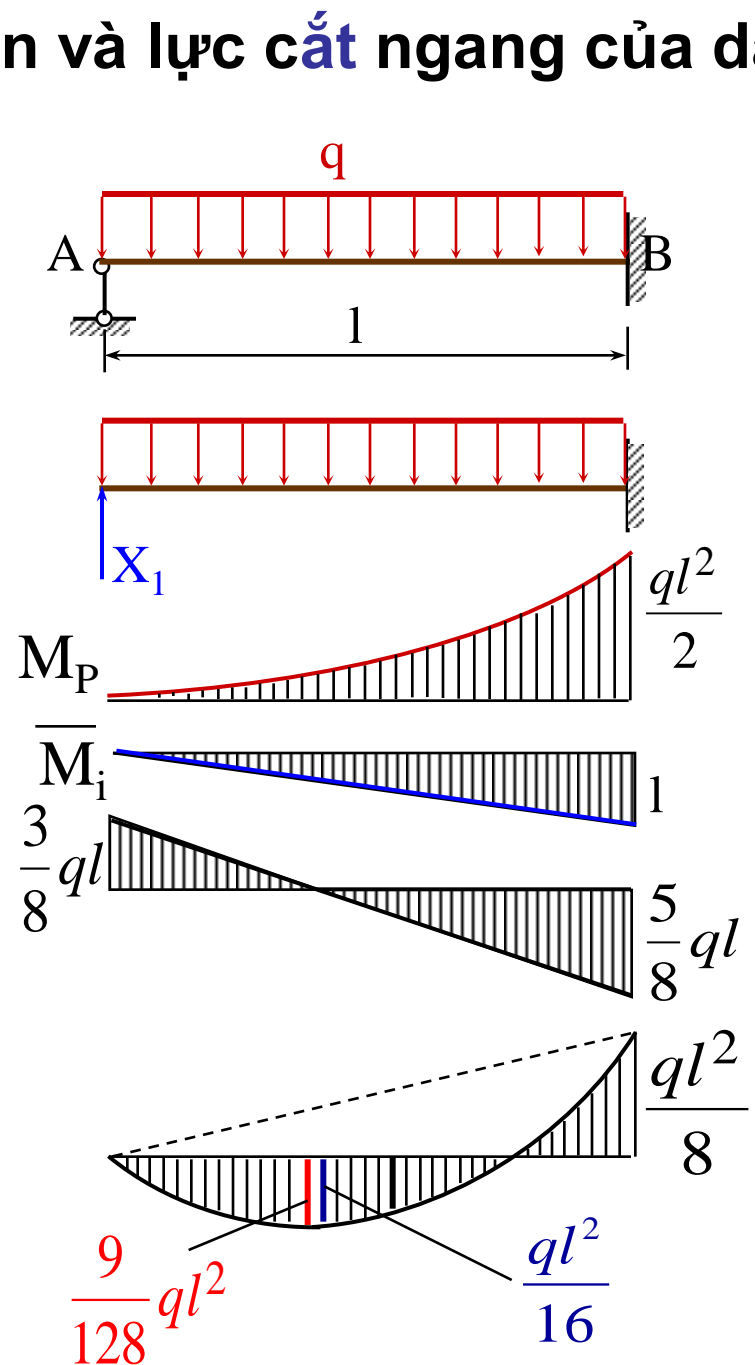
$$\Delta_{1P} = -\frac{ql^4}{8EI}.$$

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

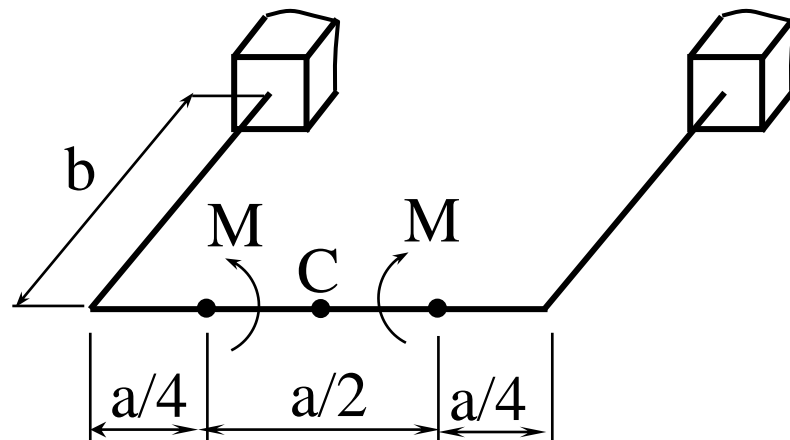
$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{3}{8}ql^2$$

$$M_{\max} = \frac{3}{8}ql \cdot \frac{3}{8}l - \frac{q}{2} \left(\frac{3}{8}l \right)^2 = \frac{9}{128}ql^2;$$

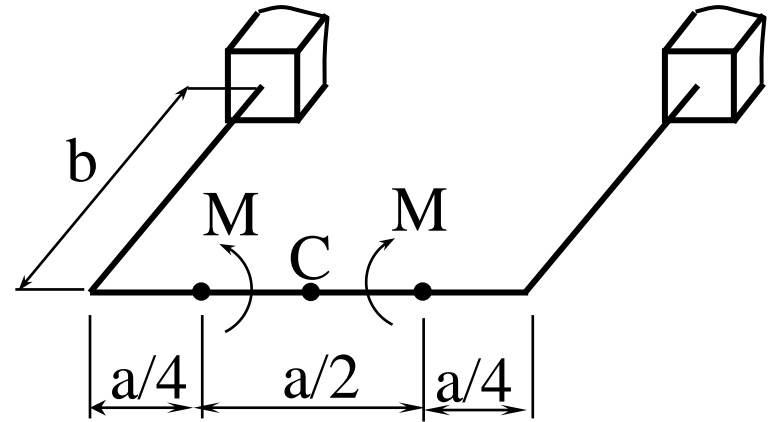
$$M_c = \frac{3}{8}ql \cdot \frac{l}{2} - q \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ql^2}{16}.$$



Thí dụ 9. 2. Cho khung phẳng có mặt cắt ngang hình tròn chịu tác dụng của tải trọng n như hình vẽ. Vật liệu làm khung có môđun trượt $G = 0,4 E$. Vẽ biểu đồ momen uốn và momen xoắn trong khung. Biết $a = b = 1,6\text{m}$.



Vì lý do khung và tải trọng có tính chất đối xứng nên nếu chọn hệ cơ bản bằng cách cắt ngang qua C (mặt phẳng đối xứng), nội lực chưa biết ở mặt cắt chỉ có một thành phần là momen uốn X_1 .



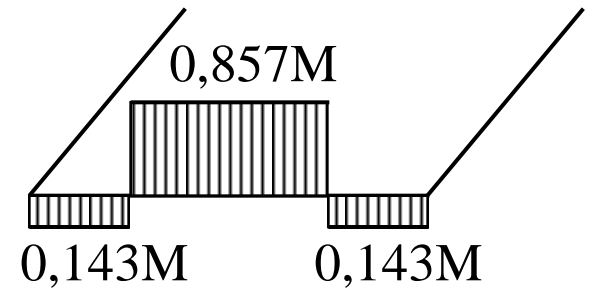
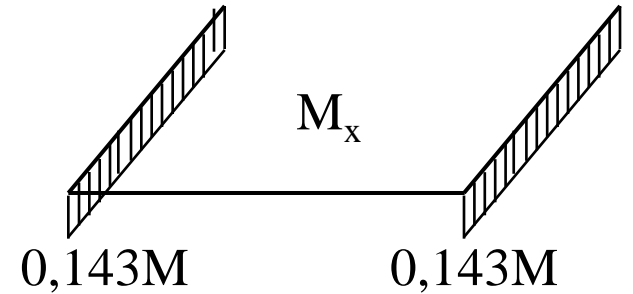
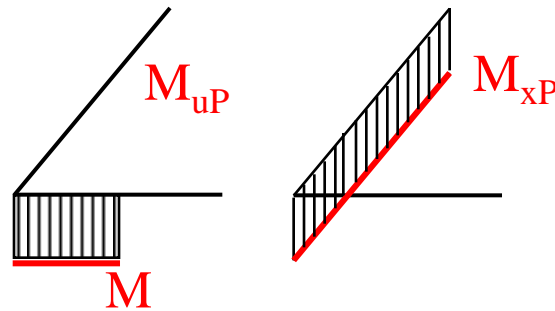
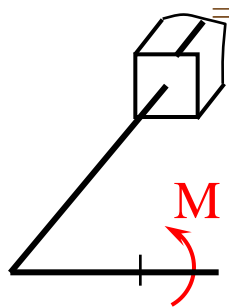
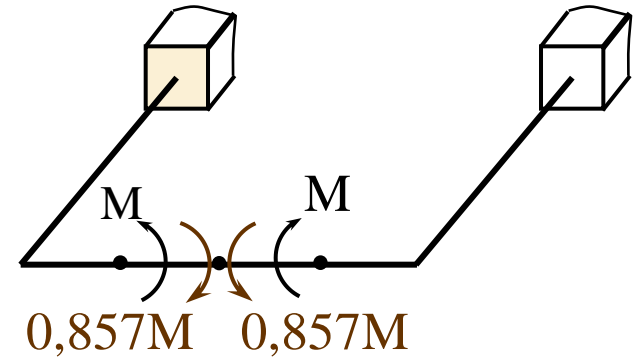
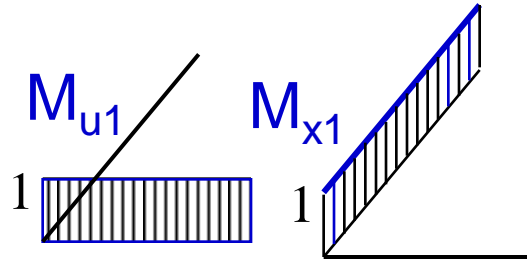
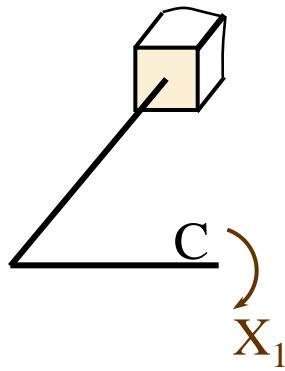
Biểu đồ momen uốn \overline{M}_{u1} và momen xoắn \overline{M}_{x1} do momen đơn vị \overline{X}_1 gây ra, biểu đồ momen uốn M_{uP} , momen xoắn M_{xP} do tải trọng (các momen uốn) gây ra.

Phương trình chính tắc:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(1 \cdot \frac{a}{2} \cdot 1 \right) + \frac{1}{GI_P} (1 \cdot b \cdot 1).$$

$$G = 0,4E; I_P = 2I; \quad GI_P = 0,8EI; \quad \frac{1}{GI_P} = \frac{1,25}{EI}.$$



$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{a}{2} + 1,25b \right)$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI} \left(-1 \cdot \frac{a}{4} \cdot 1 \right) + \frac{1}{GI_P} (-M \cdot b \cdot 1) = -\frac{M}{EI} \left(\frac{a}{4} + 1,25b \right)$$

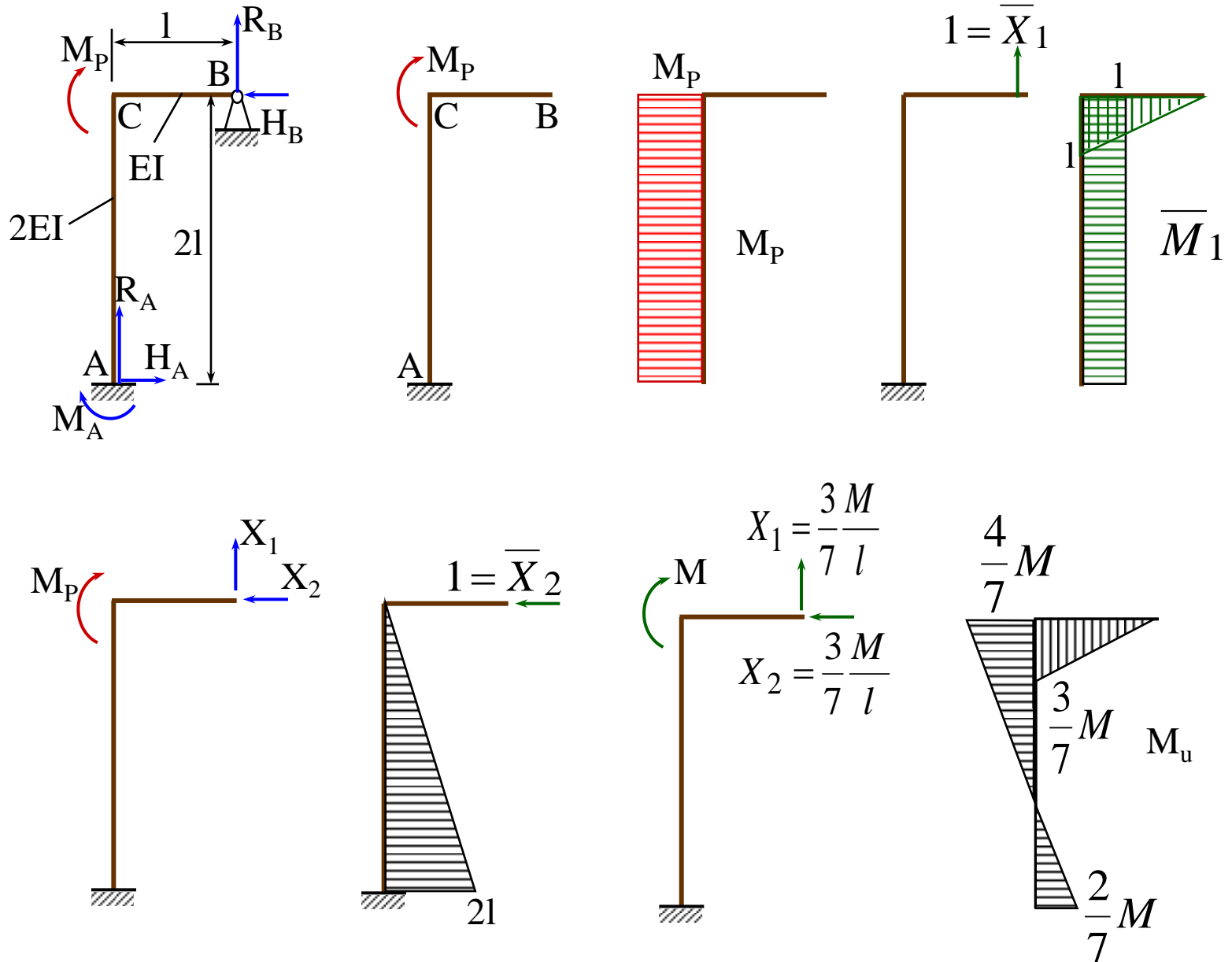
$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{M(0,25a + 1,25b) \cdot EI}{EI \cdot (0,5a + 1,25b)}$$

$$a = b = 1,6\text{m} \longrightarrow X_1 = 0,857M.$$

$$M_u = M_{uP} + \bar{M}_{u1} X_1;$$

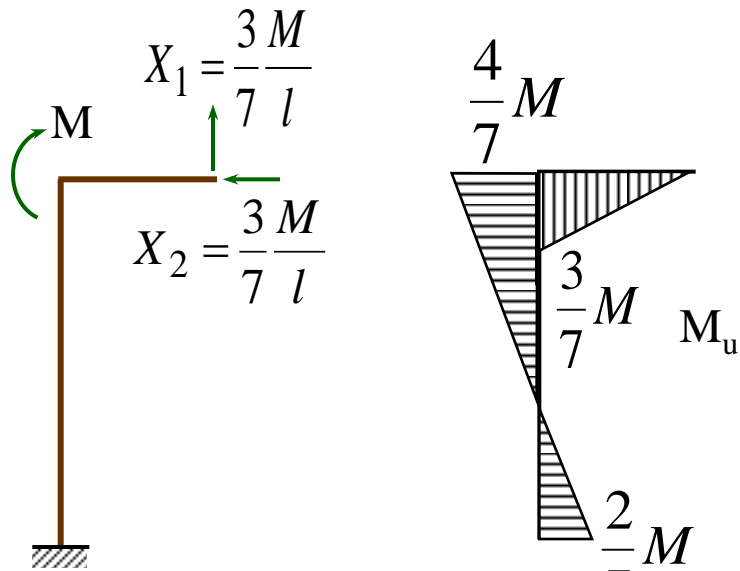
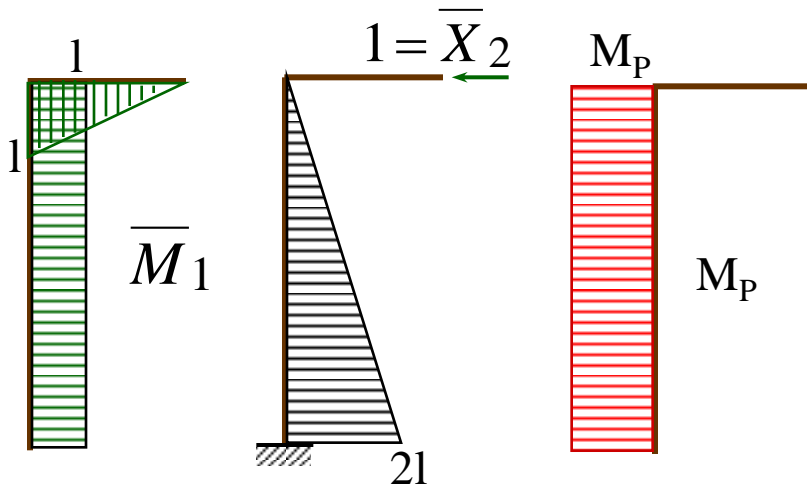
$$M_x = M_{xP} + \bar{M}_{x1} X_1.$$

Thí dụ 9. 3. Vẽ biểu đồ momen uốn của khung . Độ cứng uốn của xà ngang là EI và của cột là $2EI$.



$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$



$$M_u = M_P + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot 2l \cdot l \cdot l + \frac{1}{EI} \frac{l \cdot l \cdot l}{3} = \frac{4l^3}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot 2l \cdot l = \frac{l^3}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2l \cdot 2l \cdot 2l = \frac{4l^3}{3EI};$$

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{2EI} \cdot 2l \cdot l \cdot M = -\frac{Ml^2}{EI};$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot M \cdot 2l = -\frac{Ml^2}{EI};$$

$$\frac{4l^3}{3EI} X_1 + \frac{l^3}{EI} X_2 - \frac{Ml^2}{EI} = 0;$$

$$\frac{l^3}{EI} X_1 + \frac{4l^3}{3EI} X_2 - \frac{Ml^2}{EI} = 0.$$

$$X_1 = \frac{3M}{7l}$$

$$X_2 = \frac{3M}{7l}$$

9.3. Dầm liên tục.

Dầm liên tục là dầm thẳng, siêu tĩnh, có trên một nhịp (trên hai gối đỡ).

Xét trường hợp các nhịp của dầm có cùng độ cứng uốn EI .
Chọn hệ cơ bản bằng cách thêm khớp bản lề tại các mặt cắt nằm trên các gối đỡ trung gian.

Ảnh số trong trường hợp này là momen uốn M_i của dầm liên tục tại các mặt cắt đó.

Như vậy ta sẽ thêm vào hai mặt cắt bên trái và bên phải của khớp bản lề hai momen uốn M_i bằng nhau và ngược chiều nhau kèm theo điều kiện là góc quay tương đối giữa hai mặt cắt này bằng không.

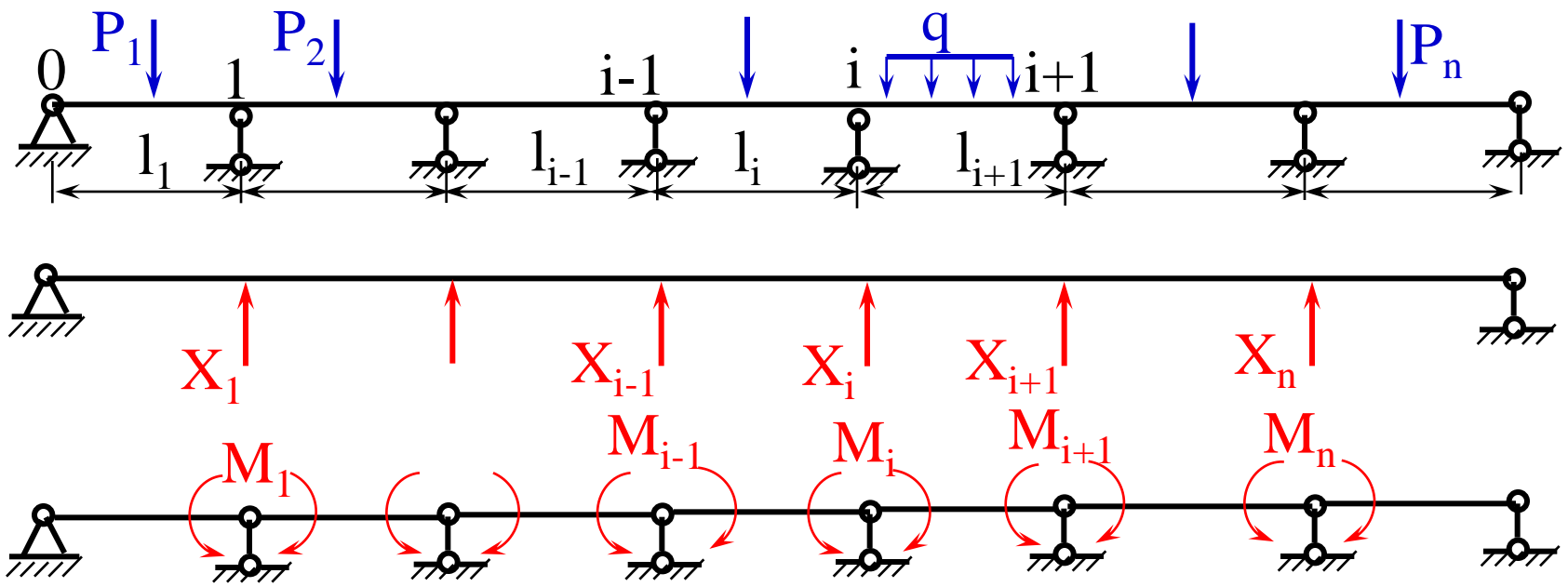
Hệ cơ bản được chọn là các dầm đơn giản tĩnh định và độc lập

$$\delta_{i(i-1)}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{i(i+1)}M_{i+1} + \Delta_{iP} = 0. \quad (9.6)$$

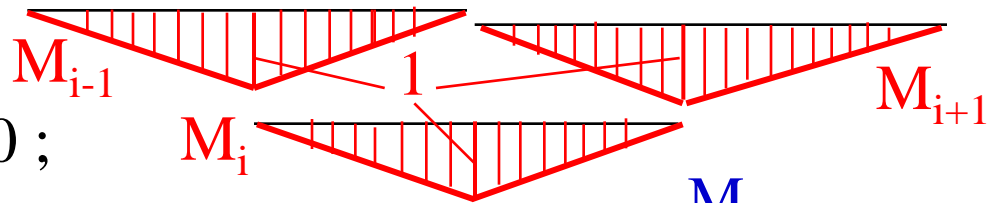
$\delta_{i(i-1)}, \delta_{ii}, \delta_{i(i+1)}, \Delta_{iP}$ - góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt ở hai bên gối tựa thứ i lần lượt do các momen đơn vị $\overline{M}_{i-1}, \overline{M}_i, \overline{M}_{i+1}$ và tải trọng gây ra.

ω_i, ω_{i+1} - diện tích của các biểu đồ M_p trên nhịp thứ i và thứ $i+1$ với các trọng tâm lần lượt là C_i và C_{i+1} ;

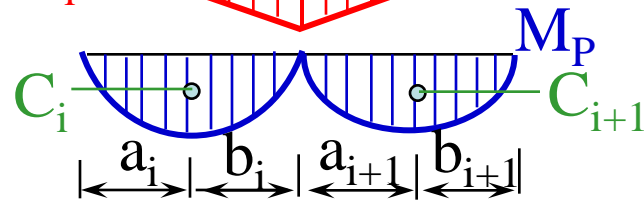
a_i, b_i - khoảng cách từ C_i đến gối tựa bên trái và gối tựa bên phải ;



$$\delta_{i(i-1)}M_{i-1} + \delta_{ii}M_i + \delta_{i(i+1)}M_{i+1} + \Delta_{iP} = 0;$$



$$\delta_{i(i-1)} = \frac{1.1.l_i}{6EI};$$



$$\delta_{i,i} = \frac{l_i + l_{i+1}}{3EI}; \delta_{i(i+1)} = \frac{1.1.l_{i+1}}{6EI}; \Delta_{iP} = \frac{1}{EI} \left(\omega_i \frac{a_i}{l_i} + \omega_{i+1} \frac{b_{i+1}}{l_{i+1}} \right).$$

$$l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})M_i + l_{i+1}M_{i+1} + 6 \left(\omega_i \frac{a_i}{l_i} + \omega_{i+1} \frac{b_{i+1}}{l_{i+1}} \right) = 0 \quad (9.7)$$

Thí dụ 9. 4. Vẽ biểu đồ momen uốn trong dầm liên tục

Dầm đã cho có một đầu ngàm bên trái được thay thế bằng dầm liên tục toàn khớp bản lề với điều kiện chiều dài $l_1 \rightarrow 0$.

$$l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 +$$

$$+ 6 \left(\omega_1 \frac{a_1}{l_1} + \omega_2 \frac{b_2}{l_2} \right) = 0;$$

$$l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3 M_3 +$$

$$+ 6 \left(\omega_2 \frac{a_2}{l_2} + \omega_3 \frac{b_3}{l_3} \right) = 0$$

$$l_1 = 0; l_2 = 2a; l_3 = 4a; M_0 = 0;$$

$$M_3 = 0; \omega_1 = 0; \omega_2 = qa^2;$$

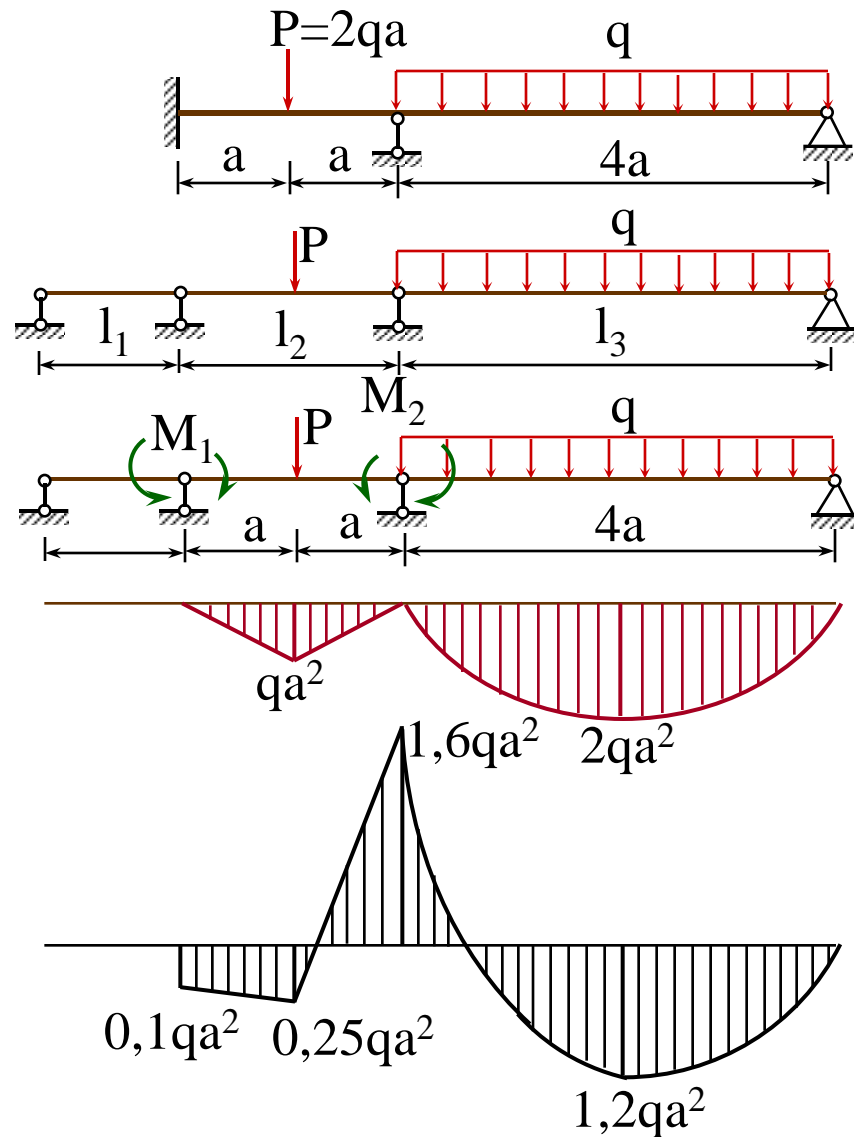
$$\omega_3 = 16qa^2; a_1 = b_1 = 0,5l_1 = 0;$$

$$a_2 = b_2 = 0,5l_2; a_3 = b_3 = 0,5l_3.$$

$$2M_1 + 2M_2 + 3qa^2 = 0;$$

$$2M_1 + 12M_2 + 19qa^2 = 0. \rightarrow$$

$$M_1 = 0,1qa^2; M_2 = -1,6qa^2.$$



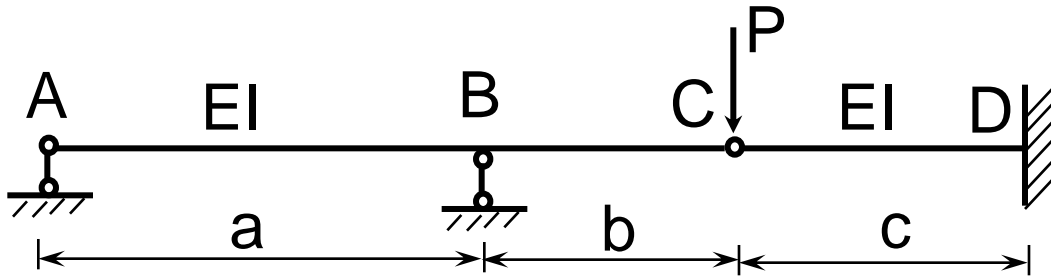
BÀI TẬP 9B

$$P = P_1 + P_2$$

$$y_{C1} = y_{C2}$$

Vẽ biểu đồ momen uốn, xác định độ võng của điểm C.

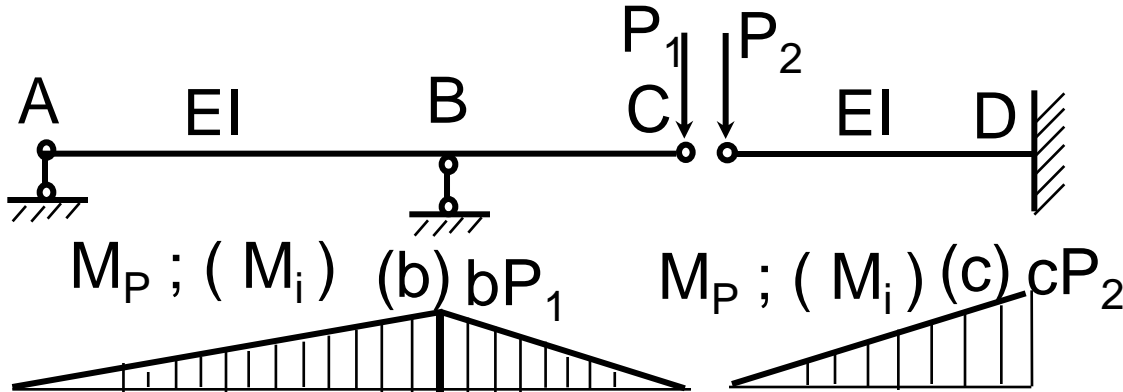
$$y_{C1} = \frac{bP_1}{EI} \frac{ab}{3} + \frac{bP_1}{EI} \frac{bb}{3} = \frac{P_1 b^2}{3EI} (a+b);$$



$$y_{C2} = \frac{cP_2}{EI} \frac{c.c}{3} = \frac{P_2 c^3}{3EI};$$

$$P_1 = P \frac{c^3}{b^2(a+b) + c^3};$$

$$P_2 = P \frac{b^2(a+b)}{b^2(a+b) + c^3};$$



$$M_B = P_1 b;$$

$$M_D = P_2 c;$$

$$y_c = \frac{P_2 c^3}{3EI}.$$

Chương 10

TÍNH TOÁN MỘT SỐ CHI TIẾT ĐẶC BIỆT

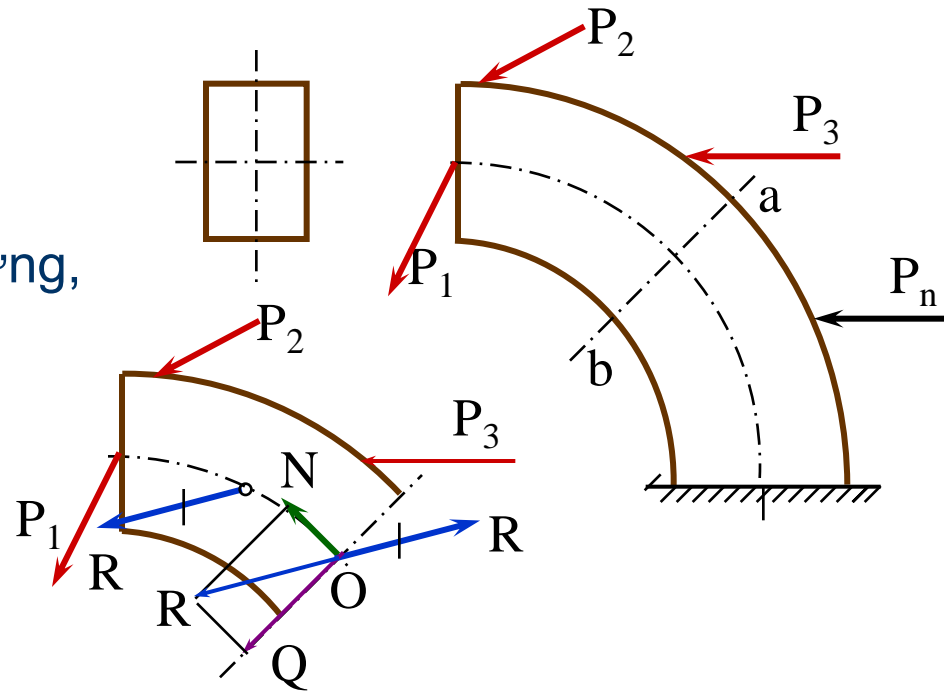
10. 1. Thanh cong phẳng.

- mặt cắt ngang có trục đối xứng;
- toàn thanh có một mặt phẳng đối xứng,
- trục thanh là đường cong nằm trong mặt phẳng đối xứng,
- tải trọng cũng nằm trong mặt phẳng đối xứng.
- sau khi thanh biến dạng trục thanh

vẫn là đường cong phẳng nằm trong mặt phẳng đối xứng

* Quy tắc về dấu của các thành phần N và Q vẫn như cũ

* Momen uốn M dương có xu hướng tăng độ cong của thanh.



10.1.1. Ứng suất do thành phần lực pháp tuyến

$$N = \int_F \sigma dF \quad (a)$$

Giả thuyết : dưới tác dụng của lực dọc N độ dẫn tương đối của các thớ dọc và ứng suất pháp phân bố đều trên mặt cắt ngang đủ chính xác để sử dụng trong thực tế kỹ thuật:

$$\sigma = \text{const.}$$

$$N = \sigma \int_F dF = \sigma F \quad ; \quad \sigma = \frac{N}{F}. \quad (b)$$

10.1.2. Ứng suất do thành phần lực tiếp tuyến Q.

Thường bỏ qua ứng suất tiếp khi tính toán thanh cong. Trong trường hợp cần thiết có thể xác định gần đúng giá trị của ứng suất tiếp bằng công thức Jurapski:

$$\tau = \frac{QS}{bI} \quad (c)$$

10. 1. 3. Ứng suất do tác dụng của momen uốn.

Các tính toán dựa trên giả thuyết mặt cắt phẳng.

$$nn_1 = y \Delta d\varphi,$$

$$\varepsilon_y = \frac{nn_1}{mn} = \frac{y\Delta d\varphi}{(r+y)d\varphi} = \frac{y}{r+y} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \quad (d)$$

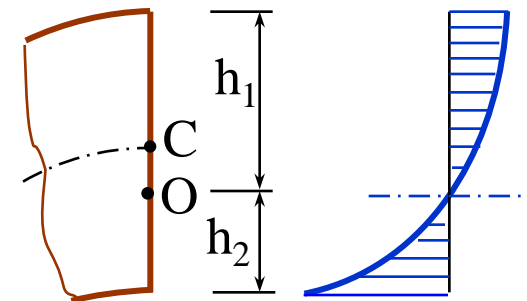
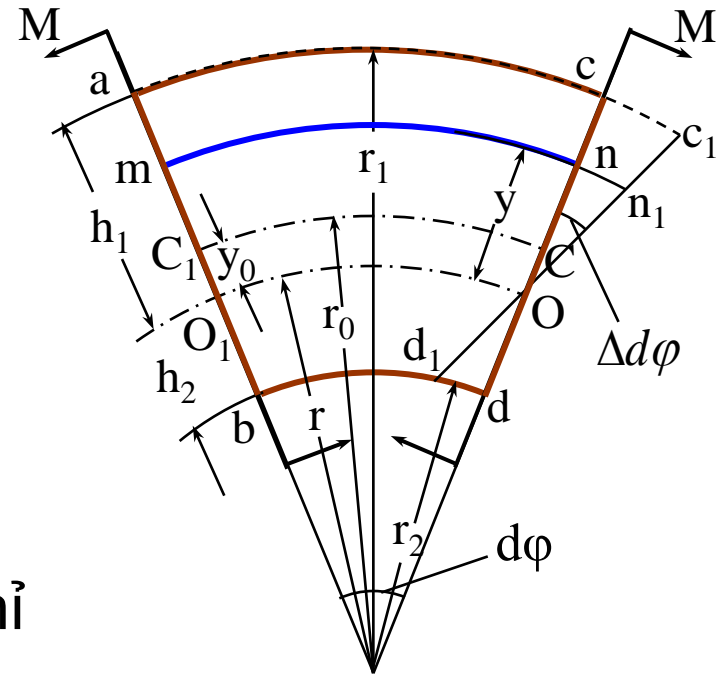
$$\sigma_y = E\varepsilon_y = E \frac{y}{r+y} \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \quad (e)$$

Ứng suất pháp do uốn thuần túy chỉ phụ thuộc vào tọa độ y .

(e) → theo chiều cao của mặt cắt ứng suất

σ_y biến đổi theo quy luật hypecbôn.

Để ứng suất ở mép trong và mép ngoài của mặt cắt có cùng giá trị tuyệt đối, mặt cắt phải có hình dáng sao cho trọng tâm nằm gần các thớ lõm hơn (mặt cắt hình thang, hình chữ T).



$$\sum X = 0; \quad \sum M_z = 0.$$

$$\int_F dN = \int_F \sigma_y dF = 0; \quad -M + \int_F \sigma_y dF \cdot y = 0.$$

$$+ (e) \rightarrow \int_F E \frac{y}{r+y} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot dF = 0.$$

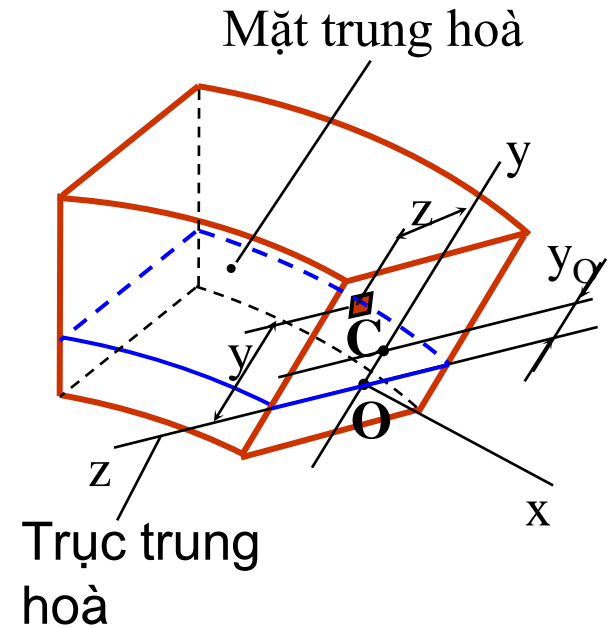
$$E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \neq 0; \quad \int_F \frac{y}{r+y} dF = 0. \quad (g)$$

→ trục trung hoà không đi qua trọng tâm của mặt cắt.

(g) → bán kính cong r của mặt trung hoà (y_0).

$$E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \frac{y^2}{r+y} dF = M$$

$$\int_F \frac{y^2}{r+y} dF = \int_F \frac{r+y-r}{r+y} y dF = \int_F y dF - r \int_F \frac{y}{r+y} dF.$$



$$(g) \rightarrow \int_F \frac{y}{r+y} dF = 0; \quad \int_F \frac{y^2}{r+y} dF = \int_F y dF = S_z = Fy_0 \quad (h)$$

$$M = E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} S_z; \quad \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{ES_z}. \quad (10.1)$$

$$(e) \rightarrow \sigma_y = \frac{M}{S_z} \cdot \frac{y}{r+y} = \frac{My}{Fy_0(r+y)} \quad (10.2)$$

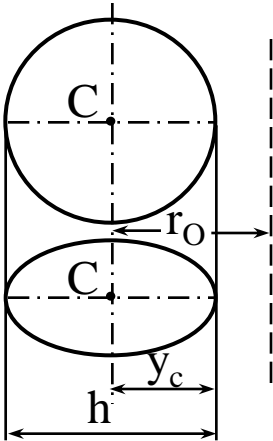
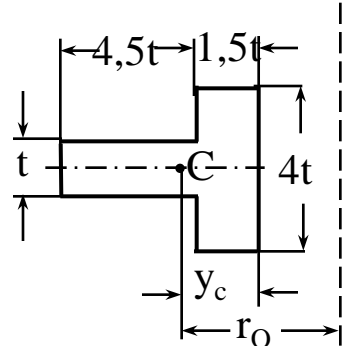
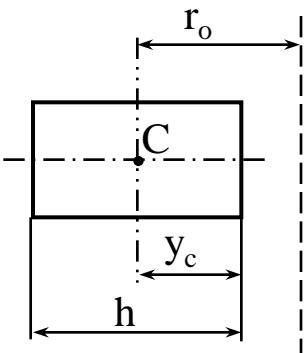
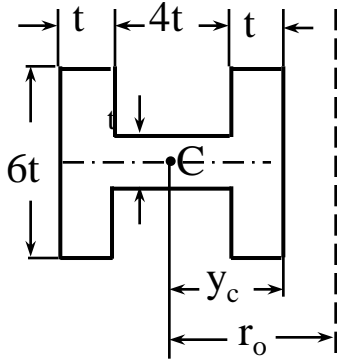
Khi thanh cong chịu tác dụng của momen uốn dương, ứng suất kéo cực đại ($y = h_1$):

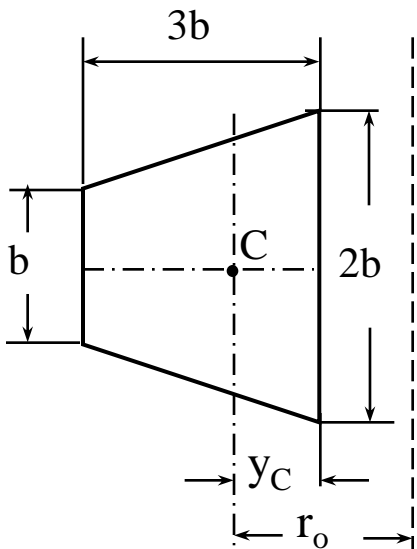
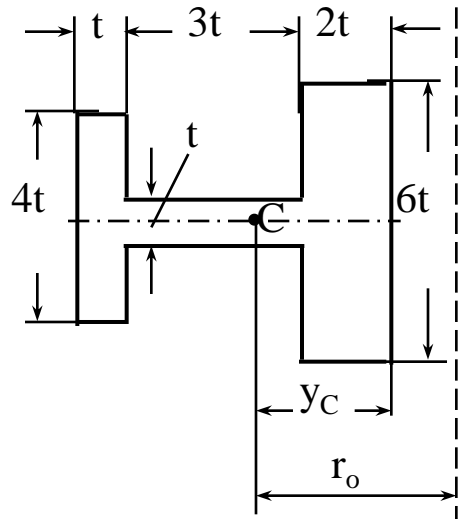
$$\sigma_1 = \frac{M}{S_z} \cdot \frac{h_1}{r+h_1} = \frac{M}{Fy_0} \cdot \frac{h_1}{r+h_1} \quad (10.3)$$

Sử dụng bảng 10.1, từ tỷ số r_0/y_c (r_0 là bán kính cong của đường tâm thanh cong; y_c là khoảng cách từ mặt trong của thanh cong đến trọng tâm mặt cắt) chọn giá trị k theo bảng

$$\rightarrow y_0 = kr_0.$$

Bảng 1

| Mặt cắt | $\frac{r_o}{y_c}$ | $k = \frac{y_o}{r_o}$ | Mặt cắt | $\frac{r_o}{y_c}$ | $k = \frac{y_o}{r_o}$ |
|--|-------------------|-----------------------|--|-------------------|-----------------------|
|  | 1,2 | 0,224 |  | 1,2 | 0,418 |
| | 1,4 | 0,151 | | 1,4 | 0,299 |
| | 1,6 | 0,100 | | 1,6 | 0,229 |
| | 1,6 | 0,084 | | 1,6 | 0,183 |
| | 2,0 | 0,069 | | 2,0 | 0,149 |
| | 3,0 | 0,030 | | 3,0 | 0,069 |
| | 4,0 | 0,016 | | 4,0 | 0,040 |
| | 6,0 | 0,0070 | | 6,0 | 0,018 |
| | 8,0 | 0,0039 | | 8,0 | 0,010 |
| | 10,0 | 0,0025 | | 10,0 | 0,0065 |
|  | 1,2 | 0,305 |  | 1,2 | 0,453 |
| | 1,4 | 0,204 | | 1,4 | 0,319 |
| | 1,6 | 0,149 | | 1,6 | 0,236 |
| | 1,6 | 0,112 | | 1,6 | 0,183 |
| | 2,0 | 0,090 | | 2,0 | 0,147 |
| | 3,0 | 0,041 | | 3,0 | 0,067 |
| | 4,0 | 0,021 | | 4,0 | 0,036 |
| | 6,0 | 0,0093 | | 6,0 | 0,016 |
| | 8,0 | 0,0052 | | 8,0 | 0,0089 |
| | 10,0 | 0,0033 | | 10,0 | 0,0057 |

| Mặt cắt | $\frac{r_o}{y_C}$ | $k = \frac{y_o}{r_o}$ | Mặt cắt | $\frac{r_o}{y_C}$ | $k = \frac{y_o}{r_o}$ |
|--|-------------------|-----------------------|---|-------------------|-----------------------|
|  | 1,2 | 0,336 |  | 1,2 | 0,409 |
| | 1,4 | 0,229 | | 1,4 | 0,2920,22 |
| | 1,6 | 0,168 | | 1,6 | 4 |
| | 1,6 | 0,128 | | 1,6 | 0,178 |
| | 2,0 | 0,102 | | 2,0 | 0,144 |
| | 3,0 | 0,046 | | 3,0 | 0,067 |
| | 4,0 | 0,024 | | 4,0 | 0,038 |
| | 6,0 | 0,011 | | 6,0 | 0,018 |
| | 8,0 | 0,0060 | | 8,0 | 0,010 |
| | 10,0 | 0,0039 | | 10,0 | 0,0065 |

Theo bảng 10. 1 khi tăng tỷ số r_o/y_c , giá trị của k giảm,
 $r_o/y_c = 10 \rightarrow k \approx 0$; $y_o = 0 \rightarrow$ thanh cong là thanh thẳng.

10.1.4. Ứng suất cực đại. Điều kiện bền.

:

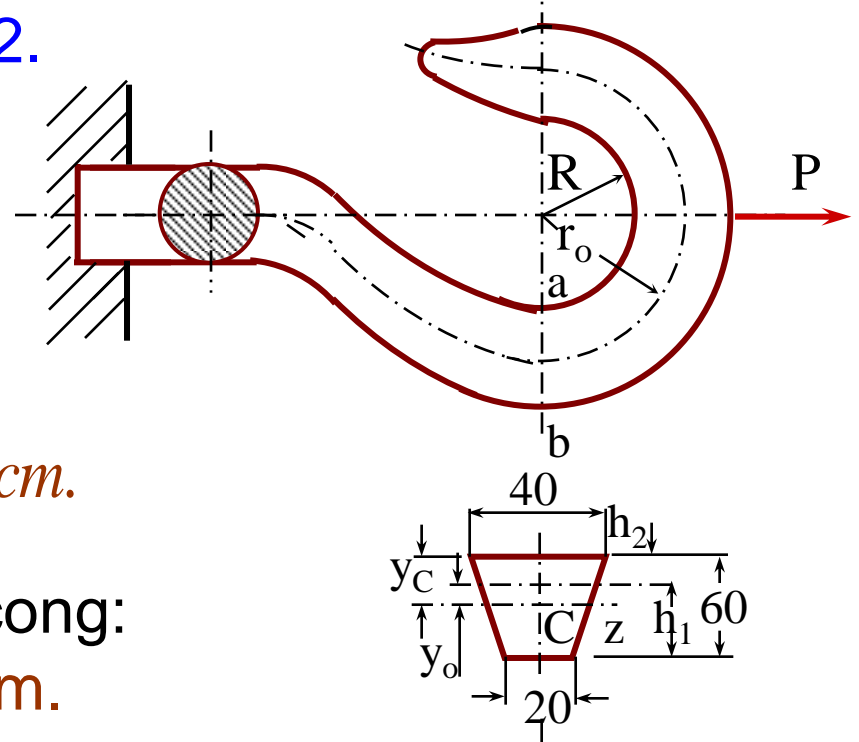
$$\pm \frac{N}{F} \pm \frac{M}{S} \cdot \frac{\pm h_{1,2}}{r \pm h_{1,2}} \leq [\sigma] \quad (10. 4)$$

Thường ứng suất do N gây ra khá nhỏ

$$\rightarrow \frac{M}{S} \frac{h_2}{r - h_2} \leq [\sigma] \quad (10. 5)$$

Thí dụ 10. 1. Kiểm tra độ bền của móc nếu $P = 30 \text{ kN}$,
 $R = 60\text{mm}$, $[\sigma] = 16,0\text{kN/cm}^2$.

Tính toán cho **mặt cắt nguy hiểm ab có dạng hình thang**



$$y_C = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b} = \frac{6}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2 + 4}{2 + 4} \cong 2,67 \text{ cm.}$$

Bán kính cong của trục thanh cong:

$$r_o = R + y_C = 6 + 2,67 = 8,67 \text{ cm.}$$

$$\frac{r_o}{y_C} = \frac{8,67}{2,67} \cong 3,25 < 10$$

Móc sẽ được tính toán theo công thức của thanh cong.

Bảng 1 $\rightarrow k \approx 0,04.$ $y_O = kr_O = 0,04 \cdot 8,67 = 0,35\text{cm};$

$h_2 = y_C - y_O = 2,67 - 0,35 = 2,32\text{cm};$ $h_1 = h - h_2 = 6 - 2,32 = 3,68\text{cm};$

$$\rightarrow F = \frac{a+b}{2} h = \frac{2+4}{2} \cdot 6 = 18\text{cm}^2; S_z = Fy_O = 18 \cdot 0,35 = 6,3\text{cm}^3;$$

$$r = r_O - y_O = 8,67 - 0,35 = 8,32\text{cm}.$$

-Lực pháp tuyến $N = P = 30\text{kN}.$

- Momen uốn âm $M = -Pr_O = -30 \cdot 8,67 = -260\text{kNcm}.$

$$\sigma_b = \frac{P}{F} + \frac{M}{S} \frac{h_1}{r + h_1} = \frac{30}{18} - \frac{260}{6,3} \cdot \frac{3,68}{8,32 + 3,68} \cong -14,3\text{kN/cm}^2.$$

$$\sigma_a = \frac{P}{F} + \frac{M}{S} \frac{-h_2}{r - h_2} = \frac{30}{18} - \frac{260}{6,3} \cdot \frac{2,32}{8,32 - 2,32} \cong +17,6\text{kN/cm}^2.$$

Vượt quá ứng suất cho phép 10%.

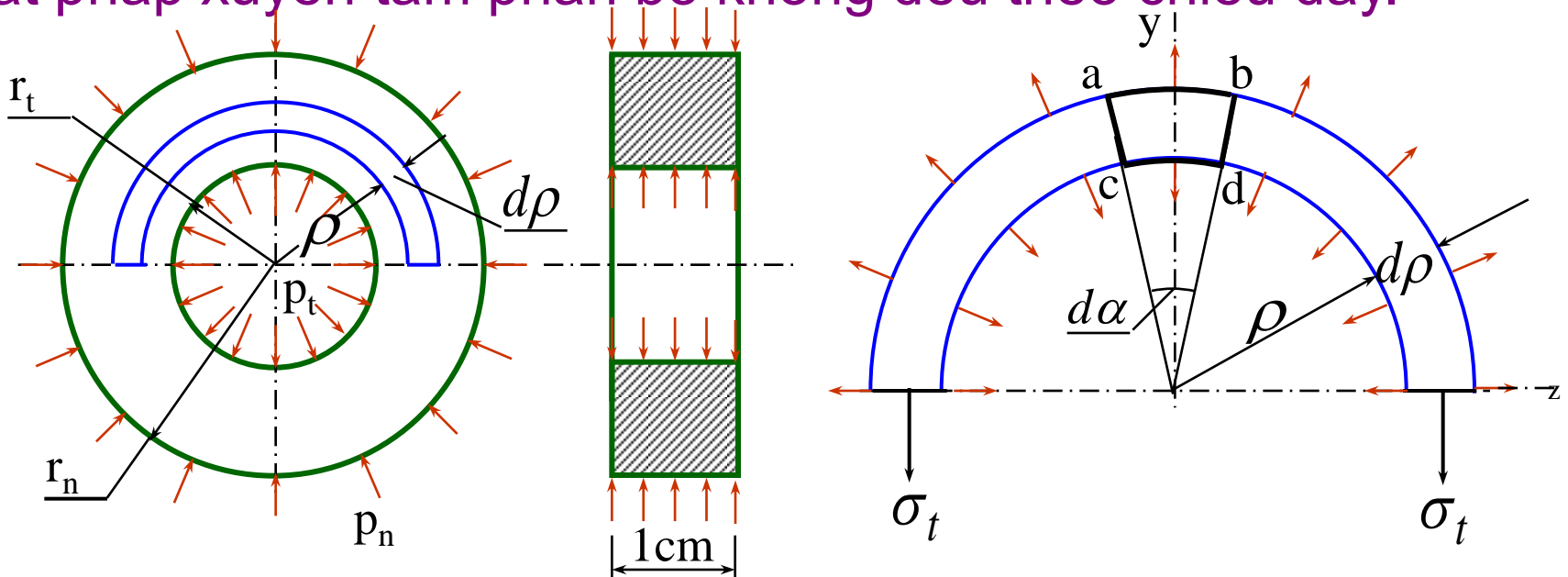
10.2. Ống thành dày.

Ống thành dày là những ống hình trụ có bề dày thành lớn hơn $1/10$ bán kính trung bình.

Xét ống thành dày không đáy (không chịu lực dọc trục) chịu áp suất bên trong và bên ngoài p_t và p_n .

- Chỉ cần xem xét một đoạn ống có chiều dài một đơn vị (1cm).
- Trên mặt phần tử ống không có ứng suất tiếp chỉ có ứng suất pháp.

Áp lực giữa các lớp thớ có ý nghĩa rất quan trọng \rightarrow ứng suất pháp xuyên tâm phân bố không đều theo chiều dày.



$$-\sigma_t d\rho \cdot 1 - \sigma_\rho \cdot \rho \cdot 1 + (\sigma_\rho + d\sigma_\rho)(\rho + d\rho) \cdot 1 = 0$$

$$\sigma_t = \sigma_\rho + \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} \cdot \rho. \quad (a)$$

Phương trình biên dạng $\varepsilon_x = \text{const}$ (b)

$$\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E}(\sigma_t + \sigma_\rho) = \text{const}. \quad (c)$$

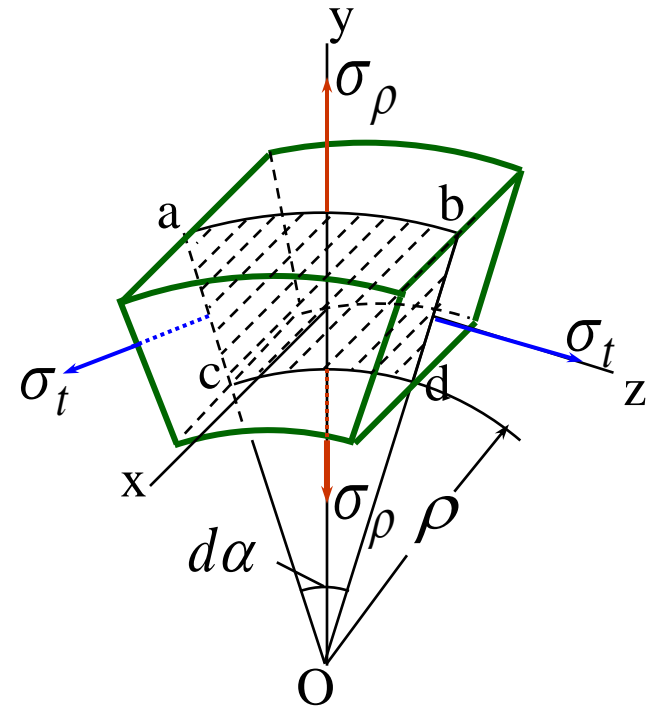
$$\sigma_t + \sigma_\rho = \text{const.} = 2A \quad (d)$$

$$(a) + (c) \rightarrow 2A = 2\sigma_\rho + \rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho}$$

$$2A\rho = \frac{d(\rho^2 \sigma_\rho)}{d\rho}; \quad 2A\rho d\rho = d(\rho^2 \sigma_\rho)$$

$$A\rho^2 = \rho^2 \sigma_\rho + B; \quad \sigma_\rho = A - \frac{B}{\rho^2} \quad (e)$$

$$(d) + (e) \rightarrow \sigma_t = A + \frac{B}{\rho} \quad (g)$$



$$\rho = r_t ; \sigma_\rho = -p_t \cdot \rho = r_n ; \sigma_\rho = -p_n ;$$

$$-p_t = A - \frac{B}{r_t^2}; \quad -p_n = A - \frac{B}{r_n^2}; \quad (\text{h})$$

$$A = \frac{p_t r_t^2 - p_n r_n^2}{r_n^2 - r_t^2}; \quad B = \frac{r_t^2 r_n^2 (p_t - p_n)}{r_n^2 - r_t^2}. \quad (\text{i})$$

+ (e), (g) \rightarrow

$$\sigma_\rho = \frac{p_t r_t^2 - p_n r_n^2}{r_n^2 - r_t^2} - \frac{r_t^2 r_n^2 (p_t - p_n)}{\rho^2 (r_n^2 - r_t^2)} \quad (10.6)$$

$$\sigma_t = \frac{p_t r_t^2 - p_n r_n^2}{r_n^2 - r_t^2} + \frac{r_t^2 r_n^2 (p_t - p_n)}{\rho^2 (r_n^2 - r_t^2)} \quad (10.7)$$

$$\varepsilon_t = \frac{(\rho + \Delta\rho)d\alpha - \rho d\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{\Delta\rho}{\rho}$$

$$\Delta\rho = \varepsilon_t \rho \quad (\text{k}); \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_\rho) \quad (1).$$

$$\Delta\rho = \frac{\rho}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_\rho) \quad (\text{m})$$

$$\Delta\rho = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{(p_t r_t^2 - p_n r_n^2)\rho}{r_n^2 - r_t^2} + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_t^2 r_n^2 (p_t - p_n)}{\rho(r_n^2 - r_t^2)} \quad (10.8)$$

$$(10.6), (10.7) \longrightarrow \sigma_t > \sigma_\rho$$

$$\rho = r_t, \quad \sigma_t = \sigma_{\max} = \frac{p_t r_t^2 + p_t r_n^2 - 2p_n r_n^2}{r_n^2 - r_t^2} \quad (10.9)$$

$$\sigma_\rho = \sigma_{\min} = -p_t. \quad (10.10)$$

Với vật liệu chịu kéo và nén như nhau điều kiện bền sẽ là:

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} \leq [\sigma]$$

$$+ (10.9) + (10.10) \longrightarrow \frac{2r_n^2 (p_t - p_n)}{r_n^2 - r_t^2} \leq [\sigma_k] \quad (10.11)$$

10.2.1. Áp suất ngoài bằng không hoặc rất nhỏ so với áp suất trong.

(10. 6), (10. 7), (10. 8) và (10. 11) với $p_n = 0 \longrightarrow$

Ứng suất xuyên tâm :
$$\sigma_\rho = \frac{p_t r_t^2}{r_n^2 - r_t^2} \left(1 - \frac{r_n^2}{\rho^2} \right) \quad (10. 12)$$

Ứng suất vòng :
$$\sigma_t = \frac{p_t r_t^2}{r_n^2 - r_t^2} \left(1 + \frac{r_n^2}{\rho^2} \right) \quad (10. 13)$$

Chuyển vị xuyên tâm của mặt trong :

$$\Delta_t = \frac{p_t r_t}{E} \left(\frac{r_n^2 + r_t^2}{r_n^2 - r_t^2} + \mu \right) \quad (10. 14)$$

Điều kiện bền:

$$\frac{2p_t r_n^2}{r_n^2 - r_t^2} \leq [\sigma_k] \quad (10. 15)$$

10.2.2. Áp suất trong bằng không hay rất nhỏ so với áp suất ngoài. (10. 6), (10. 7), (10. 8) và (10. 11) với $p_t = 0 \longrightarrow$

Ứng suất xuyên tâm:
$$\sigma_\rho = -\frac{p_n r_n^2}{r_n^2 - r_t^2} \left(1 - \frac{r_t^2}{\rho^2} \right) \quad (10. 16)$$

Ứng suất vòng:
$$\sigma_t = -\frac{p_n r_n^2}{r_n^2 - r_t^2} \left(1 + \frac{r_t^2}{\rho^2} \right) \quad (10. 17)$$

Chuyển vị xuyên tâm của mặt ngoài :
$$\Delta_n = -\frac{p_n r_n}{E} \left(\frac{r_n^2 + r_t^2}{r_n^2 - r_t^2} - \mu \right) \quad (10. 18)$$

Ứng suất nén có giá trị tuyệt đối lớn nhất ở mặt trong là ứng suất vòng σ_t tính theo (10. 17) với $\rho = r_t$

$$\sigma_t = \sigma_{\min} = -\frac{2p_n r_n^2}{r_n^2 - r_t^2}.$$

Áp suất ở mặt trong bằng không $\sigma_\rho = \sigma_{\max} = 0$

$$\frac{2p_n r_n^2}{r_n^2 - r_t^2} \leq [\sigma_k] \quad (10. 19)$$

Thí dụ 10. 2. Xác định ứng suất cực đại khi lắp ráp một ống thép lên trục thép khi đường kính trong của ống nhỏ hơn đường kính ngoài của trục một khoảng $\Delta = 0,05\text{mm}$. Kích thước của ống và trục cho trên hình . Vật liệu làm ống và trục có môđun đàn hồi $E = 2,1.10^4\text{kN/cm}^2$, hệ số Poatxông bằng 0,3.

$$(10.13) \longrightarrow \rho = r_t \text{ và } p_t = p.$$

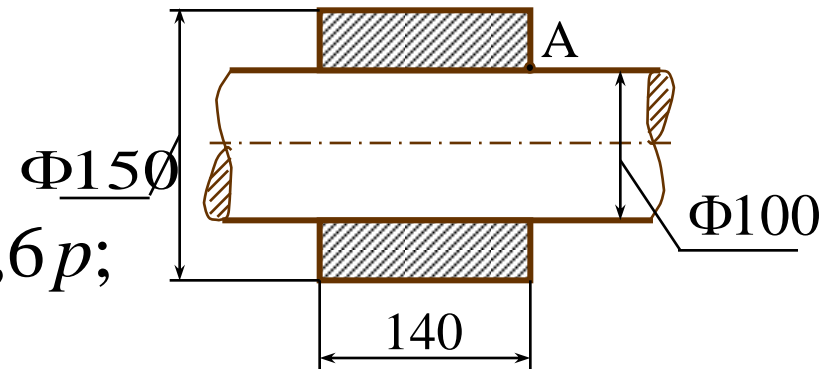
$$\sigma_t = \sigma = \frac{p5^2}{7,5^2 - 5^2} \left(1 + \frac{7,5^2}{5^2} \right) \approx 2,6p;$$

$$\delta = \frac{\Delta}{2} = |\Delta_1| + |\Delta_2| = 0,0025;$$

Δ_1 - chuyển vị xuyên tâm của mặt ngoài trục;

Δ_2 - chuyển vị xuyên tâm của mặt trong ống.

$$\text{Với trục (10.18)} \longrightarrow p_n = p, r_n = 5\text{cm}, r_t = 0$$



$$\Delta_1 = \frac{p \cdot 5}{2,1 \cdot 10^4} \left(\frac{5^2}{5^2} - 0,3 \right) = \frac{3,5 p}{2,1 \cdot 10^4} \text{ cm}$$

Với ống (10. 14) $p_t = p$; $r_t = 5 \text{ cm}$; $r_n = 7,5 \text{ cm}$. \longrightarrow

$$\Delta_2 = \frac{p \cdot 5}{2,1 \cdot 10^4} \left(\frac{7,5^2 + 5^2}{7,5^2 - 5^2} + 0,3 \right) = \frac{14,5 p}{2,1 \cdot 10^4} \text{ cm}$$

$$\frac{3,5 p}{2,1 \cdot 10^4} + \frac{14,5 p}{2,1 \cdot 10^4} = 0,0025$$

$\longrightarrow p = 2,92 \text{ kN/cm}^2$ và ứng suất

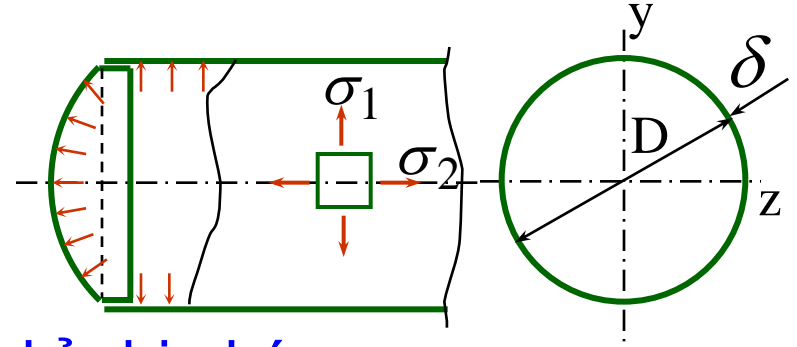
$$\sigma = 2,6 \cdot 2,92 \cong 7,6 \text{ kN/cm}^2$$

Tính đến sự tập trung ứng suất ở điểm A:
theo sổ tay kỹ thuật $\alpha_\sigma = 1,5$

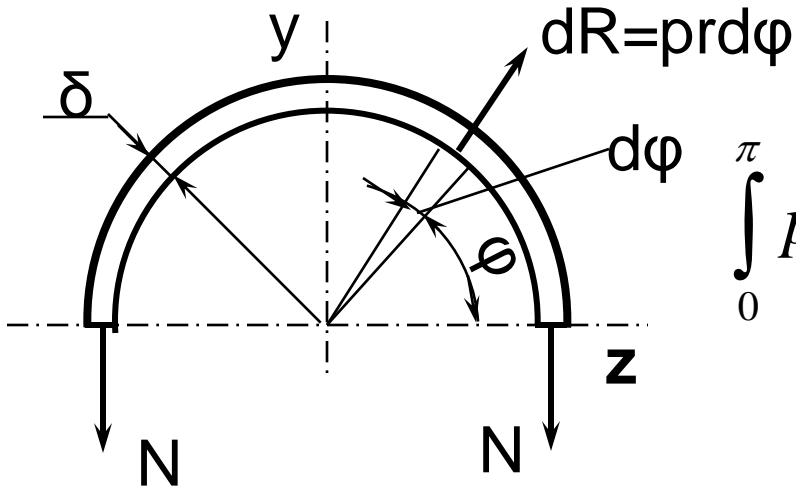
$$\sigma_{\max} = 7,6 \cdot 1,5 = 11,40 \text{ kN/cm}^2.$$

10. 3. Bình chứa thành mỏng.

- bề dày của thành bình $\delta < 1/10$ bán kính trong.
- Thành bình không chịu uốn và chỉ chịu kéo,
- Ứng suất phân bố đều theo thành bình.
- Phân tử ở trạng thái căng phẳng.



$p_t = p$ (độ chênh áp suất của áp suất trong so với áp suất ngoài trời)



$$N = \sigma_1 \cdot 1 \cdot \delta ;$$

$$\int_0^{\pi} p r d\phi \sin \phi - 2N = 0 \Rightarrow \sigma_1 = \frac{pD}{2\delta};$$

$$(10. 20)$$

$$-p \frac{\pi D^2}{4} + \sigma_2 \pi D \delta = 0; \longrightarrow \sigma_2 = \frac{pD}{4\delta}. \quad (10.21)$$

(10. 21) cũng dùng để tính ứng suất trong thành bình chứa hình cầu.

$$(10. 20), (10. 21) \longrightarrow \sigma_1, \sigma_2 > 0; \sigma_3 = \sigma_{\min} = 0$$

Điều kiện bền:

$$\sigma_{\max} - k\sigma_{\min} \leq [\sigma_k] \longrightarrow \sigma_{\max} \leq [\sigma_k] \longrightarrow \frac{pD}{2\delta} \leq [\sigma_k] \quad (10. 22)$$

Đối với bình chứa hình cầu:

$$\frac{pD}{4\delta} \leq [\sigma_k]$$

Chiều dày thực của bình chứa sẽ lớn hơn chiều dày tính từ công thức (10. 22) từ 1 đến 3 mm để phòng ngừa hao mòn hoặc sửa chữa.

Chương 11

DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

11. 1. Khái niệm.

Mô hình đơn giản của nền đàn hồi (mô hình Winkle) :

cường độ phản lực của nền tại mỗi điểm tỷ lệ với độ lún của nền tại điểm đó:

$$P = ky, \quad (11. 1)$$

P - phản lực của nền trên một đơn vị diện tích;

k - hệ số nền được xác định bằng thực nghiệm (bảng 11. 1).

Thứ nguyên của hệ số **k** là **[lực/(chiều dài)³]**, ví dụ MN/m³.

y - độ lún của đất dưới dầm.

Bảng 11. 1

| Loại nền | Tên đất nền | Hệ số nền k (MN/m³) |
|---------------------------|---|---------------------------------------|
| Đất có độ chặt kém | Đất chảy, đất mới đắp, đất sét ướt và mềm nhão | 1 5 |
| Đất có độ chặt trung bình | Sỏi đắp nhân tạo, đất sét ẩm | 5 10 |
| Đất chặt | Cát đầm chặt, sạn, sỏi, đá dăm, đất sét có độ ẩm bé | 50 100 |
| Đất rất chặt | Đất sét pha cát đầm kỹ, đất sét cứng | 100 200 |
| Nền cứng | Đá mềm có vết nứt, đá vôi, đá sa thạch | 200 1000 |

11.2. Phương trình vi phân độ võng của dầm trên nền Wincle

Phản lực phân bố dọc theo chiều dài với cường độ

$$q_1 = bky = Ky. \quad (11.2)$$

($K = bk$ có thứ nguyên [lực/(chiều dài)²]).

Chọn chiều dương của trục y hướng xuống dưới, phương trình vi phân của đường đàn hồi :

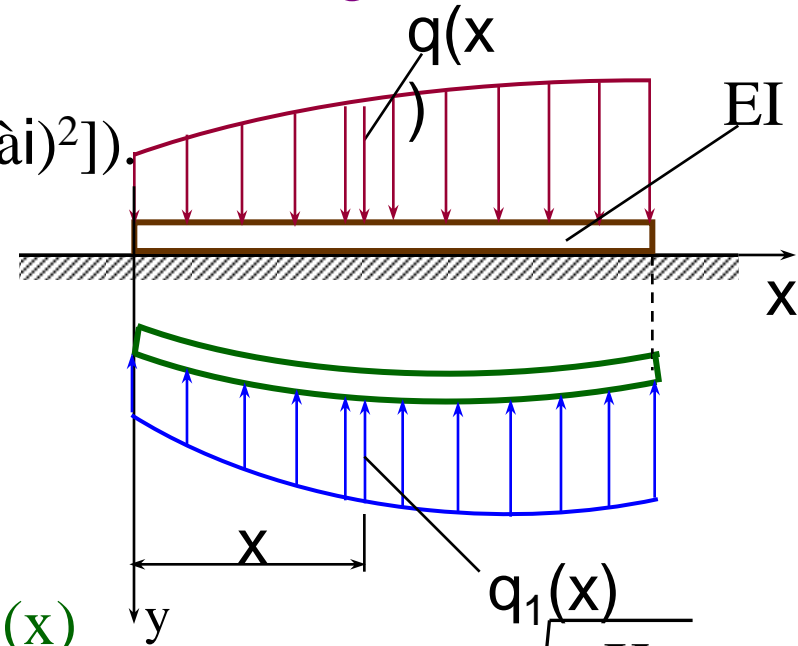
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

Dầm chịu tải trọng phân bố $q_1(x) - q(x)$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{1}{EI} (q_1 - q); \quad Ely^{IV} = q - q_1 = q - Ky; \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}};$$

α là đại lượng đặc trưng cho dầm và nền có thứ nguyên [(chiều dài)⁻¹].

$$y^{IV} + 4\alpha^4 y = \frac{q}{EI}; \quad (11.3)$$



Nghiệm của (11.3) : $y = \bar{y} + y^*$ (11.4)

\bar{y} - nghiệm tổng quát của phương trình vi phân khi vế phải bằng không;

y^* - một nghiệm riêng của phương trình vi phân có vế phải.

$$\bar{y} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x) \quad (11.5)$$

Trường hợp $q = ax + b$:

$$y^* = \frac{ax + b}{4\alpha^4 EI} = \frac{q}{K} \quad (11.6)$$

Nghiệm của phương trình (11.3) sẽ là:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x) + \frac{q}{K}. \quad (11.7)$$

Các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 được **xác định từ điều kiện biên.**

11.3. Dầm dài vô hạn chịu lực tập trung P. Chọn $y^* = 0$, →

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x}(C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x)$$

Ở xa vô cực ($x = \infty$): $y = 0$; $C_1 = C_2 = 0$

$$y = e^{-\alpha x}(C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x). \quad (11.8a)$$

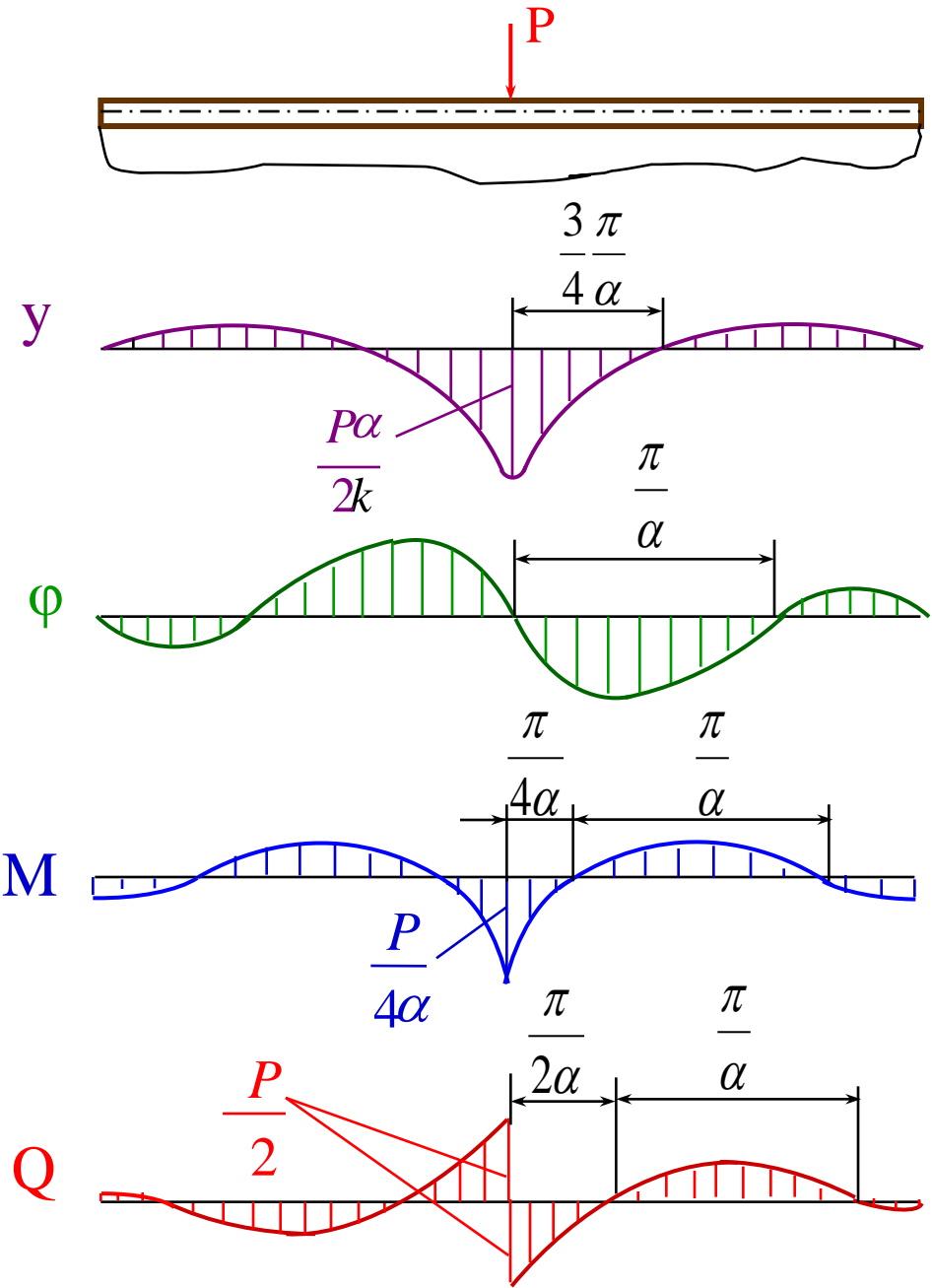
$$\varphi = y' = -\alpha e^{-\alpha x}[(C_3 - C_4) \cos \alpha x + (C_3 + C_4) \sin \alpha x] \quad (11.8b)$$

$$M = -EIy'' = -2\alpha^2 E I e^{-\alpha x}(C_3 \sin \alpha x - C_4 \cos \alpha x); \quad (11.8c)$$

$$Q = -EIy''' = -2\alpha^3 E I e^{-\alpha x}[(C_3 + C_4) \cos \alpha x + (C_4 - C_3) \sin \alpha x]. \quad (11.8d)$$

$$y' = \varphi(0) = 0. \quad (11.8e)$$

Lực cắt là hàm phản đối xứng và có bước nhảy bằng lực P ở gốc tọa độ ($x = 0$). Lực cắt trên hai mặt cắt ở hai bên và cách đều gốc tọa độ có cùng trị số và ngược dấu.



$$Q(0) = -\frac{P}{2} \quad (11.8g)$$

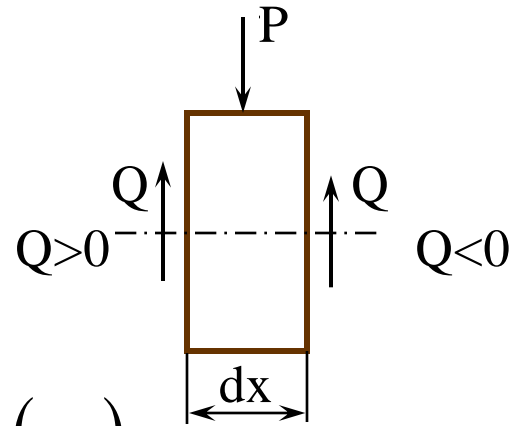
(11.8 b,d e,g) \rightarrow

$$C_3 - C_4 = 0 ; \quad C_3 + C_4 = \frac{P}{4\alpha^3 EI} .$$

$$\rightarrow C_3 = C_4 = \frac{P}{8\alpha^3 EI} = \frac{\alpha P}{2K} .$$

+(11.8a,b,c,d) \rightarrow

$$y = \frac{\alpha P}{2K} \eta_1(\alpha x); \quad \varphi = -\frac{\alpha^2 P}{K} \eta_4(\alpha x).$$



(11.9)

$$M = \frac{P}{4\alpha} \eta_2(\alpha x); \quad Q = \frac{P}{2} \eta_3(\alpha x)$$

$$\eta_1(\alpha x) = e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x)$$

$$\eta_2(\alpha x) = e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x);$$

$$\eta_3(\alpha x) = e^{-\alpha x} \cos \alpha x;$$

$$\eta_4(\alpha x) = e^{-\alpha x} \sin \alpha x.$$

(11.10)

Giá trị của các hàm số này được cho sẵn trong bảng phụ lục II.

Các biểu đồ độ võng, góc xoay, momen uốn, lực cắt là các hàm tuần hoàn chu kỳ và có biên độ tắt dần. Tại gốc tọa độ :

$$y_{\max} = \frac{P\alpha}{2K}$$

Sau một chu kỳ tại hoành độ $x = \frac{2\pi}{\alpha}$

$$y\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) = \frac{\alpha P}{2K} \eta_1(2\pi) = \frac{\alpha P}{2K} \cdot 0,00187$$

(khoảng 0,2% độ võng cực đại, thực tế có thể coi bằng không).

-khoảng cách từ điểm đặt lực đến hai đầu mút $> 2\pi / \alpha$: dầm dài vô hạn;

-khoảng cách này $< 2\pi / \alpha$: dầm có chiều dài hữu hạn.

Dựa vào định luật tác dụng độc lập của các lực ta có thể mở rộng ứng dụng công thức (11.9) cho các trường hợp chịu lực khác.

Xét dầm dài vô hạn chịu tải trọng phân bố đều q trên chiều dài l .

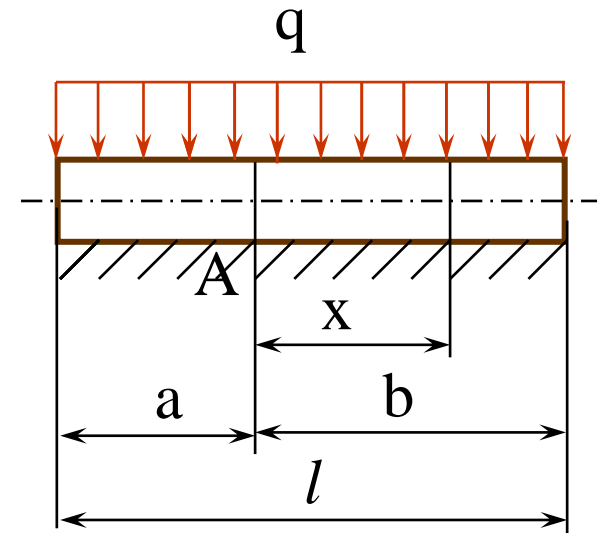
Độ võng tại mặt cắt A nằm trong đoạn đặt tải

$$y = \int_0^a \frac{q dx}{2K} \alpha \eta_1(\alpha x) + \int_0^b \frac{q dx}{2K} \alpha \eta_1(\alpha x)$$

$$y = \int_0^a \frac{q \alpha}{2K} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) dx +$$

$$\int_0^b \frac{q \alpha}{2K} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x) dx =$$

$$\dot{y} = \frac{q}{2K} \left[2 - e^{-\alpha a} \cos \alpha a - e^{-\alpha b} \cos \alpha b \right] \quad (11.11)$$



Khi a và b có giá trị lớn, $e^{-\alpha a}$ và $e^{-\alpha b}$ có giá trị nhỏ thì độ võng sẽ tiến tới giá trị q/K nghĩa là độ võng có giá trị bằng hằng số, dầm không bị uốn cong, momen uốn bằng không.

Nếu điểm A nằm bên ngoài đoạn đặt tải, thí dụ ở bên phải đoạn này

$$y = \int_a^b \frac{q\alpha}{2K} \cdot e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x) dx;$$

$$y = \frac{q}{2K} (e^{-\alpha b} \cos \alpha b - e^{-\alpha a} \cos \alpha a). \quad (11. 12)$$

Đối với dầm dài nửa vô hạn chọn gốc toạ độ ở O (điểm đặt tải trọng M_o và P_o).

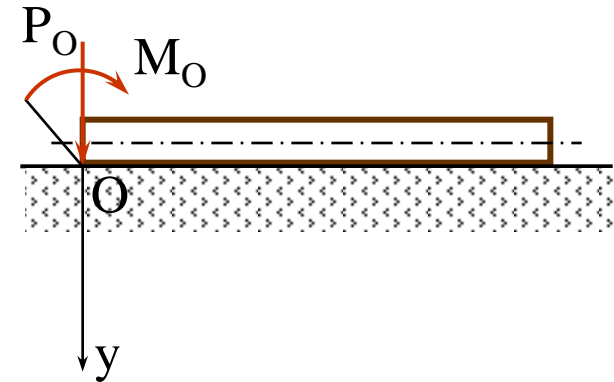
$$y = e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x).$$

C_3, C_4 xác định từ điều kiện ban đầu: $M(x=0) = M_o; Q(x=0) = -P_o$.

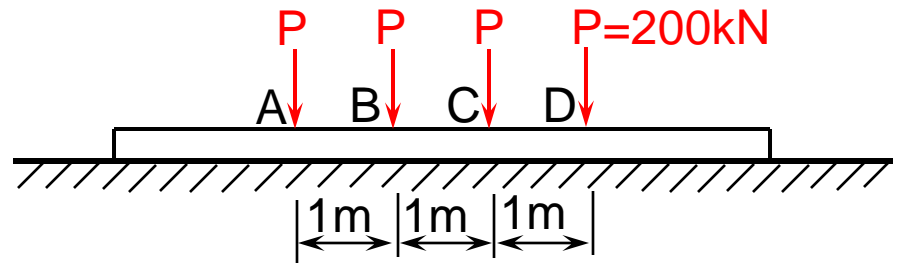
$$M_o = 2\alpha^2 EIC_4; \quad P_o = 2\alpha^3 EI(C_3 + C_4).$$

$$C_4 = \frac{2\alpha^2 M_o}{K}; \quad C_3 = \frac{2\alpha(P_o - \alpha M_o)}{K}; \quad (11. 13)$$

Thay giá trị của các hằng số này vào các phương trình (11. 7) ta sẽ có các biểu thức của độ võng y , góc xoay φ , momen uốn M và lực cắt Q .

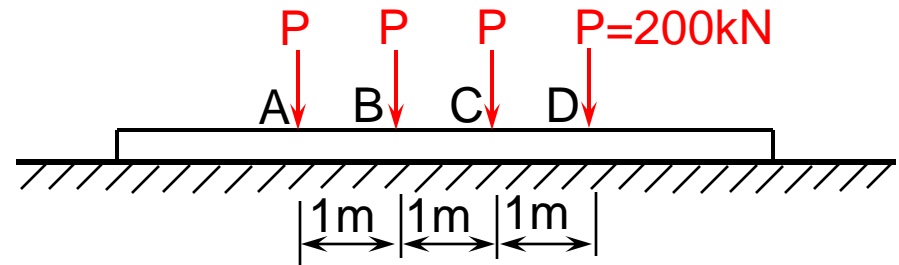


Thí dụ 11.1 Một dầm dài vô hạn có momen quán tính của mặt cắt ngang $I = 2500 \text{ cm}^4$; vật liệu làm dầm có modun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ đặt trên nền đàn hồi có hệ số $K = 30 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$. Dầm chịu tác dụng của các lực P như hình vẽ. Xác định độ võng và momen uốn ở mặt cắt B (dưới điểm đặt của lực P thứ hai).



Xác định hệ số α theo công thức:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{30 \cdot 10^6}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2500 \cdot 10^{-8}}} = 1,1 \frac{1}{m}.$$



Hoành độ của điểm B so với các điểm đặt lực A,B,C,D là:

$$x_A = 1\text{m} ; x_B = 0 ; x_C = -1\text{m} ; x_D = -2\text{m} .$$

$$y_B = \frac{P\alpha}{2K} \sum \eta_1 = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{2 \cdot 30 \cdot 10^6} (1 + 2 \cdot 0,4476 + 0,0244) = 0,0071\text{m} = 7,1\text{mm};$$

| | | | | |
|------------|---------|---|---------|---------|
| αx | 1,10 | 0 | -1,10 | -2,20 |
| η_1 | 0,4476 | 1 | 0,4476 | 0,0244 |
| η_2 | -0,1457 | 1 | -0,1457 | -0,1548 |

$$M_B = \frac{P}{4\alpha} \sum \eta_2 = \frac{200 \cdot 10^3}{4 \cdot 1,1} [1 + 2(-0,1457) - 0,1548] = 2,5 \cdot 10^3 \text{ Nm}.$$

11.4. Dầm dài hữu hạn.

Dầm dài hữu hạn chịu tải trọng phân bố theo quy luật bậc nhất

$$y = \frac{q}{K} + e^{\alpha x} (C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x) + e^{-\alpha x} (C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x).$$

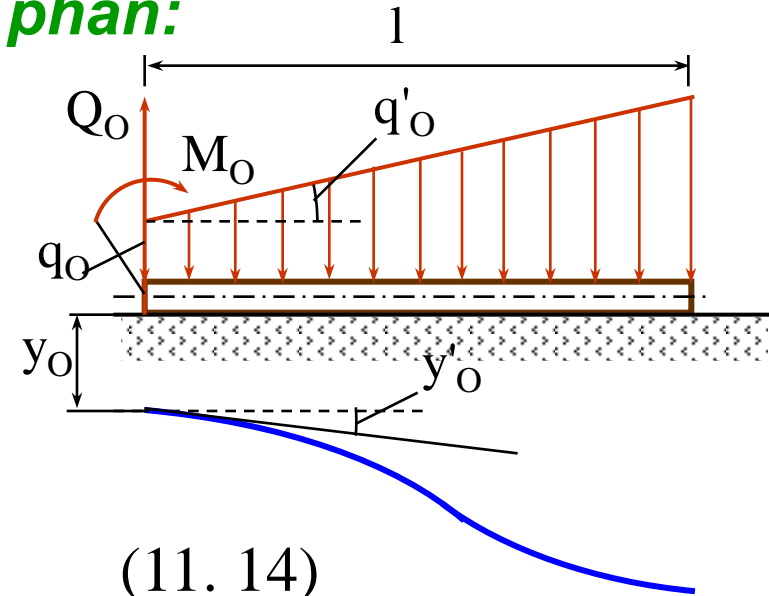
Chọn nghiệm của phương trình này dưới dạng **tổ hợp các nghiệm độc lập của phương trình vi phân**:

$$Y_1(\alpha x) = \operatorname{ch} \alpha x \cos \alpha x ;$$

$$Y_2(\alpha x) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x) ;$$

$$Y_3(\alpha x) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha x ;$$

$$Y_4(\alpha x) = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \alpha x \sin \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x \cos \alpha x). \quad (11.14)$$

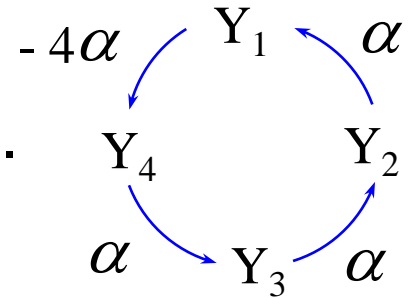


Các hàm Y_i có tên gọi là **hàm Cruplop** có giá trị cho trong bảng (phụ lục II) và có các tính chất sau:

$$Y_1(0) = 1; Y_2(0) = Y_3(0) = Y_4(0) = 0;$$

$$\frac{dY_1}{dx} = 4\alpha Y_4; \frac{dY_2}{dx} = \alpha Y_1; \frac{dY_3}{dx} = \alpha Y_2; \frac{dY_4}{dx} = \alpha Y_3.$$

Các tính chất này được minh họa trên hình bên.



$$y = \frac{q}{K} + AY_1 + BY_2 + CY_3 + DY_4;$$

$$\varphi = y' = \frac{q'}{K} - 4\alpha AY_4 + \alpha BY_1 + \alpha CY_2 + \alpha DY_3;$$

$$M = -EIy'' = KAY_3 + KBY_4 - \frac{K}{4}DY_2; \quad Q = K\alpha AY_2 + K\alpha BY_3 + K\alpha CY_4 - \frac{K}{4}\alpha DY_1.$$

Khi $x = 0 \rightarrow y(0) = y_0; \varphi(0) = \varphi_0; M(0) = M_0; Q(0) = Q_0;$

$$\frac{q_0}{K} + A = y_0; \frac{q'_0}{K} + \alpha B = \varphi_0; -\frac{K}{4}C = M_0; -\frac{\alpha K}{4}D = Q_0. \quad \rightarrow$$

$$A = y_0 - \frac{q_0}{K}; \quad B = -\frac{q'_0}{\alpha K} + \frac{\varphi_0}{K}; \quad C = -\frac{4M_0}{K}; \quad D = -\frac{4Q_0}{\alpha K}.$$

Biết hai thông số q_0 và q'_0 , hai trong 4 thông số y_0, φ_0, M_0 và Q_0 được cho trước, hai thông số còn lại được xác định từ điều kiện biên ở cuối dầm ($x = l$) A, B, C, D

$$\begin{aligned}
y &= \frac{q}{K} + \left(y_0 - \frac{q_0}{K} \right) Y_1 + \left(\frac{\varphi_0}{K} - \frac{q'_0}{\alpha K} \right) Y_2 - 4 \frac{M_0}{K} Y_3 - 4 \frac{Q_0}{\alpha K} Y_4; \\
\varphi &= \frac{q'}{K} - 4\alpha \left(y_0 - \frac{q_0}{K} \right) Y_4 + \alpha \left(\frac{\varphi_0}{K} - \frac{q'_0}{\alpha K} \right) Y_1 - 4\alpha \frac{M_0}{K} Y_2 - 4 \frac{Q_0}{K} Y_3; \\
M &= (Ky_0 - q_0) Y_3 + \left(\varphi_0 - \frac{q'_0}{\alpha} \right) Y_4 - M_0 Y_1 + \frac{Q_0}{K} Y_2; \\
Q &= \alpha (Ky_0 - q_0) Y_4 + (\alpha \varphi_0 - q'_0) Y_3 + 4\alpha M_0 Y_2 + Q_0 Y_1.
\end{aligned} \tag{11.15}$$

Trên đây là phương trình độ võng, góc xoay, momen uốn và lực cắt được viết theo phương pháp thông số ban đầu cho trường hợp dầm hữu hạn một đoạn. **Dầm có nhiều đoạn:** (11.15) là nghiệm ứng với đoạn đầu tiên tính từ bên trái. Các đoạn tiếp theo:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \left(\Delta y_a - \frac{\Delta q_a}{K} \right) Y_1[\alpha(x-a)] + \left(\frac{\Delta \varphi_a}{K} - \frac{\Delta q'_a}{\alpha K} \right) Y_2[\alpha(x-a)] + \\
&- 4 \frac{\Delta M_a}{K} Y_3[\alpha(x-a)] - 4 \frac{\Delta Q_a}{\alpha K} Y_4[\alpha(x-a)];
\end{aligned}$$

$$M_{i+1} = M_i + (K\Delta y_a - \Delta q_a) Y_3[\alpha(x-a)] + \left(\Delta \varphi_a - \frac{\Delta q'_a}{\alpha} \right) Y_4[\alpha(x-a)] + \Delta M_a Y_1[\alpha(x-a)] + \frac{\Delta Q_a}{K} Y_2[\alpha(x-a)] \quad (11.16)$$

a - toạ độ của mặt cắt phân chia đoạn thứ i và thứ $i+1$;

$\Delta y_a, \Delta \varphi_a$ - bước nhảy của độ võng và góc xoay tại mặt cắt có hoành độ $x = a$;

$\Delta q_a, \Delta q'_a$ bước nhảy của cường độ và đạo hàm của cường độ của lực phân bố tại mặt cắt có hoành độ $x = a$ (chiều q hướng xuống là chiều dương);

$\Delta M_a = M_a$ - momen tập trung tại mặt cắt $x = a$;

$\Delta Q_a = Q_a$ - lực tập trung tại mặt cắt $x = a$.

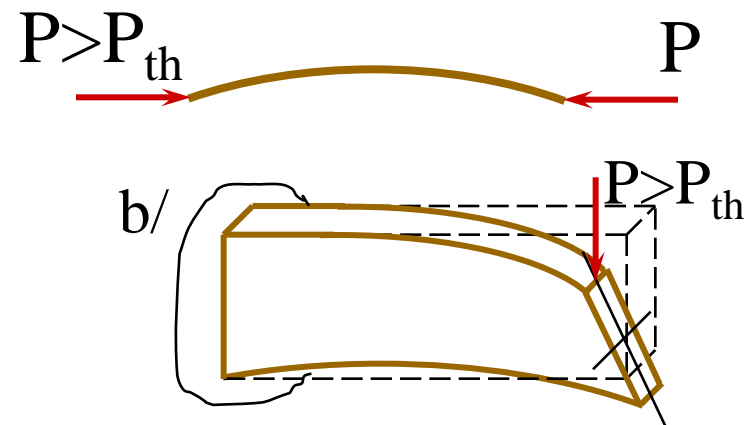
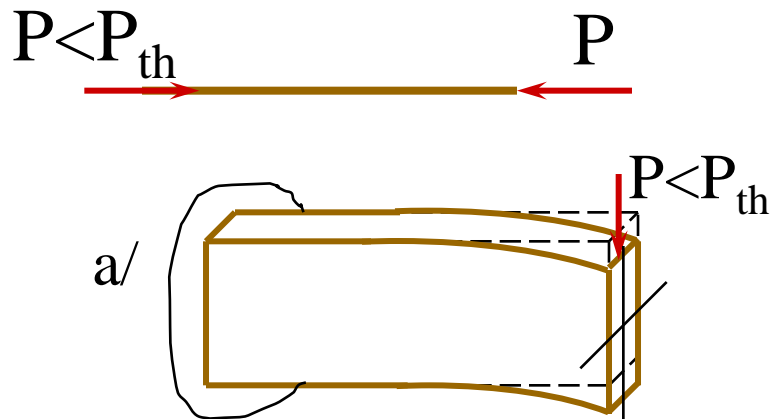
Chương 12

UỐN DỌC

12. 1. Khái niệm cơ bản.

Sự cân bằng đàn hồi **ổn định** và sự cân bằng đàn hồi **không ổn định**.

Mất ổn định xảy ra khi tải trọng hãm còn rất nhỏ nếu chiều dài và các kích thước ngang càng khác nhau nhiều. Các thanh mảnh và dài sẽ bị uốn khi chịu nén, các dầm có chiều cao mảnh sẽ bị xoắn khi uốn, các ống thành mỏng sẽ bị uốn khi xoắn.



Giữa trạng thái cân bằng ổn định và mất ổn định tồn tại một trạng thái chuyển tiếp gọi là **trạng thái tới hạn**.

Tải trọng tương ứng với trạng thái tới hạn gọi là **tải trọng tới hạn P_{th}** .

Điều kiện làm việc ổn định $P \leq [P]_{od} ; [P]_{od} = \frac{P_{th}}{m} ; \quad (12.1)$

Trường hợp thanh chịu nén $\sigma \leq [\sigma]_{od} ; [\sigma]_{od} = \frac{\sigma_{th}}{m} ; \quad (12.2)$

σ_{th} - ứng suất tới hạn (ứng suất ứng với lực tới hạn);

m - hệ số an toàn ổn định.

σ - ứng suất tác dụng trong thanh.

Khi tải trọng tác dụng tĩnh hệ số an toàn ổn định của thép $m = 1,7 - 3$; gỗ $m = 3 - 4$; gang $m = 5 - 6$.

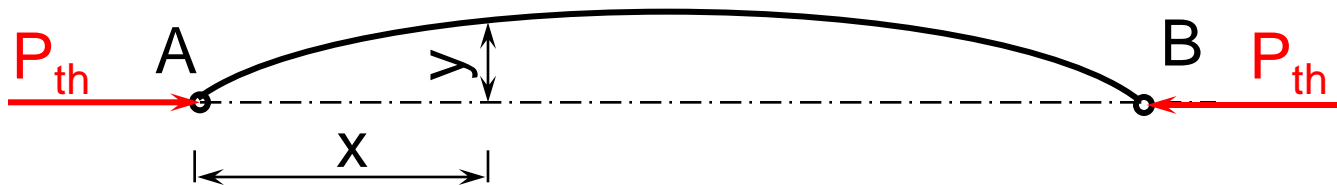
12. 2. Uốn dọc trong giới hạn tỷ lệ.

Phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi:

$$EI_{\min} y'' = M_x \quad (a)$$

EI_{\min} - độ cứng uốn nhỏ nhất của dầm ;

$M_x = - P_{th}y$ là momen uốn do lực tới hạn gây ra ở mặt cắt co hoành độ x .



$$\longrightarrow EI_{\min} y'' = -P_{th} y.$$

$$y'' + \frac{P_{th}}{EI_{\min}} y = 0. \quad \frac{P_{th}}{EI_{\min}} = k^2, :$$

$$y'' + k^2 y = 0. \quad (\text{b})$$

$$\longrightarrow y = A \sin kx + B \cos kx. \quad (\text{c})$$

Ở A x = 0; y = 0; B = 0; ở B x = l; y = 0 nên A sin kl = 0.

$$A \neq 0; \quad \longrightarrow kl = i\pi \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad \longrightarrow kl = i\pi$$

$$\frac{P_{th}}{EI_{\min}} = k^2 = \frac{\pi^2}{l^2}, \quad P_{th} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}. \quad (12.1)$$

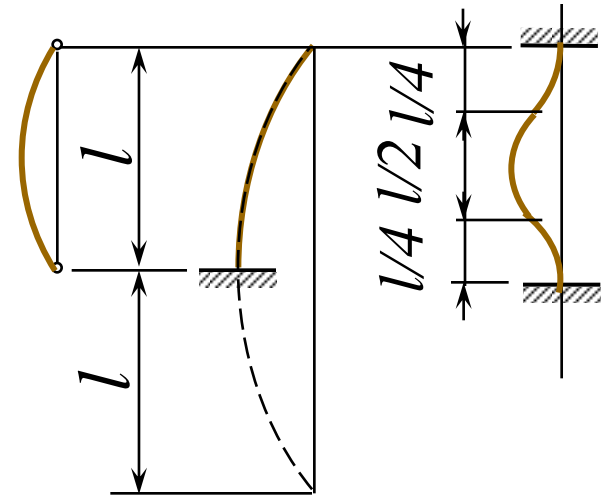
Công thức O'le cho ta giá trị của lực tới hạn khi thanh bắt đầu cong. Lagrăngiơ xuất phát từ phương trình vi phân chính xác của đường đàn hồi:

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = -\frac{M}{EI} \longrightarrow$$

lực nén đạt tới giá trị lực tới hạn tính theo công thức O'le thì thanh bắt đầu bị cong. Sau đó dù lực tăng thêm chút ít thì biến dạng của thanh cũng tăng lên rất nhanh dẫn đến chỗ thanh bị phá huỷ.

12.3. Ảnh hưởng của phương pháp liên kết đầu thanh đến sự ổn định.

- Khớp bản lề ở hai đầu $\mu = 1$;
- Một đầu ngàm, một đầu tự do $\mu = 2$;
- Ngàm hai đầu $\mu = 0,5$.



$$P_{th} = [P_{od}]_m = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}. \quad (12.2)$$

12.4. Ứng suất tới hạn, giới hạn sử dụng công thức O'le.

$$(12.2) \longrightarrow \frac{P_{th}}{F} = \sigma_{th} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{F(\mu l)^2}; \quad \frac{I_{\min}}{F} = r_{\min}^2; \quad \sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{r_{\min}}\right)^2}$$

λ - độ mảnh của thanh

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{r_{\min}} \quad (12.3)$$

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (12.4)$$

Điều kiện sử dụng công thức Euler là

$$\sigma_{th} \leq \sigma_{tl}; \quad \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{tl}$$

$$\longrightarrow \lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} \quad (12.5)$$

Thép ít cacbon $\sigma_{tl} = 20 \text{ kN/cm}^2$, $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^4}{20}} \geq 100$$

| Vật liệu | λ_0 |
|----------|-------------|
| Thép | 100 |
| Gang | 80 |
| Gỗ | 100 |

12.4. Uốn dọc ngoài giới hạn tỷ lệ . Công thức thực nghiệm

Trong tính toán kỹ thuật thường sử dụng **công thức thực nghiệm của lasinski:**

$$\sigma_{th} = a - b\lambda + c\lambda^2 \quad (12. 6)$$

| Vật liệu | a | b | c | Giới hạn |
|----------|-------|--------|--------|----------------------|
| Thép CT3 | 31,00 | 0,114 | 0,00 | $40 < \lambda < 100$ |
| Thép CT5 | 46,40 | 0,3617 | 0,00 | $30 < \lambda < 90$ |
| Gang xám | 77,60 | 1,2000 | 0,0053 | $20 < \lambda < 80$ |
| Gỗ | 2,39 | 0,0100 | 0,00 | $30 < \lambda < 100$ |

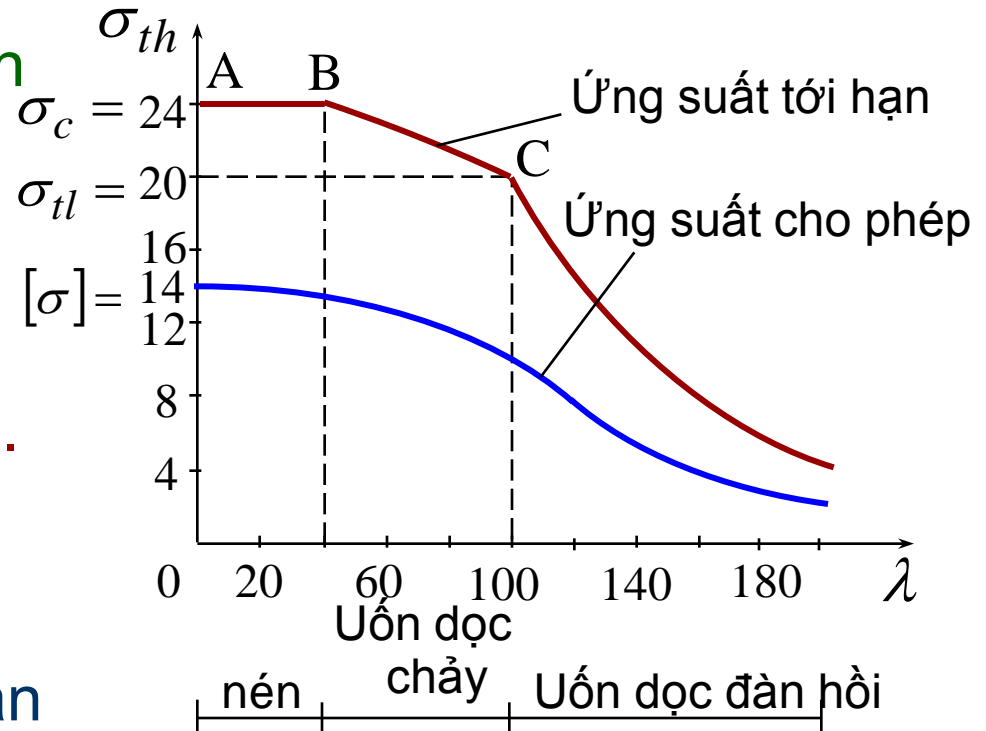
Các kết quả nghiên cứu thực nghiệm cũng cho thấy trong tính toán kỹ thuật có thể không quan tâm đến sự nguy hiểm do mất ổn định khi thanh có độ mảnh khá nhỏ tùy thuộc vào từng loại vật liệu. Thí dụ với thép khi $\lambda \leq 40$; với gỗ khi $\lambda \leq 30$; với gang khi $\lambda \leq 20$.

Khi $\lambda < 40$ ứng suất tới hạn là giới hạn chảy (đoạn AB).

Khi $10 < \lambda < 100$ ứng suất tới hạn được xác định theo công thức (12.6) (đoạn BC).

Ở C ($\lambda = 100$) ứng suất tới hạn là giới hạn tỷ lệ.

Khi $\lambda > 100$ ứng suất tới hạn được xác định theo công thức (12.4) (đoạn CD). Rất ít khi gặp trường hợp $\lambda > 200$.



$$[\sigma]_{od} = \frac{\sigma_{th}}{m}; [\sigma]_n = \frac{\sigma_c}{n}; [\sigma]_{od} = [\sigma]_n \frac{\sigma_{th}^n}{\sigma_c m} = [\sigma]_n \cdot \varphi. \quad (12.7)$$

$$\varphi - \text{hệ số uốn dọc}; \quad \varphi = \frac{\sigma_{th}}{\sigma_c} \cdot \frac{n}{m} \quad \sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]_n \varphi \quad (12.8)$$

Bảng 12. 2

| Độ mảnh λ | Hệ số φ | | |
|----------------------|-----------------|------|-------|
| | Thép CT3 | Gang | Gỗ |
| 0 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| 10 | 0,90 | 0,97 | 0,99 |
| 20 | 0,96 | 0,91 | 0,97 |
| 30 | 0,94 | 0,81 | 0,93 |
| 40 | 0,92 | 0,69 | 0,87 |
| 50 | 0,89 | 0,54 | 0,80 |
| 60 | 0,86 | 0,44 | 0,71 |
| 70 | 0,81 | 0,34 | 0,60 |
| 80 | 0,75 | 0,26 | 0,48 |
| 90 | 0,69 | 0,20 | 0,38 |
| 100 | 0,60 | 0,16 | 0,31 |
| | | | |
| 180 | 0,23 | | 0,10 |
| 190 | 0,21 | | 0,09 |
| 200 | 0,19 | | 0,08 |

- Bài toán kiểm tra theo công thức (12. 8):

$$\sigma = N/F \leq [\sigma]_n \varphi$$

- Bài toán xác định tải trọng cho phép

$$[N] = [\sigma]_n \varphi F \quad (12. 9)$$

- Bài toán thiết kế

$$F \geq \frac{N}{\varphi [\sigma]_n} \quad (12. 10)$$

Thí dụ 12. 1. So sánh khối lượng theo khả năng ổn định theo uốn dọc của thanh có mặt cắt hình tròn và thanh có mặt cắt hình vành khăn có đường kính ngoài $d_1 = 100\text{mm}$; đường kính trong $d_2 = 80\text{mm}$.

Diện tích mặt cắt hình vành khăn:

$$F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 10^2}{4} - \frac{3,14 \cdot 8^2}{4} = 28\text{cm}^2$$

$$I_1 \cong 0,05d_1^4 \left[1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4 \right] = 0,05 \left[1 - \left(\frac{8}{10} \right)^4 \right] 10^4 \cong 295\text{cm}^4$$

Đường kính thanh có mặt cắt hình tròn có cùng khả năng ổn định $0,05d^4 = 295 \rightarrow d = 8,8\text{cm}$.

$$F_2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 8,8^2}{4} \cong 61\text{cm}^2$$

khối lượng của thanh tăng lên $\frac{61}{28} = 2,2$ lần

Thí dụ 12. 2. Chọn đường kính của mặt cắt của thanh chống BC, biết $P = 10\text{kN}$. Vật liệu làm thanh BC có ứng suất cho phép $[\sigma]_n = 14\text{kN/cm}^2$

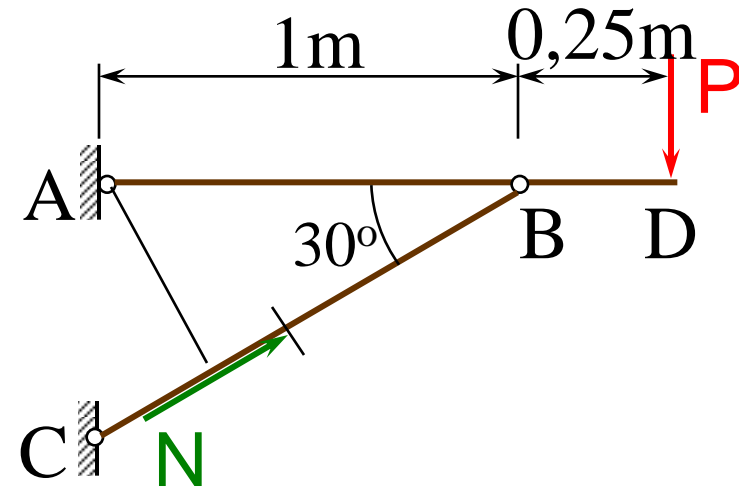
$$\sum M_A = P \cdot AD - N \cdot AB \sin 30^\circ = 0;$$

$$N = \frac{1,25P}{AB \sin 30^\circ} = \frac{1,25 \cdot 10}{1 \cdot 0,5} = 25\text{kN}.$$

Thử cho $\varphi = 0,4$; (12. 10)

$$F = \frac{25}{0,4 \cdot 14} = 4,46\text{cm}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 4,46}{3,14}} \cong 2,38\text{cm}.$$



$$r_{\min} = \frac{d}{4} \cong 0,6\text{cm};$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{r_{\min}} = \frac{1.100}{0,6 \cos 30^\circ} = 195; \quad \varphi = 0,2;$$

$$[\sigma]_{od} = 0,2 \cdot 14 = 2,8\text{kN} / \text{cm}^2$$

Ứng suất nén làm việc của thanh BC :

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{25}{4,46} = 5,6\text{kN} / \text{cm}^2$$

Đường kính $d = 2,4\text{cm}$ không đảm bảo điều kiện ổn định của thanh.

Chọn lại $\varphi = 0,3$.

$$F = \frac{25}{0,3 \cdot 14} \cong 5,95 \text{ cm}^2; \quad d = \sqrt{\frac{4 \cdot 5,95}{3,14}} \cong 2,75 \text{ cm};$$

$$r_{\min} = \frac{2,75}{4} \cong 0,7 \text{ cm}; \quad \lambda = \frac{1 \cdot 100}{0,7 \cdot \cos 30^\circ} = 166$$

Tra bảng ta có $\varphi = 0,275$

$$[\sigma]_{od} = 0,275 \cdot 14 = 3,85 \text{ kN / cm}^2$$

Ứng suất làm việc của thanh BC :

$$\sigma = \frac{25}{5,95} = 4,2 \text{ kN / cm}^2$$

vượt 9% so với ứng suất cho phép.

Chọn đường kính của thanh BC $d = 2,84 \text{ cm}$;

$$r = \frac{2,84}{4} = 0,71$$

$$\lambda = \frac{1.100}{0,71 \cos 30^\circ} = 162,6; \quad \varphi = 0,28;$$

$$[\sigma]_{od} = 0,28.14 = 3,95 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Ứng suất làm việc trong thanh BC :

$$\sigma = \frac{2,5.4}{3,14.2,84^2} = 3,95 \text{ kN} / \text{cm}^2$$

Ta có thể dừng ở đây.

12.6. Uốn dọc và uốn ngang đồng thời.

12.6.1. Lực ngang tác dụng trong mặt phẳng có độ cứng cực đại.

-Kiểm tra độ bền của thanh theo uốn ngang trong mặt phẳng có độ cứng cực đại.

-Kiểm tra độ bền theo uốn dọc trong mặt phẳng có độ cứng cực tiểu.

-Khi thiết kế chọn kích thước mặt cắt ngang theo độ bền khi uốn ngang trong mặt phẳng có độ cứng cực đại rồi kiểm tra độ bền theo uốn dọc trong mặt phẳng có độ cứng cực tiểu.

12.6.2. Lực ngang tác dụng trong mặt phẳng có độ cứng cực tiểu.

Khi tải trọng ngang hướng về một phía, mặt cắt có độ võng lớn nhất ở khoảng giữa dầm, phương trình gần đúng của trục dầm

$$y = a \sin \frac{\pi}{l} x; \quad (12. 11);$$

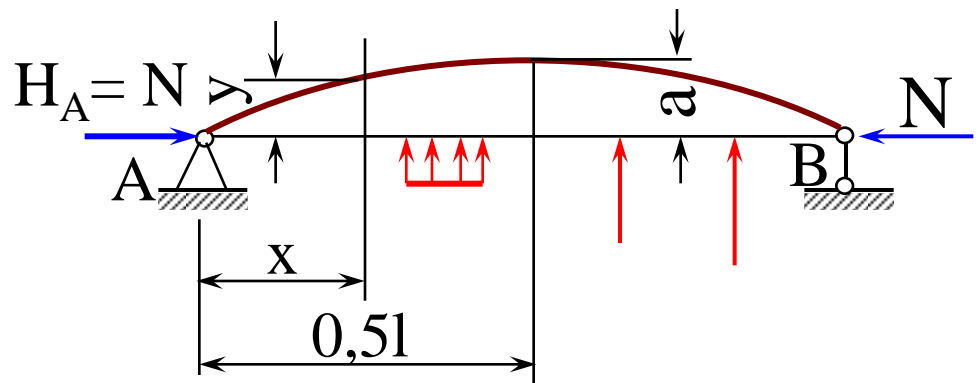
$$EI_{\min} y'' = M_x. \quad (a)$$

$$M_x = - (M_P + Ny);$$

$$EI_{\min} a \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi}{l} x = M_P + Ny; \quad (b)$$

M_P - momen uốn do tải trọng ngang gây ra;

N - lực nén dọc.



Khi $x = l/2$; $y = a$, $M_P = M_{PC}$ (momen uốn ở giữa dầm).

$$a = \frac{M_{PC}}{\frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} - N};$$

lực tới hạn theo công thức O' le $\frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} = P_{th}$ (12. 12)

$$a = \frac{M_{PC}}{P_{th} - N}$$

M_{PC} - momen uốn ở mặt cắt giữa thanh do lực ngang gây ra;

P_{th} - lực tới hạn theo công thức (12. 1).

Xác định được độ võng cực đại ở giữa thanh, ta có thể xác định độ võng ở mặt cắt bất kỳ theo (12. 10).

Ứng suất ở mặt cắt bất kỳ cho trường hợp uốn trong mặt phẳng xy sẽ là:

$$\sigma = -\frac{N}{F} \pm \frac{M_{(P)}}{W_z} \pm \frac{Ny}{W_z} \quad (12.13)$$

Tính toán theo công thức gần đúng này thường chỉ sai lệch so với phương pháp chính xác dưới 5%.

Trong tính toán kỹ thuật theo uốn dọc và uốn ngang đồng thời thường thực hiện theo công thức quy ước:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} + \frac{N}{\varphi F} \leq [\sigma_n] \quad (12.14)$$

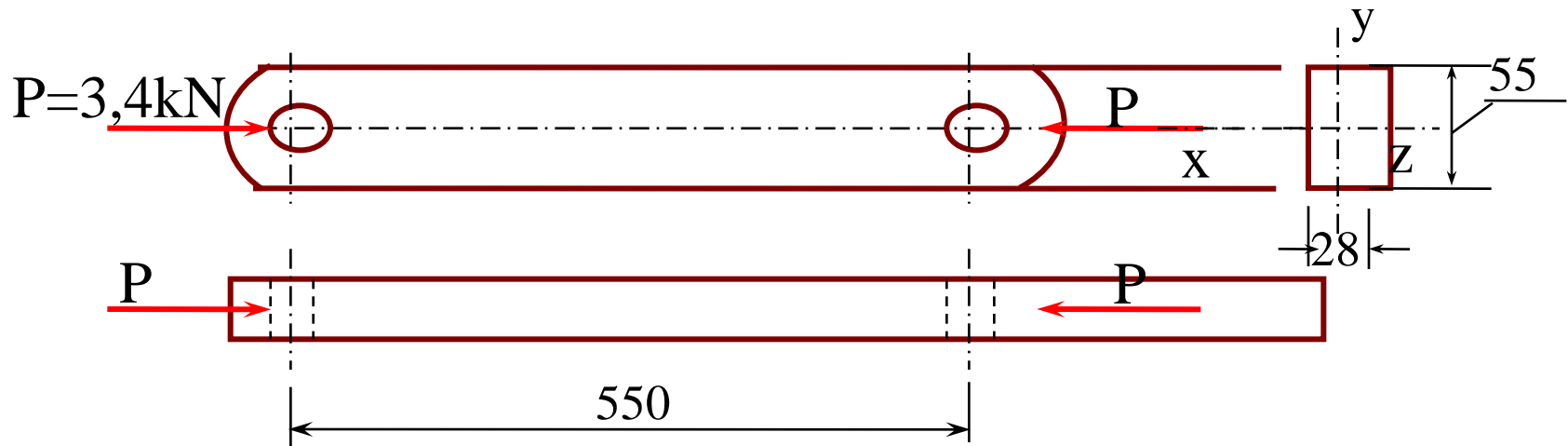
W_z, F - momen chống uốn và diện tích mặt cắt ngang bình thường của thanh.

Ngoài ra cần kiểm tra theo biến dạng nén ở mặt cắt bị giảm yếu theo công thức

$$\sigma = \frac{M}{W_t} + \frac{N}{F_t} \leq [\sigma_n]. \quad (12. 15)$$

W_t, F_t - mômen chống uốn và diện tích mặt cắt ngang tại chỗ giảm yếu.

Thí dụ 12. 3. Kiểm tra thanh truyền của máy gặt làm bằng gỗ



Trong mặt phẳng xy thanh truyền chịu uốn dọc theo sơ đồ có gối đỡ bản lề ở hai đầu. Vì thanh truyền có khối lượng nhỏ nên có thể bỏ qua tải trọng ngang do lực quán tính.

$$(12. 8) \longrightarrow \sigma = \frac{P}{\varphi F} r_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} = \sqrt{\frac{2,8.5,5^3}{12.2,8.5,5}} \cong 1,59 \text{ cm};$$

$$\lambda_z = \frac{\mu \cdot l}{r_z} = \frac{1.55}{1,59} \cong 35$$

Bảng 12. 2 \longrightarrow $\varphi = 0,9.$

$$\longrightarrow \sigma = \frac{3,4}{0,9 \cdot 5,5 \cdot 2,8} = 0,25 \text{ kN / cm}^2$$

Trong mặt phẳng xz thanh truyền không quay tự do trên gối tựa nhưng cũng chưa được ngàm hoàn toàn nên ta lấy $\mu = 0,75$:

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}} = \sqrt{\frac{5,5 \cdot 2,8^3}{12 \cdot 5,5 \cdot 2,8}} \cong 0,81 \text{ cm};$$

$$\lambda_y = \frac{\mu \cdot l}{r_y} = \frac{0,75 \cdot 5,5}{0,81} \cong 50$$

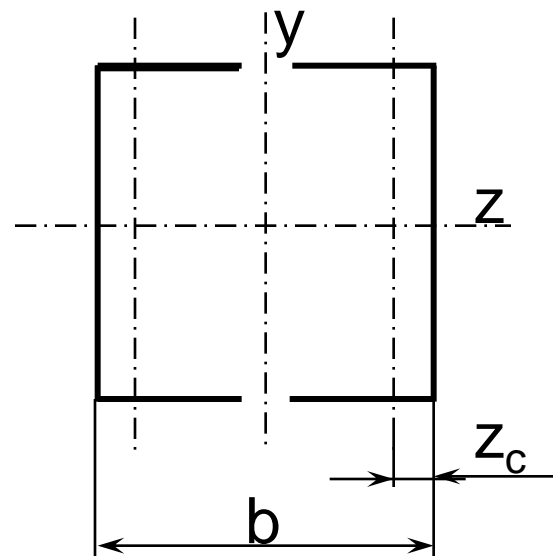
Theo bảng 12. 2 : $\lambda_y = 50 \longrightarrow \varphi = 0,80.$

$$\sigma = \frac{3,4}{0,8 \cdot 2,8 \cdot 5,5} \cong 0,28 \text{ kN / cm}^2$$

Nói chung ứng suất hãy còn nhỏ.

BÀI TẬP SỐ 12 - UỐN DỌC

Một cột được làm từ 2 thép chữ U dài $l=10\text{m}$, ứng suất cho phép $[\sigma]_n=14\text{kN/cm}^2$, chịu lực nén $P=560\text{kN}$, hệ số quy đổi chiều dài $\mu=0,75$.
Chọn số hiệu của thép, xác định khoảng cách b giữa hai nửa cột, khoảng cách h giữa hai thanh ghép ngang và hệ số an toàn ổn định m .



Tạm chọn $\lambda=80.$ →

$$r_z = \frac{\mu l}{\lambda} = \frac{0,75 \cdot 1000}{80} = 9,375 \text{ cm}$$

UN⁰22: $r_z=8,89 \text{ cm}; I_z=2110 \text{ cm}^4; I_y=151 \text{ cm}^4; z_c=2,21 \text{ cm}.$

$$\lambda = \frac{\mu l}{r_z} = \frac{0,75 \cdot 1000}{8,89} = 84,36.$$

$$\lambda=80 \rightarrow \varphi=0,75; \lambda=90 \rightarrow \varphi=0,69.$$

$$\varphi=0,75 - (0,75 - 0,69) \cdot 0,436 = 0,724. [\sigma]_{\text{ôđ}} = 0,724 \cdot 14 = 10,13 \text{ kN/cm}^2;$$

$$\sigma = 560 / (2 \cdot 26,7) = 10,49 \text{ kN/cm}^2; \text{ sai lệch } 100 \cdot (10,49 - 10,13) / 10,13 = +3,52\%$$

$$2I_z = 2I_y + 2F(0,5b - z_c)^2 \rightarrow b = 21,55 \text{ cm}.$$

$$h \leq \lambda r_y / \mu = 266,58 \text{ cm}$$

$k \geq I/h = 3,75$; chọn $h=250 \text{ cm}; k=4$; số thanh ngang bằng 3.

$$\lambda = 84,36 < 100 \rightarrow \sigma_{\text{th}} = a - b\lambda + c\lambda^2 = 21,38 \text{ kN/cm}^2; m = 21,38 / 10,49 \approx 2,04.$$

Thử chọn $\varphi = 0,75$ Bảng $\longrightarrow \lambda=80$

$$r_z = \frac{\mu l}{\lambda} = \frac{0,75 \cdot 1000}{80} = 9,375 \text{ cm.}$$

Theo bảng chọn thép I N°22 có $r_z=8,89\text{cm}; r_y=2,37\text{cm};$

$I_z=2110\text{cm}^4; I_y=510\text{cm}^4; F=26,7\text{cm}^2.$

$$\lambda = \frac{\mu l}{r_z} = \frac{0,75 \cdot 1000}{8,89} = 84,36.$$

Theo bảng chọn λ lớn hơn 4,36 $\lambda=90; \varphi=0,69.$

$$\varphi = 0,75 - (0,75 - 0,69) \frac{84,36 - 90}{10} = 0,724.$$

$$[\sigma]_{od} = \varphi[\sigma]_n = 0,724 \cdot 14 = 10,10 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{lv} = \frac{P}{2F} = \frac{560}{2 \cdot 26,7} = 10,49 \text{ kN/cm}^2. \quad \text{Sai lệch } +3,52\%.$$

$$\lambda=84,36 < 100 \longrightarrow \sigma_{th} = a - b\lambda = 31 - 0,114 \cdot 84,36 = 21,38 \text{ kN/cm}^2$$

$$m = 21,38 / 10,49 = 2,04$$

$$2I_z = 2I_y + 2\left(\frac{b}{2} - z_c\right)^2 \cdot F \Rightarrow b = 21,55 \text{ cm} \quad \text{Lấy } b=22 \text{ cm.}$$

Chương 13

TẢI TRỌNG ĐỘNG

13. 1. Khái niệm cơ bản.

- Tải trọng tĩnh và tải trọng động.

-Đặc tính của tải trọng động và do đó phương pháp tính toán phụ thuộc vào đặc tính của gia tốc.

13.1.1. Có thể coi gia tốc không phụ thuộc vào biến dạng của phần tử kết cấu được xét .

*Xác định gia tốc bằng các phương pháp của động học vật rắn → giá trị của lực quán tính. **Bổ sung thêm lực quán tính vào các lực tác dụng .**

*Trường hợp gia tốc của phần tử chuyển động của kết cấu có giá trị biến đổi theo chu kỳ làm việc : **dùng gia tốc cực đại và lực quán tính tương ứng.**

13.1.2. Gia tốc tăng đột ngột (tức thời) đến một giá trị rất lớn tùy thuộc vào biến dạng của phần tử kết cấu được xét: hiện tượng va chạm

(vận tốc của phần tử thay đổi rất lớn trong một khoảng thời gian rất ngắn $t = 0,001$ s).

Khi va chạm tốc độ lan truyền biến dạng và đặc tính chịu phá huỷ của vật liệu có ý nghĩa rất lớn.

13.1.3. Gia tốc biến đổi theo chu kỳ.

* Tải trọng (bao gồm lực quán tính) sẽ gây ra dao động và có thể xảy ra hiện tượng cộng hưởng, ứng suất và biến dạng khi đó sẽ tăng rất lớn.

* Khi tải trọng chu kỳ tác dụng nhưng không có hiện tượng cộng hưởng có thể xảy ra **hiện tượng mỏi**: Chi tiết bị phá huỷ sau một số chu kỳ làm việc khi ứng suất còn nhỏ hơn rất nhiều so với giới hạn chảy hoặc giới hạn bền. Ứng suất này được gọi là **giới hạn mỏi**.

13.2. Tính toán các chi tiết chuyển động không đều.

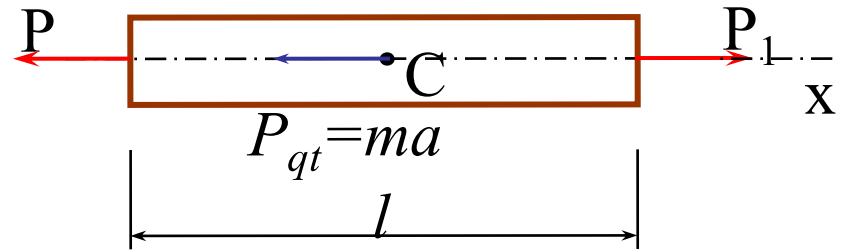
13.2.1. Tính các thanh chuyển động thẳng và song song với trục thanh.

Giả sử có một thanh chịu tác dụng của các lực không cân bằng P_1 và P (P_1 là lực chuyển động, P là lực cản với $P_1 > P$). Thanh chuyển động với gia tốc không đổi a .

$$ma = P_1 - P; \quad P_1 = P + ma.$$

$$\max \sigma_d = \frac{P + ma}{F}; \quad (13.1)$$

$$\max \sigma_d = \frac{P}{F} + l\gamma a \quad (13.2)$$



λ - khối lượng riêng của vật liệu thanh (N/m^3);

P - lực cản (N);

l - chiều dài thanh (m);

F - diện tích mặt cắt ngang của thanh (m^2);

σ_d - ứng suất (N/m^2).

(13. 2) \longrightarrow

$$\max \sigma_d = \frac{P}{F} + \frac{Q}{F} \cdot \frac{a}{g} \quad (13. 3)$$

Q - trọng lượng của thanh

Nếu **chi tiết chuyển động với gia tốc thay đổi** trong các công thức trên **cần lấy giá trị cực đại của gia tốc**.

Thí dụ 13. 1. Xác định ứng suất trong bu lông biên của động cơ máy kéo nếu khối lượng của nhóm pittông - biên (không kể nắp dưới biên) là $m = 7,5 \text{ kg}$; số bu lông là 4; đường kính trong của bu lông là $d = 10 \text{ mm}$; gia tốc cực đại của pittông $a_{\max} = 1130 \text{ m/s}^2$.

Bu lông biên chịu kéo bởi nhóm pittông-biên \longrightarrow (13. 1) \longrightarrow

$$\max \sigma_d = \frac{ma}{4F} = \frac{7,5.1130.4}{4.3,14.1^2} \cong 2700 \text{ N/cm}^2 = 2,7 \text{ kN/cm}^2$$

Hệ số tập trung ứng suất ở chân ren $\alpha_\sigma = 4$

$$\max \sigma_d = 4.2,7 = 11 \text{ kN/cm}^2$$

Ứng suất động lực học có giá trị không cao song bu lông biên vẫn được làm bằng vật liệu có chất lượng cao .

13.2.2. Tính các thanh chuyển động vuông góc với trục thanh hay có các khối lượng liên kết với thanh có chuyển động vuông góc với trục thanh.

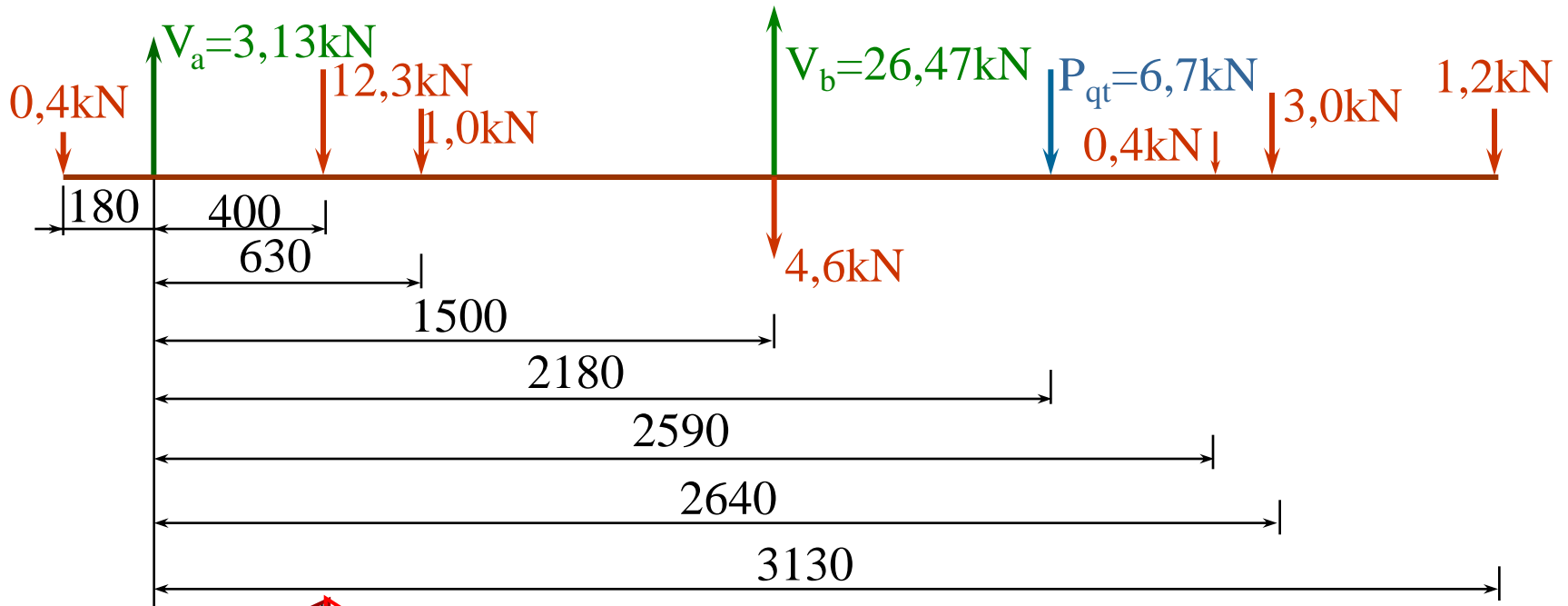
*** Trường hợp thứ nhất :**

bổ sung thêm các lực quán tính phân bố $(Fdx\gamma)a/g$ có tác dụng như tải trọng phân bố: và tính thanh theo biến dạng uốn tĩnh.

***Trường hợp thứ hai :**

-bổ sung vào các tải trọng của thanh lực quán tính của khối lượng chuyển động có liên kết với thanh.

Thí dụ 13. 2. Kiểm tra ứng suất trong dầm dọc của máy kéo có $W_z = 345\text{cm}^3$ khi máy kéo đang đứng nhưng động cơ vẫn làm việc. Sơ đồ tải trọng tác dụng trên dầm do trọng lượng của động cơ, bộ phận truyền lực, thùng nhiên liệu, bộ phận tỏa nhiệt cũng như lực quán tính $P_{qt} = 6,7 \text{ kN}$ cho trên hình vẽ . Lực quán tính trong trường hợp này là phần lực quán tính chưa được cân bằng của các khối lượng chuyển động tịnh tiến qua lại.



Ứng suất cực đại
trong dầm:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{10,37 \cdot 10^2}{345} = 3 \text{ kN/cm}^2$$

Momen chống uốn
của mặt cắt dầm
chữ U $W_z = 345 \text{ cm}^3$.

10,37 kNm

13.2.3 Ứng suất trong thanh truyền (biên).

$$q = m \cdot a_n = mr\omega^2 .$$

a_n - gia tốc pháp tuyến ở điểm A;

ω - vận tốc góc của tay quay OA;

r - bán kính đường tròn quỹ đạo điểm A;

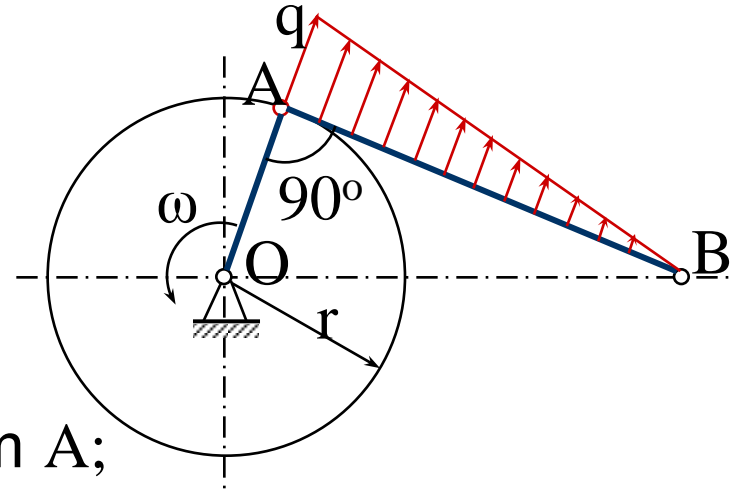
γ - khối lượng riêng của vật liệu làm thanh truyền (kg/m³).

$$q = \gamma F \cdot l \cdot r \frac{\pi^2 n^2}{30^2} = \frac{\pi^2 \gamma F r n^2}{30^2} N/m ,$$

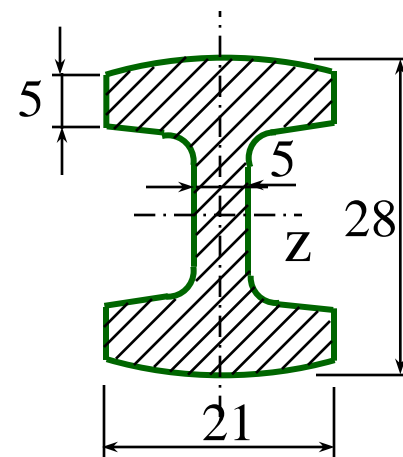
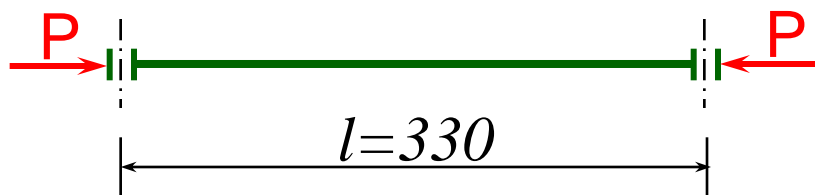
F - diện tích mặt cắt ngang (m²); l - chiều dài của thanh ;

n - vận tốc góc của tay quay OA (vòng/phút).

$$M_{\max} \cong \frac{ql^2}{16} \longrightarrow M_{\max} \cong \frac{\pi^2 \gamma F r n^2 l^2}{120^2} \quad (12.4)$$



Thí dụ 13. 3. Kiểm tra ứng suất do uốn dọc và uốn ngang đồng thời trong mặt phẳng chuyển động của thanh truyền động cơ máy kéo, biết hệ số quy đổi chiều dài $\mu = 1$; $l = 330$ mm; $r = 76$ mm; $n = 1050$ vg/ph; $F = 3$ cm²; $P = 23$ kN; $\gamma = 0,008$ kg/cm³.



$$(12. 14) \longrightarrow \sigma = \frac{M}{W} + \frac{P}{\varphi F}$$

Momen quán tính của mặt cắt:

$$I_z = 2 \left(\frac{2,1 \cdot 0,5^3}{12} + 2,1 \cdot 0,5 \cdot 1,15^2 \right) + \frac{0,5 \cdot 1,8^3}{12} \cong 3 \text{ cm}^4$$

Bán kính quán tính: $r_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} = \sqrt{\frac{3}{3}} = 1\text{cm}.$

Độ mảnh: $\lambda = \frac{33}{1} = 33.$ Theo bảng 12. 2: $\varphi = 0,91.$

Momen chống uốn : $W_z = \frac{3}{1,4} \cong 2,14\text{cm}^3$

Momen uốn cực đại:

$$M_{\max} = \frac{\pi^2 \gamma F r n^2 l^2}{120^2} =$$
$$= \frac{3,14^2 \cdot 0,008 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 7,6 \cdot 10^{-2} \cdot 1050^2 \cdot 0,33^2}{120^2} = 15,0\text{Nm}$$

Ứng suất tổng cộng :

$$\sigma = \frac{15,0 \cdot 10^2}{2,14} + \frac{23000}{0,91 \cdot 3} = 9126\text{N/cm}^2$$

13.2.4. Ứng suất trong vành quay.

Lực quán tính ly tâm tác dụng lên mỗi phần tử vành là: $q = ma_n$.

m - khối lượng của một phần tử vành (tính trên đường tròn trung bình đường kính D); $m = ds \cdot F \cdot \gamma$

F - diện tích mặt cắt ngang của vành;

γ - khối lượng riêng của vật liệu làm vành;

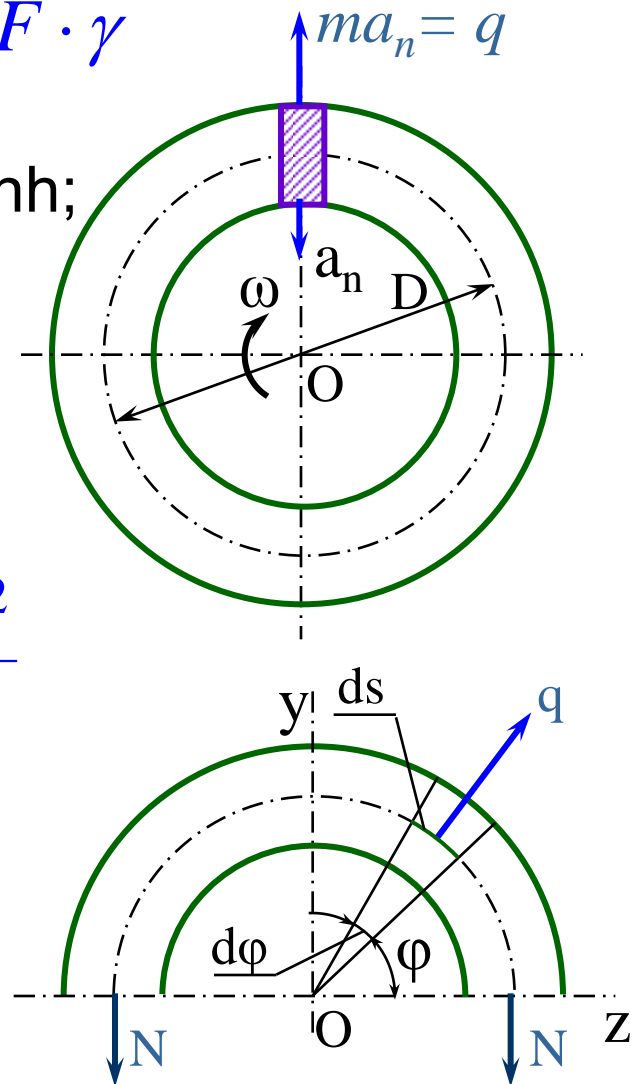
$$ds = \frac{D}{2} d\varphi; \quad a_n = r\omega^2 = \frac{D}{2}\omega^2$$

$$q = dsF\gamma \frac{D}{2}\omega^2; \quad q = \frac{F\gamma\omega^2 D^2}{4} d\varphi.$$

$$\int_0^\pi \frac{F\gamma\omega^2 D^2}{4} \sin\varphi \cdot d\varphi - 2N = 0; \quad N = \frac{F\gamma\omega^2 D^2}{4}$$

$$\sigma_d = \frac{N}{F} = \frac{\gamma\pi^2 n^2 D^2}{60^2} \quad (13.5)$$

$$\frac{\gamma\pi^2 n^2 D^2}{60^2} \leq [\sigma] \quad (13.6)$$



13.3. Ứng suất và biến dạng khi va chạm.

Các giả thiết :

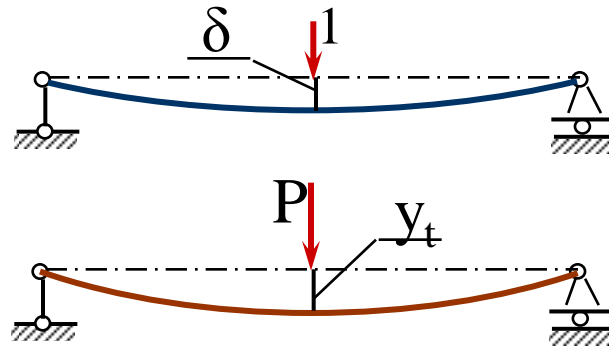
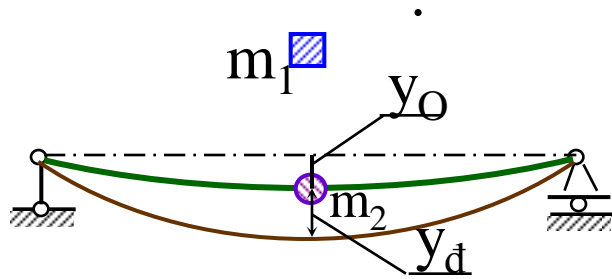
1. Biến dạng của vật thể bị va chạm chưa vượt quá giới hạn tỷ lệ;
2. Va chạm là không đàn hồi ;
3. Không chú ý đến khối lượng của vật thể bị va chạm;
4. Động năng của vật thể va chạm hoàn toàn biến thành thế năng biến dạng của vật thể bị va chạm.

13.3.1. Va chạm theo phương thẳng đứng.

v_0 - vận tốc của m_1 khi tiếp xúc ban đầu;

y_0 - chuyển vị tĩnh của dầm do khối lượng m_2 ;

y_d - chuyển vị lớn nhất của hai khối lượng m_1 và m_2 do va chạm;



Định lý bảo toàn động lượng :

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_1 ; \quad v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 . \quad (a)$$

Xét quá trình xảy ra từ khi m_1 và m_2 bắt đầu chuyển động xuống đến khi hai khối lượng này đạt tới vị trí thấp nhất .

Định lý bảo toàn năng lượng: biến thiên động năng và thế năng biến dạng của hệ thống bằng công của ngoại lực trong quá trình này:

$$\Delta U + \Delta T = A . \quad (b)$$

A - công của ngoại lực (trọng lượng của các khối lượng m_1 và m_2);

ΔT - độ biến thiên của động năng trong quá trình được xét;

ΔU - độ biến thiên của thế năng biến dạng trong quá trình được xét.

$$U_1 = \frac{m_2 g \cdot y_o}{2} = \frac{y_o^2}{2\delta} \quad (\text{c}); \quad U_2 = \frac{(y_o + y_d)^2}{2\delta} \quad (\text{d})$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{y_d^2 + 2y_o y_d}{2\delta} \quad (\text{e})$$

$$T_1 = \frac{m_1 + m_2}{2} v_1^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_o^2 = \frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)} v_o^2 \quad (\text{g})$$

$$T_2 = 0; \quad (\text{h}) \quad \Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)v_o^2} \quad (\text{i})$$

$$A = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot y_d \quad (\text{k})$$

$$+ (b) \longrightarrow \frac{y_d^2 + 2y_o y_d}{2\delta} - \frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)} v_o^2 = (m_1 + m_2)g \cdot y_d$$

$$y_d^2 + 2y_o y_d - 2(m_1 + m_2)g\delta \cdot y_d - \frac{m_1 \delta}{1 + \frac{m_2}{m_1}} v_o^2 = 0;$$

$$m_1 g \delta = y_t$$

$$m_2 g \delta = y_o; \quad m_1 \delta = \frac{y_t}{g} \quad y_d^2 - 2y_t y_d - \frac{y_t}{g \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)} v_o^2 = 0$$

$$y_d = y_t \pm \sqrt{y_t^2 + \frac{y_t v_o^2}{\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)g}} = y_t \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{g y_t \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}} \right]$$

$$y_d = y_t \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{g y_t \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}} \right] \quad (13.7)$$

$$y_{\text{đ}} = k_{\text{đ}} y_t; \quad k_{\text{đ}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{gy_t \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}} \quad (13.8)$$

$k_{\text{đ}}$ - hệ số động lực học;

Khi **rơi từ độ cao h** xuống dầm: $v_o^2 = 2gh$

$$\longrightarrow k_{\text{đ}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_t \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}} \quad (13.9)$$

Khi $h = 0$ thì $k_{\text{đ}} = 2$. Khi $m_2 \ll m_1$; $m_2/m_1 \approx 0$.

$$(13.8), (13.9) \longrightarrow k_{\text{đ}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v_o^2}{gy_t}} \quad (13.10)$$

$$k_{\text{đ}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_t}} \quad (13.11)$$

$$\sigma_d = k_d \sigma_t; M_d = k_d M_t; N_d = k_d N_t \quad (13.12)$$

Khi $1 \ll 2h/y_t$

$$k_d = \sqrt{\frac{2h}{y_t}} \quad (13.13)$$

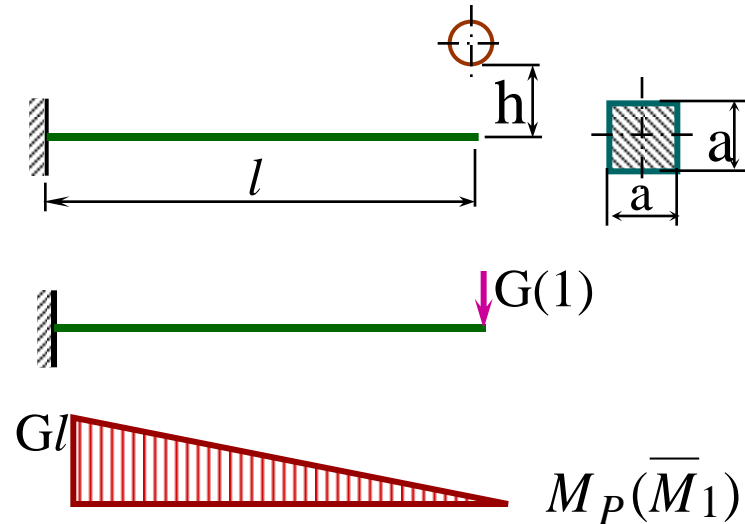
Thí dụ 13. 4. Xác định chiều cao rơi cho phép của vật nặng G có trọng lượng 500N trên đầu tự do của dầm công xôn không trọng lượng có chiều dài $l = 1\text{m}$, mặt cắt ngang dầm có cạnh $a = 10\text{cm}$. Vật liệu làm dầm là thép có $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; ứng suất cho phép $[\sigma_d] = 120 \text{ kN/m}^2$

Momen chống uốn của mặt cắt ngang dầm là

$$W_z = \frac{a^3}{6}$$

Ứng suất tĩnh cực đại do G tác dụng tĩnh gây ra là:

$$\sigma_{t \max} = \frac{M_{P \max}}{W_z} = \frac{Gl}{W_z} = \frac{6Gl}{a^3} = \frac{500 \cdot 1 \cdot 6}{10^3 \cdot 10^{-6}} = 3 \text{ kN/m}^2$$



Độ võng đầu tự do của dầm do lực G tác dụng tĩnh gây ra là:

$$y_t = \frac{Gl^3}{3EI_z} = \frac{500.1^3.12}{3.2.10^{11}.10^4.10^{-8}} = 1.10^{-4} m.$$

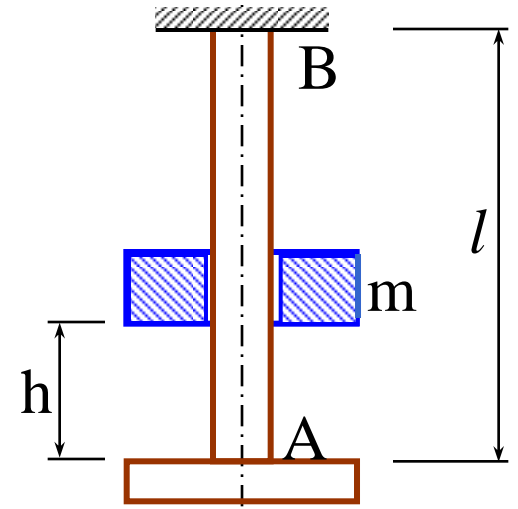
$$(13. 11) \quad \longrightarrow \quad k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_t}}$$

$$\sigma_{d \max} = k_d \cdot \sigma_{\max} \leq [\sigma_d]$$

$$\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{1.10^{-4}}} \right) \cdot 3 \leq 120$$

$$\longrightarrow \quad h \leq 7.10^{-2} m = 7 cm$$

Thí dụ 13. 5. Một thanh có chiều dài l , mặt cắt ngang có diện tích F làm bằng vật liệu có môđun đàn hồi E chịu va chạm bởi khối lượng m rơi từ độ cao h .



1. Xác định ứng suất động lực học khi va chạm.

2. Xét trường hợp một nửa thanh có diện tích mặt cắt ngang là αF khi $\alpha < 1$ và $\alpha > 1$.

Ta xác định ứng suất động lực học khi va chạm theo công thức gần đúng (13. 13) và (13, 8):

$$\sigma_d = k_d \sigma_t \quad \text{với} \quad k_d = \sqrt{\frac{2h}{y_t}}$$

y_t - độ dãn của thanh khi lực mg tác dụng tĩnh.

$$\sigma_t = \frac{mg}{F} ; \quad y_t = \frac{mgl}{EF} ; \quad \sigma_d = \frac{mg}{F} \sqrt{\frac{2hEF}{mgl}} = \sqrt{\frac{2hmgE}{Fl}} .$$

a/ $\alpha > 1$

$$\sigma_{t1} = \frac{mg}{F}; y_{t1} = \frac{0,5mgl}{EF} + \frac{0,5mgl}{\alpha EF} = 0,5 \frac{mgl}{EF} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right);$$

$$\sigma_{d1} = \frac{mg}{F} \sqrt{\frac{2hEF}{mgl \cdot 0,5 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)}} = \frac{mg}{F} \sqrt{\frac{2hEF}{mgl}} \cdot \sqrt{\frac{1}{0,5 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)}}.$$

Vì $\alpha > 1 \rightarrow \frac{1}{0,5 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)} > 1$ nghĩa là $\sigma_{d1} > \sigma_d$

b/ $\alpha < 1$

$$\sigma_{t2} = \frac{mg}{\alpha F}; \quad y_{t2} = 0,5 \frac{mgl}{EF} \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right);$$

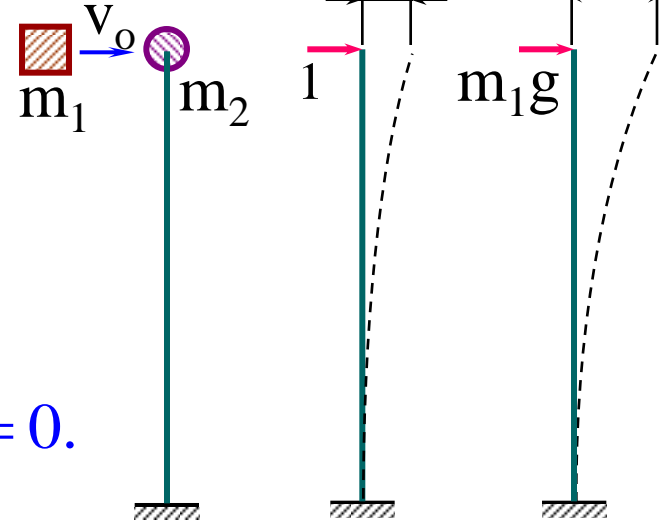
$$\begin{aligned} \sigma_{d2} &= \frac{mg}{\alpha F} \sqrt{\frac{2hEF}{mgl0,5 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right)}} = \frac{mg}{F} \sqrt{\frac{2hEF}{mgl0,5\alpha(1+\alpha)}} = \\ &= \frac{mg}{F} \sqrt{\frac{2hEF}{mgl}} \sqrt{\frac{1}{0,5\alpha(1+\alpha)}}. \end{aligned}$$

Vì $\alpha < 1$ nên $\frac{1}{0,5\alpha(1+\alpha)} > 1$ nghĩa là $\sigma_{d2} > \sigma_d$

Trong cả hai trường hợp tăng hay giảm cục bộ diện tích mặt cắt ngang đều làm tăng ứng suất động lực học khi va chạm.

13.3.2 .Va chạm theo phương nằm ngang.

Sau khi va chạm hai khối lượng bắt đầu cùng chuyển động với vận tốc v_1 :



$$v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0. \quad \Delta T = -\frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)} v_0^2$$

$$U_2 = \frac{\Delta_d^2}{2\delta}; \quad A = 0; \quad \frac{\Delta_d^2}{2\delta} - \frac{m_1^2}{2(m_1 + m_2)} v_0^2 = 0.$$

$\Delta_t = \delta m_1 g$ - chuyển vị theo phương ngang do một lực bằng trọng lượng của m_1 tác dụng tĩnh theo phương va chạm ;

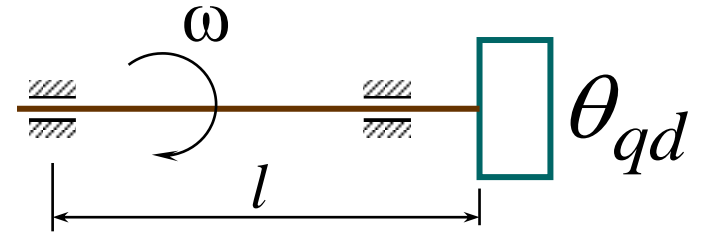
δ - chuyển vị do lực đơn vị tác dụng tĩnh theo phương va chạm .

$$\Delta_d = \frac{v_0}{\sqrt{g\Delta_t \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}} \cdot \Delta_t = k_d \Delta_t \quad (13.14)$$

$$k_d = \frac{v_0}{\sqrt{g\Delta_t \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}} \quad (13.15)$$

13.3.3. Va chạm xoắn.

Xét một trục quay với vận tốc góc ω . Khi đột ngột giữ (hãm) đầu trục kia hoặc khi khởi động đột ngột trục sẽ chịu va chạm xoắn. Bỏ qua momen quán tính của trục.



$$T = \frac{\theta_{qd} \omega^2}{2}; \quad U = \frac{M_x^2 l}{2GI_x} \quad \frac{M_x^2 l}{2GI_x} = \frac{\theta_{qd} \omega^2}{2}. \quad M_x = \omega \sqrt{\frac{G\theta_{qd} I_x}{l}}.$$

$$\max \tau_d = \frac{\omega}{W_x} \sqrt{\frac{G\theta_{qd} I_x}{l}}. \quad W_x = \frac{\pi d^3}{16}; \quad \theta_{qd} = \frac{mD^2}{8};$$

(13. 16)

$$G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2; \quad \omega = \frac{\pi n}{30}$$

$$\max \tau_d \cong \frac{16,7 D n}{d} \sqrt{\frac{m}{l}} \text{ (N/cm}^2\text{)}; \quad (13. 17)$$

m - khối lượng bánh đà (kg); D - đường kính bánh đà (m);
 d, l - đường kính và chiều dài trục.

13.3.4. Ảnh hưởng của khối lượng của thanh chịu va chạm đến ứng suất và biến dạng khi va chạm.

Khối lượng của thanh *được thay thế* bằng khối lượng quy đổi đặt ở vị trí va chạm. Tiêu chí quy đổi khối lượng : **động năng của thanh bằng động năng của khối lượng thay thế.**

$$T = 0,5 \int_m v_1^2 dm; \quad T = 0,5 m v_o^2 \cdot \frac{1}{m} \int_m \left(\frac{v_1}{v_o} \right)^2 dm.$$

Hệ số quy đổi: $k_{qd} = \frac{1}{m} \int_m \left(\frac{v_1}{v_o} \right)^2 dm$ (13. 18)

$$T = k_{qd} \frac{m v_o^2}{2} \quad (13. 19)$$

$$\frac{v_1}{v_o} = \frac{\delta_1}{\delta_o}; \quad k_{qd} = \frac{1}{m} \int_m \left(\frac{\delta_1}{\delta_o} \right)^2 dm;$$

Đối với **thanh thẳng có mặt cắt ngang không đổi**:

$$k_{qd} = \frac{1}{l} \int_l \left(\frac{\delta_x}{\delta_o} \right)^2 dx \quad (13.20)$$

δ_o, δ_x – chuyển vị của điểm va chạm và của điểm bất kỳ trên thanh; dx - chiều dài của phân tố thanh.

Hệ số quy đổi khối lượng của vật thể bị va chạm về điểm va chạm phụ thuộc vào điều kiện liên kết của thanh và dạng va chạm.

Thanh thẳng có mặt cắt không đổi chịu va chạm dọc

$$\delta_o = \frac{mgl}{EF}; \quad \delta_x = \frac{mgx}{EF}; \quad \frac{\delta_x}{\delta_o} = \frac{x}{l}.$$

$$(13.20) \longrightarrow k_{qd} = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{1}{3} \quad (13.21)$$

Dầm có mặt cắt không đổi, có gối bản lề ở hai đầu, quy đổi khối lượng về giữa dầm:

$$k_{qd} = \frac{17}{35}$$

Dầm công xôn quy đổi khối lượng về đầu tự do: $k_{qd} = 33/140$.

Sau khi quy đổi khối lượng ta có thể xác định hệ số động lực học khi va chạm theo công thức (13. 8):

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_t} \left(1 + \frac{k_{qd}m}{m_1} \right)} \quad (13. 22)$$

h - chiều cao rơi;

y_t - chuyển vị tĩnh của điểm va chạm;

k_{qd} - hệ số quy đổi khối lượng;

m_1 - khối lượng của vật thể va chạm;

m - khối lượng của vật thể bị va chạm.

13. 4. Khái niệm về tính toán theo độ bền và độ cứng khi dao động.

Giới hạn trong việc biết cách xác định tần số dao động nhỏ khi không có lực cản cho hệ một bậc tự do và kiểm tra sự cộng hưởng.

13.4.1. Xác định tần số dao động riêng.

Dao động ngang và dao động dọc.

Hệ thống đang ở vị trí cân bằng (ứng với điểm O).

$$mg = F_0 = \Delta_t k = \frac{\Delta_t}{\delta}.$$

k - độ cứng của dầm (N/m);

δ - độ dẻo của dầm.

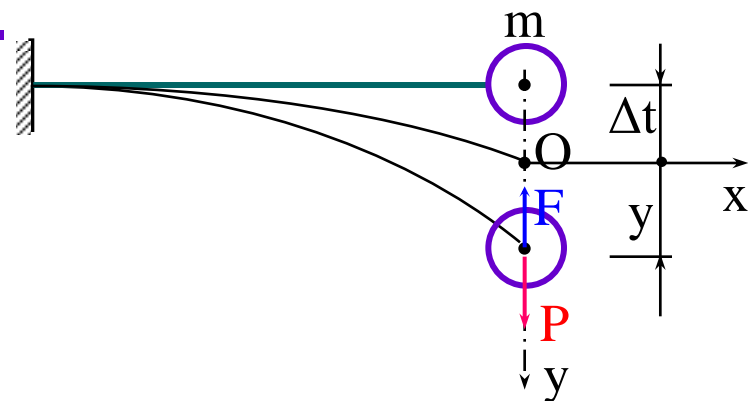
Đầu dầm lệch khỏi vị trí cân bằng một khoảng y , khối lượng m chịu tác dụng của các lực sau: - trọng lực $mg = P$;

- lực hồi phục $F = (\Delta_t + y)k$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = P - F; \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k\Delta_t - ky = -ky.$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0; \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2; \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\Delta_t}} \cong \frac{31,1}{\sqrt{\Delta_t}}$$

$\Delta_t = mg / k$ (cm) - chuyển vị tĩnh của khối lượng m do trọng lượng của nó gây ra.



$$n_0 = \frac{60}{2\pi} \omega_0 = \frac{60}{2\pi} \cdot \frac{31,3}{\sqrt{\Delta_t}} \cong \frac{300}{\sqrt{\Delta_t}} \quad (13.23)$$

Dầm công xôn mang khối lượng tập trung ở đầu tự do thì

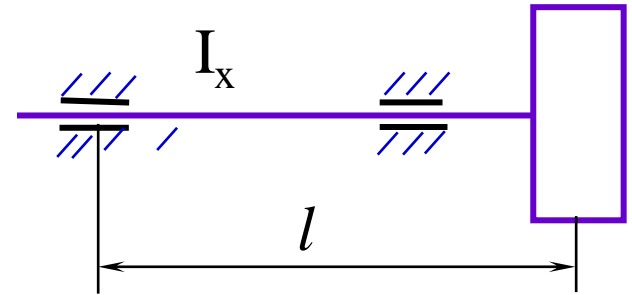
$$\Delta_t = \frac{mgl^3}{3EI}$$

Thanh chịu kéo khi dao động: $\Delta_t = \frac{mgl}{EF}$

Khối lượng tập trung đặt trên lò xo: $\Delta_t = \frac{8mgD^3n}{Gd^4}$

Dao động xoắn.

$$(13. 22) \text{ với } \frac{kl}{GI_x} = 1 \quad \text{hay} \quad k = \frac{GI_x}{l}$$



G - môđun trượt của vật liệu;

I - momen quán tính cực của mặt cắt ngang trục;

l - chiều dài trục.

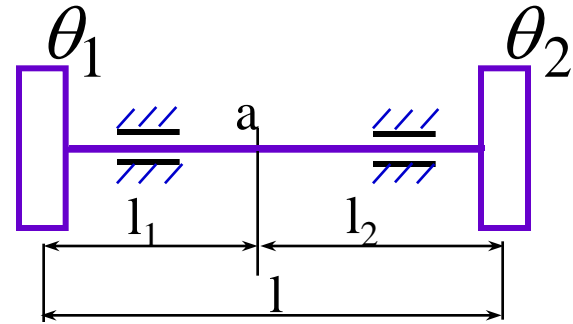
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GI_x}{\theta \cdot l}} \quad (13. 24)$$

θ - momen quán tính của khối lượng bánh đà.

$$n_o = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{GI_x}{\theta \cdot l}} \cong 9,55 \sqrt{\frac{GI_x}{\theta \cdot l}} \quad (13. 25)$$

Trường hợp hai đầu trục có hai bánh đà :

$$\frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{GI_x}{\theta_1 l_1}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{GI_x}{\theta_2 l_2}}$$



$$\theta_1 l_1 = \theta_2 l_2 \quad ;$$

$$l_1 + l_2 = l \quad \quad l_1 = \frac{l \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} .$$

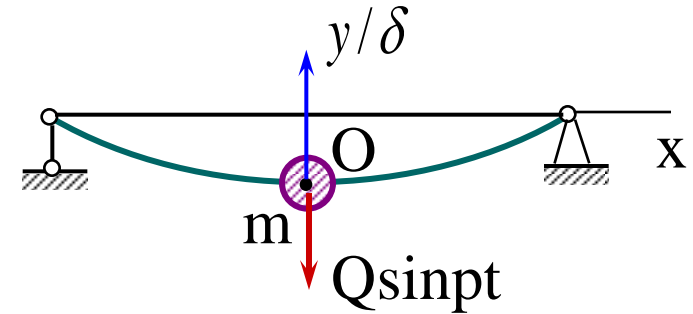
$$n \cong 9,55 \sqrt{\frac{GI_x (\theta_1 + \theta_2)}{\theta_1 \theta_2 l}} \quad (13. 26)$$

13.4.2. Biến dạng và ứng suất trong dao động cưỡng bức.

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{y}{\delta} + Q \sin pt$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{m\delta} y = \frac{Q}{m} \sin pt$$

Đặt $\frac{1}{m\delta} = \omega_o^2 \rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_o^2 y = \frac{Q}{m} \sin pt \quad (a)$



*Lời giải chung của phương trình này gồm lời giải chung của phương trình đẳng cấp tương ứng và một lời giải riêng của phương trình.

*Dao động tự do [lời giải chung của phương trình đẳng cấp tương ứng] sẽ tắt dần theo thời gian và ta cần xác định biên độ của dao động cưỡng bức nên ta sẽ giới hạn chỉ xét một nghiệm riêng của phương trình .

*Chọn dạng của nghiệm riêng này là $y = A \sin pt$.

$$-Ap^2 \sin pt + \omega_0^2 A \sin pt = \frac{Q}{m} \sin pt$$

$$A(\omega_0^2 - p^2) \sin \omega t = \frac{Q}{m} \sin pt$$

$$A = \frac{Q}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - p^2} \quad (13.27)$$

$$A = \frac{Q}{m\omega_0^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \cdot \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \frac{Q}{m\omega_0^2} = \frac{Q}{k} = \Delta_t;$$

$$A = \Delta_t \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} \quad k_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}; \quad (13.28)$$

k_d - hệ số động lực học.

$$A = k_d \Delta_t \quad (13. 29)$$

Δ_t – chuyển vị tĩnh do lực biên độ Q gây ra.

Ứng suất tỷ lệ với biến dạng $\sigma_d = k_d \sigma_t \quad (13. 30)$

(13. 28), (13. 29) và (13. 30) dùng cả cho các trường hợp dao động dọc (kéo, nén) hay dao động xoắn.

Thí dụ 13.6. Trên một dầm có khớp bản lề ở hai đầu gồm hai thép hình chữ U N°20a, chiều dài $l = 2,4\text{m}$. Giữa dầm đặt động cơ khối lượng $M = 2500\text{ kg}$. Trục động cơ có số vòng quay $n = 650\text{ vg/ph}$. Do độ lệch tâm của rôto động cơ nên khi động cơ làm việc đã gây ra lực kích thích $Q_t = 5000\sin\omega t\text{ (N)}$. Kiểm tra độ bền của dầm. Modun đàn hồi của vật liệu $E = 2 \cdot 10^7\text{ N/cm}^2$.

Số dao động tự do của dầm trong một phút

$$(13.23) \rightarrow n_o \cong \frac{300}{\sqrt{\Delta_t}} \quad \text{với} \quad \Delta_t = \frac{Mgl^3}{48EI}.$$

U N° 20a có khối lượng 1m chiều dài là $23,33\text{kg}$, $I_z = 1804\text{cm}^4$, $W_z = 180,4\text{ cm}^3$.

Khối lượng quy đổi về giữa dầm : $2 \cdot \frac{17}{35} \cdot 23,33 \cdot 2,4 = 54,35\text{kg}$

($\frac{54,35}{2500} \cdot 100 = 2,18\%$ so với khối lượng động cơ nên có thể bỏ qua)

$$\Delta_t = \frac{2500.9,8.240^3}{48.2.10^7.2.1804} = 0,098cm$$

$$n_o = \frac{300}{\sqrt{0,098}} = 958,3 \quad \text{lần/phút}$$

$$\frac{959,4 - 650}{959,4} \cdot 100 = 32,2\%$$

→ **Không có nguy hiểm do cộng hưởng**

Phần ứng suất trung bình do trọng lượng động cơ gây ra là:

$$\sigma_{tb} = \frac{M_t}{W_z} = \frac{2500.9,8.240}{4.2.180,4} = 4074 N / cm^2$$

Hệ số động lực học

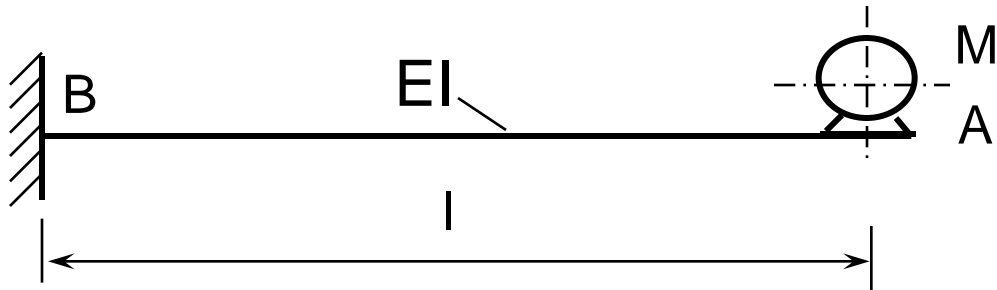
$$k_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega_o}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{n}{n_o}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{650}{959,4}\right)^2} \cong 1,85$$

Biên độ của ứng suất động lực học:

$$\sigma_a = 1,85 \cdot \frac{5000 \cdot 240}{4 \cdot 2 \cdot 180,4} = 1538 \text{ N/cm}^2$$

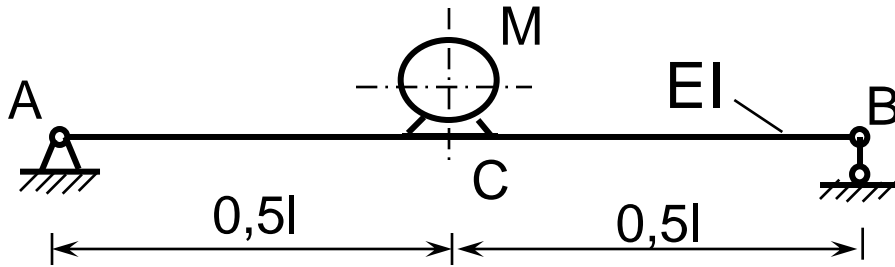
$$\sigma_{\max} = 4074 + 1538 = 5612 \text{ N/cm}^2 ;$$

$$\sigma_{\max} = 4074 - 1538 = 2536 \text{ N/cm}^2 ;$$

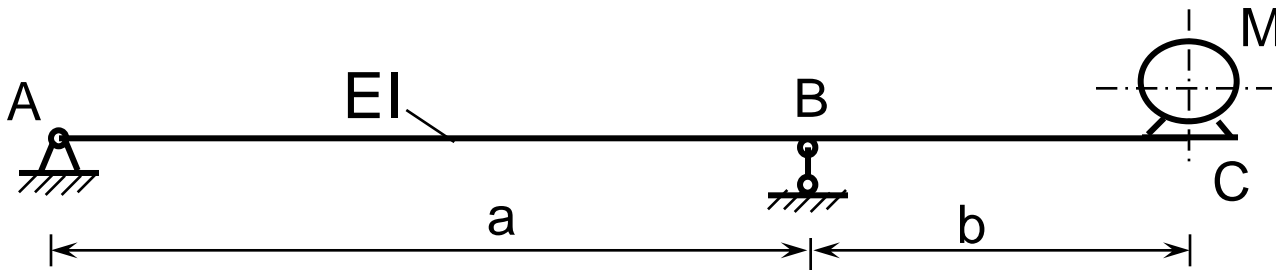


$$Mg = P$$

$$y_A = \frac{Pl^3}{3EI}$$



$$y_A = \frac{Pl^3}{48EI}$$



$$y_A = \frac{Pb^2(a+b)}{3EI}$$

13.7 Một khối lượng M rơi từ độ cao h xuống đầu tự do A của dầm chữ U (I_z, W_z) chiều dài l Vật liệu làm dầm có môđun đàn hồi E . Xác định ứng suất cực đại trong dầm khi va chạm Bỏ qua trọng lượng của dầm.



$$y_A = \frac{Mgl^3}{3EI_z};$$

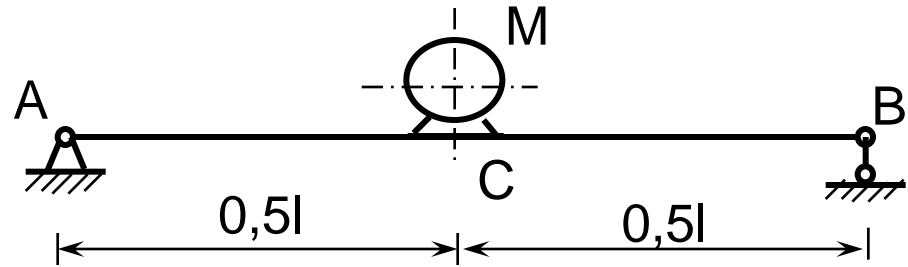
$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_A}};$$

$$\sigma_{\max tMg} = \frac{Mgl}{W_z};$$

$$\sigma_d = k_d \sigma_{\max tMg}$$

13.8 Một động cơ có khối lượng M đặt ở chính giữa dầm AB có gối đỡ bản lề ở hai đầu. Dầm làm bằng thép chữ U ($I_z = , W_z$). Xác định ứng suất cực đại trong dầm khi động cơ làm việc với tốc độ n vòng/phút sẽ xuất hiện thành phần lực quán tính ly tâm theo phương thẳng đứng $Q(t) = 600\sin pt$ (N). Vật liệu làm dầm có modun đàn hồi E .Bỏ qua trọng lượng của dầm

$$y_{ctMg} = \frac{Mgl}{48EI}$$

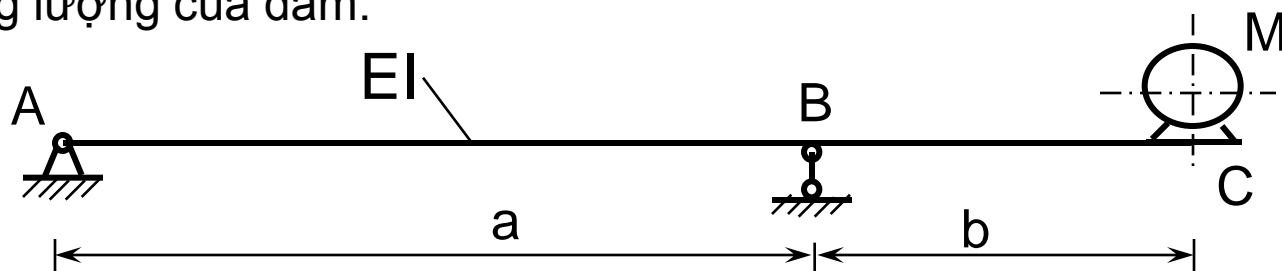


$$\omega_0 = \frac{31,3}{\sqrt{y_{ctMg}}}; n_0 = \frac{300}{\sqrt{y_{ctMg}}} \quad k_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{n}{n_0}\right)^2}$$

$$\sigma_{\max tQ} = \frac{Ql}{4W_z} \quad \sigma_a = k_d \sigma_{\max tQ}$$

$$\sigma_{\max tMg} = \frac{Ql}{4W_z} \quad \sigma_{\max}^{\min} = \sigma_{\max tMg} \pm \sigma_{aQ_t}$$

13.8 Một động cơ có khối lượng M đặt ở đầu tự do C của dầm ABC như hình vẽ. Dầm làm bằng thép chữ U (I_z, W_z). Xác định ứng suất cực đại trong dầm khi động cơ làm việc với tốc độ n vòng/phút sẽ xuất hiện lực quán tính ly tâm theo phương thẳng đứng $Q(t) = Q \sin pt$ (N). Vật liệu làm dầm có môđun đàn hồi E . Bỏ qua trọng lượng của dầm.



$$\omega_0 = \frac{31,3}{\sqrt{y_{ct}Mg}}; n_0 = \frac{300}{\sqrt{y_{ct}Mg}}$$

$$k_d = \frac{1}{1 - \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{n}{n_0}\right)^2}$$

$$\sigma_{\max tMg} = \frac{Mgb}{W_z}$$

$$\sigma_{\max tQ} = \frac{Qb}{W_z}$$

$$\sigma_a = k_d \sigma_{\max tQ} \quad \sigma_{\max}^{\min} = \sigma_{\max tMg} \pm \sigma_{aQ_t}$$

Chương 14

TẢI TRỌNG BIẾN ĐỔI CHU KỲ

14. 1. Tải trọng biến đổi chu kỳ và sự mỏi của vật liệu.

*Vấn đề mỏi của vật liệu nói chung và mỏi kim loại nói riêng có ý nghĩa rất quan trọng vì phần lớn các phần tử máy móc, công trình đều làm việc với tải trọng chu kỳ.

*Tải trọng chu kỳ là tải trọng lặp lại nhiều lần với một chu kỳ nhất định. Quá trình biến đổi của tải trọng hay ứng suất từ cực đại đến cực tiểu rồi lại trở về cực đại là một *chu kỳ tải trọng hay ứng suất*.

*Các đặc trưng của một chu kỳ ứng suất :

a/ **Hệ số không đối xứng** (trị số và dấu) $k = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ (14. 1)

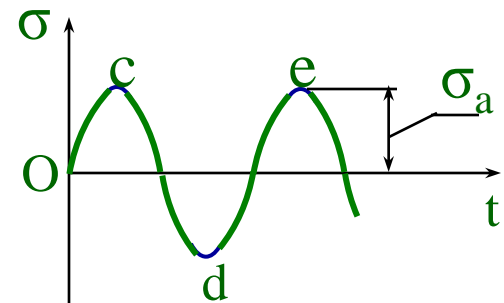
b/ **Biên độ của chu kỳ** : $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_{\max}}{2}(1 - k)$ (14. 2)

c/ **Ứng suất trung bình** : $\sigma_{tb} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_{\max}}{2}(1 + k)$, (14. 3)

1. Chu kỳ đối xứng

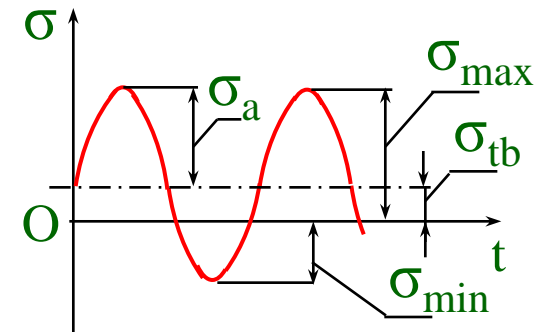
$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}; \quad k = -1;$$

$$\sigma_a = \sigma_{\max} = -\sigma_{\min}; \quad \sigma_{tb} = 0.$$



2. Chu kỳ không đối xứng

$$\sigma_{\max} \neq -\sigma_{\min};$$
$$k < 0; \quad \sigma_{tb} > 0.$$



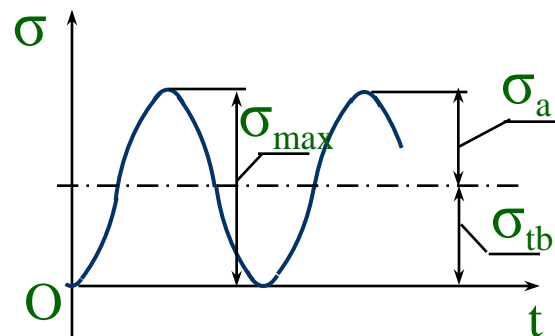
Một chu kỳ không đối xứng có thể coi là tổng cộng của một chu kỳ đối xứng và chu kỳ ứng suất không đổi

$$\sigma_{\max} = \sigma_{tb} + \sigma_a = \frac{\sigma_{\max}(1+k)}{2} + \frac{\sigma_{\max}(1-k)}{2} \quad (14.4)$$

3. Ứng suất mạch động

$$\sigma_a = \sigma_{tb} = \frac{\sigma_{\max}}{2}; \quad (14.5)$$

$$\sigma_{\min} = 0; \quad k = 0;$$



4. Tải trọng tĩnh.

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} ; k = 1;$$

$$\sigma_a = 0; \sigma_{tb} = \sigma_{\max} = \sigma_{\min} .$$

Do tải trọng chu kỳ có thể xuất hiện **sự phá huỷ mỏi** .

Sự nguy hiểm của phá huỷ mỏi là sau một thời gian làm việc chi tiết bị phá huỷ đột ngột khi ứng suất còn rất thấp, nhỏ hơn nhiều so với giới hạn bền, giới hạn chảy và cả giới hạn tỷ lệ nữa.

Khả năng vật liệu chịu tác dụng của ứng suất chu kỳ mà không bị phá huỷ gọi là **độ bền mỏi hay độ bền chu kỳ**.

Ứng suất lớn nhất vật liệu chịu được mà không bị phá huỷ với số chu kỳ làm việc lớn vô hạn được gọi là **giới hạn mỏi**.

Giới hạn mỏi khi ứng suất biến đổi theo chu kỳ không đối xứng : σ_k, τ_k

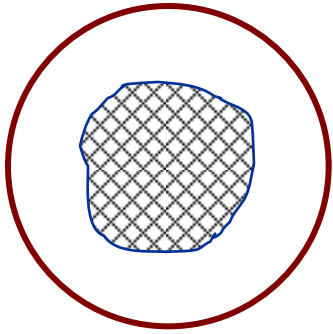
khi ứng suất biến đổi theo chu kỳ đối xứng : σ_{-1}, τ_{-1} .

Đối với tải trọng tĩnh (không đổi) giới hạn mỏi của vật liệu dẻo chính là giới hạn chảy $\sigma_{+1} = \sigma_c$,

của vật liệu giòn là $\sigma_{+1} = \sigma_B$

Giới hạn mỏi hạn chế (σ_{kN}, τ_{kN}) : ứng suất khi vật liệu chịu được số chu kỳ N mà không bị phá huỷ. Giới hạn mỏi hạn chế dùng để tính các chi tiết làm việc chỉ trong một khoảng thời gian hạn chế.

14. 2. Khái niệm về thực chất của sự phá hủy môi.



*Giữa thế kỷ 19 người ta nhận định cho rằng dưới tác dụng của tải trọng chu kỳ vật liệu "**bị mỏi**", chuyển từ dẻo sang giòn và bị phá huỷ.

*Những nghiên cứu rộng rãi trong nửa đầu thế kỷ 20 đã chứng minh quan điểm trên không còn đúng nữa và thuật ngữ "**mỏi**" không còn như ban đầu mà mang một nội dung hoàn toàn khác.

*Sự hình thành hai vùng khác nhau trên bề mặt chỗ gãy hỏng.

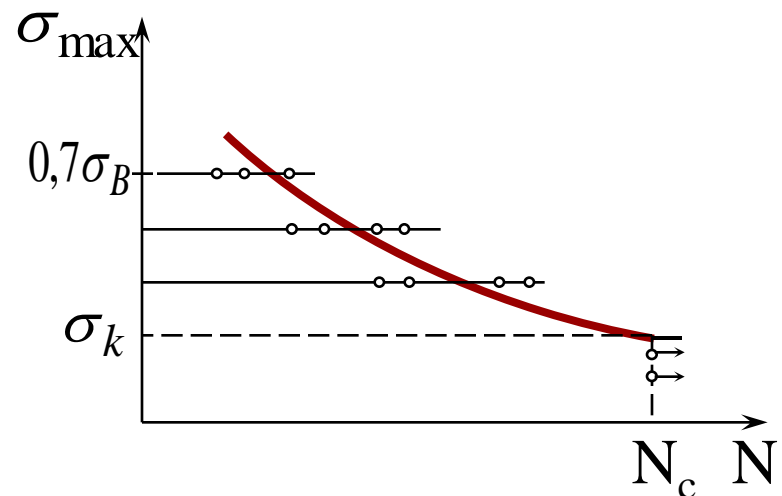
*Sự xuất hiện rạn nứt mỏi do tính chất không đồng nhất của vật liệu, của mạng tinh thể. Khi chi tiết chịu lực, các tinh thể này cũng chịu lực khác nhau. Do tính chất ngẫu nhiên ở tinh thể làm việc trong điều kiện bất lợi nhất sẽ xuất hiện biến dạng dẻo. Khi ứng suất thay đổi nhiều lần tại tinh thể đó sẽ có sự phân bố lại ứng suất cục bộ nhưng chưa gây ra sự phá huỷ kim loại. Ở các chu kỳ tiếp theo sẽ có sự biến cứng ở tinh thể đó và phần nội lực do tinh thể này nhận sẽ tăng lên .

*Đến một lúc nào đó sẽ xuất hiện rạn nứt nhỏ tại tinh thể này. Các rạn nứt nhỏ thường xuất hiện từ ngoài mặt chi tiết tại nơi có ứng suất lớn hoặc vật liệu có khuyết tật do kết quả gia công. Khi số chu kỳ chịu lực tăng lên thì rạn nứt nhỏ sẽ phát triển dần và khi phần mặt cắt còn lại không đủ độ bền tĩnh chi tiết sẽ gãy hỏng đột ngột.

14. 3. Đường cong mỏi. Giới hạn mỏi.

Hệ thức giữa số chu kỳ N và ứng suất σ_{\max} được diễn tả trên đồ thị dưới dạng đường cong mỏi

Với ứng suất có chu kỳ đối xứng, giới hạn mỏi được ký hiệu là σ_{-1} ($k = -1$), chu kỳ mạch động ký hiệu là σ_0 ($k = 0$) v. v...



Giới hạn mỏi còn phụ thuộc loại biến dạng. Thép có giới hạn mỏi theo chu kỳ đối xứng khi kéo nén $\sigma_{-1k} \cong 0,85\sigma_{-1u}$, khi xoắn $\tau_{-1x} \cong 0,55\sigma_{-1u}$ với gang $\sigma_{-1k} \cong 0,65\sigma_{-1u}$, khi xoắn $\tau_{-1x} \cong 0,8\sigma_{-1u}$.

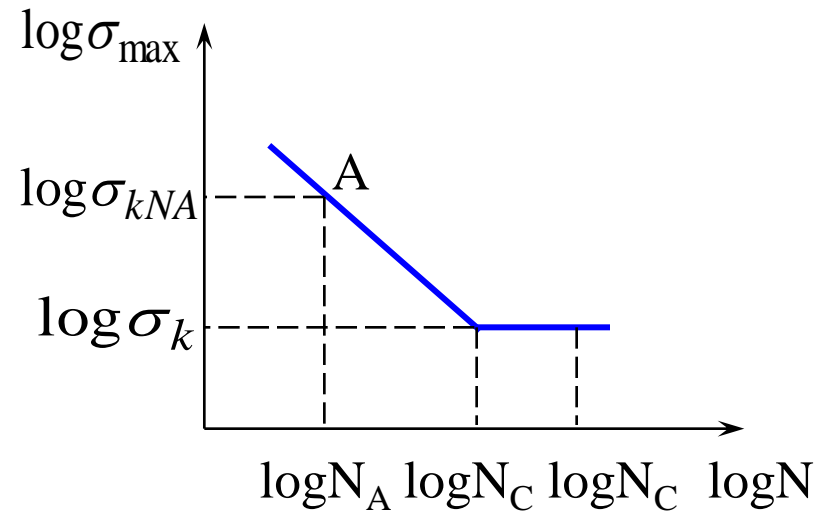
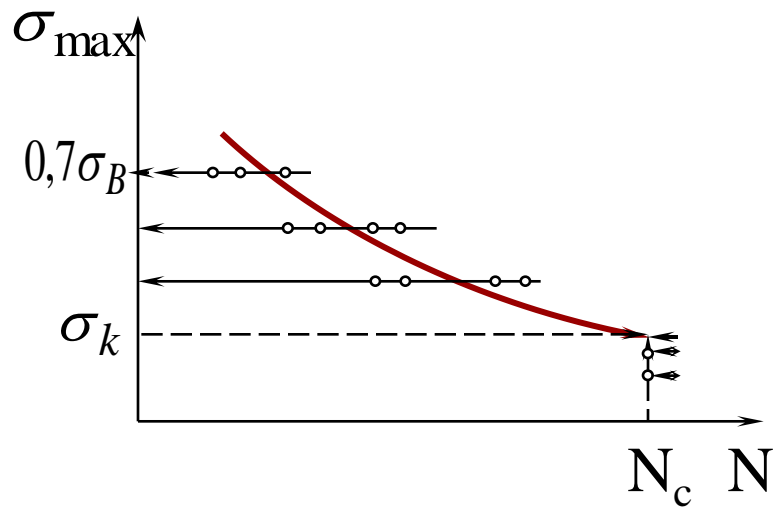
Công thức thực nghiệm gần đúng với thép khi uốn $\sigma_{-1u} \cong 0,4\sigma_B$ khi kéo $\sigma_{-1k} \cong 0,3\sigma_B$ khi xoắn $\tau_{-1x} \cong 0,2\sigma_B$.

$$\sigma_{\max} = \sigma_{tb} + \sigma_a = \frac{\sigma_{\max}(1+k)}{2} + \frac{\sigma_{\max}(1-k)}{2} \quad (14.4)$$

$$\longrightarrow \sigma_k = \frac{\sigma_c(1+k)}{2} + \frac{\sigma_{-1}(1-k)}{2} \quad (14.6)$$

k - hệ số không đối xứng của chu kỳ, xác định theo (14. 1).

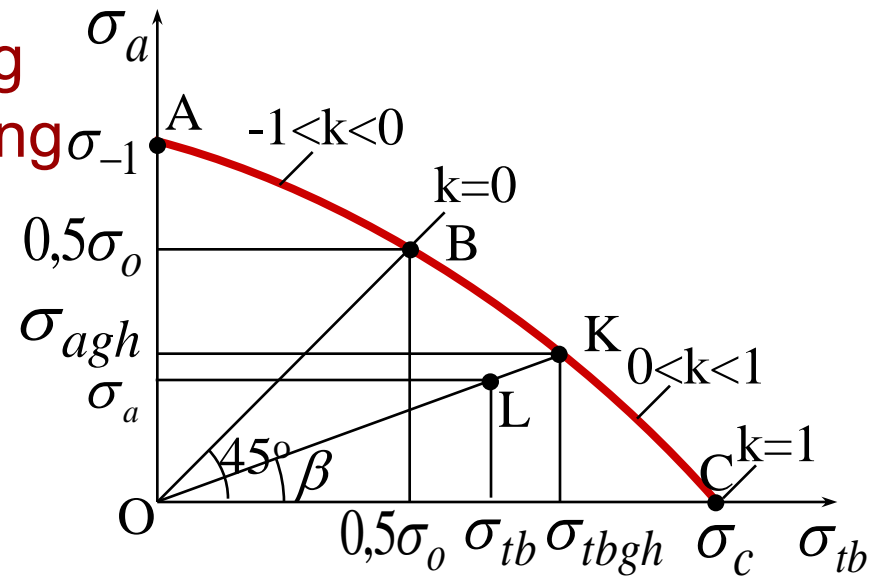
Thông thường đường cong mỏi được vẽ trong hệ tọa độ logarit .



14.4. Biểu đồ biên độ giới hạn trong hệ tọa độ σ_{tb}, σ_a

Những điểm nằm trên đường **ABC** đặc trưng cho các chu kỳ giới hạn, khi đó ứng suất cực đại là giới hạn mỏi với các hệ số không đối xứng của chu kỳ khác nhau: $\sigma_{\max} = \sigma_{tb} + \sigma_a = \sigma_k$

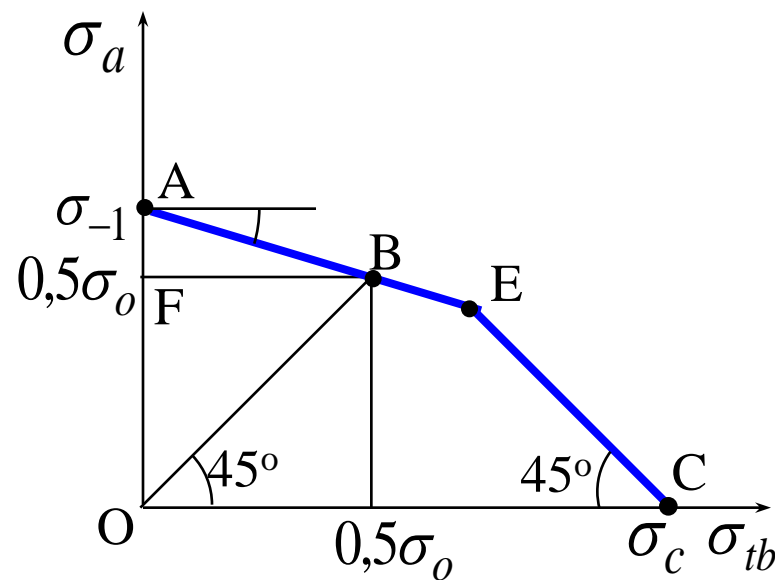
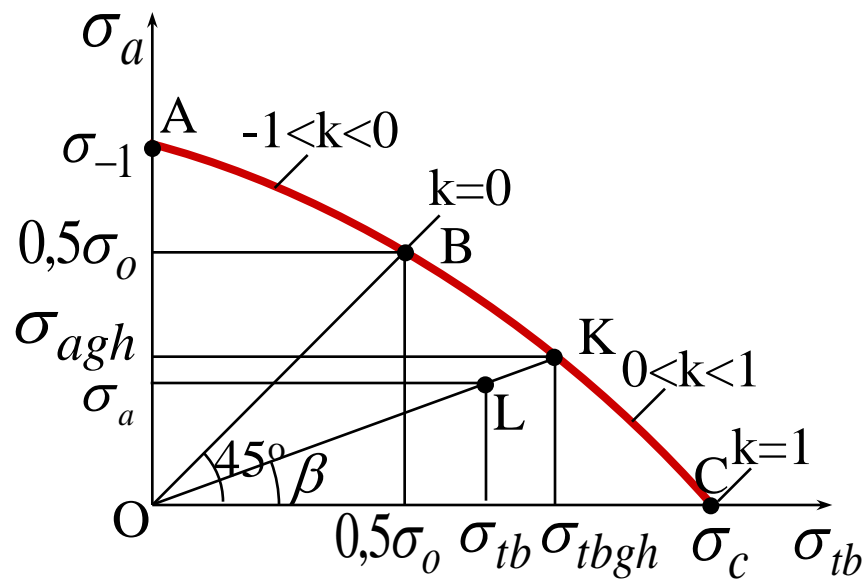
Các điểm nằm bên dưới đường **ABC** diễn tả những chu kỳ không làm phá hủy mẫu thử trước số chu kỳ cơ sở N_c . Những điểm nằm bên trên đường **AC** ứng với các chu kỳ mà mẫu thử bị phá hủy với số chu kỳ $N < N_c$.



Tia đi qua gốc tọa độ là quỹ

tích của những điểm (K,L) đặc trưng cho các chu kỳ đồng dạng (có cùng hệ số k).

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_{tb}} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{1 - k}{1 + k}$$



Phương pháp của Kinaxôvili : biểu đồ được vẽ từ 3 điểm A (σ_{-1}), B (σ_0), C (σ_c).

Phần trái của biểu đồ là đường thẳng AE

Phần phải là đường thẳng EC đi qua điểm C và nghiêng với trục hoành độ một góc bằng 45° để đảm bảo độ bền tĩnh:

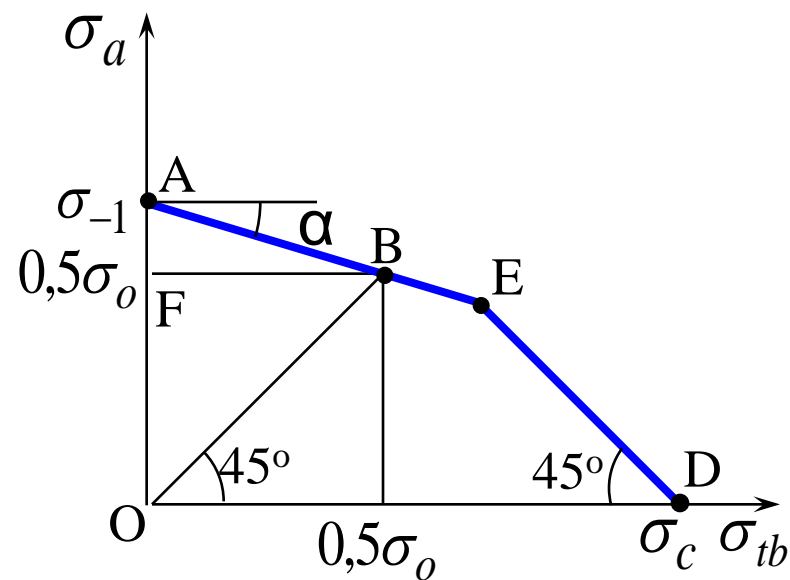
$$\sigma_{\max} = \sigma_{tb} + \sigma_a < \sigma_c \quad (\sigma_c - \text{giới hạn chảy}).$$

Biên độ giới hạn của các mẫu thử chịu ứng suất biến đổi theo chu kỳ không đối xứng được xác định từ phương trình của đường thẳng AE :

$$\sigma_{ak} = \sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_{tbk}; \tau_{ak} = \tau_{-1} - \psi_{\tau} \tau_{tbk}$$

Trong đó
$$\psi_{\sigma} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{AF}{FB} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}; \psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}$$

là hệ số đặc trưng cho độ nhạy của vật liệu đối với chu kỳ không đối xứng. Đối với thép khi thiếu các số liệu thực nghiệm về σ_{-1}, σ_0 hay τ_{-1}, τ_0 , giá trị của các hệ số $\psi_{\sigma}, \psi_{\tau}$ được xác định theo các công thức thực nghiệm:



$$\psi_{\sigma} = 0,02 + 0,0002\sigma_B. \quad (\sigma_B \text{ tính bằng MPA})$$

$$\psi_{\tau} = 0,5\psi_{\sigma}.$$

(14. 7)

14.5. Các yếu tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi.

1/ Sự tập trung ứng suất;

2/ Yếu tố kích thước;

3/ Chất lượng gia công bề mặt;

4/ Các yếu tố sử dụng (sự ăn mòn, nhiệt độ, tần số của các chu kỳ ứng suất v.v...);

5/ Sự làm chặt bề mặt.

14.5.1. Sự tập trung ứng suất.

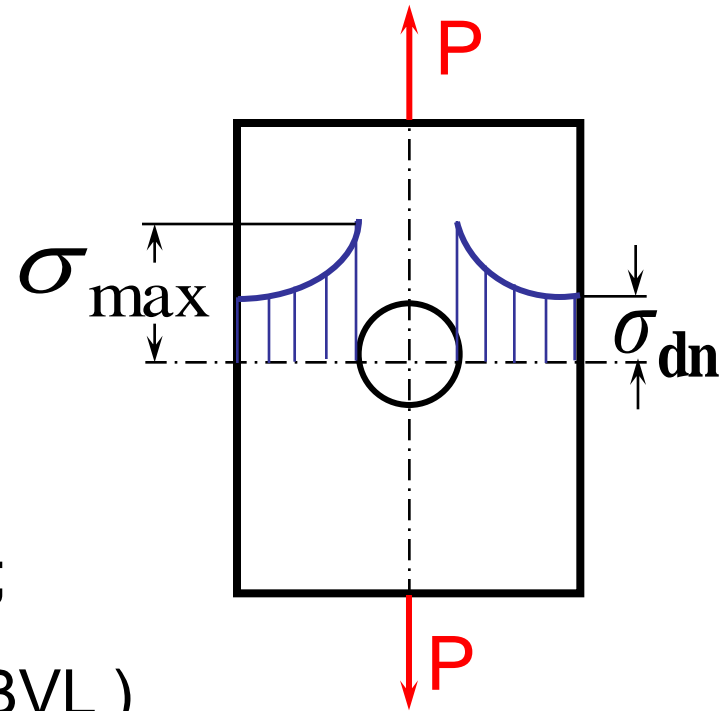
Hệ số tập trung ứng suất lý thuyết

$$\alpha_{\sigma} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{dn}}; \alpha_{\tau} = \frac{\tau_{max}}{\tau_{dn}},$$

σ_{max}, τ_{max} - ứng suất cực đại cục bộ;

σ_{dn}, τ_{dn} - ứng suất danh nghĩa (SBVL)

khi kéo hay nén $\sigma_{dn} = \frac{N}{F}$, khi uốn $\sigma_{dn} = \frac{M_u}{W_u}$; khi xoắn $\tau_{dn} = \frac{M_x}{W_x}$.

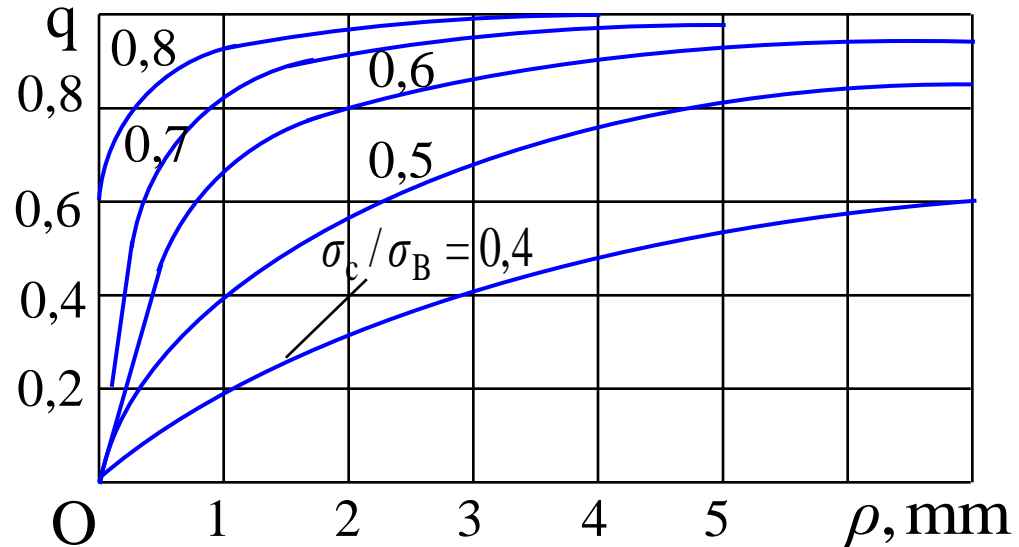


Hệ số tập trung ứng suất thực tế :

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1t}}; \quad K_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1t}}.$$

σ_{-1}, τ_{-1} - giới hạn mỏi của mẫu thử nhẵn;

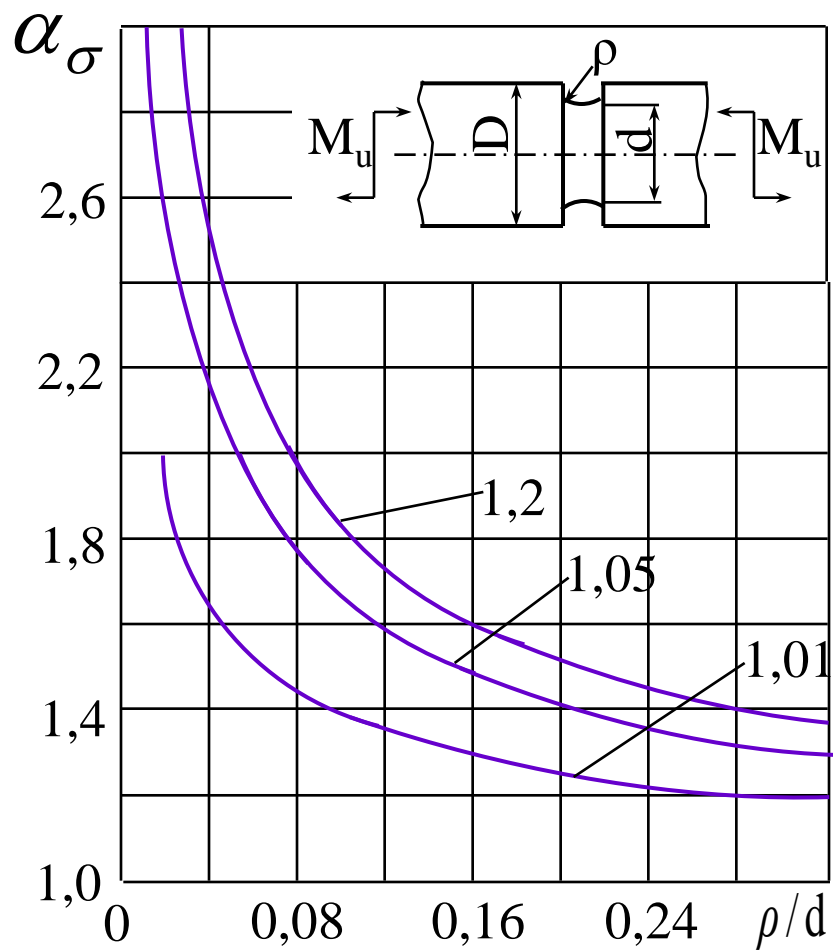
σ_{-1t}, τ_{-1t} - giới hạn mỏi của mẫu thử có tập trung ứng suất.



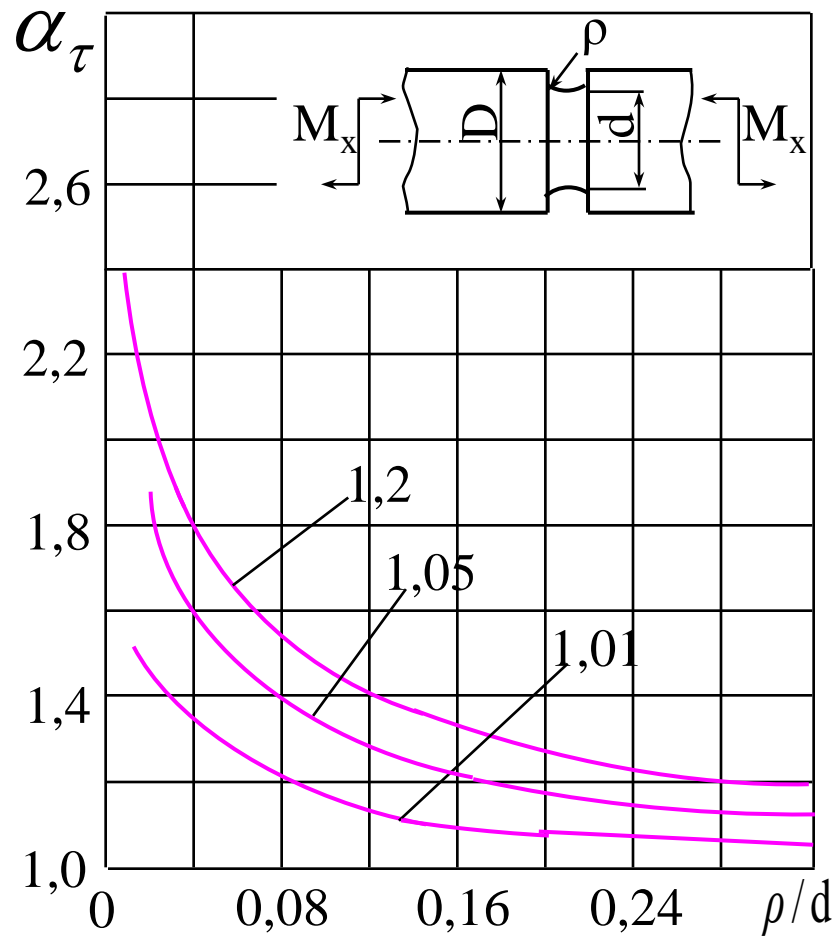
$$K_{\sigma} = 1 - q(\alpha_{\sigma} - 1) ; \quad K_{\tau} = 1 - q(\alpha_{\tau} - 1)$$

q - hệ số nhạy của vật liệu đối với sự tập trung ứng suất .

a/



b/



14.5.2. Yếu tố kích thước.

Giới hạn mỏi giảm khi tăng kích thước ngang của chi tiết do:

- Tăng độ không đồng nhất của kim loại.
- Khi gia công cơ khí sẽ tạo ra sự biến cứng trong lớp bề mặt của chi tiết ở độ sâu tương đối nhỏ hơn khi các chi tiết có các kích thước ngang lớn hơn.
- Yếu tố thống kê đặc trưng cho sự gia tăng xác suất xuất hiện những khuyết tật khi tăng kích thước ngang.
- Ảnh hưởng của chiều dài chi tiết đến giới hạn mỏi là không rõ rệt

Hệ số kích thước : $K_{d\sigma} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}}$; $K_{d\tau} = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1}}$,

σ_{-1d}, τ_{-1d} - giới hạn mỏi của mẫu thử nhẵn có đường kính d ;

σ_{-1}, τ_{-1} - giới hạn mỏi của mẫu thử nhẵn có đường kính tiêu chuẩn $d_0 = 0,75$ cm.

Công thức thực nghiệm: $K_{d\sigma} = K_{d\tau} = 1 - 0,154 \log \frac{d}{D}$ (d < 150 mm);
 $K_{d\sigma} = K_{d\tau} = 0,8$ (d > 150 mm).

14.5.3 Chất lượng gia công bề mặt.

$$K_{F\sigma} = \frac{\sigma_{-1g}}{\sigma_{-1}} ; \quad K_{F\tau} = \frac{\tau_{-1g}}{\tau_{-1}} ,$$

σ_{-1g}, τ_{-1g} - giới hạn mỏi của mẫu thử có chất lượng gia công bề mặt cho trước;

σ_{-1}, τ_{-1} - giới hạn mỏi của mẫu thử có bề mặt được đánh bóng.

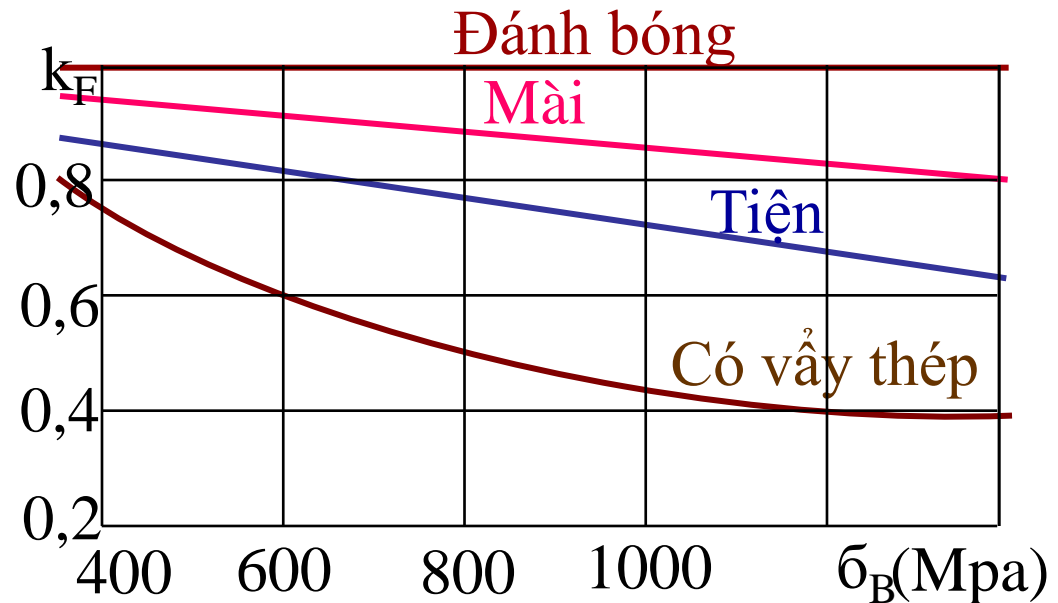
Công thức thực nghiệm :

$$K_{F\sigma} = 1 - 0,22 \log R_z \left(\log \frac{\sigma_B}{20} - 1 \right)$$

$$K_{F\tau} = 0,575 K_{F\sigma} + 0,425 .$$

σ_B được tính bằng MPa

R_z - thông số đặc trưng cho độ nhẵn bề mặt (μ).

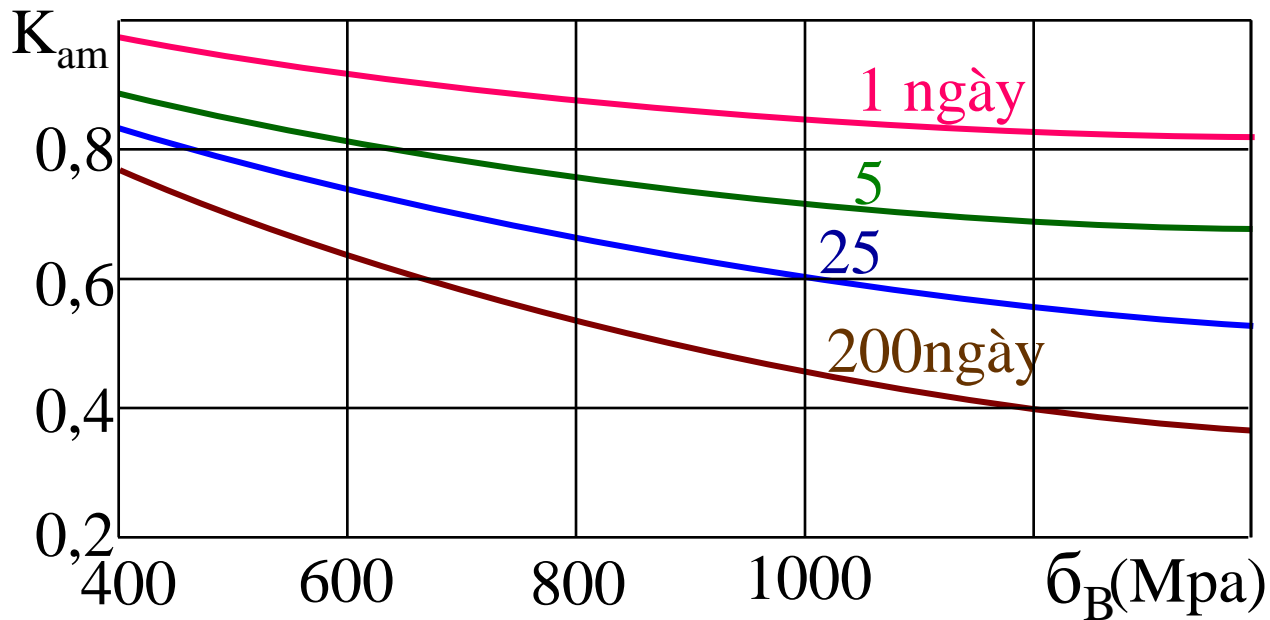


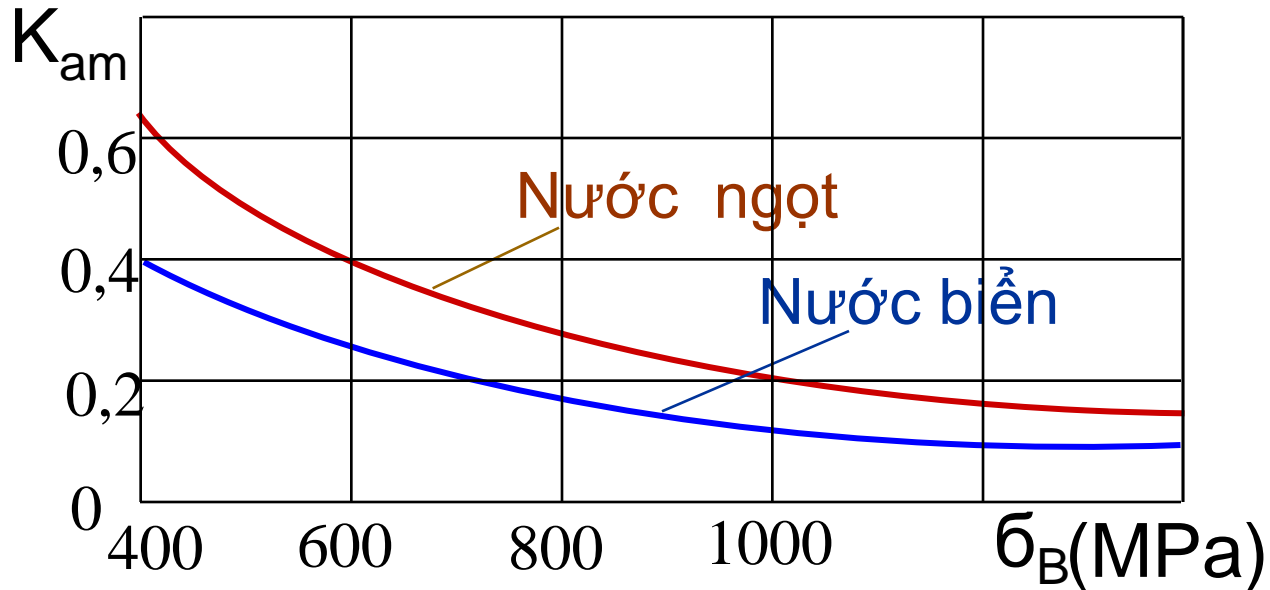
• **14.5.4 Các yếu tố sử dụng, ảnh hưởng của môi trường ăn mòn:**

$$K_{am} = \frac{\sigma_{-1am}}{\sigma_{-1kh}} .$$

σ_{-1am} – giới hạn mỏi của mẫu thử trong môi trường ăn mòn;

σ_{-1kh} - giới hạn mỏi của mẫu thử trong môi trường không khí.





* Thực nghiệm cho thấy ở nhiệt độ thấp giới hạn mỏi tăng lên chút ít còn ở nhiệt độ cao giới hạn mỏi lại giảm.

* Ở nhiệt độ bình thường và không bị ăn mòn nếu tần số của các chu kỳ tăng lên từ 30 Hz lên 1000 Hz sẽ làm tăng giới hạn mỏi lên 10-20%, nếu giảm tần số từ 30 Hz xuống 0,1 Hz sẽ làm giảm giới hạn mỏi tới 10-15%.

* Dạng của chu kỳ ứng suất không ảnh hưởng đến giới hạn mỏi (trong mỗi chu kỳ ứng suất có thể biến đổi theo quy luật bất kỳ chứ không nhất thiết chỉ là hình sin).

14.5.5. Làm chặt bề mặt.

$$K_v = \frac{\sigma_{-1cm}}{\sigma_{-1}},$$

σ_{-1cm} - giới hạn mỏi của mẫu thử được làm chặt bề mặt;

σ_{-1} - giới hạn mỏi của mẫu thử không được làm chặt bề mặt.

Hệ số K_v

Bảng 14. 1

| Phương pháp làm chặt bề mặt | Loại mẫu thử | Đường kính mẫu thử | |
|----------------------------------|-----------------------|--------------------|------------|
| | | 7 - 20 mm | 20 - 40 mm |
| Tôỉ bằng dòng điện cao tần | Không ưs tập trung | 1,3...1,6 | 1,2...1,5 |
| | Có ưng suất tập trung | 1,6...2,8 | 1,5...2,5 |
| Thấm Nitơ ở độ sâu 0,1... 0,4 mm | Không ưs tập trung | 1,15...1,25 | 1,1...1,15 |
| | Có ưng suất tập trung | 1,9...3,0 | 1,3...2,0 |

14.5.6 .Ảnh hưởng đồng thời của tất cả các yếu tố.

$$\sigma_{-1CT} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma CT}}; \quad \tau_{-1CT} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau CT}};$$

$\sigma_{-1}; \tau_{-1}$ – giới hạn mỏi của mẫu thử tiêu chuẩn;

$K_{\sigma CT}; K_{\tau CT}$ – hệ số hạ thấp giới hạn mỏi của chi tiết khi uốn hay khi xoắn được xác định theo công thức:

$$K_{\sigma CT} = \left(\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \frac{1}{K_v}; \quad K_{\tau CT} = \left(\frac{K_{\tau}}{K_{d\tau}} + \frac{1}{K_{F\tau}} - 1 \right) \frac{1}{K_v}. \quad (14.10)$$

$K_{\sigma}; K_{\tau}$ -Hệ số tập trung ứng suất khi uốn hay xoắn;

$K_{d\sigma}; K_{d\tau}$ -Hệ số kích thước khi uốn hay xoắn;

$K_{F\sigma}; K_{F\tau}$ -Hệ số tính đến ảnh hưởng của chất lượng gia công bề mặt khi uốn hay xoắn;

K_v - Hệ số tính đến ảnh hưởng của phương pháp làm chặt bề mặt. Khi có tác dụng ăn mòn của môi trường hệ số K_F trong công thức (14. 10) được thay thế bằng hệ số K_{am} .

14.6. Tính toán độ bền trong chế độ chịu tải bình ổn.

Chế độ chịu tải bình ổn là chế độ khi ứng suất trung bình σ_{tb} và biên độ ứng suất σ_a không thay đổi theo thời gian.

Tính toán độ bền là tính toán kiểm tra:

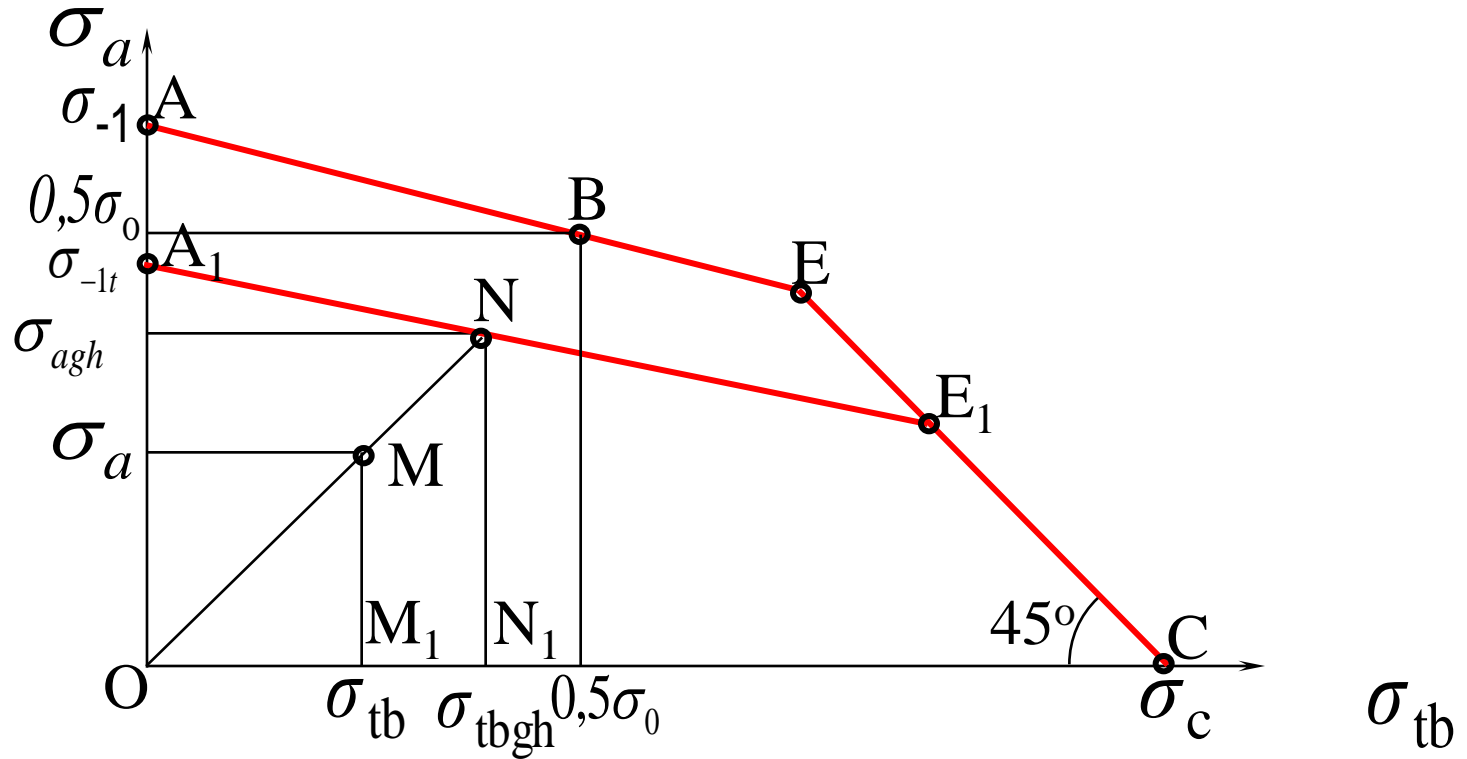
$$n \geq [n] \quad (14. 11)$$

n - hệ số an toàn tính toán theo ứng suất chu kỳ;

$[n]$ - hệ số an toàn cho phép được xác định từ kinh nghiệm sử dụng và tùy thuộc vào nhiệm vụ của chi tiết, điều kiện làm việc, độ chính xác của phương pháp tính và mức độ tin cậy của các thông tin về đặc trưng cơ học của vật liệu. Thường thì $[n] = 1,3 \dots 3$.

Tính toán theo hệ số an toàn cho phép được thực hiện cho trạng thái ứng suất đơn. Nếu kết quả tính toán thỏa mãn điều kiện (14. 11) người ta cho rằng chi tiết có thể làm việc lâu dài vô hạn.

Khi chu kỳ ứng suất không đối xứng n_σ được xác định theo đồ thị:



Hàm số biên độ giới hạn của mẫu thử tiêu chuẩn (hai đường thẳng AE và EC) có dạng:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_a \sigma_{tb} \quad \text{và} \quad \sigma_a = \sigma_c - \sigma_{tb} .$$

Rất nhiều thực nghiệm đã xác nhận rằng hàm số biên độ giới hạn đối với chi tiết thực cũng có thể diễn tả bằng hai đường thẳng $A_1E_1 // AE$ và đường E_1C . Đường A_1E_1 có phương trình :

$$\sigma_a = \frac{1}{K_{\sigma d}} (\sigma_{-1} - \psi_{\sigma} \sigma_{tb}). \quad (14. 12)$$

Giả sử có điểm $M[\sigma_{tb}, \sigma_a]$ diễn tả một chu kỳ làm việc và điểm $N[\sigma_{mgh}; \sigma_{agh}]$ nằm trên đường A_1E_1 diễn tả diễn tả trạng thái căng giới hạn đồng dạng với chu kỳ làm việc nghĩa là có cùng hệ số không đối xứng k (điểm M và N nằm trên cùng một tia đi qua gốc O). Hệ số an toàn là tỷ số:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_t}{\sigma_{max}} \quad (14.13)$$

$\sigma_{kt} = \sigma_{tbgh} + \sigma_{agh}$ - là ứng suất cực đại của chu kỳ giới hạn (giới hạn mỗi của chi tiết với hệ số không đối xứng k);

$\sigma_{max} = \sigma_{tb} + \sigma_a$ - ứng suất cực đại của chu kỳ làm việc.

Từ các tam giác đồng dạng ONN_1 và OMM_1 ta có:

$$\frac{ON}{OM} = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{NN_1}{MM_1}$$

Khi đó

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{tbgh}}{\sigma_{tb}} = \frac{\sigma_{agh}}{\sigma_a} \quad (14.14)$$

Thay tọa độ của điểm N vào phương trình (14. 12) ta có:

$$\sigma_{agh} = \frac{I}{K_{\sigma d}} (\sigma_{-1} - \psi_a \sigma_{tbgh}). \quad (14. 15)$$

$$(14.15) + (14.14) \rightarrow n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1} \psi_a \sigma_{tbgh}}{K_{\sigma d} \sigma_a} \quad (14. 16)$$

$$(14.14) + (14.16) \rightarrow n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_a \sigma_{tb} n_{\sigma}}{K_{\sigma d} \sigma_a}. \quad (14. 17)$$

$$(14.17) \rightarrow n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma d} \sigma_a + \psi_a \sigma_{tb}}. \quad (14. 18)$$

Nếu chu kỳ làm việc không đối xứng ứng với khi điểm giới hạn N nằm trên đường $E_1 D_1$:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_c}{\sigma_a + \sigma_{tb}}. \quad (14. 19)$$

Trong thực tế tính toán để tránh tổn công sức trong quá trình chọn công thức tính toán, hệ số an toàn n_σ được tính theo hai công thức (14.18) và (14.19) sau đó chọn giá trị nhỏ hơn.

Khi chi tiết chịu biến dạng kéo-nén, trong công thức (14.18) σ_{-1} được thay bằng σ_{-1k} .

Chi tiết chịu biến dạng xoắn: (14.18) và (14.19) \longrightarrow

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau d} \tau_a + \psi_a \tau_{tb}} \quad (14.20) \quad n_\tau = \frac{\tau_c}{\tau_a + \tau_{tb}} \quad (14.21')$$

Khi chi tiết chịu biến dạng uốn cộng xoắn : công thức kinh nghiệm

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2} \quad (14.22)$$

Trong đó n_σ và n_τ được xác định theo các công thức (14. 18), (14, 19), (14. 20), (14. 21).

$$(14.22) \longrightarrow n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (14.23)$$

Chương 15

TÍNH TOÁN ĐỘ BỀN THEO TRẠNG THÁI GIỚI HẠN

15.1. Khái niệm và giả thiết.

Điều kiện bền theo quan điểm tính toán theo ứng suất cho phép:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_o}{n}.$$

Vật liệu dẻo : $\sigma_o = \sigma_c$; vật liệu giòn : $\sigma_o = \sigma_B$; n là hệ số an toàn.

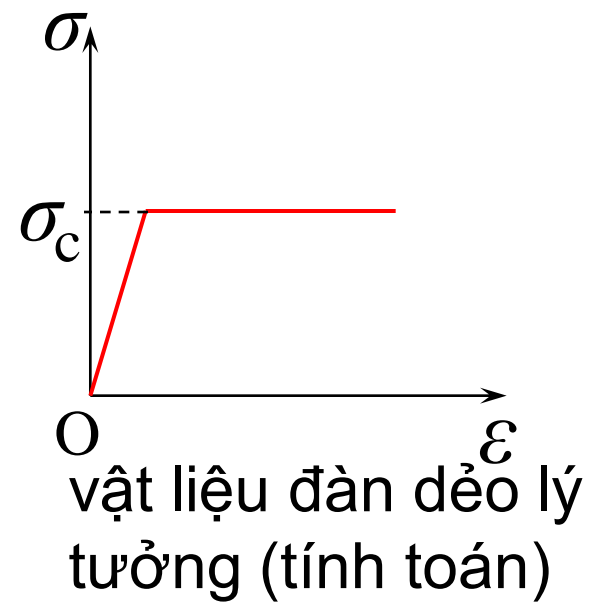
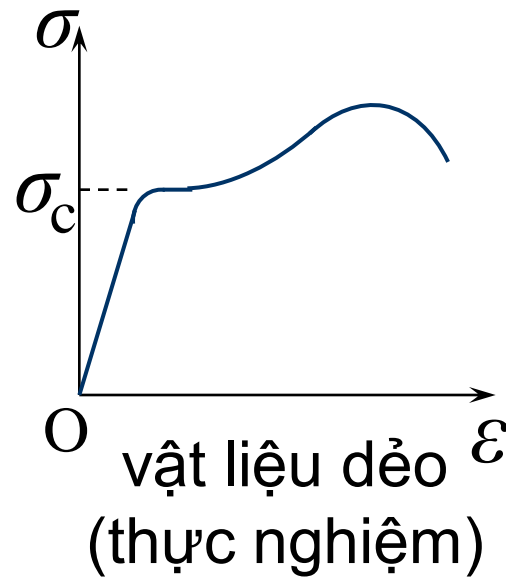
Tính toán độ bền theo ứng suất cho phép chưa đánh giá hết khả năng chịu lực của toàn bộ kết cấu.

Trạng thái giới hạn, tải trọng giới hạn (P_{gh}).

Điều kiện bền theo trạng thái giới hạn:

$$P \leq \frac{P_{gh}}{n} = [P].$$

Biểu đồ ứng suất quy ước



Cách tính này sẽ tận dụng được khả năng làm việc của vật liệu, tiết kiệm vật liệu song chỉ phù hợp với các bộ phận máy móc công trình cho phép làm việc với biến dạng lớn và cũng bị hạn chế khi tải trọng động.

15.2. Hệ thanh chịu kéo nén.

1. Hệ tĩnh định

Kéo, nén đúng tâm : ứng suất phân bố đều trên mặt cắt ngang. Tính theo ứng suất cho phép và tính theo trạng thái giới hạn cho cùng một kết quả.

2. Hệ thanh siêu tĩnh.

Thí dụ 15. 1. Xác định tải trọng giới hạn theo phương pháp ứng suất cho phép và phương pháp trạng thái giới hạn khi các thanh AB, AC và AD có cùng mặt cắt ngang diện tích F, làm bằng cùng một loại vật liệu có giới hạn chảy σ_c .

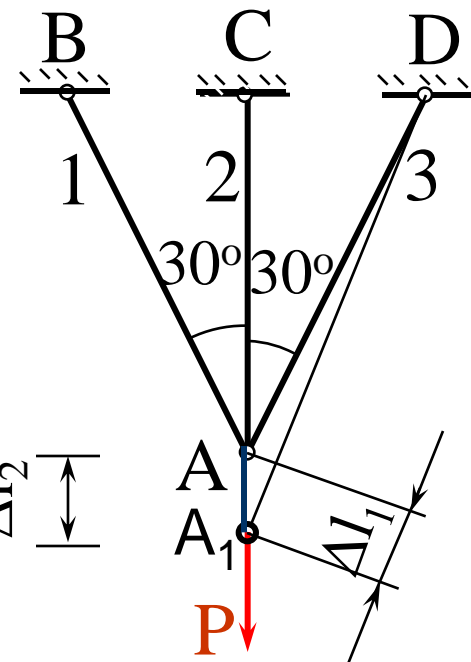
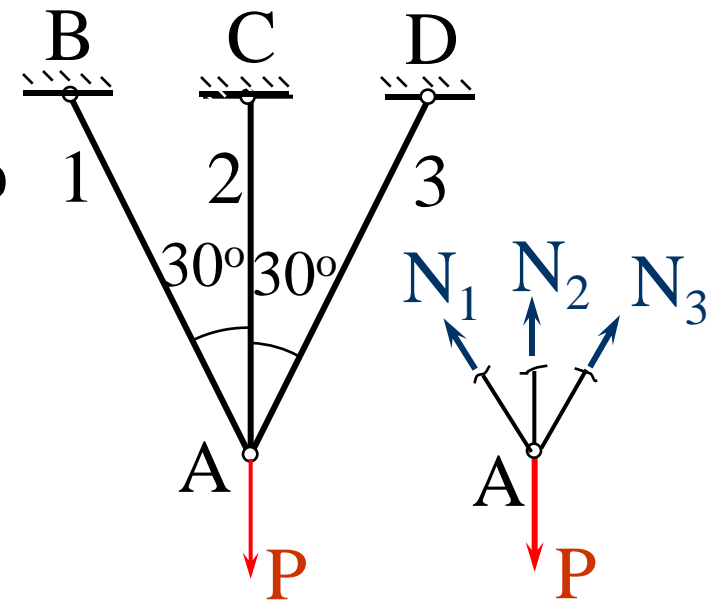
Hệ được xét đối xứng đối với trục AC:
 - $N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 30^\circ = 0$, $\longrightarrow N_1 = N_3$.

Xét sự cân bằng của nút A

$$2N_1 \cos 30^\circ + N_2 - P = 0 ;$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos 30^\circ ;$$

$$\frac{N_1 l_1}{EF} = \frac{N_2 l_2}{EF} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad l_2 = l_1 \cos 30^\circ = l_1 \frac{\sqrt{3}}{2} .$$



Hệ được xét đối xứng đối với trục AC: $N_1=N_3$.

Điều kiện cân bằng của nút A:

$$2N_1 \cos 30^\circ + N_2 - P = 0;$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos 30^\circ;$$

$$\frac{N_1 l_1}{EF} = \frac{N_2 l_2}{EF} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$l_2 = l_1 \cos 30^\circ = l_1 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\longrightarrow N_1 = \frac{3}{4} N_2. \longrightarrow N_1 = \frac{3}{4+3\sqrt{3}} P; \quad N_2 = \frac{4}{4+3\sqrt{3}} P.$$

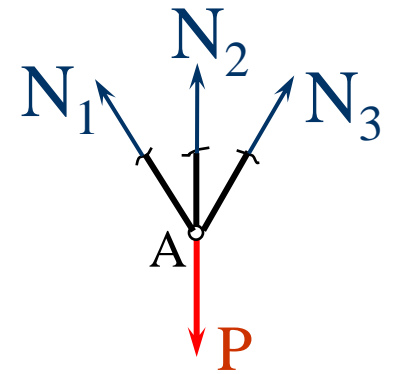
Theo phương pháp ứng suất cho phép

$$P_{gh1} \frac{4}{4+3\sqrt{3}} = F \sigma_c \longrightarrow P_{gh1} = \frac{4+3\sqrt{3}}{4} F \sigma_c$$

Theo phương pháp trạng thái giới hạn:

$$F \sigma_c \sqrt{3} + F \sigma_c = P_{gh2} = F \sigma_c (1 + \sqrt{3});$$

$$\frac{P_{gh2}}{P_{gh1}} = \frac{F \sigma_c (1 + \sqrt{3}) 4}{(4 + 3\sqrt{3}) F \sigma_c} = 1,19.$$



15.3. Thanh chịu xoắn. Theo phương pháp ứng suất cho phép

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{W_p}$$

$$M_{xgh1} = \tau_c W_p = \tau_c 0,2d^3;$$

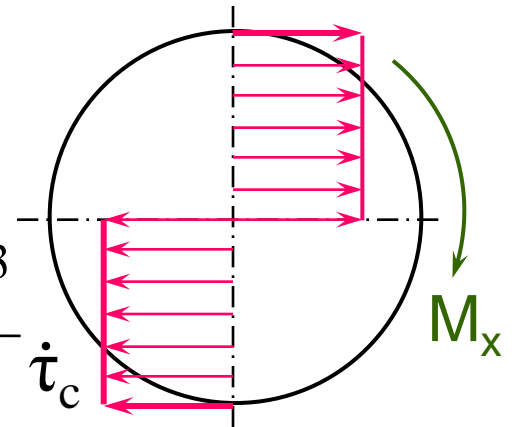
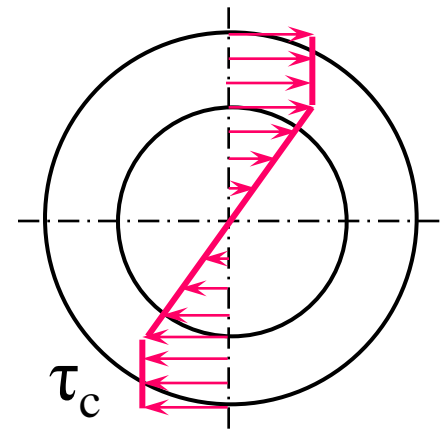
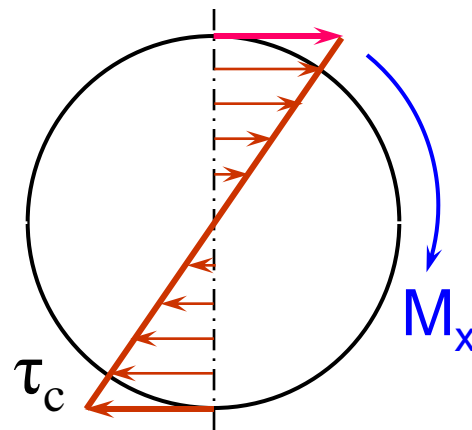
Theo phương pháp trạng thái giới hạn

$$M_{xgh2} = \int_F \tau_c \rho dF = \tau_c \int_0^{D/2} \rho (2\rho\pi d\rho) = \tau_c \frac{\pi D^3}{12} \tau_c$$

Momen chống xoắn dẻo :

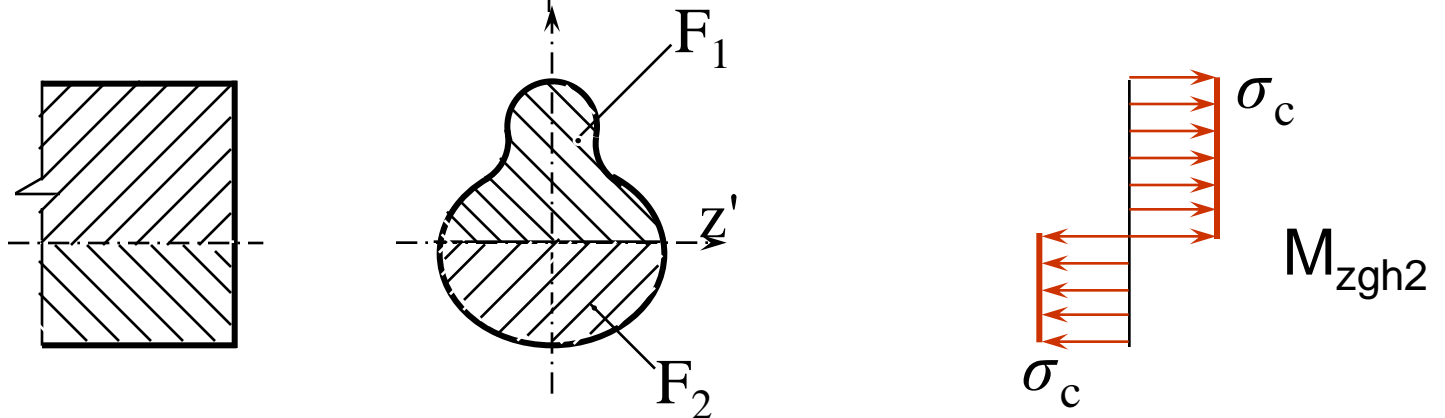
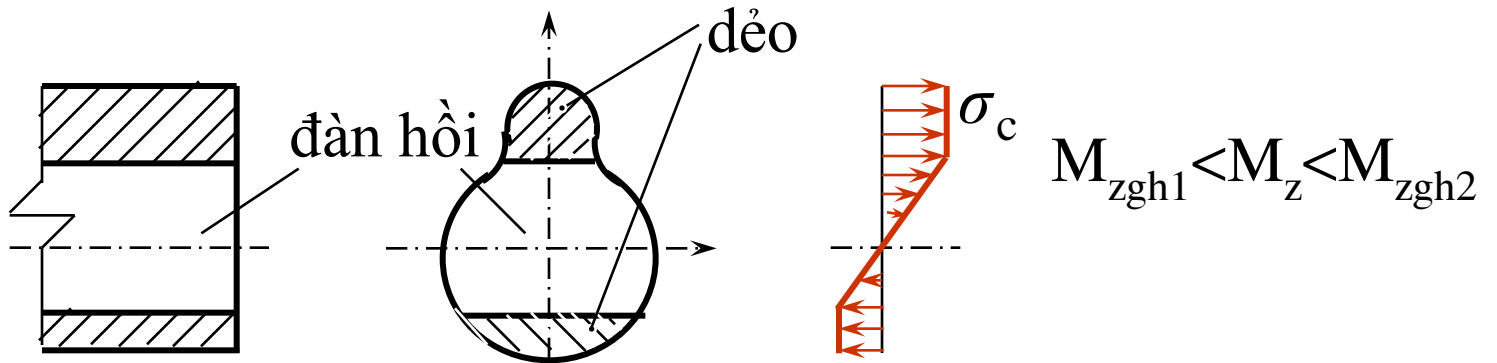
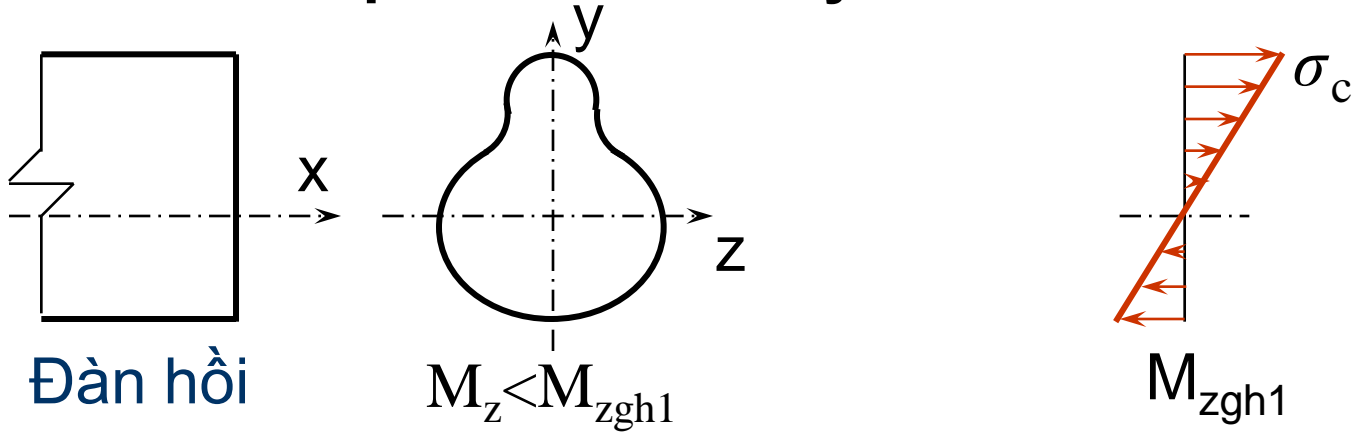
$$W_{pd} = \frac{\pi D^3}{12} \cong 0,267D^3$$

$$M_{xgh2} = W_{pd} \tau_c.$$

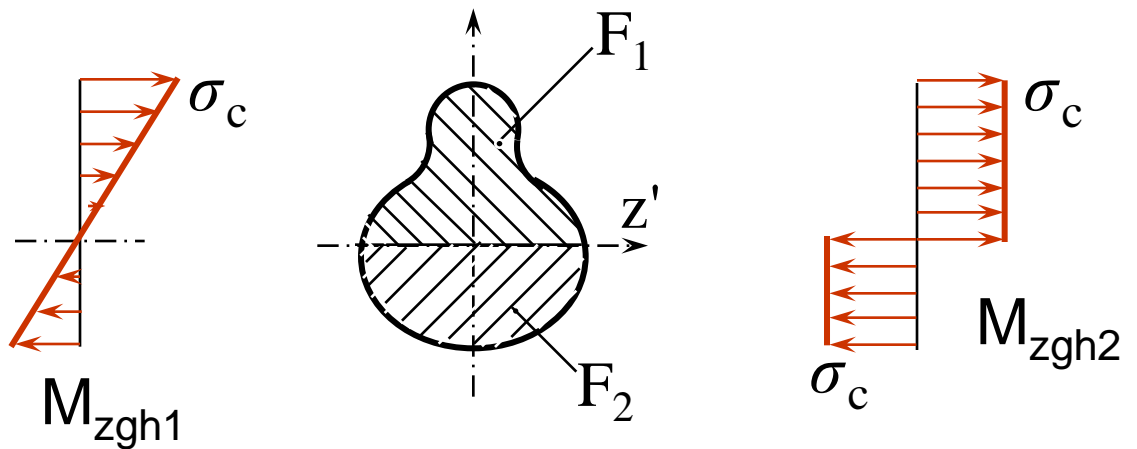


$$\frac{M_{xgh2}}{M_{xgh1}} = \frac{0,267 D^3}{0,2 D^3} = 1,333.$$

15. 4. Thanh chịu uốn thuần túy.



$$M_{zgh1} = \sigma_c W_z \cdot$$



$$M_{zgh2} = \left| \int_{F_1} y_1 \sigma_c dF_1 \right| + \left| \int_{F_2} y_2 \sigma_c dF_2 \right|; M_{zgh2} = \sigma_c (|S_1| + |S_2|),$$

$$S_1 = \int_{F_1} y_1 dF_1; S_2 = \int_{F_2} y_2 dF_2 -$$

là momen tĩnh của các phần diện tích F_1 , F_2 đối với đường trung hoà z' . Tùy theo hình dáng của mặt cắt, z' có thể trùng với z (trục trung hoà trong giai đoạn biến dạng đàn hồi) hay không

$W_d = |S_1| + |S_2|$ - momen chống uốn dẻo ;

$$M_{zgh2} = \sigma_c W_d .$$

$$\Sigma X_i = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\int_{F_1} \sigma_c dF_1 - \int_{F_2} \sigma_c dF_2 = 0. \quad F_1 = F_2.$$

Mặt cắt hình chữ nhật :

$$|S_1| = |S_2| = \frac{bh}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}; \quad W_d = \frac{bh^2}{4}.$$

Mặt cắt hình tròn:

$$|S_1| = |S_2| = \frac{\pi D^2}{8} \frac{2D}{3\pi} = \frac{D^3}{12}; \quad W_d = \frac{D^3}{6}.$$

thép hình chữ I, U có thể tìm S_z theo bảng phụ lục I.

15. 5. Thanh chịu uốn ngang.

15. 5. 1. Hệ tĩnh định.

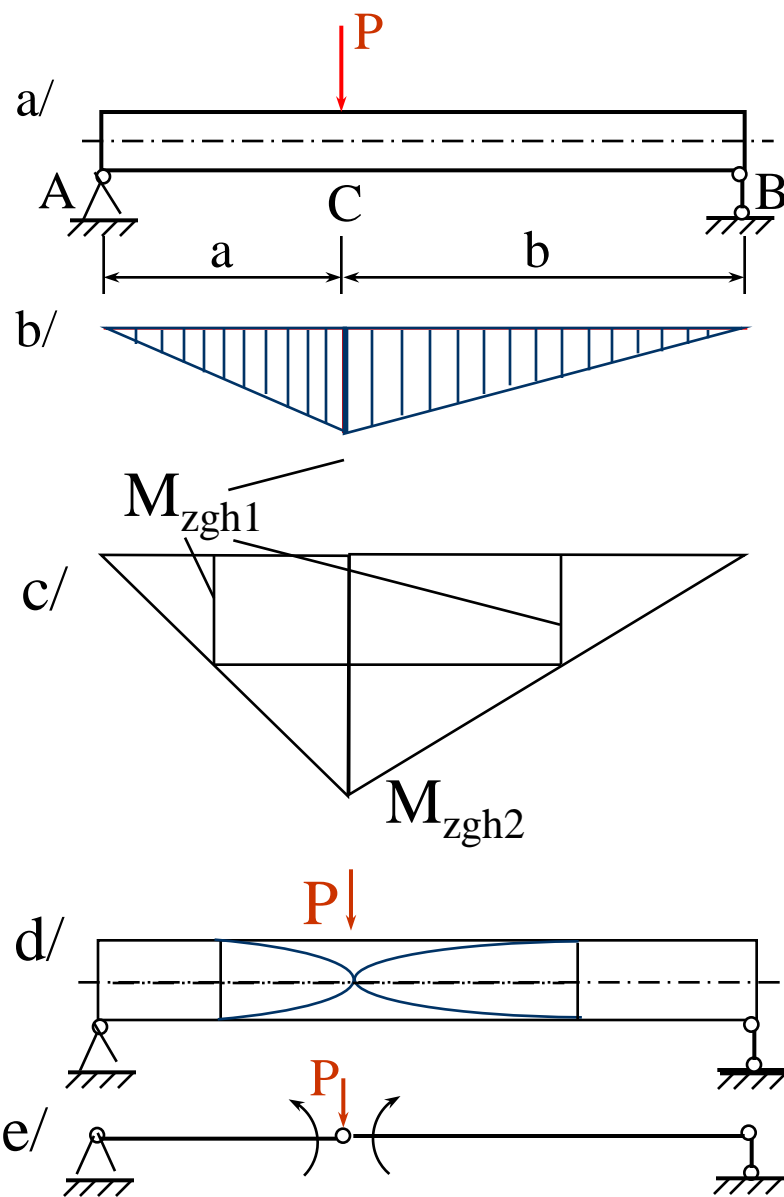
Trong giới hạn đàn hồi, momen uốn cực đại ở mặt cắt chịu lực có giá trị bằng

$$M_c = \frac{Pab}{a+b}$$

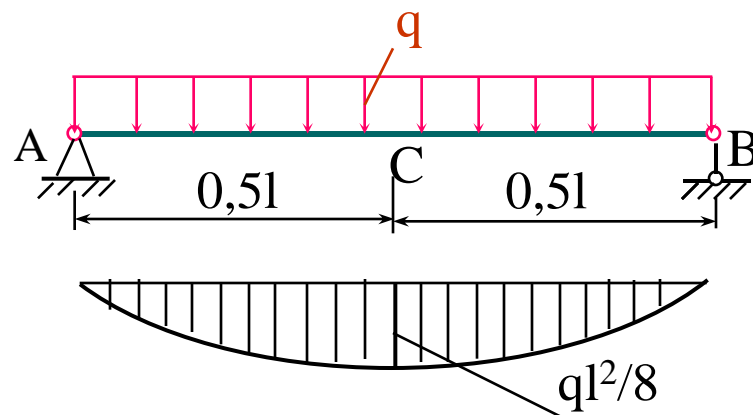
$$M_{zgh1} = \sigma_C W_z \cdot$$

$$M_{zgh2} = \sigma_C (|S_1| + |S_2|) \cdot$$

Tại C hình thành một *khớp dẻo*, dầm mất khả năng nhận thêm tải trọng



Thí dụ 15. 2. Một dầm thép có gối đỡ bản lề ở hai đầu chịu tải trọng phân bố đều q . Xác định cường độ tải trọng giới hạn ứng theo ứng suất cho phép và theo trạng thái giới hạn, biết giới hạn chảy của vật liệu là $\sigma_c = 32\text{kN/cm}^2$; dầm có chiều dài $l = 4\text{m}$; mặt cắt ngang hình chữ nhật có các cạnh $b = 4\text{cm}$; $h = 6\text{cm}$.



Momen uốn có giá trị cực đại ở mặt cắt C của dầm (giữa dầm):

$$M_C = \frac{ql^2}{8}$$

$$M_{zgh1} = \sigma_c W_z = 32 \cdot \frac{4 \cdot 6^2}{6} = q_1 \cdot \frac{400^2}{8}; \quad q_1 = 38,4 \text{ kN/m}.$$

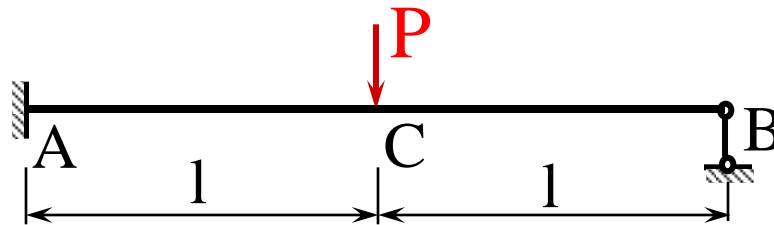
$$M_{zgh2} = \sigma_c W_d = \sigma_c \frac{bh^2}{4} = q_2 \frac{l^2}{8}$$

$$32 \cdot \frac{4 \cdot 6^2}{4} = q_2 \frac{l^2}{8}; \quad q_2 = 0,576 \text{ kN/cm} = 57,6 \text{ kN/m}.$$

15.5.2. Hệ siêu tĩnh.

Số khớp dẻo phải bằng số bậc siêu tĩnh cộng thêm một đơn vị.

Thí dụ 15. 3. Dầm siêu tĩnh chịu tác dụng của lực $P = 50\text{kN}$. Dầm có chiều dài $l = 1\text{m}$, mặt cắt ngang có bề rộng $b = 2/3$ bề cao. Vật liệu làm dầm có giới hạn chảy $\sigma_c = 32\text{kN/cm}^2$. Xác định kích thước của mặt cắt theo phương pháp trạng thái giới hạn nếu hệ số an toàn $n = 2$.

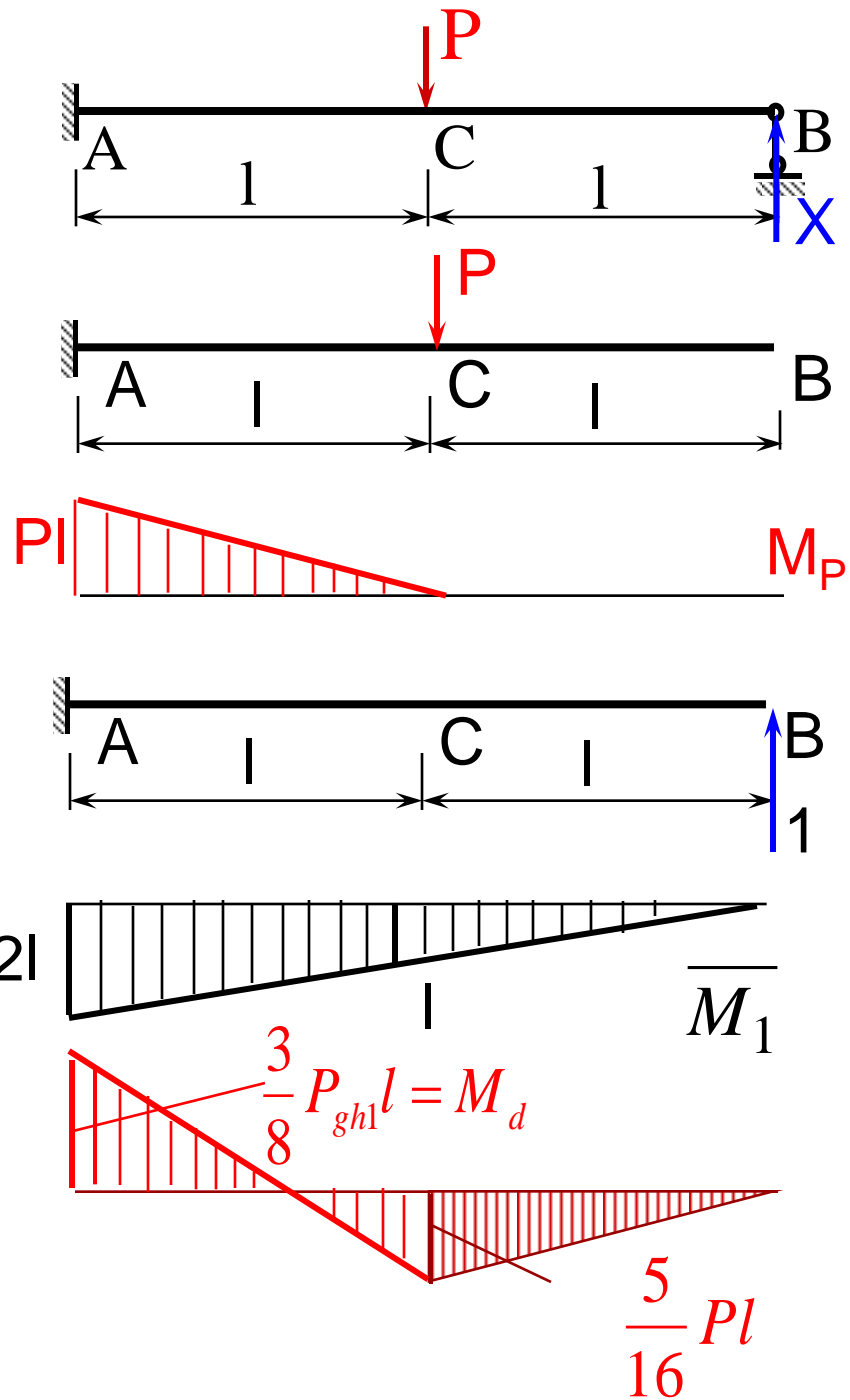


$$\delta_{11}x + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{11} = \frac{2l \cdot 2l \cdot 2l}{3EI} = \frac{8l^3}{3EI};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{Pl \cdot l}{2EI} \cdot \frac{5l}{3} = \frac{5Pl^3}{6EI};$$

$$X = \frac{5P}{16};$$



Trong giai đoạn đàn hồi, biểu đồ momen uốn của dầm một bậc siêu tĩnh này có dạng như trên hình.

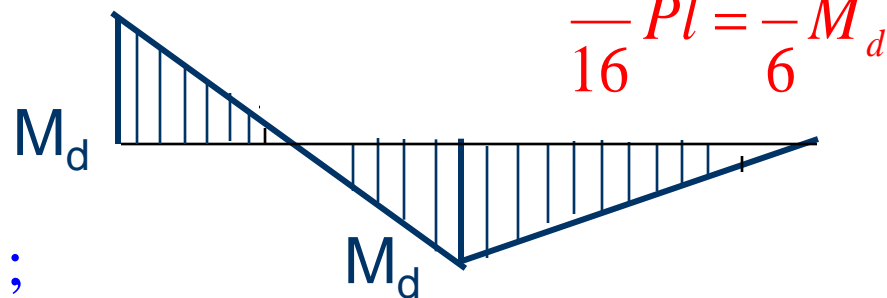
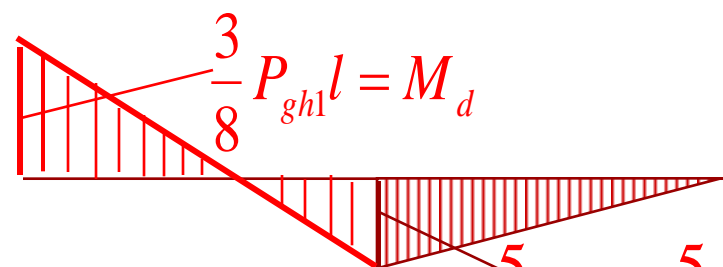
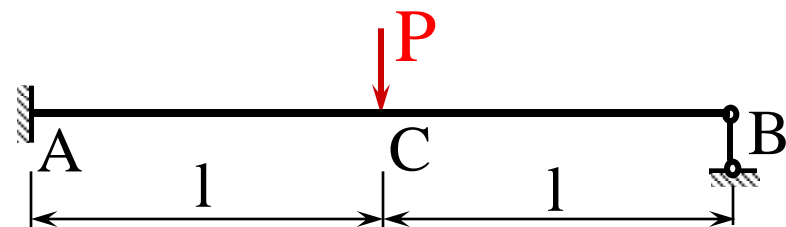
Momen uốn ở mặt cắt A có giá trị lớn nhất

$$M_A = \frac{3}{8} Pl; \quad M_C = \frac{5}{16} Pl;$$

$$M_C = B_{gh}l = M_d; \rightarrow B_{gh} = \frac{M_d}{l};$$

$$M_A = P_{gh}l - B_{gh} \cdot 2l - M_d = 0;$$

$$P_{gh} = \frac{3M_d}{l};$$



Mặt cắt hình chữ nhật

$$W_{zd} = \frac{bh^2}{4} = \frac{h^3}{6} ; M_d = \sigma_c W_{zd} = \frac{\sigma_c h^3}{6}$$

$$M_c = M_d = B_{gh} \cdot l \Rightarrow B_{gh} = \frac{M_d}{l}$$

$$\sum M_A = P_{gh2} \cdot l - B_{gh} \cdot 2l - M_d = 0;$$

$$P_{gh2} = \frac{3M_d}{l} = \frac{\sigma_c h^3}{2l}$$

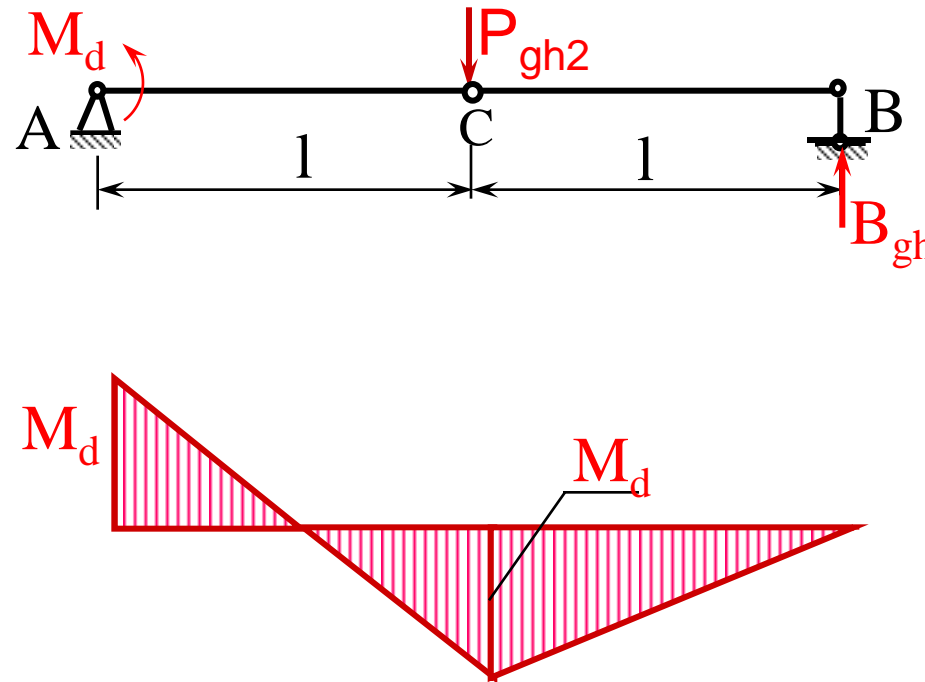
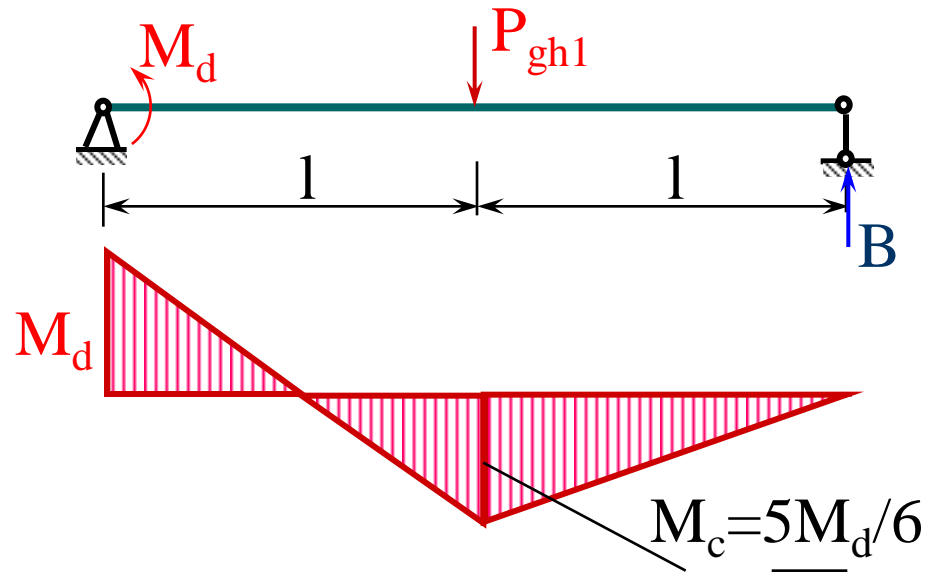
(Hệ số an toàn $n = 2$)

$$nP \leq P_{gh2} = \frac{\sigma_c \cdot h^3}{2l}$$

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{2nP}{\sigma_c}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 100}{32}} ;$$

$$h \sim 8,5 \text{ cm}$$

$$b = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot 8,5 = 5,7 \text{ cm.}$$



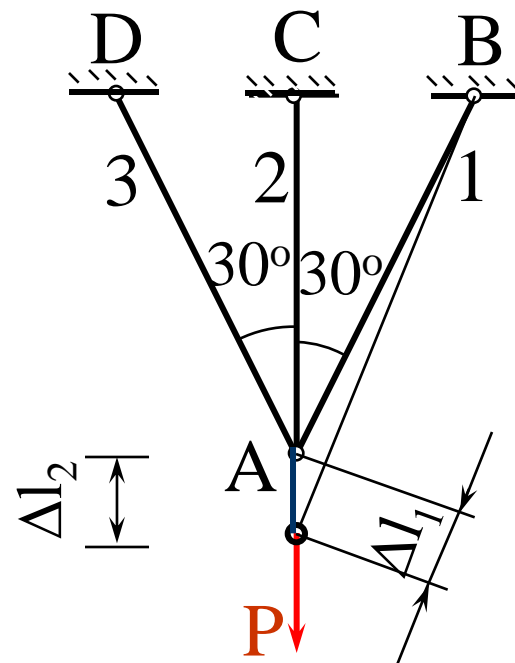
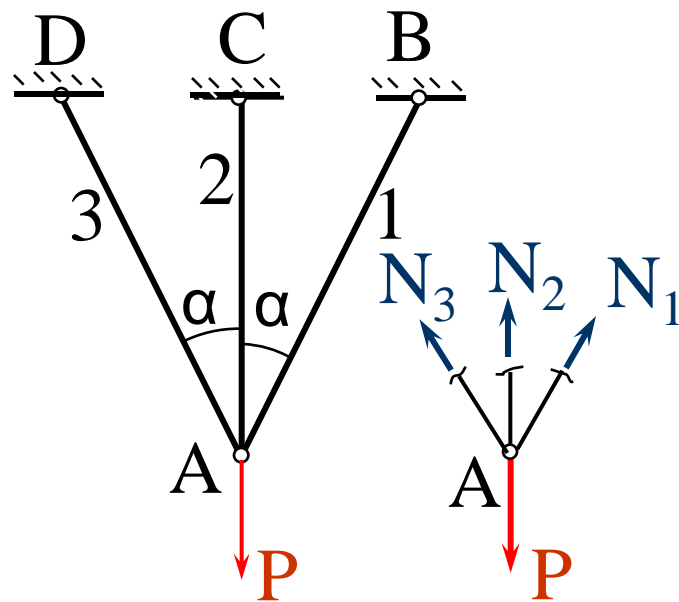
Thí dụ 15.4. Xác định tải trọng giới hạn theo phương pháp ứng suất cho phép và phương pháp trạng thái giới hạn khi các thanh AB, AC và AD có diện tích mặt cắt ngang $F_2, F_1=F_3$, làm bằng cùng một loại vật liệu có giới hạn chảy σ_c và modun đàn hồi E.

Hệ được xét đối xứng đối với trục AC: $N_1=N_3$.

Điều kiện cân bằng của nút A:

$$2N_1 \cos \alpha + N_2 - P = 0; \quad (1)$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cos \alpha; \quad l_2 = l_1 \cos \alpha; \quad (2)$$



$$(2) \longrightarrow \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{N_2 l_2}{EF_2} \cos \alpha; \quad N_1 = \frac{N_2 F_1}{F_2} \cos^2 \alpha;$$

$$+ (1) \longrightarrow N_2 = \frac{PF_2}{F_2 + 2F_1 \cos^3 \alpha}; \quad \sigma_2 = \frac{P}{F_2 + 2F_1 \cos^3 \alpha};$$

$$N_1 = \frac{PF_1 \cos^2 \alpha}{F_2 + 2F_1 \cos^3 \alpha}; \quad \sigma_1 = \frac{P \cos^2 \alpha}{F_2 + 2F_1 \cos^3 \alpha};$$

$$\sigma_2 \geq \sigma_1;$$

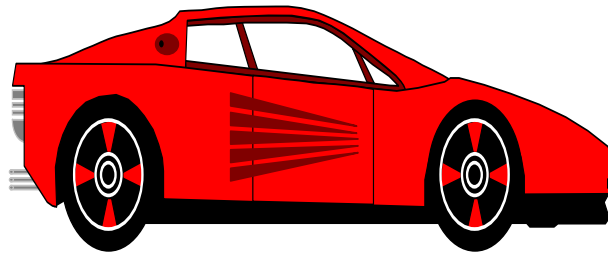
$$P_{gh1} = \sigma_c (F_2 + 2F_1 \cos^3 \alpha);$$

$$(1) \longrightarrow P_{gh2} = 2\sigma_c F_1 \cos \alpha + \sigma_c F_2 \\ = \sigma_c (2F_1 \cos \alpha + F_2).$$

GS. TSKHKT- PHAN KÌ PHÙNG
Ths. THÁI HOÀNG PHONG

GIÁO TRÌNH
SỨC BỀN VẬT LIỆU

TẬP II



ĐÀ NẴNG 2005

LỜI NÓI ĐẦU

Ở tập I chúng tôi đã trình bày những bài toán cơ bản của môn học sức bền vật liệu.

Ngày nay, các ngành công trình, giao thông và cơ khí phải giải quyết nhiều bài toán cơ học phức tạp, đòi hỏi các kỹ sư phải biết nhiều kiến thức rộng hơn, nhìn nhận và giải quyết những bài toán phức tạp có liên quan đến kiến thức đàn hồi, lý thuyết dẻo, lý thuyết từ biến.... Các đối tượng nghiên cứu ngoài những thanh được đề cập trong phần I của giáo trình này, chúng ta còn gặp những vật thể đàn hồi khác như, tấm, vỏ, dầm trên nền đàn hồi, kết cấu thanh thành mỏng, bài toán tiếp xúc... Mỗi vấn đề là một chuyên đề, được nghiên cứu trong những quyển sách dày hàng trăm trang. Chúng tôi thiết nghĩ với sự mở rộng, môn học sức bền vật liệu cũng cần đề cập đến những vấn đề trên ở một khối lượng nhất định để trình bày những kiến thức cơ bản và tối thiểu nhằm giúp các bạn có thể tìm hiểu các vấn đề đó mà trong quá trình học tập công tác có thể gặp phải.

Trong quá trình biên soạn chúng tôi nhận được sự giúp đỡ tận tình của giảng viên cao cấp Phạm Văn Song của Đại học Đà Nẵng. Ông Phạm Văn Song đã đóng góp nhiều ý kiến hay để sửa chữa, chỉnh lý và vi tnh giáo trình này.

Các tác giả thành thật cảm ơn.

Với một khối lượng không nhỏ, dù có cố gắng vẫn không tránh khỏi những thiếu sót về nội dung cũng như hình thức.

Chúng tôi rất mong sự đóng góp của độc giả.

Xin chân thành cảm ơn.

Các tác giả.

| | Trang |
|---|-------|
| MỤC LỤC | |
| Lời nói đầu | |
| Chương 10: Uốn ngang và uốn dọc đồng thời | 10 |
| 10.1. Khái niệm về sự mất ổn định của một hệ đàn hồi | 10 |
| 10.2. Xác định lực tới hạn của thanh chịu nén đúng tâm | 11 |
| 10.3. Giới hạn áp dụng công thức | 13 |
| 10.4. Phương pháp thực hành để tính toán thanh chịu nén | 15 |
| 10.5. Khái niệm về hình dáng hợp lý của mặt cắt ngang và vật liệu khi ổn định | 17 |
| 10.6. Ổn định của dầm chịu nén | 18 |
| 10.7. Ổn định của vành chịu áp suất bên ngoài | 20 |
| | |
| Chương 11: Uốn ngang và uốn dọc đồng thời | 24 |
| 11.1. Khái niệm chung | 24 |
| 11.2. Xác định nội lực theo phương pháp chính tắc | 25 |
| 11.3. Biểu thức của mô men uốn và lực cắt bằng phương pháp gần đúng | 29 |
| 11.4. Kiểm tra bền | 31 |
| | |
| Chương 12: Thanh cong phẳng | 33 |
| 12.1. Khái niệm chung. | 33 |
| 12.2. Ứng suất pháp trong thanh cong phẳng. | 33 |
| 12.2.1. Thanh cong chịu uốn thuần túy. | 33 |
| 12.2.2. Thanh cong chịu uốn đồng thời với kéo (nén đúng tâm). | 36 |
| | |
| Chương 13: Tính chuyển vị của hệ thanh | 39 |
| 13.1. Nguyên lý chuyển vị khả dĩ. | 39 |
| 13.2. Công thức Mohr để xác định chuyển vị. | 40 |
| 13.3. Một số định lý quan trọng. | 44 |
| 13.3.1. Định lý về công tương hỗ (còn gọi là định lý Betti). | 44 |
| 13.3.2. Định lý về chuyển vị tương hỗ | 44 |
| 13.4. Phương pháp nhân biểu đồ VêrêSaghin | 46 |
| | |
| Chương 14 : Tính hệ siêu tĩnh bằng phương pháp lực | 53 |
| 14.1. Khái niệm về hệ siêu tĩnh. | 53 |
| 14.2. Tính hệ thanh siêu tĩnh bằng phương pháp lực. | 53 |
| 14.2.1. Hệ cơ bản. | 54 |
| 14.2.2. Hệ tương đương. | 55 |
| 14.2.3. Hệ phương trình chính tắc. | 55 |
| 14.3. Tính hệ siêu tĩnh đối xứng. | 58 |
| 14.3.1. Hệ siêu tĩnh đối xứng chịu tải trọng đối xứng. | 60 |
| 14.3.2. Hệ siêu tĩnh đối xứng, chịu tải trọng phản đối xứng. | 61 |
| 14.3.3. Hệ siêu tĩnh đối xứng tải trọng bất kỳ. | 61 |
| 14.4. Tính hệ siêu tĩnh khi chịu tác dụng lực thay đổi. | 62 |
| 14.5. Tính dầm liên tục. | 70 |
| | |
| Chương 15: Tính độ bền khi ứng suất thay đổi | 78 |
| 15.1. Khái niệm. | 78 |
| 15.2. Các đặc trưng chu trình ứng suất. | 79 |

| | |
|---|-----|
| 15.3. Giới hạn mỗi và biểu đồ giới hạn mỗi. | 80 |
| 15.3.1. Giới hạn mỗi. | 80 |
| 15.3.2. Biểu đồ giới hạn mỗi. | 82 |
| 15.4. Các yếu tố ảnh hưởng đến giới hạn mỗi. | 85 |
| 15.4.1. Ảnh hưởng của sự tập trung ứng suất. | 85 |
| 15.4.2. Ảnh hưởng của độ bóng bề mặt và kích thước của chi tiết. | 88 |
| 15.5. Hệ số an toàn trong trường hợp chịu ứng suất thay đổi theo thời gian. | 90 |
| 15.6. Những biện pháp nâng cao giới hạn mỗi. | 97 |
| | |
| Chương 16: Tải trọng động | 98 |
| 16.1. Chuyển động thẳng với gia tốc không đổi. | 98 |
| 16.2. Chuyển động quay với vận tốc góc không đổi. | 100 |
| 16.3. Dao động của một hệ đàn hồi có một bậc tự do. | 102 |
| 16.3.1. Phương trình vi phân của dao động. | 103 |
| 16.3.2. Dao động tự do không có lực cản. | 105 |
| 16.3.3. Dao động tự do khi có lực cản. | 106 |
| 16.3.4. Dao động cưỡng bức chịu lực kích thích tuần hoàn. | 108 |
| 16.4. Dao động xoắn. | 112 |
| 16.5. Phương pháp thu gọn khối lượng. | 113 |
| 16.6. Tốc độ tới hạn của trục quay. | 118 |
| 16.7. Va chạm đứng của một hệ một bậc tự do. | 119 |
| 16.8. Va chạm ngang của một hệ một bậc tự do. | 122 |
| | |
| Chương 17: Ống dầy | 127 |
| 17.1. Ứng suất và biến dạng. | 127 |
| 17.2. Ống dầy chịu áp suất bên trong ($P_b=0$; $P_a=P$). | 130 |
| 17.3. Ống dầy chịu áp suất bên ngoài ($P_b=0$; $P_a=P$). | 132 |
| 17.4. Bài toán ghép ống. | 132 |
| 17.4.1. Đặt vấn đề. | 132 |
| 17.4.2. Xác định quan hệ giữa áp suất mặt ghép P_c và độ dôi. | 134 |
| Chương 18: Dây mềm | 140 |
| 18.1. Khái niệm. | 140 |
| 18.2. Phương trình của đường dây võng. | 140 |
| 18.3. Lực căng. | 141 |
| 18.4. Tính chiều dài của dây. | 143 |
| 18.5. Ảnh hưởng của nhiệt độ và tải trọng thay đổi đối với dây mềm. | 144 |
| | |
| Chương 19: Dầm trên nền đàn hồi | 147 |
| 19.1. Khái niệm chung. | 147 |
| 19.2. Phương trình vi phân của độ võng dầm. | 148 |
| 19.3. Dầm dài vô hạn. | 149 |
| 19.4. Dầm dài vô hạn chịu tải trọng phân bố đều. | 151 |
| 19.4.1. Điểm nghiên cứu trong phạm vi tác dụng của tải trọng. | 152 |
| 19.4.2. Điểm nghiên cứu ở ngoài phạm vi tác dụng của tải trọng. | 152 |
| 19.5. Dầm dài vô hạn chịu tải trọng tập trung P_0 và mô men tập trung M_0 . | 152 |
| 19.6. Dầm dài hữu hạn. | 153 |

| | |
|--|-----|
| Chương 20: Tính độ bền kết cấu theo trạng thái giới hạn | 159 |
| 20.1. Khái niệm về trạng thái giới hạn. | 159 |
| 20.1.1. Khái niệm chung. | 159 |
| 20.1.2. Phương pháp tính theo trạng thái giới hạn. | 161 |
| 20.2. Bài toán kéo nén. | 161 |
| 20.2.1. Ví dụ 1: Bài toán tĩnh định. | 161 |
| 20.2.2. Hệ siêu tĩnh. | 159 |
| 20.3. Tính trục tròn chịu xoắn. | 165 |
| 20.4. Thanh chịu uốn thuần túy. | 166 |
| 20.5. Thanh chịu uốn ngang phẳng. Khớp dẻo. | 169 |
| | |
| Chương 21: Tấm và vỏ | 176 |
| 21.1. Tấm tròn chịu uốn. | 176 |
| 21.2. Tấm chữ nhật chịu uốn. | 185 |
| 21.2.1. Xét tương quan giữa chuyển vị, biến dạng và ứng suất. | 186 |
| 21.2.2. Các thành phần nội lực và phương trình cân bằng. | 187 |
| 21.2.3. Các điều kiện biên. | 190 |
| 21.3. Vỏ mỏng tròn xoay. | 196 |
| 21.4. Lí thuyết tổng quát về vỏ đối xứng. | 205 |
| 21.4.1. Phương trình cân bằng. | 205 |
| 21.4.2. Phương trình tương thích giữa chuyển vị và biến dạng. | 207 |
| 21.4.3. Tương quan giữa ứng lực và biến dạng. | 208 |
| 21.4.4. Đưa hệ phương trình về dạng đối xứng. | 209 |
| 21.4.5. Điều kiện biên. | 210 |
| 21.5. Ứng suất uốn trong vỏ trụ chịu áp suất bên trong. | 214 |
| | |
| Chương 22: Kết cấu thanh thành mỏng | 224 |
| 22.1. Khái niệm. | 224 |
| 22.2. Đặc trưng quạt của mặt cắt ngang của một thanh thành mỏng. | 225 |
| 22.2.1. Toạ độ quạt. | 225 |
| 22.2.2. Toạ độ quạt trong hệ trục vuông góc. | 226 |
| 22.2.3. Đặc trưng quạt và cách xác định chúng. | 227 |
| 22.3. Ứng suất tiếp trong thanh thành mỏng khi chịu uốn ngang. | 232 |
| 22.4. Bài toán xoắn thanh thành mỏng. | 236 |
| 22.5. Độ vênh của mặt cắt ngang khi bị uốn. | 240 |
| 22.6. Xoắn kiểm chế thanh thành mỏng có mặt cắt hở. | 242 |
| 22.7. Trường hợp chịu lực tổng quát của thanh thành mỏng hở. | 247 |
| 22.7.1. Khái niệm về Bimomen. | 247 |
| 22.7.2. Trường hợp chịu lực tổng quát của thanh thành mỏng. | 248 |
| | |
| Chương 23: Bài toán tiếp xúc | 251 |
| 23.1. Bài toán tiếp xúc của Hezt. | 251 |
| 23.1.1. Quan hệ hình học đối với bề mặt của hai vật thể tiếp xúc. | 251 |
| 23.1.2. Kích thước diện tích tiếp xúc, độ dịch gần và giá trị áp suất cực đại. | 253 |
| 23.2. Tiếp xúc đường. | 259 |
| 23.3. Một số bài toán tiếp xúc thường gặp. | 261 |
| 23.3.1. Tính ổ bi chịu tải trọng tĩnh. | 261 |

| | |
|---|------------|
| 23.3.2. Tính tiếp xúc giữa hình cầu và tâm phẳng. | 266 |
| 23.3.3. Tính tiếp xúc giữa hai hình trụ . | 268 |
| Tài liệu tham khảo | 272 |

ỔN ĐỊNH

10.1. KHÁI NIỆM VỀ SỰ MẤT ỔN ĐỊNH CỦA MỘT HỆ ĐÀN HỒI

Những bài toán trước đây chúng ta đã trình bày, mới chỉ đề ý đến việc tính toán độ bền, độ cứng cho các thanh có các loại biến dạng khác nhau. Trong chương này chúng ta sẽ trình bày cách tính ổn định của thanh, bởi vì đây cũng là một nhiệm vụ của môn học Sức bền Vật liệu. Trong thực tế một chi tiết máy hoặc một bộ phận công trình có thể đảm bảo điều kiện bền, điều kiện cứng nhưng không thỏa mãn điều kiện ổn định, do đó nó cũng không thể làm việc được. Để có khái niệm về sự mất ổn định của một hệ đàn hồi ta hãy xét một ví dụ sau.

Giả sử có một thanh dài, mặt cắt ngang hình chữ nhật bị ngàm một đầu (hình 10.1). Thanh chịu nén đúng tâm bởi lực P . Khi P nhỏ hơn một giới hạn nào đó thì xem thanh là thẳng và chịu nén thuần túy. Nếu ta xô ngang thanh bằng một lực R rất nhỏ (hình 10.1a), (lực này chỉ có tác dụng kích thích) thì thanh bị lệch khỏi vị trí thẳng đứng. Nhưng nếu ta thôi tác dụng lực R thì thanh trở về vị trí thẳng đứng ban đầu. Ta nói thanh còn làm việc ở trạng thái cân bằng bền hay gọi là *ổn định*.

Nếu ta tiếp tục tăng lực P và lặp lại quá trình trên thì sẽ đến lúc giá trị P đủ lớn cần thiết, dù ta thôi tác dụng lực R , thanh vẫn không trở về vị trí cân bằng thẳng đứng ban đầu nữa. Ta nói lúc này thanh bắt đầu *mất ổn định* hay gọi là ở trạng thái tới hạn. Lực P ứng với thời điểm này gọi là lực tới hạn và ký hiệu là P_{th} . Dĩ nhiên nếu lực $P > P_{th}$ thì thanh hoàn toàn mất ổn định. Trong thực tế không cần có lực xô ngang R nói trên vì có thể do gió, hoặc do tính không đồng nhất của vật liệu nên nó tự tạo thành tác dụng như lực xô ngang. Hơn thế nữa lực P không bao giờ có thể tác dụng đúng tâm được. Cần lưu ý thêm nếu kết cấu như hình 10.1 thì thanh có khả năng mất ổn định theo phương y chứ khó mất ổn định theo phương x .

Trong thực tế còn có nhiều ví dụ khác như khi thanh chịu nén, những vỏ chịu áp lực cũng có thể xảy ra sự mất ổn định tương tự. Trong chương này chúng ta chỉ xét hiện tượng mất ổn định của thanh thẳng chịu nén thôi.

Một thanh chịu nén đúng tâm để đảm bảo ổn định thì lực nén P cực đại phải thỏa mãn điều kiện sau:

$$P_{max} \leq \frac{P_{th}}{K_{od}}$$

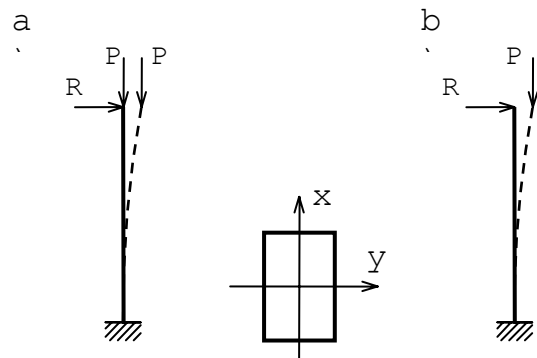
Trong đó: K_{od} là hệ số an toàn về mặt ổn định, thường $K_{od} > n$ (n -hệ số an toàn khi tính toán độ bền).

Vì vậy để giải bài toán ổn định, việc cơ bản là xác định được tải trọng tới hạn P_{th} .

10.2. XÁC ĐỊNH LỰC TỚI HẠN CỦA THANH CHỊU NÉN ĐÚNG TÂM

(Bài toán Euler).

Euler năm 1774 và ông đã xác định lực P_{th} đối với một thanh có chiều dài l đặt trên 2 gối tựa, chịu nén đúng tâm (hình vẽ 10.2).



Hình 10.1:
Thanh chịu nén không đúng tâm

Ta giả sử P đạt tới giá trị P_{th} thì thanh bắt đầu mất ổn định. Thanh sẽ võng theo phương y và độ võng này thay đổi theo z (chọn hệ tọa độ như hình vẽ 10.2).

Tại mặt cắt cách gốc tọa độ o một đoạn là z, thanh có độ võng $y(z)$ và mô men uốn M tại mặt cắt đó (bỏ qua trọng lượng bản thân của thanh), ta tính được mô men là:

$$M = P_{th} \times y(z) \quad (a)$$

Ta giả thiết thanh vẫn làm việc trong miền đàn hồi và có thể sử dụng phương trình vi phân gần đúng trong khi thiết lập đường đàn hồi trong uốn.

$$\text{Vậy: } y''(z) = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (b)$$

Thay (a) vào (b), ta được:

$$y''(z) = -\frac{P_{th} \cdot y(z)}{EJ_x}$$

$$\text{Hay } y''(z) + \frac{P_{th}}{EJ_x} \cdot y(z) = 0$$

$$\text{Ta đặt } \frac{P_{th}}{EJ_x} = \alpha^2 \quad (c)$$

thì phương trình (10-1) có dạng:

$$y''(z) + \alpha^2 y(z) = 0 \quad (10-2)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (10-2) là:

$$y(z) = C_1 \sin \alpha \cdot z + C_2 \cos \alpha \cdot z \quad (10-3)$$

Các giá trị C_1 và C_2 là các hằng số tích phân và được xác định nhờ điều kiện biên của bài toán. Cụ thể là:

$$\text{Khi } z = 0 \text{ thì } y = 0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = C_1 \times 0 + C_2 \times 1$$

$$\text{Khi } z = l \text{ thì } y = 0 = C_1 \sin \alpha \cdot l + C_2 \cos \alpha \cdot l$$

$$\text{Từ điều kiện thứ nhất, ta có: } C_2 = 0$$

$$\text{Vậy } y = C_1 \sin \alpha \cdot z \quad (10-4)$$

$$\text{Từ điều kiện thứ 2, ta có: } C_1 \sin \alpha \cdot l = 0$$

Nếu $C_1 = 0$ thì phương trình (8-3) luôn luôn bằng không, điều này trái với thực tế vì trừ hai vị trí $z = 0$ và $z = l$ thì $y(z) \neq 0$.

$$\text{Vậy (10-4) chỉ thỏa mãn khi } \sin \alpha \cdot l = 0$$

$$\text{Hay } \alpha l = n \cdot \pi \quad (n=1.2.3\dots)$$

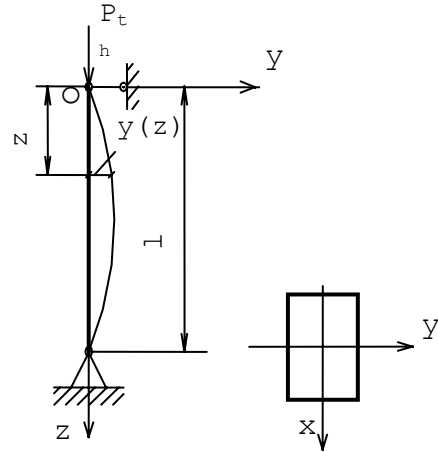
$$\Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{l} \quad (d)$$

Thay (d) vào (10-4) ta được phương trình đường đàn hồi khi ổn định là đường hình sin. Vì đường đàn hồi này sinh ra do lực dọc thanh chứ không phải do lực vuông góc với trục thanh như trong uốn ngang phẳng, nên người ta còn gọi hiện tượng này là uốn dọc.

Thay (d) vào (c), ta tìm được lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_x}{l^2} \quad (10-5)$$

Ta để ý thấy rằng giá trị J_x là nhỏ nhất, tức là $J_x = J_{min}$, nên (10-5) có thể viết:



Hình 10.2: Sơ đồ tính lực tới hạn

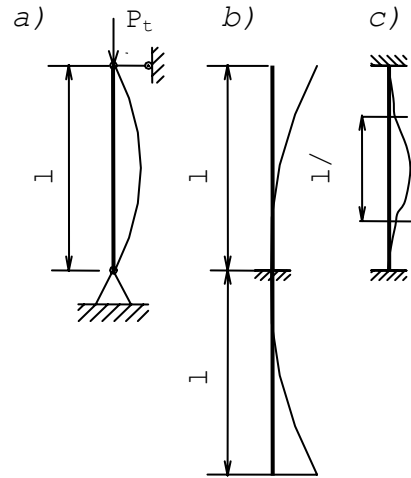
$$P_{th} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (10-6)$$

Với những giá trị khác nhau của n ta sẽ có các lực P_{th} khác nhau, đầu tiên ta gặp khi $n = 1$ và:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (10-7)$$

Lực tới hạn này còn gọi là lực Euler (P_{Euler})
 Công thức (10-7) cho ta tính được P_{th} trong trường hợp thanh đặt trên hai gối tựa.

Với những thanh có liên kết khác ta có thể tính toán tương tự để có được giá trị P_{th} của chúng. Nhưng cũng có thể suy từ (10-7) cho các thanh có liên kết khác bằng việc để ý đến dạng của các đường đàn hồi của chúng. Nhìn lên hình vẽ 10.3, ta sẽ thấy thanh đặt trên hai gối tựa dạng đường đàn hồi là 1/2 bước sóng hình sin (hình 10.3a). Với liên kết ngàm một đầu và một đầu tự do (hình 10.3b) thì muốn có được 1/2 bước sóng ta phải có chiều dài gấp đôi thanh đặt trên hai gối tựa. Đối với thanh ngàm chặt 2 đầu ta chỉ cần 1/2 chiều dài của thanh kia thì đã có được dạng đường đàn hồi là 1/2 bước sóng. Như vậy công thức (10-7) có thể suy rộng cho các liên kết khác bằng cách thêm một hệ số m vào mẫu số. Hệ số



Hình 10.3: Tính lực tới hạn với các dạng thanh khác nhau

m này phụ thuộc vào dạng liên kết:

$$P_{th} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_x}{(ml)^2}$$

(10-8)

Nếu liên kết khớp 2 đầu, thì $m = 1$; liên kết là ngàm một đầu, thì $m = 2$; liên kết là ngàm cả 2 đầu, thì $m = 0,5$ và nếu ngàm một đầu và một đầu đặt trên gối tựa, thì $m = 0,7$.

Khi đã tính được lực P_{th} ta có thể tính được ứng suất tới hạn xuất hiện trong thanh, ta chú ý rằng tại lực $P = P_{th}$ thanh còn ở vị trí thẳng đứng nên ứng suất tính như khi nén

đúng tâm:

$$\sigma_{th} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(ml)^2 \cdot F} \quad (10-9)$$

Ta đặt và gọi: $\sqrt{\frac{J_{min}}{F}} = i_{min}$ là bán kính quán tính cực tiểu của mặt cắt ngang, thì

(10-9) sẽ thành:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{ml}{i_{min}}\right)^2} \quad (10-10)$$

Tiếp tục đặt $\frac{ml}{i_{min}} = \lambda$, thì (10-10) sẽ có dạng: $\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ (10-11)

λ là số hạng phụ thuộc vào liên kết của thanh, phụ thuộc vào hình dáng và kích thước của thanh (chiều dài l và mặt cắt ngang). Nếu λ lớn thì σ_{th} nhỏ, có nghĩa là dễ mất ổn định; nếu λ nhỏ thì σ_{th} lớn, có nghĩa là thanh khó mất ổn định hơn, nên ta gọi λ là độ mảnh. Thanh có độ mảnh lớn không có lợi.

10.3. GIỚI HẠN ÁP DỤNG CÔNG THỨC Euler.

Euler thiết lập công thức tính P_{th} với giả thiết thanh làm việc trong miền đàn hồi. Vì vậy công thức (10-8) hay (10-11) chỉ dùng được khi $\sigma_{th} \leq \sigma_{tl}$ (giới hạn tỷ lệ).

Tức là:
$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{tl}$$

Hay
$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}}$$

Nếu ký hiệu $\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}}$, thì điều kiện áp dụng công thức Euler là $\lambda > \lambda_0$.

Ta chú ý λ_0 chỉ phụ thuộc vào vật liệu.

Ví dụ: Đối với thép CT3 có $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MN/m}^2$, $\sigma_{tl} = 210 \text{ MN/m}^2$ thì

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 2,1 \cdot 10^5}{2,1 \cdot 10}} \approx 100, \text{ đối với gỗ thông thì } \lambda_0 = 75; \text{ gang thì } \lambda_0 = 80.$$

Những thanh có $\lambda > \lambda_0$ gọi là những thanh có độ mảnh lớn. Những thanh có $\lambda \leq \lambda_0$ gọi là những thanh có độ mảnh vừa và bé không thể tính toán ổn định theo công thức của Euler được.

Vì vậy nếu vật liệu làm việc ở ngoài miền đàn hồi thì việc tính toán ổn định thực tế dựa vào công thức thực nghiệm của Iasinski đưa ra để tính toán cho những thanh có độ mảnh vừa $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0$. Giá trị của λ_1 là giới hạn của độ mảnh vừa, nó cũng phụ thuộc vào vật liệu (đối với thép $\lambda_1 = 40$).

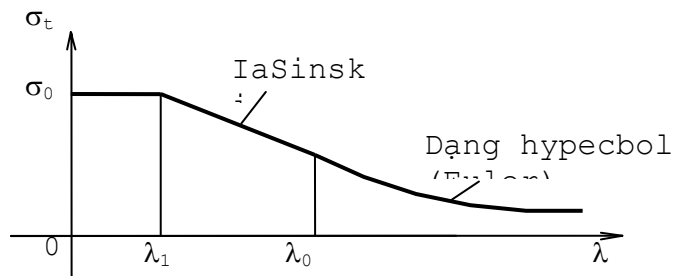
Công thức Iasinski có dạng: $\sigma_{th} = a - b\lambda$ (10-13)

Trong đó a và b là những hằng số thực nghiệm.

Ví dụ: đối với CT3, thì $a = 336 \text{ MN/m}^2$ và $b = 1,47 \text{ MN/m}^2$.

Đối với thanh có độ mảnh bé $0 < \lambda < \lambda_1$, thì ta lấy $\sigma_{th} = \sigma_0$ (giới hạn chảy nếu là vật liệu dẻo, giới hạn bền nếu là vật liệu giòn).

Như vậy tùy theo thanh có độ mảnh như thế nào đó mà ta tính toán ổn định. Hình 10.4 biểu diễn đồ thị về sự quan hệ giữa độ mảnh λ và σ_{th}



Hình 10.4: Biểu diễn đồ thị về sự quan hệ giữa

Chú ý: Công thức Euler ở trên, ta sử dụng J_{min} với điều kiện liên kết ở hai mặt phẳng quán tính chính như nhau. Trong kỹ thuật rất có thể liên kết theo hai phương (trong mặt phẳng zoy và zox) khác nhau thì độ mảnh khác nhau vì m khác nhau. Lúc đó ta phải tùy theo liên kết để tính độ mảnh và nơi nào có độ mảnh lớn hơn sẽ nguy hiểm hơn. Nói một cách khác không nhất thiết thanh bị võng theo phương của cạnh nhỏ và có thể theo phương của cạnh kia (xem ví dụ dưới đây).

Ví dụ 1: Xác định lực tới hạn (P_{th}) cho thanh thép định hình chữ I N₂₂ trong các trường hợp sau:

a/ Thanh đứng trên hai gối tựa có chiều dài 4m (hình 10.5a).

b/ Thanh cũng đứng trên hai gối tựa có chiều dài 2m.

c/ Thanh được ngàm 2 đầu có chiều dài 3m (hình 10.5b).

Cho biết: $E=2,1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $a=31 \text{ kN/cm}^2$, $b=0,14 \text{ kN/cm}^2$, $\lambda_0=100$, $\lambda_1=40$.

Bài giải: Trước hết tra bảng để biết các số liệu của thép định hình chữ I N₂₂ :

$$i_{\min}=i_y=2,27 \text{ cm}, \quad F=30,6 \text{ cm}^2$$

a/ Trường hợp a:

$$\lambda = \frac{ml}{i_{\min}} = \frac{1 \times 400}{2,27} = 176 > \lambda_0 = 100$$

Thanh có độ mảnh lớn, ta sử dụng công thức Euler (1) để tính σ_{th} :

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 2,1 \cdot 10^4}{176^2} = 6,69 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Vậy } P_{th} = \sigma_{th} \times F = 6,69 \times 30,6 = 204,7 \text{ kN.}$$

b/ Trường hợp b:

$$\lambda = \frac{ml}{i_{\min}} = \frac{1 \times 200}{2,27} = 88 < \lambda_0$$

Vậy σ_{th} sẽ phải tính theo công thức Iasinski:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda = 31 - 0,14 \times 88 = 18,68 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{và } P_{th} = \sigma_{th} \times F = 18,68 \times 30,6 = 571,68 \text{ kN.}$$

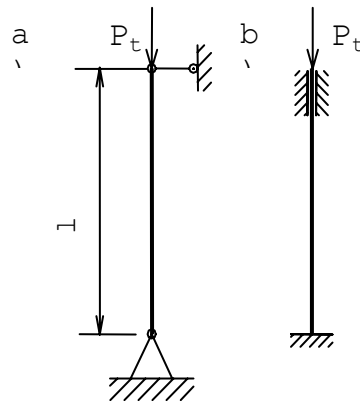
c/ Trường hợp c:

$$\lambda = \frac{0,5 \times 300}{2,27} = 132,16$$

Thanh vẫn có độ mảnh lớn, ta sử dụng công thức Euler để tính σ_{th} :

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 2,1 \cdot 10^4}{132,16^2} = 11,86 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Vậy } P_{th} = \sigma_{th} \times F = 11,86 \times 30,6 = 363 \text{ kN.}$$



Hình 10.5: Xác định lực tới hạn khi thanh đứng trên hai gối tựa (a) và thanh được ngàm

10.4. PHƯƠNG PHÁP THỰC HÀNH ĐỂ TÍNH TOÁN THANH CHỊU NÉN.

Như đã biết theo điều kiện bền ta có:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n} \quad (a)$$

Mặt khác thanh chịu nén còn phải tính đến ổn định nữa theo biểu thức:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{\text{od}} = \frac{\sigma_{th}}{K_{\text{od}}} \quad (b)$$

Chú ý: σ_{th} có thể tính theo Euler hoặc Iasinski hay lấy bằng σ_0 tùy trị số λ . Ta đem (b) chia cho (a):

$$\frac{[\sigma]_{\text{od}}}{[\sigma]} = \frac{\sigma_{th}}{K_{\text{od}}} \times \frac{n}{\sigma_0} = \varphi \rightarrow [\sigma]_{\text{od}} = \varphi [\sigma] \quad (10-14)$$

$\varphi < 1$ (vì $K_{\text{od}} > n$, $\sigma_{th} < \sigma_0$), hệ số này được gọi là hệ số giảm ứng suất, nó phụ thuộc vào vật liệu và độ mảnh, giá trị của nó được cho trong bảng 10.1.

Vậy điều kiện ổn định có thể viết:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi \times [\sigma] = [\sigma]_{\text{od}} \quad (10-15)$$

Công thức (10-15) cho phép ta tính toán ổn định không cần xác định σ_{th} và được gọi là phương pháp thực hành hay phương pháp quy phạm.

Từ (10-15), ta tính được lực nén cho phép:

$$[P] \leq \varphi [\sigma] \times F \quad (10-16)$$

Cũng nhờ (10-15), ta gặp lại 3 bài toán cơ bản là kiểm tra ổn định, tính lực lớn nhất nén thanh để khỏi mất ổn định (theo 10-16) và chọn kích thước của mặt cắt ngang của thanh. Tuy vậy bài toán chọn kích thước của mặt cắt ngang suy từ biểu thức (10-15) là:

$$F \geq \frac{P}{\varphi [\sigma]} \quad (10-17)$$

không đơn giản như việc chọn kích thước trong các bài toán trước đây. Thật vậy căn cứ vào (10-17), ta không thể tìm ngay được F vì φ chưa biết. Muốn biết φ phải biết độ mảnh λ mới tra bảng được mà trong λ có chứa F, cho nên phải tiến hành xác định F theo phương pháp đúng dần. Tức là ban đầu người ta chọn một giá trị φ nào đó để xác định F sơ bộ, sau đó trên cơ sở F sơ bộ xác định lại φ , rồi suy lại điều kiện ổn định có thỏa mãn hay không. Nếu không sẽ phải chọn lại φ rồi lập lại quá trình tính cho đến khi nào đạt yêu cầu. Để sáng tỏ vấn đề này ta hãy xét ví dụ sau.

Ví dụ 2: Chọn số hiệu thép chữ I cho một thanh dài 2m, liên kết khớp ở hai đầu và chịu một lực nén $P = 230 \text{ kN}$. Biết vật liệu là thép số 2 với $[\sigma] = 140 \text{ MN/m}^2$.

Bài giải: Theo công thức (10-17), muốn chọn F ta phải chọn φ ban đầu.

1. Chọn lần thứ nhất $\varphi = 0,50$. Từ (10-17), ta có:

$$F_1 = \frac{P}{\varphi [\sigma]} = \frac{230 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 140 \cdot 10^6} = 32,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 32,3 \text{ cm}^2$$

Tra bảng thép định hình ứng với $F = 32,4 \text{ cm}^2$ xấp xỉ với trị số F_1 tính toán, ta chọn loại I 22a nó có $i_y = i_{\min} = 2,5 \text{ cm}$.

Ta tính độ mảnh của nó:
$$\lambda = \frac{ml}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 10^2}{2,5} = 80$$

Tra bảng 10.1, ứng với $\lambda = 80$ và thép số 2 ta có $\varphi = 0,75$. Hệ số φ này khác nhiều so với φ_1 ta chọn ban đầu, nên phải chọn lại.

2. Chọn lần thứ hai: Ta lấy giá trị φ_2 là trung bình cộng của φ_1 và φ .

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,75}{2} = 0,625$$

Ta tính lại
$$F_2 \geq \frac{230 \cdot 10^3}{0,625 \cdot 140 \cdot 10^6} = 26,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 26,2 \text{ cm}^2$$

Tra lại bảng thép định hình, ta thấy loại thép I 20 có diện tích $F = 26,4 \text{ cm}^2$ xấp xỉ với F_2 và $i_{\min} = 2,06 \text{ cm}$. Độ mảnh tính được là:

$$\lambda = \frac{1 \times 2 \cdot 10^2}{0,0206} = 97$$

Tra lại bảng 10.1, ta thấy ứng với $\lambda = 97$, bằng cách nội suy giữa $\lambda=90$ và $\lambda=100$, ta có $\varphi = 0,627$. Trị số này gần bằng φ_2 , ta chọn và ta tiến hành kiểm tra lại ổn định theo (10-15):

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma] \rightarrow \sigma = \frac{230 \cdot 10^3}{26,4 \cdot 10^{-4}} = 87 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 = 87 \text{ MN/m}^2$$

Rõ ràng $< \varphi[\sigma] = 0,627 \times 140 = 87,8 \text{ MN/m}^2 = [\sigma]_{\text{od}}$

Vậy ta kết luận với quy cách của thép định hình I 20 đủ thoả mãn điều kiện ổn định và ta cho I 20 được dùng trong trường hợp uốn dọc này.

Chú ý : Nếu mặt cắt ngang có một nơi nào đó bị khoét lỗ đi do điều kiện lắp ghép chẳng hạn, thì phải kiểm tra điều kiện bền tại đó theo nén đúng tâm:

$$\sigma = \frac{P}{F_t} \leq [\sigma]$$

F_t là diện tích thực ở mặt cắt ngang đã bị khoét bỏ, tức là ở mặt cắt có diện tích nhỏ nhất, vì có thể điều kiện này nguy hiểm hơn điều kiện ổn định.

Ví dụ 3: Có một cột gỗ cao 7m, mặt cắt ngang hình chữ nhật $12 \times 22 \text{ (cm}^2\text{)}$. Trong mặt phẳng có độ cứng nhỏ nhất, hai đầu bị ngàm chặt (hình 10.6a) và trong một mặt phẳng có độ cứng lớn nhất thì hai đầu có liên kết khớp (hình 10.6b). Hãy xác định lực tới hạn, cho biết $E=9 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$.

$$i_{\max} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{22}{\sqrt{12}} = 6,86 \text{ cm}$$

$$i_{\min} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{12}{\sqrt{12}} = 3,46 \text{ cm}$$

Bài giải: Với mặt cắt hình chữ nhật, ta có:

Trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất, thì độ mảnh của thanh tính bằng:

$$\lambda' = \frac{ml}{i_{\max}} = \frac{1 \times 7}{6,36 \times 10^{-2}} = 110$$

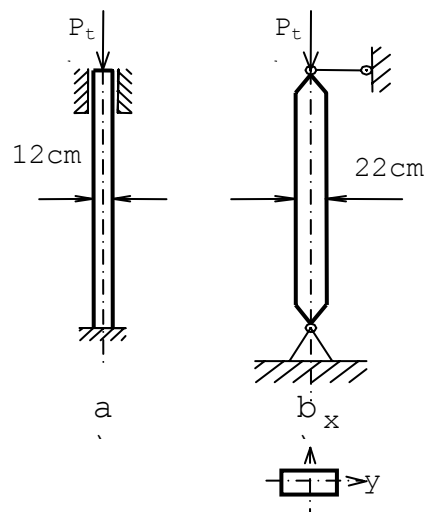
Trong mặt phẳng có độ cứng bé nhất, thì độ mảnh của thanh tính bằng:

$$\lambda'' = \frac{ml}{i_{\min}} = \frac{0,5 \times 7}{3,46 \times 10^{-2}} = 101$$

Như vậy, ở bài toán ổn định này, ta có $\lambda' > \lambda''$, nên khi mất ổn định cột sẽ cong trong mặt phẳng có độ cứng lớn nhất, tức là độ võng theo y (hình 10.6). Ta sẽ dùng giá trị λ' để tính ứng suất tới hạn và lực tới hạn.

Ta đã biết đối với gỗ thì $\lambda_0=75$, vậy ở đây có thể sử dụng công thức Euler để tính ứng suất tới hạn và lực tới hạn:

$$\sigma_{\text{th}} = \frac{\pi^2 E}{(\lambda')^2} = \frac{9,86 \times 9 \cdot 10^5}{110^2} = 733 \text{ N/cm}^2$$



Hình 10.6:
Sơ đồ xác định lực tới hạn

Vậy lực tới hạn sẽ là :

$$P_{th} = \sigma_{th} \times F = 733 \times 12 \times 22 = 193,500N = 193,5kN$$

10.5. KHÁI NIỆM VỀ HÌNH DÁNG HỢP LÝ CỦA MẶT CẮT NGANG VÀ VẬT LIỆU KHI ỔN ĐỊNH

Như ta biết, muốn tăng tính ổn định thì cần giảm độ mảnh λ . Để giảm độ mảnh λ ta có thể giảm chiều dài của thanh, thay đổi liên kết của thanh hoặc tăng i_{min} . Vì vậy để mặt cắt ngang có hình dạng hợp lý người ta chọn hình dáng của nó sao cho:

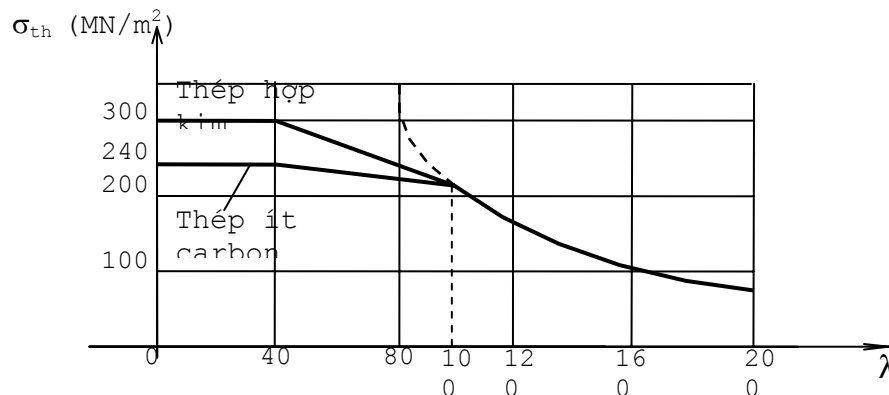
a) $i_{min} = i_{max}$, tức là $j_{min} = j_{max}$. Như vậy thanh sẽ có sự ổn định theo mọi phương như nhau. Do đó mặt cắt ngang hợp lý khi chịu ổn định là tròn hoặc hình vuông, nói chung là loại đa giác đều.

b) Nếu cùng một diện tích F mà tăng được giá trị mô men quán tính chính trung tâm thì càng tốt. Vì thế người ta thường dùng loại mặt cắt rỗng như hình tròn rỗng hoặc hình vuông rỗng...

Tóm lại: Hình dáng hợp lý của mặt cắt ngang khi thanh làm việc trong điều kiện ổn định là loại rỗng và có mô men quán tính đối với mọi trục qua trọng tâm đều bằng nhau. Dĩ nhiên phải đảm bảo chiều dày tối thiểu để tránh hiện tượng mất ổn định cục bộ. Người ta còn dùng những thanh có mặt cắt ghép chữ I_L hoặc ghép bằng những bản mỏng sao cho $J_{min} = J_{max}$ và các giá trị này càng lớn càng tốt. Thường người ta thêm những thanh giằng để các cột chịu ổn định được vững vàng. Ví dụ: các loại cột điện ta thường gặp.

Nhìn vào công thức tính ứng suất tới hạn σ_{th} (10-11), ta thấy đối với những thanh có độ mảnh lớn (sử dụng được công thức Euler) thì chỉ có mô đun đàn hồi ảnh hưởng đến nó. Đối với những thanh có độ mảnh nhỏ và vừa (tính theo IaSinski hoặc $\sigma_{th} = \sigma_0$), thì giới hạn chảy và giới hạn bền ảnh hưởng đến σ_{th} . Do đó, đối với những thanh có độ mảnh lớn ta không cần dùng thép có độ bền cao- như thép hợp kim - để tiết kiệm vật liệu. Nhưng đối với những thanh có độ mảnh nhỏ và vừa thì nên dùng thép có cường độ cao là có lợi, vì nó làm cho giá trị σ_{th} tăng lên.

Theo đồ thị ở hình 10.7, ta thấy khi $\lambda > 100$, thì ứng suất tới hạn của các loại thép như nhau. Trái lại khi $\lambda < 100$, thì thép hợp kim có ứng suất tới hạn lớn hơn so với thép ít carbon.



Hình 10.7: Đồ thị tính trị số λ ứng với các

Hiện tượng mất ổn định không những đối với thanh chịu nén như ta đã nghiên cứu, mà sự mất ổn định có thể xuất hiện ở những thanh chịu uốn, những vòng tròn chịu áp suất

hướng tâm, những tâm, vỏ, các công trình... Vì vậy, hiện tượng ổn định và mất ổn định là rất rộng lớn và có những chuyên khảo chuyên nghiên cứu về ổn định.

Dưới đây chúng ta tiếp tục nghiên cứu một số dạng mất ổn định thường gặp.

10.6.ỔN ĐỊNH CỦA DÀM CHỊU UỐN.

Với các dầm chịu uốn, mà mặt cắt ngang của nó là hình chữ nhật hẹp (tức là mặt cắt ngang tương đối mỏng), thì khi mô men uốn đạt tới giá trị nào đó (M_{th}) thì dầm bị mất ổn định. Khi đó nó không chỉ bị uốn cong mà còn bị vênh do thanh bị xoắn.

Lúc ban đầu ta gắn một hệ trục oxyz (hình 10.8a). Sau khi chịu tác dụng bởi 2 mô men uốn đạt đến tới hạn M_{th} (thanh bị mất ổn định). Do bị xoắn, thì hệ trục đó sẽ vẽ ở mặt cắt tương ứng, thì trục x (mặt cắt) bị xoắn một góc φ (như hình 10.8b) và lúc đó hệ trục có vị trí mới là OXYZ. Như đã biết M_{th} được biểu diễn bởi một véc tơ theo phương x cũ tức là M_{th} (trên hình 10.8b).

Bây giờ ta phân tích M_{th} theo hai phương x, y. Ta sẽ có hai mô men uốn quanh trục X, Y và M_z được xác định bằng tích số giữa M_{th} và góc xoay quanh trục Y là X' :

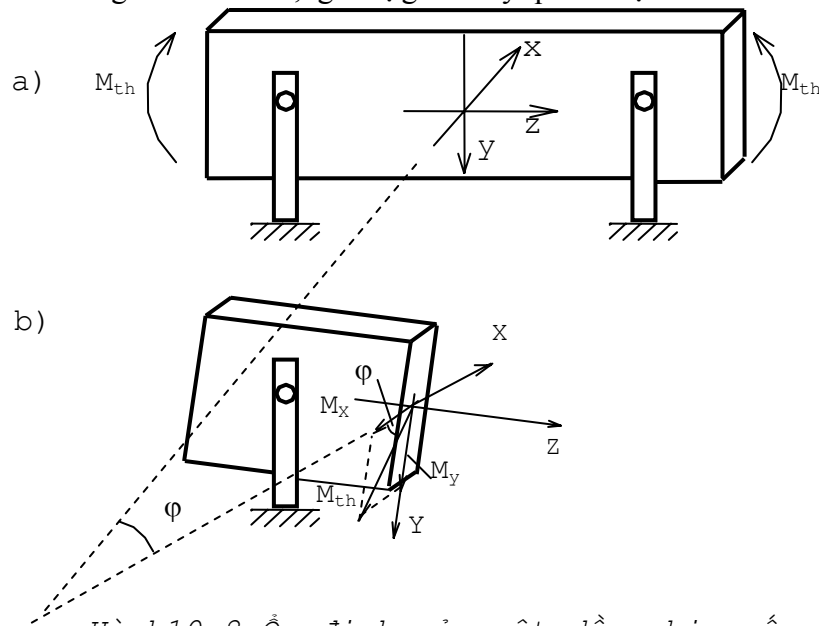
$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_{th} \cdot \cos \varphi \\ M_y &= M_{th} \cdot \sin \varphi \\ M_z &= M_{th} \cdot X' \end{aligned} \right\} \quad (10-18)$$

φ là một góc rất bé, nên $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \text{tg} \varphi \approx \varphi$.

Vậy:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_{th} \\ M_z &= M_{th} \cdot \varphi \end{aligned} \right\} \quad (10-19)$$

Mặt khác như trong bài toán uốn, giá trị góc xoay quanh trục Y là X'' với mô men



Hình 10.8: Ổn định của một dầm chịu uốn

M_y có liên hệ vi phân là:

$$X'' = \frac{-M_y}{EJ_y} \quad (10-20)$$

Góc xoắn φ được xác định từ phương trình vi phân:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p} \quad (10-21)$$

Phương trình này ta đã gặp trong chương xoắn. Vậy:

$$\varphi' = \frac{M_{th} \cdot x}{GJ_p} \quad (10-22)$$

Lấy đạo hàm lần nữa, ta có:

$$\varphi'' = \frac{M_{th} \cdot x'}{GJ_p} \quad (10-23)$$

Chúng ta để ý đến (10-20) và đưa nó vào (10-23), cuối cùng ta có :

$$\varphi'' = \frac{M_{th}^2 \cdot \varphi}{EGJ_p J_y} \quad (10-24)$$

hay
$$\varphi'' + \frac{M_{th}^2}{EGJ_p J_y} \cdot \varphi = 0 \quad (10-25)$$

Nếu đặt:
$$k^2 = \frac{M_{th}^2}{EGJ_p J_y} \quad (10-26)$$

thì phương trình (10-25) sẽ là:
$$\varphi'' + k^2 \cdot \varphi = 0 \quad (10-27)$$

Như đã biết, nghiệm của (10-27) sẽ là:

$$\varphi = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz \quad (10-28)$$

Các hằng số C_1 và C_2 được xác định nhờ các điều kiện biên:

Khi $z=0 \rightarrow \varphi=0$ (a)

Khi $z=l \rightarrow \varphi=0$ (b)

Với điều kiện (a), thì nghiệm (8-28) chỉ thoả mãn khi $C_2=0$.

Và từ điều kiện (b), ta có:

$$C_1 \sin kl = 0 \quad (10-29)$$

Nghiệm (10-29) không thể có khi $C_1=0$, vì như vậy là không thực tế vì φ chỉ bằng 0 ở hai đầu thôi, còn ở các vị trí khác thì nó khác không. Vậy chỉ có thể cho:

$$\sin kl = 0 = \sin n\pi$$

Tức là: $(n=1,2,3,\dots,n)$

Vậy
$$k^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} = \frac{M_{th}^2}{EGJ_p J_y}$$

Với $n=1$, ta có mô men uốn tới hạn M_{th} cho dầm có gối tựa ở hai đầu là:

$$M_{th} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EGJ_p J_y} \quad (10-30)$$

Cũng với lí luận như ở trên, ta suy ra các dầm chịu liên kết khác nhau sẽ là:

$$M_{th} = \frac{\pi}{ml} \sqrt{EGJ_p J_y} \quad (10-31)$$

m cũng là hệ số phụ thuộc vào các dạng liên kết như đã gặp.

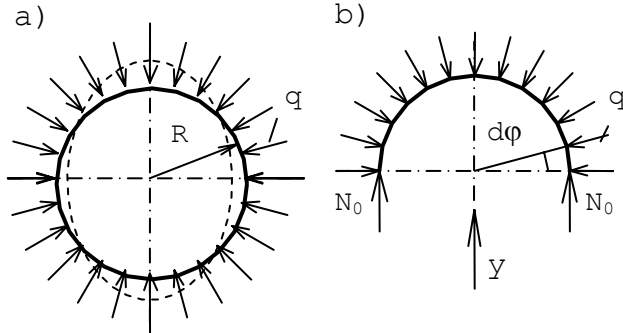
10.7.ỔN ĐỊNH CỦA VÀNH CHỊU ÁP SUẤT BÊN NGOÀI.

Chúng ta xét một vành tròn (bằng thép chẳng hạn) chịu áp lực phân bố đều bên ngoài với cường độ q (xem hình 10.9).

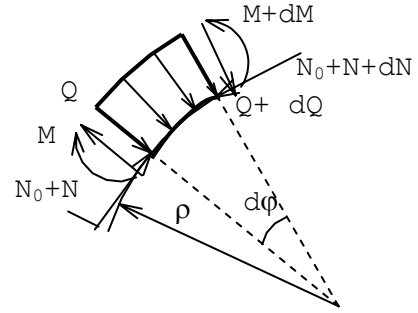
Rõ ràng là khi áp lực q tăng lên một giới hạn nào đó thì khi bỏ áp lực, vành cũng không còn giữ hình dáng là hình tròn như ban đầu nữa (mà có thể biến thành hình elíp chẳng hạn), ta gọi trạng thái đó là trạng thái mất ổn định

Tách một phân tố ds bởi hai mặt cắt vuông góc với trục. Khi vành bị mất ổn định, thì bán kính cong của phân tố bị thay đổi không còn là R nữa. Ta gọi bán kính cong này là ρ . Nếu gọi ξ là sự thay đổi của độ cong:

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = \xi \quad (10-32)$$



Hình 10.9: Vành chịu áp suất bên ngoài



Hình 10.10: Sơ đồ tính ứng suất

Khi vành chưa bị mất ổn định, trên mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là N_0 được xác định bằng cách cắt vành như hình 10.9b. Chiều trên trục y , ta có:

$$2N_0 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q \cdot R \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = 2N_0 + 2qR \cdot \cos \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Suy ra: $N_0 = qR$ (10-33)

Khi bị mất ổn định thì trên mặt cắt ngang có các thành phần nội lực như trên hình vẽ 10.10. Lúc này các phương trình cân bằng được viết như sau:

$$qds + dQ + (N_0 + N) \frac{ds}{\rho} = 0 \quad (a) - \text{Chiều lên phương } Q$$

$$\frac{Q}{R} + \frac{dN}{dS} = 0 \quad (b) - \text{Chiều lên phương } N.$$

$$\frac{dM}{dS} + Q = 0 \quad (c) - \text{Lấy mô men đối với trung tâm mặt cắt}$$

Khi viết các phương trình cân bằng này ta bỏ qua vô cùng bé bậc cao và xem $\sin d\varphi = \text{tg} d\varphi$, $\cos \varphi = 1$.

Thay giá trị N_0 từ (10-33) vào biểu thức (a) và rút gọn, ta được:

$$q \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{R} \cdot \frac{dQ}{dS} - \frac{N}{\rho R} = 0$$

Hay $-q\xi + \frac{1}{R} \cdot \frac{dQ}{dS} - \frac{N}{R^2} = 0$ (10-34)

Chú ý ở số hạng cuối cùng $\rho R \approx R^2$, các biểu thức (b), (c) và phương trình (10-34)

có thể viết lại: $q\xi + \frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 M}{dS^2} + \frac{1}{R^3} \cdot M = C_1$ (10-35)

Ta đã từng biết tương quan giữa mô men uốn và sự thay đổi độ cong ξ sẽ là:

$$M = EJ \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) = EJ\xi \quad (10-36)$$

Thay biểu thức này vào (10-35), ta sẽ được phương trình vi phân:

$$\frac{d^2\xi}{dS^2} + K^2\xi = C_1 \frac{R}{EJ} \quad (10-37)$$

Trong đó :

$$K^2 = \frac{1}{R^2} + \frac{qR}{EJ} \quad (10-38)$$

Nghiệm của phương trình (10-37) sẽ có dạng:

$$\xi = C_1 \frac{R}{K^2 EJ} + C_2 \sin kS + C_3 \cos kS$$

Giá trị ξ phải là một hàm tuần hoàn, vì trị số ξ phải như nhau khi S có chiều dài là $2\pi R$. Với suy luận như vậy cũng có nghĩa là sự biến thiên của kS với chiều dài $2\pi R$ phải là một số nguyên lần của 2π , tức là:

$$k(S + 2\pi R) - kS = 2\pi n$$

n là một số nguyên. Vậy ta có: $kR = n$

Thay giá trị này vào (10-38), ta sẽ xác định được q_{th} là:

$$q_{th} = \frac{n^2 - 1}{R^2} EJ \quad (10-39)$$

Rõ ràng n tối thiểu phải là 2 mới có giá trị

$$q_{th} = \frac{3EJ}{R^2} \quad (10-40)$$

Như vậy độ thay đổi của bán kính cong ξ theo chu vi của vành là 2 chu kỳ nguyên vẹn và vành sẽ bị uốn theo bốn nửa bước sóng và có hình dáng gần với hình dáng của enlíp (xem hình 10.9a).

Trong trường hợp vành có sự gia cố bằng $2n$ liên kết đơn (dĩ nhiên $n > 2$, vì bằng 2 đã được xét rồi), được bố trí đều theo chu vi vành, lúc này sự mất ổn định sẽ tạo nên $2n$ nửa bước sóng và q_{th} cũng sẽ được tính theo (10-39) xem hình 10.11.

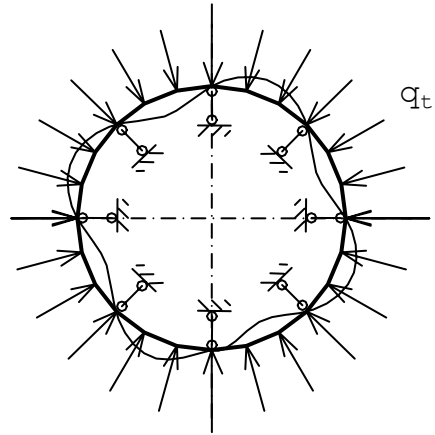
CÂU HỎI TỰ HỌC.

- 10.1. Khi nào thì gọi là một thanh chịu nén ổn định và lúc nào là mất ổn định ?
- 10.2. Bài toán Euler ? Khi mất ổn định thì thanh sẽ võng chiều nào ? Giá trị mô men quán tính trong công thức Euler như thế nào ?
- 10.3. Định nghĩa độ mảnh của thanh. Ý nghĩa của giá trị độ mảnh. Độ mảnh phụ thuộc những yếu tố nào ?
- 10.4. Phương pháp thực hành để tính ổn định ? ưu điểm của phương pháp này.
- 10.5. Các bài toán khi uốn dọc. Bài toán nào phức tạp nhất, vì sao ?
- 10.6. Hình dáng hợp lí của thanh khi uốn dọc. Vật liệu như thế nào thì phù hợp với bài toán uốn dọc?

----- ❧ -----

Bảng 10.1

| | |
|----|------------------|
| Độ | Trị số φ |
|----|------------------|



Hình 10.11: Sự thay đổi của bán kính cong ξ theo chu vi

| mảnh λ | Thép 4. 3. 2 | Thép số 5 | Thép hợp kim | Gang | Gỗ |
|-------------------|-----------------|--------------|-----------------|------|------|
| 0 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 10 | 0.90 | 0.98 | 0.97 | 0.97 | 0.99 |
| 20 | 0.96 | 0.95 | 0.95 | 0.91 | 0.97 |
| 30 | 0.94 | 0.92 | 0.91 | 0.81 | 0.92 |
| 40 | 0.92 | 0.89 | 0.87 | 0.69 | 0.87 |
| 50 | 0.89 | 0.86 | 0.83 | 0.57 | 0.80 |
| 60 | 0.86 | 0.82 | 0.79 | 0.44 | 0.71 |
| 70 | 0.81 | 0.76 | 0.72 | 0.34 | 0.60 |
| 80 | 0.75 | 0.70 | 0.65 | 0.26 | 0.48 |
| 90 | 0.69 | 0.62 | 0.55 | 0.20 | 0.36 |
| 100 | 0.60 | 0.51 | 0.43 | 0.1 | 0.31 |
| 110 | 0.52 | 0.43 | 0.35 | - | 0.26 |
| 120 | 0.45 | 0.36 | 0.30 | - | 0.22 |
| 130 | 0.40 | 0.33 | 0.26 | - | 0.18 |
| 140 | 0.36 | 0.29 | 0.23 | - | 0.16 |
| 150 | 0.32 | 0.26 | 0.21 | - | 0.14 |
| 160 | 0.29 | 0.24 | 0.19 | - | 0.12 |
| 170 | 0.26 | 0.21 | 0.17 | - | 0.11 |
| 180 | 0.23 | 0.19 | 0.15 | - | 0.10 |
| 190 | 0.21 | 0.17 | 0.14 | - | 0.09 |
| 200 | 0.19 | 0.16 | 0.13 | - | 0.05 |

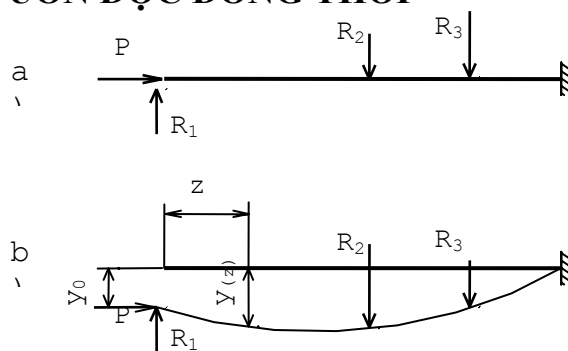


Chương 11

UỐN NGANG VÀ UỐN DỌC ĐỒNG THỜI

11.1. KHÁI NIỆM CHUNG

Từ trước đến nay việc tính toán một thanh hay một hệ chịu lực phức tạp đều dựa trên nguyên lý cộng tác dụng. Nguyên lý này chỉ đúng khi vật liệu làm việc trong giới hạn đàn hồi và



22 Hình 11.1: Thanh chịu uốn ngang

và uốn dọc đồng thời

hệ bị biến dạng nhỏ. Thật vậy nếu không xét đến biến dạng uốn do lực dọc gây ra thì dầm trên hình 11.1a sẽ tính toán như một thanh chịu uốn do các lực ngang R_1, R_2, R_3 sinh ra và chịu nén do lực P .

Nếu thanh dài và độ cứng EJ nhỏ, tức là biến dạng lớn, ta phải kể đến sự uốn do lực dọc P gây ra nữa.

Bây giờ ta hãy xét biến dạng uốn do lực nén P gây ra (hình 11.1).

Tại mặt cắt bất kỳ cách đầu tự do một đoạn là z có độ võng là $y(z)$, mô men tại mặt cắt đó sẽ là:

$$M(z) = R_1 \times z + P [y(z) - y_0] \quad (a)$$

Trong đó: y_0 là độ võng ban đầu tại đầu tự do, do các lực dọc và lực ngang gây ra.

Biểu thức mô men (a) có thể viết dưới dạng:

$$M(z) = M^*(z) + P [y(z) - y_0] \quad (11-1)$$

Số hạng thứ nhất trong vế phải của (11-1) là lượng mô men do lực ngang gây ra. Số hạng thứ hai là lượng mô men do lực dọc gây ra, lượng này tăng nhanh khi lực dọc và lực ngang tăng. Vì thế bài toán này được gọi là bài toán uốn ngang và uốn dọc đồng thời. Nó có hai điểm khác trước đây:

1- Chuyển vị có ảnh hưởng đến trị số của nội lực (vì nó làm dời chuyển điểm đặt lực khác lớn).

2- Nội lực không tỷ lệ bậc nhất với ngoại lực vì $y(z)$ là hàm của P và R_1, R_2, R_3 nên số hạng thứ hai trong (11-1) không tỷ lệ bậc nhất với P được.

Một cách chặt chẽ hơn, ta nói lực dọc ở các mặt cắt không còn là không đổi và bằng lực P nữa vì mọi mặt cắt đã xoay đi. Tuy vậy lực dọc tính một cách chính xác không sai nhiều so với P nên người ta vẫn xem lực dọc là bằng giá trị lực P :

$$N_z = -P$$

Trên mỗi mặt cắt, ứng suất pháp do lực dọc N_z và mô men uốn $M(z)$ gây ra có giá trị tuyệt đối lớn nhất tại thớ biên chịu nén bằng:

$$\max \sigma_z = - \left[\frac{P}{F} + \frac{|M(z)|}{W_x} \right] \quad (11-2)$$

$$\text{hay} \quad \max \sigma_z = - \left(\frac{P}{F} + \frac{|M^*(z) + P[y(z) - y_0]|}{W_x} \right) \quad (11-3)$$

Người ta chỉ tính uốn ngang và uốn dọc đồng thời khi dầm dài có tỷ số $\frac{l}{h} > 12$ (h là chiều cao của dầm, l là chiều dài).

11.2. XÁC ĐỊNH NỘI LỰC THEO PHƯƠNG PHÁP CHÍNH TẮC

Căn cứ vào biểu thức (11-3) đồng thời dựa vào mối liên hệ vi phân giữa độ võng với nội lực và ngoại lực, chúng ta có thể đi đến kết quả việc xác định các thành phần nội lực tương đối chính xác. Trước hết ta thành lập phương trình vi phân của mô men uốn bằng cách đạo hàm hai lần liên tiếp phương trình (11-1):

$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} = \frac{d^2 M^*}{dz^2} + P \cdot \frac{d^2 y(z)}{dz^2} \quad (a)$$

Trong chương uốn, ta đã có:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = - \frac{M(z)}{EJ_x} \quad \text{và} \quad \frac{d^2 M^*}{dz^2} = q(z) \quad (b)$$

Thay (b) vào (a), ta được:

$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} = q(z) - \frac{P}{EJ_x} M(z) \quad (11-4)$$

Ta đặt $\alpha^2 = \frac{P}{EJ}$

Và phương trình (11-4) có thể được viết lại:

$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} + \alpha^2 M(z) = q(z) \quad (11-5)$$

Để thuận lợi và không quá phức tạp khi giải hệ (11-5), ta đưa ra một số giả thiết sau:

1. Dầm có độ cứng $EJ_x = \text{const}$ suốt chiều dài của dầm và không có liên kết bản lề trên dầm.

2. Nếu dầm có tải trọng phân bố thì cường độ đó hoặc không đổi hoặc bậc nhất trong từng đoạn hay trên suốt cả chiều dài dầm thì sẽ đơn giản hơn.

Với những giả thiết như thế thì biểu thức (11-5) sẽ là một phương trình vi phân cấp hai không thuần nhất, hệ số là hằng số hoặc là hàm bậc nhất.

Bây giờ chúng ta hãy xét một dầm dài chịu tác dụng các lực ngang và lực dọc, tức là bài toán phải tính toán là uốn ngang đồng thời với uốn dọc. Có thể căn cứ vào sự tác động của tải trọng ta có thể chia ra làm nhiều đoạn sao cho tải trọng trên từng đoạn là hằng số hoặc một hàm bậc nhất liên tục như đã nói ở trên.

Chúng ta gọi các biểu thức mô men ứng với từng đoạn là:

$$M_1(z), M_2(z), \dots, M_i(z), M_{i+1}(z), \dots, M_n(z).$$

Chúng ta hãy xét hai đoạn kề nhau thứ i và thứ $i+1$ (xem hình 11.2). Trên hình này vì tách ra 2 đoạn i và $i+1$ nên ta không biểu diễn các lực dọc ở đầu dầm là nguyên nhân gây ra uốn dọc. Tại ranh giới giữa hai đoạn i và $i+1$ xem như có tọa độ là $z=a$. Giả sử tại điểm K giáp giới giữa hai đoạn có lực tập trung là P_a và mô men tập trung là M_a và cường độ tải trọng phân bố có bước nhảy là Δq_a (xem hình 11.2). Biểu đồ mô men uốn thứ i và thứ $i+1$ được trình bày trên hình 11.2b. Tương tự kéo dài biểu đồ mô men ở đoạn thứ i sang đoạn $i+1$, lúc đó mô men trong đoạn thứ $i+1$ có thể xem bằng biểu thức:

$$M_{i+1}(z) = M_i(z) + \Delta M(z-a) \quad (11-6)$$

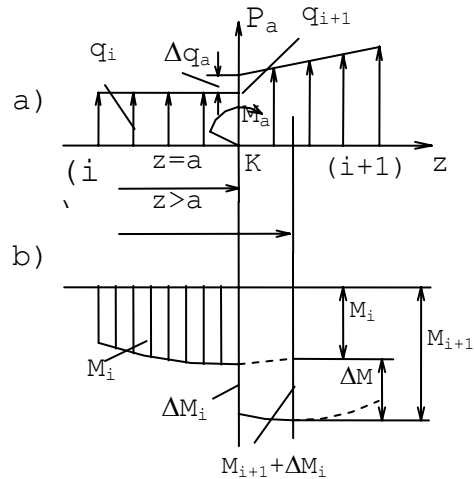
6)

Rõ ràng giá số ΔM thay đổi theo vị trí của mặt cắt, tức là ΔM cũng là hàm số theo $(z-a)$. Khi đã biết M_i , $\Delta M(z-a)$ thì tính được M_{i+1} . Việc xác định $\Delta M(z-a)$ là quan trọng. Hãy viết cho đoạn thứ i và $i+1$:

$$M_i''(z) + \alpha^2 M_i(z) = q_i \quad (c)$$

$$M_{i+1}''(z) + \alpha^2 M_{i+1}(z) = q_{i+1} \quad (d)$$

Thay biểu thức (11-6) và đạo hàm cấp 2 của nó vào (d), ta được:



Hình 11.2: Sơ đồ xác định mô men uốn

$$[M_i''(z) + \Delta M''(z-a)] + \alpha^2 [M_i(z) + \Delta M(z-a)] = q_{i+1} \quad (e)$$

Lấy (e) trừ cho (c), ta có:

$$\Delta M''(z-a) + \alpha^2 \Delta M(z-a) = q_{i+1} - q_i = \Delta q_a \quad (f)$$

Vì lẽ α và Δq_a (bước nhảy lực phân bố tại $z=a$) là các hằng số, nên nghiệm của phương trình (f) sẽ là:

$$\Delta M(z-a) = A \cos \alpha(z-a) + B \sin \alpha(z-a) + \frac{\Delta q_a}{\alpha} \quad (g)$$

A và B là những hằng số tích phân được xác định theo điều kiện biên của bài toán:

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \Delta M|_{z=a} = \Delta M_a \\ 2) \quad \Delta Q|_{z=a} = \Delta Q_a \end{array} \right\} \quad (h)$$

$$\text{Đạo hàm (g), ta có: } \Delta Q(z-a) = -A\alpha \cdot \sin \alpha(z-a) + B\alpha \cdot \cos \alpha(z-a) \quad (i)$$

Thay (h) vào (g), ta được:

$$A = \Delta M_a - \frac{\Delta q_a}{\alpha^2}; \quad B = \frac{\Delta Q_a}{\alpha}$$

Khi đã xác định được các hằng số A và B thì thay (h) vào (11-6), ta được biểu thức tổng quát về mô men ở đoạn thứ $i+1$:

$$\begin{aligned} M_{i+1}(z) = M_i(z) + \Delta M_a \cos \alpha(z-a) + \frac{\Delta Q_a}{\alpha} \cdot \sin \alpha(z-a) + \\ + \frac{\Delta q_a}{\alpha^2} [1 - \cos \alpha(z-a)] \end{aligned} \quad (11-7)$$

Từ (11-7), ta viết được mô men của đoạn thứ nhất, khi đó $M_i=0$, $a=0$ sẽ là:

$$M_1(z) = M_0 \cos \alpha z + \frac{Q_0}{\alpha} \cdot \sin \alpha z + \frac{q_0}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha z) \quad (11-8)$$

Ở đây M_0 , Q_0 và q_0 là mô men uốn, lực cắt và cường độ lực phân bố tại góc tọa độ (đầu trên của dầm). Đã có các biểu thức mô men uốn M, đạo hàm nó, ta có được lực cắt Q. Thật vậy, đạo hàm (11-7) và (11-8), ta được:

$$Q_{i+1}(z) = Q_i(z) - \Delta M_a \alpha \sin \alpha(z-a) + \Delta Q_a \cos \alpha(z-a) + \frac{\Delta q_a}{\alpha} \sin \alpha(z-a) \quad (11-9)$$

$$\text{và} \quad Q_i = -M_0 \alpha \sin \alpha z + Q_0 \cos \alpha z + \frac{q_0}{\alpha} \sin \alpha z \quad (11-10)$$

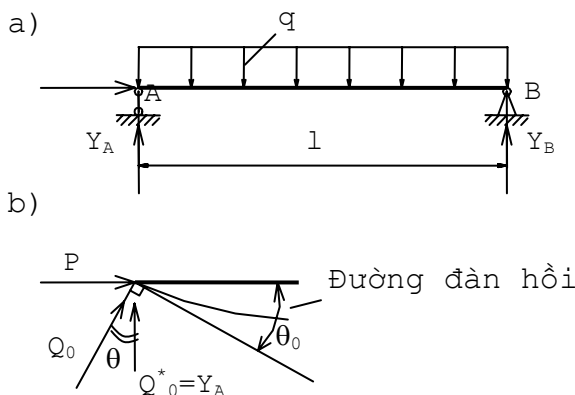
Chú ý: Trường hợp lực dọc là lực kéo thì không tạo ra uốn ngang đồng thời với uốn dọc được vì lực kéo này làm giảm độ võng chứ không làm cho độ võng tăng thêm.

Ví dụ 1: Cho một dầm chịu lực như hình 11.3. Hãy xác định ứng suất lớn nhất trong dầm.

Lời giải:

1-Đầu tiên ta xác định Q_0 trong (11-8) theo ngoại lực và chuyển vị ở góc tọa độ A của dầm. Gọi Q_0^* là lực cắt tại A chỉ do riêng lực ngang gây ra, cho nên:

$$Q_0^* = \frac{ql}{2} = Y_A$$



Và θ là góc xoay của mặt cắt ngang A tại đầu dầm (xem hình 11.3b), nên:

$$Q_0 = Q_0^* \cos \theta_0 + P \sin \theta$$

Vì góc θ nhỏ, nên có thể viết lại:

$$Q_0 = Q_0^* + P \cdot \theta_0 = \frac{ql}{2} + P \cdot \theta_0$$

2- Lập bảng của thông số ban đầu: Dầm này là một đoạn, nên các thông số tại toạ độ $z=0$ sẽ là:

$$M_0 = 0 \quad ; \quad Q_0 = \frac{ql}{2} + P \cdot \theta \quad ; \quad q_0 = -q$$

Do θ_0 chưa biết, nên Q_0 cũng chưa xác định được.

3- Viết biểu thức của mô men uốn theo (11-8) :

$$M(z) = \frac{Q_0}{\alpha} \sin \alpha z - \frac{q}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha z)$$

4-Xác định thông số Q_0 bằng cách dựa vào điều kiện biên. Rõ ràng tại góc cố định phía phải mô men uốn bằng không (tức là tại $z=l$, thì $M=0$): $M_{z=l} = 0$

Do đó:
$$\frac{Q_0}{\alpha} \sin \alpha l - \frac{q}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha l) = 0$$

Suy ra:

$$Q_0 = \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} \cdot \frac{q}{\alpha}$$

Và ta có biểu thức mô men uốn bằng:

$$M(z) = \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l} \cdot \frac{q}{\alpha^2} \cdot \sin \alpha z - \frac{q}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha z)$$

5- Tính ứng suất pháp lớn nhất (giá trị tuyệt đối), nó phát sinh ở tại mặt cắt có mô men uốn lớn nhất. Và nhớ rằng do lực dọc là nén, nên tại mặt cắt đó thì điểm chịu nén xa nhất do mô men uốn sẽ có giá trị tuyệt đối bằng tổng giá trị do lực dọc và mô men uốn

gây ra :

$$\sigma_{z \min} = - \left(\frac{P}{F} + \frac{|M_{\max}|}{W_x} \right)$$

Để xác định M_{\max} thì có thể lấy $\frac{dM(z)}{dz} = 0$ để xác định vị trí và trị số cực trị của nó. Song cũng có thể căn cứ vào tính chất của ngoại lực (chẳng hạn tính đối xứng) để đoán được vị trí và tính giá trị cực đại của mô men. Ví dụ trong bài toán của ta thì mô men sẽ đạt cực đại tại giữa dầm $z=l/2$. Vậy:

$$M_{\max} = M(z = l/2) = \frac{1 - \cos \alpha l/2}{\sin \alpha l} \cdot \frac{q}{\alpha^2} \cdot \sin \frac{\alpha l}{2} - \frac{q}{\alpha^2} \left(1 - \cos \frac{\alpha l}{2} \right) \quad (a)$$

Khi đó ứng suất lớn nhất sau khi biến đổi cuối cùng sẽ là:

$$\sigma_{z \min} = - \frac{P}{F} + \frac{q}{\alpha^2 W_x} \left(\frac{1 - \cos \frac{\alpha l}{2}}{\cos \frac{\alpha l}{2}} \right) \quad (b)$$

6- Các nhận xét:

- Theo (11-4), thì $\alpha^2 = \frac{P}{EJ_x}$, kết hợp (a) và (b), ta thấy nội lực không tỉ lệ bậc nhất với ngoại lực. Do đó, ứng suất cũng không tỉ lệ bậc nhất với ngoại lực.

- Khi $\cos \frac{\alpha l}{2} = 0$ thì M_{\max} và khi $\sin \alpha z$ sẽ tiến đến vô cùng, lúc này ta có:

$$\frac{\alpha l}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{2} \quad (k=0,1,2,\dots)$$

Kết hợp với (11-4), ta có:

$$\frac{P}{EJ_x} = \alpha^2 = \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{l^2}$$

Vậy:

$$P = (2k+1)^2 \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}$$

Ta cho rằng với $k=0$, thì lực P đạt tới giá trị tới hạn (P_{th}) và được tính:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}$$

Chúng ta lại gặp lại giá trị lực dọc tới hạn như trong bài toán Euler.

Như vừa trình bày việc xác định nội lực, ứng suất khi uốn ngang đồng thời bằng phương pháp chính tắc vừa rồi là khá phức tạp. Vì vậy dưới đây ta trình bày cách xác định nội lực, ứng suất gần đúng, nhưng kết quả đó cũng đủ thoả mãn cho việc giải các bài toán uốn ngang đồng thời với uốn dọc.

11.3. BIỂU THỨC CỦA MÔ MEN UỐN VÀ LỰC CẮT BẰNG PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG.

Phương pháp gần đúng này có kết quả không sai nhiều so với phương pháp đúng khi dầm chịu tải trọng đối xứng.

Giả sử có hai dầm giống nhau đặt trên hai gối tựa và chịu tải trọng đối xứng. Một dầm chỉ chịu tải trọng các lực ngang (hình 11.4a) và một dầm ngoài lực ngang còn có thêm lực dọc P tác dụng vào đầu khớp di động (hình 11.4b).

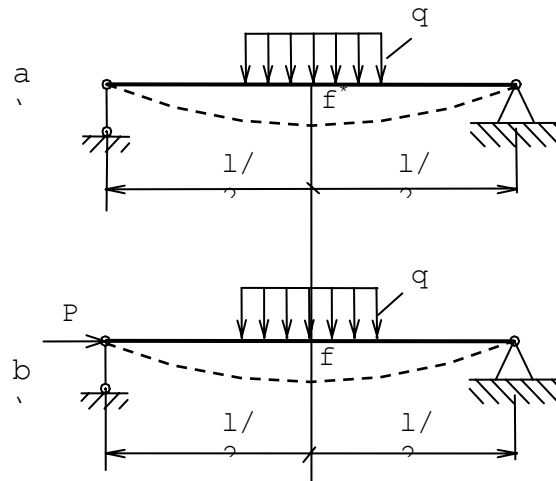
Đường đàn hồi của hai dầm có tính chất đối xứng và có thể xem dạng đường đàn hồi là hình sin. Do đó phương trình đường đàn hồi của dầm thứ nhất là:

$$y^* \approx f^* \sin \frac{\pi z}{l} \quad (a)$$

$$\text{và dầm thứ hai là: } y = f \sin \frac{\pi z}{l} \quad (b)$$

Trong đó: f^* - độ võng lớn nhất của dầm a); f - độ võng lớn nhất của dầm b).

Như đã biết:



Hình 11.4: Sơ đồ tính nội lực bằng phương pháp gần đúng

$$y''(z) = -\frac{M(z)}{EJ}$$

Vậy từ (a) và (b) ta viết được:

$$\begin{aligned} M^*(z) &= -EJ_x \cdot y^{*''} \\ &= EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} f^* \sin \frac{\pi z}{l} = EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} \cdot y^*(z) \end{aligned}$$

(chỉ có lực ngang)

$$M(z) = -EJ_x \cdot Y'' = EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi z}{l} = EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} y(z)$$

(có lực ngang và lực dọc)

Thay chúng vào công thức (11-1), ta có:

$$EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} y(z) = EJ_x \frac{\pi^2}{l^2} y^*(z) + P \cdot y(z)$$

Sau khi chuyển về và rút gọn ta được:

$$y(z) = \frac{y^*(z)}{1 - P / \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}}$$

Ta thấy: $\frac{\pi^2 EJ_x}{l^2} = P_{th}$ (trong uốn dọc), lực P_{th} trong trường hợp uốn dọc.

Cuối cùng:
$$y(z) = \frac{y^*(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (11-11)$$

Trong đó $y^*(z)$ là độ võng chỉ do các lực ngang gây ra được xác định bằng phương pháp thông thường đã biết ở chương uốn hoặc chương tính chuyển vị sau này.

Để tìm biểu thức mô men gần đúng ta tiến hành đạo hàm hai lần (11-4) rồi nhân cả hai vế cho EJ_x , ta được:

$$-EJ_x y''(z) = \frac{-EJ_x \cdot y^{*''}(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}}$$

hay:
$$M(z) = \frac{M^*(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (11-12)$$

Trong đó: $M^*(z)$ là biểu thức mô men do lực ngang gây ra (xác định bằng phương pháp mặt cắt khi xác định nội lực). Đạo hàm (11-12), ta được công thức gần đúng để tính

lực cắt $Q(z)$:
$$Q(z) = \frac{Q^*(z)}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (11-13)$$

Trong đó: $Q^*(z)$ là lực cắt do các lực ngang gây ra và cũng xác định được bằng phương pháp mặt cắt. Như vậy ta cũng có công thức tính ứng suất nén lớn nhất theo biểu thức (11-3):

$$\sigma_{z\min} = - \left[\frac{P}{F} + \frac{|M^*(z)|}{W_x \left(1 - \frac{P}{P_{th}} \right)} \right] \quad (11-14)$$

Chú ý :

1- Các công thức gần đúng ở trên được chứng minh từ dầm đặt trên hai gối tựa. Tuy thế chúng có thể dùng cho các loại dầm có liên kết khác với điều kiện tính lực P_{th} trong điều kiện tương ứng mà ta đã biết:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_x}{(ml)^2} \quad (11-15)$$

Cũng cần nói thêm rằng công thức (11-8) khác với công thức tính P_{th} trong ổn định ở chỗ: Nếu liên kết theo hai mặt zoy và zox như nhau, trong ổn định ta tính giá trị J_{\min} , còn trong trường hợp này nếu mô men uốn nằm trong mặt phẳng zoy thì trong công thức (11-8) phải dùng J_x và ngược lại. Có thể mô men quán tính J_x không phải là cực tiểu.

2- Nếu dầm đối xứng chịu tải trọng đối xứng thì kết quả tính khá đúng. Nếu không thỏa mãn điều đó thì kết quả kém chính xác hơn, nhất là khi các tải trọng ngang không nằm cùng một phía thì sai số sẽ lớn.

Ví dụ 2: Hãy tính giá trị mô men lớn nhất của dầm chịu lực như trên hình vẽ 11.5. Cho biết lực P bằng một nửa lực tới hạn P_{th} .

Lời giải: Căn cứ vào công thức tính giá trị mô men lớn nhất bằng phương pháp gần đúng chỉ có lực ngang q tác động, thì mô men uốn lớn nhất ở giữa là:

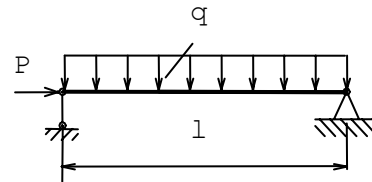
$$M_{\max} = \frac{M_{\max}^*}{1 - P/P_{th}}$$

Khi chỉ có lực ngang q tác dụng thì mô men lớn nhất sẽ ở giữa dầm là:

$$M_{\max}^* = ql^2 / 8$$

Theo đề bài $P = \frac{1}{2} P_{th}$, nên ta có:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{\left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot 8} = \frac{ql^2}{4} = 0,25ql^2$$



Hình 11.5: Tính mô men lớn nhất

11.4. KIỂM TRA BỀN

Với trường hợp lực dọc là lực nén, thì khi ta tính mô men uốn bằng công thức (11.1), ta thấy rằng lúc đó $M_x(z) > M^*(z)$, điều đó có nghĩa là mô men uốn do lực ngang và lực dọc tác dụng đồng thời lớn hơn mô men uốn chỉ do tác dụng của các lực ngang sinh ra.

Nếu lực dọc là lực kéo thì ngược lại $M_x(z) < M^*(z)$, điều này cũng có nghĩa là một thanh vừa chịu kéo và vừa chịu uốn thì biến dạng nhỏ đi và có thể áp dụng nguyên lý độc lập tác dụng (cộng tác dụng) như trong bài toán uốn cộng kéo. Việc kiểm tra bền được tiến hành như đã gặp trong chương chịu lực phức tạp, tức là kiểm tra bền theo ứng suất cho phép và ta có:

$$\max |\sigma| \leq [\sigma]$$

Tại mặt cắt có mô men lớn nhất, ta có:

$$\max |\sigma| = \frac{P}{F} + \frac{M_{\max}^*}{W_x} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$$

Trong đó: n- Hệ số an toàn; M_{\max}^* -Mô men uốn lớn nhất chỉ do lực ngang sinh ra.

Bây giờ chúng ta trở lại trường hợp lực dọc là một lực nén. Trong trường hợp này, giá trị ứng suất lớn nhất nằm ở xa trục đường trung hoà về phía chịu lực nén, tức là:

$$\max |\sigma| = \left| \frac{-nP}{F} - \frac{nM^*(z)}{W_x \left(1 - \frac{nP}{P_{th}}\right)} \right| \quad (11-16)$$

Nhìn vào (11-16), ta thấy tải trọng tăng lên n lần thì ứng suất sẽ tăng lên hơn n lần. Chính vì lí do này trong uốn ngang đồng thời với uốn dọc người ta không kiểm tra bền theo ứng suất cho phép được, mà người ta phải kiểm tra bền theo phương pháp tải trọng cho phép, tức là:

$$\max |\sigma| = \left| \frac{-n_0 P}{F} - \frac{n_0 M^*(z)}{W_x \left(1 - \frac{n_0 P}{P_{th}}\right)} \right| \leq \sigma_0 \cdot K \cdot m \quad (11-17)$$

Chú ý: Trong công thức, P và M_z^* được lấy giá trị tuyệt đối của nó và ở nơi mô men lớn nhất M_{\max}^* . Cũng có khi hệ số an toàn n được thay bằng nhiều hệ số khác. Ví như gọi hệ số vượt tải là n_0 ($n_0 > 1$), hệ số đồng nhất của vật liệu là K ($K < 1$) và hệ số điều kiện làm việc là m ($m < 1$). Lúc đó, ứng suất do tải trọng sau khi đã nhân hệ số vượt tải gây ra phải thoả mãn điều kiện:

$$\max |\sigma| = \left| \frac{-n_0 P}{F} - \frac{n_0 M_{\max}^*}{W_x \left(1 - \frac{n_0 P}{P_{th}}\right)} \right| \leq \sigma_0 \cdot K \cdot m \quad (11-18)$$

Tích số $\sigma_0 \cdot K \cdot m$ gọi là cường độ tính toán.

CÂU HỎI TỰ HỌC:

- 11.1. Thế nào gọi là hiện tượng uốn ngang đồng thời với uốn dọc ?
- 11.2. Công thức tính mômen và ứng suất trong trường hợp uốn ngang đồng thời với uốn dọc ? Các công thức này khác với trường hợp chỉ uốn ngang ở chỗ nào
- 11.3. Trình bày phương pháp tính gần đúng để xác định lực cắt, mômen khi uốn ngang đồng thời với uốn dọc .
- 11.4. Hiện tượng uốn ngang đồng thời với uốn dọc chỉ xảy ra khi lực dọc là nén, tại sao?
- 11.5. Giá trị P_{th} trong trường hợp uốn ngang cộng với uốn dọc khác gì khi chỉ có uốn dọc ?
- 11.6. Kiểm tra bền khi dầm vừa chịu lực dọc và lực ngang.
- 11.7. Công thức tính ứng suất gần đúng ở trên phù hợp với trường hợp nào về tải trọng, về kết cấu ?

--- %%%-%---

Chương 12

THANH CONG PHẪNG

12.1. KHÁI NIỆM CHUNG

Trong chương uốn ngang phẳng khi tính toán chúng ta chưa để ý đến độ cong của trục thanh. Người ta nhận thấy rằng những thanh cùng vật liệu, cùng liên kết như nhau, cùng có mặt cắt như nhau, nhưng có độ cong khác nhau thì khả năng chịu lực cũng khác nhau. Ảnh hưởng của độ cong đến độ bền của thanh được đặc trưng bởi tỷ số h/ρ , trong đó h là chiều cao của mặt cắt và ρ là bán kính cong của trục thanh tại mặt cắt có chiều cao h đó.

Người ta nhận thấy rằng nếu độ cong bé, nghĩa là tỷ số h/ρ nhỏ thì sự phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang gần như trong thanh thẳng. Vì vậy khi tỷ số $h/\rho > 1/10$ thì người ta mới tính toán theo thanh cong. Còn khi $h/\rho < 1/10$, thì ta vẫn sử dụng những kết quả tính toán trong thanh thẳng.

Trong thực tế ta gặp loại thanh cong là loại móc treo của cần trục, các vòng xích... Những loại này thường trục thanh nằm trong một mặt phẳng, nên được gọi là thanh cong phẳng.

Giới hạn nghiên cứu như sau:

1. Loại thanh cong phẳng mà mọi mặt cắt ngang có ít nhất một trục đối xứng và trục này nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh. Mặt phẳng đó được gọi là mặt phẳng đối xứng của thanh.

2. Tải trọng tác dụng lên thanh đều nằm trong mặt phẳng đối xứng của thanh.

Những điều kiện đó giúp ta đơn giản được bài toán, nhưng cũng phù hợp với thực tế.

12.2. ỨNG SUẤT PHÁP TRONG THANH CONG PHẪNG

12.2.1. Thanh cong chịu uốn thuần túy:

Gốc của hệ tọa độ $oxyz$ được chọn như trên hình vẽ 12.1, trong đó trục y được chọn có chiều dương hướng từ tâm cong ra ngoài, C là tâm cong của trục thanh.

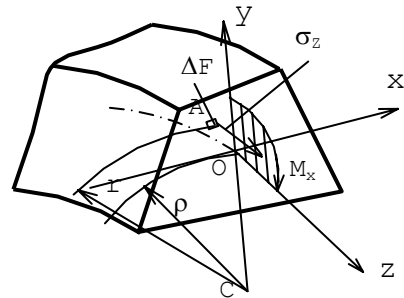
Thanh cong chịu uốn thuần túy là thanh cong chịu lực sao cho trên mọi mặt cắt ngang của nó chỉ có một thành phần mô men uốn M_x . M_x được coi là dương khi nó làm cong thêm thanh cong. Trên hình 12.1, $M_x > 0$.

Chúng ta dựa vào các giả thiết sau đây để làm cơ sở tính biến dạng và ứng suất trong thanh cong như đã gặp trong tính toán về thanh thẳng:

1. Trước và sau biến dạng mặt cắt ngang của thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục thanh.

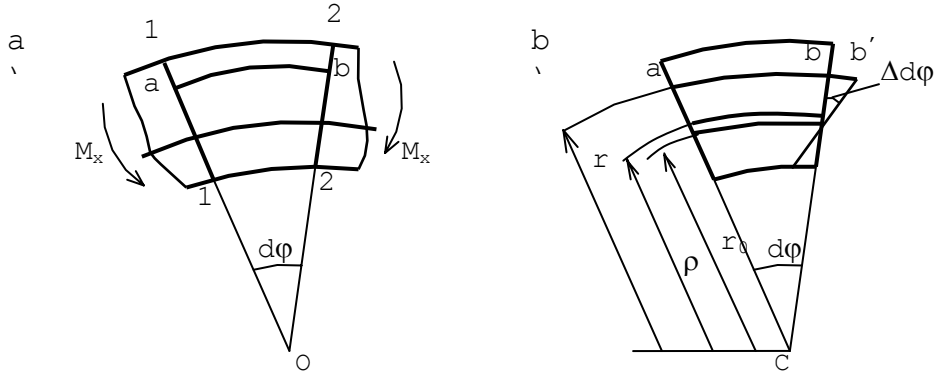
2. Trong quá trình biến dạng các thớ dọc (thớ song song với trục cong của thanh) không ép lên thanh và cũng không tách xa nhau.

Với giả thiết 1 chúng ta có thể khẳng định trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có ứng suất pháp mà không thể có ứng suất tiếp.



Hình 12.1: Thanh chịu ứng suất thuần túy

Như trong uốn thuần túy của thanh thẳng, chúng ta tách ở thanh cong ra một đoạn thanh giới hạn bởi hai mặt cắt 1-1 và 2-2 (xem hình 12.2).



Hình 12.2: Sơ đồ tính ứng suất của một thanh cong chịu uốn thuần túy

Dưới tác dụng của mô men uốn M_x các thớ phía trên của thanh bị giãn ra và các thớ phía dưới bị co lại. Chắc chắn có những thớ không co và cũng không giãn, tức là những thớ không biến dạng. Các thớ này tạo nên một lớp gọi là lớp trung hòa. Giao tuyến giữa mặt cắt ngang và lớp trung hòa là một đường thẳng gọi là đường trung hòa.

Khác với trong thanh thẳng đường trung hòa trong thanh cong không đi qua trọng tâm của mặt cắt ngang.

Ta chỉ xét biến dạng tương đối của một thớ ab có bán kính cong là r nên cũng có thể giữ cố định mặt cắt 1-1 và xem mặt cắt 2-2 xoay quanh đường trung hòa (lớp trung hòa có bán kính cong là r_0). Như vậy sau biến dạng thớ ab có độ dài là ab' . Vậy biến dạng tỷ đối ε_z của thớ ab sẽ là:

$$\varepsilon_z = \frac{ab' - \widehat{ab}}{\widehat{ab}} = \frac{bb'}{\widehat{ab}}$$

$$\varepsilon_z = \frac{(r - r_0)\Delta d\varphi}{rd\varphi} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$$

Theo giả thiết các thớ dọc không ép lên nhau và cũng không tách xa nhau, nên trạng thái ứng suất ở điểm b đang xét là trạng thái ứng suất đơn. Do đó dựa vào định luật Hooke ta có biểu thức tính σ_z tại b như sau:

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \quad (12-1)$$

Công thức (12-1) chưa cho ta tính được giá trị ứng suất pháp, nó mới cho ta thấy được quan hệ σ_z là hàm Hypecbol của r . Để tính được σ_z ta sử dụng phương trình cân bằng tĩnh học. Ta có hai phương trình cần thiết sau đây:

$$\sum P(z) = \int_F \sigma_z dF = N_z = 0 \quad (a)$$

(theo giả thiết uốn thuần túy không có lực dọc)

và
$$\sum M(0) = \int_F (\sigma_z dF)r = M_x \quad (b)$$

Từ (a), ta có:
$$\int_F \sigma_z dF = \int_F E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dF = 0$$

Vì $E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$ là không đổi ở mọi điểm trên mặt cắt, nên ta đưa nó ra ngoài dấu tích

phân:
$$E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dF = 0 \rightarrow \int_F \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dF = 0$$

$$\rightarrow \int_F dF - r_0 \int_F \frac{dF}{r} = 0 \rightarrow r_0 = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}} \quad (12-2)$$

Biểu thức (12-2) cho phép xác định giá trị của bán kính cong lớp trung hòa r_0 . Phương trình (b) cho ta tính được:

$$\int_F \sigma_z \cdot r dF = \frac{E \Delta d\varphi}{d\varphi} \int_F r \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dF = M_x$$

Chúng ta nhận thấy rằng:

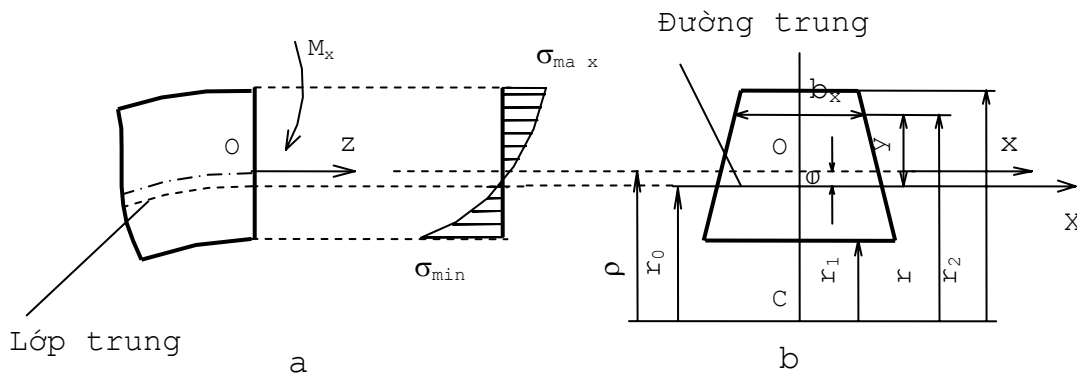
$$\int_F r \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dF = \int_F (r - r_0) dF = S$$

Trong đó S chính là mômen tĩnh của mặt cắt ngang đối với đường trung hòa. Do đó:

$$E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot S = M_x \rightarrow E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M_x}{S}$$

Trở lại biểu thức (12-1), ta có:
$$\sigma_z = \frac{M_x}{S} \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \quad (12-3)$$

Xem hình 12.3: y - Khoảng cách từ điểm đang xét đến đường trung hòa X; l - khoảng cách từ trung tâm mặt cắt đến đường trung hòa X. ρ - Bán kính cong của trục thanh, ta có: $y = r - r_0$; $S = F \cdot l$; $l = \rho - r_0$



Hình 12.3: Sơ đồ tính ứng suất

F - diện tích của mặt cắt ngang và (12-3) có thể viết thành :

$$\sigma_z = \frac{M}{F \cdot e} \cdot \frac{y}{r} \quad (12-4)$$

Từ (12-3) hay (12-4), ta thấy biểu đồ ứng suất theo r là một đường cong Hypebol và với những điểm có cùng khoảng cách đến đường trung hoà thì có giá trị ứng suất như nhau (xem 12.3a). Cũng từ đây ta thấy giá trị tuyệt đối của ứng suất lớn ở mép trong hơn ở mép ngoài. Bởi vì do đường trung hoà X dịch vào trong tâm cong (xem hình 12.3b) nên diện tích phần dưới trục trung hoà nhỏ hơn phần diện tích trên trục trung hoà mà tổng ứng suất pháp chịu kéo ở trên phải bằng tổng ứng suất nén ở dưới nên giá trị tuyệt đối ứng suất bên mép trong phải lớn hơn mép ngoài, đây cũng là đặc điểm của thanh cong.

12.2.2. Thanh cong chịu uốn đồng thời với kéo (nén đúng tâm).

Trong trường hợp có thêm lực dọc, nếu thanh cong vẫn làm việc trong miền đàn hồi và biến dạng nhỏ thì theo nguyên lý cộng tác dụng ta có:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{S} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \quad (12-5)$$

hay
$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{F \cdot e} \cdot \frac{y}{r} \quad (12-6)$$

I. XÁC ĐỊNH VỊ TRÍ ĐƯỜNG TRUNG HOÀ

a) Phương pháp chính xác:

1. Mặt cắt hình thang, (hình 12.4).

Giải vô cùng nhỏ song song với trục x là vi phân diện tích vô cùng bé, được tính như sau: $dF = b \cdot dr$

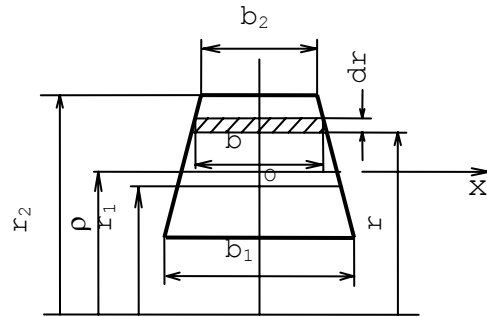
Suy ra: $dF = bdr = \left[b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h} (r_2 - r) \right] dr$

Theo (12-2), ta có:

$$r_0 = \frac{F}{\int \frac{dF}{r}}$$

hay

$$r_0 = \frac{\frac{(b_2 + b_1)h}{2}}{\int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h} (r_2 - r)}{r} \right] dr}$$



Hình 12.4: Xác định đường trung hoà bằng phương pháp chính xác

$$r_0 = \frac{h}{2} \cdot \frac{b_2 + b_1}{\int_{r_1}^{r_2} \left(b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h} \cdot r_2 \right) \frac{dr}{r} - \int_{r_1}^{r_2} \frac{b_1 - b_2}{h} dr}$$

Sau khi tích phân và rút gọn ta có:

$$r_0 = \frac{h}{2} \times \frac{b_2 + b_1}{\left(b_2 + \frac{b_1 - b_2}{h} \right) \ln \frac{r_2}{r_1} - (b_1 - b_2)} \quad (12-7)$$

Trong đó: h - Chiều cao của hình thang.

2. Mặt cắt ngang hình tam giác.

Trong công thức (12-7), ta có $b_2 = 0$; $b_1 = b$.

Ta có:
$$r_o = \frac{h}{2 \left(\frac{r_2}{h} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right)} \quad (12-8)$$

3. Mặt cắt ngang là hình chữ nhật.

Trong công thức (12-7), ta cho $b_2 = b_1 = b$

Ta có:
$$r_o = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (12-9)$$

4. Mặt cắt ngang hình tròn.

Ta cũng tiến hành tính toán tương tự, cuối cùng ta có:

$$r_o = \frac{d^2}{4(2\rho - \sqrt{4\rho^2 - d^2})} \quad (12-10)$$

Trong đó ρ là bán kính cong của trục thanh, d là đường kính của mặt cắt ngang.

b) Phương pháp gần đúng để tính r_o .

Ta có thể tính tích phân $\int \frac{dF}{F}$ trong công

thức r_o một cách gần đúng bằng cách chia mặt cắt ngang thành những giải hẹp ΔF_i song song với trục x (hình 12.5). Rõ ràng mỗi giải hẹp này xem như là hình chữ nhật và trọng tâm của nó xác định được, cũng có nghĩa là biết được khoảng cách r_i từ các trọng tâm của những giải đó đến tâm cong và do

đó:
$$r_o = \frac{F}{\int \frac{dF}{r}} = \frac{\sum \Delta F_i}{\sum \frac{\Delta F_i}{r_i}} \quad (12-11)$$

Để thuận tiện cho việc tính toán người ta thiết lập các bảng cho một số mặt cắt thông thường.

Ví dụ: Một chi tiết biểu diễn như trên hình 12.6, chịu tác dụng của hai lực $P = 800N$. Mặt cắt ngang của chi tiết là hình chữ nhật, kích thước $80 \times 30mm$. Xác định ứng suất pháp ở các điểm A và B. Biết rằng bán kính cong của trục thanh tại mặt cắt ngang có các điểm A và B bằng $\rho = 8cm$.

Bài giải:

Xét tỷ số $\frac{h}{\rho} = \frac{80}{80} = 1 > \frac{1}{10}$, nên phải

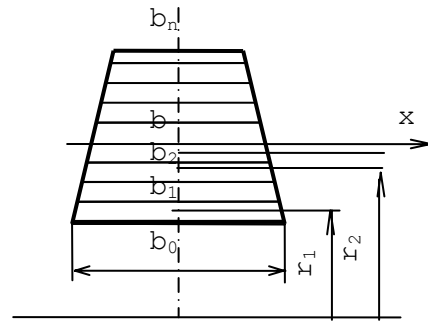
tính toán theo thanh cong.

Tại mặt cắt ngang qua điểm A và B có giá trị nội lực:

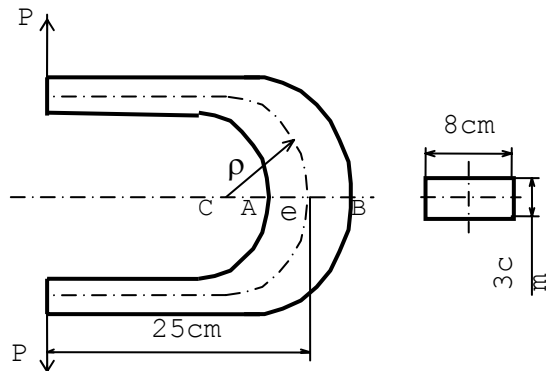
$$N_Z = +P = +800N.$$

$$M_X = -P \times 25 = -20\,000 \text{ Ncm}$$

Bán kính cong của lớp trung hòa được tính theo (12-9):



Hình 12.5: Xác định đường trung hoà bằng phương pháp gần đúng



Hình 12.6: Tính ứng suất pháp của một thanh cong tiết diện chữ nhật

$$r_o = \frac{h}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{8}{\ln \frac{8+4}{8-4}} = 7,28 \text{ cm}$$

$$e = \rho - r_o = 8 - 7,28 = 0,72 \text{ cm}$$

Ứng suất được tính theo công thức (12-6):
$$\sigma_z^B = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{F \cdot e} \cdot \frac{y_B}{r_B}$$

$$= \frac{800}{8 \cdot 3} + \frac{-20000}{8 \cdot 3 \cdot 0,72} \times \frac{(8+4) - 7,28}{8+4} = -422 \text{ N/cm}^2$$

và
$$\sigma_z^{(A)} = \frac{800}{8 \cdot 3} + \frac{-2000}{8 \cdot 3 \cdot 0,72} \times \frac{(8-4) - 7,28}{8-4} = +981 \text{ N/cm}^2$$

Kết quả này cho ta thấy tại mép trong A của thanh cong, giá trị tuyệt đối ứng suất này lớn hơn giá trị tuyệt đối của ứng suất ở mép ngoài B. Đây cũng là kết luận chung cho các thanh cong chịu lực tương tự. Tức là đối với thanh cong, thì điểm nguy hiểm vẫn ở mép trong của thanh cong. Vì vậy, mặt cắt ngang của thanh cong thường có kích thước ở mép trong lớn hơn mép ngoài như mặt cắt ngang có dạng hình thang hay tương tự mà mép trong thì dày hơn. Trong thực tế, các móc của các cần cầu hay các móc xích thì diện tích ở mặt cắt ngang thường có cấu tạo hình thang hoặc hình tương tự.

CÂU HỎI TỰ HỌC

- 12.1. Một thanh như thế nào gọi là thanh cong ?
- 12.2. Sự khác nhau về công thức tính ứng suất và biểu đồ ứng suất của thanh cong và thanh thẳng .
- 12.3. Cách xác định r_o trong thanh cong. Tóm tắt phương pháp chính xác và phương pháp gần đúng .
- 12.4. Đối với thanh cong thì ở nơi nào nguy hiểm hơn. Vì sao ?
- 12.5. Hình dáng hợp lí của mặt cắt ngang đối với thanh cong ?



TÍNH CHUYỂN VỊ CỦA HỆ THANH

Trong các bài toán riêng biệt kéo (nén) đúng tâm, uốn ngang phẳng, xoắn thuần túy chúng ta đã trình bày cách xác định chuyển vị (thông qua tính biến dạng) của các mặt cắt ngang. Tuy vậy các phương pháp đã trình bày không mang tính chất tổng quát, bởi vì đối với các hệ thanh phẳng cũng như không gian ta chưa tính được, hoặc cũng như chưa xác định được chuyển vị theo một phương bất kì ngay trong bài toán thanh thẳng.

Trong chương này chúng ta sẽ trình bày phương pháp tổng quát để xác định chuyển vị của thanh và hệ thanh.

13.1. NGUYÊN LÝ CHUYỂN VỊ KHẢ DĨ.

Người đầu tiên phát biểu nguyên lý này là Bécnu-li, sau đó là Lagorăng đã hoàn thiện và đã trình bày trong sách giáo khoa giải tích. Sách này được dịch từ tiếng Pháp sang tiếng Nga và xuất bản tại Matscova năm 1950.

Nguyên lý như sau:

Để một hệ có các liên kết hoàn thiện ở trạng thái cân bằng tại một vị trí nào đó, điều kiện cần và đủ là tổng công của lực đặt lên hệ trong các chuyển vị khả dĩ vô cùng bé là bằng không.

Chuyển vị khả dĩ là chuyển vị vô cùng bé sao cho trong các chuyển vị các liên kết của hệ không bị phá vỡ.

Một liên kết hoàn thiện là một liên kết mà tổng công các phản lực trong tất cả mọi chuyển vị khả dĩ của cả hệ là bằng không.

Các trường hợp sau đây có thể xem là những liên kết hoàn thiện:

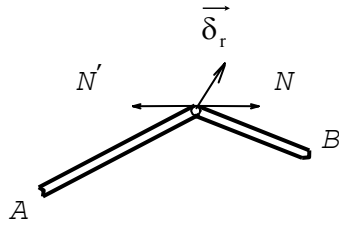
1. Một chất điểm hoặc một vật rắn luôn luôn tì lên một mặt nhẵn cố định. Vì mặt nhẵn nên xem như không có lực ma sát, phản lực liên kết đó có phương theo phương pháp tuyến với bề mặt. Các chuyển vị khả dĩ có thể xảy ra trong mặt phẳng tiếp tuyến với mặt tì và như vậy công của các phản lực trong các chuyển vị đó là bằng không.

2. Các liên kết là bất động, nghĩa là các lực liên kết không gây nên công.

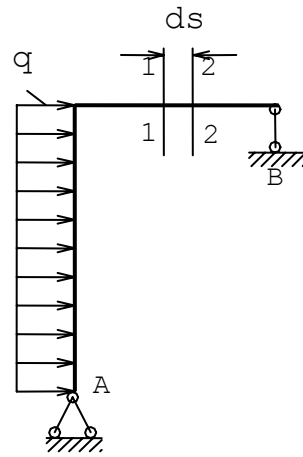
3. Khớp nối giữa các vật thể. Khớp này tạo nên các phản lực ngược chiều, nên công của chúng trong các chuyển vị khả dĩ 1 là bằng không (hình 13.1).

Ta hãy áp dụng nguyên lý trên cho một vật thể đàn hồi. Ví dụ có một hệ đàn hồi được biểu diễn như hình 13.2. Gọi d_s là một phân tử vô cùng bé tách ra bởi hai mặt cắt [1-1] và [2-2] cách nhau một khoảng cách d_s .

Hệ được xem như một tập hợp các phân tử đàn hồi d_s . Dưới tác dụng của ngoại lực P và các phản lực tại A và B , thì trên các mặt cắt [1-1] và [2-2] xuất hiện các thành phần nội lực. Bây giờ ta gây cho hệ một chuyển vị khả dĩ. Một chuyển vị như vậy có thể có được bằng cách đặt một hệ mới nào đó tạo cho hệ một trạng thái biến dạng mới hay làm cho hệ biến dạng bằng nhiệt độ.



Hình 31.1: Khớp nối giữa các vật thể có phản lực ngược chiều nhau



Hình 13.2: Hệ đàn hồi theo nguyên lí chuyển vị khả dĩ

Ta nhận thấy công khả dĩ đây không chỉ có công A_{ng} do ngoại lực tạo nên mà còn có công khả dĩ A_n do nội lực tạo nên. Do đó ta có:

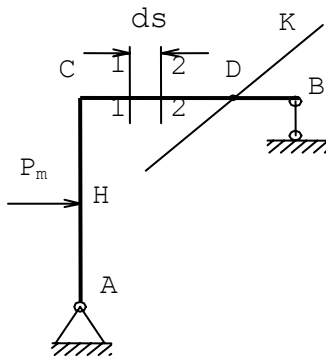
$$A_{ng} + A_n = 0 \quad (13-1)$$

Và đó là biểu thức của nguyên lí chuyển vị khả dĩ áp dụng vào một hệ đàn hồi.

13.2. CÔNG THỨC MOHR ĐỂ XÁC ĐỊNH CHUYỂN VỊ

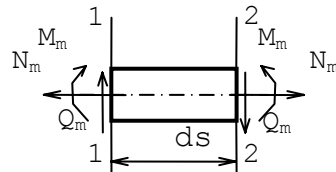
Trước hết ta hãy đề cập đến bài toán phẳng.

Bài toán đặt ra như sau: Cho khung phẳng chịu lực như hình 13.3. Đòi hỏi ta phải tính chuyển vị theo phương K của trọng tâm mặt cắt qua D.



Hình 13.3: Tính chuyển vị

cho một khung phẳng



Hình 13.4: Sơ đồ nội lực trên một phân tố

Ta gọi trạng thái chịu lực ở hình 13.3 là trạng thái "m", tức ngoại lực cũng như nội lực của hệ đều mang chỉ số m để đánh dấu. Chúng ta coi chuyển vị theo phương K do lực ở trạng thái m gây ra nên được kí hiệu là Δ_{km} . Dĩ nhiên P_m cũng gây ra chuyển vị cho mọi vị trí của hệ. Như vậy, nếu xét một phân tố ds nào đó giới hạn bởi hai mặt cắt [1-1] và [2-2] sẽ bị tác dụng bởi nội lực N_m , Q_m , M_m (hình 13.4)

Các thành phần nội lực này tạo nên chuyển vị tương đối giữa hai mặt [1-1] và [2-2], các chuyển vị đó được trình bày như sau:

1. Chuyển vị dọc theo chiều trục:

$$\Delta ds_m = \frac{N_m ds}{EF} \quad (13-2)$$

2. Chuyển vị góc tương đối (hình 13.5):

$$\Delta d\varphi_m = \frac{M_m ds}{EJ} \quad (13-3)$$

3. Chuyển vị trượt tương đối giữa hai mặt cắt (hình 13.6):

$$\Delta\beta_m = \gamma_{tb} ds$$

Trong đó: γ_{tb} - Góc trượt tỉ đối trung bình. Giá trị góc trượt tỉ đối đó tỉ lệ với ứng suất tiếp do Q_m gây nên trên các mặt cắt. Ta có thể tính trị số ứng suất tiếp trung bình với công thức:

$$\tau_{tb} = \eta \frac{Q_m}{F}$$

Trong đó: η - là hệ số điều chỉnh ứng suất do Q_m gây ra phân bố không đều trên mặt cắt. Ví dụ: với mặt cắt hình chữ nhật : $\eta=1,2$

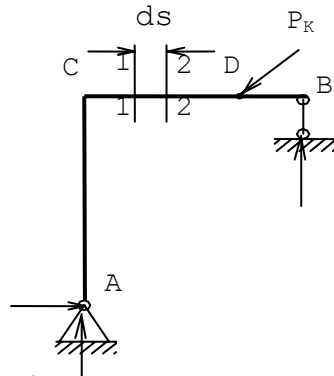
Với mặt cắt tròn:
$$\eta = \frac{32}{27}$$

Với mặt cắt chữ I:
$$\eta = \frac{F}{F_{l\grave{o}ng}}$$

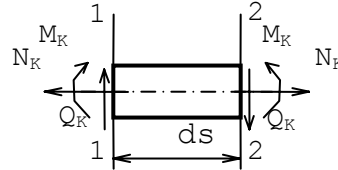
Trong đó: F- Diện tích toàn phần; $F_{l\grave{o}ng}$ - Diện tích của lòng chữ I.

Từ đó ta có:
$$\Delta\beta_m = \frac{\tau_{tb}}{G} ds = \eta \frac{Q_m ds}{GF} \quad (13-4)$$

Bây giờ ta hãy tưởng tượng tạo nên một trạng thái “K” bằng cách bỏ tất cả các ngoại lực ở trạng thái “m” và đặt vào phương ‘K’ một lực P_K (hình 13.7). P_K và các phản lực R_K gây nên các thành phần nội lực N_K , Q_K và M_K trên các mặt cắt [1-1] và [2-2], như hình 13.8.



Hình 13.7: Tạo trạng thái “K”



Hình 13.8: Sơ đồ nội lực trên các mặt cắt

Vì hệ là một hệ cân bằng nên công của ngoại lực và nội lực của hệ trong bất kì một chuyển vị khả dĩ nào cũng phải bằng không.

Ta hãy chọn ngay trạng thái biến dạng của trạng thái “m” như là các chuyển vị khả dĩ. Công của ngoại lực khi đó là $P_K \Delta_{km}$; còn công của nội lực thì ta chưa tính được, nhưng ta phải có :

$$P_K \Delta_{km} + A_n = 0 \quad (13-5)$$

Ta chú ý rằng các phản lực R_K tại A và B không sinh công vì các gối tựa đó bất động.

Để tính công A_n ta để ý đến phân tố ds. Ta thấy rằng: các thành phần nội lực N_K , Q_K và M_K trên các mặt cắt [1-1] và [2-2] đối với phân tố có thể xem như các ngoại lực

tác dụng lên ds. Phân tố đó có các chuyển vị khả dĩ là Δds_m , $\Delta \beta_m$ và $\Delta d\varphi_m$. Công của ngoại lực lúc này là:

$$dA_{ng} = N_K \Delta ds_m + Q_K \Delta \beta_m + M_K \Delta d\varphi_m$$

Theo nguyên lí chuyển vị khả dĩ, ta phải có:

$$N_K \Delta ds_m + Q_K \Delta \beta_m + M_K \Delta d\varphi_m + dA_n = 0 \quad (13-6)$$

Ta đưa các giá trị ở (13-2), (13-3), (13-4) vào (13-6), ta có:

$$dA_n = - \left(\frac{M_K \cdot M_m}{EJ} ds + \frac{N_K \cdot N_m}{EF} ds + \eta \frac{Q_K \cdot Q_m}{GF} ds \right) \quad (13-7)$$

Đối với một thanh, hoặc một hệ thanh thì các thành phần $M_K, M_m, N_K, N_m, Q_K, Q_m$, có thể và thường là hằng số hoặc hàm số liên tục suốt chiều dài của thanh hoặc hệ thanh. Nên công của nội lực của thanh hoặc hệ thanh sẽ là tổng các tích phân của từng đoạn mà trong mỗi đoạn phải đảm bảo hàm số liên tục hoặc hằng số.

Vì vậy cuối cùng để tổng quát hoá bài toán, ta có công thức tính công nội lực của toàn hệ sẽ là:

$$A_n = - \left(\sum \int \frac{M_K \cdot M_m}{EJ} ds + \sum \int \frac{N_K \cdot N_m}{EF} ds + \sum \int \eta \frac{Q_K \cdot Q_m}{GF} ds \right) \quad (13-8)$$

Thay (13-8) vào (13-5), ta được:

$$P_K \Delta_{km} = \sum \int \frac{M_K \cdot M_m}{EJ} ds + \sum \int \frac{N_K \cdot N_m}{EF} ds + \sum \int \eta \frac{Q_K \cdot Q_m}{GF} ds \quad (13-9)$$

Nếu đem chia hai vế cho P_K hay nói một cách khác đi trong trạng thái “k” lấy lực $\bar{P}_K = 1/\text{một đơn vị}$, thì từ đó ta có công thức chuyển vị Δ_{km} :

$$\Delta_{km} = \sum \int \frac{\bar{M}_K \cdot M_m}{EJ} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_K \cdot N_m}{EF} ds + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_K \cdot Q_m}{GF} ds \quad (13-10)$$

Trong đó: $\bar{M}_K, \bar{N}_K, \bar{Q}_K$ là các thành phần nội lực trong hệ do $\bar{P}_K = 1$ gây nên.

Công thức đó được gọi là công thức Mohr.

Đối với bài toán không gian, khi trên các mặt cắt ngang có đầy đủ sáu thành phần nội lực, thì công thức Mohr có dạng như sau:

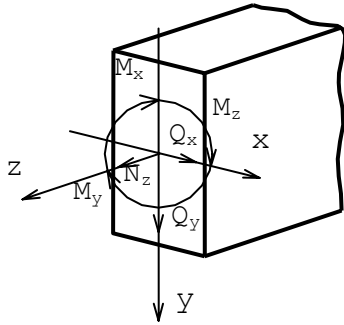
$$\begin{aligned} \Delta_{km} = & \sum \int \frac{\bar{M}_{xK} \cdot M_{xm}}{EJ_x} dz + \sum \int \frac{\bar{M}_{yK} \cdot M_{ym}}{EJ_y} dz + \sum \int \eta \frac{\bar{M}_{zK} \cdot M_{zm}}{EJ_z} dz + \\ & + \sum \int \frac{\bar{N}_{zK} \cdot N_{zm}}{EF} dz + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_{yK} \cdot Q_{ym}}{GF} dz + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_{xK} \cdot Q_{xm}}{GF} dz \end{aligned} \quad (13-11)$$

Trong đó: dz- độ dài của phân tố; dz=ds và các thành phần nội lực được biểu diễn như hình 13.9.

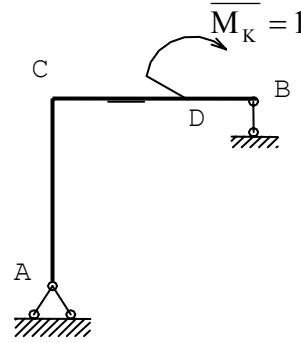
Trên đây ta đã tìm chuyển vị thẳng theo phương K. Tất cả mọi điểm ta vừa chứng minh cũng sẽ hoàn toàn đúng khi ta cần tìm góc xoay của mặt cắt ngang nào đó của hệ thì ta thay $\bar{P}_K = 1$ bằng một mô men $m_K = 1$ tại nơi cần tính góc xoay, sau đó tìm các đại lượng nội lực $\bar{M}_K, \bar{N}_K, \bar{Q}_K$ như ở trên và đưa vào công thức Mohr và thực hiện các phép tính để có góc xoay tại đó. Từ đó có thể suy rộng ra khi ta cần tìm chuyển vị thẳng tương đối của hệ hay góc xoay tương đối của hai mặt cắt tại hai điểm bất kì nào đó của hệ, khi đó ta sẽ tạo nên trạng thái “k” bằng cách đặt hai lực tập trung hai chiều trực đối

nhau hay hai mô men ngược chiều có giá trị là 1, rồi sau đó cũng lặp lại quá trình tính toán như đã làm.

Kí hiệu Δ_{K_m} tùy theo trường hợp, sẽ có nghĩa là góc xoay của mặt cắt ngang, độ dịch gần hay độ dịch xa của hai trọng tâm hai mặt cắt và góc xoay tương đối của hai mặt cắt.

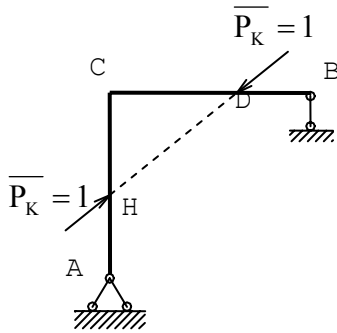


Hình 13.9: Sơ đồ nội lực

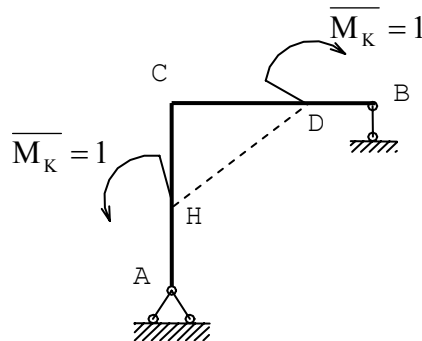


Hình 13.10: Tạo trạng thái "K" để tính góc xoay giữa hai mặt cắt

- Ví dụ:** Để tìm góc xoay của mặt cắt D, ta tạo ra trạng thái "k" như trên hình 13.10.
 Để tìm độ dịch gần giữa hai điểm D và H, ta tạo nên trạng thái "k" như trên hình 13.11



Hình 13.11: Tạo trạng thái "K" để tìm độ dịch gần giữa hai điểm



Hình 13.12: Tạo trạng thái "K" để tính góc xoay giữa hai mặt cắt

Để tính góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt ngang qua D và H, ta tạo trạng thái "k" như hình 13.12

13.3. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ QUAN TRỌNG

13.3.1. Định lý về công tương hỗ (còn gọi là định lý Betti).

Định lý phát biểu như sau: Công của ngoại lực ở trạng thái "m" trên chuyển vị của trạng thái "k" là bằng công của ngoại lực ở trạng thái "k" thực hiện trên chuyển vị của trạng thái "m".

Thực vậy, từ biểu thức (13-9), ta luôn có:

$$P_K \Delta_{K_m} = P_m \Delta_{m_k} = \sum \int \frac{M_K \cdot M_m}{EJ} ds + \sum \int \frac{N_K \cdot N_m}{EF} ds + \sum \int \eta \frac{Q_K \cdot Q_m}{GF} ds \quad (13-13)$$

13.3.2. Định lí về chuyển vị đơn vị:

Nếu hai trạng thái “m” và “k” đều là các trạng thái do lực đơn vị tác dụng theo phương m và phương k gây nên, khi đó các chuyển vị Δ_{km} và Δ_{mk} là các chuyển vị đơn vị và được kí hiệu δ_{km} và δ_{mk} .

Thật vậy, căn cứ vào biểu thức (13-13) khi $\bar{P}_k = \bar{P}_m = 1$, thì:

$$\delta_{km} = \delta_{mk} = \sum \int \frac{\bar{M}_k \cdot \bar{M}_m}{EJ} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_k \cdot \bar{N}_m}{EF} ds + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_k \cdot \bar{Q}_m}{GF} ds \quad (13-14)$$

Do đó ta có thể phát biểu định lí này như sau:

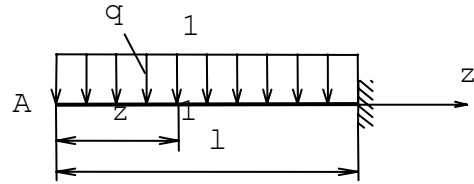
Chuyển vị đơn vị theo phương k do lực một đơn vị theo phương m gây nên là bằng chuyển vị theo phương m do lực một đơn vị tác dụng theo phương K gây nên.

Định lí này được gọi là chuyển vị đơn vị tương hỗ MaxWell. Định lí này giúp ta đơn giản nhiều khi giải các hệ siêu tĩnh.

Ví dụ 1: Cho một dầm chịu lực như trên hình vẽ 13.13. Xác định độ võng và góc xoay tại A (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt). Độ cứng $EJ = \text{const}$.

Bài giải: Ta xem trạng thái đã cho của dầm là trạng thái “m”. Hệ trục tọa độ được chọn như hình vẽ. Gọi z là hoành độ của mặt cắt [1-1]. Mô men uốn M_m trên mặt cắt có trị số là:

$$M_m = -q \frac{z^2}{2} \quad (a)$$



Hình 13.13: Dầm chịu lực

Để tính độ võng A, ta tạo nên trạng thái “k” như hình 13.14. Mô men trên mặt cắt [1-1] là:

$$\bar{M}_k = -1 \times z \quad (b)$$

Ở đây ta bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, còn lực dọc N_z là bằng không. Do đó chuyển vị thẳng đứng tại A sẽ có trị số là:

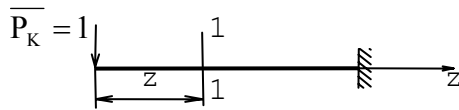
$$\Delta_{km} = Y_A = \int_0^l \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{EJ_x} dz = \int_0^l q \frac{z^3}{2} \cdot \frac{1}{EJ_x} dz = \frac{q l^4}{8EJ_x}$$

Để tính góc xoay tại A, ta tạo nên trạng thái “k” như hình 13.15, khi đó ta có:

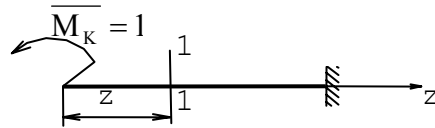
$$\bar{M}_k = -1$$

Vậy:
$$\Delta_{km} = \theta_A = \int_0^l \frac{\bar{M}_k \cdot M_m}{EJ_x} dz$$

$$\theta_A = \int_0^l q \frac{z^2}{2} \cdot \frac{1}{EJ_x} dz = \frac{q l^3}{6EJ_x}$$



Hình 13.14: Tạo trạng thái “K” để tính độ võng tại A



Hình 13.14: Tạo trạng thái “K” để tính góc xoay tại A

Các kết quả nhận được trên đây là những trị số dương, điều đó có nghĩa là độ võng và góc xoay cùng chiều với \bar{P}_K và \bar{M}_K .

Ví dụ 2: Cho giàn chịu lực như hình 13.16. Tìm chuyển vị thẳng đứng tại A. Các thanh cùng làm bằng một vật liệu và cùng có mặt cắt như nhau, các thanh 2, 3, 4 và 6 đều có chiều dài bằng a.

Bài giải: Ta xem trạng thái đã cho của hệ là trạng thái “m”. Trị số lực dọc trong các thanh có được bằng lần lượt tách các nút A, B, C như sau:

$$N_m^1 = P\sqrt{2}, N_m^2 = -P, N_m^3 = 0$$

$$N_m^4 = 2P, N_m^5 = -P\sqrt{2}, N_m^6 = -P$$

Để tìm chuyển vị thẳng đứng tại A ta bỏ lực P và thay vào đó một lực $\bar{P}_K = 1$. Trị số nội lực trong các thanh sẽ là:

$$\bar{N}_k^1 = \sqrt{2}; \bar{N}_k^2 = -1; \bar{N}_k^3 = 0$$

$$\bar{N}_k^4 = 2; \bar{N}_k^5 = -\sqrt{2}; \bar{N}_k^6 = -1$$

Ở đây mô men uốn và lực cắt bằng không, nên chuyển vị thẳng đứng tại A sẽ là:

$$\Delta_{km} = Y_A = \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_k \cdot N_m}{EF} ds$$

$$Y_A = \frac{P\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{EF} + \frac{P \cdot la}{EF} + \frac{2P\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot a}{EF} + \frac{P\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{EF} + \frac{P \cdot l \cdot a}{EF}$$

$$= (10 + 4\sqrt{2}) \frac{Pa}{EF}$$

Kết quả dương chứng tỏ là chuyển vị xuống dưới, tức là cùng chiều với \bar{P}_K .

13.4. PHƯƠNG PHÁP NHÂN BIỂU ĐỒ CỦA VÊRÊSAGHIN.

Khi mặt cắt ngang của thanh không đổi trên từng đoạn, khi đó các thành phần công thức Mohr (13-1) có thể viết như sau:

$$\Delta_{km} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} G(z) \cdot f(z) dz \quad (13-15)$$

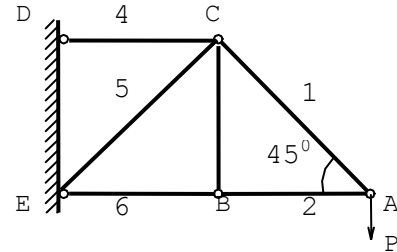
Nếu trong đó luôn luôn có một hàm số bậc nhất, thì các tích phân sẽ được thực hiện một cách đơn giản. Bây giờ ta giả sử trên một đoạn dài từ $0 \rightarrow l_i$ nào đó mà $f(z)$ là một hàm số bậc nhất và $G(z)$ có thể là một đường cong nào đó (xem hình 13.17).

Như vậy ta có thể biểu diễn:

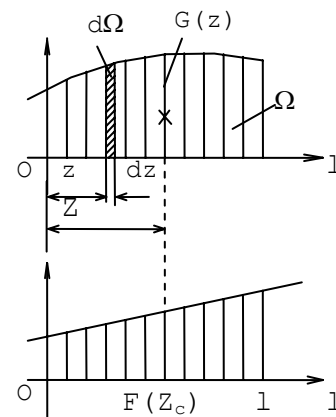
$$f(z) = az + b \quad (13-16)$$

Đem thay (13-16) vào (13-15) và tính tích phân cho một đoạn từ $0 \rightarrow l_i$, sau đó sẽ suy rộng ra cho tổng quát các tích phân, ta sẽ được:

$$I = \int_{\Omega} (az + b) \cdot G(z) dz \quad (13-17)$$



Hình 13.16: Một giàn chịu lực



Hình 13.17: Phương pháp nhân biểu đồ của Vêrêsaghin

Trong đó: tích $G(z) \cdot dz$ là vi phân diện tích $d\Omega$ của biểu thức $G(z)$. Ta có thể viết (13-17) dưới dạng:

$$I = \int_{\Omega} (az + b) \cdot G(z) dz = a \int_{\Omega} z d\Omega + b \int_{\Omega} d\Omega \quad (13-18)$$

Trong đó: $\int_{\Omega} d\Omega$ là diện tích Ω của biểu thức $G(z)$ từ $0 \rightarrow l_i$ và $\int_{\Omega} z d\Omega$ là mô men tĩnh của biểu đồ $G(z)$ đối với trục tung (trong chương đặc trưng hình học của mặt cắt ngang).

Trị số này có thể tính với biểu thức:

$$\int_{\Omega} z d\Omega = Z_c \Omega$$

Trong đó: Z_c - Hoành độ trọng tâm của Ω .

Vậy biểu thức (13-18) có thể được viết lại dưới dạng:

$$I = aZ_c \Omega + b\Omega = \Omega(aZ_c + b) \quad (13-19)$$

Trong đó: $aZ_c + b = f(Z_c)$ là tung độ của biểu thức $f(z)$ tại hoành độ Z_c của biểu thức $G(z)$ và (13-19) sẽ là:

$$I = \Omega f(Z_c) \quad (13-20)$$

Cuối cùng để thực hiện một tích phân nào đó theo Mohr mà một phương trình biểu diễn nội lực là bậc nhất thì tích phân đó được tính bằng diện tích của biểu đồ kia nhân với tung độ của biểu đồ bậc nhất này ứng với trọng tâm C của biểu đồ kia (biểu đồ đường cong).

Ví dụ 3: Tìm độ võng tại B và góc xoay tại A của dầm chịu lực như hình 13.18 (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt)

Bài giải: Ta hãy tìm góc xoay tại A. Tạo nên trạng thái “k” hình 13.19. Vì bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt, nên góc xoay tại A sẽ được tính với biểu thức:

$$\Delta_{km} = \theta_A = \int_0^l \frac{\bar{M}_K \cdot M_m}{EJ_x} dz$$

Các biểu thức M_m và \bar{M}_K được biểu diễn như hình 13.20

Theo phép nhân VêrêSaghin, ta có:

$$\theta_A = -\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{EJ_x} = -\frac{ql^3}{24EJ_x}$$

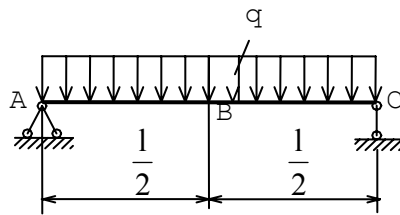
Chú ý:

$\frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} l$: là diện tích của biểu đồ M_m

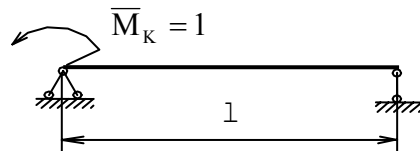
(đường cong).

$l/2$: là tung độ ứng với trọng tâm C (của biểu đồ M_m) lấy trên biểu đồ \bar{M}_K (đường thẳng).

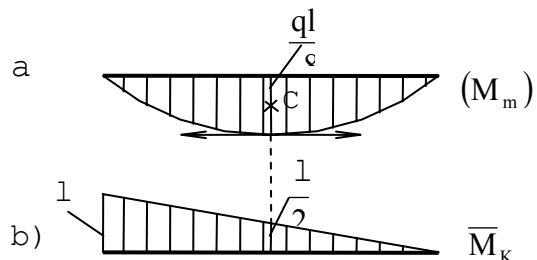
Dấu -: vì hai biểu đồ mô men nằm về hai phía.



Hình 13.18: Một dầm



Hình 13.19: Tạo trạng



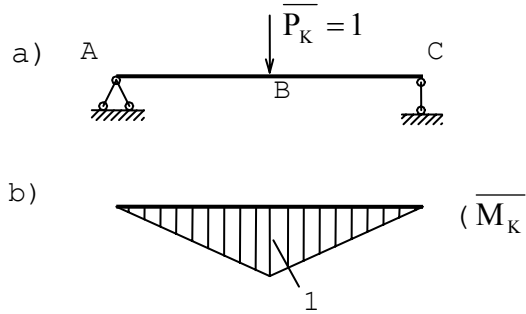
Hình 13.20: Biểu đồ M_m

Kết quả mang dấu âm (vì hai biểu đồ có thứ căng khác nhau), điều đó có nghĩa là góc xoay tại A có chiều ngược lại với chiều \overline{M}_K đã chọn.

Để tìm độ võng tại B, ta tạo nên trạng thái “k” (hình 13.21a). Biểu đồ mô men \overline{M}_K được biểu diễn trên hình 13.21b. Và thực hiện phép nhân biểu đồ theo VêrêSaghin của hai biểu đồ M_m (hình 13.20a) và biểu đồ \overline{M}_K (hình 13.21b)

Ở đây ta nhận thấy trong hai đoạn AB và BC biểu đồ \overline{M}_K được biểu diễn bằng các đường thẳng khác nhau, vì vậy để tính biểu thức tích phân ta cũng chia biểu đồ theo hai thành phần từ A đến B và từ B đến C. Do M_m và \overline{M}_K đều là những biểu đồ đối xứng, cho nên ta có thể thực hiện nhân biểu đồ cho một nửa và sau đó nhân đôi, ta sẽ có kết quả:

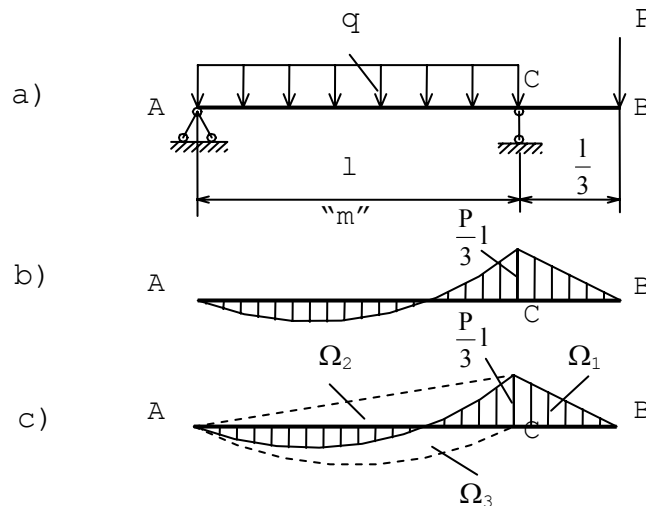
$$\begin{aligned} \Delta_{km} = Y_B &= 2 \times \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4} \times \frac{1}{EJ_x} \\ &= \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^2}{EJ_x} \end{aligned}$$



Hình 13.21: Tạo trạng thái “K” để tính độ võng tại B (a) và biểu đồ M_K (b)

Ví dụ 4: Tìm độ võng tại B của dầm chịu lực như hình 13.22a (bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt)

Bài giải: Biểu đồ mô men ở trạng thái “m” được biểu diễn trên hình 13.22b. Để tính chuyển vị tại B, ta tạo ra trạng thái “k” như hình 13.23a, biểu đồ mô men được biểu diễn trên hình 13.22b.



Chúng ta có thể chia hình 13.22b ra làm ba diện tích $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ như trên hình 11.22c và thực hiện phép nhân biểu đồ với M_K như trên hình 13.23b. Chia diện tích tính toán (c)

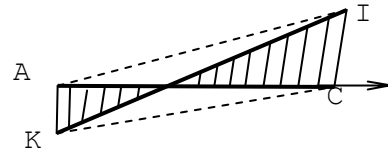
Tuy nhiên ta nhận thấy ngay phép nhân biểu đồ VêrêSaghin giữa hai biểu đồ M_m và \bar{M}_K là phức tạp, vì khó xác định được trọng tâm diện tích M_m trong khoảng AC. Để tránh sự phức tạp đó, ta có thể xem biểu đồ M_m trong khoảng đó như tổng cộng của một biểu đồ bậc nhất và một đường bậc 2 (hình 13.24a,b).

Điều đó cũng giống như chúng ta xem rằng trạng thái “m” là tổng cộng của hai trạng thái: trạng thái chỉ có một mình lực P tác dụng (hình 13.24a) và trạng thái chỉ có một mình lực q tác dụng (hình 13.24b).

Với cách đó ta có thể thực hiện được phép nhân một cách dễ dàng:

$$\begin{aligned}\Delta_{km} = Y_B &= \sum \int \frac{\bar{M}_K \cdot M_m}{EJ_x} ds = (\Omega_1 y_1 + \Omega_2 y_2 + \Omega_3 y_3) \cdot \frac{1}{EJ_x} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Pl}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{EJ_x} \\ &= \frac{4Pl^3}{41EJ} - \frac{ql^4}{72EJ_x}\end{aligned}$$

Chú ý : Tương tự như trên, nếu gập biểu đồ trong đoạn AC là đường thẳng IK cắt qua trục hoành (hình 13.25), thì ta có thể xem biểu đồ đó là tổng của các biểu đồ biểu diễn bởi các đường AKC và KIC.



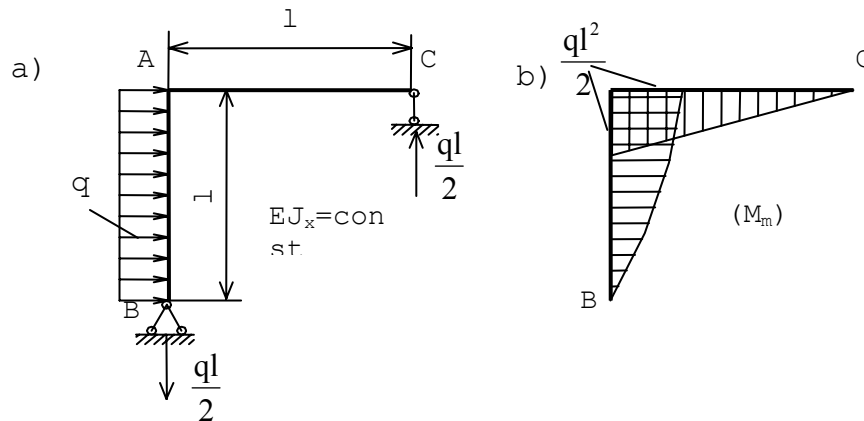
Hình 13.25: Khi AC cắt trục hoành

Ví dụ 5: Tìm chuyển vị ngang tại A và góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt tại gối tựa A và C của khung chịu lực như hình vẽ (hình 13.26a). Giả thiết bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đến chuyển vị của khung.

Bài giải: Ta xem trạng thái chịu lực của khung là trạng thái “m”. Biểu đồ M_m được biểu diễn như trên hình 13.26b. Để tìm chuyển vị ngang tại A ta tạo trạng thái “k” như trên hình 13.27. Chuyển vị ngang tại A sẽ là:

$$\begin{aligned}\Delta_{km} = Y_A &= \int_0^l \frac{\bar{M}_K \cdot M_m}{EJ_x} dz \\ Y_A &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot 1 \right) \frac{1}{EJ_x} \\ Y_A &= \frac{3ql^4}{8EJ_x}\end{aligned}$$

(nhân biểu đồ M_m ở hình 11.26b với biểu đồ ở hình 13.27)



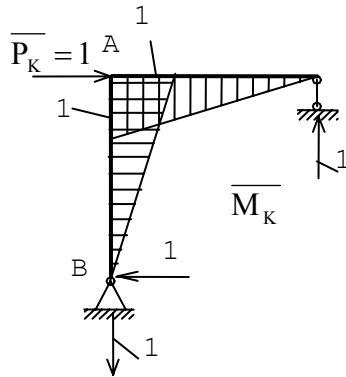
Hình 13.26: Khung chịu lực (a); Biểu đồ M_m (b)

Muốn xác định góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt B và C ta tạo nên trạng thái “K” như trên hình 13.28 và ta có :

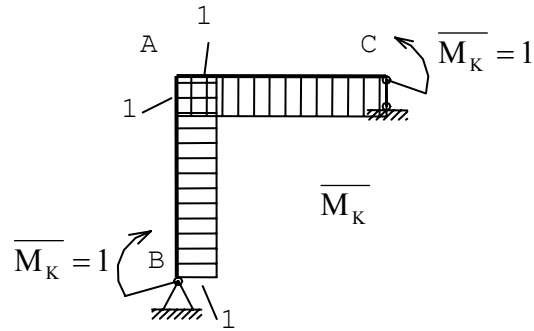
$$\theta_{BC} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \right) \frac{1}{EI_x}$$

$$\theta_{BC} = \frac{7}{12} \cdot \frac{ql^3}{EI_x}$$

(nhân biểu đồ M_m trên hình 13.26b với biểu đồ trên hình 13.28)



Hình 13.27: Tạo trạng thái “k” để tính chuyển vị ngang tại A

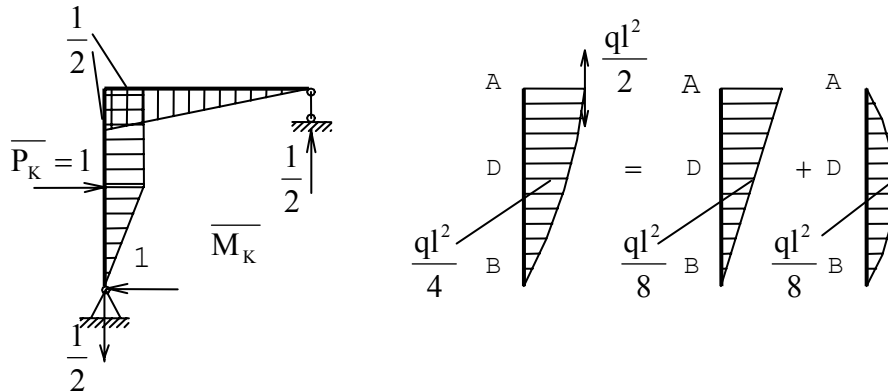


Hình 13.28: Tạo trạng thái “k” để xác định góc xoay tại B và C

Ví dụ 6: Với khung chịu lực trên đây, hãy tìm chuyển vị ngang tại D là điểm giữa của AB.

Bài giải: Tạo nên trạng thái “K” như hình 13.29, ta nhận thấy phép nhân biểu đồ Vêrêsaghin trong đoạn AB trở nên phức tạp vì ta phải chia biểu đồ đó thành hai phần trên hai đoạn AD và DB mà trọng tâm mỗi phần ta điều chưa xác nhận.

Để tránh khó khăn đó, ta xem biểu đồ M_m trên đoạn AB như tổng hai biểu đồ (hình 13.30).



Hình 13.29: Tạo trạng

Hình 13.30: Phân tích biểu

Với cách đó, ta có thể thực hiện phép nhân VêrêSaghin dễ dàng:

$$\Delta_{km} = Y_D = \int_0^l \frac{\bar{M}_K \cdot M_m}{EJ_x} dz$$

$$= \left[\frac{ql^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{ql^2}{2} + \frac{2ql^2}{8} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2} \right] \frac{1}{EJ_x}$$

$$Y_D = \frac{89}{384} \cdot \frac{ql^4}{EJ_x}$$

Khi sử dụng phương pháp VêrêSaghin cần chú ý những điều sau đây:

1. Nếu hai biểu đồ do tải trọng và trạng thái “k” (do \bar{P}_K sinh ra) đều là đường bậc nhất cả thì ta có thể tính diện tích biểu đồ này nhân cho tung độ biểu đồ kia ứng với trọng tâm của biểu đồ đã lấy diện tích.

2. Nếu chỉ có một biểu đồ bậc nhất thì tung độ phải lấy tại biểu đồ đó ứng với trọng tâm của diện tích biểu đồ kia (biểu đồ đường cong).

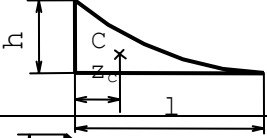
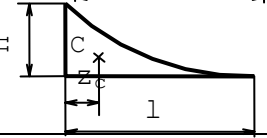
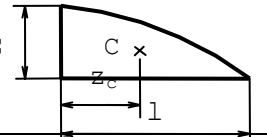
3. Nếu các biểu đồ có dạng phức tạp và không liên tục thì ta chia ra từng đoạn sao cho mỗi đoạn là hàm số liên tục để dễ tính được diện tích và cũng như để xác định được trọng tâm rồi cộng lại. Để dễ tính ở trạng thái “m” ta vẽ biểu đồ ứng với từng tải trọng và thực hiện phép nhân với tất cả các biểu đồ \bar{M}_K rồi cộng lại.

4. Trong phép nhân, nếu hai biểu đồ M_m và \bar{M}_K cùng phía thì kết quả mang dấu +. Điều đó cũng có nghĩa là chuyển vị đúng như chiều \bar{P}_K đã chọn. Nếu kết quả mang dấu -, thì chuyển vị ngược lại so với chiều \bar{P}_K đã chọn và biến dạng theo chiều ngược lại.

Bảng 13.1 giới thiệu cách tính diện tích và xác định trọng tâm của một số hình.

Bảng 13.1

| | |
|--|--|
| | <p>Bậc 2</p> $\Omega = \frac{1}{3} hl$ $Z_c = \frac{1}{4} l$ |
|--|--|

| | |
|---|---|
|  | Bậc 3 $\Omega = \frac{1}{4}hl$ $Z_c = \frac{1}{5}l$ |
|  | Bậc n $\Omega = \frac{1}{(n+1)}hl$ $Z_c = \frac{1}{(n+2)}l$ |
|  | Bậc 2 $\Omega = \frac{21}{3}hl$ $Z_c = \frac{3}{8}l$ |

CÂU HỎI TỰ HỌC:

- 13.1. Khái niệm về công khả dĩ ?
- 13.2. Công thức Mohr để xác định chuyển vị ?
- 13.3. Những định lí rút ra từ công thức Mohr ?
- 13.4. Cách nhân biểu đồ VêrêSaghin và thuận lợi của nó ?
- 13.5. Những chú ý khi sử dụng phương pháp nhân biểu đồ VêrêSaghin ?



TÍNH HỆ SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

14.1. KHÁI NIỆM VỀ HỆ SIÊU TĨNH

Hệ siêu tĩnh là một hệ mà các phương trình cân bằng tĩnh học thông thường chưa thể xác định phản lực của chúng, cũng như nội lực trên các mặt cắt ngang của hệ, cũng có nghĩa là bài toán chưa giải được.

Trong kỹ thuật ta thường gặp những hệ như vậy và để tìm các phản lực cũng như nội lực của chúng ngoài những phương trình cân bằng tĩnh học thông thường, còn phải lập thêm các phương trình khác căn cứ vào từng trường hợp tùy theo biến dạng và chuyển vị của hệ thanh ở những vị trí đặc biệt.

Ví dụ: Xét 2 thanh chịu lực như nhau trên hình vẽ 14.1, nhưng hệ chịu lực như trên hình 14.1a là tĩnh định và hệ trên hình 14.1c là siêu tĩnh. Ở hệ chịu lực như hình 14.1c có số phản lực nhiều hơn số phương trình cân bằng tĩnh học ta có thể có được. Trên hình 14.1b biểu diễn biểu đồ mô men uốn trong hệ tĩnh định và trong hình 14.1d biểu diễn biểu đồ mô men uốn trong hệ siêu tĩnh.

Qua đó ta có một số nhận xét sau:

1-Nội lực trong hệ siêu tĩnh phân bố đều hơn, ứng suất và biến dạng nhỏ hơn so với hệ tĩnh định tương đương. Như vậy hệ siêu tĩnh tiết kiệm vật liệu hơn hệ tĩnh định tương đương.

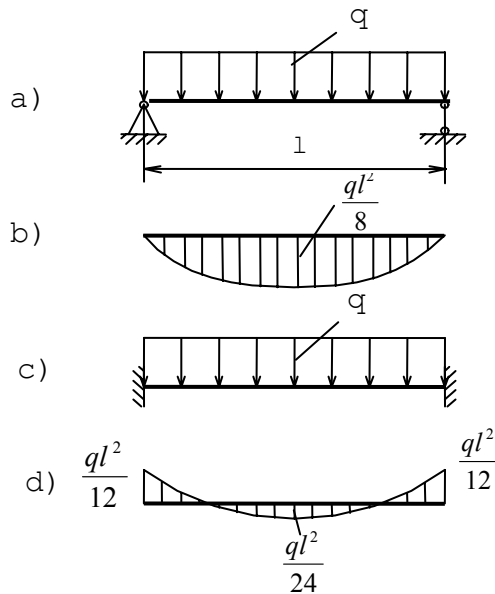
Nhưng hệ siêu tĩnh có thể phát sinh ra ứng suất khi nhiệt độ thay đổi, khi các gối tựa lún không đều và khi các chỗ nối chế tạo không chính xác.

Như đã biết trong cơ học lý thuyết đối với bài toán phẳng số liên kết đơn cần thiết để giữ cho hệ cố định là 3. Số liên kết đó đúng bằng số phương trình cân bằng tĩnh học, vì vậy nếu số liên kết đơn (hoặc quy ra liên kết đơn) đặt vào hệ lớn hơn 3, thì với số phương trình cân bằng nói trên, ta chưa có thể xác định được các phản lực liên kết, do đó cũng chưa tính được nội lực trong các thanh, ta nói hệ siêu tĩnh có những liên kết thừa. Các liên kết này là liên kết giữa vật thể nối với mặt đất hoặc nối với các vật thể khác thường gọi là vật thể ngoại.

Ngoài ra sự liên kết thừa có thể do sự liên kết giữa các thanh của hệ sinh ra gọi là liên kết nội. Ví dụ một khung kín thì không thể xác định nội lực của nó bằng các phương trình cân bằng tĩnh học thông thường, và ta coi số liên kết nội của hệ là 3.

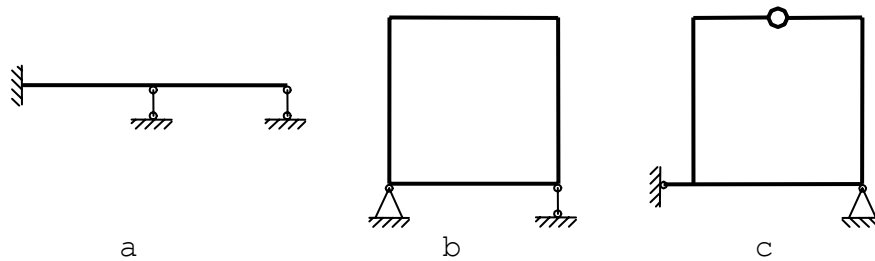
Tổng số các liên kết thừa nội và ngoại chính là số bậc siêu tĩnh của hệ.

Ví dụ: Trên hình 14.2a biểu diễn hệ siêu tĩnh có hai bậc siêu tĩnh do thừa hai liên kết ngoại, trên hình 14.2b biểu diễn hệ siêu tĩnh có 3 bậc siêu tĩnh (liên kết thừa ngoại



Hình 14.1: Hệ chịu lực (a, c - hệ siêu tĩnh; b - hệ tĩnh định; c - mô men uốn trong hệ siêu tĩnh)

không có nhưng có 3 liên kết nội, hình 14.2c biểu diễn hệ siêu tĩnh là 4, vì có hai liên kết thừa ngoại và hai liên kết thừa nội (chú ý 1 khớp làm giảm bớt một bậc siêu tĩnh).



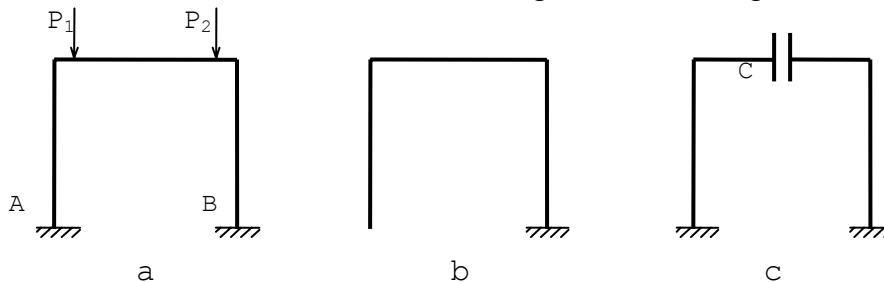
Hình 14.2: Các dạng hệ siêu tĩnh: a-Hệ siêu tĩnh do thừa hai liên kết ngoại; b- Hệ siêu tĩnh do thừa 3 liên kết nội; c-Hệ siêu tĩnh có 2 liên kết thừa nội và 2 liên kết thừa ngoại.
Sau đây chúng ta trình bày một phương pháp để tính các phản lực và xác định nội lực trong các hệ siêu tĩnh gọi là *phương pháp lực* vì nó lấy lực là ẩn số trong quá trình giải bài toán

14.2. TÍNH HỆ THANH SIÊU TĨNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LỰC

14.2.1. Hệ cơ bản: Muốn giải hệ siêu tĩnh phải từ nó chọn một hệ tĩnh định tương ứng bằng cách loại bỏ những liên kết thừa đi. Hệ tĩnh định đó gọi là *hệ cơ bản*. Cần chú ý rằng hệ cơ bản vẫn phải cố định, không bị biến hình (thay đổi dạng hình học của hệ khi chưa có tải trọng).

Việc bỏ các liên kết thừa có thể thực hiện bằng nhiều cách và từ đó có thể nhận thấy có nhiều hệ cơ bản khác nhau. Cho nên phải chọn hệ cơ bản sao cho việc tính toán đơn giản nhất

Ví dụ: Trên hình 14.3a biểu diễn một khung siêu tĩnh, chúng ta có thể chọn nhiều



Hình 14.3: Chọn hệ cơ bản. a:Hệ siêu tĩnh; b,c: Hệ cơ bản từ hệ (a)

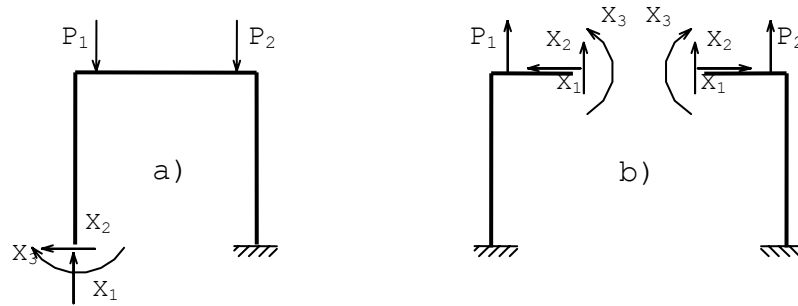
hệ cơ bản tĩnh định khác nhau. Ở hình 14.3b và 14.3c biểu diễn hai hệ cơ bản rút ra từ hình 14.3a.

14.2.2.Hệ tương đương:

Ta dễ dàng thấy rằng hệ cơ bản muốn làm việc như hệ siêu tĩnh thì tại A phải có những lực có trị số và chiều sao cho tại A có chuyển vị bằng không (hình 14.3b), tức là chuyển vị và góc xoay ở ngoài không có hoặc chuyển vị tương đối bằng không tại điểm C (hình 14.3c).

Như vậy muốn hệ tĩnh định làm việc tương tự như hệ đã cho cùng với ngoại lực (P_1, P_2 chẳng hạn) ta còn phải đặt vào những nơi đã bỏ liên kết những lực chưa biết theo

phương mà liên kết đã bỏ để đảm bảo cơ cấu hoàn toàn tương đương với hệ siêu tĩnh đã cho (xem hình 14.4a,b).



Hình 14.4: Hệ tương đương a, b với hệ

Với điều kiện chuyển vị tại A ở hệ tĩnh định cơ bản này giống như chuyển vị cũng tại A trong hệ siêu tĩnh đã cho. Rõ ràng nếu hệ có n bậc siêu tĩnh thì ta có n lực chưa biết, hệ như vậy gọi là hệ tương đương. Để xác định các lực chưa biết X_1, X_2, \dots, X_n đó ta căn cứ vào điều kiện chuyển vị tương đương, tức là:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{x_1}(X_1, X_2, \dots, X_n, P) &= 0 \\ \Delta_{x_2}(X_1, X_2, \dots, X_n, P) &= 0 \\ \dots \\ \Delta_{x_n}(X_1, X_2, \dots, X_n, P) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-1)$$

Các $\Delta_{X_1}, \Delta_{X_2}, \dots, \Delta_{X_n}$ là chuyển vị theo phương X_1, X_2, \dots, X_n do lực X_1, X_2, \dots, X_n và các tải trọng P gây ra. Trong (14-1) các X_1, X_2, \dots, X_n là những lực cũng là những ẩn số, nên gọi là phương pháp lực.

14.2.3. Hệ phương trình chính tắc.

Từ (14-1), áp dụng nguyên lý cộng tác dụng ta có:

$$\Delta_{X_1}(X_1, X_2, \dots, X_n, P) = \Delta_{X_1}(X_1) + \Delta_{X_2}(X_2) + \dots + \Delta_{X_n}(X_n) + \Delta_{X_n}P = 0$$

Có thể viết gọn hơn là:

$$\Delta_{K_1} + \Delta_{K_2} + \dots + \Delta_{K_m} + \dots + \Delta_{K_n} + \Delta_{K_P} = 0$$

Trong đó Δ_{K_m} là chuyển vị theo phương X_K gây ra do X_m sinh ra ... Δ_{K_P} là chuyển vị theo phương X_K gây ra do tất cả tải trọng sinh ra. Nếu gọi δ_{km} là chuyển vị đơn vị theo phương X_K , gây ra do lực $\bar{X}_m = 1$ (đặt tại X_m và có trị số bằng 1).

Thì
$$\Delta_{K_m} = \delta_{K_m} \cdot X_m$$

Khi đó phương trình thứ K của (14-1) có dạng:

$$\delta_{K_1} \cdot X_1 + \delta_{K_2} \cdot X_2 + \delta_{K_m} \cdot X_m + \dots + \delta_{K_n} \cdot X_n + \Delta_{K_P} = 0$$

Vậy hệ (14-1) sẽ có dạng:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \Delta_{1P} &= 0 \\ \dots \\ \delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \Delta_{nP} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-2)$$

Hệ (14-2) gọi là hệ phương trình chính tắc của phương pháp lực giải hệ siêu tĩnh vì nhờ (14-2) ta tìm được các ẩn số X_1, X_2, \dots, X_n thì ta có thể xem các lực đó cùng với ngoại lực đã cho trong hệ siêu tĩnh là những tải trọng bên ngoài tác dụng lên hệ tĩnh định

(hệ cơ bản), sau đó xác định nội lực của hệ tĩnh định với các tải trọng không những chỉ là P_1, \dots, P_n mà có cả X_1, \dots, X_n nữa, tức là khi đã biết X_1, \dots, X_n thì coi nó là ngoại lực tác dụng lên hệ.

δ_{km} (khi $K \neq m$) gọi là hệ số phụ, có thể dương hoặc âm.

δ_{kk} (khi $K = m$) gọi là hệ số chính, giá trị của nó bao giờ cũng dương.

Δ_{kp} là số hạng tự do.

Nhờ có định lý chuyển vị đơn vị tương hỗ nên ta có $\delta_{km} = \delta_{mk}$ và nhờ vậy sẽ giảm bớt việc tính các hệ số trong khi giải hệ phương trình chính tắc (14-2).

Nếu bỏ qua ảnh hưởng của các lực cắt, lực dọc đối với chuyển vị của hệ thì theo công thức Mohr chỉ còn lại thành phần mô men và ta có:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{km} &= \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} \frac{\overline{M}_k \cdot \overline{M}_m}{EJ_x} dz \\ \delta_{kk} &= \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} \frac{\overline{M}_k^2}{EJ_x} dz \\ \Delta_{kp} &= \sum_{i=1}^n \int_0^{\ell_i} \frac{\overline{M}_k \cdot \overline{M}_p}{EJ_x} dz \end{aligned} \right\} \text{ hình 14.5.} \quad (14-3)$$

Ví dụ 1: Vẽ biểu đồ nội

Bài giải: Khung có hai bậc siêu tĩnh. Hệ cơ bản có được bằng cách bỏ liên kết kép tại A và hệ tương đương như trên hình 14.5b.

Phương trình chính tắc có dạng:

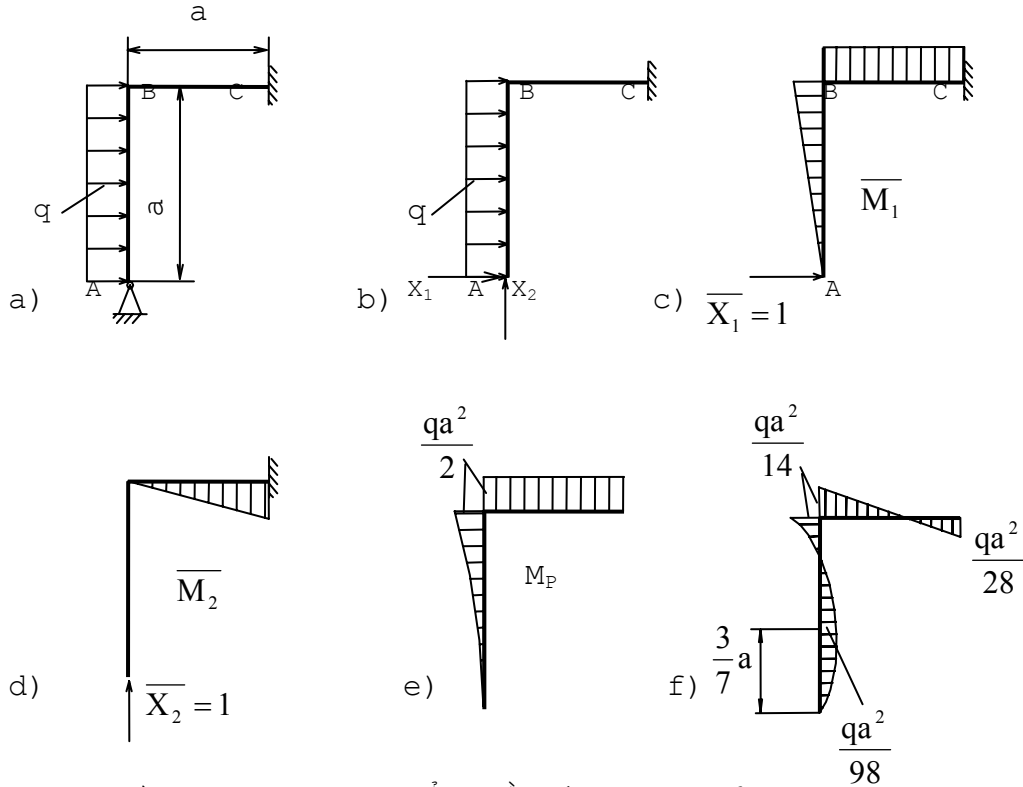
$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-4)$$

Biểu đồ mô men do các lực bằng 1 đơn vị tác dụng theo X_1, X_2 được biểu diễn trên hình 14.5c và 14.5d, còn biểu đồ do tải trọng q được biểu diễn ở hình 14.5e.

Trên cơ sở các biểu đồ đó, bằng phương pháp Vêrêsaghin ta tìm được:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{a^2}{21} \cdot \frac{2}{3} a + a^2 \cdot a \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^3}{EJ_x} \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{1}{EJ_x} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{a^3}{EJ_x} \\ \delta_{22} &= \frac{1}{EJ_x} \cdot \frac{a^2}{2} \times \frac{2}{3} a = \frac{a^3}{3EJ_x} \\ \Delta_{2p} &= \frac{-qa^2}{2EJ_x} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{qa^3}{4EJ_x} \end{aligned}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{1}{3} qa^2 \cdot a \cdot \frac{3}{4} a + \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot a \right) = \frac{5}{8EJ_x} qa^4$$



Hình 14.5: Vẽ biểu đồ nội lực của khung siêu tĩnh

Sau khi thay các giá trị δ_{11} , δ_{12} , δ_{22} , Δ_{1P} và Δ_{2P} vào hệ phương trình (14-4) và rút gọn ta được:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3}X_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{8}qa &= 0 \\ -\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 - \frac{1}{4}qa &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-5)$$

Giải hệ phương trình (14-5), ta sẽ được:

$$X_1 = -\frac{3}{7}qa; \quad X_2 = \frac{13}{28}qa$$

Như vậy ở hệ tương đương ta có X_1 (đổi chiều) và X_2 đã biết giá trị của nó. Từ đó ta

vẽ các biểu đồ nội lực của nó, biểu đồ mô men được biểu diễn trên hình 14.5f.

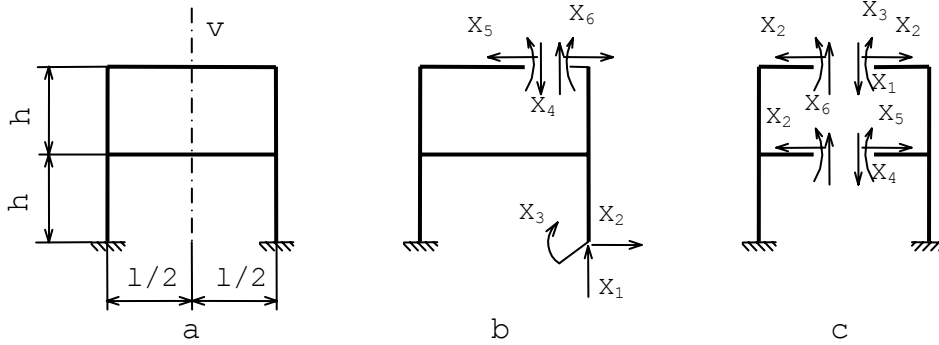
Cũng có thể căn cứ vào X_1 , X_2 , ta tăng giá trị các biểu đồ \bar{M}_1 và \bar{M}_2 đã có ở hình 14.5c và 14.5d bằng cách nhân mọi giá trị \bar{M}_1 và \bar{M}_2 cho X_1 , X_2 . Sau đó cộng 3 biểu đồ mô men do tải trọng (hình 14.5e) với M_1 , M_2 (hình 14.5c,d) khi đã nhân X_1 và X_2 , ta cũng có được biểu đồ mô men tổng cộng như hình 14.5f.

14.3. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH ĐỐI XỨNG

Một hệ được coi là đối xứng khi có hình dạng, độ cứng (EJ_x chẳng hạn), đối xứng qua một trục nào đó. Ví dụ khung biểu diễn trên hình 14.6a, khung đối xứng qua trục v nào đó. Giả sử khung chịu tác dụng bởi hệ lực nào đó.

Rõ ràng khung có 6 bậc siêu tĩnh. Nếu chọn hệ cơ bản, rồi hệ tương đương như hình 14.6b, thì ta cần có 6 phương trình để giải hệ siêu tĩnh như sau:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4 + \delta_{15}X_5 + \delta_{16}X_6 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{61}X_1 + \delta_{62}X_2 + \delta_{63}X_3 + \delta_{64}X_4 + \delta_{65}X_5 + \delta_{66}X_6 + \Delta_{6p} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-6)$$



Hình 14.6: Hệ siêu tĩnh đối xứng (a); hệ tương đương không đối xứng (b); Hệ tương đương đối xứng (c)

Giải hệ phương trình này tốn rất nhiều thời gian.

Nhưng ta nhận thấy rằng: Nếu ta chọn hệ cơ bản, rồi hệ tương đương như trên hình 14.6c (có tính chất đối xứng), thì việc tính toán sẽ đơn giản hơn nhiều.

Bởi vì với hệ tương đương đó các biểu đồ mô men $\bar{M}_2, \bar{M}_3, \bar{M}_5, \bar{M}_6$ (do các lực $\bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{X}_5, \bar{X}_6$ có tính chất đối xứng sinh ra) đều có tính chất đối xứng. Còn \bar{M}_1, \bar{M}_4 có tính chất phản đối xứng (do các lực $\bar{X}_1 = 1, \bar{X}_4 = 1$). Các biểu đồ đó do các lực bằng 1 từ $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_6$ được biểu diễn trên hình 14.7..

Để dàng thấy rằng kết quả việc thực hiện cách nhân biểu đồ theo Vêrêtaghin giữa các biểu đồ đối xứng và phản đối xứng sẽ bằng không. Một nửa kết quả dương và nửa kia là âm. Vì vậy sẽ có nhiều δ_{km} sẽ bằng 0, nên việc giải hệ phương trình chính tắc sẽ dễ dàng và nhanh chóng hơn.

Ví dụ 2: Để tìm δ_{12} ta nhân biểu đồ \bar{M}_1 (trên hình 14.7a) và biểu đồ \bar{M}_2 (hình 14.7b). Kết quả :

Nửa bên phải là: $2h \times \frac{2h}{2} \cdot \frac{1}{2} = h^2 1$

Nửa bên trái là: $-2h \times \frac{2h}{2} \cdot \frac{1}{2} = -h^2 1$

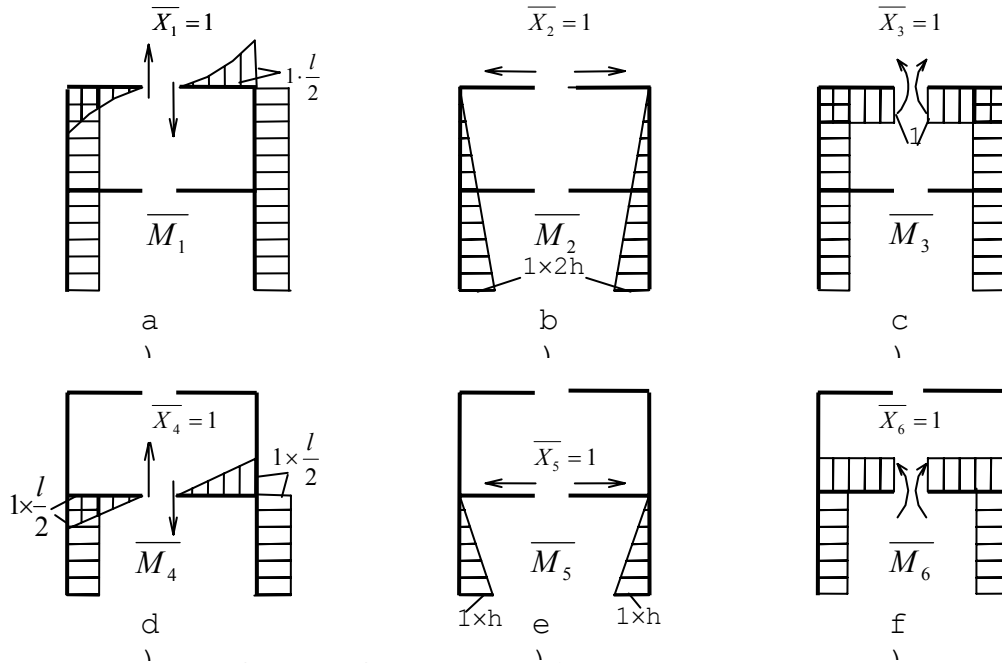
Do đó: $\delta_{12} = \frac{1}{EJ_x} (h^2 1 - h^2 1) = 0 = \delta_{21}$

Tương tự, ta có thể tính cho các hệ số phụ khác, kết quả là:

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0; \quad \delta_{15} = \delta_{51} = 0; \quad \delta_{16} = \delta_{61} = 0$$

$$\delta_{24} = \delta_{42} = 0 ; \delta_{34} = \delta_{43} = 0 ; \delta_{45} = \delta_{54} = 0 ; \delta_{46} = \delta_{64} = 0$$

Như vậy hệ phương trình (14-6), khi tính đến một số hệ số phụ bằng không nhờ các biểu đồ ở hình 14.7, sau khi đã thay các hệ số có giá trị bằng 0 vào (14-6), ta có:



$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{14} \cdot X_4 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{25} \cdot X_5 + \delta_{26} \cdot X_6 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{35} \cdot X_5 + \delta_{36} \cdot X_6 + \Delta_{3P} &= 0 \\ \delta_{41} \cdot X_1 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4P} &= 0 \\ \delta_{52} \cdot X_2 + \delta_{53} \cdot X_3 + \delta_{55} \cdot X_5 + \delta_{56} \cdot X_6 + \Delta_{5P} &= 0 \\ \delta_{62} \cdot X_2 + \delta_{63} \cdot X_3 + \delta_{65} \cdot X_5 + \delta_{66} \cdot X_6 + \Delta_{6P} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ tính các hệ số } \delta \quad (14-7)$$

Hệ phương trình (14 - 7) có thể tách ra hai hệ:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{14} \cdot X_4 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{41} \cdot X_1 + \delta_{44} \cdot X_4 + \Delta_{4P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-8)$$

Và

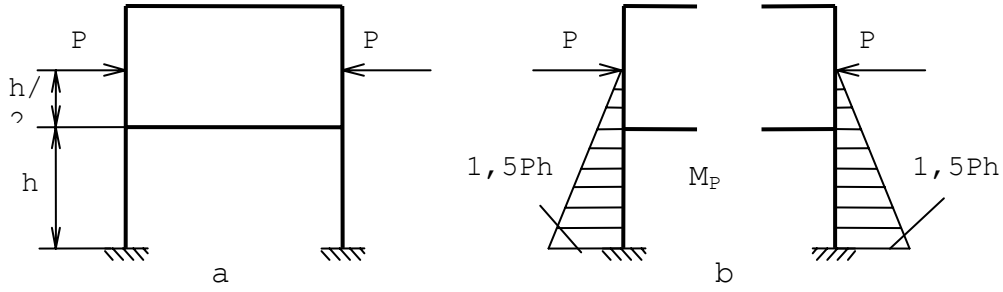
$$\left. \begin{aligned} \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{25} \cdot X_5 + \delta_{26} \cdot X_6 + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{35} \cdot X_5 + \delta_{36} \cdot X_6 + \Delta_{3P} &= 0 \\ \delta_{52} \cdot X_2 + \delta_{53} \cdot X_3 + \delta_{55} \cdot X_5 + \delta_{56} \cdot X_6 + \Delta_{5P} &= 0 \\ \delta_{62} \cdot X_2 + \delta_{63} \cdot X_3 + \delta_{65} \cdot X_5 + \delta_{66} \cdot X_6 + \Delta_{6P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-9)$$

Việc giải hai hệ phương trình (14-8) và (14-9) tuy còn phức tạp nhưng dù sao nó cũng dễ hơn nhiều so với việc giải hệ phương trình (14-6).

Sau đây chúng ta xét hai trường hợp cụ thể.

14.3.1. Hệ siêu tĩnh đối xứng chịu tải trọng đối xứng:

Ví dụ 3: Hệ lực như trên hình 14.8a là hệ đối xứng, chịu tải trọng cũng đối xứng. Chúng ta cũng chọn hệ cơ bản, rồi hệ tương đương như trên hình 14.6c và có các biểu đồ mô men đơn vị như trên hình 14.7. Bây giờ ta vẽ các biểu đồ mô men do tải trọng gây nên như trên hình 14.8b.



Hình 14.8: a-Hệ siêu tĩnh đối xứng chịu tải

Với những điều kiện bài toán siêu tĩnh như vậy, chúng ta tiến hành tính các hệ số tự do do tải trọng gây ra ở các phương Δ_{1P} , Δ_{2P} , Δ_{3P} , Δ_{4P} , Δ_{5P} và Δ_{6P} .

- Trước tiên chúng ta xét hệ phương trình (14-8), ta xét các hệ số Δ_{1P} và Δ_{4P} . Để có Δ_{1P} ta tiến hành nhân biểu đồ của M_P và \bar{M}_1 . Như vậy, nếu ta nhân biểu đồ \bar{M}_1 (phản đối xứng) với M_P (đối xứng) thì kết quả sẽ bằng không. Cho nên trong ví dụ này $\Delta_{1P} = 0$, tương tự ta có $\Delta_{4P} = 0$.

Do đó hệ phương trình (14-8) sẽ trở thành:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{14} \cdot X_4 &= 0 \\ \delta_{41} \cdot X_1 + \delta_{44} \cdot X_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-10)$$

Có thể giải hệ phương trình (14-10) này như sau: Ta nhân phương trình 1 của nó với δ_{41} và nhân phương trình 2 của nó với $(-\delta_{11})$.

Ta sẽ được:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot \delta_{41} \cdot X_1 + \delta_{11} \cdot \delta_{41} \cdot X_4 &= 0 \\ -\delta_{11} \cdot \delta_{41} \cdot X_1 - \delta_{11} \cdot \delta_{44} \cdot X_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-10a)$$

Thực hiện phép cộng, cuối cùng ta được:

$$0 + (\delta_{11} \cdot \delta_{41} - \delta_{11} \cdot \delta_{44}) \cdot X_4 = 0$$

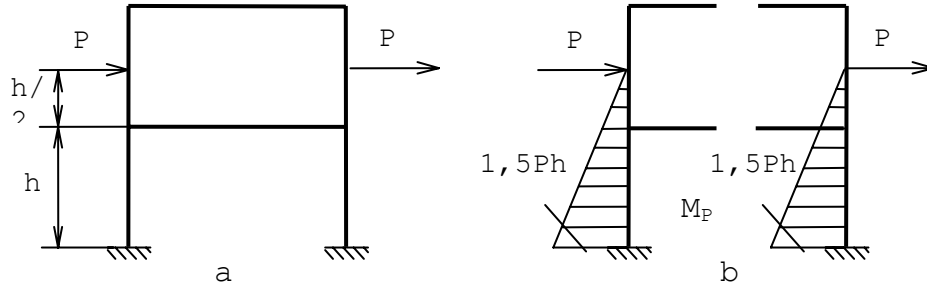
Vậy $X_4 = 0$ và $X_1 = 0$, có nghĩa là các lực cắt $X_1 = X_4 = 0$.

Tóm lại cách giải một hệ siêu tĩnh đối xứng có lợi nhất là chọn hệ cơ bản bằng cách cắt hệ bằng 1 mặt đối xứng và xét các ẩn số tại đó.

Như vậy ta có nhận xét: Nếu tải trọng là đối xứng thì các lực chưa biết phản đối xứng sẽ bằng không.

14.3.2. Hệ siêu tĩnh đối xứng, chịu tải trọng phản đối xứng.

Nếu tải trọng là phản đối xứng như trên hình 14.9a thì các lực chưa biết đối xứng cũng sẽ bằng không.



Hình 14.9: a-Hệ đối xứng chịu tải trọng phản đối xứng.
b- Biểu đồ mô men

Cũng tương tự cách làm ở trên, việc nhân biểu đồ của M_P phản đối xứng với các biểu đồ $\bar{M}_2, \bar{M}_3, \bar{M}_5$ và \bar{M}_6 đối xứng sẽ đưa đến kết quả:

$$\Delta_{2P} = \Delta_{3P} = \Delta_{5P} = \Delta_{6P} = 0$$

Vậy thực chất chỉ còn X_1 và X_4 là các lực phản đối xứng khác không.

Cuối cùng sẽ dẫn ta từ hệ phương trình (14-9) thành hệ phương trình sau đây:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{25} \cdot X_5 + \delta_{26} \cdot X_6 &= 0 \\ \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{35} \cdot X_5 + \delta_{36} \cdot X_6 &= 0 \\ \delta_{52} \cdot X_2 + \delta_{53} \cdot X_3 + \delta_{55} \cdot X_5 + \delta_{56} \cdot X_6 &= 0 \\ \delta_{62} \cdot X_2 + \delta_{63} \cdot X_3 + \delta_{65} \cdot X_5 + \delta_{66} \cdot X_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-11)$$

Chúng ta cũng có thể thực hiện phép giải như đã giải hệ phương trình (14-10) và hiển nhiên vì các hệ số $\delta_{22} \dots \delta_{66}$ đều khác 0, nên chỉ có thể $X_2 = X_3 = X_5 = X_6 = 0$.

Vậy ta có kết luận:

Nếu một hệ đối xứng chịu tải trọng phản đối xứng thì các ẩn số đối xứng đều bằng không. Trong ví dụ trên $X_2 = X_3 = X_5 = X_6 = 0$, có nghĩa là các mô men uốn và lực dọc tại mặt cắt trên trục đối xứng của khung bằng không.

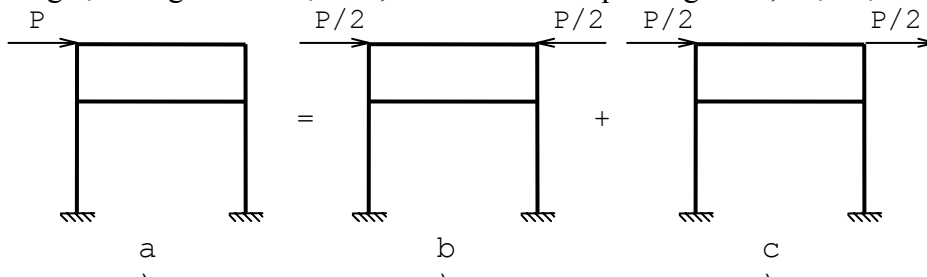
14.3.3. Hệ siêu tĩnh đối xứng tải trọng bất kì.

Ví dụ 4: Giả sử cho một hệ đối xứng chịu tải trọng P như hình 14.10a.

Ở đây không giống ở hai trường hợp trên, tức là tải trọng không đối xứng mà cũng không phải phản đối xứng. Trong trường hợp này, ta phân tích hệ này là tổng hợp của hệ đối xứng (hình 14.10b) và một hệ phản đối xứng (như trên hình 14.10c). Tức là khi

tải trọng bất kì thì tạo nên một hệ tải trọng đối xứng và một hệ tải trọng bất đối xứng

Tương tự như giải ở ví dụ trên, ta có hai nhóm phương trình, một hệ hai phương



Hình 14.10: a)-Hệ đối xứng tải trọng bất kì.
b-c): Hệ đối xứng và phản đối xứng phân

trình và một hệ bốn phương trình. Dĩ nhiên tổng cộng vẫn có 6 phương trình nhưng dễ giải hơn nếu ta không sử dụng những tính chất nêu ở trên.

14.4. TÍNH HỆ SIÊU TĨNH KHI CHỊU TÁC DỤNG CỦA NHIỆT ĐỘ THAY ĐỔI

Về nguyên tắc tính siêu tĩnh chịu tác dụng của nhiệt độ thay đổi cũng giống như tính đối với tải trọng, chỉ khác ở chỗ nguyên nhân gây ra nội lực trong hệ là do nhiệt độ mà thôi. Phương trình chính tắc thứ K của phương pháp lực có dạng:

$$\delta_{K1} X_1 + \delta_{K2} X_2 + \dots + \delta_{KK} X_K + \dots + \delta_{Kn} X_n + \Delta_{K1} = 0 \quad (14-12)$$

Trong đó Δ_{K1} là chuyển vị theo phương của lực X_k do sự thay đổi nhiệt độ gây ra trong hệ cơ bản. Theo công thức trong chương chuyển vị, ta có:

$$\Delta_{kt} = \int_0^l \alpha \cdot t_c \cdot \overline{N}_k dz + \int_0^l \alpha \cdot \frac{t_2 - t_1}{h} \cdot \overline{M}_k dz$$

Trong đó: \overline{N}_k và \overline{M}_k - Giá trị nội lực dọc và mô men nội lực do lực $P_k = 1$ tại nơi và phương tính chuyển vị; t_c - Nhiệt độ trung bình trong thanh chịu kéo (nén); t_2 - Nhiệt độ ở mặt trên của dầm; t_1 - Nhiệt độ ở mặt dưới của dầm; α - Hệ số giãn nhiệt của vật liệu; h - Chiều cao của dầm.

Nếu hệ gồm nhiều thanh thẳng có mặt cắt ngang không đổi trong từng thanh và nhiệt độ thay đổi như nhau theo suốt chiều dài của nó thì theo cách tính chuyển vị ta có:

$$\Delta_{kt} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \alpha \cdot t_c \cdot \overline{N}_K dz + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \alpha \cdot \frac{t_2 - t_1}{h} \cdot \overline{M}_K dz$$

Ví dụ 5: Giải hệ siêu tĩnh được cho như hình 14.11a và vẽ biểu đồ nội lực của nó

Bài giải: Hệ siêu tĩnh này có bậc siêu tĩnh là 1. Hệ cơ bản được chọn bằng cách gỡ bỏ gối tựa A và thay vào đó một phản lực X_1 , ta sẽ có hệ tương đương như trên hình vẽ 14.11b. Phương trình chính tắc của hệ siêu tĩnh này là:

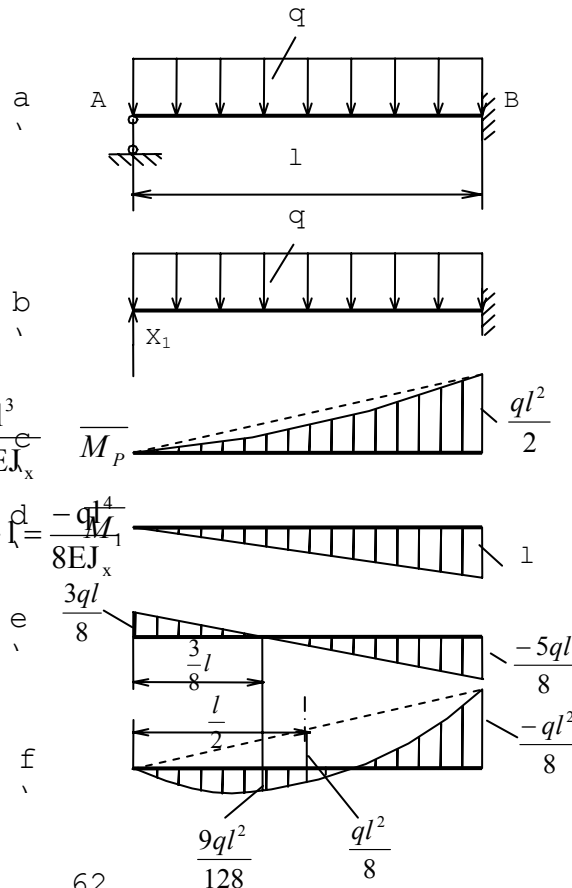
$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

Bây giờ ta vẽ biểu đồ mô men nội lực do tải trọng bên ngoài gây ra (do q sinh ra) gọi là M_P như trên hình 14.11c và biểu đồ $\overline{X}_1 = 1$ đặt tại A sinh ra là biểu đồ \overline{M}_1 (hình 14.11d). Ta tính:

$$\delta_{11} = \overline{M}_1 \times \overline{M}_1 = \frac{1}{EJ_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \times 1 \times \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l^3}{3EJ_x}$$

$$\Delta_{1P} = \overline{M}_1 \times M_P = -\frac{1}{EJ_x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot l = -\frac{ql^4}{8EJ_x}$$

Ta đưa các số liệu này vào phương trình 14-12, ta được:



Hình 14.11: Vẽ biểu đồ hệ siêu tĩnh

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{3}{8}ql$$

Khi có X_1 rồi, ta xem dầm chịu tác dụng lực phân bố q và lực tập trung tại A là X_1 . Với hệ lực này, ta vẽ được biểu đồ lực cắt Q và biểu đồ mô men nội lực M của dầm siêu tĩnh này (xem hình 14.11e và 14.11f).

Để có biểu đồ mô men nội lực như hình 14.11f, ta có thể thực hiện cộng hai biểu đồ M_P (hình 14.11c) và biểu đồ \overline{M}_1 (hình 14.11d) với điều kiện các giá trị mô men tại biểu đồ này được nhân lên X_1 lần (ví dụ ở ngàm trên hình 14.11d là giá trị mô men không phải là l mà là:

$$l \times X_1 = \frac{3}{8}ql^2$$

Ví dụ 6: Tìm chuyển vị thẳng đứng tại điểm giữa D của thanh BC như hình vẽ 14.12. Cho biết $EJ_x = \text{const}$.

Bài giải: Đây là bài toán tính chuyển vị ở hệ siêu tĩnh.

Trước tiên phải giải hệ siêu tĩnh và khi đã giải được hệ siêu tĩnh thì các lực tác dụng lên hệ gồm có tải trọng và các phản lực liên kết điều đã biết, có nghĩa là trên hệ cơ bản tĩnh định mọi lực tác dụng đều đã rõ và bài toán tính chuyển vị của hệ siêu tĩnh cũng là bài toán tính chuyển vị trong hệ cơ bản tĩnh định đó.

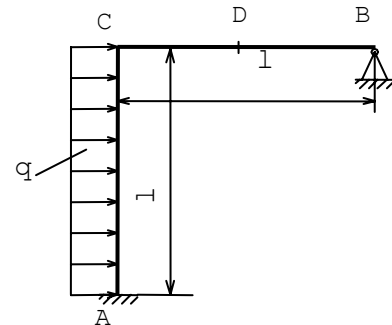
Với cách làm đó chúng ta giải bài toán siêu tĩnh trước.

- Chọn hệ cơ bản: Hệ có hai bậc siêu tĩnh, có thể đưa ra nhiều hệ cơ bản, nhưng ở đây ta chọn hệ cơ bản như hình 14.13a (bỏ khớp ở B).

- Hệ tương đương: Trên hệ cơ bản ta đặt tải trọng q và các phản lực chưa biết tại B là X_1 và X_2 (như hình 14.13b).

Với hệ tương đương như vậy, ta sẽ có hệ phương trình chính tắc là:

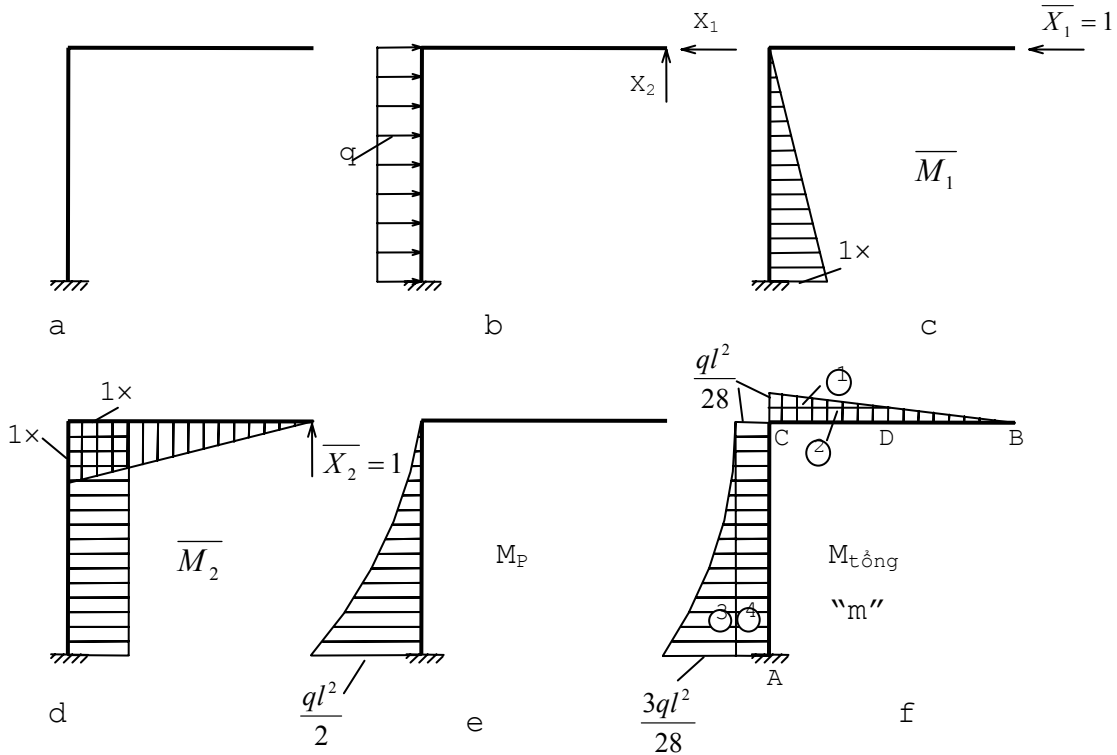
$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-13)$$



Hình 14.12: Tính chuyển vị của hệ siêu tĩnh tại D

Để giải hệ (14-13), ta phải xác định δ_{11} , $\delta_{12} = \delta_{21}$, δ_{22} , Δ_{1P} và Δ_{2P} . Muốn vậy ta phải xây dựng các biểu đồ mô men do $\bar{X}_1 = 1$, do $\bar{X}_2 = 1$, do tải trọng q sinh ra. Các biểu đồ ấy được lần lượt giới thiệu ở các hình 14.13c; 14.13d; 14.13e.

Với các biểu đồ này ta dễ dàng tính được các hệ số trên:



Hình 14.13: a- Hệ cơ bản; b- Hệ tương đương; c, d, e- các biểu đồ mô men để tính các hệ số δ_{ni}

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \times \bar{M}_2 = \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{2}{3} l + 1 \cdot 1 \cdot 1 \right) = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EJ_x}$$

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_1 = \frac{1}{EJ_x} = \frac{l^3}{EJ_x} \times \frac{1}{2} \cdot 1 \times 1 \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EJ_x}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \times \bar{M}_2 = \frac{l^3}{EJ_x} \times \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{l^3}{2EJ_x}$$

$$\Delta_{1P} = \bar{M}_1 M_P = \frac{-1}{EJ_x} = \frac{l^3}{EJ_x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{-ql^4}{8EJ_x}$$

$$\Delta_{2P} = \bar{M}_2 M_P = \frac{-1}{EJ_x} = \frac{l^3}{EJ_x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ql^2}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{-ql^4}{6EJ_x}$$

Đưa các hệ số này vào hệ phương trình (14-13), ta được:

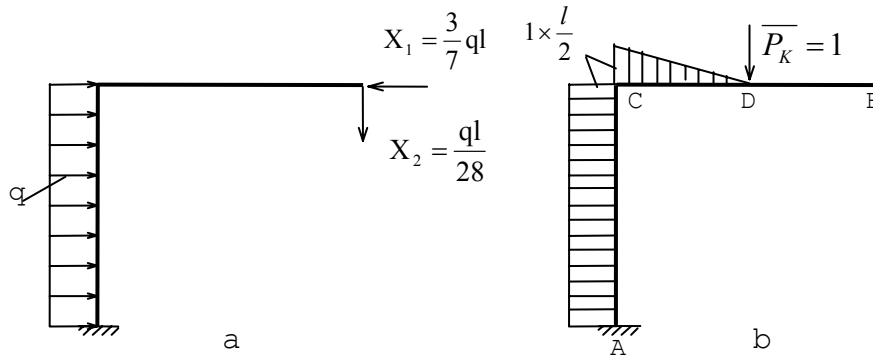
$$\left. \begin{aligned} \frac{X_1}{3} + \frac{X_2}{2} - \frac{ql}{8} &= 0 \\ \frac{X_1}{2} + \frac{4}{3}X_2 - \frac{ql}{6} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-14)$$

Giải hệ phương trình này ta có :

$$X_1 = \frac{3ql}{7}; X_2 = -\frac{ql}{28}$$

Vì X_2 mang dấu -, nên thực tế hệ tương đương sẽ được biểu diễn lại trên hình 14.14a (thay X_2 với chiều ngược lại) và biểu đồ mô men trong hệ siêu tĩnh cũng được vẽ với tải trọng q , X_1 và X_2 (xem hình 14.13 f).

- Tính chuyển vị tại D của hệ siêu tĩnh cũng là tính chuyển vị tại D ở hệ tĩnh



Hình 14.14: a- Hệ tương đương thực tế
b- Biểu đồ trạng thái "k" để tính chuyển vị tại D

định khi đã giải được X_1 và X_2 . Như vậy chúng ta xem $M_{tổng}$ là biểu đồ nội lực của trạng thái "m". Bây giờ chúng ta thiết lập trạng thái "K" bằng cách trên hệ cơ bản tại D ta tác dụng một lực $\overline{P}_k = 1$ theo phương tính chuyển vị là phương thẳng đứng và xây dựng biểu đồ cho trạng thái "K" là \overline{M}_K như trên hình 14.14b. Ta thực hiện việc nhân hai biểu đồ $M_{tổng}$ và \overline{M}_K thì ta có chuyển vị y_D tại D.

Vậy: $y_D = \frac{M_{tổng} \overline{M}_K}{EJ_x}$

Tức là ta thực hiện nhân biểu đồ (trên hình 14.13f và 14.14b). Ta chú ý đến biểu đồ \overline{M}_K (hình 14.14 b) giá trị mô men chỉ có từ ACD, còn đoạn DB mô men bằng không và trong đoạn CD trên hình 14.13f biểu đồ là hình thang. Để dễ làm phép nhân Vêrêsaghin, ta chia hình thang này làm thành hai hình: hình (1) là hình tam giác, hình (2) là hình chữ nhật (xem hình 14.13f). Cũng tương tự ở đoạn AC của $M_{tổng}$ (xem hình 14.13f) là một đường cong bậc 2, để tính diện tích của nó ta chia ra làm hai hình (3) và (4). Như vậy để có y_D ta nhân diện tích 4 hình đó với tung độ ở biểu đồ \overline{M}_K (hình 14.14b) ứng với trọng tâm 4 hình đã chia.

Vậy :

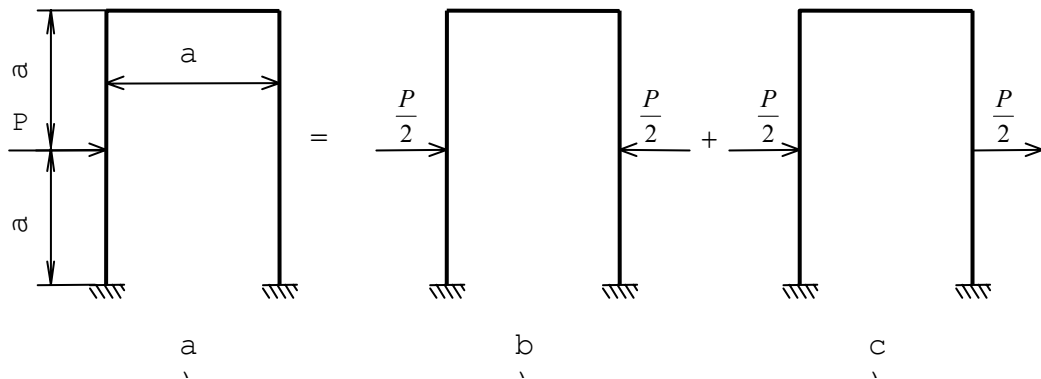
$$y_D = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{ql^2}{28} - \frac{1}{2} \frac{ql^2}{28} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{ql^2}{56} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{28} ql^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{ql^2}{28} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \right]$$

$$y_D = \frac{15l^4}{448EJ}$$

Tóm lại khi thực hiện nhân biểu đồ Verésaghin giữa hai biểu đồ nào đó thì để dễ xác định diện tích và tung độ tương ứng ta nên chia các biểu đồ ra thành những hình đơn giản như tam giác, hình vuông, hình chữ nhật, hình tròn, những đường cong đã biết được diện tích và vị trí trọng tâm của nó.

Ví dụ 7: Vẽ biểu đồ mô men nội lực đối với khung chịu lực như hình vẽ 14.15a. Cho $P=12\text{kN}$, $a=60\text{cm}$, $EJ=2.10^7\text{kNcm}^2$.

Bài giải : Hệ siêu tĩnh đã cho là một hệ siêu tĩnh bất kì, ta có thể xem tương đương với hai hệ chịu tải trọng đối xứng (hình 14.15b) cộng với hệ phản đối xứng (hình 14.15c). Vậy việc giải hệ phương trình 14.15a tức là giải hai hệ 14.15b và 14.15c. Việc giải này đơn giản hơn nhiều vì ta sử dụng được các tính chất ở phần trên đã nói.



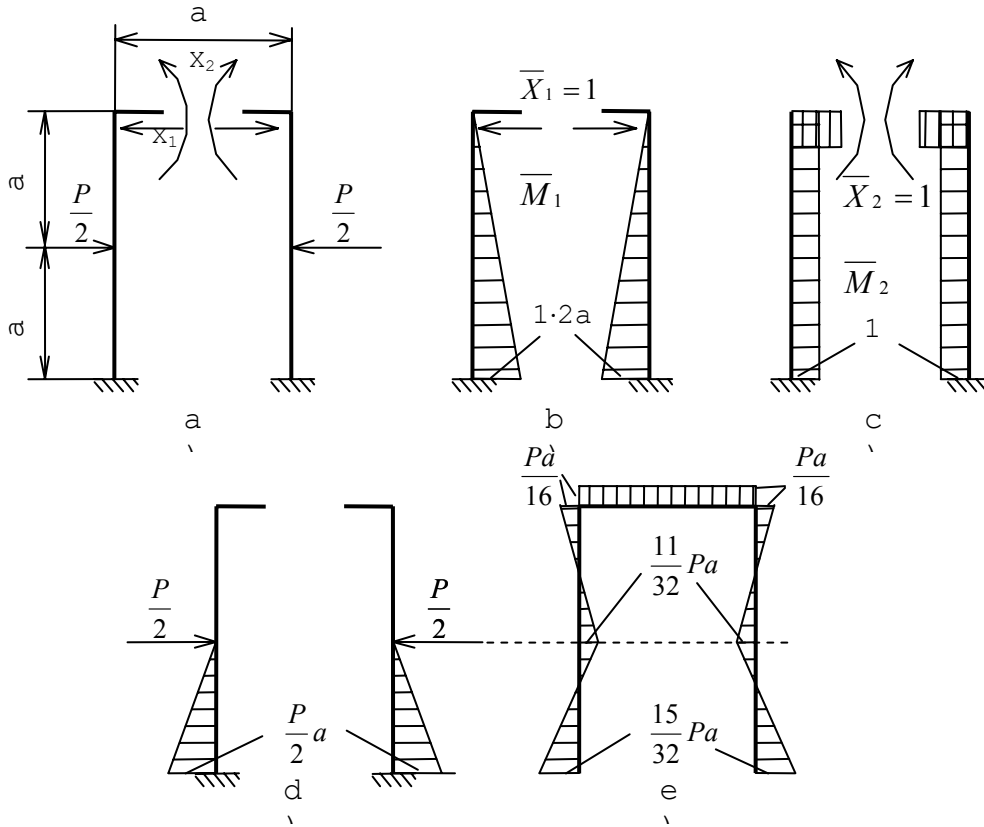
Hình 14.15: Vẽ biểu đồ nội lực đối

1. Ta giải hệ siêu tĩnh đối xứng và chịu tải trọng đối xứng $P/2$. Khi chọn hệ cơ bản và xây dựng hệ tương đương như trên hình 14.16a, thì thành phần lực cắt tại mặt đối xứng không còn (theo tính chất đã biết). Vậy trên hệ tương đương chỉ còn X_1, X_2 đối xứng.

Từ đó ta có thể viết hệ phương trình chính tắc như sau:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14-15)$$

Để giải hệ phương trình này, ta tính các hệ số nhờ các biểu đồ $\bar{X}_1 = 1$; $\bar{X}_2 = 2$ trên hình 14.16b, c, d.



Hình 14.16: Sơ đồ để tính các hệ số δ_{in} và Δ_{iP} cho hệ đối xứng chịu tải trọng đối xứng của hình 12.15b

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \bar{M}_1 = \frac{1}{EJ_x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{16}{3} \frac{a^3}{EJ_x}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \bar{M}_1 \bar{M}_2 = \frac{1}{EJ_x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot 1 = \frac{4a^2}{EJ_x}$$

$$\delta_{22} = \bar{M}_2 \bar{M}_2 = \frac{1}{EJ_x} \cdot 2 \left(1 \cdot \frac{a}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 2a \cdot 1 \right) = \frac{5a}{EJ_x}$$

$$\Delta_{1P} = \frac{-1}{EJ_x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{5}{6} \cdot 2a = -\frac{5}{6EJ_x} Pa^3$$

$$\Delta_{2P} = \frac{-1}{EJ_x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2} \cdot a \cdot a \cdot 1 = -\frac{Pa^2}{2EJ_x}$$

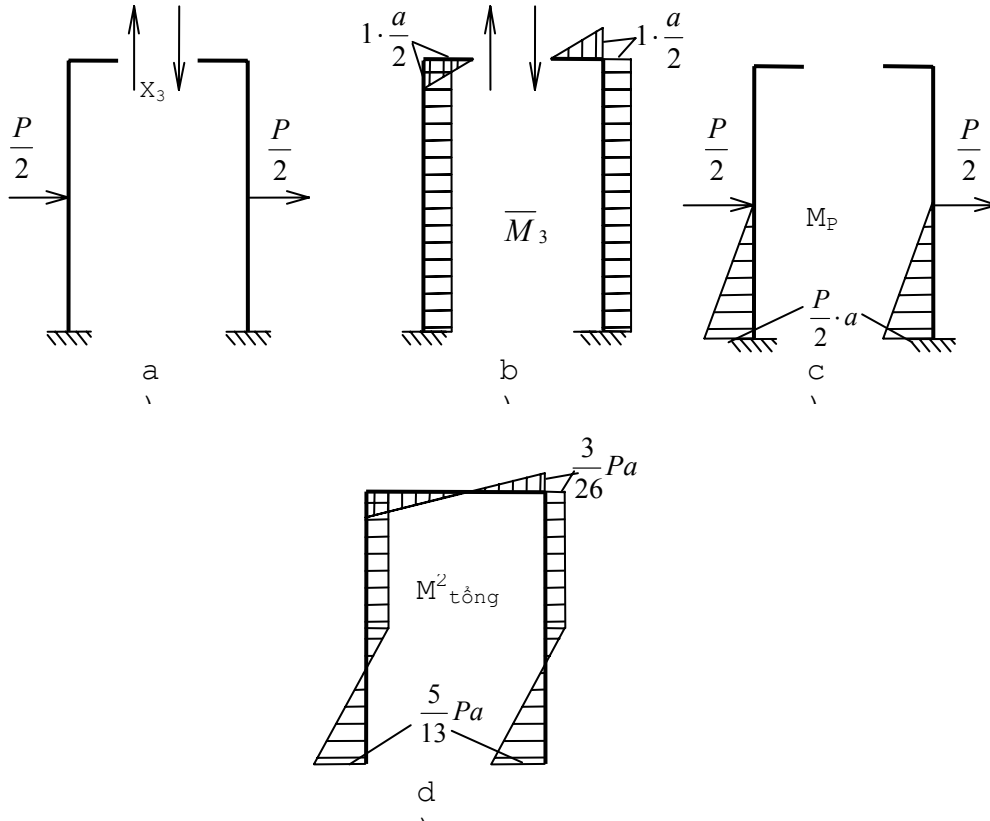
Thay các hệ số này vào hệ (14-15) và giải nó, ta được:

$$X_1 = +\frac{13P}{64}, \quad X_2 = -\frac{Pa}{16}$$

Khi có được X_1 và X_2 chúng ta dựng được biểu đồ mô men tổng như trên hình 14.16e

2. Bây giờ ta tiếp tục giải hệ siêu tĩnh đối xứng, chịu tải trọng phản đối xứng biểu diễn ở hình 14.15c.

Cũng tương tự như trên, trước hết ta chọn hệ cơ bản là cắt ở một mặt đối xứng thì các thành phần đối xứng của nó bằng 0, chỉ có lực cắt X_3 phản đối xứng khác không và ta có được hệ tương đương như trên hình 14.17a



Hình 14.17: Sơ đồ để tính các hệ số δ_{in} và Δ_{iP} cho hệ đối xứng chịu tải trọng phản đối xứng của hình 14.15c

Trên cơ sở hệ này chỉ có một phương trình chính tắc là:

$$\delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0 \quad (14-16)$$

Để giải phương trình này, ta tính δ_{33} thông qua biểu đồ mô men do $\bar{X}_3 = 1$ gây ra (trên hình 14.17b) và Δ_{3P} là sự nhân biểu đồ \bar{M}_3 và M_P (trên hình 14.17c).

Vậy:

$$\delta_{33} = \overline{M}_3 \overline{M}_3 = \frac{2}{EJ_x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \times 2a \times \frac{a}{2} \right) = \frac{13a^3}{12EJ_x}$$

$$\Delta_{3P} = \overline{M}_2 M_P = -\frac{2}{EJ_x} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{P}{2} \cdot a \times \frac{a}{2} = -\frac{Pa^3}{4EJ_x}$$

Thay các hệ số đó vào (14-16) và giải, ta có:

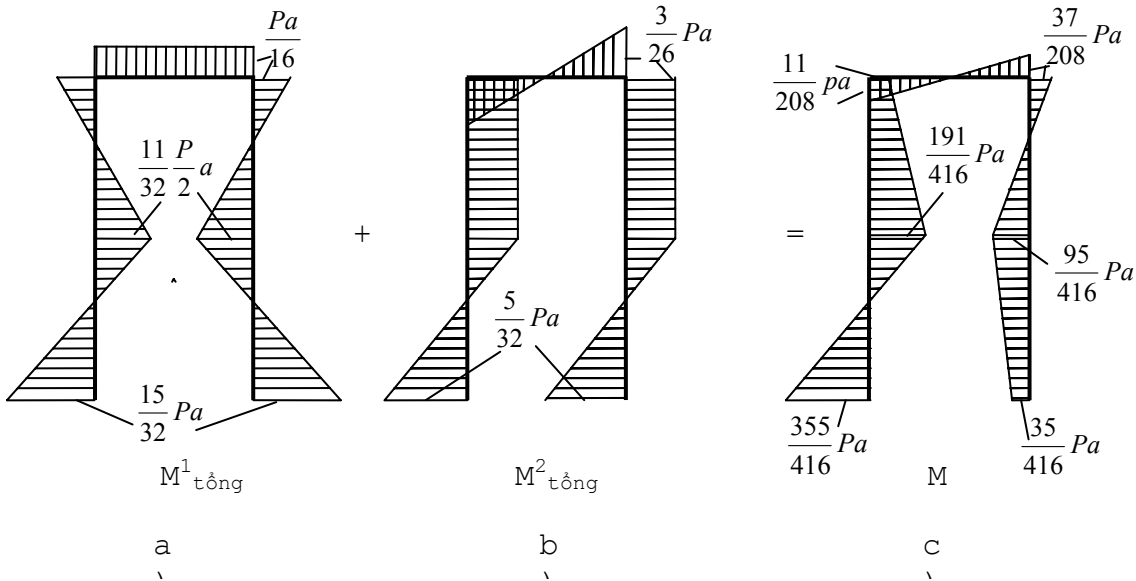
$$\frac{13}{12} \frac{a^3}{EJ_x} \cdot X_3 - \frac{Pa^3}{4EJ_x} = 0$$

Vậy :
$$X_3 = \frac{3P}{13}$$

Cũng làm như trên, nhân biểu đồ \overline{M}_3 với giá trị X_3 rồi cộng với M_P ta sẽ được $M_{\text{tổng}}$ của hệ siêu tĩnh này như trên hình 14.17d.

3. Cuối cùng để có biểu đồ mô men trong hệ siêu tĩnh đã cho (hình 14.15a), ta lại phải thực hiện phép cộng của hai biểu đồ mô men tổng của hệ đối xứng, tải trọng đối xứng $M^1_{\text{tổng}}$ (trên hình 14.16c) và $M^2_{\text{tổng}}$ ở hệ đối xứng, tải trọng phản đối xứng (hình 14.17d).

Trên hình 14.18, ta vẽ lại hai biểu đồ $M^1_{\text{tổng}}$ và $M^2_{\text{tổng}}$ (xem hình 14.18a,b), sau đó ta cộng các giá trị lại, ta được biểu đồ mô men M (xem hình 14.18c) trong hệ siêu tĩnh đã cho ban đầu.



Hình 14.18: Biểu đồ mô men

a-Biểu đồ mô men tổng của hệ tải trọng đối xứng (xem hình 14.16c).

b-Biểu đồ mô men tổng của hệ tải trọng phản đối xứng (xem hình 14.17d).

Chú ý:

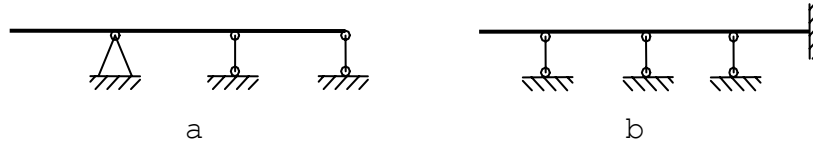
- Trong những ví dụ trên, khi giải các khung siêu tĩnh ta mới chỉ để ý đến thành phần mô men uốn, còn các thành phần lực dọc, mô men xoắn, lực cắt ta chưa tính đến. Nếu có tính đến các đại lượng này thì bài toán dài hơn, nhưng nguyên tắc giải không có gì mới. Mặt khác cũng lưu ý rằng chúng ta mới trình bày bài toán phẳng, nếu mở rộng cho các bài toán không gian thì cách giải cũng tương tự như vậy.

- Khi sử dụng tính chất đối xứng của hệ thì ta sẽ có các hệ phương trình chính tắc có số phương trình ít hơn và dĩ nhiên dễ giải hơn khi không lợi dụng tính chất này.

14.5.TÍNH DÀM LIÊN TỤC.

Tính toán dầm liên tục thực chất là giải bài toán siêu tĩnh với đặc tính là dầm thẳng, đặt trên nhiều gối tựa (hình 14.19). Các đầu mút của dầm có thể là tự do, có thể đặt trên gối tựa (hình 14.19a), cũng có thể là ngàm (hình 14.19b).

Để tiện tính toán, các gối tựa của dầm được đánh số từ trái sang phải theo thứ tự 0, 1, 2, ..., i, ..., n. Gọi l_1, l_2, \dots, l_n là các chiều dài các nhịp và cũng được tính từ trái sang phải. Như vậy chỉ số của chiều dài tại mỗi nhịp trùng với chỉ số của gối tựa bên phải của nhịp.

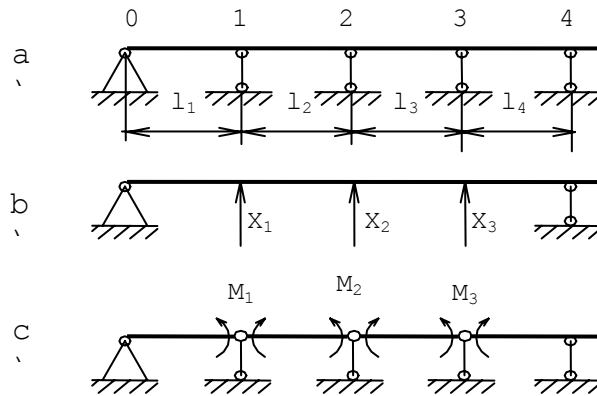


Hình 14.19: Dầm liên tục.
a-Dầm có đầu mút tự do; b-Dầm có đầu mút bị ngàm

Để tổng quát hoá bài toán, ta giả thiết mô men quán tính trong từng nhịp không đổi còn giữa các nhịp sẽ khác nhau.

Chúng ta hãy xét một dầm liên tục như trên hình vẽ 14.20a. Hệ cơ bản của dầm có thể chọn bằng cách bỏ các gối tựa trung gian và thay vào đó những phản lực X_1, X_2, X_3 (hình 14.20b).

Cách chọn hệ cơ bản này không có lợi lắm, vì khi xác định các hệ số chính và phụ trong hệ phương trình chính tắc ta phải vẽ các biểu đồ mô men sinh ra do các lực $\overline{X}_1 = 1, \overline{X}_2 = 1, \dots, \overline{X}_i = 1$ và chắc chắn các biểu đồ này có suốt chiều dài của dầm. Cho nên việc thực hiện cách nhân biểu đồ Vêrêsaghin có khó khăn.



Hình 14.20
a-Dầm liên tục; b và c- Hệ cơ bản của dầm

Vì lý do đó chúng ta hãy chọn lại hệ cơ bản khác bằng cách thay những gối tựa trung gian bằng những khớp (xem hình 14.20c). Dĩ nhiên ở đây phải thay vào những mô men $M_1, M_2, M_i \dots$ chống lại sự quay do các khớp sinh ra để hệ có thể làm việc tương đương.

Đối với hệ cơ bản này ta thấy việc tính toán các hệ số đơn giản hơn. Và rõ ràng mỗi mô men nội lực M_1, M_2, M_i chỉ ảnh hưởng đến hai nhịp lân cận nó mà thôi. Nên các biểu đồ sinh ra do $\overline{M}_1 = 1, \overline{M}_2 = 1, \dots, \overline{M}_n = 1$ cũng chỉ có ở hai nhịp lân cận chúng.

Đây cũng chính là điểm khác cách giải chung cho một hệ siêu tĩnh thông thường.

Để giải dầm liên tục chúng ta hãy xét điều kiện cụ thể tương đương tại gối tựa thứ i (hình 14.21a). Rõ ràng điều kiện tương đương là góc xoay tương đối của hai mặt cắt tại i (bên trái và bên phải) phải bằng không. Phương trình chính tắc thứ i có dạng:

$$\delta_{i(i-1)} M_{i-1} + \delta_{ii} M_i + \delta_{i(i+1)} M_{i+1} + \Delta_{ip} + \Delta_{it} + \Delta_{i\Delta} = 0$$

(14-17)

Trong đó:

- Δ_{ip} , Δ_{it} , $\Delta_{i\Delta}$: là góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt ngang ở hai gối tựa thứ i , do tải trọng, nhiệt độ thay đổi và độ lún không đều gây ra trong hệ cơ bản. Thường ta ít gặp các đại lượng Δ_{it} và $\Delta_{i\Delta}$.

- $\delta_{i(i-1)}$, δ_{ii} , $\delta_{i(i+1)}$: là góc xoay tương đối giữa hai mặt cắt thứ i do các mô men đơn vị:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{i(i-1)} = 1, \bar{M}_{ii} = 1, \\ \dots, \bar{M}_{i(i+1)} = 1 \end{aligned}$$

gây ra.

Trên hình 14.21 b, c, d biểu diễn các biểu đồ mô men đơn vị $\bar{M}_{i-1} = 1$, $\bar{M}_i = 1$ và $\bar{M}_{i+1} = 1$ (quanh gối tựa i).

Căn cứ vào biểu đồ này ta tính được các hệ số $\delta_{i(i-1)}$, δ_{ii} , $\delta_{i(i+1)}$ theo phương pháp nhân biểu đồ Vêrêsaghin:

$$\delta_{i(i-1)} = \bar{M}_i \bar{M}_{i-1} = \frac{1}{EJ_i} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_i \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l_i}{6EJ_i}$$

$$\delta_{ii} = \bar{M}_i \bar{M}_i = \frac{1}{EJ_i} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_i \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{(i+1)} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{(i+1)}}{3EJ_{(i+1)}}$$

$$\delta_{i(i+1)} = \bar{M}_i \bar{M}_{i+1} = \frac{1}{EJ_{i+1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l_{(i+1)} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{l_{(i+1)}}{6EJ_{i+1}}$$

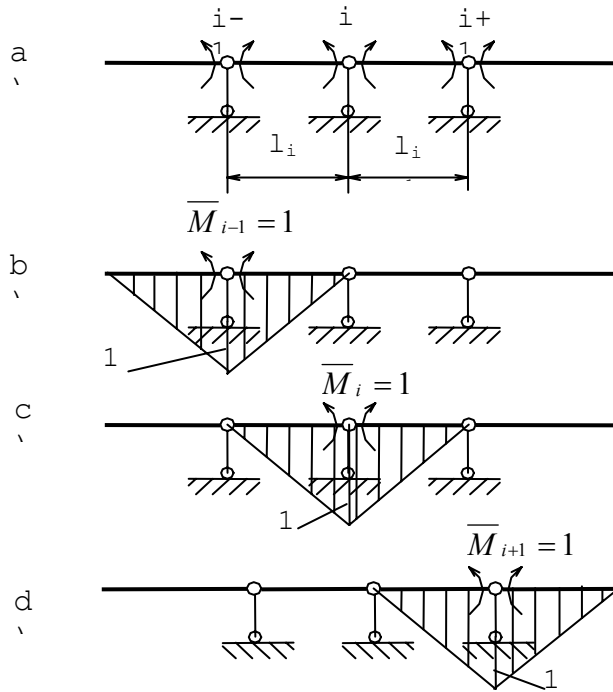
Đưa các hệ số vừa tính vào (14-17), ta được:

$$\frac{l_i}{6EJ_i} M_{(i-1)} + \left(\frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{(i+1)}}{3EJ_{(i+1)}} \right) M_i + \frac{l_{(i+1)}}{6EJ_{(i+1)}} M_{(i+1)} = -(\Delta_{ip} + \Delta_{it} + \Delta_{i\Delta}) \quad (14-18)$$

Phương trình chính tắc (14-18) gọi là phương trình ba mô men vì nó biểu thị sự liên hệ giữa các mô men chưa biết tại 3 gối tựa liên nhau $i-1$, i và $i+1$. Rõ ràng có bao nhiêu gối tựa trung gian thì sẽ có bấy nhiêu phương trình 3 mô men. Các phương trình này lập nên một hệ gọi là hệ phương trình ba mô men. Giải hệ phương trình đó ta sẽ tìm được tất cả các mô men uốn nội lực tại gối tựa (mô men này gọi là mô men tựa).

Bây giờ trong phương trình (14.18) cần phải xác định Δ_{ip} , Δ_{it} , $\Delta_{i\Delta}$ thì mới giải được.

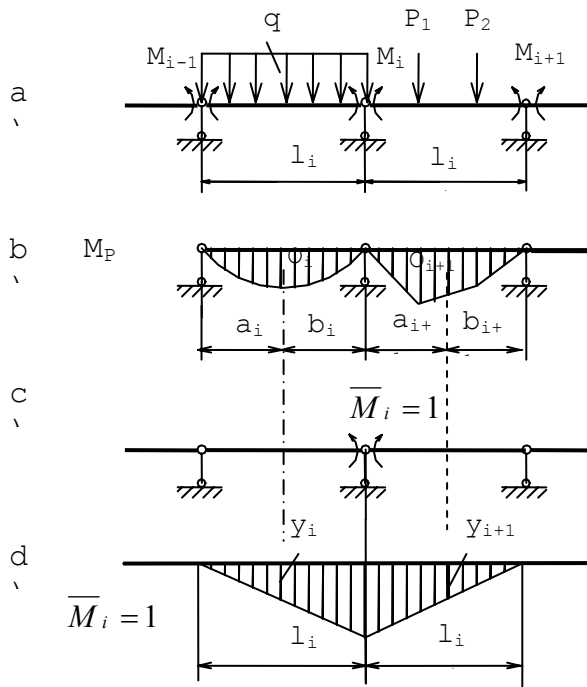
Dưới đây chúng ta hãy tính Δ_{ip} trong từng nhịp i và $i+1$ chịu tác dụng của tải trọng như trên hình vẽ 14.22a.



Hình 14.21: Phương pháp giải dầm liên tục

a- Xét gối tựa tương đương thứ i
b, c, d- Mô men đơn vị thứ

Chúng ta giả sử tại các nhịp l_i và l_{i+1} chịu tải trọng bên ngoài như trên hình 14.22a và nhiệt độ không gây ra sự khác biệt về góc xoay tại gối i , cũng như độ lún không gây ra góc xoay tương đối ở hai mặt cắt trái, phải ở gối tựa thứ i . Và như vậy ta chỉ cần tính Δ_{iP} Căn cứ vào sơ đồ tải trọng ở hình 14.22a, với hệ này ta tiến hành vẽ biểu đồ mô men do tải trọng gây ra ở nhịp thứ i và thứ $i+1$. Việc vẽ biểu đồ mô men do tải trọng gây ra ở hai



Hình 14.22: Sơ đồ tính góc xoay tương đối Δ_{iP} do tải trọng gây ra.

- Ω_i và Ω_{i+1} : là diện tích biểu đồ mô men uốn do tải trọng sinh ra trong hệ cơ bản tại nhịp thứ i và $i+1$.

- y_i , y_{i+1} : là tung độ của biểu đồ mô men gây ra do $\bar{M}_i = 1$ tại nhịp i và $i+1$ tương ứng với trọng tâm O_i và O_{i+1} trên biểu đồ mô men do tải trọng sinh ra.

Để dàng thấy rằng :

$$y_i = \frac{a_i}{l_i}; \quad y_{i+1} = \frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}$$

Do đó:

$$\Delta_{iP} = \frac{1}{EJ_i} \Omega_i \cdot \frac{a_i}{l_i} + \frac{1}{EJ_{i+1}} \Omega_{i+1} \cdot \frac{b_{i+1}}{l_{i+1}}$$

Thay Δ_{iP} vào trong phương trình (14-18) và cho $\Delta_{it} = \Delta_{i\Delta} = 0$ (không xét như đã nói ở trên), ta có:

$$\frac{1}{6EJ_i} M_{i-1} + \left(\frac{l_i}{3EJ_i} + \frac{l_{i+1}}{3EJ_{i+1}} \right) M_i + \frac{l_{i+1}}{6EJ_{i+1}} M_{i+1} = \left(\frac{1}{EJ_i} \Omega_i \frac{a_i}{l_i} + \frac{1}{EJ_{i+1}} \Omega_{i+1} \frac{b_{i+1}}{l_{i+1}} \right) \quad (14-19)$$

Nếu dầm có độ cứng không đổi thì phương trình này có dạng đơn giản hơn:

$$l_i \cdot \bar{M}_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) \bar{M}_i + l_{i+1} \cdot \bar{M}_{i+1} = -6 \left(\frac{\Omega_i \cdot a_i}{l_i} + \frac{\Omega_{i+1} \cdot b_{i+1}}{l_{i+1}} \right)$$

nhịp này là rất đơn giản, vì với cách chọn hệ cơ bản đã nói, thì xem ở nhịp i là một đoạn dầm đơn giản đặt trên hai gối tựa chịu tác dụng của các lực phân bố. Tương tự như vậy ở nhịp $i+1$ cũng là một đoạn dầm đặt trên hai gối tựa chịu tác dụng của P_1 và P_2 và ta có được các biểu đồ đó (như trên hình vẽ 14.22b). Để dễ tính toán, chúng ta vẽ lại biểu đồ mô men uốn do $\bar{M}_i = 1$ tại gối thứ i (xem hình 14.22c, d).

Để có Δ_{iP} ta thực hiện phép nhân biểu đồ M_P (hình 14.22b) và $\bar{M}_i = 1$ (hình 14.22d). Giả sử trọng tâm của biểu đồ M_P ở nhịp l_i là tại O_i và trọng tâm của biểu đồ M_P ở nhịp l_{i+1} là O_{i+1} .

Ứng với các trọng tâm này ở biểu đồ $\bar{M}_i = 1$ (hình 14.22d) có các tung độ là y_i và y_{i+1} , thì kết quả sẽ là:

$$\Delta_{iP} = \frac{1}{EJ_i} \Omega_i \cdot y_i + \frac{1}{EJ_{i+1}} \Omega_{i+1} \cdot y_{i+1}$$

Trong đó:

$$(12) \quad (14-20)$$

Giải hệ phương trình (14-20) của các gối trung gian dầm liên tục, ta xác định được các $M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_{n-1}$ và có thể xem mỗi đoạn dầm là một dầm riêng biệt và vẽ các biểu đồ nội lực của chúng. Sau đó sử dụng các nguyên lý cộng tác dụng để tìm các biểu đồ nội lực của toàn dầm.

Thật vậy, theo nguyên lý cộng tác dụng ta sẽ có biểu thức mô men tại mặt cắt ngang bất kỳ có hoành độ z sẽ là tổng giá trị mô men do tải trọng M_p, M_{i-1} và M_i .

Như vậy:

$$\begin{aligned} M(z) &= M_p(z) + M_{i-1} \cdot \frac{(l_i - z)}{l_i} + M_i \cdot \frac{z}{l_i} \\ &= M_p(z) + M_{i-1} \cdot \frac{l_i - z}{l_i} + \frac{M_i \cdot z}{l_i} \end{aligned} \quad (14-21)$$

Trong đó: $M_p(z)$ - là mô men uốn tại mặt cắt z do riêng tải trọng gây ra trong đoạn dầm đơn giản thứ i , (z lấy gốc từ gối $i-1$).

Muốn có biểu thức lực cắt ta lấy đạo hàm lần thứ 1

$$Q(z) = \frac{dM(z)}{dz} = Q_p(z) + \frac{M_i - M_{i+1}}{l_i} \quad (14-22)$$

Muốn tìm phản lực tại gối tựa thứ i , ta xét sự cân bằng của đoạn dầm quanh gối thứ i . Tương tự cắt quanh gối i một đoạn, (xem hình 14.23):

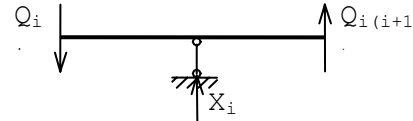
$$X_i = Q_{i(i+1)} - Q_i$$

Trong đó Q_i là lực cắt nằm bên trái gối i và $Q_{i(i+1)}$ là lực cắt nằm bên phải gối i .

Ví dụ 8: Cho một dầm liên tục như trên hình vẽ 14.24. Hãy vẽ biểu đồ nội lực và xác định các phản lực tại gối tựa.

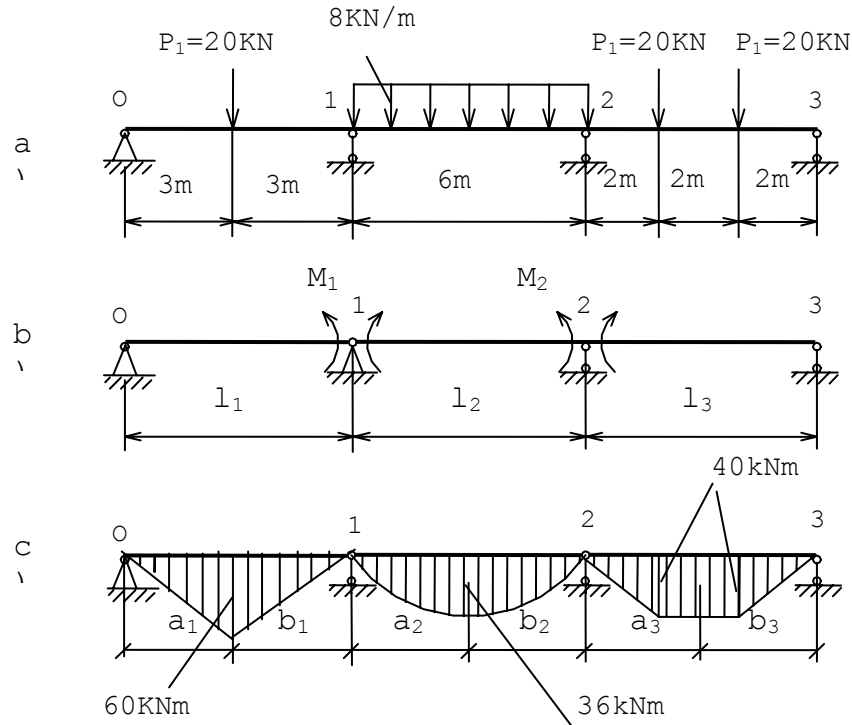
Bài giải: Dầm có hai bậc siêu tĩnh, ẩn số là các mô men tựa số 1 và số 2 là M_1 và M_2 (xem hình 14.24b) và hệ phương trình 3 mô men cũng sẽ được viết đối với 2 gối tựa đó là :

$$\left. \begin{aligned} l_1 M_0 + 2(l_1 + l_2)M_1 + l_2 M_2 &= -6 \left(\frac{\Omega_1 \cdot a_1}{l_1} + \frac{\Omega_2 \cdot b_2}{l_2} \right) \\ l_2 M_1 + 2(l_2 + l_3)M_2 + l_3 M_3 &= -6 \left(\frac{\Omega_2 \cdot a_2}{l_2} + \frac{\Omega_3 \cdot b_3}{l_3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (14-23)$$



Hình 14.23: Tính phản lực X_i ở gối tựa thứ i

Từ hệ phương trình ba mô men (hình 14.23) ta tiến hành vẽ các biểu đồ mô men do tải trọng sinh ra. Chú ý, do hệ cơ bản đã chọn (hình 14.24b) thì mỗi nhịp l_1, l_2, l_3 là những dầm riêng rẽ, cho nên việc vẽ các biểu đồ mô men do tải trọng sinh ra rất đơn giản (hình 14.24c). Ta lần lượt tính các đại lượng của hai phương trình ba mô men trong (14-23):



Hình 14.24: Vẽ biểu đồ nội lực và xác định các phân lực ở gối tựa của một dầm liên tục chịu tải trọng tác dụng như hình a

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} \times 60 \times 6 = 180 \text{ kNm}^2$$

$$a_1 = \frac{l_1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m}$$

Nên :
$$\frac{\Omega_1 a_1}{l_1} = 90 \text{ kNm}^2$$

$$\Omega_2 = \frac{2}{3} \times 36 \times 6 = 144 \text{ kNm}^2$$

$$b_2 = \frac{l_2}{2} = 3 \text{ m}$$

$$\frac{\Omega_2 a_2}{l_2} = 72 \text{ kNm}^2$$

Vì :
$$a_2 = b_2 \rightarrow \frac{\Omega_2 a_2}{l_2} = \frac{\Omega_2 b_2}{l_2} = 72 \text{ kNm}^2$$

$$\Omega_3 = \frac{2+6}{2} \cdot 40 = 160 \text{ kNm}^2 \quad (\text{Diện tích hình thang})$$

$$b_3 = \frac{l_3}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m}$$

$$\frac{\Omega_3 b_3}{l_3} = 80 \text{ kNm}^2$$

Ở hai đầu dầm không có mô men tập trung nên $M_0=M_3=0$ và chú ý trong hệ này, theo đề bài cho thì $l_1=6\text{m}$, $l_2=6\text{m}$, $l_3=6\text{m}$.

Thay tất cả giá trị vào ta có:

$$\left. \begin{aligned} 6M_1 + M_2 &= -162 \\ M_1 + M_2 &= -152 \end{aligned} \right\} \quad (14-24)$$

Giải hệ phương trình ta có:

$$M_1 = -33,1 \text{ kNm} \quad ; \quad M_2 = -29,3 \text{ kNm} \quad ; \quad P_2=20 \text{ kN} \quad P_3=20 \text{ kN}$$

Để vẽ biểu đồ mô men ta dùng biểu thức tính $M(z)$ ở trên tính cho một số mặt cắt đặc biệt:

Nhịp 1: Ở mặt cắt giữa nhịp một $z=l/2$

$$\begin{aligned} M(l/2) &= M_p \left(\frac{l_1}{2} \right) + M_0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1} \times \frac{l_1}{2} \\ &= 60 + 0 - \frac{33,1}{2} = 43,5 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Nhịp 2:

$$M\left(\frac{l_2}{2}\right) = M_p \frac{l_2}{2} + M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_2} \cdot \frac{l_2}{2} = 36 - 33,1 + \frac{-29,3 + 33,1}{2} = 4,5 \text{ kNm}$$

Nhịp 3: Mặt cắt ở 1/3 nhịp 3:

$$M\left(\frac{l_3}{3}\right) = M_p \frac{l_3}{3} + M_2 + \frac{M_3 - M_2}{l_3} \cdot \frac{l_3}{3} = 40 - 29,3 + \frac{29,3}{3} = 20,4 \text{ kNm}$$

$$M\left(\frac{2}{3}l_3\right) = M_p \left(\frac{2}{3}l_3\right) + M_2 + \frac{M_3 - M_2}{l_3} \cdot \frac{2}{3}l_3 = 40 - 29,3 - \frac{29,3}{3} \cdot \frac{2}{3} = 30,2 \text{ kNm}$$

trong các trường hợp này dùng công thức tính mô men tập trung ở đầu dầm (xem hình 14.25b). Sau đó dùng biểu thức xác định lực cắt (14.22) ở mục trên để xác định các giá trị lực cắt ở những nơi cần thiết và sử dụng các nhận xét về liên hệ vi phân của ngoại lực và nội lực đã biết để vẽ biểu đồ lực cắt Q (hình 14.25c).

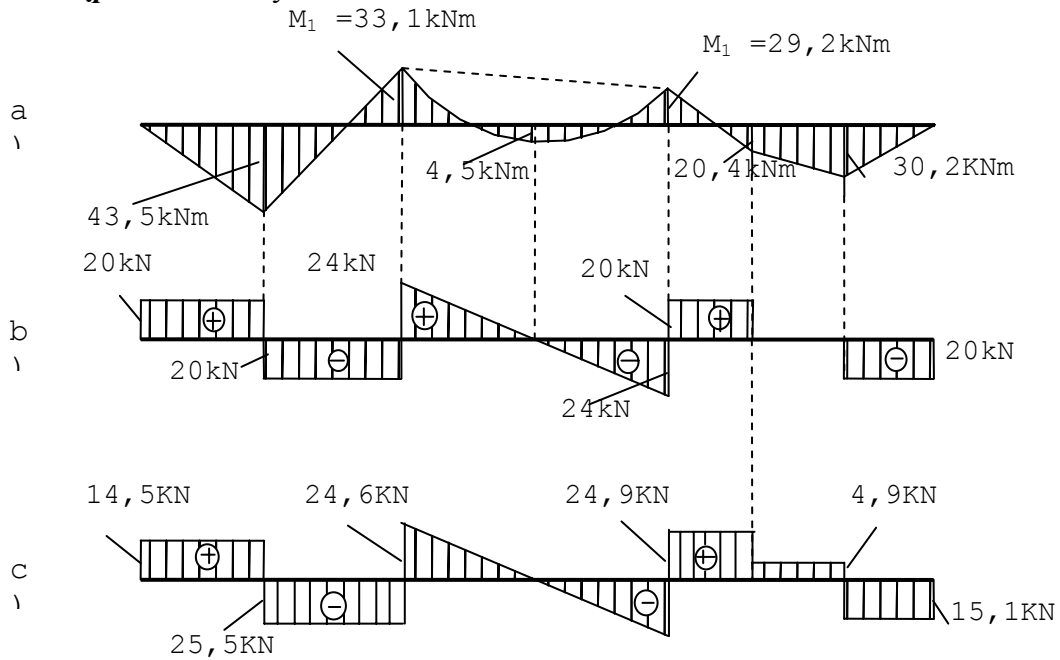
Ở nhịp 1: Với z thay đổi từ $0 \div l/2$

$$Q = Q_p + \frac{M_1 - M_0}{l} = 20 - \frac{33,1}{6} = 14,5 \text{ kN}$$

Với z thay đổi từ $l_1/2 \div l_1$

$$Q = -20 - \frac{33,1}{6} = -25,5 \text{ kN}$$

Ở nhịp 2: Với z thay đổi từ $0 \div l_2$



Hình 14.25

a- Biểu đồ mô men tĩnh tổng cộng của dầm siêu tĩnh (xem hình 14.24a).

b- Biểu đồ lực cắt khi dầm đơn giản.

c- Biểu đồ lực cắt của dầm khi tính lực cắt theo

(14.22)

$$Q = Q_p + \frac{M_2 - M_1}{2}$$

Khi $z=0$

$$Q = 24 + \frac{-29,3 + 33,1}{6} = 24,6 \text{ kN}$$

Khi $z=l_2$

$$Q = 24 + \frac{-29,3 + 30,2}{6} = 23,4 \text{ kN}$$

Ở nhịp 3:

$$Q = Q_p + \frac{M_3 - M_2}{6}$$

$$\text{Với } z=0 \rightarrow \frac{l_3}{3}$$

$$Q = 20 + \frac{29,3}{6} = 24,9 \text{ kN}$$

$$\text{Với } \frac{l_3}{3} \rightarrow \frac{2}{3}l_3$$

$$Q = 0 + \frac{29,3}{6} = 4,9 \text{ kN}$$

$$\text{Với } \frac{2}{3}l_3 \rightarrow l_3$$

$$Q = -20 + \frac{29,3}{6} = -15,1\text{kN}$$

Nguyên tắc giải các dầm liên tục khi có sự thay đổi của nhiệt độ hoặc có độ lún cũng tương tự chỉ cộng thêm biến dạng do nhiệt độ và do độ lún sinh ra ở các phương trình ba mômen.

CÂU HỎI TỰ HỌC:

- 14.1. Thế nào là hệ siêu tĩnh, bậc siêu tĩnh ?
- 14.2. Hệ cơ bản là gì ? Có phải mỗi hệ siêu tĩnh chỉ có một hệ cơ bản không ?
- 14.3. Hệ tương đương ?
- 14.4. Thiết lập hệ phương trình chính tắc? Tại sao gọi là phương pháp lực ?
- 14.5. Cách xác định các hệ số trong phương trình chính tắc và cách giải nó ?
- 14.6. Khi đã giải được các lực liên kết thì làm sao vẽ được biểu đồ mô men nội lực ?
- 14.7. Lợi dụng tính chất đối xứng của hệ và tải trọng đối xứng hoặc phản đối xứng có lợi gì khi giải hệ siêu tĩnh ?
- 14.8. Dầm liên tục là gì ? Cách giải nó có khác hệ siêu tĩnh không ?
- 14.9. Phương trình ba mô men có lợi gì ?
- 14.10. Giải một dầm liên tục có 2 gối tựa thừa.

--- □ ---

TÍNH ĐỘ BỀN KHI ỨNG SUẤT THAY ĐỔI THEO THỜI GIAN

15.1.KHÁI NIỆM

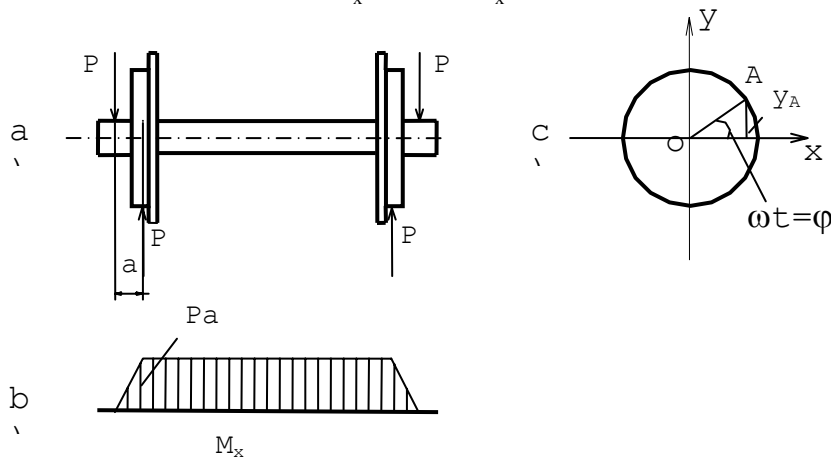
Trong thực tế ta thường gặp các chi tiết máy chịu ứng suất thay đổi tuần hoàn theo thời gian. Thí dụ xét ứng suất tại một điểm A trên trục xe lửa đang chuyển động (hình 15.1). Tung độ y_A biến đổi tuần hoàn theo thời gian:

$$y_A = R \sin \varphi = R \sin \omega t \quad (a)$$

Trong đó $\varphi = \omega t$, ω : vận tốc góc của trục.

Vậy công thức tính ứng suất có dạng:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_A = \frac{M_x}{J_x} \cdot R \sin \omega t \quad (15-1)$$



Hình 15.1: Trục xe lửa

Ứng suất pháp σ_z tại A là một hàm số tuần hoàn theo thời gian. Ứng suất có các giá trị cực trị và đổi dấu sau một vòng quay. Do tác dụng của ứng suất thay đổi dấu như trên, trong thực tế người ta thấy các chi tiết máy bị phá hỏng với giá trị ứng suất thấp hơn giới hạn bền khá nhiều và sự phá hỏng đó thường xảy ra đột ngột.

Một thời gian khá dài người ta cho rằng sự phá hỏng của vật liệu là do hiện tượng mỏi mệt vì vật liệu chịu ứng suất thay đổi dấu liên tục. Do đó mới có danh từ hiện tượng mỏi (Fatigue). Nhưng hiện nay người ta giải thích chặt chẽ hơn, đó là do sự xuất hiện các vết nứt vi mô trong lòng chi tiết khi chịu ứng suất thay đổi theo thời gian. Các vết nứt vi mô phát triển dần thành các vết nứt lớn (vĩ mô) cho đến khi mặt cắt ngang bị thu nhỏ và không đủ sức chịu lực nữa thì chi tiết bị phá hỏng một cách đột ngột. Tuy giải thích nguyên nhân như trên, nhưng do thói quen nên hiện nay, hiện tượng phá hỏng của vật liệu do ứng suất thay đổi vẫn gọi là hiện tượng mỏi của vật liệu. Để có thể hiểu rõ hơn thì cần biết rằng để xuất hiện các vết nứt vĩ mô và phát triển khi trị số ứng suất xuất hiện trong chi tiết hoặc bộ phận công trình chịu ứng suất thay đổi, mà giá trị cực đại của nó phải vượt quá một giới hạn nhất định ta sẽ gọi là giới hạn mỏi.

Nếu chúng ta có thể có được một chi tiết bị phá hỏng vì mỏi thì sẽ dễ dàng nhận thấy rằng ở mặt cắt bị đứt sẽ có hai vùng: một vùng nhẵn và một vùng xù xì. Phần nhẵn được giải thích là phần phát triển các vết nứt vĩ mô. Trong quá trình các vết nứt phát triển

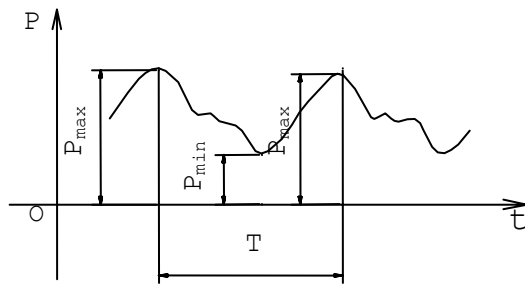
thì chi tiết vẫn quay và chính nó sẽ cọ xát với nhau nên được mài nhẵn đi. Phần dư xì là phần diện tích còn lại của mặt cắt ngang không chịu nổi nữa nên bị gãy đột ngột và các tinh thể bị phá huỷ này tạo nên một vùng không được nhẵn.

Với quan điểm đó sự nghiên cứu về môi tập trung xem xét một số vấn đề sau:

- Xác định giới hạn mỏi, tức là tìm giới hạn cực đại của ứng suất thay đổi tương ứng với từng loại vật liệu và hình thức chịu tải của nó (như uốn, kéo).
- Tìm hiểu những nhân tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi
- Từ đó chúng ta tìm các biện pháp để nâng cao giới hạn mỏi, nghĩa là tìm các biện pháp hạn chế sự xuất hiện và phát triển các vết nứt vi mô và vĩ mô đã nói ở trên

15.2. CÁC ĐẶC TRƯNG CỦA CHU TRÌNH ỨNG SUẤT

Ta gọi một chu trình ứng suất là khi trị số ứng suất P biến thiên từ trị số cực đại sang trị số cực tiểu và về trở lại trị số cực đại. Thời gian thực hiện một chu trình là một chu kì (hình 15.2).



Hình 15.2: Chu kì ứng suất

Bằng thực nghiệm người ta đã cho biết sự biến thiên của các hàm ứng suất không ảnh hưởng đến giới hạn mỏi. Yếu tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi của vật liệu là trị số ứng suất cực đại và cực tiểu. Từ đó cho phép ta tiến hành các thí nghiệm với bất cứ cách biến thiên nào của ứng suất.

Ví vậy các trị số P_{max} và P_{min} trở thành các đặc trưng của chu trình ứng suất. Ngoài hai đặc trưng đó ta còn có các đặc

trung khác như sau:

Ứng suất trung bình P_{tb} , với định nghĩa:

$$P_{tb} = \frac{P_{max} + P_{min}}{2} \quad (15-2)$$

Ứng suất biên độ:

$$P_{bd} = \frac{P_{max} - P_{min}}{2} \quad (15-3)$$

Dễ dàng xác định P_{max} , P_{min} thông qua P_{tb} và P_{bd} :

$$\left. \begin{aligned} P_{max} &= P_{tb} + P_{bd} \\ P_{min} &= P_{tb} - P_{bd} \end{aligned} \right\} \quad (15-4)$$

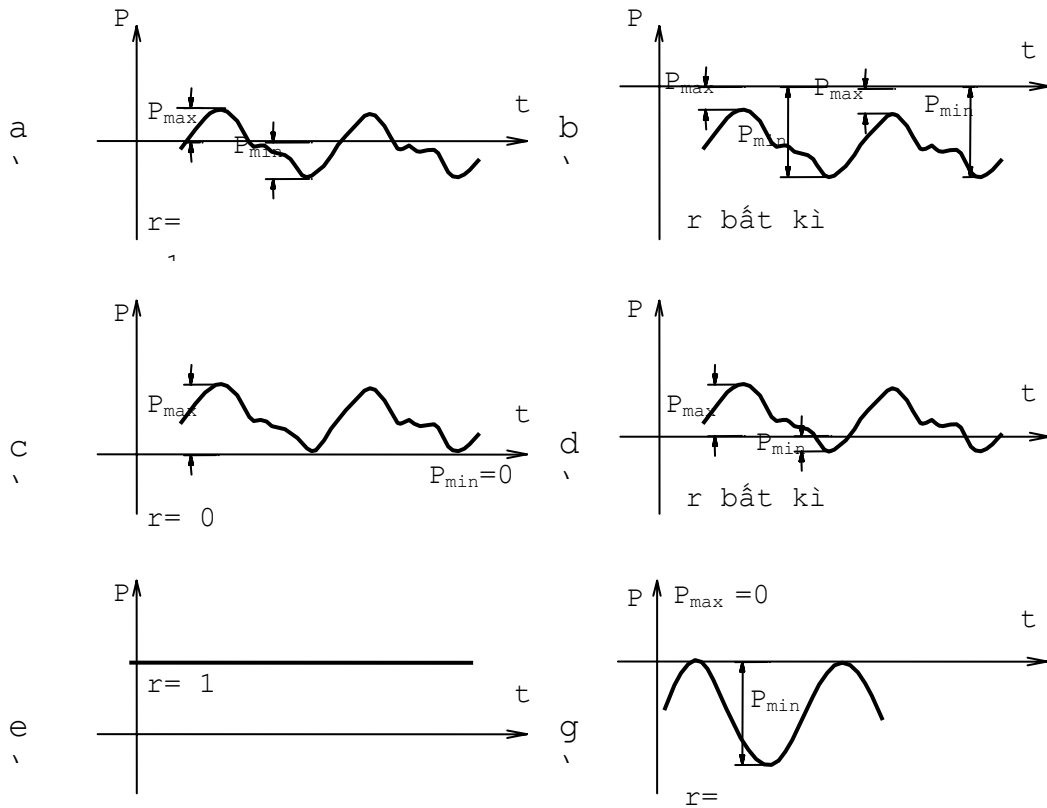
Ta xác nhận P_{bd} bao giờ cũng có giá trị dương.

$$\text{- Hệ số bất đối xứng của chu trình: } r = \frac{P_{min}}{P_{max}} \quad (15-5)$$

Từ đó ta có thể phân loại các chu trình ứng suất như sau:

1. Chu trình dương là khi cả P_{max} và P_{min} đều có giá trị dương (vật liệu luôn luôn chịu kéo).
2. Chu trình âm là khi cả P_{max} và P_{min} đều có giá trị âm (vật liệu luôn luôn chịu nén).
3. Chu trình đối xứng: $P_{max} = -P_{min}$, vậy $P_{tb} = 0$ và $r = -1$.
4. Chu trình bất đối xứng là khi r có trị số bất kì.

5. Chu trình mạch động là khi $r = 0$ hoặc $r = \infty$ (P_{\min} hoặc P_{\max} bằng không).
 6. Nếu ứng suất là không đổi suốt quá trình (trạng thái tĩnh), thì $P_{\max} = P_{\min}$ và $r = 1$
 Các chu trình đó được biểu diễn trên hình 15.3.



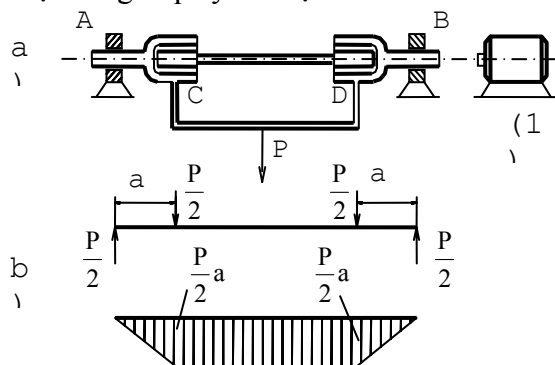
Hình 15.3. Các chu trình ứng suất: a-Chu trình đối xứng; b, d-Chu trình bất đối xứng; c, g-Chu trình mạch động; e-Trạng thái tĩnh.

15.3.GIỚI HẠN MỎI VÀ BIỂU ĐỒ GIỚI HẠN MỎI

15.3.1. Giới hạn mỏi.

Để xác định giới hạn mỏi, ta phải tiến hành thí nghiệm để tìm ra giới hạn mỏi đối với các loại chu trình có hệ số bất đối xứng khác nhau. Các thí nghiệm được thực hiện trên các máy thử mỏi. Thí nghiệm tương đối đơn giản và phổ biến nhất là thí nghiệm uốn để tạo nên một chu trình đối xứng. Sơ đồ máy được biểu diễn trên hình 15.4a.

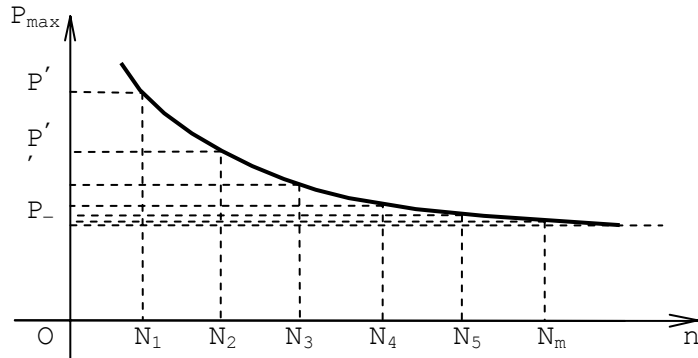
Mẫu thí nghiệm được lắp vào các ngàm A và B của máy tạo nên một thanh cứng đặt trong các ổ trượt quay C và D. Tải trọng P đặt lên giá quay AB tạo nên mô men uốn đối với mẫu thí nghiệm như trên sơ đồ hình 15.4b. Giá treo lực đặt trên các ổ bi tại A và B, do đó khi trục quay, phương của lực P không thay đổi, nghĩa là mô men uốn không thay đổi. Động cơ (1) có bộ phận đếm vòng và có số vòng quay từ 2000 đến 6000 vòng/phút. Cách tiến hành thí nghiệm theo tiêu chuẩn VN. Ví dụ thí nghiệm cho 10 mẫu. Với mẫu thứ



80 Hình 15.4: a-Sơ đồ thí nghiệm mỏi ;b-Mô men uốn

nhất ta đặt tải trọng P sao cho ứng suất cực đại trên mẫu thử đạt đến giá trị quá 50% giới hạn bền. Trị số này lớn hơn giới hạn mỏi mà ta đã dự đoán.

Sau một số vòng quay nhất định, nghĩa là sau một số chu trình nhất định, giả dụ N_1 chu trình chẳng hạn, mẫu sẽ bị gãy. Ta tiến hành thử mẫu thứ 2 bằng cách giảm lực P đi. Sau đó đến các mẫu khác. Lần lượt ta sẽ có các chu trình N_1, N_2, \dots, N_n (tương ứng với sự phá hỏng của vật liệu), ta lập được biểu đồ như hình vẽ 15.5.



Hình 15.5: Biểu đồ quan hệ giữa P và N

Biểu đồ đó được gọi là biểu đồ Véle. Ta nhận thấy đường cong quan hệ giữa P_{max} và số chu kỳ N sẽ tiến tiệm cận đến một đường ngang nào đó. Đường đó xác định cho ta giới hạn (cùng với số chu kỳ khá lớn là N_n) gọi là giới hạn mỏi P_{-1} vì rằng ứng suất cực đại đạt đến trị số đó vật liệu sẽ làm việc lâu dài dưới tác dụng của ứng suất thay đổi.

Trong thực tế có thể xem một chi tiết chế tạo bằng thép làm việc với số lượng chu trình $N_n=10$ triệu, thì chi tiết đó được coi là làm việc vĩnh viễn.

Đối với kim loại màu số chu trình ít nhất cần thực hiện là từ $20 \cdot 10^7$ đến $50 \cdot 10^7$.

Giới hạn mỏi của vật liệu được kí hiệu với chỉ số r (P_r) (r- hệ số bất đối xứng). Trong trường hợp đối xứng, giới hạn mỏi là P_{-1} (ở đây chữ P để chỉ chung cho ứng suất pháp và ứng suất tiếp). Trong trường hợp cụ thể chỉ có ứng suất pháp hay ứng suất tiếp ta có thể kí hiệu giới hạn mỏi là σ_{-1} và τ_{-1} .

Giới hạn mỏi khi uốn của thép thường có quan hệ với giới hạn bền khi kéo như sau:

$$\sigma_{-1}^u = 0,4\sigma_b \quad (15-6)$$

Ta có thể dùng những công thức kinh nghiệm sau đây để suy ra giới hạn mỏi σ_{-1} của thép trong các biến dạng kéo - nén đối xứng hoặc τ_{-1} xoắn đối xứng:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{-1}^{kn} &= 0,7\sigma_{-1}^u = 0,28\sigma_b \\ \tau_{-1} &= 0,55\sigma_{-1}^u = 0,22\sigma_b \end{aligned} \right\} \quad (15-7)$$

Đối với kim loại màu, ta có công thức kinh nghiệm:

$$\sigma_{-1}^u = (0,25 - 0,5)\sigma_b \quad (15-8)$$

15.3.2. Biểu đồ giới hạn mỏi.

Đối với mỗi vật liệu, giới hạn mỏi phụ thuộc vào hệ số bất đối xứng của chu trình ứng suất. Để diễn đạt một cách tổng quát ta phải tìm cách biểu diễn giới hạn mỏi theo r trên một biểu đồ nhất định. Biểu đồ đó được gọi là biểu đồ giới hạn mỏi. Có hai loại biểu đồ: một loại vẽ trên hệ tọa độ $P_{\frac{max}{min}} - P_{tb}$, và biểu đồ vẽ trên tọa độ $P_{bd} - P_{tb}$. Biểu đồ thứ hai này được gọi là biểu đồ Colây, là biểu đồ hay dùng trong chế tạo máy, nên ta sẽ nói kĩ về biểu đồ này.

Dem chia (15-3) cho (15-1), ta có:

$$\frac{P_{bd}}{P_{tb}} = \frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}} = \frac{1-r}{1+r}$$

$$P_{bd} = \frac{1-r}{1+r} P_{tb} = \operatorname{tg}\alpha \cdot P_{tb} \quad (15-8)$$

Với một trị số r nhất định, tương quan giữa P_{bd} và P_{tb} là một đường thẳng qua gốc toạ độ. Nghĩa là, với các chu trình cùng có hệ số bất đối xứng như nhau thì được biểu diễn bằng các điểm trên cùng một đường thẳng, được gọi là các chu trình đồng dạng. Ví dụ, các chu trình mạch động $r=0$, thì $\operatorname{tg}\alpha=1$ được biểu diễn bằng các điểm trên đường phân giác của mặt toạ độ. Rõ ràng trên đường đó, ta sẽ tìm thấy một điểm B biểu diễn cho giới hạn mỗi P_0 (có giá trị P_{bd} và P_{tb} lớn nhất, mà thực tế vật liệu có thể làm việc với một thời gian dài mà không bị phá huỷ. Điểm B là thể hiện giới hạn mỗi của vật liệu với chu trình $r=0$ đó).

Toạ độ điểm B được suy như sau:

$$P_{max}^B = P_{bd}^B + P_{tb}^B \quad (15-9)$$

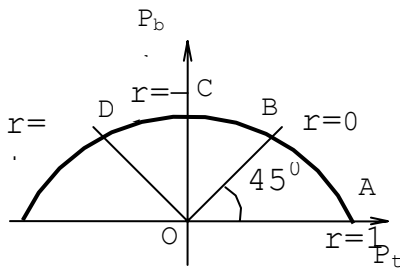
Với các điểm trên đường phân giác, ta có: $P_{bd} = P_{tb}$, vậy khi $P_{max}=P_0$ ta sẽ tìm thấy hoành độ và tung độ của B là $P_0/2$. Chú ý rằng mọi chu trình $r=0$ trong khoảng OB thì vật liệu đảm bảo điều kiện bền mỏi.

Các điểm trên trục tung biểu diễn cho các chu trình đối xứng, vì với các chu trình đó ta có $P_{tb}=0$ và $r=-1$. Vì vậy trên trục tung ta sẽ tìm thấy một điểm giới hạn C. Tung độ của C chính là giới hạn mỗi của chu trình đối xứng $P_{-1}(r=-1)$.

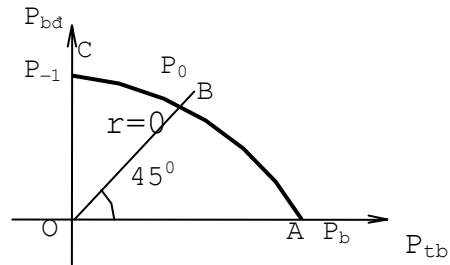
Các điểm trên trục hoành biểu diễn cho các chu trình đối xứng tĩnh vì $r=1$, $P_{bd}=0$. Điểm giới hạn của chu trình này là giới hạn bền của vật liệu. Ta có $\sigma_b=P_{tb}$. Điểm đó được biểu diễn bằng điểm A trên trục hoành.

Tiến hành thí nghiệm với r thay đổi ta sẽ xác định được các điểm giới hạn khác. Nối các điểm đó lại ta được đường cong giới hạn mỗi (hình 15.6). Vì P_{bd} luôn luôn lớn hơn không, nên đường cong của biểu đồ nằm phía trên của trục hoành.

Đối với vật liệu dẻo ta không tìm thấy giới hạn bền khi nén, do đó đối với vật liệu



Hình 15.6: Đường cong giới hạn mỗi



Hình 15.7: Đường cong giới hạn mỗi đối với vật liệu dẻo

dẻo xem giới hạn bền khi nén và kéo bằng nhau, cho nên chỉ cần biểu diễn biểu đồ giới hạn mỗi ở góc phần tư thứ nhất thôi (xem hình 15.7).

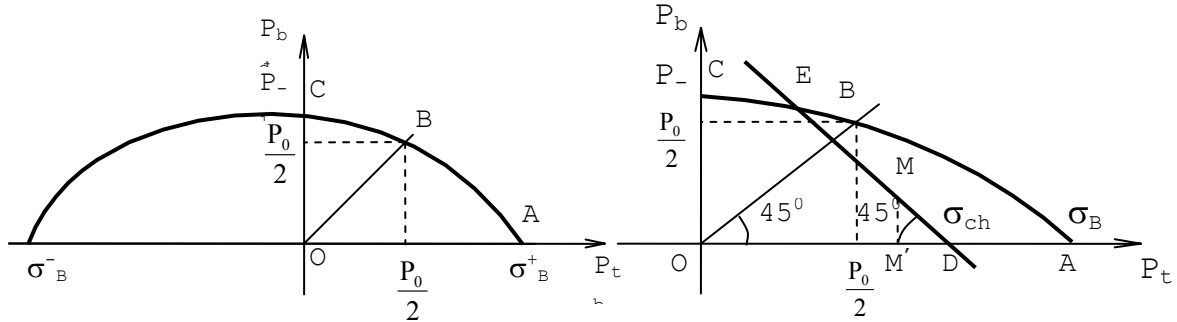
Đối với vật liệu giòn biểu đồ giới hạn mỗi có dạng như trên hình 15.8

Ta nhận thấy phần âm lớn hơn phần dương (Do vật liệu giòn có giới hạn bền khi nén lớn hơn giới hạn bền khi kéo $-\left|\sigma_b^-\right| > \left|\sigma_b^+\right|$), vì vậy khi có chu trình âm ta lấy trị số

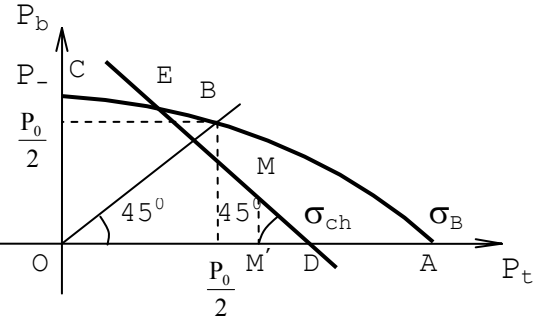
tuyệt đối và tính như một chu trình dương thì hệ số an toàn bao giờ cũng cao hơn. Vì lý do đó, sau đây ta chỉ đề ý đến phần bên phải của biểu đồ giới hạn mỗi.

Đường giới hạn mỗi ABC (hình 15.7) chia góc phần tư thứ nhất của góc tọa độ thành hai miền. Với những chu trình ứng suất được biểu diễn bằng một điểm trong miền OABC là những chu trình an toàn, nghĩa là vật liệu có thể làm việc lâu dài dưới tác dụng của chu trình ứng suất đó. Ngược lại, với những chu trình được biểu diễn bằng một điểm bên ngoài OABC thì vật liệu thế nào cũng bị phá hỏng vì mỗi.

Trước đây trong chương kéo, nén đứng tâm ta đã biết ứng suất lớn nhất P_{max}



Hình 15.8: Đường cong mỗi đối với vật liệu giòn



Hình 15.9: Đồ thị biểu diễn giới hạn chảy

không thể lớn hơn giới hạn chảy P_{ch} , nghĩa là điểm giới hạn đối với các chu trình ứng suất là khi ứng suất cực đại P_{max} đạt đến giới hạn chảy σ_{ch} . Các điểm giới hạn này nằm trên đường thẳng xuất phát từ điểm D có hoành độ là σ_{ch} và tạo với trục hoành một góc nghiêng 45° (xem hình 15.9).

Gọi giao điểm của đường thẳng đó với biểu đồ mỗi là E. Ta dễ dàng chứng minh rằng một chu trình ứng suất được biểu diễn bởi một điểm M nào đó trên ED có trị số ứng suất cực đại P_{max} bằng σ_{ch} .

Thực vậy P_{max} của chu trình ứng suất đó có trị số là:

$$P_{max} = P_{bd} + P_{tb} = \overline{OM'} + \overline{M'M}$$

Nhưng

$$\overline{M'M} = \overline{M'D}$$

Vậy

$$P_{max} = \overline{OM'} + \overline{M'D} = \overline{OD} = \sigma_{ch}$$

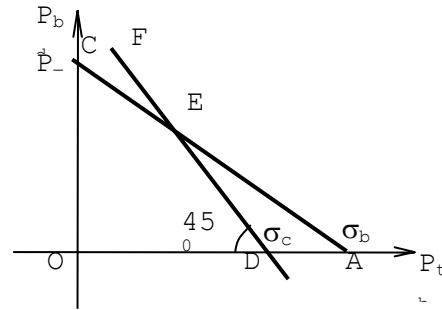
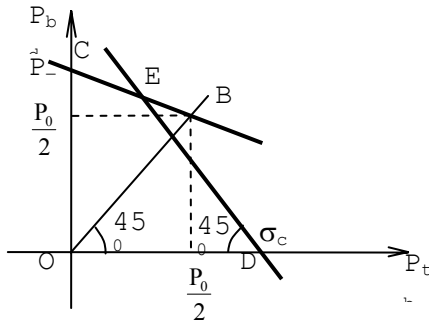
Như vậy, chúng ta chỉ được phép sử dụng các chu trình ứng suất trong miền DEC. Ta nhận thấy miền đó được chia ra hai vùng rõ rệt. Vùng COE và vùng EOD. Những chu trình ứng suất có hệ số bất đối xứng r nằm trong vùng COE, nghĩa là những chu trình được biểu diễn trên những tia trong vùng COE, khi chúng ta tăng trị số P_{max} lên sao cho r không thay đổi thì những chu trình đó bị phá hỏng vì mỗi trước khi P_{max} đạt đến giới hạn chảy. Ngược lại với các chu trình có r nằm trong vùng EOD, trị số P_{max} sẽ đạt đến giới hạn chảy trước khi đạt đến giới hạn mỗi. Nhận xét đó dẫn đến một kết luận khá quan trọng: Như vậy chúng ta chỉ cần tính toán về mỗi khi r nằm trong miền COE. Khi r nằm trong miền EOD thì ta chỉ cần so sánh P_{max} với giới hạn chảy σ_{ch} . Vậy thực tế tính toán chỉ cần đoạn cong CE của biểu đồ giới hạn mỗi. Tuy nhiên, từ biểu đồ Colây như ở hình 15.7, 15.8, 15.9 việc xác định đường CE cũng không đơn giản, cho nên dưới đây chúng ta giới thiệu thêm hai biểu đồ gần đúng nữa mà cách xác định nó dễ dàng hơn.

1. Xerexen đề nghị xây dựng biểu đồ giới hạn mỗi như sau:

- Xác định giới hạn chảy σ_{ch} (ứng với điểm D).
- Xác định giới hạn mỏi với chu trình $r=0$ (ứng với điểm B).
- Xác định giới hạn mỏi với chu trình $r=-1$ (ứng với điểm C).

Từ D ta vẽ đường xiên 45° như đã nói ở trên. Nối C và B, hai đường thẳng này cắt nhau tại E. Ta sẽ có biểu đồ giới hạn mỏi là miền OCED (như trên hình vẽ 15.10). Biểu đồ này được gọi là biểu đồ Xerexen.

2. Để đơn giản hơn nữa Kinaxosvili đề nghị chỉ cần xác định giới hạn bền σ_b



Hình 15.10: Biểu đồ Xerexen

Hình 53.11: Biểu đồ Kinaxosvili

(điểm A), giới hạn chảy σ_{ch} (điểm D) và giới hạn mỏi của chu trình $r=-1$ (điểm C). Từ D ta vẽ đường xiên DF tạo thành một góc 45° so với trục hoành, nối CA, CA cắt DF tại E, ta sẽ được biểu đồ đơn giản hơn được biểu diễn trên hình 15.11.

Khi một chi tiết máy hoặc một bộ phận công trình nào đó phải làm việc ở chế độ ứng suất thay đổi theo thời gian thì độ bền, tuổi thọ của nó kém nhiều so với khi chịu tải trọng tĩnh. Rất nhiều yếu tố ảnh hưởng đến giới hạn mỏi của vật liệu, dưới đây chúng ta sẽ giới thiệu một số yếu tố ảnh hưởng nhiều đến tuổi bền, tuổi thọ của các chi tiết máy hoặc các bộ phận công trình.

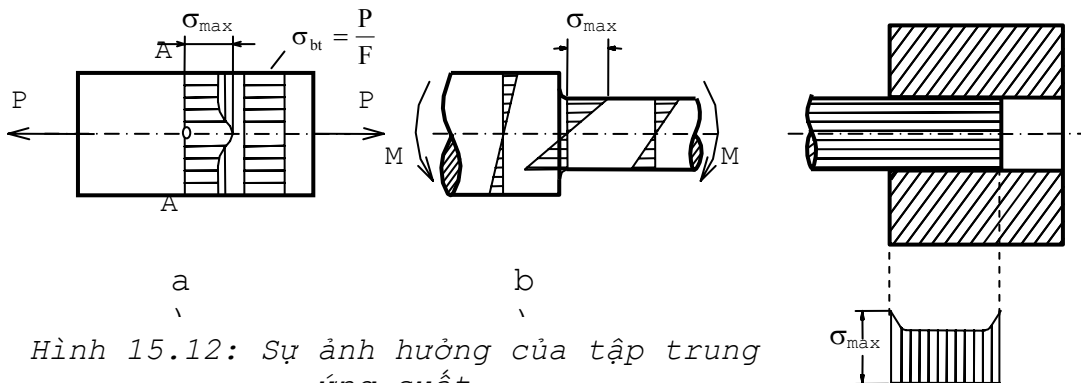
15.4. CÁC YẾU TỐ ẢNH HƯỞNG ĐẾN GIỚI HẠN MỎI

15.4.1. Ảnh hưởng của sự tập trung ứng suất.

Hiện tượng tập trung ứng suất là hiện tượng ở một số vùng nào đó của chi tiết hoặc bộ phận của công trình xuất hiện các ứng suất lớn hơn bình thường. Những vùng đó ảnh hưởng nhiều đến giới hạn mỏi.

Nhiều thí nghiệm và nhiều công trình khoa học đã chứng tỏ rằng ở những nơi có sự thay đổi đột ngột về kích thước và những vùng lắp ghép căng giữa các chi tiết máy thì có hiện tượng tập trung ứng suất.

Ví dụ một tấm chịu kéo có một lỗ nhỏ (hình 15.12a) trên mặt cắt A-A. Trên mặt cắt đó ứng suất phân bố không đều nữa. Trạng thái ứng suất vùng mép lỗ là trạng thái



Hình 15.12: Sự ảnh hưởng của tập trung ứng suất 84

a-Tấm chịu kéo có lỗ nhỏ; b-Trục bậc;
c-Mối ghép căng giữa trục và lỗ

ứng suất phẳng và ứng suất tại mép lỗ có trị số lớn hơn ứng suất trên mặt cắt bình thường khác. Tương tự như vậy trong trường hợp trục bậc chịu uốn (hình 15.12b) hay trục lắp ghép căng với lỗ trên hình 15.12c.

Vùng có ứng suất tập trung là một vùng rất bé trên mặt cắt hoặc trên thanh. Độ lớn của ứng suất tập trung phụ thuộc vào hình dáng kích thước của vùng thay đổi diện tích.

Các trị số của ứng suất tập trung được tính bằng lí thuyết đàn hồi hoặc bằng thực nghiệm quang đàn hồi. Ta gọi hệ số tập trung ứng suất lí thuyết là tỉ số:

$$\alpha = \frac{P_{\max}}{P_{bt}} \quad (15-10)$$

Trong đó: P_{\max} - trị số ứng suất tập trung.

P_{bt} - ứng suất bình thường khi không có yếu tố tập trung ứng suất.

Ví dụ với tâm chịu kéo trên hình 15.12a, σ_{\max} là trị số ứng suất ở mép lỗ, còn σ_{bt} là ứng suất trên mặt cắt không có lỗ.

Hệ số α được cho trong các sổ tay chế tạo máy hay trong các sách lí thuyết đàn hồi tùy theo các loại yếu tố tập trung ứng suất.

Tùy thuộc vào vật liệu và tính chất của tải trọng mà sự tập trung ứng suất có ảnh hưởng ít hay nhiều đến độ bền của vật liệu. Cũng vì vậy trong tính toán, người ta đưa vào một hệ số được gọi là hệ số tập trung ứng suất thực tế k_r :

$$k_r = \frac{P_r}{P_r^*}$$

Trong đó: P_r - là giới hạn mỏi ở chu trình có hệ số bất đối xứng r trên chi tiết không có yếu tố tập trung ứng suất.

P_r^* - là giới hạn mỏi có yếu tố tập trung ứng suất. Ta xét trong hai trường hợp khi $r=1$ và $r=-1$.

a) Khi $r=1$. Chu trình ứng suất là chu trình tĩnh; P_r là giới hạn bền của chi tiết khi không có yếu tố tập trung ứng suất. Trị số của $P_r = \sigma_B$.

P_r^* là giới hạn bền của chi tiết khi có yếu tố tập trung ứng suất.

Đối với vật liệu dẻo thí nghiệm chứng tỏ rằng, yếu tố tập trung ứng suất không ảnh hưởng đến giới hạn bền của vật liệu. Thực vậy ví dụ ở vùng có ứng suất tập trung, khi tăng lực lên, vùng đó tạo thành một vùng biến dạng dẻo nhưng vùng đó vẫn không có vết nứt, tiếp tục tăng lực lên thì vùng dẻo sẽ lan dần cho đến lúc chiếm toàn bộ diện tích mặt cắt ngang (hình dung với tâm chịu kéo ở hình 15.12a).

Điều đó không khác gì với thanh không có yếu tố tập trung ứng suất. Trước khi bị phá hỏng toàn bộ mặt cắt ngang của thanh cũng phải ở trình trạng biến dạng dẻo.

Đối với vật liệu giòn, ví dụ gang chẳng hạn. Trong lòng vật liệu đặc có nhiều yếu tố tập trung ứng suất, do đó thí nghiệm cũng chứng tỏ rằng các yếu tố tập trung ứng suất không ảnh hưởng gì đến giới hạn bền của gang.

Tóm lại đối với tải trọng tĩnh ta luôn luôn có:

$$P_r^* = \sigma_b$$

Vậy: $k_{+1} = 1 \quad (15-11)$

b) Khi $r=-1$. Trong chu trình đối xứng hệ số tập trung ứng suất thực tế là:

$$k_{-1} = \frac{P_{-1}}{P_{-1}^*}$$

Trong đó: P_{-1} là giới hạn mỏi của chu trình ứng suất đối xứng, chi tiết không có yếu tố tập trung ứng suất.

P_{-1}^* là giới hạn mỏi khi có yếu tố tập trung ứng suất. Hai trị số đó có thể xác định bằng thí nghiệm.

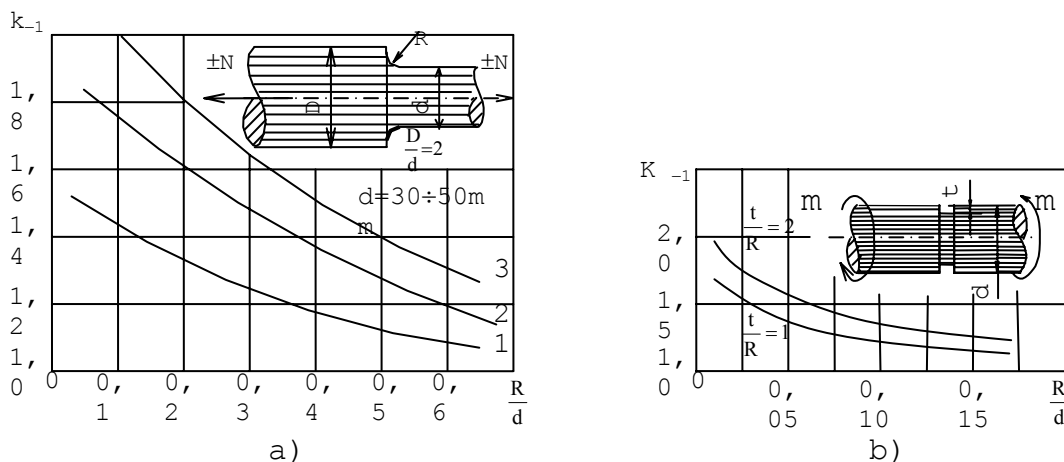
Qua các thí nghiệm, người ta đã thiết lập được biểu thức tương quan giữa k_{-1} và α như sau:

$$k_{-1} = 1 + q(\alpha - 1) \quad (15-12)$$

Trong đó: q được gọi là hệ số nhạy của vật liệu. Hệ số đó chỉ phụ thuộc vào tính chất của vật liệu. Với thép xây dựng hoặc thép thường q biến thiên từ $0,6 \div 0,8$. Đối với gang q gần bằng không, nghĩa là ảnh hưởng của yếu tố tập trung ứng suất đối với gang không đáng kể.

Hệ số nhạy, với một mức độ nhất định, phụ thuộc vào hình dáng của chi tiết được xét và yếu tố tập trung ứng suất.

Công thức (15-12) chỉ sử dụng khi không có kết quả thí nghiệm trực tiếp và có thể tính theo lý thuyết một cách dễ dàng. Thường k_{-1} được cho trực tiếp bằng kết quả của thí nghiệm; ví dụ trên các bảng ở hình 15.13.



Hình 15.13: Bảng tra hệ số tập trung ứng suất thực tế k_{-1}

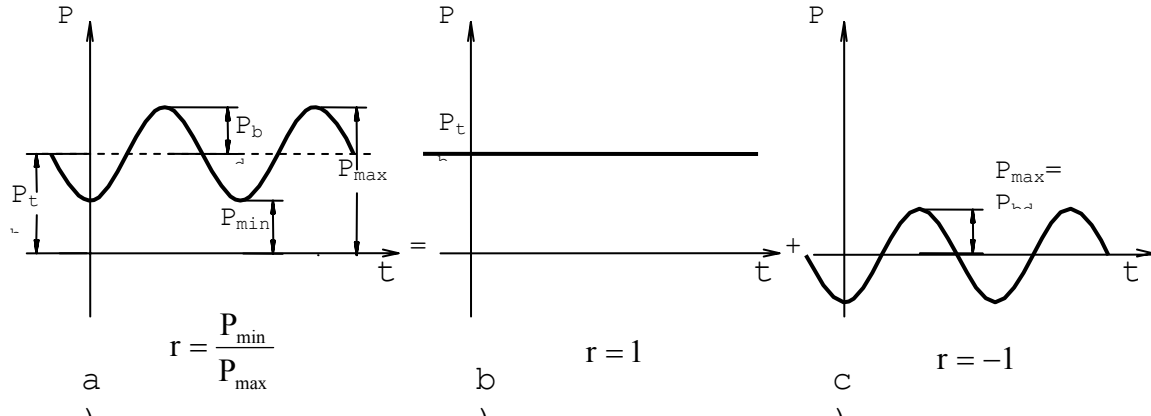
a- Đối với trục bậc; b-Đối với thanh chịu

Trên các bảng của hình 15.13a là trị số k_{-1} của trục bậc khi chịu kéo nén liên tục. Các đường cong 1, 2, 3 là tương ứng với các loại thép có giới hạn bền: $\sigma_b = 40 \text{ kN/cm}^2$, 80 kN/cm^2 và 120 kN/cm^2 .

Trên bảng thứ hai (hình 15.13b) cho k_{-1} của thanh chịu xoắn có rãnh đối với thép thanh có giới hạn bền khi kéo $\sigma_b = 50 \text{ kN/cm}^2$.

Nếu chi tiết làm việc với một chu trình ứng suất bất kì thì luôn có thể xem là sự cộng tác dụng của một chu trình tĩnh với trị số ứng suất là P_{tb} và một chu trình đối xứng với ứng suất cực đại bằng P_{bd} (xem hình 15.14).

Yếu tố tập trung ứng suất không ảnh hưởng gì đến chu trình tĩnh, nghĩa là không ảnh hưởng đến P_{tb} . Yếu tố đó chỉ ảnh hưởng đến chu trình đối xứng, nghĩa là đến P_{bd} . Nhận xét đó rất quan trọng để ta có thể tính toán đến độ bền sau này.



Hình 15.14: Chu trình ứng suất bất kì (a) được xem là sự cộng của chu trình tĩnh (b) với chu trình đối xứng (c)

15.4.2. Ảnh hưởng của độ nhẵn bề mặt và kích thước của chi tiết.

Bề mặt của chi tiết càng nhẵn, thì độ bền mỏi càng lớn, tức là giới hạn mỏi càng cao. Điều đó có thể giải thích là bề mặt càng nhẵn thì càng ít yếu tố gây nên vết nứt vi mô. Như ta đã nói các vết nứt đó chỉ phát sinh và phát triển khi vật liệu chịu tác dụng của ứng suất thay đổi. Nghĩa là với một chu trình tĩnh thì bề mặt nhẵn đều không có ảnh hưởng gì đến độ bền của vật liệu. Ta gọi hệ số bề mặt là tỉ số:

$$\varepsilon_n = \frac{P_{-1\pi}}{P_{-1}} \quad (15-13)$$

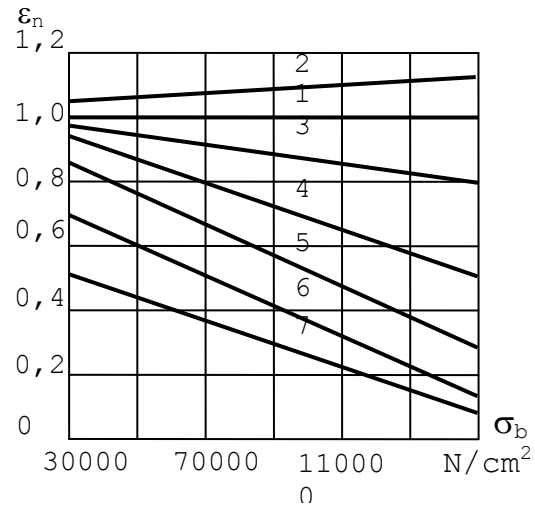
Trong đó: P_{-1} là giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng của mẫu có bề mặt nhẵn theo tiêu chuẩn; $P_{-1\pi}$ là giới hạn mỏi của mẫu có bề mặt tương tự của bề mặt chi tiết máy.

Trên hình 15.15 đưa ra giá trị của hệ số bề mặt đối với các loại thép có giới hạn bền khác nhau:

Hệ số bề mặt của bề mặt tiêu chuẩn xem như bằng đơn vị (đường 1). Đường 2 đối với bề mặt được đánh bóng. Đường 3 đối với các bề mặt được tạo nên bằng phương pháp cắt gọt. Đường 4 với các bề mặt được tạo nên bằng cách dũa tinh. Đường 5 với các bề mặt được tạo bằng phương pháp cán. Các đường 6, 7 là các chi tiết có bề mặt bị ăn mòn trong nước ngọt và nước mặn.

Như vậy là đối với một chu trình bất kì hệ số bề mặt chỉ ảnh hưởng đến P_{bd} , hệ số đó không ảnh hưởng đến P_{tb} như ta lập luận ở trên.

Ta để ý đến một yếu tố khác ảnh hưởng đến giới hạn mỏi, đó là kích thước của chi tiết máy. Chi tiết càng to giới hạn mỏi càng thấp. Cách giải thích của chúng ta cũng tương tự như cách giải thích đối với hệ số bề mặt. Vật càng lớn khuyết tật trong lòng càng nhiều càng dễ gây nên vết nứt vi mô. Rõ ràng các vết nứt đó chỉ có thể phát sinh và phát triển khi vật liệu chịu tác dụng của ứng suất thay đổi. Do đó, một chu trình tĩnh, kích thước không ảnh hưởng gì giới hạn bền của vật liệu. Ảnh hưởng đó chỉ có thể xảy ra với ứng



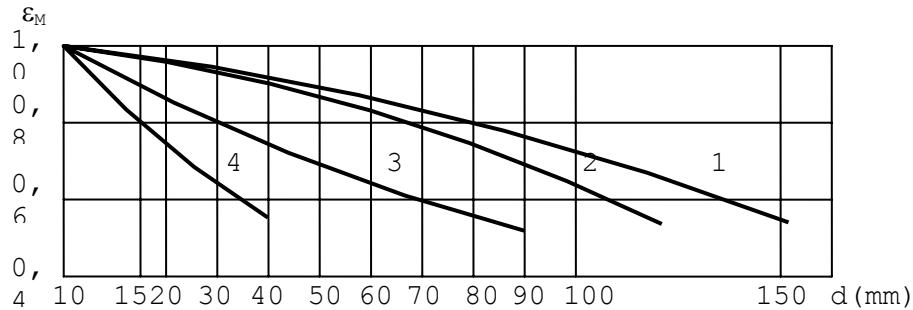
Hình 15.15: Giá trị hệ số bề mặt ε_n đối với các vật liệu thép khác nhau

suất thay đổi, nghĩa là với chu kì đối xứng. Ta có định nghĩa sau đây: Hệ số kích thước là tỉ số:

$$\varepsilon_M = \frac{P_{-ld}}{P_{-l}} \quad (15-14)$$

Trong đó: P_{-ld} là giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng của chi tiết có kích thước thực; P_{-l} là giới hạn mỏi của mẫu có kích thước theo tiêu chuẩn ($d=8 \div 12$ mm).

Ta giả thiết rằng bề mặt của chi tiết và mẫu thí nghiệm là có chất lượng như nhau. Trên hình 15.16 cho giá trị của ε_M đối với các trục chịu uốn và chịu xoắn theo đường kính của chúng.



Hình 15.16: Giá trị ε_M đối với thép các bon không có các yếu tố tập trung ứng suất. Đường 2 cho thép hợp kim có giới hạn bền từ $100\text{kN/cm}^2 \div 120\text{kN/cm}^2$ và không có các yếu tố tập trung ứng suất. Đường 3 dành cho các loại thép có một yếu tố tập trung ứng suất. Đường 4 cho các loại thép có nhiều yếu tố tập trung ứng suất.

Trong bảng 15.1 cho ta một số giới hạn mỏi trong chu trình đối xứng với các mẫu thí nghiệm có đường kính khác nhau.

Bảng 15.1

| d(mm) | Giới hạn mỏi σ_{-1} (N/cm ²) | | | | | | |
|---------------------------------|---|-------|-------|--------------|-------|-------|--------|
| | Thép các bon | | | Thép hợp kim | | | |
| 15 | 25000 | 26500 | 32000 | 38000 | 44000 | 50000 | 60000 |
| 30 | 21000 | 22500 | 27000 | 32000 | 37000 | 42000 | 50000 |
| 60 | 17500 | 19000 | 22500 | 27000 | 31000 | 35000 | 42000 |
| 100 | 16000 | 17000 | 20000 | 24000 | 28000 | 31500 | 38000 |
| σ_B | 45000 | 55000 | 65000 | 80000 | 88000 | 98000 | 120000 |
| N/cm ² | 25000 | 31000 | 36000 | 56000 | 61000 | 75000 | 100000 |
| σ_{ch} N/cm ² | | | | | | | |

Cũng giống như trên, đối với một chu trình bất kì hệ số kích thước chỉ ảnh hưởng trực tiếp đến P_{bd} , hệ số đó không ảnh hưởng đến P_{th} .

15.5. HỆ SỐ AN TOÀN TRONG TRƯỜNG HỢP CHỊU ỨNG SUẤT THAY ĐỔI THEO THỜI GIAN.

Để kiểm tra điều kiện bền của một chu trình ứng suất với hệ số bất đối xứng r thì việc làm bình thường là phải dựa vào biểu đồ giới hạn mỏi để xác định giới hạn mỏi P_r và đem so sánh P_{max} với P_r . Điều kiện bền khi mỏi là:

$$P_{max} \leq P_r \quad (1)$$

Tỷ số $n = \frac{P_r}{P_{max}}$ càng lớn thì càng an toàn, vì vậy tỉ số đó được gọi là hệ số an toàn.

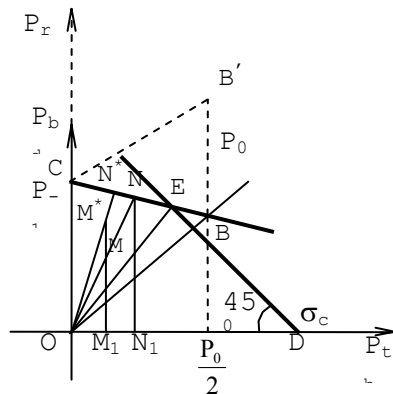
Để thuận tiện hơn, người ta dựa vào biểu đồ giới hạn mỗi để thiết lập một cách tổng quát công thức của hệ số an toàn n và so sánh hệ số an toàn đó với một hệ số an toàn định trước $[n]$ được gọi là hệ số an toàn cho phép. Nếu như $n > [n]$ thì vật liệu an toàn vì mỗi.

Cách thiết lập công thức của hệ số an toàn như sau:

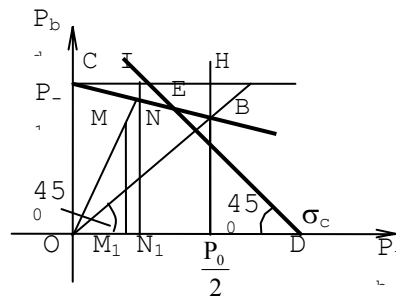
Tính đến các yếu tố ảnh hưởng đến giới hạn mỗi, theo đề nghị của Xêrêxen và Kínaxôvili ta tăng biên độ của chu trình ứng suất thực lên một lượng là $\frac{k_{-1}}{\epsilon_n \epsilon_M}$. Sở dĩ như vậy vì các yếu tố đó chỉ ảnh hưởng đến P_{bd} . Cách làm đó dẫn tới việc tăng cao hệ số an toàn thực tế lên so với hệ số tính toán, nên ta có thể chấp nhận được.

Thực vậy gọi M là điểm cho chu trình ứng suất tác dụng lên chi tiết máy. M nằm trong miền OCE (hình 15.17). Giới hạn của M là điểm N , giao điểm của tia OM và đường BC . Nếu bây giờ ta tăng biên độ của M lên một lượng là $\frac{k_{-1}}{\epsilon_n \epsilon_M}$, giá trị này > 1 , nghĩa là ta

biểu diễn chu trình ứng suất đó tại M^* . Giới hạn mỗi tương ứng với M^* là N^* , một điểm gần với giới hạn mỗi trong chu trình đối xứng mà ta biết rằng giới hạn mỗi của chu trình đối xứng là bé nhất (quan sát biểu đồ), tại B ta lấy tung độ gấp đôi để có điểm biểu diễn cho P_0 là B' . Vậy giới hạn mỗi tương ứng với N^* là bé hơn đối với N . Do đó hệ số an toàn trong thực tế sẽ lớn hơn hệ số an toàn tính toán.



Hình 15.17: Phương pháp 1 xác định hệ số an toàn



Hình 15.18: Phương pháp 2 xác định hệ số an toàn

Gọi điểm chiếu M và N lên trục hoành là M_1, N_1 (hình 15.18). Xét hai tam giác đồng dạng OMM_1 và ONN_1 , ta có:

$$\frac{NN_1}{MM_1} = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{ON_1 + N_1N}{OM_1 + M_1M} = \frac{P_r}{P_{max}} = n_p \quad (2)$$

Ta tìm cách tính ON_1 .

Từ C vẽ đường ngang song song với trục hoành. Giao tuyến của đường đó với các đường song song với trục tung qua N và B là I và H . Sử dụng hai tam giác đồng dạng

CNI và CBH , ta có:

$$\frac{CI}{CH} = \frac{IN}{HB}$$

hay :

$$\frac{ON_1}{\frac{P_0}{2}} = \frac{P_{-1} - NN_1}{P_{-1} - \frac{P_0}{2}} \quad (3)$$

Do đó ta có:

$$ON_1 = \frac{P_{-1} - NN_{-1}}{\psi} \quad (4)$$

Trong đó:

$$\psi = \frac{2P_{-1} - P_0}{P_0} \quad (15-15)$$

Đem thay (4) vào (2), ta có:

$$\frac{NN_1}{MM_1} = \frac{P_{-1} - NN_1}{\psi OM_1} = n_p \quad (5)$$

Từ đó ta có :

$$n_p = \frac{P_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} P_{bd} + \psi P_{tb}} \quad (15-16)$$

Nếu sử dụng biểu đồ mỗi thứ hai (hình 15.19) ta sẽ tính hệ số an toàn như sau: Tương tự như trên ta sẽ sử dụng bốn tam giác OM_1M đồng dạng với ON_1N ; CNI đồng dạng với CBH . Từ đó ta có:

$$\frac{ON_1}{\sigma_B} = \frac{P_{-1} - NN_1}{P_{-1}}$$

hay $ON_1 = \frac{P_{-1} - NN_1}{\frac{P_{-1}}{\sigma_B}}$

Từ đó ta lại có:

$$\frac{NN_1}{MM_1} = \frac{ON_1}{OM_1} = \frac{P_{-1} - NN_1}{\psi' OM_1} = n_p$$

Và cuối cùng:

$$n_p = \frac{P_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} P_{bd} + \psi' P_{tb}} \quad (15-17)$$

Trong đó:

$$\psi' = \frac{P_{-1}}{P_b} \quad (15-18)$$

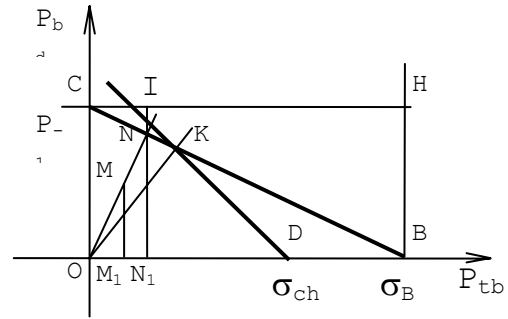
Trong các công thức (15-16), (15-17), (15-18) ta đã dùng chữ P để chỉ chung cho ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Khi trạng thái ứng suất là ứng suất đơn, ta có:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} \sigma_{bd} + \psi \sigma_{tb}}$$

Trong đó:

$$\psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}$$

Với biểu đồ mỗi thứ hai, vị trí của ψ thay bằng ψ' :



Hình 15.19: Đồ thị tính hệ số an toàn khi M nằm trong ODC

$$\psi' = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_B}$$

Khi trạng thái ứng suất là trạng thái trượt thuần túy, ta có:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_n \varepsilon_M} \tau_{bd} + \psi \tau_{tb}}$$

Trong đó:
$$\psi = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}$$

Với biểu đồ mỗi thứ hai, vị trí của ψ thay bằng ψ' với:

$$\psi' = \frac{\tau_{-1}}{\tau_B}$$

Trường hợp uốn và xoắn đồng thời, ta có thể áp dụng công thức kinh nghiệm sau đây để tính hệ số an toàn:

$$\frac{1}{n_r^2} = \frac{1}{\sigma_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}$$

hay
$$n_r = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (15-19)$$

Việc tính toán vừa rồi chỉ cần thiết khi vật liệu làm việc ứng với điểm M nằm trong vùng OCE. Nếu M nằm ở vùng ODE thì ta chỉ cần so sánh ứng suất lớn nhất ($P_{bd}+P_{tb}$) với giới hạn chảy σ_{ch} :

$$P_{max} \leq P_{ch}$$

Ta thử xét một chu trình ứng suất ứng với điểm M nằm ở vùng ODE (hình 15.20). Lúc này hệ số an toàn được tính

nghư sau:
$$n_T = \frac{\sigma_{ch}}{P_{max}} \quad (15-20)$$

Ta gọi n_T là hệ số an toàn về chảy. Tỷ số đó là tỷ số giữa các đoạn ON và OM (N là giao điểm của OM với đường thẳng KD). Gọi N' là giao điểm của OM với biểu đồ mỏi, ta thấy ON' lớn hơn ON, do đó nếu tính n_p thì trị số của n_p sẽ lớn hơn n_T .

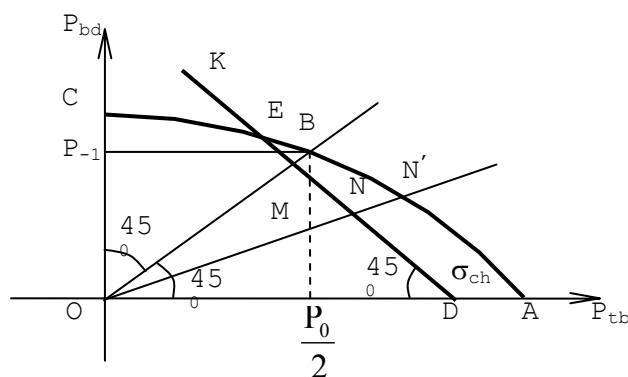
Ngược lại, khi M thuộc vùng COE, ta nhận thấy ON' nhỏ hơn ON, nghĩa là n_p nhỏ hơn n_T .

Từ đó ta đề ra cách tính như sau: Ta không biết M thuộc vùng nào, ta phải tính hai hệ số n_p và n_T luôn luôn lấy trị số nhỏ hơn để so sánh với hệ số an toàn cho phép [n].

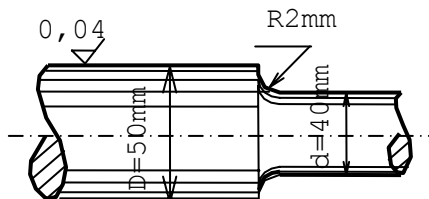
Ví dụ 1: Một trục bậc hình 15.21, được chế tạo từ thép các bon với 0,6% các bon chịu uốn. Các đặc trưng cơ học của vật liệu là:

$$\sigma_b = 75 \text{ kN/cm}^2, \sigma_{ch} = 42 \text{ kN/cm}^2 \text{ và } \sigma_{-1} = 32,5 \text{ kN/cm}^2.$$

Bề mặt của trục được mài nhẵn. Mô men uốn có trị số không đổi suốt thời gian trục quay là $M = 64$



Hình 15.20: Đồ thị tính hệ số an toàn khi M nằm ở vùng ODE



Hình 15.21: Kết cấu trục bậc

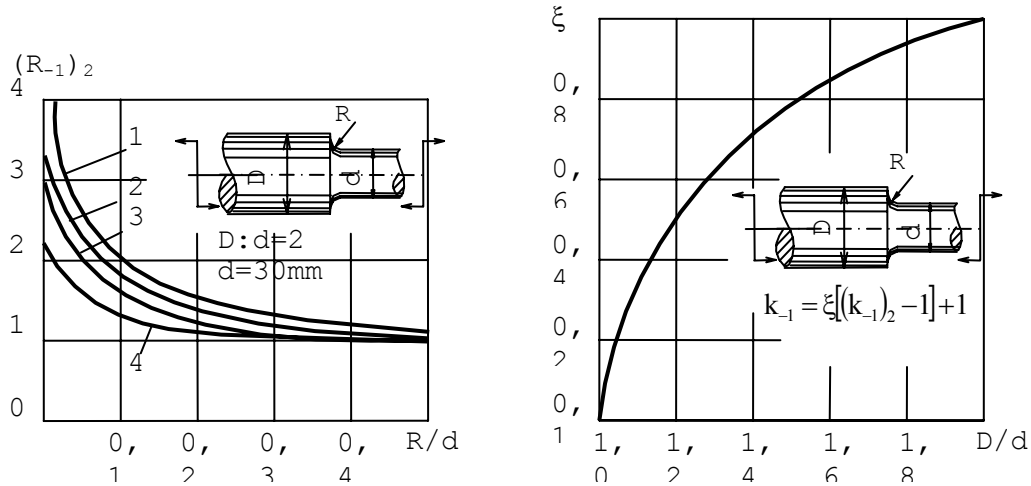
kNcm. Kiểm tra điều kiện bền của trục, cho biết hệ số an toàn cho phép $[n]=1,5$.

Bài giải: Trục chịu uốn quay đều và mô men uốn không đổi nên chu trình ứng suất ở đây là chu trình đối xứng:

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{M_x}{W_x} = \frac{64}{0,14^3} = 10 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Hệ số an toàn chảy sẽ là: } n_T = \frac{42}{10} = 4,2$$

Hệ số an toàn về mỏi được tính với công thức (15-17). Hệ số ứng suất tập trung thực tế được tính theo các bảng như trên hình 15.22.



Hình 15.22a cho tỷ số $(k_{-1})_2$ của trục bậc khi bị uốn với tỷ số $D/d = 2$. Đường 1 cho thép với $\sigma_B = 120 \text{ kN/cm}^2$; đường 2 cho thép $\sigma_b = 100 \text{ kN/cm}^2$; đường 3 cho thép $\sigma_b = 80 \text{ kN/cm}^2$ và đường 4 cho các loại thép $\sigma_b = 60 \div 40 \text{ kN/cm}^2$.

Hình 15.22b cho hệ số điều chỉnh khi D/d không phải là 2.

Trong ví dụ ta đang xét, vì $\sigma_b = 75 \text{ kN/cm}^2$ nên ta sử dụng đường 3 để xác định $(k_{-1})_2$. Với tỷ số $\frac{R}{d} = \frac{2}{40}$, ta tìm thấy $(k_{-1})_2 = 2,2$. Với tỷ số $\frac{R}{d} = \frac{5}{40} = 1,25$, ta tìm thấy trị số hệ số hiệu chỉnh $\xi = 0,52$. Từ đó ta có:

$$k_{-2} = 1 + \xi[(k_{-1})_2 - 1] = 1 + 0,52(2,2 - 1) = 1,63$$

Hệ số kích thước ε_n được xác định theo đường 2 của bảng 1 với $d = 40 \text{ mm}$, $\varepsilon_M = 0,78$. Bề mặt của trục được mài nhẵn, vậy $\varepsilon_M = 1$.

Từ đó ta có:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_M \varepsilon_n} \sigma_{bd} + \psi' \sigma_{tb}} = \frac{0,78 \cdot 32,50}{1,63 \cdot 10,00} = 1,6$$

Vì n_σ nhỏ hơn n_T , nên ta phải lấy n_σ so sánh với $[n]$, ta có: $n_\sigma > [n]$

Vậy trục đạt được điều kiện an toàn.

Ví dụ 2: Trục bậc trên đây dưới tác dụng của mô men xoắn theo chu trình bất đối xứng. Trị số mô men xoắn lớn nhất là $m = 20 \text{ kNcm}$; mô men xoắn cực tiểu là $m = -20 \text{ kN}$

cm. Cơ tính của vật liệu như sau: $\tau_B=40\text{kN/cm}^2$; $\tau_{-1}=19\text{kN/cm}^2$; $\sigma_b=60\text{kN/cm}^2$. Xác định hệ số an toàn mới của chi tiết.

Bài giải: Trị số các ứng suất cực đại và cực tiểu là:

$$\tau_{\max} = \frac{80}{0,2 \cdot 4^3} = 6,25 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{\min} = -\frac{20}{0,2 \cdot 4^3} = -1,56 \text{ kN/cm}^2$$

Từ đó ta có trị số ứng suất biên độ và ứng suất trung bình là:

$$\tau_{bd} = 3,9 \text{ kN/cm}^2 ; \tau_{tb} = 2,35 \text{ kN/cm}^2$$

Hệ số ứng suất tập trung thực tế được tra ở hình 15.23. Bảng trên hình 15.23a là hệ số tập trung ứng suất thực tế đối với các mẫu thí nghiệm có $d=12,5$ và tỉ số $D/d=1,4$ khi xoắn. Đường 1 cho thép có giới hạn bền $\sigma_B=120\text{kN/cm}^2$; đường 2 cho các loại thép có $\sigma_B=60\text{kN/cm}^2$ và đường 3 cho các loại thép có $\sigma_B=40\text{kN/cm}^2$. Đối với trục có tỷ lệ D/d khác 1,4 thì ta dùng hệ số hiệu chỉnh ξ cho trên hình (15.23b), k_{-1} được tính với công thức:

$$k_{-1} = \xi[(k_{-1})_{1,4} - 1] + 1$$

Trong ví dụ đang xét, ta sẽ dùng đường cong 2.

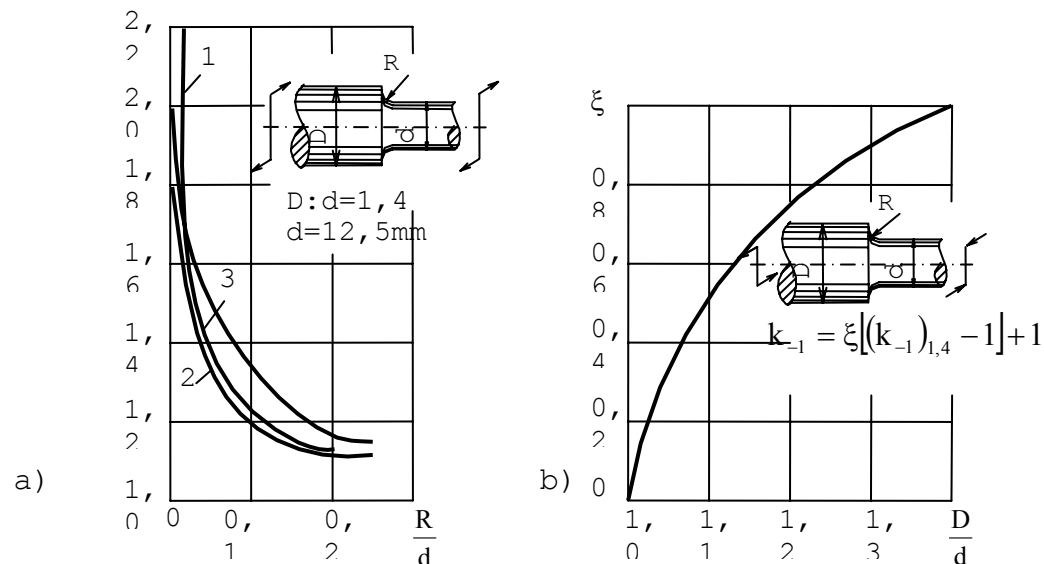
Với tỷ số $D/d = 0,05$ ta có $(k_{-1})_{1,4}=1,36$

Với tỷ số $D/d = 1,25$ ta có hệ số hiệu chỉnh $\xi=0,76$.

Hệ số kích thước cũng tra bảng như ví dụ uốn trên đây $\varepsilon_n=0,78$. Từ đó ta có:

$$k_{-1} = 0,76[1,36 - 1] + 1 = 1,27$$

Vì trục mài nhẵn nên $\varepsilon_n=1$. Hệ số kích thước cũng tra bảng như ví dụ uốn trên đây $\varepsilon_n=0,78$



Hình 15.23: Tra hệ số tập trung ứng suất. a-Bảng tra đối với mẫu có $d=12,5$ và tỉ số $D/d=1,4$ khi xoắn. b-Với $D/d \neq 1,4$

Từ đó ta có :
$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_{-1}}{\varepsilon_M \varepsilon_n} \tau_{bd} + \psi' \tau_{tb}} = \frac{19}{\frac{1,27}{0,78} \cdot 3,9 + \frac{19}{40} \cdot 2,35} = 2,5$$

Ví dụ 3. Xác định hệ số an toàn của trục I (hình 15.24). Mô men xoắn $M = 100$ kNcm. Đường kính trục là 50mm, kích thước đến các ổ trượt là $a=20$ cm, $b=8$ cm. Bán kính của bánh xe là $R=8$ cm. Vật liệu của trục là thép các bon với $\tau_{ch}=25$ kN/cm², $\sigma_{-1}=30$ kN/cm². Hệ số ứng suất tập trung thực tế do lắp căng là $k_{-1}=1,4$. Trục được mài nhẵn.

Bài giải: Dưới tác dụng của mô men xoắn không đổi trên mặt cắt ngang của trục luôn có một hệ ứng suất tiếp không đổi theo thời gian:

$$\tau_{tb} = \frac{m}{0,2d^3} = 4,00 \text{ kN/cm}^2$$

Hệ số an toàn chảy của vật liệu:

$$n_T = \frac{\tau_{ch}}{\tau_{tb}} = \frac{25}{4} = 6,2$$

Ngoài mô men xoắn đó, trục sẽ bị uốn bởi lực P là lực tương tác giữa hai bánh xe (xem hình 15.24b).

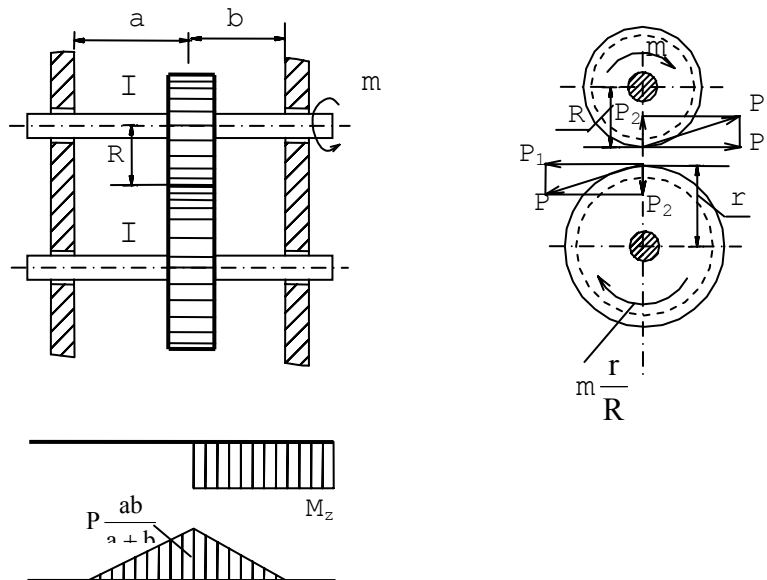
Theo lí thuyết sự ăn khớp của các bánh răng, ta có: $P_2 \approx 0,4P_1$

Do đó:

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = 1,08P_1$$

Từ điều kiện cân bằng của trục I, ta có:

$$P_1 = \frac{m}{R} ; P = 1,03 \frac{m}{R}$$



Lực đó sẽ gây nên ứng suất thay đổi trên trục. Chu trình đó là chu trình đối xứng:

Hình 15.24: Sơ đồ xác định hệ số an toàn của một trục bánh răng.
$$\sigma_{\max} = \frac{M}{0,1d^3} + \frac{P \cdot ab}{R(a+b) \cdot 0,1d^3}$$

$$\sigma_{\max} = 6,16 \text{ kN/cm}^2 ; \sigma_{\min} = 0$$

Theo bảng 1, ta tìm thấy $\varepsilon_M=0,75$. Từ đó ta có hệ số an toàn vì mỏi là:

$$n_\sigma = \frac{\varepsilon_n \varepsilon_M}{k_{-1} \sigma_{bd}} \cdot \sigma_{-1} = 2,6$$

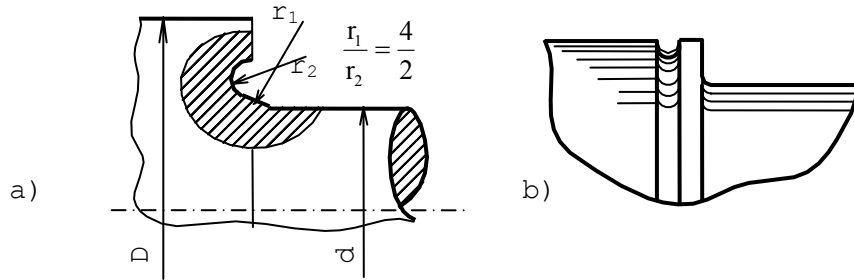
Trạng thái ứng suất ở đây là trạng thái ứng suất phẳng vì cùng có τ và σ tác dụng đồng thời, vì vậy hệ số an toàn của trục I sẽ là:

$$n_r = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = 2,4$$

15.6. NHỮNG BIỆN PHÁP NÂNG CAO GIỚI HẠN MỎI.

Đối với những chi tiết, bộ phận công trình chịu tác động bởi ứng suất thay đổi theo thời gian, thì các biện pháp nâng cao giới hạn mỏi tức là tránh để phát sinh ra các vết nứt vi mô, những nơi có ứng suất tập trung thường là những chỗ dễ tạo nên các vết nứt vi mô, do đó phải tránh hết sức các nhân tố tạo nên ứng suất tập trung, ví dụ:

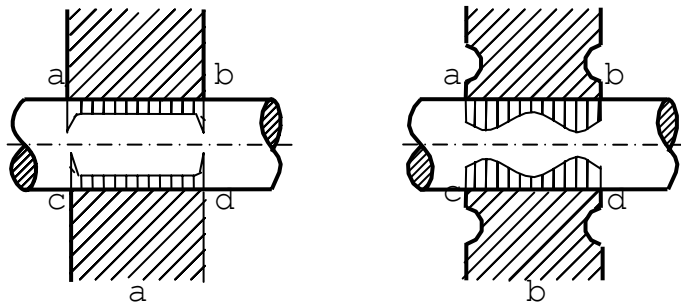
a) Tăng bán kính chỗ lượn. Để đảm bảo cho bán kính chỗ lượn đủ lớn ta có thể làm chỗ lượn ăn vào bên trong của chi tiết như hình 15.25a.



Hình 15.25: Biện pháp nâng cao giới hạn mỏi

b) Làm các rãnh để điều hòa ứng suất (hình 15.25b). Rãnh tiện ở đầu búa tán định nhằm giảm bớt chênh lệch độ cứng giữa hai phần có độ cứng khác nhau, từ đó hạ thấp ứng suất tập trung giữa hai phần

c) Giảm bớt ứng suất tập trung khi lắp ghép căng bánh răng bằng cách khoét rãnh trên bánh răng (hình 15.26).



Hình 15.26: Biện pháp nâng cao giới hạn mỏi

a-Ứng suất khi lắp có độ dôi; b-Ứng suất khi bánh răng được khoét rãnh

d) Mài nhẵn, đánh bóng hoặc mạ bề mặt chi tiết để trừ bỏ các vết nứt phát sinh trong quá trình gia công.

e) Làm cứng mặt ngoài bằng cách cán lăn hoặc phun hạt gang lên bề mặt, bằng phương pháp hoá nhiệt như thấm cacbon, nitơ hoặc bằng phương pháp tôi cao tần...

CÂU HỎI ÔN TẬP

- 15.1. Hiện tượng môi xuất hiện khi nào ? Những đặc trưng của các chu trình ứng suất.
- 15.2. Trình bày cách xác định giới hạn môi của chu trình đối xứng.
- 15.3. Những nhân tố nào ảnh hưởng đến giới hạn môi ?
- 15.4. Trình bày các biểu đồ giới hạn môi của vật liệu. Ý nghĩa của hai chu trình đồng dạng ?
- 15.5. Các biện pháp để nâng cao giới hạn môi ?
- 15.6. Hệ số an toàn khi môi. Cách tính độ bền môi ?



ỐNG DÀY

Ống hình trụ cũng thường được sử dụng rộng rãi trong các ngành công nghiệp và xây dựng. Ví dụ: như nòng súng, ống dẫn khí, ống dẫn dầu....

Do điều kiện chịu áp suất khác nhau, điều kiện làm việc khác nhau mà ống có bề dày khác nhau. Nếu một ống có tỷ số giữa bề dày δ và bán kính trung bình R của nó $\frac{\delta}{R} > \frac{1}{10}$ gọi là ống dày. Trong chương này chủ yếu ta nghiên cứu tính toán cho ống dày.

Sự phân bố ứng suất ở thành ống dày khác nhau, độ bền của mỗi điểm trong ống dày cũng khác nhau. Dưới đây chúng ta trình bày bài giải của nhà bác học Lamer (người Pháp) đối với loại ống dày chịu áp suất bên trong và bên ngoài, với điều kiện vật liệu làm việc trong miền đàn hồi.

Để đơn giản bài toán chúng ta giới hạn nghiên cứu của chúng ta là:

- Ống trụ tròn có bề dày không đổi.
- Ống chịu áp suất bên trong và bên ngoài phân bố đều dọc theo trục ống.
- Xem ứng suất pháp dọc trục là không đổi theo suốt chiều dài ống.

17.1. ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

Chúng ta xét một ống dày hình trụ tròn có bán kính trong là a , bán kính ngoài là b . Ống dày chịu áp suất bên trong là P_a và áp suất bên ngoài là P_b (hình 17.1).

Chúng ta tưởng tượng tách từ ống dày ra một phần tử ABCDEFGH (hình 17.2a) giới hạn bởi các mặt sau đây:

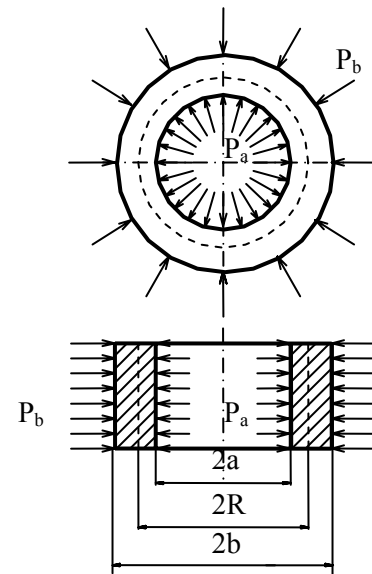
- Hai mặt cắt ngang (ABFE) và (DCGH) vuông góc với trục thanh và cách nhau một đoạn là dz rất nhỏ.
- Hai mặt phẳng xuyên tâm (ABCD) và (EFGH) chứa trục ống và hợp với nhau một góc vô cùng nhỏ $d\theta$.
- Hai mặt trụ đồng tâm (ADHE) và (BCGF) có bán kính là r và $r + dr$.

Vì tải trọng và hình dáng của ống đối xứng nên ứng suất và biến dạng cũng đối xứng qua trục ống và không đổi theo dọc trục. Do tính chất đó cho nên khi ống bị biến dạng các góc vuông của các mặt ABCD và EFGH là không đổi, vì thế trên các mặt này không có ứng suất tiếp mà chỉ có ứng suất pháp theo phương tiếp tuyến.

Như vậy các mặt ABCD và EFGH là các mặt chính. Theo định luật đối ứng trên các mặt ADHE và BCGF cũng không có ứng suất tiếp và do đó các mặt này cũng là các mặt chính. Ứng suất pháp trên mặt trụ ADHE là ứng suất pháp hướng tâm và ký hiệu là σ_r . Cũng vì tính chất đối xứng nói trên nên ứng suất pháp σ_r và σ_t chỉ phụ thuộc vào bán kính r từ trục ống đến điểm xét ứng suất.

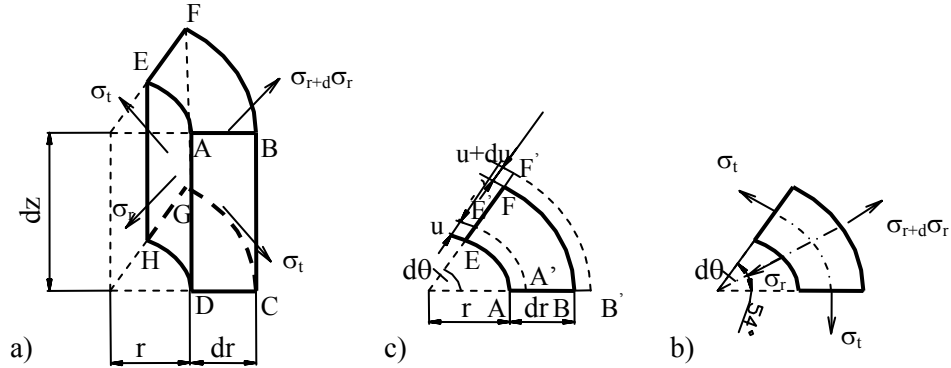
Như vậy ứng suất pháp hướng tâm trên mặt trụ BCGF ở bán kính $r + dr$ sẽ là $\sigma_r + d\sigma_r$.

Ở các mặt ABFE và CDHG cũng là mặt chính. Và tạm thời xem các ứng suất dọc trục này bằng 0 ($\sigma_z = 0$).



Hình 17.1: Ống dày chịu áp suất bên trong và bên ngoài

Để thiết lập công thức tính σ_r , σ_t ta hãy xét sự cân bằng của phân tố (hình 17.2a), muốn vậy chúng ta xem những lực nào tác dụng lên phân tố đó.



Hình 17.2: a- Một phân tố được tách ra từ ống dày

- Trên mặt ADHE chịu tác dụng của lực: $\sigma_r \cdot rd\theta \cdot dz$

- Trên mặt BCGF chịu tác dụng của lực:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\theta \cdot dz$$

- Trên các mặt ABCD và EFGH chịu tác dụng $\sigma_t \cdot dr \cdot dz$.

Dưới tác dụng các lực ấy phân tố phải cân bằng. Ta viết phương trình chiếu các lực lên phương hướng kính phân giác của góc $d\theta$:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\theta \cdot dz - \sigma_r \cdot r \cdot d\theta \cdot dz - 2\sigma_t dr dz \sin \frac{d\theta}{2} = 0$$

Các phương trình cân bằng tĩnh học khác tự cân bằng.

Ta xem $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$ (vì $d\theta$ rất nhỏ) và bỏ qua vô cùng bé bậc 3 so với vô

cùng bé bậc 2, ta được: $r d\sigma_r + \sigma_r dr - \sigma_t dr = 0$

$$\text{Hay} \quad \frac{r d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0 \quad (a)$$

Vì phương trình (a) chứa hai ẩn σ_r và σ_t chưa thể có lời giải. Vì vậy ta phải xét sự biến dạng của phân tố.

Do tính chất đối xứng nên một điểm bất kỳ trong thành ống chỉ có thể di chuyển theo hướng kính (mặt cắt ngang của ống sau biến dạng co vào hoặc giãn ra nhưng vẫn là mặt tròn). Cho nên chỉ cần xét biến dạng của mặt ABEF. Sau biến dạng các điểm của A, B, E, F sẽ di chuyển đến các điểm A', B', E' và F' (hình 17.2b). Nếu ta gọi u là chuyển vị các điểm trên cung AE thì các điểm trên cung BF sẽ chuyển vị một đoạn u + du.

Vậy biến dạng tỷ đối ε_r theo phương hướng kính của đoạn dr sẽ là:

$$\varepsilon_r = \frac{\widehat{A'B'} - \widehat{AB}}{AB} = \frac{[(dr + u + du) - u] - dr}{dr} = \frac{du}{dr} \quad (b)$$

Biến dạng tỷ đối theo phương tiếp tuyến là ε_t của cung AE là:

$$\varepsilon_t = \frac{A'E' - AE}{AE} = \frac{(r + u)du - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r} \quad (c)$$

Theo định luật Hooke áp dụng cho trạng thái ứng suất phẳng sẽ là:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu \sigma_t]; \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu \sigma_r]$$

Hay
$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu \varepsilon_t); \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_t + \mu \varepsilon_r)$$

Nếu kể đến (b) và (c):

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right); \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{u}{r} + \mu \frac{du}{dr} \right) \quad (d)$$

Mang (d) vào (a), ta được phương trình vi phân để xác định chuyển vị u:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

Hay
$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(ur)}{dr} \right) = 0 \quad (e)$$

Lấy tích phân phương trình (e) liên tiếp hai lần, ta có:
$$u = Ar + \frac{B}{r} \quad (g)$$

Mang (g) vào (d), ta được:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)A - \frac{1-\mu}{r^2} B \right] \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[(1+\mu)A + \frac{1-\mu}{r^2} B \right] \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Các hằng số tích phân A, B được xác định nhờ các điều kiện ở mặt trong và mặt ngoài của ống:

Ở mặt trong $r = a$, $\sigma_{r(r=a)} = -p_a$

Ở mặt ngoài $r = b$, $\sigma_{r(r=b)} = -p_b$

Theo các điều kiện biên này ta tìm được:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{P_a a^2 - P_b b^2}{b^2 - a^2} \\ B &= \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{a^2 b^2 (P_a - P_b)}{b^2 - a^2} \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

Thay giá trị A và B vừa tính được vào (h), ta được công thức tính các ứng suất pháp:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P_a \cdot a^2 \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - P_b b^2 \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)}{b^2 - a^2} \\ \sigma_t &= \frac{P_a \cdot a^2 \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) - P_b b^2 \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)}{b^2 - a^2} \end{aligned} \right\} \quad (17-1)$$

Công thức này do Lamer tìm ra nên được mang tên của ông. Nhìn vào công thức dễ dàng thấy σ_r luôn luôn âm, còn σ_t dương hoặc âm còn tùy thuộc vào p_a và p_b .

Thay giá trị A và B vào (g) ta cũng tìm được công thức tính chuyển vị u:

$$u = Ar + \frac{B}{r} = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{P_a a^2 - P_b b^2}{b^2 - a^2} \times r + \frac{1+\mu}{E} \frac{a^2 b^2 (P_a + P_b)}{b^2 - a^2} \times \frac{1}{r} \quad (17-2)$$

Chuyển vị hướng tâm u này chính là biến dạng tuyệt đối của bán kính.

Chú thích: Nếu kể đến thành phần ứng suất dọc ống σ_z thì biến dạng tuyệt đối u được cộng theo một lượng do σ_z sinh ra (theo định luật Hooke) là: $-\frac{\mu}{E} \sigma_z$

Dưới đây chúng ta xét hai trường hợp riêng khi chỉ có áp suất bên trong và khi chỉ có áp suất bên ngoài.

17.2. ỐNG DÂY CHỊU ÁP SUẤT BÊN TRONG ($p_b = 0$; $p_a = p$).

1) Về giá trị ứng suất .

Từ (17-1) , ta có công thức tính σ_r, σ_t :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P \cdot a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_t &= \frac{P \cdot a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17-3)$$

Từ công thức (17-2) , ta có:

$$u = \frac{P \cdot a^2 r}{E(b^2 - a^2)} \left[1 + \frac{b^2}{r^2} - \mu \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \right] \quad (17-4)$$

Dựa vào (17-3) ta thấy $\sigma_t > 0$ và $\sigma_r < 0$. Biểu đồ ứng suất theo bán kính được biểu diễn trên hình 17.3a.

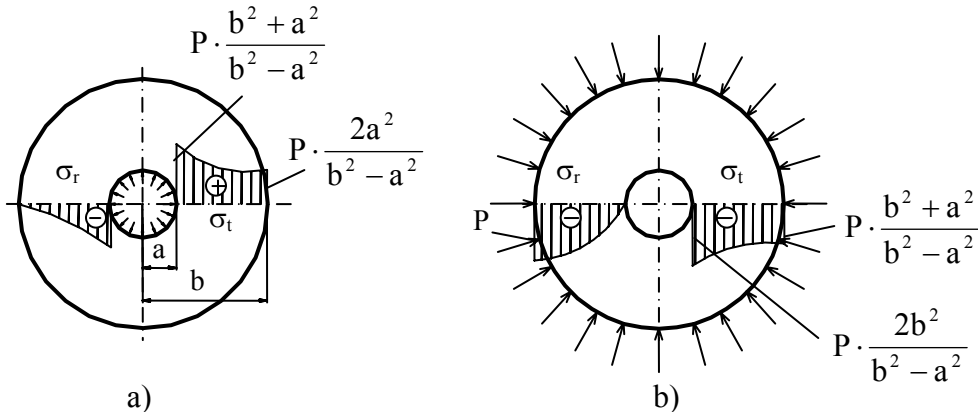
Dựa vào (17-3) dễ dàng thấy rằng σ_r, σ_t đều có giá trị tuyệt đối lớn nhất tại $r = a$:

$$\min \sigma_r (r=a) = -P = \sigma_3$$

$$\max \sigma_t (r = a) = P \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} = \sigma_1$$

- Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất, thì ứng suất tương đương sẽ là :

$$\sigma_{td(r=a)} = \sigma_1 - \sigma_3 = P \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - (-P) = P \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \leq [\sigma] \quad (17-5)$$



Hình 17.3: Biểu đồ ứng suất

Tại mép trong có giá trị ứng suất lớn nhất và theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta tính được giá trị ứng suất tương đương tại đó (dĩ nhiên cũng lớn nhất và các điểm ở mép trong là nguy hiểm nhất).

2/Về độ dày của ống (kí hiệu là δ). Ta có một số nhận xét:

- Ở mép ngoài, tức là $r = b$ thì:

$$\sigma_t = P \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \quad (17-6)$$

a/ Khi mà bề dày δ của thành ống rất nhỏ thì có thể lấy gần đúng: $b^2 + a^2 \approx 2a^2$

Khi đó ứng suất σ_t ở mép trong ống bằng:

$$\sigma_{t(r=a)} = P \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \approx P \cdot \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \quad (17-7)$$

Như vậy ứng suất σ_t là phân bố đều từ mép trong ra mép ngoài và có trị số:

$$\sigma_t = P \frac{2a^2}{b^2 - a^2} = P \frac{2a^2}{(a + \delta)^2 - a^2} = \frac{Pa}{\delta}$$

(ở mẫu số ta bỏ qua δ^2 vì như đã nói bề dày δ nhỏ nên $\delta^2 <$ so với a^2)

b/ Nếu bề dày δ lớn, nghĩa là b lớn hơn a rất nhiều.

Giả sử $b \rightarrow \infty$, thì ta có:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sigma_r = -P \cdot \frac{a^2}{r^2}; \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \sigma_t = +P \cdot \frac{a^2}{r^2}$$

Rõ ràng lúc này σ_r, σ_t tỷ lệ nghịch với r^2 . Ví như giá trị ứng suất tại một điểm có $r = 4a$ thì σ_t và σ_r giảm so với mép trong là 16 lần. Vì vậy có thể xem ứng suất σ_t, σ_r từ điểm đó trở ra là nhỏ không đáng kể.

Tại mép trong lúc này tại $r=a$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{P \cdot a^2}{a^2} - \left(-\frac{P \cdot a^2}{a^2} \right) = 2P \quad (17-8)$$

Điều này có nghĩa là bề dày của ống lớn bao nhiêu đi nữa thì giá trị ứng suất tương đương của mép trong vẫn là:

$$\sigma_{td} = 2p \leq [\sigma]$$

hay

$$P \leq [\sigma]/2$$

Theo bất đẳng thức này cho ta thấy rằng, dù bề dày lớn đến bao nhiêu đi nữa áp suất tối đa ở bên trong của ống chỉ bằng một nửa ứng suất cho phép của vật liệu. Cũng có nghĩa là những ống chủ yếu chịu áp suất bên trong thì để tăng độ bền ta không thể chỉ tăng độ dày của ống (ví dụ nòng súng, các ống chịu áp suất bên trong lớn) mà phải có các biện pháp khác. Các biện pháp đó chúng ta sẽ nghiên cứu sau.

17.3. ỐNG DÀY CHỊU ÁP SUẤT BÊN NGOÀI ($p_a = 0$; $p_b = p$).

Căn cứ vào (17-1), ta có:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P \cdot b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \sigma_t &= -\frac{P \cdot b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17-9)$$

Theo (17-2), ta có:

$$u = -\frac{Pb^2r}{E(b^2 - a^2)} \left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \mu \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \quad (17-10)$$

Biểu đồ σ_r và σ_t được biểu diễn trên hình 17.3b. Dễ dàng thấy rằng mép trong vẫn nguy hiểm, vì giá trị ứng suất tương đương ở đó vẫn là lớn nhất.

$$\sigma_{td(r=a)} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 - \left(-P \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \right) = P \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \quad (17-11)$$

Chú ý: $\sigma_1 = 0$ vì xem $\sigma_z = 0$, còn σ_r ở đây sẽ là σ_2 và $\sigma_3 = \sigma_t$. Với kết quả ở biểu thức (17-11) ta trở lại kết quả như ở (17-6) đối với trường hợp ống chỉ chịu áp suất bên trong. Ta có nhận xét:

- Nếu $a=0$ tức là tấm tròn (ống đặc) chịu áp suất đều tác dụng ở chu vi ngoài thì $\sigma_t = \sigma_r = -p$.

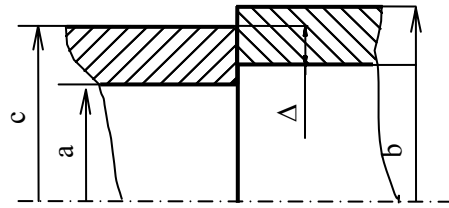
- Nhìn vào (17-11), ta lại thấy $b \rightarrow \infty$ thì $\sigma_{td} \approx 2P \leq [\sigma]$. Vậy $P \leq [\sigma]/2$, cũng có nghĩa là đối với ống dày, áp suất bên ngoài nó chịu được cũng không lớn hơn $[\sigma]/2$.

17.4. BÀI TOÁN GHÉP ỐNG.

17.4.1. Đặt vấn đề. Ở phần ống chịu áp suất bên trong chúng ta đã có nhận xét dù ống có bề dày đến bao nhiêu đi nữa thì áp suất tối đa mà ống chịu được cũng chỉ bằng một nửa của giá trị ứng suất cho phép của vật liệu làm ra ống mà thôi. Vì vậy nhiều khi áp suất bên trong lớn thì việc chọn vật liệu trở nên khó khăn và không kinh tế. Để có thể tăng giá trị áp suất tác dụng bên trong ống người ta ghép nhiều ống với nhau. Mặt khác chúng ta biết điểm nguy hiểm của ống là ở mép trong, tức là khi ở mép trong nứt thì ở các điểm khác, nhất là ở mặt ngoài của ống ứng suất tương đương còn nhỏ. Vì vậy để tạo sự phân bố ứng suất đều hơn người ta tiến hành ghép ống, vì bản thân sự ghép ống sẽ gây cho ống trước khi chịu áp suất một hệ ứng suất trước có khả năng làm giảm các giá trị ứng suất thực khi nó làm việc. Dưới đây chúng ta sẽ trình bày cách ghép ống và qua đó thấy được cái lợi của nó.

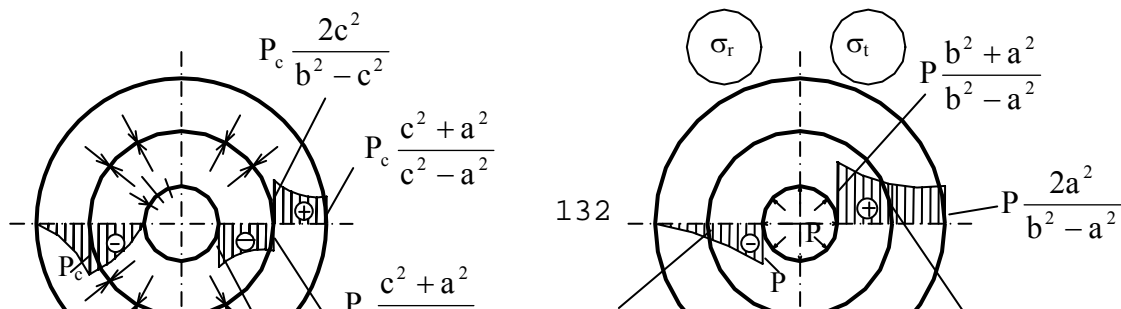
Ta hãy nghiên cứu bài toán ghép ống: Giả sử cho 2 ống có cùng bề dày, nhưng đường kính ngoài $2c$ của ống trong lớn hơn đường kính trong của ống ngoài là 2Δ , Δ gọi là độ dôi ghép ống (xem hình 17.4).

Rõ ràng muốn lồng được 2 ống vào nhau ta phải đốt nóng ống ngoài đến một nhiệt độ nhất định sao cho đường kính trong của ống ngoài giãn ra một lượng ít nhất bằng 2Δ . Sau đó lồng vào nhau và để nguội. Quá trình nguội của ống làm cho đường kính ngoài của ống trong bị co lại một lượng và đường kính trong của ống ngoài giãn ra một lượng so với ống ban đầu. Dĩ nhiên tổng độ giãn và độ co đó phải bằng 2Δ .



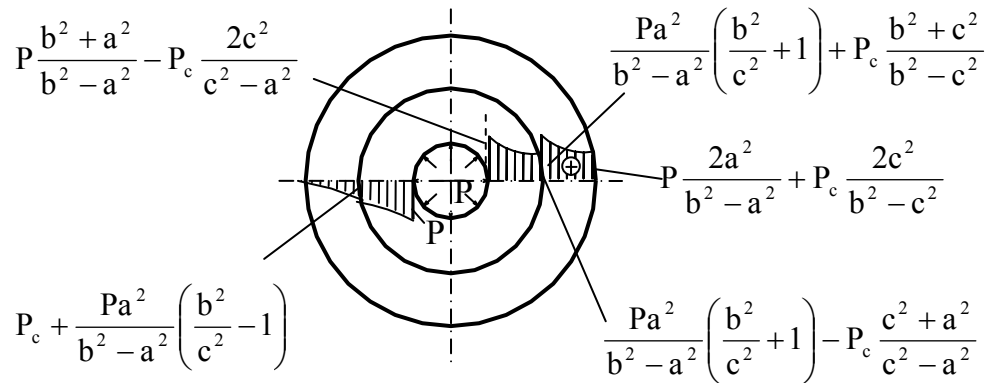
Hình 17.4: Ghép hai ống

- Ứng suất do mối ghép tạo nên: Ở mặt tiếp xúc sinh ra một áp suất gọi là p_c , đối với ống trong đó là áp suất bên ngoài, đối với ống ngoài nó là áp suất bên trong. Biểu đồ ứng suất trong ống ghép do p_c sinh ra được trình bày trên hình 17.5a. Biểu đồ này phụ thuộc vào độ dôi Δ (độ dôi quyết định P_c).



- Tiếp theo coi ống ghép là một ống có bán kính trong là a và bán kính ngoài là b . Nếu ống này chịu áp suất bên trong là p ta có được biểu đồ ứng suất như hình 17.5b (vẽ lại ở hình 17.3a)

Để có sự phân bố thực của ứng suất trong ống ghép khi ống ghép chịu áp suất bên trong thì ta cộng biểu đồ ứng suất trên hình 17.5a và 17.5b. Biểu đồ ứng suất đó được trình bày trên hình 17.6. Với cách ghép này ta thấy ứng suất σ_r ở hai ống tương đương nhau, nghĩa là hai ống sẽ hỏng cùng một thời điểm gần nhau.



Hình 17.6: Biểu đồ ứng suất

17.4.2. Xác định quan hệ giữa áp suất mặt ghép P_c và độ dôi.

Vấn đề đặt ra là với một giá trị p cho trước cần phải chọn độ dôi sao cho từ đó xuất hiện áp suất ở mặt tiếp xúc p_c có lợi. Muốn vậy ta hãy xét mối liên quan của p , p_c và độ dôi. Nếu gọi u_1 là độ co của mặt ngoài ống trong, u_2 là độ giãn của mặt trong ống ngoài thì như rõ ràng:

$$|u_1| + |u_2| = \Delta \quad (a)$$

Dựa vào (17-2) ta có:

+ Ống ngoài chịu áp suất bên trong p_c :

$$u_2 = \frac{P_c \cdot c^3}{E_b (b^2 - c^2)} \left[1 + \frac{b^2}{c^2} - \mu_b \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) \right]$$

+ Ống trong chịu áp suất bên ngoài p_c thì:

$$u_1 = \frac{P_c \cdot c^3}{E_a (c^2 - a^2)} \left[1 + \frac{a^2}{c^2} - \mu_a \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) \right]$$

Trong đó: E_a, E_b là mô đun đàn hồi của ống trong và ống ngoài và $\mu_a ; \mu_b$ là hệ số Poat-xông của ống trong và ống ngoài.

Mang các giá trị đó vào (a) và rút gọn ta được công thức tính độ dôi Δ cần thiết sao cho trong ống có p_c do sự ghép là:

$$\Delta = \frac{P_c \cdot c}{E_a} \left(\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - \mu_a \right) + \frac{P_c \cdot c}{E_b} \left(\frac{b^2 + c^2}{b^2 - a^2} + \mu_b \right)$$

Hay
$$\Delta = P_c \cdot c \left[\frac{C_a}{E_a} - \frac{C_b}{E_b} \right] \quad (17-12)$$

Trong đó :

$$\left. \begin{aligned} C_a &= \frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} - \mu_a \\ C_b &= \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} + \mu_b \end{aligned} \right\} \quad (17-13)$$

Từ (17-12) ta tính được áp suất p_c do ghép với độ dôi Δ định trước gây ra:

$$P_c = \frac{\Delta}{c \left(\frac{C_a}{E_a} + \frac{C_b}{E_b} \right)} \quad (17-14)$$

Trường hợp hai ống ghép cùng vật liệu $E_a = E_b = E$ và $\mu_a = \mu_b = \mu$, thì công thức (17-14) sẽ được:

$$P_c = \frac{E \cdot \Delta (c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{2c^3 (b^2 - a^2)} \quad (17-15)$$

- Muốn cho hai ống cùng vật liệu này bị phá hỏng cùng một lúc thì các điểm của mép trong ống trong và mép trong của ống ngoài có giá trị σ_{td} như nhau. Đây cũng là điều có lợi nhất ta thực hiện phép tính đó.

- Ứng suất σ_{td} ở mép trong của ống trong ký hiệu là $\sigma_{td}^{(A)}$:

$$\sigma_{td}^{(A)} = \sigma_1^{(A)} - \sigma_3^{(A)} = P \cdot \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - P_c \cdot \frac{2c^2}{c^2 - a^2} - (-P)$$

(b)

- Ứng suất tương đương mép trong của ống ngoài ký hiệu là $\sigma_{td}^{(B)}$:

$$\sigma_{td}^{(B)} = \sigma_1^{(B)} - \sigma_3^{(B)} = \frac{Pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) + P_c \left(\frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} \right) - \left[-P_c + \frac{P \cdot a^2}{b^2 - c^2} \left(1 - \frac{b^2}{c^2} \right) \right] \quad (c)$$

Cho $\sigma_{td}^{(A)} = \sigma_{td}^{(B)}$ và sau khi rút gọn ta có :

$$P = \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{c^2 - a^2}{b^2 - a^2} = P_c \left(\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2} \right) \quad (d)$$

Sau đó mang giá trị p_c tính theo (17-15) vào đây ta tìm được độ dôi hợp lý (cho hai ống làm cùng một vật liệu):
$$\Delta = \frac{2P}{E} \times \frac{cb^2(c^2 - a^2)}{b^2(c^2 - a^2) + c^2(b^2 - c^2)} \quad (17-16)$$

Đối với trường hợp này ta sẽ có công thức tính ứng suất tương đương bằng cách tính p_c theo (d) rồi thay vào (b) hoặc (c):

$$\sigma_{td} = P \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \left[1 - \frac{1}{\frac{b^2}{b^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2}} \right] \quad (17-17)$$

Theo (17-17) ta thấy rằng ứng suất tương đương σ_{td} phụ thuộc vào bán kính ghép c . Muốn cho việc ghép hai ống có lợi nhất ta phải chọn bán kính ghép c sao cho ứng suất tương đương σ_{td} nhỏ nhất. Để có c , ta lấy đạo hàm bậc nhất của (17-17) cho bằng 0 ta được:

$$c = \sqrt{ab} \quad (17-18)$$

Bán kính c này hợp lý nhất và công thức đó (17-18) do Gadôlin tìm ra.

Thay $c = \sqrt{ab}$ vào biểu thức tính σ_{td} , ta được:

$$\min \sigma_{td} = P \cdot \frac{b}{b-a} \quad (17-19)$$

và mang c vào (17-16), ta có độ dôi Δ :

$$\Delta = \frac{P}{E} \sqrt{ab} \quad (17-20)$$

Với những kết quả đã trình bày chúng ta hoàn toàn có thể chọn c , Δ theo (17-18) và (17-20) để có lợi nhất khi ghép ống.

Đối với các bài toán ghép nhiều ống cho tới nay vẫn chưa thấy ai giải quyết triệt để và trên thực tế sẽ càng ít gặp.

Ví dụ 1: Một ống dày chịu áp suất bên trong và bên ngoài (hình 17.1). Xác định áp suất bên trong P_a và độ biến dạng của bán kính trong và ngoài của ống với giả thiết áp suất bên trong P_a lớn hơn áp suất bên ngoài P_b . Cho biết $P_b = 0,1 \text{ kN/cm}^2$; $[\sigma]_k = 3 \text{ kN/cm}^2$; $[\sigma]_n = 12 \text{ kN/cm}^2$; $E = 1,2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $a=4\text{cm}$; $b=8\text{cm}$ và $\mu=0,24$.

Bài giải: Vì ứng suất khi kéo và khi nén khác nhau, nên ta phải viết điều kiện bền theo Mohr:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \alpha \sigma_3 \leq [\sigma]_k$$

Trong đó :

$$\alpha = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Như đã nói ở trên là ở mép trong là nguy hiểm nhất nên ta phải xác định ứng suất chính ở đó, tức là ở $r=a$. Ứng suất ở mép trong này được tính theo (17-1)

$$\sigma_{\min} = \sigma_{r(r=a)} = \sigma_3 = -P_a$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_t = \sigma_1 = \frac{P_a \cdot (a^2 + b^2) - 2P_b \cdot b^2}{b^2 - a^2}$$

Mang vào σ_{td} và điều kiện bền ta có :

$$\frac{P_a \cdot (a^2 + b^2) - 2P_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} - \alpha(-P_a) \leq [\sigma]_k$$

Ta tính được :

$$P_a = \frac{[\sigma]_k \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) + 2P_b \cdot \frac{b^2}{a^2}}{(1-\alpha) + \frac{b^2}{a^2}(1+\alpha)} = \frac{3(4-1) + 2 \times 0,1 \times 4}{(1-0,25) + 4(1+0,25)}$$

$$P_a = \frac{9,8}{5,75} = 1,7 \text{ kN/cm}^2$$

Để xác định độ biến dạng tuyệt đối Δ_a của bán kính trong ta sử dụng công thức (17-2), trong đó ta thay $r=a$:

$$\Delta_a = u_{r=a} = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{P_a \cdot a^2 - P_b \cdot b^2}{b^2 - a^2} \times a + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{a^2 b^2}{a} \frac{P_a - P_b}{b^2 - a^2} = 0,001 \text{ cm}$$

Tương tự như tính chuyển vị Δ_a khi tính chuyển vị mặt ngoài Δ_b và lúc này trong công thức (17-2) ta thay $r=b$:

$$\Delta_b = u_{r=b} = 0,0007 \text{ cm}$$

Ví dụ 2: Xác định bề dày của ống thép chịu áp suất bên trong $P = 20 \text{ kN/cm}^2$. Sau đó tính độ giãn của bán kính trong. Biết $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$; $\mu = 0,3$; $a = 2 \text{ cm}$ và $[\sigma] = 50 \text{ kN/cm}^2$.

Bài giải: Ta sử dụng thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất và σ_{td} được tính theo (17-5):

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = P \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \leq [\sigma]$$

Rút ra:
$$b \geq \frac{a}{\sqrt{1 - 2 \frac{P}{[\sigma]}}} = \frac{2}{\sqrt{1 - 2 \frac{20}{50}}} = 4,5 \text{ cm}$$

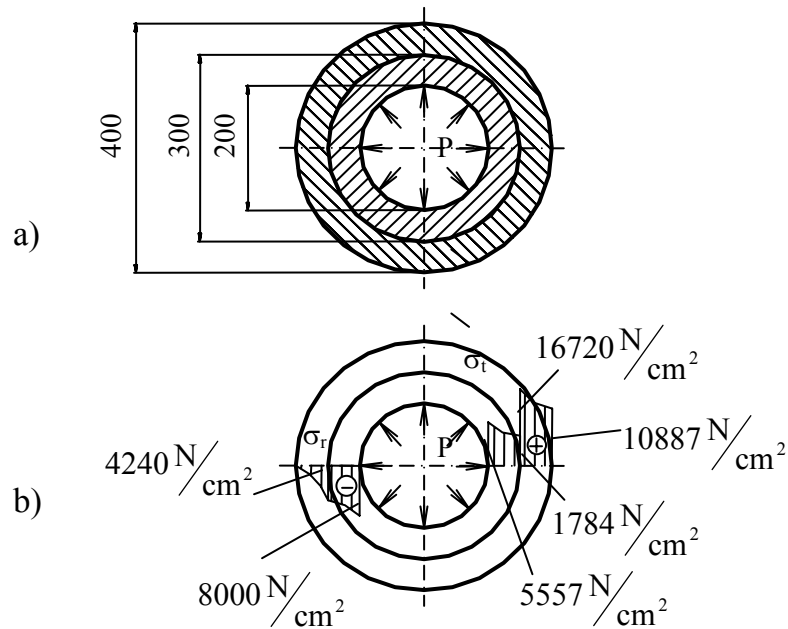
Bề dày ống sẽ là $\delta = b - a = 4,5 - 2 = 2,5 \text{ cm}$

Với ống chịu áp suất bên trong thì độ giãn của bán kính trong được tính theo (17-4)

với $r=a$:
$$\Delta_a = u_{r=a} = \frac{P \cdot a^3}{E(b^2 - a^2)} \left[1 + \frac{b^2}{a^2} - \mu \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \right] = 0,0036 \text{ cm}$$

Ví dụ 3: Hai ống dày cùng vật liệu được ghép với nhau với độ dôi là $2\Delta = 0,02 \text{ cm}$ (xem hình 17.7). Hãy vẽ biểu đồ ứng suất σ_r và σ_t trong thành ống khi chịu áp suất bên trong là $P = 8000 \text{ N/cm}^2$. Cho biết $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ và $\mu = 0,3$.

Bài giải: Đây là bài toán về ống ghép có độ dôi cho nên trước hết ta phải xác định áp suất tại chu vi giáp giới giữa hai ống là P_c do độ dôi sinh ra.



Hình 17.7:
a- Hai ống dày cùng vật liệu ghép với nhau; b- Biểu đồ ứng suất

Vì độ dôi cho trước và hai ống coi như làm cùng vật liệu, nên áp suất P_c được xác định theo công thức (17-15):

$$P_c = \frac{E \cdot \Delta (c^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{2c^3 (b^2 - a^2)} = \frac{2 \cdot 10^7 \times 0,01 \cdot (15^2 - 10^2)(20^2 - 15^2)}{2 \cdot 15^3 \cdot (20^2 - 10^2)} = 2160 \text{ N/cm}^2$$

Tương tự như trên hình 17.6c, thì các ứng suất được xác định như sau:

- Ở mặt trong của ống:

$$\sigma_r = -P = -8000 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_t = 8000 \cdot \frac{20^2 + 10^2}{20^2 - 10^2} - 2160 \cdot \frac{2 \times 15^2}{15^2 - 10^2} = 5557 \text{ N/cm}^2$$

- Ở mặt ngoài của ống trong:

$$\sigma_r = -2160 + \frac{8000 \cdot 10^2}{20^2 - 10^2} \left(1 - \frac{20^2}{15^2} \right) = -4240 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_t = \frac{8000 \cdot 10^2}{20^2 - 10^2} \left(1 + \frac{20^2}{15^2} \right) - 2160 \frac{15^2 + 10^2}{15^2 - 10^2} = 1784 \text{ N/cm}^2$$

- Ở mặt trong của ống ngoài:

$$\sigma_r = -4240 \text{ N/cm}^2 \text{ (như } \sigma_r \text{ ở mặt ngoài của ống trong)}$$

$$\sigma_t = \frac{8000 \cdot 10^2}{20^2 - 10^2} \left(1 + \frac{20^2}{15^2} \right) + 2160 \frac{20^2 + 15^2}{20^2 - 15^2} = 16720 \text{ N/cm}^2$$

- Ở mặt ngoài của ống ngoài: $\sigma_r = 0$

$$\sigma_t = 8000 \cdot \frac{2 \cdot 10^2}{20^2 - 10^2} + 2160 \cdot \frac{2 \times 15^2}{20^2 - 15^2} = 10887 \text{ N/cm}^2$$

Biểu đồ ứng suất σ_t và σ_r được biểu diễn trên hình 17.7b

Ví dụ 4: Chọn đường kính ghép $2c$ và đường kính ngoài $2b$ của một nòng súng ghép bởi 2 ống có đường kính trong $2a=100\text{mm}$. Hãy xác định độ dôi hợp lí Δ ; cho biết áp suất lớn nhất lúc bắn là $P = 20 \text{ kN/cm}^2$, thép làm nòng súng có mô đun đàn hồi $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ và giới hạn chảy của thép là $\sigma_{ch} = 60 \text{ kN/cm}^2$. Lấy hệ số an toàn $n=2$.

Bài giải : Dựa vào điều kiện của gadoline, ta xác định đường kính ngoài $2b$ theo công thức (17-19):

$$\sigma_{td} = P \cdot \frac{b}{b-a} \leq [\sigma] = \frac{[\sigma]_{ch}}{n}$$

Suy ra
$$b \geq \frac{\sigma_{ch} \cdot a}{\sigma_{ch} - nP} = \frac{60 \times 5}{60 - 2 \times 20} = 15 \text{ cm}$$

Chọn: $b=15\text{cm}$.

Bán kính ghép c được tính theo công thức (17-18):

$$c = \sqrt{ab} = \sqrt{5 \times 15} = 8,6 \text{ cm}$$

Độ dôi Δ xác định theo (17-20):

$$\Delta = \frac{P}{E} \sqrt{ab} = \frac{20}{2 \cdot 10^4} \sqrt{5 \times 15} = 0,00865 \text{ cm}$$

CÂU HỎI TỰ HỌC:

- 17.1. Phương pháp xác định ứng suất và biến dạng trong ống dày ?
- 17.2. Trong ống dày chịu áp suất bên trong và bên ngoài cũng như chịu riêng lẽ áp suất bên ngoài hoặc bên trong thì ở nơi nào nguy hiểm nhất, bị phá hủy trước ?
- 17.3. Vì sao phải tiến hành ghép ống ? Bài toán ghép ống chủ yếu đạt mục đích nào ?
- 17.4. Cách xác định độ dôi trong ghép ống ?
- 17.5. Bài toán của Gadoline để xác định các thông số độ dôi, ứng suất ở mặt ghép và bề dày của ống .

-----\$\$\$\$-----

DÂY MỀM

18.1.KHÁI NIỆM

Các kết cấu dây mềm cũng thường gặp trong thực tế như dây điện, cầu treo bằng dây cáp, các dây neo tàu... Về mặt chịu lực các dây mềm chủ yếu chỉ chịu lực kéo, không chịu nén cũng như không chịu uốn. Mà như chúng ta đã biết, chịu kéo thì ứng suất đều như nhau, so với chịu uốn thì mọi điểm trên một mặt cắt đều nguy hiểm như nhau và như vậy tận dụng được vật liệu tốt hơn so với chịu uốn. Vì vậy kết cấu dây thường nhỏ hơn so với kết cấu tương ứng khác tương tự. Tuy vậy việc tính toán kết cấu dây có phức tạp hơn và nhược điểm của nó là ổn định kém (loại cầu dây).

Ta hãy xét một dây mềm có mặt cắt ngang không đổi, chịu trọng lượng bản thân treo ở hai gối tựa không ngang mức nhau A và B (hình vẽ 18.1).

Để dễ theo dõi quá trình nghiên cứu về dây mềm, ta chú ý một số khái niệm sau:

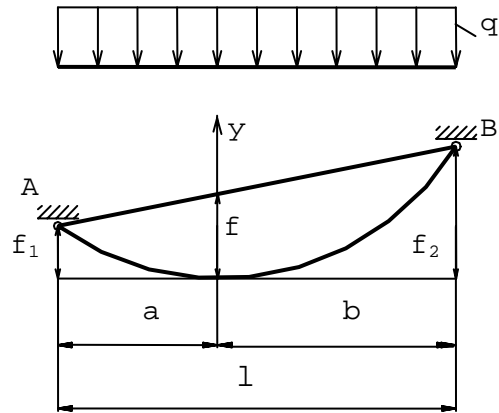
- Độ võng lớn nhất của dây mềm gọi là mũi tên và kí hiệu là f (hình 18.1).

- Khoảng cách giữa hai điểm A, B gọi là nhịp và kí hiệu là l .

- Trọng lượng bản thân hoặc tải trọng phân bố đều nào tác dụng lên dây cũng được xem gần đúng như phân bố đều trên nhịp với hợp lực bằng nhau trong các trường hợp đó (bởi vì thường độ chênh lệch A và B cũng như mũi tên nhỏ so với khoảng cách AB).

Nên lưu ý một điểm: Thiết kế dây mềm phải tính được chiều dài s , mũi tên f và lực căng lớn nhất trong dây, để chọn kích thước mặt cắt ngang hợp lí. Các thông số ấy phụ thuộc vào nhau, vì vậy thường tùy theo yêu cầu cụ thể của từng bài toán mà ta có một số thông số đó định trước và trên cơ sở đó tìm các thông số còn lại.

Có thể giải bài toán dây mềm bằng con đường chính xác. Nhưng phương pháp chính xác thì phải tính toán phức tạp mà kết quả của phương pháp gần đúng không sai lệch so với nó bao nhiêu. Nên ta thường dùng phương pháp gần đúng để giải bài toán dây mềm. Dưới đây chúng ta dùng phương pháp gần đúng để giải bài toán dây mềm chịu lực phân bố đều.



Hình 18.1: Sơ đồ dây mềm có tiết diện ngang không đổi chịu tải trọng bản thân

18.2.PHƯƠNG TRÌNH CỦA ĐƯƠNG DÂY VÔNG.

(trong trường hợp dây chịu lực phân bố đều).

- Tải trọng phân bố đều trên dây là q thì cũng phân bố đều trên nhịp là q (hình 18.1)

- Ta chọn gốc tọa độ xoy như trên hình 18.1. Cũng cần nói thêm trong thực tế gốc O là điểm thấp nhất của dây phụ thuộc vào tải trọng, chiều dài dây, nhịp và vị trí hai gốc A, B.

Ta hãy tách dây ra một đoạn tạo bởi hai mặt phẳng: mặt phẳng chứa trục y và vuông góc với dây. Mặt phẳng cách gốc O một đoạn là x (xem hình 18.2).

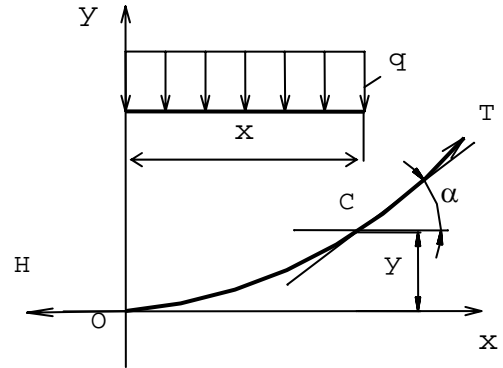
Ta hãy xét phương trình cân bằng: lấy mô men với điểm C:

$$\sum M(C) = H \cdot y - q \cdot \frac{x^2}{2} = 0 \quad (18-1)$$

$$\rightarrow y = \frac{qx^2}{2H}$$

Trong đó: H- Lực căng nằm ngang của dây.

Phương trình (18-1) thể hiện đường cong của dây, gọi là phương trình đường dây.



Hình 18.2: Sơ đồ tính đường cong dây

18.3. LỰC CĂNG.

Sử dụng phương trình cân bằng chiếu tất cả các lực lên phương x của đoạn OC, ta có:

$$\sum P(x) = -H + T \cos \alpha = 0$$

$$T = \frac{H}{\cos \alpha} \quad (18-2)$$

Lực căng T tăng dần từ điểm thấp nhất đến điểm cao nhất của dây. Trị số lớn nhất ở chỗ có độ dốc lớn nhất:

$$T_{\max} = \frac{H}{\cos \alpha_{\max}} = H \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{\max}} \quad (a)$$

Mà ta biết hệ số góc $\operatorname{tg} \alpha_{\max} = y'$ tại $x=b$.

Ta lấy đạo hàm của (18-1), ta có:

$$T_{\max} = \frac{q}{H} b = y'_{(x=b)}$$

$$\text{Vậy:} \quad T_{\max} = H \sqrt{1 + \left(\frac{qb}{H}\right)^2} \quad (b)$$

Toạ độ điểm A(-a, f₁); điểm B(b, f₂)

$$\text{Chú ý:} \quad a+b=l \quad (c)$$

Từ (18-1), ta có:

$$f_1 = \frac{qa^2}{2H}$$

$$f_2 = y_{x=b} = \frac{qb^2}{2H}$$

Vậy độ chênh lệch giữa hai gó A, B là:

$$\begin{aligned} h = f_2 - f_1 &= \frac{qb^2}{2H} - \frac{qa^2}{2H} = \frac{q}{2H} (b^2 - a^2) = \frac{q}{2H} (b+a)(b-a) \\ &= \frac{q}{2H} \cdot l \cdot (b-a) \end{aligned}$$

$$\text{Từ đây suy ra:} \quad b-a = \frac{2H \cdot h}{ql} \quad (d)$$

Từ (c) và (d), ta được:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2} - \frac{Hh}{q \cdot l} \\ b &= \frac{1}{2} + \frac{Hh}{q \cdot l} \end{aligned} \right\} \quad (18-4)$$

Thay b theo (18-4), ta được:

$$T_{\max} = H \sqrt{1 + \left(\frac{q}{2H} + \frac{h}{l} \right)^2} \quad (18-5)$$

Tương tự:
$$T_A = H \sqrt{1 + \left(\frac{q}{2H} - \frac{h}{l} \right)^2}$$

Lực căng ngang:
$$H = \frac{qa^2}{2f_1} = \frac{qb^2}{2f_2}$$

Ta có thể thiết lập công thức tính lực căng H bằng cách lập tỉ số:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{qa^2}{2H}}{\frac{qb^2}{2H}} = \frac{a^2}{b^2}$$

Từ đó rút ra :
$$\frac{a}{b} = \pm \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}$$

Hay:
$$1 + \frac{a}{b} = 1 \pm \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} \rightarrow \frac{b+a}{b} = \frac{1}{b} = 1 \pm \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}$$

Cuối cùng ta có :
$$b = \frac{1}{1 \pm \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}}$$

Thay giá trị b vào (c) và biến đổi, ta sẽ thu được công thức tính lực căng ngang:

$$H = \frac{ql^2}{2(\sqrt{f_2} - \sqrt{f_1})^2} \quad (18-6)$$

Đầu cọng hoặc đầu trừ tùy theo vị trí điểm thấp nhất của đường cong dây. Dạng đường cong của dây có thể có 3 trường hợp xảy ra:

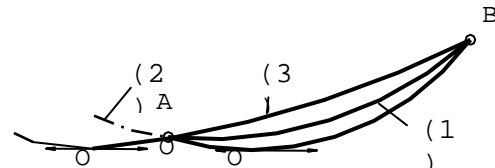
(1) Nếu điểm thấp nhất của dây trùng với một trong hai điểm A hoặc B, thì $f_1=0$ hoặc $f_2=0$.

Trên hình vẽ 18.3 đường cong (1) ứng với điểm thấp nhất tại A (trùng với điểm A).

(2) Nếu điểm thấp nhất nằm trong đoạn AB, thì ta lấy dấu cọng trong thức (18-6). Đường cong (2) có điểm thấp nhất O trong AB và ở công thức (18-6) ta sử dụng dấu +.

(3) Nếu điểm thấp nhất của đường cong dây nằm ngoài điểm B hoặc A thì lấy dấu - (xem hình 18.3). Đường cong (3) có điểm thấp nhất O ngoài đoạn AB.

Ngược lại nếu biết được H mà phải tìm



Hình 18.3: Vị trí đường cong

f_1, f_2 thì chúng ta thay H vào (18-3), (18-4).

Ta có :

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{ql}{3H} + \frac{Hh^2}{2q \cdot l^2} - \frac{h}{2} \\ f_2 &= \frac{ql^2}{3H} + \frac{Hh^2}{1 \cdot q \cdot l^2} + \frac{h}{2} \end{aligned} \right\} \quad (18-7)$$

- Chúng ta xét trường hợp đặt biệt tại gôi treo A và B ngang mức nhau, tức là: $f_1=f_2=f$; $a=b=\frac{l}{2}$; $h=f_1=f_2=0$. Ta thấy rằng, lúc này điểm thấp nhất của đường cong dây ở giữa AB, nên tính được:

$$H = \frac{al^2}{8f} \quad (18-8)$$

Từ (18-8), ta có thể tính ngược lại múi tên f: $f = \frac{al^2}{8H}$ (18-9)

Và :

$$T_{\max} = H \sqrt{1 + \left(\frac{ql}{2H}\right)^2} = H \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}}$$

$$T_{\max} = \frac{ql^2}{8f} \sqrt{1 + \frac{16f^2}{l^2}} \quad (18-10)$$

18.4. TÍNH CHIỀU DÀI CỦA DÂY (trường hợp lúc gôi tựa ngang nhau).

Nếu gọi chiều dài của dây là S, thì ds là một đoạn dây vô cùng bé có liên hệ với dx là hình chiếu của ds trên trục x sẽ là:

$$ds = \frac{dx}{\cos \alpha} \quad \text{và} \quad s = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dx}{\cos \alpha}$$

Hay:

$$S = \int_{-l/2}^{+l/2} \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} dx = 2 \int_0^{l/2} \sqrt{1 + \text{tg}^2 \alpha} dx$$

Mà

$$\text{tg} \alpha = y' = \frac{qx}{H} = \frac{8f}{l^2} x$$

Nên cuối cùng ta được:

$$S = 2 \int_0^{l/2} \sqrt{1 + \frac{64f^2 x^2}{l^4}} dx \quad (a)$$

Khai triển (a) thành chuỗi:

$$\int_0^{l/2} \sqrt{1 + \frac{64f^2 x^2}{l^4}} = 1 + \frac{1}{2} \left(64 \frac{f^2 x^2}{l^4} \right) = 1 + \frac{32f^2 x^2}{l^4}$$

Độ dài của dây được tính như sau:

$$S = 2 \int_0^{l/2} \left(1 + \frac{32f^2 x^2}{l^4} \right) dx = 1 + 64 \frac{f^2}{l^4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{l/2}$$

Vậy:
$$S = l \left(1 + \frac{8 f^2}{3 l^2} \right) \quad (18-11)$$

Điều kiện bền của dây: vì dây chịu kéo, nên tính toán như các thanh chịu kéo.
Gọi F là diện tích của mặt cắt ngang dây thì:

$$\sigma = \frac{T_{\max}}{F} \leq [\sigma]$$

Nếu độ dốc nhỏ thì ta lấy $T_{\max} \approx H$

18.5. ẢNH HƯỞNG CỦA NHIỆT ĐỘ VÀ TẢI TRỌNG THAY ĐỔI ĐỐI VỚI DÂY MỀM.

a) Tính biến dạng thêm gây ra do riêng nhiệt độ thay đổi là:

$$\Delta S_1 = \alpha(t_2 - t_1)S \quad (a)$$

b) Tính biến dạng riêng do sự thay đổi tải trọng:

$$\Delta S_2 = \frac{H_2 - H_1}{EF} \times S \quad (b)$$

Trong đó: H_2 -Lực căng ngang sau khi thay đổi tải trọng; H_1 -Lực căng ngang trước khi thay đổi tải trọng; E- Mô đun đàn hồi. Công thức này là công thức tính biến dạng dài trong kéo đúng tâm.

Nếu gọi S_2 là chiều dài của dây sau khi có sự thay đổi nhiệt độ và thay đổi tải trọng; S_1 là chiều dài của dây trước khi thêm tải trọng và nhiệt độ, thì ta có:

$$S_2 = S_1 + \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$S_2 = l \left(1 + \frac{8 f_1^2}{3 l^2} \right) + \alpha(t_2 - t_1)l + \frac{H_2 - H_1}{EF} \cdot l = l \left(1 + \frac{8 f_2^2}{3 l^2} \right)$$

Trong đó: f_2 - là mũi tên của dây sau khi tăng tải trọng và tăng nhiệt độ từ t_1 lên t_2 ; f_1 là mũi tên của dây trước khi tăng nhiệt độ và tăng tải trọng.

Ta dễ dàng có :

$$f_1 = \frac{q_1 l^2}{8H_1} ; \quad f_2 = \frac{q_2 l^2}{8H_2}$$

Trong đó: q_1 là tải trọng ban đầu; q_2 là tải trọng sau khi được tăng.

Thay các giá trị vào biểu thức S_2 , sau khi biến đổi ta có phương trình bậc 3:

$$H_2^3 + \left[\frac{EFq_1 l^2}{24H_1^2} + EF\alpha(t_2 - t_1) - H_1 \right] \cdot H_2^2 - \frac{EFq_2^2 l^2}{24} = 0 \quad (18-12)$$

Phương trình (18-12) xem H_2 là ẩn số phải tìm, còn F, E, q_1 , q_2 , H_1 , t_1 , t_2 là những đại lượng đã biết.

Giải (18-12) ta tìm được H_2 , trên cơ sở đó có thể tính được f_2 .

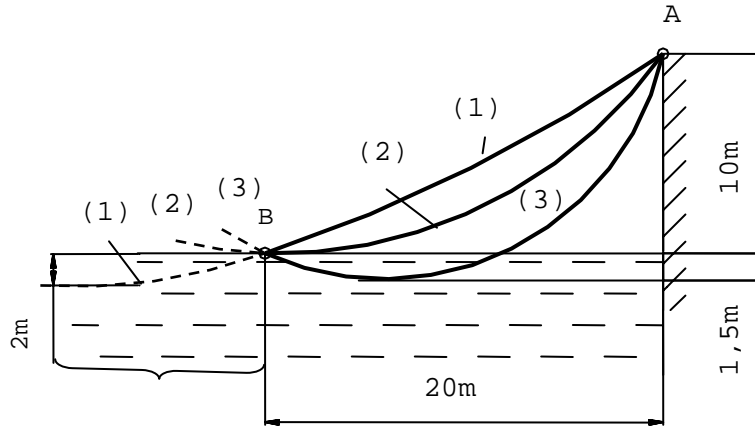
Chú ý : - Nếu chỉ có tải trọng thay đổi, thì cho $\Delta S_2 \neq 0$, còn $\Delta S_1 = 0$.

- Nếu tải trọng không đổi mà nhiệt độ thay đổi thì $q_2 = q_1 = q$.

- Kết quả của (18-12) cũng dùng được khi nhiệt độ giảm.

Ví dụ 1: Một dây neo tàu có trọng lượng riêng $q = 30 \text{ kN/m}$. Tnh lực căng nằm ngang của dây theo 3 trường hợp:

- Điểm thấp nhất bên trái điểm B.
- Điểm thấp nhất trùng với điểm B.
- Điểm thấp nhất ở phía bên phải điểm B.



Hình 18.4: Sơ đồ tính lực căng của dây nằm ngang

Bài giải :

1/ Trường hợp (1): $f_1=2\text{m}$; $f_2=12\text{m}$.

$$\text{Theo (18-6) thì : } H = \frac{ql^2}{2(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^2} = \frac{30 \cdot 20^2}{2(\sqrt{12} - \sqrt{2})^2} = 1427\text{kN}$$

2/ Trường hợp (2): Điểm thấp nhất trùng với điểm B.

$$f_1=0 \text{ ; } f_2=12\text{m.}$$

$$\text{Vậy } H = \frac{ql^2}{2(\sqrt{f_2})^2} = \frac{ql^2}{2f_2} = \frac{30 \cdot 20^2}{2 \times 12} = 500\text{kN}$$

3/ Trường hợp (3): Điểm thấp nhất ở phía bên phải điểm B:

$$f_1=1,5\text{m} \text{ ; } f_2=11,5\text{m}$$

$$H = \frac{ql^2}{2(\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2})^2} = \frac{30 \cdot 20^2}{2(\sqrt{1,5} - \sqrt{11,5})^2} = 280\text{kN}$$

Ví dụ 2: Một dây đồng có diện tích mặt cắt ngang $F=80\text{mm}^2$ đặt trên hai gối tựa cùng độ cao, nhịp của nó là $l=120\text{m}$, mũi tên võng $f=6\text{m}$.

Tính độ tăng ứng suất trong dây khi nhiệt độ giảm 15°C , biết trọng lượng phân bố đều theo chiều dài của dây là $q = 8,62\text{ N/m}$; hệ số giãn nhiệt $\alpha = 167 \cdot 10^{-7} \text{ 1/độ}$. Mô đun đàn hồi của vật liệu $E = 2 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$.

Bài giải:

Khi nhiệt độ chưa tăng, lực căng ngang sẽ là:

$$H_1 = \frac{ql^2}{8f} = \frac{8,62 \times 120^2}{8 \times 6} = 2586\text{N} = 2,586\text{kN}$$

Ta xác định H_2 từ phương trình (16-12)

$$H_2^3 + \left[\frac{EFql^2}{24H_1} + EF\alpha(t_2 - t_1) - H_1 \right] \cdot H_2^2 - \frac{EFq_2^2 l^2}{24} = 0$$

Thay các giá trị bằng số đã cho vào phương trình trên và rút gọn, ta được :

$$H_2^3 + 57,4H_2^2 - 428 = 0$$

Giải phương trình này ta được lực căng ngang:

$$H_2 = 2668 \text{ N} = 2,668 \text{ kN}$$

Độ tăng ứng suất ở mặt cắt thấp nhất là :

$$\Delta\sigma = \frac{H_2 - H_1}{F} = \frac{2,668 - 2,586}{0,8} = 0,102 \text{ kN/cm}^2$$

CÂU HỎI TỰ HỌC.

- 18.1. Những ưu, khuyết điểm của dây mềm. Các kết quả tính toán dây mềm có độc lập nhau không?
- 18.2. Viết phương trình đường dây mềm khi chịu tải trọng phân bố đều.
- 18.3. Công thức xác định lực căng ngang H và lực căng lớn nhất T_{\max} . Tính độ bền.
- 18.4. Các trường hợp có thể xảy ra với kết cấu dây mềm. Cách xác định các đại lượng từng trường hợp.
- 18.5. Sự thay đổi lực căng ngang khi thay đổi nhiệt độ và tải trọng.

--_*****_--

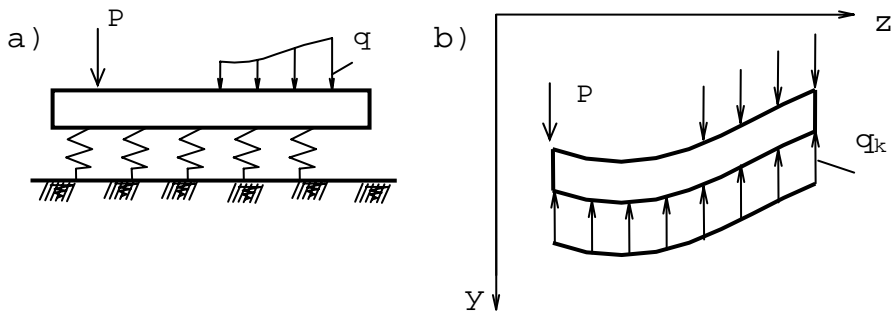
DÀM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

19.1. KHÁI NIỆM CHUNG.

Lâu nay những bài toán chúng ta nghiên cứu thường là loại dầm đặt trên các gối cứng. Trong thực tế nhất là các ngành cầu đường, xây dựng còn gặp loại kết cấu là các dầm đặt trên một môi trường hoặc một vật thể đàn hồi khác. Ví dụ như các tà vẹt đặt trên nền đất đá (xem là đàn hồi) chẳng hạn; dầm móng đặt trên nền đất, phà chuyển tải nằm trên mặt nước. Các bài toán này thuộc dạng các bài toán siêu tĩnh đặc biệt, việc xác định nội lực, độ võng,... của dầm phụ thuộc vào quan niệm và mô hình, quan điểm này dẫn tới việc giả định các phản lực tác dụng lên dầm và trên cơ sở đó mới xác định được nội lực, chuyển vị của dầm.

Trong chương này chúng ta chỉ nghiên cứu một phần nhỏ về tính toán những loại kết cấu như vậy. Ở đây chúng ta không đi sâu phân tích các mô hình mà chỉ giới thiệu mô hình của Winkler, là một mô hình đơn giản nhưng khá phù hợp với các bài toán kỹ thuật.

Mô hình này quan niệm nền là một hệ vô số các lò xo (các lò xo này không liên kết với nhau). Ví dụ xét một dầm thẳng đặt trên một nền đàn hồi nào đó và mô hình hoá như hình 19.1.



Hình 19.1: a- Một dầm đặt trên nền đàn hồi; b- Mô hình hoá

1-Nếu ta cho các ngoại lực tác dụng lên dầm thì các lò xo sẽ xuất hiện những phản lực, những phản lực này tỷ lệ với độ võng của dầm. Như vậy nếu khoảng cách giữa các lò xo rất nhỏ, có thể xem một cách hợp lý các phản lực ấy là những phản lực phân bố, mà cường độ của nó là q_k tỷ lệ với độ võng y của dầm:

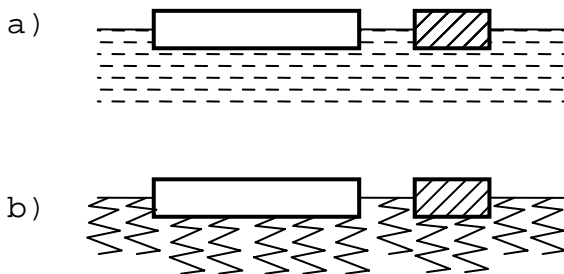
$$q_k = -\chi y \quad (19-1)$$

Trong đó: χ là hệ số tỷ lệ, phụ thuộc vào độ cứng của lò xo, mật độ của lò xo. Dấu trừ (-) ở đây thể hiện phản lực này ngược chiều với độ võng y .

Lập luận tương tự như vậy cho những hệ thống tương tự, có thể xem những gối đỡ lò xo như một môi trường liên tục đàn hồi. Môi trường liên tục đàn hồi này có tính chất: khi đặt một dầm chịu tác dụng của ngoại lực lên nó, thì ở mỗi điểm trong phạm vi đặt dầm xuất hiện những phản lực tuân theo phương trình (19-1).

Dầm đặt lên loại môi trường biến dạng liên tục như vậy gọi là dầm trên nền đàn hồi. Hệ số χ gọi là hệ số đàn hồi hay là hệ số nền.

Trong kỹ thuật sơ đồ tính toán đó được sử dụng rộng rãi. Biểu thức



147 Hình 19.2: a-Dầm có mặt cắt chữ nhật đặt trên mặt nước; b- Mô hình hoá

(19-1) không phải luôn luôn đúng, nó được xem là một biểu thức gần đúng và độ chính xác phụ thuộc vào từng bài toán cụ thể. Nếu tuân theo điều kiện như ở hình 19.1 đã trình bày, thì biểu thức (19-1) xem hoàn toàn đúng.

2/ Đối với dầm đặt trên mặt nước, dầm có mặt cắt ngang chữ nhật (xem hình 19.2). Trong trường hợp này phản lực của nước tác dụng lên mỗi mặt cắt của dầm tỷ lệ với độ sâu của dầm chìm trong nước.

19.2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA ĐỘ VÔNG DẦM

Phương trình vi phân của độ võng dầm trên nền đàn hồi được thiết lập từ mối liên hệ giữa độ võng, góc xoay, các đạo hàm của nó với các giá trị nội lực và ngoại lực có trên những mặt cắt của dầm.

Ta rất quen thuộc các biểu thức sau đây:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= y' \\ M &= EJ_x \cdot y'' \\ Q &= EJ_x \cdot y''' \\ q &= EJ_x \cdot y^{IV} \end{aligned} \right\} \quad (19-2)$$

Trong đó: y là độ võng; θ là góc xoay; M là giá trị mô men; Q giá trị lực cắt; q giá trị lực phân bố tại mặt cắt có độ võng y ; E là mô đun đàn hồi của vật liệu dầm; J_x là mô men quán tính của mặt cắt ngang lấy đối với trục x .

Trong trường hợp dầm trên nền đàn hồi người ta phải xem tải trọng phân bố không chỉ là lực phân bố ngoại lực, mà giá trị lực phân bố là tổng đại số của lực phân bố ngoại lực q và phản lực q_k , ký hiệu là q_A . Chúng có mối liên hệ như sau:

$$q_A = q - q_k = -EJ_x y^{IV} \quad (19-3)$$

Từ (19-3) ta suy ra:

$$q = -EJ_x y^{IV} + q_k = -EJ_x y^{IV} - \chi y \quad (19-4)$$

Vì $q_k = \chi y$

Ta đặt: $\frac{\chi}{EJ_x} = 4k^4$

Lúc đó phương trình (19-4) sẽ là một phương trình vi phân thuần nhất có vế phải:

$$y^{IV} + 4k^4 y = -\frac{q}{EJ_x} \quad (19-5)$$

Nếu lực phân bố ngoại lực không có thì vế phải của (19-5) là bằng không. Điều đó có nghĩa trên dầm khi chỉ chịu tác dụng của các lực tập trung và mô men tập trung. Và lúc đó phương trình (19-5) sẽ có dạng:

$$y^{IV} + 4k^4 y = 0 \quad (19-6)$$

Đây là phương trình vi phân bậc 4 thuần nhất.

Lời giải của phương trình (19-6) có thể viết ở nhiều dạng khác nhau.

Ví dụ:

$$y = e^{kz}(C_1 \sin kz + C_2 \cos kz) + e^{-kz}(C_3 \sin kz + C_4 \cos kz) \quad (19-7)$$

Trong nhiều trường hợp người ta sử dụng nghiệm (19-7) ở dạng khác:

$$y = C_1 \sin kz \cdot \text{Sh}kz + C_2 \sin kz \cdot \text{ch}kz + C_3 \cos kz \cdot \text{Sh}kz + C_4 \cos kz \cdot \text{ch}kz \quad (19-8)$$

Các hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định theo điều kiện biên.

Trong (19-8) các $\text{Sh}kz$ và $\text{ch}kz$ là các sin Hypecbol và cosin Hypecbol.

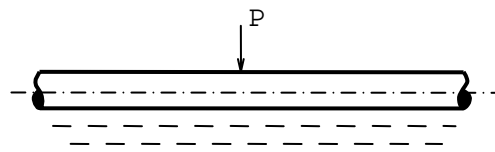
Nghiệm của các phương trình (19-5) ta đã biết sẽ là $y = \bar{y} + y^*$, trong đó \bar{y} là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không có vế phải như các nghiệm của (19-6); y^* là nghiệm riêng nào đó của phương trình vi phân có vế phải. Chẳng hạn khi tải trọng là bậc nhất $q = az + b$, thì nghiệm riêng $y^* = \frac{az + b}{4kJ} = \frac{q}{\chi}$.

Khi đã xác định được y thì ta có thể tìm các đạo hàm của nó. Và nhờ mối liên hệ (19-2) chúng ta tìm lại M, Q . Khi nội lực đã xác định thì việc tính toán độ bền trở thành bình thường.

Dưới đây ta xét một số trường hợp cụ thể.

19.3. DÂY DÀI VÔ HẠN

Chúng ta xét trường hợp xem chiều dài của dây là dài vô hạn, chịu lực tập trung P như trên hình 19.3. Vì dây dài vô hạn cho nên ta có thể xem P được đặt ở giữa dây và chỉ cần nghiên cứu ở nửa dây $z \geq 0$ và phần bên kia là đối xứng qua.



Hình 19.3: Dây dài vô hạn chịu tác dụng lực tập trung

Vì không có lực phân bố nên ta sử dụng nghiệm (19-7) - là nghiệm của phương trình (19-6).

$$y = e^{kz}(C_1 \sin kz + C_2 \cos kz) + e^{-kz}(C_3 \sin kz + C_4 \cos kz) \quad (19-9)$$

Ở điểm xa lực P , tức là z rất lớn thì có thể xem độ võng sẽ bằng không.

Ứng với điều này thì C_1 và C_2 sẽ bằng 0 (vì số hạng đầu e^{kz} khi z càng lớn thì nó càng lớn để $y=0$ thì chỉ có $C_1=C_2=0$), còn số hạng 2 thì thoả mãn điều kiện đó khi $z \rightarrow$ rất lớn, vậy nghiệm (19-9) còn lại:

$$y = e^{-kz}(C_3 \sin kz + C_4 \cos kz) \quad (19-10a)$$

$$\theta = y' = -ke^{-kz}[(C_4 - C_3)\cos kz + (C_3 + C_4)\sin kz] \quad (19-10b)$$

$$M = -EJ_x y'' = -2k^2 e^{-kz}(C_4 \sin kz - C_3 \cos kz) \cdot EJ_x \quad (19-10c)$$

$$Q = -EJ_x y''' = -2k^3 e^{-kz}[(C_3 + C_4)\cos kz + (C_3 - C_4)\sin kz] \cdot EJ_x \quad (19-10d)$$

Là bài toán đối xứng, độ võng là hàm liên tục đối xứng qua trục y nên tiết diện tại P (điểm đối xứng) thì đạo hàm bậc nhất của nó phải triệt tiêu:

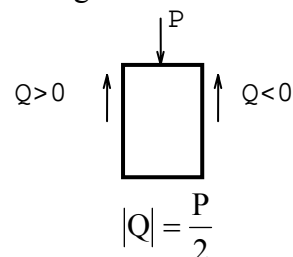
$$y'(0) = \theta(0) = 0 \quad (19-10e)$$

Lực cắt là hàm phản đối xứng và có bước nhảy tại gốc tọa độ, tức là tại lực tập trung $P(z=0)$, lực cắt ở hai bên trái phải của P có giá trị bằng nhau phải là $P/2$ và ngược dấu nhau, tức là:

$$Q_{(z=0)} = \frac{P}{2} \quad (19-10f), \text{ (xem hình 19.4)}$$

Căn cứ vào các biểu thức (19-10b,d,e,f) ta có được hệ phương trình:

$$\left. \begin{aligned} C_3 - C_4 &= 0 \\ C_3 + C_4 &= \frac{P}{4k^3 EJ_x} \end{aligned} \right\}$$



Giải hệ phương trình này, ta tìm được:

$$C_3 = C_4 = \frac{P}{8k^3 EJ_x} = \frac{kP}{2\chi}$$

Thay các hằng số này vào (19.10 a,b,c,d), ta xác định độ võng, góc xoay, mô men và lực cắt nội lực. Và biến đổi cuối cùng có dạng sau đây:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{kP}{2\chi} \eta_0(kz) \\ \theta &= -\frac{k^2 P}{\chi} \eta_3(kz) \\ M &= \frac{P}{2k} \eta_1(kz) \\ Q &= -\frac{P}{2} \eta_2(kz) \end{aligned} \right\} \quad (19-11)$$

Trong đó các hàm:

$$\left. \begin{aligned} \eta_0(kz) &= e^{-kz} (\cos kz + \sin kz) \\ \eta_1(kz) &= e^{-kz} (\cos kz - \sin kz) \\ \eta_2(kz) &= e^{-kz} \cos kz \\ \eta_3(kz) &= e^{-kz} \sin kz \end{aligned} \right\} \quad (19-12)$$

Các trị số này tìm được ở bảng 19-2. Căn cứ vào các biểu thức (19-10) ta vẽ được các biểu đồ độ võng, góc xoay, mô men M và lực cắt Q nội lực trên dầm (hình 19.5).

- Các biểu đồ đều có dạng tuần hoàn và tắt dần theo chiều z, chu kỳ của nó khi $z = \frac{2\pi}{k}$.

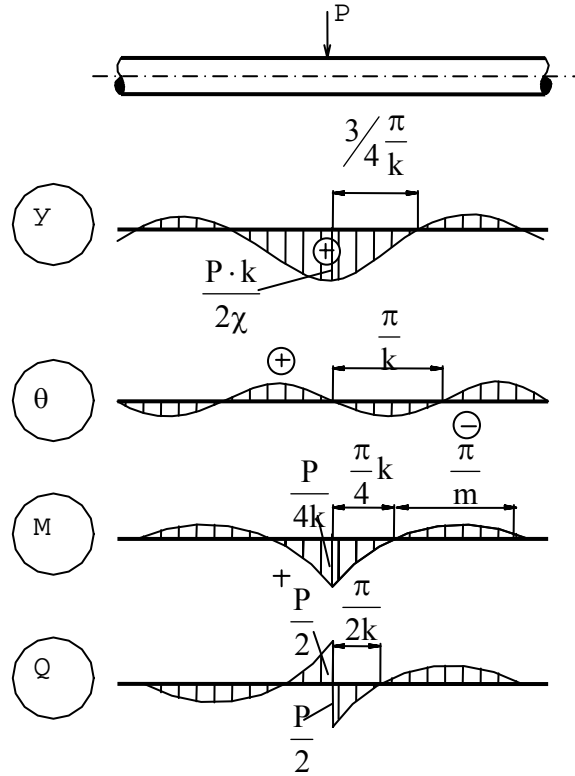
- Nếu độ võng lớn nhất tại điểm lực P tác dụng là $y_{\max} = \frac{kP}{2\chi}$, thì sau một chu kỳ

$z = \frac{2\pi}{k}$ độ võng sẽ là: $y = \frac{kP}{2\chi} \times \eta_0(2\pi) = \frac{kP}{2\chi} \cdot 0,00187$, nghĩa là ở toạ độ $z = \frac{2\pi}{k}$ độ võng chỉ còn lại gần 2% độ võng ở nơi P tác dụng.

- Như vậy một dầm chịu lực tập trung P ở điểm giữa có thể xem là dài vô hạn khi độ dài của dầm $l = 2z = 2 \cdot \frac{2\pi}{k}$.

- Và cũng như vậy khi chiều dài $l < \frac{4\pi}{k}$ thì coi như dầm dài hữu hạn.

Chú ý: Với dầm có nhiều lực tập trung tác dụng lên dầm, thì ta vẫn sử dụng kết quả của (19-11) đối với mỗi lực tập trung và sau đó áp dụng nguyên lý cộng tác dụng để tìm giá trị độ võng, góc xoay, mô men và lực cắt cho dầm.



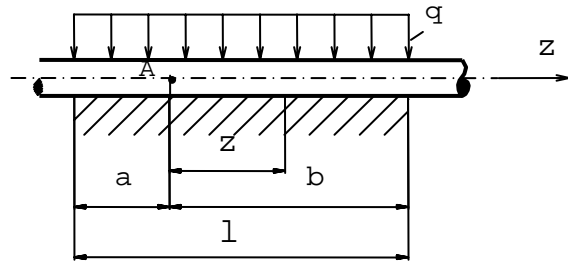
Hình 19.5: Biểu

đồ lực

19.4. DẦM DÀI VÔ HẠN CHỊU TẢI TRỌNG PHÂN BỐ ĐỀU.

Trên hình 19.6 giới thiệu một dầm dài vô hạn chịu tải trọng phân bố đều q trên một chiều dài l .

Chúng ta hãy xét độ võng tại điểm A nào đó (xem hình 19.6). Sử dụng điều chú ý ở trên, ta xem độ võng tại A là bằng tổng độ võng do các tải trọng phân bố qdz và độ võng đó có thể tính như sau :



Hình 19.6: Dầm dài vô hạn chịu tải trọng phân bố đều

$$y = \int_0^a \frac{qdz}{2\chi} \cdot k\eta_0(kz) + \int_0^b \frac{qdz}{2\chi} k\eta_0(kz)$$

$$= \int_0^a \frac{q \cdot k}{2\chi} e^{-kz} (\cos kz + \sin kz) dz + \int_0^b \frac{qk}{2\chi} e^{-kz} (\cos kz + \sin kz) dz$$

Sau khi tích phân ta có kết quả:

$$y = \frac{q}{2\chi} [2 - e^{-ka} \cos ka - e^{-kb} \cos kb] \quad (19-13)$$

- Khi các khoảng cách a và b tương đối lớn, các số hạng e^{-ka} và e^{-kb} sẽ rất nhỏ và có thể xem các số hạng đó bằng 0. Và $y = \frac{q}{\chi}$, nghĩa là độ võng ở xa miền đặt lực sẽ không đổi.

Dưới đây chúng ta sẽ đưa ra kết quả về tính toán ở hai trường hợp cụ thể để tiện sử dụng mà không phải chứng minh.

19.4.1. Điểm nghiên cứu trong phạm vi tác dụng của tải trọng.

$$y = \frac{q}{2\chi} [2 - \eta_2(kb) - \eta_2(ka)]$$

$$\theta = \frac{kq}{2\chi} [\eta_0(kb) - \eta_0(ka)]$$

$$M = \frac{q}{2k^2} [\eta_3(kb) - \eta_3(ka)]$$

$$Q = \frac{q}{4k} [\eta_1(kb) - \eta_1(ka)]$$

Trong đó: a, b lần lượt là khoảng cách từ điểm nghiên cứu đến đầu phía phải và đầu phía trái của tải trọng phân bố.

19.4.2. Điểm nghiên cứu ở ngoài phạm vi tác dụng của tải trọng.

$$y = \frac{q}{2\chi} [\eta_2(kb) - \eta_2(ka)]$$

$$\theta = \pm \frac{kq}{2\chi} [\eta_0(kb) - \eta_0(ka)]$$

$$M = \frac{q}{2k^2} [\eta_3(kb) - \eta_3(ka)]$$

$$Q = \pm \frac{q}{4k} [\eta_4(kb) - \eta_1(ka)]$$

Trong đó: a, b lần lượt là khoảng cách từ điểm nghiên cứu đến điểm đầu và điểm cuối miềm tải trọng phân bố (a < b). Trong biểu thức Q và θ trước dấu ngoặc vuông lấy dấu (+) nếu điểm nghiên cứu nằm bên phải tải trọng và lấy dấu (-) nếu điểm nghiên cứu nằm ở bên trái của tải trọng.

19.5. DẦM DÀI VÔ HẠN CHỊU TẢI TRỌNG TẬP TRUNG P_0 và MÔ MEN TẬP TRUNG M_0 .

Chúng ta hãy xét hai tải trọng này tác dụng ở đầu mút của dầm hình 19.7.

Lúc này ta áp dụng nghiệm (19-10a):

$$y = e^{-kz} (C_3 \sin kz + C_4 \cos kz)$$

Điều kiện biên để xác định C_3 và C_4 là tại $z=0$. Ta có: $M=M_0$ và $Q=P_0$.

Thay điều kiện này vào (19-10c) và (19-10d), ta giải được:

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= \frac{M_0}{2EJk^2} = \frac{2k^2}{\chi} M_0 \\ C_4 &= \frac{2kP_0}{\chi} - \frac{2k^2}{\chi} M_0 \end{aligned} \right\} (17-14)$$

Thay các hằng số này vào các biểu thức (19-10), ta được y, θ, M và Q .

19.6. DẦM DÀI HỮU HẠN.

Đối với một dầm dài hữu hạn, khi tải trọng phân bố theo quy luật bậc nhất (như đã chỉ ở trên), thì nghiệm của (19-5) sẽ là:

$$y = \frac{q}{\chi} + e^{kz} (C_1 \sin kz + C_2 \cos kz) + e^{-kz} (C_3 \sin kz + C_4 \cos kz) \quad (19-15)$$

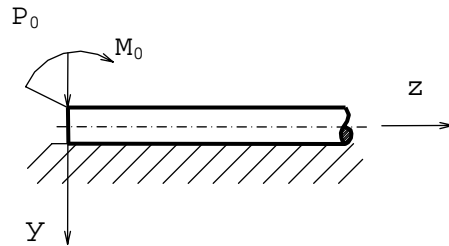
Trên thực tế việc sử dụng biểu thức (19-15) này khá phức tạp nên thường ta sử dụng theo nghiệm (19-8). Tuy nhiên trong thực hành ta chuyển hoá thành tổ hợp của các nghiệm độc lập mà thường gọi là hàm Krulov được biểu diễn ở một kí hiệu khác:

$$\left\{ \begin{aligned} Y_1(kz) &= \text{ch}kz \cdot \cos kz \\ Y_2(kz) &= \frac{1}{2} (\text{ch}kz \cdot \sin kz + \text{sh}kz \cdot \cos kz) \\ Y_3(kz) &= \frac{1}{2} \text{sh}kz \cdot \sin kz \\ Y_4(kz) &= \frac{1}{4} (\text{ch}kz \cdot \text{sh}kz - \text{sh}kz \cdot \cos kz) \end{aligned} \right.$$

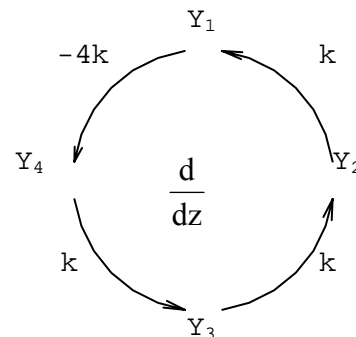
(19-16)

Các hàm Krulov Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 đã lập thành bảng để tra các trị số (xem bảng 19-3). Các hàm này có tính chất sau:

$$1/Y_1(0)=1; Y_2(0)=Y_3(0)=Y_4(0)=0.$$



Hình 19.7: Dầm dài vô hạn chịu tải trọng tập trung P_0 và mô men tập trung M_0



Hình 19.8: Bảng tính $Y_1 \cdot Y_2 \cdot Y_3 \cdot Y_4$

2/ Đạo hàm bậc nhất của hàm là:

$$\frac{dY_1}{dz} = -4kY_4; \quad \frac{dY_2}{dz} = kY_1;$$

$$\frac{dY_3}{dz} = kY_2; \quad \frac{dY_4}{dz} = kY_3$$

Quy tắc đạo hàm bậc nhất này được minh họa theo vòng tròn trên hình 19.8. Cuối cùng ta sẽ có các biểu thức tính các đại lượng cần thiết :

$$y = \frac{q}{\chi} + AY_1 + BY_2 + CY_3 + DY_4$$

$$y' = \frac{q'}{\chi} - 4kAY_4 + kBY_1 + kCY_2 + kDY_3$$

$$M = -EJy'' = EJ \left[\chi AY_3 + \chi BY_4 - \frac{\chi}{4} CY_1 - \frac{\chi}{4} DY_2 \right]$$

$$Q = EJ \left[\chi KAY_2 + \chi KBY_3 - \chi KCY_4 - \frac{\chi}{4} KDY_1 \right]$$

Các hằng số tích phân được xác định từ điều kiện biên của dầm (tại $z=0$).

Ví dụ: $y(0) = y_0; \theta(0) = \theta_0; M(0) = M_0; Q(0) = P_0; q(0) = q_0$

Trong hình 19.9 biểu diễn một dầm hữu hạn (1 đoạn). Theo các điều kiện này ta có

hệ phương trình: $\frac{q_0}{\chi} + A = y_0; \quad \frac{q'_0}{\chi} + kB = \theta_0; \quad \frac{\chi}{4} \cdot C = M_0; \quad -\frac{k\chi}{4} D = Q_0$

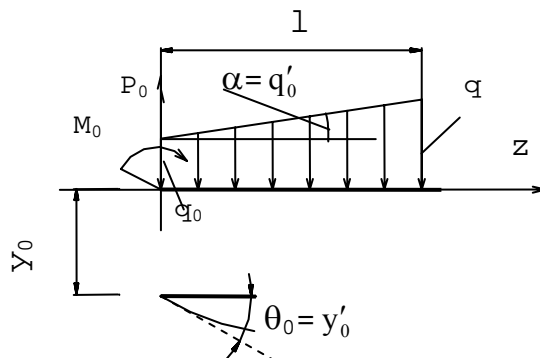
Từ đó ta tìm được các hằng số:

$$A = y_0 - \frac{q_0}{\chi}; \quad B = -\frac{q'_0}{k\chi} + \theta_0; \quad C = -\frac{4M_0}{\chi}; \quad D = -\frac{4Q_0}{k\chi}$$

Trong các giá trị trên thì tải trọng q_0 và q'_0 đã biết và 2 trong 4 giá trị y_0, θ_0, M_0 và Q_0 cũng sẽ biết do đầu bài và còn 2 đại lượng nữa được xác định theo điều kiện biên ở cuối dầm khi $z=1$. Sau khi thay các hằng số A, B, C và D, ta có các nghiệm sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{q}{\chi} + \left(y_0 - \frac{q_0}{\chi} \right) Y_1 + \left(\frac{\theta_0}{\chi} - \frac{q'_0}{k\chi} \right) Y_2 - 4 \frac{M_0}{\chi} Y_3 - 4 \frac{Q_0}{k\chi} Y_4 \\ \theta = \frac{q'}{\chi} - 4k \left(y_0 - \frac{q_0}{\chi} \right) Y_4 + k \left(\frac{\theta_0}{\chi} - \frac{q'_0}{k\chi} \right) Y_1 - 4k \frac{M_0}{\chi} Y_2 - 4 \frac{Q_0}{\chi} Y_3 \\ M = \left[(\chi y_0 - q_0) Y_3 + \left(\theta_0 - \frac{q'_0}{k} \right) Y_4 - M_0 Y_1 + \frac{Q_0}{\chi} Y_2 \right] EJ \\ Q = \left[k(\chi y_0 - q_0) Y_4 + (k\theta_0 - q'_0) Y_3 + 4kM_0 Y_2 + Q_0 Y_1 \right] EJ \end{array} \right. \quad (19-17)$$

Cách diễn đạt này giống như phương pháp thông số ban đầu đã trình bày khi tính độ võng trong chương uốn ngang phẳng. Thật vậy phương trình (19-7) viết cho một đoạn (xem hình 19.9). Chúng ta có



thể mở rộng cho các đoạn tiếp theo, độ võng thứ $i+1$ được viết theo độ võng và mô men ở đoạn thứ i như sau:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\Delta y_a - \frac{\Delta q_a}{\chi} \right) Y_1[k(z-a)] + \left(\frac{\Delta \theta_a}{\chi} - \frac{\Delta q'_a}{k\chi} \right) Y_2[k(z-a)] - 4 \frac{\Delta M_a}{\chi} Y_3[k(z-a)] - 4 \frac{\Delta Q_a}{k\chi} Y_4[k(z-a)]$$

$$M_{i+1} = M_i + (\chi \Delta y_a - \Delta q_a) Y_3[k(z-a)] + \left(\Delta \theta_a - \frac{\Delta q'_a}{k} \right) Y_4[k(z-a)] + \Delta M_a Y_1[k(z-a)] + \frac{\Delta Q_a}{\chi} Y_2[k(z-a)]$$

Trong đó: a -Toạ độ ở ranh giới của đoạn i và đoạn $i+1$.

$\Delta Y_a, \Delta \theta_a$ -Bước nhảy của độ võng và góc xoay tại $z=a$.

$\Delta q_a, \Delta q'_a$ - Bước nhảy của cường độ và đạo hàm của lực phân bố tại $z=a$ (xem q hướng xuống là dương)

$\Delta M_a = M_a$ -Mô men tập trung tại $z=a$.

$\Delta Q_a = P_a$ - Lực tập trung đặt tại $z=a$. chiều dương của M_a và P_a như trên hình 19.9.

Chú ý: Các đại lượng này có thể tồn tại cả và cũng có thể có một số đại lượng nào đó vắng mặt, ta xem các giá trị này bằng không.

Bảng 19.1: Giá trị hệ số nền χ

| Loại nền | Hệ số χ ($\frac{MN}{m^2}$) |
|----------------|-----------------------------------|
| Đất chặt | 50÷100 |
| Đất rất chặt | 100÷200 |
| Nền đá rất rắn | 1000÷1500 |
| Nền cọc | 50÷150 |
| Gạch, đá xây | 4000÷6000 |
| Bê tông | 8000÷15000 |

CÂU HỎI ÔN TẬP:

- 19.1. Biểu thức của Winkler. Hệ số nền và ý nghĩa vật lý cũng như thứ nguyên của nó.
- 19.2. Viết phương trình vi phân của độ võng dầm trên nền đàn hồi. Cho biết các nghiệm của nó ứng với $q=0$ và q là hàm số bậc nhất.
- 19.3. Vẽ biểu đồ của dầm vô hạn chịu lực tập trung P . Khi nào thì có thể xem dầm là vô hạn.
- 19.4. Cách tính một dầm đàn hồi chịu nhiều lực khác nhau.
- 19.5. Viết và giải thích dạng nghiệm của bài toán dầm dài hữu hạn đặt trên nền đàn hồi.



Bảng 19.2 : BẢNG GIÁ TRỊ CỦA HÀM η_i
(để tính dầm dài vô hạn trên nền đàn hồi)

| az | η_0 | η_1 | η_2 | η_3 |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0,0 | 1,0000 | 1,000 | 1,0000 | 0,0000 |
| 0,1 | 0,9907 | 0,8100 | 0,9003 | 0,0903 |
| 0,2 | 0,9651 | 0,6398 | 0,8024 | 0,1627 |
| 0,3 | 0,9267 | 0,4888 | 0,7077 | 0,2188 9 |
| 0,4 | 0,8785 | 0,3564 | 0,6174 | 0,2610 |
| 0,5 | 0,8231 | 0,2415 | 0,5423 | 0,2908 |
| 0,6 | 0,7628 | 0,1431 | 0,4530 | 0,3099 |
| 0,7 | 0,6997 | 0,0599 | 0,3708 | 0,3199 |
| $\pi/4$ | 0,6448 | 0,0000 | 0,3224 | 0,3224 |
| 0,8 | 0,6354 | -0,0093 | 0,3131 | 0,3223 |
| 0,9 | 0,5712 | -0,0657 | 0,2527 | 0,3185 |
| 1,0 | 0,5083 | -0,1108 | 0,1988 | 0,3096 |
| 1,1 | 0,4476 | -0,1457 | 0,1510 | 0,2967 |
| 1,2 | 0,3899 | -0,1716 | 0,1091 | 0,2087 |
| 1,3 | 0,3355 | -0,1897 | 0,0729 | 0,2626 |
| 1,4 | 0,2849 | -0,2011 | 0,0419 | 0,2430 |
| 1,5 | 0,2384 | -0,2068 | 0,0158 | 0,2226 |
| $\pi/2$ | 0,2079 | -0,2079 | 0,0000 | 0,2079 |
| 1,6 | 0,1959 | -0,2077 | -0,0059 | 0,2018 |
| 1,7 | 0,1576 | -0,2047 | -0,0235 | 0,1812 |
| 1,8 | 0,1234 | -0,1985 | -0,0376 | 0,1610 |
| 1,9 | 0,0932 | -0,1899 | -0,0484 | 0,1415 |
| 2,0 | 0,0667 | -0,1794 | -0,0563 | 0,1231 |
| 2,1 | 0,0439 | -0,1675 | -0,0618 | 0,1057 |
| 2,2 | 0,0244 | -0,1548 | -0,0652 | 0,0896 |
| 2,3 | 0,0080 | -0,1416 | -0,0668 | 0,0748 |
| $3\pi/4$ | 0,0000 | -0,1345 | -0,0670 | 0,0670 |
| 2,4 | -0,0056 | -0,1282 | -0,0669 | 0,0613 |
| 2,5 | -0,0166 | -0,1149 | -0,0658 | 0,0491 |
| 2,6 | -0,0254 | -0,1019 | -0,0636 | 0,0383 |
| 2,7 | -0,0320 | -0,0895 | -0,0608 | 0,0287 |
| 2,8 | -0,0369 | -0,0777 | -0,0573 | 0,0204 |
| 2,9 | -0,0403 | -0,0666 | -0,0534 | 0,0132 |

| | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| 3,0 | -0,04226 | -0,05632 | -0,04929 | 0,00703 |
| 3,1 | -0,04314 | -0,04688 | -0,04501 | 0,00187 |
| π | -0,04321 | -0,04321 | -0,04321 | 0,0000 |
| $5\pi/4$ | -0,02786 | 0,00000 | -0,01393 | -0,01393 |
| $6\pi/4$ | -0,00898 | 0,00898 | 0,0000 | -0,00898 |
| $7\pi/4$ | 0,00000 | 0,00579 | 0,00290 | -0,00290 |
| $8\pi/4$ | 0,00187 | 0,00187 | 0,00187 | 0,0000 |

Bảng 19.3. BẢNG GIÁ TRỊ CÁC HÀM KRULOV Y_i
(để tính đầm dài hữu hạn trên nền đàn hồi)

| az | Y_1 | Y_2 | Y_3 | Y_4 |
|-----|----------|-----------|----------|---------|
| 0,0 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,1 | 1,0000 | 0,1000 | 0,0050 | 0,00015 |
| 0,2 | 0,9997 | 0,2000 | 0,0200 | 0,00135 |
| 0,3 | 0,9987 | 0,2999 | 0,0450 | 0,0045 |
| 0,4 | 0,9957 | 0,39965 | 0,0800 | 0,0107 |
| 0,5 | 0,9895 | 0,49895 | 0,1248 | 0,0208 |
| 0,6 | 0,9784 | 0,59745 | 0,17975 | 0,0360 |
| 0,7 | 0,9600 | 0,6944 | 0,24435 | 0,0571 |
| 0,8 | 0,9318 | 0,7891 | 0,31855 | 0,08515 |
| 0,9 | 0,8931 | 0,88035 | 0,40205 | 0,1211 |
| 1,0 | 0,8337 | 0,96675 | 0,49445 | 0,1657 |
| 1,1 | 0,7568 | 1,04645 | 0,59515 | 0,2203 |
| 1,2 | 0,6561 | 1,1173 | 0,70345 | 0,28515 |
| 1,3 | 0,5272 | 1,1767 | 0,81825 | 0,3612 |
| 1,4 | 0,3556 | 1,22165 | 0,9383 | 0,4490 |
| 1,5 | 0,1664 | 1,24855 | 1,06195 | 0,5490 |
| 1,6 | -0,0753 | 1,2535 | 1,18725 | 0,66145 |
| 1,7 | -0,3644 | 1,2319 | 1,3118 | 0,7864 |
| 1,8 | -0,7060 | 1,17885 | 1,4326 | 0,9237 |
| 1,9 | -1,1049 | 1,0888 | 1,54635 | 1,0727 |
| 2,0 | -1,5656 | 0,95575 | 1,64895 | 1,2325 |
| 2,1 | -2,0923 | 0,7735 | 1,73585 | 1,4019 |
| 2,2 | -2,6882 | 0,5351 | 1,8018 | 1,57905 |
| 2,3 | -3,3562 | 0,23345 | 1,84075 | 1,7614 |
| 2,4 | -4,0976 | -0,1386 | 1,8461 | 1,94605 |
| 2,5 | -4,9128 | -0,5885 | 1,81405 | 2,12925 |
| 2,6 | -5,8003 | -1,1236 | 1,72555 | 2,3065 |
| 2,7 | -6,7565 | -1,7599 | 1,58265 | 2,47245 |
| 2,8 | -7,7759 | -2,4770 | 1,3721 | 2,6208 |
| 2,9 | -8,8471 | -3,3079 | 1,08375 | 2,7448 |
| 3,0 | -9,9669 | -4,24845 | 0,70685 | 2,8346 |
| 3,1 | -11,1119 | -5,30225 | 0,2303 | 2,8823 |
| 3,2 | -12,2656 | -6,47105 | -0,3574 | 2,8769 |
| 3,3 | -13,4048 | -7,7549 | -1,0678 | 2,80675 |
| 3,4 | -14,5008 | -9,15065 | -1,9121 | 2,6589 |
| 3,5 | -15,5198 | -10,65245 | -2,9014 | 2,4195 |
| 3,6 | -16,4218 | -12,25075 | -4,04585 | 2,0735 |
| 3,7 | -17,1622 | -13,9315 | -5,35435 | 1,60485 |

| | | | | |
|-----|----------|-----------|-----------|----------|
| 3,8 | -17,6875 | -15,67605 | -6,8343 | 0,9969 |
| 3,9 | -17,9387 | -17,45985 | -8,4909 | 0,2321 |
| 4,0 | -17,8498 | -19,25235 | -10,3265 | -0,7073 |
| 4,1 | -17,3472 | -21,0160 | -12,3404 | -1,8392 |
| 4,2 | -16,3505 | -22,70545 | -14,52735 | -3,1812 |
| 4,3 | -14,7722 | -24,26685 | -16,8773 | -4,7501 |
| 4,4 | -12,5180 | -25,63725 | -19,37425 | -6,5615 |
| 4,5 | -9,4890 | -26,74465 | -21,9959 | -8,6290 |
| 4,6 | -5,5791 | -27,50565 | -24,71165 | -10,9638 |
| 4,7 | -0,6812 | -27,8274 | -27,4823 | -13,5731 |

BẢNG GIÁ TRỊ CÁC HÀM Y_i (Tiếp)

| az | Y_1 | Y_2 | Y_3 | Y_4 |
|-----|------------|------------|-----------|------------|
| 4,8 | 5,3164 | -27,60515 | -30,2589 | -16,4604 |
| 4,9 | 12,5239 | -26,72385 | -32,9814 | -19,6232 |
| 5,0 | 21,0504 | -25,05645 | -35,57745 | -23,0525 |
| 5,1 | 30,9997 | -22,46605 | -37,96185 | -26,7317 |
| 5,2 | 42,4661 | -18,8057 | -40,0350 | -30,6346 |
| 5,3 | 55,5317 | -13,9201 | -41,68225 | -34,72455 |
| 5,4 | 70,2637 | -7,6440 | -42,77265 | -38,9524 |
| 5,5 | 86,7044 | 0,19005 | -43,15925 | -43,2557 |
| 5,6 | 104,8687 | 9,75435 | -42,67745 | -47,5556 |
| 5,7 | 124,7352 | 21,2199 | -41,14535 | -51,75625 |
| 5,8 | 146,2448 | 34,7564 | -38,32395 | -55,74285 |
| 5,9 | 169,2837 | 50,5203 | 34,1198 | -59,38045 |
| 6,0 | 193,6813 | 68,65775 | -28,2116 | -62,5106 |
| 6,1 | 219,2004 | 89,29465 | -20,3042 | -64,9518 |
| 6,2 | 245,5231 | 112,5249 | -10,2356 | -66,3981 |
| 6,3 | 272,2487 | 138,4120 | 2,28885 | -66,91745 |
| 6,4 | 298,8909 | 166,9722 | 17,5862 | -65,9486 |
| 6,5 | 324,7861 | 198,1637 | 35,77125 | -63,31045 |
| 6,6 | 349,2554 | 131,88005 | 57,2528 | -58,6895 |
| 6,7 | 371,4244 | 267,9374 | 82,2255 | -51,74295 |
| 6,8 | 390,2974 | 306,0558 | 110,9037 | -42,11895 |
| 6,9 | 404,7145 | 347,34985 | 143,4927 | -30,1819 |
| 7,0 | 413,3762 | 386,80715 | 180,1191 | -13,2842 |
| 7,1 | 414,8263 | 428,2849 | 220,87175 | 6,7296 |
| 7,2 | 407,4216 | 469,4772 | 265,76635 | 31,02805 |
| 7,3 | 389,3783 | 509,41565 | 314,72645 | 60,0189 |
| 7,4 | 358,7306 | 546,93425 | 367,56875 | 94,1019 |
| 7,5 | 313,3700 | 580,67095 | 423,9858 | 133,6506 |
| 7,6 | 251,0334 | 609,0402 | 483,5233 | 179,00345 |
| 7,7 | 169,3472 | 630,22945 | 545,5557 | 230,44115 |
| 7,8 | 65,8475 | 642,1835 | 609,25955 | 288,16805 |
| 7,9 | -62,0375 | 642,58715 | 673,6057 | 352,3123 |
| 8,0 | -216,8647 | 628,8779 | 737,31005 | 422,8713 |
| 8,1 | -401,1674 | 598,23435 | 798,81785 | 499,7008 |
| 8,2 | -617,4142 | 547,5808 | 856,28775 | 582,49745 |
| 8,3 | -867,9091 | 478,5993 | 907,5542 | 670,7544 |
| 8,4 | -1154,6587 | 372,78655 | 950,11575 | 763,7226 |
| 8,5 | -1479,3701 | 241,41355 | 981,0984 | 860,3917 |
| 8,6 | -1843,2880 | 75,6088 | 997,25265 | 959,44835 |
| 8,7 | -2247,0402 | -128,58235 | 994,93765 | 1059,2289 |
| 8,8 | -2690,4845 | -375,1167 | 970,1255 | 1156,18385 |

| | | | | |
|-----|------------|-------------|-----------|------------|
| 8,9 | -3172,6917 | -667,9794 | 918,36635 | 1252,35605 |
| 9,0 | -3691,4815 | -1010,87995 | 834,8607 | 1340,3007 |
| 9,1 | -4243,5551 | -1407,3690 | 714,40845 | 1418,0930 |
| 9,2 | -4824,0587 | -1860,5365 | 551,49275 | 1481,76105 |
| 9,3 | -5426,5154 | -2372,94855 | 340,3091 | 1526,7834 |
| 9,4 | -6042,3167 | -2946,2708 | 74,8875 | 1548,0229 |
| 9,5 | -6660,9594 | -3581,47555 | -250,9985 | 1539,7669 |

-----33899-----

TÍNH ĐỘ BỀN KẾT CẤU THEO TRẠNG THÁI GIỚI HẠN

20.1. KHÁI NIỆM VỀ TRẠNG THÁI GIỚI HẠN.

20.1.1. Khái niệm chung. Trong những bài toán mà chúng ta đã nghiên cứu thì việc tính toán độ bền là căn cứ vào ứng suất lớn nhất xuất hiện trong thanh phải nhỏ hơn giá trị ứng suất cho phép $[\sigma]$ mà chúng ta đã xây dựng trước đây.

Ví dụ các bài toán về kéo, nén, uốn và xoắn thuần túy, ta có điều kiện bền là:

$$\left. \begin{aligned} \max|\sigma| \leq [\sigma] &= \frac{\sigma_0}{n} \\ \max|\tau| \leq [\tau] &= \frac{\tau_0}{n} \end{aligned} \right\} \quad (20-1)$$

Trong đó: - σ_0, τ_0 là những giới hạn nguy hiểm (có thể là giới hạn chảy đối với vật liệu dẻo và giới hạn bền đối với vật liệu giòn).

- n là hệ số an toàn.

Nếu thanh làm việc ở trạng thái chịu lực phức tạp thì phải tính giá trị ứng suất tương đương theo một thuyết bền nào đó rồi so sánh với ứng suất cho phép $[\sigma]$. Tính toán như thế được gọi là tính toán độ bền theo ứng suất cho phép (USCP). Hệ số an toàn trong (20-1) biểu thị mức độ dự trữ về khả năng chịu lực của vật liệu, dĩ nhiên có đề ý đến những nhân tố ảnh hưởng đến độ bền như đã nêu ở chương kéo, nén đúng tâm (trừ bài toán uốn ngang đồng thời với uốn dọc mà ta đã phân tích ở trên), nên hệ số an toàn cũng biểu thị mức dự trữ và khả năng chịu lực của kết cấu. Vậy n là hệ số an toàn chung cho ứng suất và tải trọng bên ngoài trong những bài toán đã nghiên cứu.

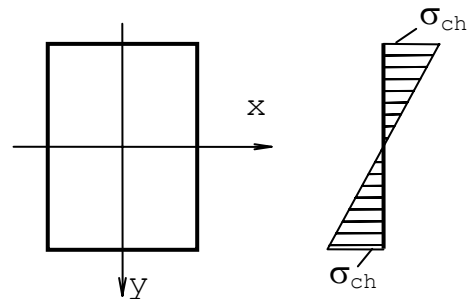
Chúng ta chú ý một điều: với cách tính độ bền bằng ứng suất cho phép thì chỉ cần một điểm, một số điểm hoặc một mặt cắt nào đó mà ứng suất của nó đạt đến giới hạn nguy hiểm σ_0 thì coi như kết cấu đã nguy hiểm và không còn sử dụng được nữa. Cách tính theo phương pháp USCP như vậy là đặt điều kiện vật liệu làm việc trong miền đàn hồi cho nên người ta còn gọi nó là phương pháp tính trong đàn hồi. Thế nhưng trong thực tế những kết cấu làm bằng vật liệu dẻo thì trong nhiều trường hợp tuy tất cả các điểm trên một hoặc một vài mặt cắt ứng suất đạt tới giới hạn chảy, kết cấu vẫn còn khả năng chịu lực thêm, do vậy kết quả tính toán theo USCP ở trên là không phù hợp với nhiều bài toán thực tế và nó không tính hết khả năng chịu lực của kết cấu, không tiết kiệm được vật liệu.

Chúng ta hãy nhìn lại bài toán về uốn chẳng hạn: Theo cách tính độ bền theo phương pháp USCP thì ta coi dầm sẽ ở trong trạng thái nguy hiểm khi các ứng suất ở các mép trên hoặc dưới của mặt cắt đạt đến giới hạn chảy (xem hình 20.1) trong khi đó các điểm khác gần trục trung hoà ứng suất còn rất thấp và ở nhiều trường hợp dầm vẫn còn khả năng chịu lực thêm mà không bị phá huỷ.

Với cách nhìn nhận như vậy, song song với phương pháp USCP người ta đưa ra phương pháp tính theo trạng thái giới hạn hay tải trọng phá huỷ.

20.1.2. Phương pháp tính theo trạng thái giới hạn.

Tính theo trạng thái giới hạn là phân tích sự làm việc của kết cấu cho đến khi phá huỷ hoàn toàn hay bị



Hình 20.1: Trạng thái ứng suất nguy hiểm ở mép trên và dưới của mặt cắt

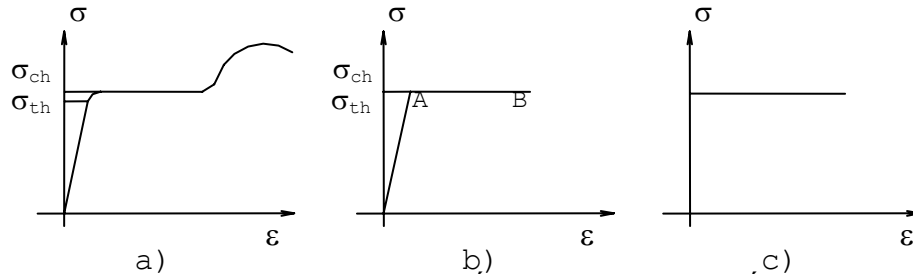
biến hình toàn bộ kết cấu không còn có thể chịu tải được nữa. Rõ ràng với phương pháp này ta tận dụng hết khả năng của vật liệu và dĩ nhiên là rất tiết kiệm. Song việc tính theo phương pháp trạng thái giới hạn (TTGH) đôi khi đưa đến những biến dạng quá lớn (vật liệu làm việc ngoài miền đàn hồi), vượt quá giới hạn cho phép. Do đó trong khi sử dụng phương pháp TTGH người ta chú trọng đặc biệt đến biến dạng. Và đối với những chi tiết máy yêu cầu biến dạng nhỏ thì không dùng phương pháp TTGH được mà phải sử dụng phương pháp USCP như trên. Ngoài ra đối với những bài toán ứng suất thay đổi theo thời gian cũng không dùng phương pháp TTGH này được.

Điều kiện bền theo phương pháp TTGH được đánh giá thông qua sự so sánh hệ số an toàn và hệ số an toàn cho phép:

$$n = \frac{P_{gh}}{P} \geq [n] \quad (20-2)$$

Trong đó: n - Hệ số an toàn; P_{gh} - Giá trị giới hạn lớn nhất mà kết cấu chịu được; P - Tải trọng thực tế tác dụng lên kết cấu; $[n]$ - Hệ số an toàn cho phép, phụ thuộc vào nhiều yếu tố và được xác định trước (thường được cho trong các sổ tay kỹ thuật).

Cơ sở của cách tính theo TTGH là giả thiết về đồ thị quan hệ giữa ứng suất và biến dạng. Căn cứ vào biểu đồ thí nghiệm về kéo vật liệu dẻo (hình 20.2a), từ biểu đồ này người ta coi như lí tưởng hoá từ khi xuất hiện giới hạn chảy thì vật liệu sẽ làm việc ứng với thời kì chảy dẻo dài mà không có thời kì củng cố nữa, đồng thời xem giới hạn chảy và giới hạn tỉ lệ trùng nhau (xem hình 20.2b).



Sự lí tưởng hoá này cũng có cơ sở thực tế vì giai đoạn chảy rất lớn thường gấp 10÷20 lần so với giai đoạn tỉ lệ. Biểu đồ này được gọi là biểu đồ đàn hồi dẻo lí tưởng, thép tương đối phù hợp với biểu đồ này và biểu đồ này là sơ đồ prandt.

Theo sơ đồ này: ở giai đoạn đầu ứng suất nhỏ hơn giới hạn chảy σ_{ch} thì vật liệu làm việc hoàn toàn đàn hồi, quan hệ giữa ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Hooke và kết thúc tại điểm A ($\sigma_{ch}, \epsilon_{ch}$). Sau đó thì vật liệu chuyển sang chảy dẻo, ứng suất tăng và giữ là hằng số, đồng thời biến dạng ở nơi nguy hiểm nhất của kết cấu sẽ tăng lên, hiện tượng này sẽ xuất hiện ở một nơi và cứ thế lan dần ra các nơi khác của kết cấu cho đến khi kết cấu bị phá huỷ hoàn toàn hoặc bị biến hình toàn cục. Khi đó ta nói kết cấu đã tới trạng thái giới hạn. Tải trọng ứng với trạng thái giới hạn này của kết cấu được gọi là tải trọng giới hạn và kí hiệu là P_{gh} . Đôi khi người ta bỏ qua cả giai đoạn đàn hồi, tức là xem giai đoạn này quá ngắn so với giai đoạn chảy dẻo. Biểu đồ này là biểu đồ cứng dẻo lí tưởng (xem hình 20.2c). Trong việc tính toán theo TTGH ngoài việc sử dụng biểu thức (20-2) người ta cũng có thể sử dụng cách so sánh khác:

$$P_{max} \leq [P] = \frac{P_{gh}}{n} \quad (20-3)$$

[P]- gọi là tải trọng cho phép.

Thực chất hai biểu thức (20-2) và (20-3) có bản chất giống nhau.

20.2. BÀI TOÁN KÉO NÉN .

20.2.1. Ví dụ 1: Bài toán tĩnh định. Trên h 20.3 biểu diễn một hệ thanh tĩnh định. Hãy xác định ứng suất của các thanh.

Lời giải: Để xác định nội lực trong hai thanh OA và OB, chúng ta chỉ cần tách nút O và dùng hai phương trình hình chiếu (hai phương trình cân bằng tĩnh học thông thường) ta đủ xác định nội lực của chúng. Ứng suất xuất hiện trong các thanh OA, OB sẽ là:

$$\sigma = \frac{P}{2F \cos \alpha} \leq [\sigma] \quad (a)$$

hay

$$P \leq [\sigma] \cdot 2F \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma_{ch}}{n} \times 2F \cos \alpha \quad (b)$$

Nếu tính theo TTGH thì ứng suất trong thanh tính bằng biểu thức (a) và hệ bị phá huỷ. Giá trị lực ứng với lúc này là lực giới hạn P_{gh} (xem hình 20.3b).

Lập phương trình ứng với trạng thái này (hình 20.3b), ta được:

$$P_{gh} = 2\sigma_{ch} \cdot F \cdot \cos \alpha \quad (c)$$

Nếu cũng dùng một hệ số an toàn n như nhau thì tải trọng lớn nhất tác dụng lên hệ cũng sẽ là:

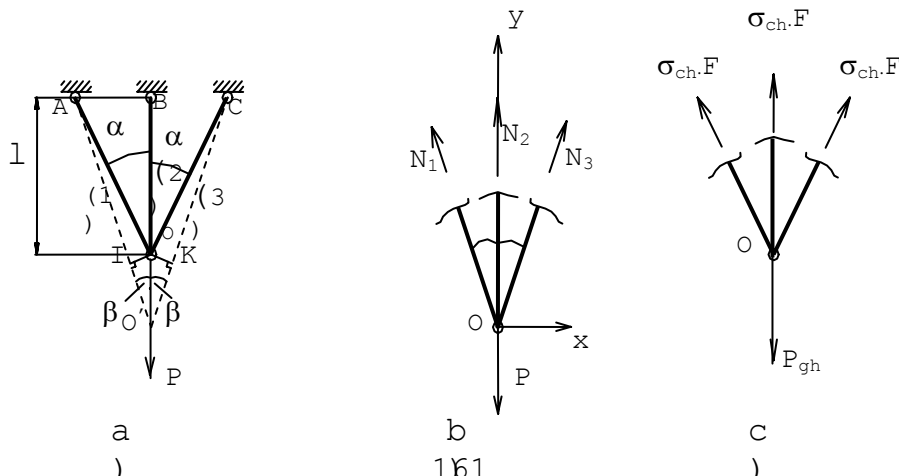
$$P \leq \frac{P_{gh}}{n} = \frac{2\sigma_{ch} \cdot F \cdot \cos \alpha}{n} \quad (d)$$

Kết luận trong bài toán tĩnh định về kéo (nén) đúng tâm thì giá trị lực lớn nhất tính theo phương pháp USCP và phương pháp TTGH sẽ như nhau (biểu thức (b) và (d) như nhau). Điều này cũng dễ hiểu, bởi vì ứng suất trong thanh là hằng số và cùng tiến tới giới hạn chảy cùng lúc.

20.2.2. Hệ siêu tĩnh

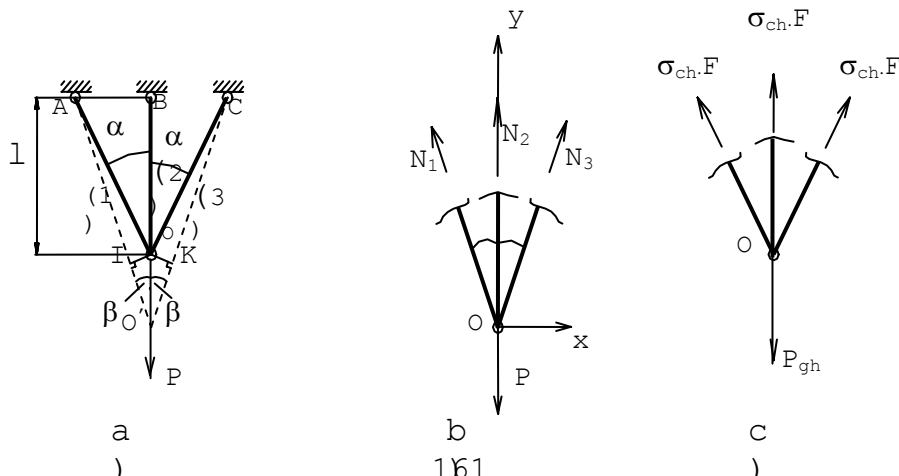
Ví dụ 2: Xét một hệ thanh siêu tĩnh gồm 3 thanh nối với nhau (hình 20.4a). Các thanh (1), (2) và (3) có diện tích như nhau là F và mô đun đàn hồi E như nhau. Hãy tính nội lực các thanh.

Lời giải : Trước hết ta phải giải bài toán siêu tĩnh này để tìm giá trị nội lực trong



Hình 20.3: Sơ đồ hệ thanh tĩnh định (a)

và tính lực



Hình 20.4: Sơ đồ tính nội lực ở hệ thanh siêu tĩnh

các thanh (1), (2), (3).

Để xác định nội lực trong các thanh đó ta tách nút O ra (xem hình 20.4b). Xét sự cân bằng nút O từ hai phương trình hình chiếu lên trục Ox và Oy, ta có:

$$\sum P_{(x)} = N_3 - N_1 = 0 \quad (a)$$

$$\sum P_{(y)} = N_2 - P + N_1 \cdot \cos \alpha + N_3 \cos \alpha = 0 \quad (b)$$

Hai phương trình (a) và (b) có 3 ẩn số nên ta phải xây dựng một phương trình bổ sung. Ta thấy khi chịu lực tác dụng P thì điểm O sẽ chuyển dời đến điểm O'. Ta hạ từ O xuống O'C và O'A (xem hình 20.4a) và tính được:

$$IO' = KO' \approx OO' \cos \beta \quad (c)$$

(chú ý do biến dạng nhỏ nên $\alpha \approx \beta$)

Về mặt biến dạng, ta có thể tính đoạn IO' sẽ là:

$$IO' = \frac{N_1 \cdot l}{EF \cdot \cos \alpha}; KO' = \frac{N_3 \cdot l}{EF \cdot \cos \alpha}$$

và
$$OO' = \frac{N_2 \cdot l}{EF}$$

Thay các đại lượng này vào (c). Từ (a), (b) và (c), ta tìm được:

$$N_1 = N_3 = \frac{P \cdot \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \quad (d)$$

và:
$$N_2 = \frac{P}{1 + \cos^3 \alpha} \quad (e)$$

Vì nội lực ở thanh (2) lớn hơn nên khi ta tăng P thì trong thanh (2) ứng suất sẽ là:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \frac{P}{F(1 + 2 \cos^3 \alpha)} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{ch}}{n} \quad (g)$$

Vậy nếu tính theo phương pháp USCP thì lực P phải thoả mãn biểu thức (g), có nghĩa là:

$$P = \frac{\sigma_{ch}}{n} \cdot F(1 + 2 \cos^3 \alpha) = [P]_{dh} \quad (h)$$

Ta đặt giá trị P lớn nhất là $[P]_{dh}$, lực cho phép ở giới hạn đàn hồi.

Nếu tính theo TTGH thì tải trọng P làm cho ứng suất trong thanh (2) đạt tới giới hạn chảy chưa thể coi là tải trọng giới hạn. Vì tuy lúc này ứng suất trong thanh (2) đạt giới hạn chảy σ_{ch} không thể tăng được nữa, nhưng ở thanh (1) và (3) ứng suất còn dưới giới hạn chảy nên nó tiếp tục gánh thêm tải nếu tiếp tục tăng P. Và chỉ khi nào cả 3 thanh chịu ứng suất bằng giới hạn chảy σ_{ch} thì mới xem kết cấu bị phá hủy (xem hình 20.4c).

Căn cứ vào hình 20.4c, ta tìm được P_{gh} là:

$$P_{gh} = \sigma_{ch} \cdot F(1 + 2 \cos \alpha) \quad (i)$$

Tương tự như trên, nếu hệ số an toàn không thay đổi vẫn là n thì ta có lực cho phép theo phương pháp TTGH sẽ là:

$$[P]_d = \frac{P_{gh}}{n} = \frac{\sigma_{ch} \cdot F \cdot (1 + 2 \cos \alpha)}{n} \quad (k)$$

$[P]_d$ – gọi là tải trọng cho phép khi kết cấu làm việc ở trạng thái dẻo.

So sánh biểu thức (h) và (k), ta có kết luận:

$$[P]_d > [P]_{dh}$$

Tức là tải trọng cho phép khi tính theo TTGH lớn hơn tải trọng cho phép khi tính theo USCP. Độ chênh lệch đó có thể tính như sau:

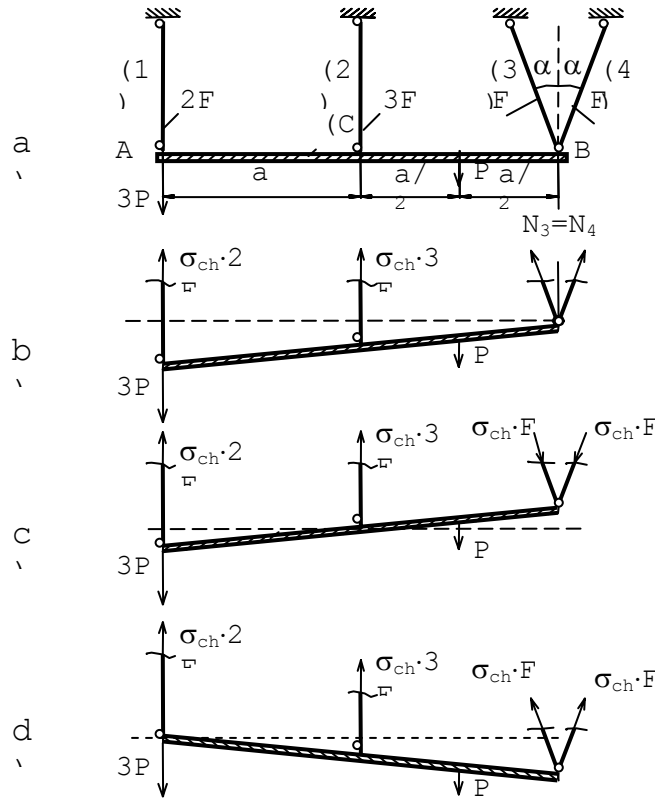
$$\Delta = \frac{[P]_d - [P]_{dh}}{[P]_{dh}} = \frac{2(\cos \alpha - \cos^3 \alpha)}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

Giá trị Δ phụ thuộc vào góc α . Giả sử $\alpha = 30^\circ$ thì $\Delta = 0,19$, tức là tính theo TTGH thì tải trọng tăng 19% so với khi tính bằng phương pháp USCP.

Ví dụ 3: Một hệ thanh bằng thép treo một dầm tuyệt đối cứng AB như trên hình 20.5a. Cho biết $\alpha = 30^\circ$; $F_1 = 2F$; $F_2 = 3F$; $F_3 = F_4 = F$. Tính P_{gh} .

Lời giải: Có nhiều cách phân tích khả năng bị biến hình của kết cấu khi tải trọng P tăng. Dưới đây phân tích các khả năng xuất hiện sự biến dạng dẻo để hệ đi tới trạng thái giới hạn là: Thứ nhất nếu hai thanh (1) và (2) đều chảy dẻo. Thứ 2 là các thanh (1), (3) và (4) đều chảy dẻo. Thứ 3 là các thanh (2), (3) và (4) đều chảy dẻo. Chúng ta hãy phân tích các trường hợp đó để tìm ra P_{gh} nhỏ nhất có thể có được

- Trường hợp thứ 1: nêu hai thanh (1) và (2) đều chảy dẻo (hình 20.5b). Viết điều kiện cân bằng với phương trình mô men đối với điểm B với giả thiết là P đã đạt tới P_{gh}^1 .



Hình 20.5: Sơ đồ tính lực tới hạn của một hệ thanh bằng thép treo một dầm tuyệt đối cứng vững

Ta có:
$$3P_{gh}^1 \cdot 2a + P_{gh}^1 \cdot \frac{a}{2} - \sigma_{ch} \cdot 2F \cdot 2a - \sigma_{ch} \cdot 3F \cdot a = 0$$

Suy ra:
$$P_{gh}^1 = \frac{14}{13} \cdot \sigma_{ch} \cdot F = 1,077 \sigma_{ch} \cdot F$$

- Trường hợp thứ 2: các thanh (1), (2) và (4) đều chảy dẻo (hình 20.5c).
Viết phương trình mô men với điểm C, ta có:

$$3P_{gh}^2 \cdot a - P_{gh}^2 \cdot \frac{a}{2} - \sigma_{ch} \cdot 2F \cdot a - 2\sigma_{ch} \cdot F \cdot a \cdot \cos \alpha = 0$$

Suy ra:
$$P_{gh}^2 = \frac{4}{5} \sigma_{ch} \cdot F(1 + \cos \alpha) = 1,49 \sigma_{ch} \cdot F$$

- Trường hợp thứ 3: các thanh (2), (3) và (4) đều chảy dẻo, xem hình 20.5d.

Ta lấy mô men với điểm A:

$$P_{gh}^3 \cdot \frac{3}{2} \cdot a - \sigma_{ch} \cdot 3F \cdot a - 2\sigma_{ch} \cdot F \cdot \cos \alpha \cdot 2a = 0$$

Suy ra:
$$P_{gh}^3 = \frac{2}{3} \sigma_{ch} \cdot F(3 + 4 \cos \alpha) = 4,27 \sigma_{ch} \cdot F$$

Trong các trường hợp trên thì trường hợp thứ nhất là nguy hiểm nhất ứng với $P_{gh}^1 = 1,077 \sigma_{ch} \cdot F$ thì hệ đã biến hình và đó cũng là lực giới hạn có thể tác dụng lên hệ. Dĩ

nhiên nếu tính đến sự an toàn với hệ số n thì $[P]_d = \frac{P_{gh}^1}{n}$

Ví dụ 4: Kiểm tra bền theo phương pháp TTGH cho một thanh bị ngâm chặt ở hai đầu, chịu lực P dọc trục như trên hình 20.6a. Cho biết $F=4cm$, $P= 85kN$, $\sigma_{ch}=21 kN/cm^2$ và $[n]=1,8$.

Lời giải: Giá trị lực P sẽ biến thành lực P_{gh} khi cả hai đoạn AB và BC cùng chảy dẻo, tức là N_A, N_B đều đạt đến giá trị $\sigma_{ch} \cdot F = N_A = N_B$.

Bằng phương pháp mặt cắt thông thường ta xét sự cân bằng như trên hình 20.6b, ta có:

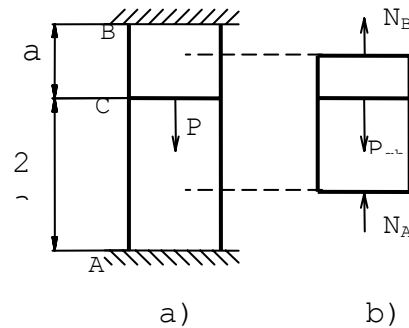
$$P_{gh} - N_A - N_B = P_{gh} - 2\sigma_{ch} \cdot F = 0$$

Suy ra: $P_{gh} = 2 \cdot 2,1 \times 4 = 168kN$

Theo (20-2) ta kiểm tra bền theo TTGH là:

$$n = \frac{P_{gh}}{P} = \frac{168}{85} = 1,97 > [n]$$

Thanh làm việc đảm bảo điều kiện bền theo TTGH.



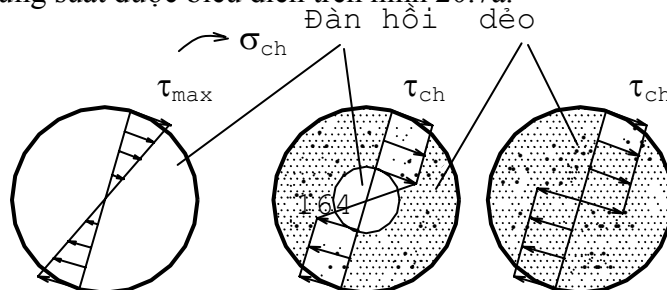
Hình 20.6: Kiểm tra bền theo phương pháp TTGH

20.3. TÍNH TRỤC TRÒN CHỊU XOÁN.

Một thanh tròn chịu xoắn thì trong giai đoạn đầu thanh làm việc trong giới hạn đàn hồi, tức là ứng suất nó lớn nhất ở chu vi và giá trị tại đã gặp ở chương xoắn:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p}$$

Sự phân bố ứng suất được biểu diễn trên hình 20.7a.



Khi ứng suất tiếp lớn nhất trên mặt cắt có mô men xoắn lớn nhất đạt tới giới hạn chảy τ_{ch} . Theo phương pháp USCP thì đó là giới hạn nguy hiểm và mô men xoắn này nằm

ở giữa giới hạn đàn hồi và dẻo, nó được tính:

$$M_Z = \tau_{ch} \cdot W_{P_{dh}} = \frac{\pi R^3}{16} \cdot \tau_{ch}, \quad \text{vì} \left(W_{P_{dh}} = \frac{\pi R^3}{16} \right)$$

Với hệ số an toàn n chẳng hạn thì mô men cực đại ở giai đoạn đầu đàn hồi sẽ là:

$$[M_Z]_{dh} = \frac{\pi R^3}{16} [\tau] \quad \text{với} \quad [\tau] = \frac{\tau_{ch}}{n}$$

Đối với vật liệu dẻo lí tưởng đã nói ở trên, khi tiếp tục tăng tải trọng thì vùng dẻo ở mặt cắt tăng lên, không những ở trên chu vi đạt giới hạn chảy mà ngay cả phía trong chu vi thì cũng xuất hiện ứng suất chảy và lan dần vào trong như hình 20.7b. Sự phát triển vùng chảy dẻo sẽ tăng đến tâm của mặt cắt và ứng suất mọi điểm đều đạt đến giới hạn chảy dẻo τ_{ch} (xem hình 20.7c). Khi đó mô men xoắn nội lực đạt đến giới hạn gọi là mô men xoắn dẻo. Để tính giá trị này ta cũng làm như thường lệ:

$$M_{Zd} = \int_F \tau_{ch} \cdot \rho \cdot dF = \int_0^{2\pi R} \int_0^{\rho} \rho^2 \cdot \tau_{ch} \cdot d\varphi \cdot d\rho = \frac{2\pi R^3}{3} \cdot \tau_{ch}$$

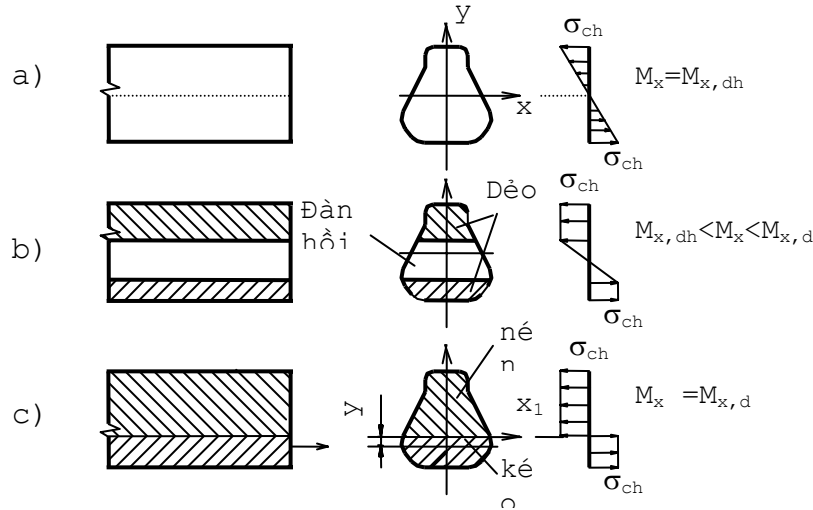
Đặt $\frac{2\pi R^3}{3} = W_{Pd}$ - mô men chống xoắn dẻo. Ta gọi $k = \frac{W_{Pd}}{W_{P_{dh}}} = \frac{4}{3}$ - hệ số tăng

tải trọng khi tính theo TTGH với phương pháp USCP.

20.4. THANH CHỊU UỐN THUẦN TUYỆT

Theo định nghĩa đã biết thì thanh uốn thuần túy khi trên mặt cắt của thanh chỉ có một thành phần nội lực là mô men uốn. Trong giai đoạn đầu vật liệu làm việc trong miền đàn hồi, phân bố theo chiều cao của mặt cắt ngang là bậc nhất và ứng suất cực đại đạt được ở các mép trên và dưới của mặt cắt và được biểu diễn trên hình 20.8a. Ứng với giá trị mô men ở thời điểm này là $M_{x_{dh}}$ và được tính như sau:

$$M_{x_{dh}} = \sigma_{ch} \times W_x$$



Hình 20.8: Sự phát triển miền dẻo trên thanh chịu uốn thuần túy

(Đối với hình chữ nhật, $W_x = \frac{bh^2}{6}$ mà ta đã gặp trong chương uốn)

Tương tự như các bài toán trên với n là hệ số an toàn thì mô men cực đại có thể có trong giới hạn đàn hồi là:

$$[M_x]_{dh} = \frac{\sigma_{ch}}{n} W_x = [\sigma] \cdot W_x$$

Theo phương pháp USCP thì khi mô men nội lực đạt tới giá trị $[M_x]_{dh}$ thì coi như kết cấu bị phá huỷ. Tuy nhiên nếu ta tiếp tục tăng tải trọng, mô men nội lực cũng tăng lên và sự phát triển ứng suất chảy σ_{ch} sẽ tiếp tục tiến vào đường trung hoà (xem hình 20.8b). Sự phát triển miền chảy dẻo còn có thể làm cho σ_{ch} điền đầy cả mặt cắt như hình 20.8c. Mô men nội lực trên mặt cắt lúc này gọi là mô men dẻo M_d . Ở trạng thái toàn bộ mặt cắt chịu sự chảy dẻo thì trên mặt cắt chia làm hai vùng chảy dẻo có giá trị tuyệt đối là σ_{ch} nhưng một vùng chịu kéo và một vùng chịu nén (xem hình 20.8c). Nó khác với trường hợp chịu kéo (nén) ứng suất trên một mặt cắt chỉ có thể là kéo hoàn toàn hoặc nén hoàn toàn.

Trở lại bài toán uốn ta xác định được M_d bằng cách lấy mô men đối với trục x_1 (là trục trung hoà mới, ranh giới giữa miền dẻo chịu kéo và miền dẻo chịu nén. Cần chú ý y' là ứng suất vuông góc với mặt cắt, nghĩa là tạo với trục x_1 mô men dẻo).

$$\text{Và} \quad M_d = \int_{F_k} \sigma_{ch} \cdot y' \cdot dF + \int_{F_n} \sigma_{ch} \cdot y' \cdot dF$$

$$\text{hay} \quad M_d = \sigma_{ch} \int_{F_k} y dF + \sigma_{ch} \int_{F_n} y dF = \sigma_{ch} [S_k + S_n]$$

Trong đó: $\int_{F_k} y dF$, $\int_{F_n} y dF$ là mô men tĩnh của phần diện tích dẻo chịu kéo và chịu nén lấy với trục x_1 , được kí hiệu là S_k và S_n .

$$\text{Vậy} \quad M_d = (S_k + S_n) \sigma_{ch}$$

Ta đặt $S_K + S_n = W_d$ - mô men chống uốn dẻo. Thì mô men uốn giới hạn (ứng với mặt cắt hoàn toàn chảy dẻo) được viết:

$$M_d = \sigma_{ch} \cdot W_d$$

Đến đây còn một vấn đề nữa là phải tìm đường trung hoà mới x_1 (đường chia hai miền khi dẻo, nó có thể không trùng với trục trung hoà x mà ta đã biết trong chương uốn, khi mặt cắt còn làm việc trong miền đàn hồi). Để xác định x_1 ta chú ý rằng đây là bài toán uốn thuần tuý nên ngoài M_x , các thành phần nội lực khác không có. Ví vậy lực dọc $N_z = 0$ (tức là chiếu tất cả các lực lên trục z phải bằng 0).

$$N_z = \int_{F_k} \sigma_{ch} \cdot dF - \int_{F_n} \sigma_{ch} \cdot dF = 0$$

Suy ra
$$\int_{F_k} dF - \int_{F_n} dF = 0$$

Hay
$$F_k = F_n \quad (20-4)$$

Như vậy đường trung hoà mới x_1 chia diện tích mặt cắt ra làm hai phần bằng nhau khi tính bằng phương pháp TTGH.

Nếu vẫn sử dụng n là hệ số an toàn khi tính độ bền theo TTGH, thì mô men lớn nhất khi dẻo sẽ là:

$$[M]_d = \frac{\sigma_{ch}}{n} \cdot W_d = [\sigma] \cdot W_d$$

Rõ ràng đối với các hình đối xứng như hình chữ nhật, hình tròn, chữ I thì trục x và x_1 phải trùng nhau. Nếu mặt cắt không đối xứng qua trục x , thì trục x_1 sẽ xác định theo (20-4). Dưới đây chúng ta thử so sánh W_{dh} và W_d cũng chính là so sánh giá trị của M_{dh} và M_d đối với một số hình thường gặp.

1/ Mặt cắt hình chữ nhật có tiết diện $b \times h$:

$$W_{dh} = \frac{b \cdot h^2}{6}; W_d = S_K + S_n$$

Mà
$$|S_K| = |S_n| = b \cdot \frac{h}{2} \times \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

Vậy
$$W_d = \frac{bh^2}{4}$$

Chú ý: Khi tính mô men tĩnh S_K, S_n là tính mô tĩnh của 1/2 hình chữ nhật lấy đối với trục x (x và x_1 trùng nhau).

Ta lập tỉ số so sánh:

$$\frac{W_d}{W_{dh}} = \frac{bh^2/4}{bh^2/6} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Cũng có nghĩa là mô men nội lực tính theo phương pháp TTGH gấp 1,5 lần so với mô men nội lực tính theo phương pháp USCP.

2/ Đối với mặt cắt hình tròn.

$$W_d = |S_K| + |S_n| = 2 \cdot \frac{\pi R^2}{2} \times \frac{4}{3\pi} R = \frac{4}{3} R^3$$

(Tính mô men tĩnh 1/2 hình tròn với trục x qua tâm).

Như trong chương đặc trưng hình học ta đã có:

$$W_{dh} = \frac{\pi R^3}{32}$$

Lập tỉ số
$$\frac{W_d}{W_{dh}} = \frac{4/3R^3}{\pi R^3/32} \approx \frac{5}{3} \quad (\text{xem } \pi \approx 3,2)$$

Vậy mô men nội lực tính theo TTGH tăng 5/3 lần so với mô men nội lực tính theo USCP.

3/ Đối với các tiết diện hình chữ I, \square ta tìm được mô men chống uốn đàn hồi W_{dh} , S_x là mô men tĩnh của 1/2 hình đối với trục trung hoà x và ta được tỷ số:

$$\frac{W_d}{W_{dh}} = 1,15 \div 1,5$$

Ví dụ 5: Tìm giá trị mô men M_{dh} theo phương pháp USCP và giá trị mô men giới hạn M_d tác dụng lên dầm công xôn có tiết diện như hình 20.9. Cho biết $\sigma_{ch}=32 \text{ kN/cm}^2$, hệ số an toàn $n=1,85$.

Lời giải: Chúng ta xác định trọng tâm C của mặt cắt (xem hình 20.9b) và mô men quán tính chính trục J_x rồi tìm W_{dh} , theo tuần tự đã gặp trong các chương đặc trưng hình học của mặt cắt và chương uốn trong phần đầu, ở đây ta cho kết quả $W_{dh}=10,85 \text{ cm}^3$.

Chúng ta tìm trục trung hoà khi cả mặt cắt chảy dẻo, tức là tìm trục chia đôi mặt cắt đó ra.

Diện tích của cả mặt cắt là:

$$F=4 \cdot 1+6 \cdot 1=10 \text{ cm}^2$$

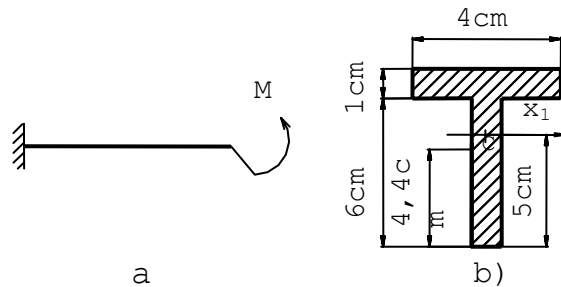
Vậy trục x_1 cách mép dưới là 5cm (chia đôi mặt cắt)

Vậy $W_d=S_K+S_n=5 \cdot 1 \cdot 2,5+1 \cdot 1 \cdot 0,5+4 \cdot 1 \cdot 1,5=19 \text{ cm}^3$.

Cuối cùng ta có:

$$[M]_{dh} = \frac{\sigma_{ch}}{n} \cdot W_{dh} = \frac{32}{1,85} \times 10,85 = 187,67 \text{ kNcm}$$

$$[M]_d = \frac{\sigma_{ch}}{n} \cdot W_d = \frac{32}{1,85} \times 19 = 328,84 \text{ kNcm}$$



Hình 20.9: Sơ đồ tính mô men M_{dh} và M_d theo phương pháp USCP

20.5. THANH CHỊU UỐN NGANG PHẪNG. KHỚP DẸO.

Chúng ta vừa xét bài toán uốn thuần tuý (mô men nội lực là hằng số trong một đoạn nào đấy hoặc suốt chiều dài) tức là các mặt cắt trên kết cấu đang xét là bằng nhau và sự xuất hiện, phát triển chảy dẻo cũng sẽ đồng bộ cho mọi mặt cắt, nên tải trọng giới hạn cũng bằng nhau ở mọi mặt cắt. Nhưng trong bài toán uốn ngang phẳng thì nói chung có lực cắt Q_y xuất hiện và mô men nội lực M_x sẽ thay đổi và chỉ lớn nhất ở một vài mặt cắt thôi (tuỳ theo tải trọng tác dụng). Ta hãy xét một trường hợp đơn giản của một dầm chịu lực như trên hình 20.10a. Tại tiết diện đặt lực, mô men uốn nội lực M_x lớn nhất và giá trị này có được bằng cách tính mô men uốn nội lực tại đó:

$$M_{x_{max}} = \frac{P \cdot a \cdot b}{a + b}$$

Quá trình hình thành và phát triển biến dạng dẻo tại điểm đặt lực diễn ra như sau :

1- Giai đoạn đàn hồi: Cùng với lực P tăng lên thì giá trị $M_{x_{max}}$ cũng tăng lên cho đến khi $M_{x_{max}}=M_{dh}$, ứng với giới hạn đàn hồi và lúc này sự chảy dẻo bắt đầu xuất hiện ở các cạnh của mặt cắt đó xa trục trung hoà nhất (hình 20.10b).

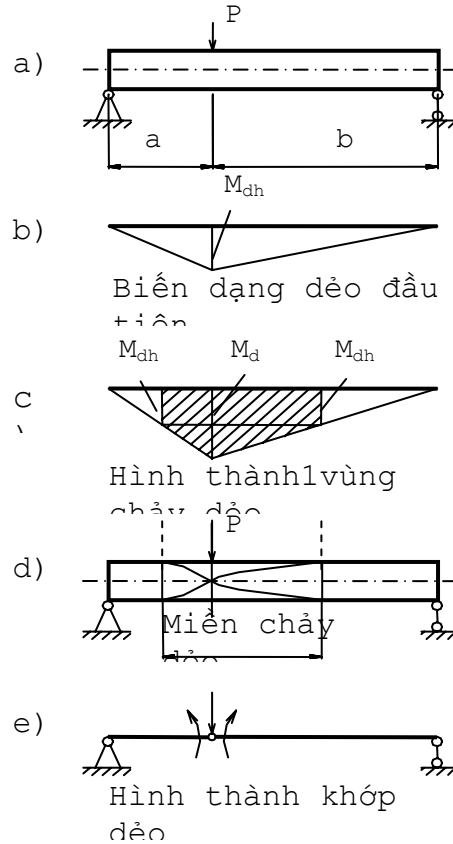
2- Giai đoạn đàn dẻo: Khi $M_{max} > M_{dh}$ thì tại tiết diện đặt lực biến dạng dẻo lan dần vào bên trong khi cả tiết diện này đều chảy dẻo thì tiếp tục các mặt cắt lân cận mô men cũng tăng và đạt tới giới hạn đàn hồi M_{dh} , cứ tiếp tục tăng lực P thì trên thanh sẽ hình thành 1 vùng dẻo (xem hình 20.10c).

3- Lực giới hạn và khớp dẻo: Khi tại mặt cắt chịu mô men nội lực đạt đến giá trị giới hạn $M_{x_{max}}=M_d$ (mô men lớn nhất làm cho cả mặt cắt bị chảy dẻo). Miền chảy dẻo này sẽ lan sang các mặt cắt lân cận tạo nên một vùng chảy dẻo (xem hình 20.10c) . Cũng chính ở nơi đặt lực P mặt cắt bị chảy dẻo hoàn toàn hình thành như một khớp gọi là “khớp dẻo“, khi đó P đạt đến giá trị tới hạn (xem hình 20.10d,e). Lúc này dầm biến thành một cơ cấu, một hệ biến hình. Về mặt cơ học, thì sự làm việc của dầm đối với “khớp dẻo“ cũng như khớp thật . Song chúng cũng có đôi điều khác nhau:

- Tại khớp thật của kết cấu, mô men uốn bằng không, còn tại “ khớp dẻo” thì mô men uốn khác không và bằng mô men uốn chảy dẻo M_d .

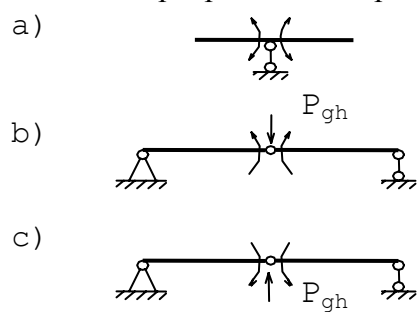
- Ở mặt cắt ngang tại khớp thật có thể xoay theo hai chiều (hình 20.11a). Còn ở “ khớp dẻo“ mặt cắt chỉ xoay theo thứ căng của mô men (hình 20.11b,c), tức là “khớp dẻo“ chỉ cho phép mở về một phía.

Bây giờ chúng ta hãy để ý đến vấn đề về số “ khớp dẻo“ là bao nhiêu để hệ trở nên biến hình tức là không còn làm việc được . Trong phần vừa mới trình bày trên hình 20.9 là một dầm tĩnh định và qua phân tích ta thấy chỉ cần cơ cấu xuất hiện một “khớp dẻo“ tại lực P_{gh} là cơ cấu đã biến hình. Vậy đối với những hệ siêu tĩnh bậc n thì cần phải hình thành bao nhiêu “khớp dẻo“ thì cơ cấu mới thật sự biến hình. Số khớp dẻo đó tối đa chỉ là n+1 (n là số bậc siêu tĩnh, chúng ta sẽ gặp điều này trong ví dụ sau)



Hình 20.10:

Quá trình hình



Hình 20.11: Mô men uốn tại khớp thật và khớp dẻo

Một vấn đề cũng cần nói đến là khi tính dầm chịu uốn ta bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt (ứng suất tiếp) đến sự chảy dẻo, điều kiện chảy dẻo như cách trình bày ở trên là mới để ý đến mô men nội lực (ứng suất pháp như trong trạng thái ứng suất đơn). Trong sự phát triển vùng chảy dẻo, tại đây không có khả năng chịu cắt, tức là ứng suất tiếp tại đó không có. Ứng suất tiếp chỉ xuất hiện và tồn tại ở vùng đàn hồi và được tính như trong uốn ngang phẳng.

Ví dụ 6: Xác định cường độ lực q phân bố trên dầm (xem hình 20.12a). Dầm làm từ thép định hình chữ I số hiệu 18, có $\sigma_{ch} = 32 \text{ kN/cm}^2$, chiều dài của dầm là 3,8m.

Lời giải: Tra bảng ứng với thép I N^o18, ta có:

- Mô men tĩnh của 1/2 diện tích của mặt cắt sẽ là: $S_x = 81,4 \text{ cm}^2$.

- Mô men chống uốn dẻo:

$$W_{xd} = S_k + S_n = 2 \times 81,4 = 162,8 \text{ cm}^3.$$

- Mô men uốn dẻo ở mặt cắt giữa dầm sẽ là:

$$M_{xd} = \sigma_{ch} \cdot W_{xd} = 32 \times 162,8 = 5209,6 \text{ kNm} \\ = 52,096 \text{ kNm}.$$

- Cũng tại giữa dầm (hình 20.12), ta vẽ biểu đồ nội lực sẽ nhận được giá trị mô men nội lực lớn nhất là $M_{x \max} = ql^2/8$. Khi giá trị này bằng M_{xd} thì ở đây hình thành “khớp dẻo” và hệ biến hình. Cho nên giá trị giới hạn q_{gh} được xác định bởi:

$$M_{x \max} = M_{xd} = \frac{q_{gh} \cdot l^2}{8} = 52,096 \text{ kNm}$$

$$\text{Cuối cùng: } q_{gh} = \frac{52,096}{l^2} \times 8 = 28,85 \text{ kN/m}$$

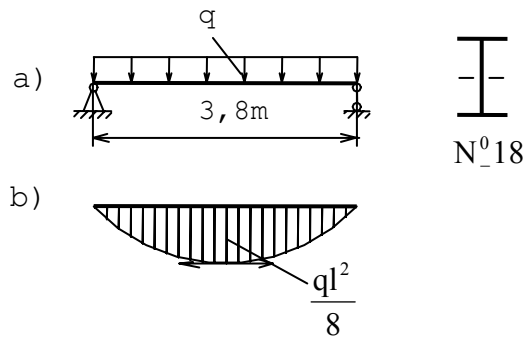
Ví dụ 7: Xác định kích thước ngang của mặt cắt hình chữ nhật ($h=2b$) siêu tĩnh như trên hình vẽ 20.13a. Được biết $P=25 \text{ kN}$; $a=0,5 \text{ m}$; $\sigma_{ch} = 26 \text{ kN/cm}^2$; $n=2$.

Lời giải:

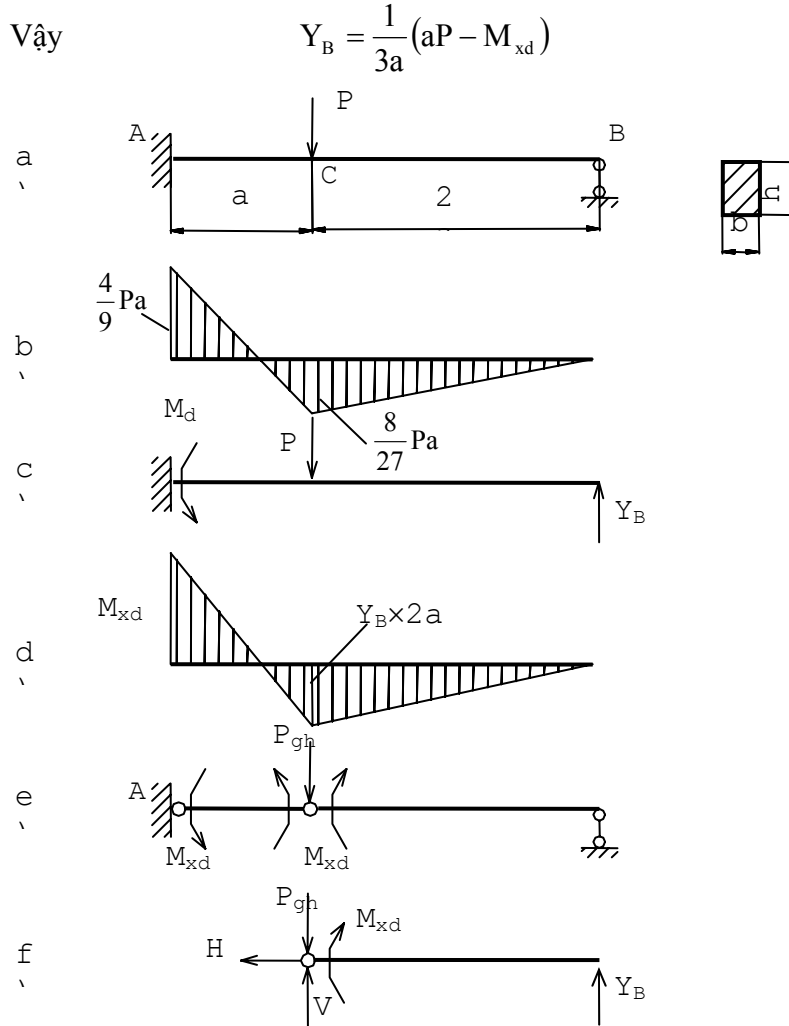
1-Cách giải đàn hồi: Trước tiên ta vẽ biểu đồ mô men nội lực xuất hiện trong dầm siêu tĩnh này. Bằng phương pháp lực giải hệ siêu tĩnh ta vẽ được biểu đồ mô men nội lực như trên hình 20.13b. Căn cứ vào biểu đồ ta thấy tại ngàm giá trị mô men lớn nhất. Cho nên khi tăng tải trọng P thì tại đây sẽ chảy dẻo trước và hình thành khớp dẻo đầu tiên (sau thời điểm này dầm có thể chịu tải tiếp tục vì với một khớp ở ngàm dầm vẫn chưa bị biến hình hoàn toàn). Mô men ở khớp dẻo này có chiều quay làm căng thớ trên của dầm (xem hình 20.13c).

Từ sơ đồ này ta xác định giá trị phản lực tại B là Y_B theo phương trình cân bằng (lấy mô men của các lực ở điểm A tại ngàm), ta sẽ có:

$$\sum M_A = Y_B \cdot 3a - P \cdot a + M_{xd} = 0$$



Hình 20.12: Tính lực q phân bố đều



Hình 20.13: Tính kích thước ngang của mặt cắt hình chữ nhật siêu tĩnh

Lúc này biểu đồ mô men nội lực được xây dựng như trên hình 20.13d. Nếu ta tiếp tục tăng lực P lên thì giá trị M_{xd} tại ngàm không đổi nhưng ở điểm đặt lực P mô men sẽ tăng dần đến giá trị chảy dẻo M_{xd} , tức là hình thành ở đây một khớp dẻo nữa, đảm làm việc theo sơ đồ của một hệ biến hình (xem hình 20.13e) và mất khả năng chịu lực. Vậy khi mô men nội lực tại lực P là $Y_B \times a$ đạt giới hạn dẻo M_{xd} nữa thì dầm ở trạng thái giới hạn và tải trọng sẽ đạt đến P_{gh} . Từ giá trị Y_B tính được mô men tại điểm P_{gh} phải bằng

$$M_{xd}: \quad Y_B \times a = \frac{1}{3a}(aP_{gh} - M_{xd}) \times a = M_{xd} \rightarrow P_{gh} = \frac{4M_{xd}}{a}$$

- Với mặt cắt chữ nhật $h=2b$, thì mô men chống uốn dẻo:

$$W_{xd} = \frac{bh^3}{4} = \frac{h^3}{8}$$

- Điều kiện bền theo TTGH

$$25 = P \leq \frac{P_{gh}}{n} = \frac{4\sigma_{ch} \cdot W_{xd}}{n \cdot a} = \frac{\sigma_{ch} \cdot h^3}{n \cdot a \cdot 8}$$

Vậy:
$$h^3 = \frac{P \cdot n \cdot a \cdot 2}{\sigma_{ch}} = \frac{25 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 2}{26} = 192,4 \text{ cm}^3$$

Suy ra: $h=5,8 \text{ cm}$ và $b=2,9 \text{ cm}$

Nếu tính theo phương pháp USCP thì ta căn cứ vào biểu đồ mô men nội lực trên hình 20.13b, thì tại A ở ngàm mô men lớn nhất, vậy:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{xdh}} \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma]$$

$$\sigma_{\max} = \frac{4}{9} P \cdot a \times \frac{6}{bh^2} \leq \frac{\sigma_{ch}}{n}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{4 \times 25 \times 50 \times 6}{9 \times \frac{h^3}{2}} \leq \frac{26}{2} = 13$$

Vậy: $h^3 = 1358 \text{ cm}^3$

Hay $h=11,4 \text{ cm}$ và $b=5,7 \text{ cm}$

Rõ ràng với ví dụ trên ta thấy rằng nếu để ý đến biến dạng dẻo của vật liệu thì mặt cắt ngang sẽ nhỏ hơn nhiều, nghĩa là tiết kiệm vật liệu hơn.

2- Phương pháp động học:

Phương pháp này dựa vào dự đoán số khớp dẻo và vị trí của nó để hệ xảy ra việc biến hình. Thường việc dự đoán này dựa theo ý tưởng là số khớp dẻo bằng số bậc siêu tĩnh cộng thêm một (số khớp dẻo bằng $n+1$, trong đó n là số bậc siêu tĩnh). Trở lại ví dụ của ta đang xét, nếu mới có một khớp dẻo ở ngàm thì chưa thể biến hình được, mà chỉ khi nào xuất hiện thêm một khớp dẻo ở nơi đặt lực P (khớp này ngược chiều lại với khớp ở ngàm, vì mô men uốn ở ngàm căng phía trên và ở nơi đặt lực lại căng phía dưới). Sơ đồ của dầm ở trạng thái giới hạn được biểu diễn trên hình 20.13e. Nó cho ta hình dung được sự chuyển động khả dĩ của hệ khi hệ đạt đến trạng thái giới hạn, vì vậy người ta gọi phương pháp này là phương pháp động học. Để xác định Y_B ta xét sự cân bằng của phần tử bên phải (xem hình 20.13f), viết phương trình cân bằng lấy mô men với điểm C.

$$\sum M_c = Y_B \cdot a - M_{xd} = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{M_{xd}}{a}$$

Tiếp tục xét sự cân bằng toàn dầm:

$$\sum M_A = 3a \cdot Y_B - 2aP_{gh} + 2M_{xd} - M_{xd} = 0$$

hay $3a \cdot \frac{M_{xd}}{a} - 2aP_{gh} + M_{xd} = 0$

Suy ra $P_{gh} = \frac{2M_{xd}}{a} = \frac{2\sigma_{ch} \cdot W_{xd}}{a}$

Kết quả giải bằng hai phương pháp này là như nhau. Lời giải theo phương pháp động học này tỏ ra ngắn gọn hơn. Đối với những trường hợp có khả năng xuất hiện nhiều khớp dẻo, ví như số vị trí có các lực tập trung tác dụng nhiều hơn số khớp dẻo tối đa $n+1$.

Lúc này có nhiều phương án hình thành khớp dẻo để hệ biến hình. Dĩ nhiên phải dự đoán hết các phương án và giải nó để tìm lực giới hạn P_{gh} nhỏ nhất đủ cho hệ biến hình và phá hủy. Chúng ta đã làm điều này trong ví dụ 3 ở mục 20-2. Chú ý một điều là phương pháp động học này chỉ sử dụng khi biết rõ những vị trí có thể hình thành khớp dẻo. Đối với những bài toán mà khớp dẻo có thể di chuyển trong quá trình hình thành và

phát triển của sự chảy dẻo (thường xảy ra khi tải trọng là các lực, mô men phân bố), thì hiển nhiên không sử dụng phương pháp động học.

Ví dụ 8: Tính tải trọng cho phép của dầm chịu lực như trên hình 20.14a.

Lời giải: Dầm này có bậc siêu tĩnh là 1. Trong giới hạn đàn hồi ta giải bài toán này bằng phương trình 3 mô men hoặc phương pháp lực để xác định được biểu đồ mô men nội lực như trên hình 20.14b. Căn cứ biểu đồ này, ta thấy tại điểm D điểm đặt lực P mô men có giá trị lớn nhất là $M_{\max} = \frac{13}{64}Pl$. Theo phương pháp USCP, thì ứng suất tại đó được tính như sau:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_{x \text{dh}}} = \frac{13}{64} \cdot \frac{Pl}{W_{x \text{dh}}} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{ch}}}{n}$$

Vậy:
$$[P]_{\text{dh}} = [\sigma] \cdot \frac{W_{x \text{dh}} \times 64}{13 \cdot l}$$

Tính theo TTGH: khi tại D hình thành khớp dẻo, nếu tăng lực thì tại B sẽ tiếp tục hình thành khớp dẻo nữa (số khớp dẻo để hệ biến hình là $n+1=1+1=2$), lúc này dầm ở trạng thái giới hạn (xem hình 20.14c). Tải trọng giới hạn P_{gh} và biểu đồ nội lực M_{gh} ứng với trạng thái giới hạn được trình bày ở hình 20.14d.

- Từ $M_{\text{gh}} = M_d$, ta suy ra phản lực ở gối A trong trạng thái giới hạn bằng cách viết phương trình lấy mô men tại D của phần dầm DA:

$$\sum M_D = Y_A \cdot \frac{l}{2} - M_d = 0$$

Vậy
$$Y_A = \frac{2M_d}{l}$$

-Ta tiếp tục xét phương trình mô men lấy với điểm B trong đoạn AB. Ta sẽ có:

$$\sum M_B = P_{\text{gh}} \times \frac{l}{2} - Y_A \cdot l + M_d - M_d - M_d = 0$$

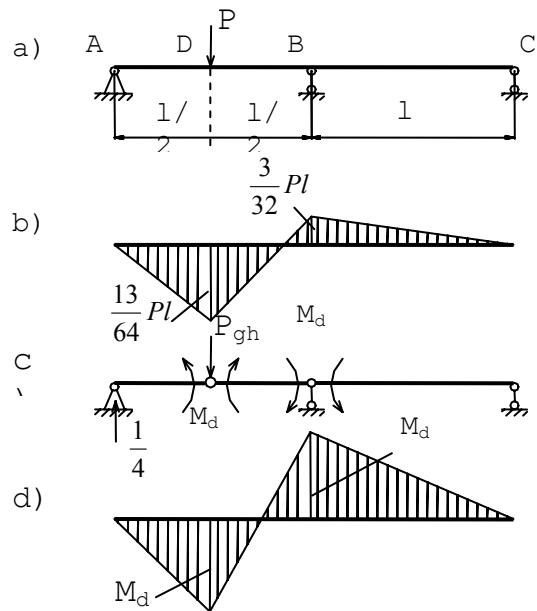
Suy ra:
$$P_{\text{gh}} = \frac{6M_d}{l}$$

Trong đó: $M_d = \sigma_{\text{ch}} \times W_d$, vậy
$$P_{\text{gh}} = \frac{6\sigma_{\text{ch}} \cdot W_d}{l}$$

Cũng lấy hệ số an toàn như trên, ta có:

$$[P]_d = \frac{6[\sigma]}{l} W_d$$

So sánh kết quả của hai phương pháp trên ta có:



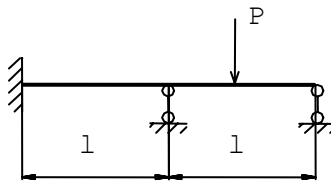
Hình 20.14: Tính tải trọng cho phép của một dầm

$$\frac{[P]_d}{[P]_{\text{âPh}}} = \frac{6[\sigma]}{1} \cdot \frac{13l}{64[\sigma]} \cdot \frac{W_d}{W_{dh}} = 1,22m$$

Trong đó : $m = \frac{W_d}{W_{dh}}$ là tỉ số so sánh khả năng chịu lực của mặt cắt tính theo hai phương pháp trên .

CÂU HỎI TỰ HỌC:

- 20.1. Phân tích sự khác biệt của hai phương pháp tính theo trạng thái giới hạn và phương pháp tính theo ứng suất cho phép?
- 20.2. Nêu tính chất của vật liệu theo sơ đồ đàn-dẻo, dẻo lí tưởng. Vì sao phải xây dựng các sơ đồ này ?
- 20.3. Khi tính theo trạng thái giới hạn thì khi nào có khớp dẻo. Sự phá huỷ công trình có liên hệ gì đến việc hình thành và phát triển khớp dẻo.
- 20.4. Bài toán kéo (nén) khi nào phải sử dụng phương pháp trạng thái giới hạn.
- 20.5. Sự khác nhau của bài toán uốn thuần tuý và uốn ngang phẳng khi tính theo TTGH
- 20.6. Hãy tìm lực giới hạn P_{gh} của một dầm chịu lực như trên hình vẽ 20.15.



Hình 20.15



TẤM VÀ VỎ

Như đã nói ở phần mở đầu: Thanh mới là đối tượng nghiên cứu chính của môn học sức bền vật liệu, nhưng trong kĩ thuật còn xuất hiện nhiều kết cấu có hình dáng khác như tấm, vỏ, thanh mỏng hay những bài toán về khối.... Tấm và vỏ là những bài toán về cơ học và thường gặp trong các lĩnh vực xây dựng, cơ khí, hoá học... vì vậy chúng tôi mạnh dạn giới thiệu vấn đề cơ bản nhất của lí thuyết về tấm và vỏ. Cũng cần nói thêm rằng: lí thuyết về tấm và vỏ là rất rộng lớn, nó đã và đang được nhiều nhà bác học nghiên cứu. Tập sách của X.P. Timôsenkô, X. Voinovski Krige đã được một số nhà khoa học Việt nam dịch và xuất bản năm 1971 với độ dày 665 trang. Cho nên chúng tôi nghĩ rằng chương tấm và vỏ này chỉ trang bị cho sinh viên một số khái niệm nào đó về tấm, vỏ. Chúng tôi cũng chỉ mới chọn lọc một số dạng bài toán thường gặp để giới thiệu trong giáo trình này.

Tấm và vỏ là những vật thể có kích thước theo một phương rất bé so với hai phương kia. Kích thước đó được gọi là bề dày của tấm và vỏ. Mặt quỹ tích cách đều hai mặt giới hạn của chúng được gọi là mặt trung gian. Nếu mặt trung gian là phẳng thì ta gọi vật thể là tấm, nếu mặt trung gian đó là mặt cong thì ta gọi vật thể đó là vỏ. Cũng căn cứ vào hình dáng của mặt trung gian đó mà gọi là tấm tròn, tấm vuông, tấm chữ nhật... hay vỏ cầu, vỏ trụ, vỏ tròn xoay... Người ta còn căn cứ vào tỉ lệ bề dày của tấm, vỏ để xác định ra loại tấm, vỏ mỏng hay tấm, vỏ dày.

- Nếu $\frac{\delta}{l_{\min}} > \frac{1}{5}$ thì gọi là tấm, vỏ dày.

- Nếu $\frac{\delta}{l_{\min}} < \frac{1}{5}$ thì gọi là tấm, vỏ mỏng.

Trong đó l_{\min} là cạnh ngắn nhất của tấm hay vỏ.

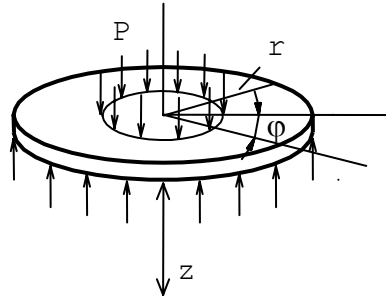
Bề dày của tấm, vỏ có thể thay đổi, nhưng cũng có thể là không đổi. Thường thì các kết cấu tấm và vỏ có bề dày δ không đổi nên ta chú tâm nghiên cứu các loại này.

Khi giải các bài toán về tấm và vỏ chúng ta cố gắng diễn giải vấn đề gần với kiến thức mà chúng ta đã học ở các phần trên. Chúng ta nghiên cứu trước các bài toán về tấm.

21.1. TẤM TRÒN CHỊU UỐN.

Hãy xét tấm tròn có chiều dày không đổi chịu uốn dưới tác dụng của các tải trọng có phương vuông góc với mặt phẳng trung gian và phân bố đối xứng qua trục của tấm, xem hình 21.1.

Hình dạng của mặt sau khi biến dạng được gọi là mặt đàn hồi (hình 21.2). Gọi w là thành phần chuyển vị thẳng đứng của điểm trên mặt trung gian. Ta giả sử w là rất bé so với chiều dày của tấm ($w/h \leq 1/5$), khi đó ta có thể bỏ qua thành phần chuyển vị theo hướng kính và xem w như chuyển vị toàn phần. Sử dụng hệ toạ độ trụ với trục z trùng với trục của tấm, r và φ là bán kính và toạ độ góc của các điểm trong mặt trung gian, khi chưa biến dạng thì w lại là hàm của r (w không phụ thuộc vào φ vì lí do đối xứng). w phụ thuộc vào vị trí mỗi điểm trên mặt trung gian nên phương trình của nó cũng là phương trình mặt trung gian. Để đơn giản việc tính toán, ta thừa nhận giả thiết của Kiéc-hốp về pháp tuyến của mặt trung gian như sau:



Hình 21.1: Tấm tròn chịu

tác dụng của tải

Ta xem rằng các điểm vật rắn nằm trên đường pháp tuyến của mặt trung gian sau biến dạng sẽ dịch chuyển đến các vị trí mới trên pháp tuyến tương ứng của mặt đàn hồi. Nói một cách khác, pháp tuyến của mặt trung gian không bị biến dạng trong quá trình tấm chịu lực.

Giả thiết này đóng vai trò quan trọng như giả thiết về mặt cắt phẳng của Becnuli trong lý thuyết về uốn của thanh.

Như vậy pháp tuyến của mặt cắt trung gian bị xoay đi một góc ζ trong quá trình tấm biến dạng (hình 21.2). Vì lý do đối xứng nên góc xoay đó hướng về trục của tấm và tương tự đối với thanh, góc xoay ζ là đạo hàm của độ võng w :

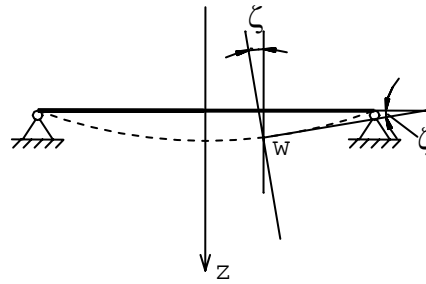
$$\zeta = \frac{dw}{dr} \quad (21-1)$$

Độ võng càng bé khi ζ càng bé.

Bây giờ ta hãy tách một phân tử vô cùng bé ra khỏi tấm bằng các mặt cắt sau đây: hai mặt cắt đi qua trục của tấm tạo với nhau một góc $d\varphi$, hai mặt trụ có bán kính r và $r+dr$. Phân tử được biểu diễn trên hình 21.3.

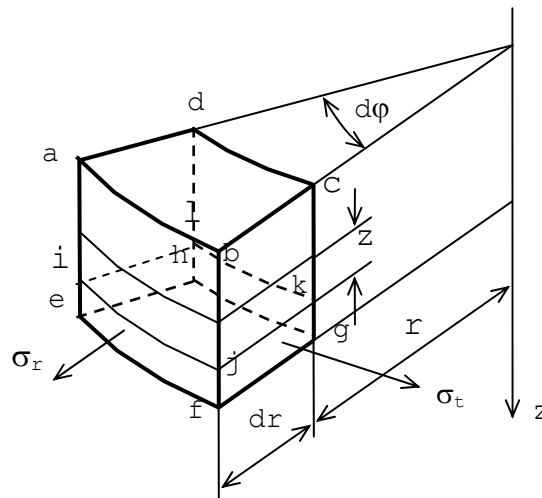
Ta hãy tính biến dạng của lớp mỏng (ijkl) song song với mặt trung gian.

Sau biến dạng mặt trung gian trở thành mặt cong, các pháp tuyến bf và cg trở thành đường b'f' và c'g', xem hình 21.4.

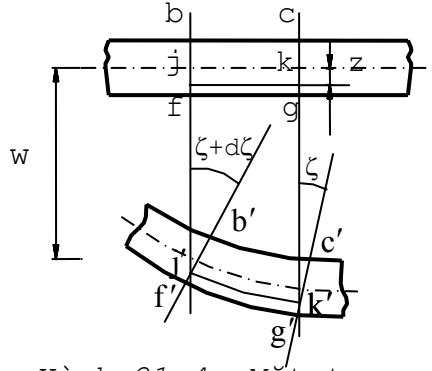


Hình 21.2: Hình dạng mặt tấm sau

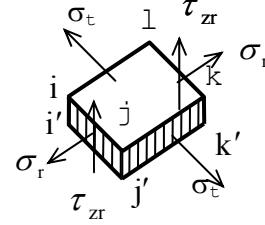
biến dạng



Hình 21.3: Phân tử tính biến dạng



Hình 21.4: Mặt trung gian trước và sau biến dạng



Hình 21.5: Sơ đồ ứng suất trên một lớp mỏng

Góc xoay của cg là góc ζ gồm giữa cg và c'g'. Góc xoay của bf sẽ là $\zeta+d\zeta$, góc gồm giữa bf và b'f'. Biến dạng dài theo phương bán kính ε_r là biến dạng tỉ đối của thớ jk.

$$\varepsilon_r = \frac{z(\zeta + d\zeta) - z\zeta}{dr} = z \frac{d\zeta}{dr} \quad (21-2)$$

Biến dạng theo phương vòng được tính bởi độ giãn của đường kính tròn đi qua kl. Chiều dài của đường tròn trước khi biến dạng là $2\pi r$ và sau khi biến dạng là $2\pi(r + z\xi)$.

Vậy:

$$\varepsilon_r = \frac{2\pi(r + z\xi) - 2\pi r}{2\pi r} = z \frac{\xi}{r} \quad (21-3)$$

Sử dụng hai mặt cắt ijkl và i'j'k'l' song song với nhau ta có thể tách từ phân tử trên một lớp mỏng (xem hình 21.5).

Ta thừa nhận rằng ứng suất pháp trên các mặt cắt song song với mặt trung gian là bằng không. Điều thừa nhận này tương đương với việc thừa nhận giả thiết về các lớp không ép lên nhau trong quá trình tấm biến dạng. Từ định luật Hooke, ta có:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu\sigma_t] \quad ; \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu\sigma_r]$$

Hay có thể biểu diễn ứng suất qua các thành phần biến dạng:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t) \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r) \end{aligned} \right\} \quad (21-4)$$

Thay các trị số của ε_r và ε_t của (21-4) vào (21-2) và (21-3), ta được :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d\zeta}{dr} + \mu \frac{\zeta}{r} \right) \\ \sigma_t &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\zeta}{r} + \mu \frac{d\zeta}{dr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21-5)$$

(Những phương trình này có phần giống như các biểu thức biến dạng, ứng suất trong ống dày đã nghiên cứu).

Mối tương quan giữa nội lực và ứng suất cũng cần được xem xét.

Ta xét lại phân tử abcdefgh. Vì lí do đối xứng nên trên các mặt cắt đi qua trục của tấm (mặt bcgf và adhe) không thể có ứng suất tiếp, nghĩa là không có lực cắt. Trên các mặt cắt trụ abfe và dcgh ta có các ứng suất τ_{rz} , nghĩa là có thành phần lực cắt Q . Thành phần lực cắt này cân bằng với tải trọng đặt trên diện tích abcd. Ngoài thành phần lực cắt đó ta còn có các thành phần mô men uốn M_r và M_t (Q, M_r, M_t là các thành phần nội lực trên đơn vị độ dài), hình 21.6.

Tương quan giữa nội lực và ứng suất là:

$$M_r \cdot r d\varphi = r \cdot d\varphi \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cdot z dz \quad ; \quad M_t \cdot dr = dr \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_t \cdot z dz$$

Đưa các biểu thức tính ứng suất từ (21-5) vào ta có:

$$M_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{d\zeta}{dr} + \mu \frac{\zeta}{r} \right) \cdot \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

$$M_t = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{\zeta}{r} + \mu \cdot \frac{d\zeta}{dr} \right) \cdot \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz$$

Biểu thức tích phân: $\int_{-h/2}^{h/2} z^2 \cdot dz = \frac{h^3}{12}$

Từ đó ta suy ra:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= D \cdot \left(\frac{d\zeta}{dr} + \mu \cdot \frac{\zeta}{r} \right) \\ M_t &= D \cdot \left(\frac{\zeta}{r} + \mu \cdot \frac{d\zeta}{dr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (21-6)$$

Trong đó :

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (21-7)$$

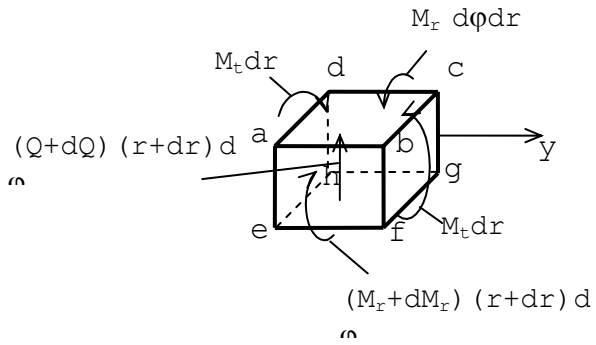
D được gọi là độ cứng khi uốn của tấm. Chiều tất cả các lực lên phương của trục đối xứng, ta có:

$$(Q + dQ)(r + dr)d\varphi - Q \cdot r d\varphi - p \cdot r d\varphi \cdot dr = 0$$

Do đó: $p \cdot r = \frac{d}{dr}(Q \cdot r) \quad (21-8)$

Lấy tổng mô men của các lực đối với trục y , trục tiếp tuyến với đường tròn r trên mặt trung gian, ta có:

$$(M_r + dM_r)(r + dr)d\varphi - M_r r \cdot d\varphi - p \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot \frac{dr}{2} - M_t \cdot dr \cdot d\varphi + (Q + dQ)d\varphi \cdot dr = 0$$



Hình 21.6: Sơ đồ tính ứng suất

Bỏ qua các lượng vô cùng bé bậc cao, cuối cùng ta được:

$$M_t - \frac{d}{dr}(M_r \cdot r) = Q \cdot r \quad (21-9)$$

Vì lí do đối xứng nên tất cả các phương trình cân bằng khác luôn thoả mãn.

Đem các trị số M_t và M_r từ (21-6) vào (21-9) và giả thiết D là hằng số, ta nhận được phương trình vi phân:

$$r \cdot \frac{d^2 \zeta}{dr^2} + \frac{d\zeta}{dr} - \frac{\zeta}{r} = -\frac{Q \cdot r}{D}$$

Hay có thể viết dưới dạng:

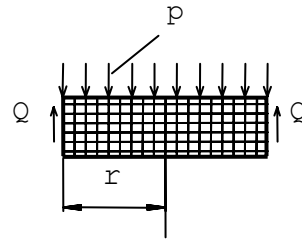
$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (\zeta \cdot r) \right] = -\frac{Q}{D} \quad (21-10)$$

Như vậy để có ζ ta chỉ việc tích phân hai lần biểu thức (21-10), ta có:

$$\zeta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{D \cdot r} \int [r \int Q dr] dr \quad (21-11)$$

Trong đó C_1 và C_2 là các hằng số tích phân được xác định từ điều kiện biên của từng trường hợp cụ thể.

Trị số lực cắt Q được xác định từ phương trình (21-8) hay đơn giản hơn, ta tách ra một phần của tấm, bằng một mặt trụ bán kính r (hình 21.7) và xét sự cân bằng của phần đó.



Hình 21.7: Sơ đồ tính lực cắt Q

Khi đã xác định được ζ ta sẽ xác định được các mô men M_r và M_t theo (21-6) và có thể viết được phương trình của mặt đàn hồi w theo (21-1).

So sánh biểu thức (21-5) và (21-6) ta tìm được biểu thức của ứng suất:

$$\sigma_r = \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \cdot \frac{M_r}{D} \quad ;$$

$$\sigma_t = \frac{E \cdot z}{1 - \mu^2} \cdot \frac{M_t}{D}$$

Thay trị số D từ (21-7) vào ta có:

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3} \cdot z \quad ; \quad \sigma_t = \frac{12M_t}{h^3} \cdot z$$

Trị số của ứng suất cực trị tại mặt trên và mặt dưới của tấm sẽ là:

$$\sigma_r^{\max} = \pm \frac{6M_r}{h^2} \quad ; \quad \sigma_t^{\max} = \pm \frac{6M_t}{h^2} \quad (21-12)$$

Ví dụ 1: Xác định độ võng và ứng suất trong tấm chịu tải trọng phân bố đều p ở hai trường hợp: khi tấm chịu ngàm chung quanh và khi tấm tựa trên các gối đỡ tự do. Gọi R là bán kính và h là chiều dày của tấm (xem hình 21.8).

Bài giải: Trị số của lực Q được xác định một cách đơn giản bằng cách sử dụng mặt cắt trụ bán kính r để tách một phần tấm. Dù liên kết ở bên ngoài như thế nào, từ điều kiện cân bằng của phần tấm ta đều có:

$$Q \cdot 2\pi r = p\pi \cdot r^2 \text{ hay } Q = \frac{pr}{2}$$

- Đưa trị số đó vào biểu thức (21-11) ta có được biểu thức của góc xoay:

$$\zeta = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} - \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D}$$

Với điều kiện góc xoay tại tâm của tấm là bằng không, ta xác định được $C_2=0$, vậy biểu thức của góc xoay được rút gọn lại:

$$\zeta = C_1 \cdot r - \frac{p \cdot r^3}{16 \cdot D} \quad (a)$$

Bây giờ ta hãy xét các trường hợp liên kết khác nhau. Trường hợp thứ nhất khi tấm chịu ngàm chung quanh. Điều kiện biên sẽ là $r=R$ thì $\zeta=0$. Từ đó ta tính được:

$$C_1 = \frac{pR}{16D} \quad ; \quad \zeta = \frac{p}{16D} (R \cdot r - r^2)$$

Theo công thức (21-6), ta có:

$$M_r = \frac{p}{16} [R^2(1+\mu) - r^2(3+\mu)]$$

$$M_t = \frac{p}{16} [R^2(1+\mu) - r^2(1+3\mu)]$$

Căn cứ biểu thức (21-1) ta tiến hành tích phân biểu thức (a) theo r , ta có phương trình của mặt đàn hồi:

$$w = \frac{p}{16D} \left[C_3 - \frac{1}{2} R^2 r^2 + \frac{r^4}{4} \right]$$

trong đó C_3 là hằng số tích phân được xác định từ điều kiện độ võng tại mép ngoài của tấm là bằng không, nghĩa là khi $r=R$ thì $w=0$. Từ đó ta có:

$$C_3 = \frac{1}{4} \cdot R^4$$

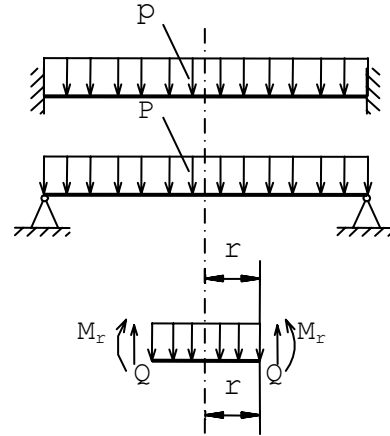
$$w = \frac{p}{64D} \cdot (R^2 - r^2)^2$$

- Đối với trường hợp thứ hai khi tấm được đặt trên các gối tựa, khi đó ứng suất σ_r (hay mô men uốn M_r) tại mép là bằng không. Theo (21-6) ta có:

$$\frac{d\zeta}{dr} + \mu \cdot \frac{\zeta}{r} = 0$$

Thay biểu thức của ζ vào ta có:

$$C_1 - \frac{3pR^2}{16D} + \mu \cdot \left(C_1 - \frac{pR^2}{16D} \right) = 0$$



Hình 21.8: Tấm chịu tải trọng phân bố đều khi chịu ngàm và khi đặt trên gối đỡ tự do

Từ đó ta tìm thấy:

$$C_1 = \frac{pR^2}{16D} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu}; \quad \zeta = \frac{p}{16D} \cdot \left[\frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot R^2 \cdot r - r^3 \right]$$

Đưa các hằng số tích phân đã xác định vào các biểu thức tính M_r và M_t , ta có:

$$M_r = \frac{p}{16} \cdot (3+\mu)(R^2 - r^2)$$

$$M_t = \frac{p}{16} \cdot (3+\mu) \left(R^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} \cdot r^2 \right)$$

Phương trình của mặt đàn hồi có dạng:

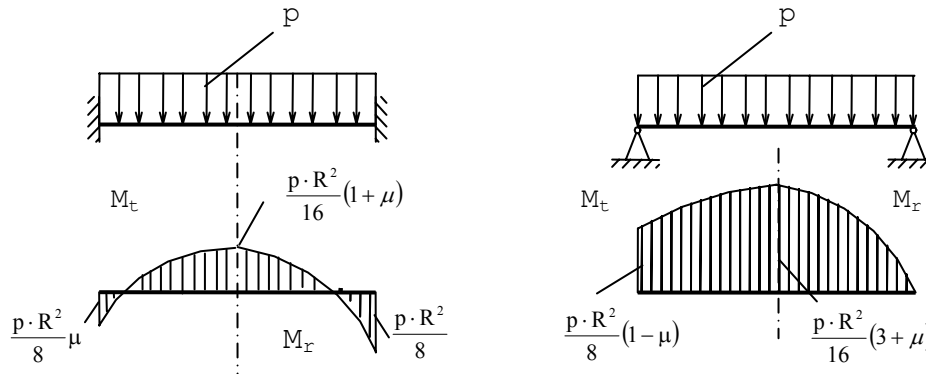
$$w = \frac{p}{16D} \cdot \left[C_3 - \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{R^2 r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \right]$$

Hằng số C_3 được xác định từ điều kiện độ võng tại mép là bằng không. Ta có:

$$C_3 = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{5+\mu}{1+\mu}$$

$$w = \frac{p}{16D} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{5+\mu}{1+\mu} \cdot R^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot R^2 r^2 + \frac{1}{4} \cdot r^4 \right]$$

Biểu đồ mô men trong hai trường hợp được biểu diễn trên hình 21.9.



Hình 21.9: Biểu đồ mô men M_t và M_r khi tấm bê tông hai ngàm và khi tấm bê tông hai gối

(Do tính chất đối xứng nên các nội lực chỉ cần biểu diễn trên một nửa của tấm. Ở đây bên trái là M_t và bên phải là M_r).

Ứng suất pháp lớn nhất xuất hiện tại ngàm. Tại đó chúng ta có:

$$\sigma_1 = \sigma_r = \frac{2p \cdot R^2}{16} \cdot \frac{6}{h^2}; \quad \sigma_2 = \sigma_t = \frac{2\mu \cdot p \cdot R^2}{16} \cdot \frac{6}{h^2}; \quad \sigma_3 = 0$$

Vậy ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất sẽ là:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{p \cdot R^2}{h^2}$$

Trong trường hợp tấm tựa trên các gối tựa thì ứng suất lớn nhất ở tâm. Tại đó, ta có:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_t = \sigma_r = \frac{3 + \mu}{16} \cdot \frac{6p \cdot R^2}{h^2}; \quad \sigma_3 = 0$$

Ứng suất tương đương là:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{3}{8}(3 + \mu) \cdot \frac{p \cdot R^2}{h^2}$$

Cả hai trường hợp đều có độ võng lớn nhất ở giữa tấm.

Với trường hợp thứ nhất:

$$w_{\max} = \frac{pR^4}{64D}$$

Với trường hợp thứ hai:

$$w_{\max} = \frac{5 + \mu}{1 + \mu} \cdot \frac{pR^4}{64D}$$

Ví dụ 2: Xác định độ võng và ứng suất lớn nhất trong tấm tròn chịu ngàm chung quanh và lực tập trung P ở chính giữa, (hình 21.10).

Bài giải: Trước tiên ta xác định trị số của lực cắt Q.

Giống như ví dụ trước, ta có:

$$Q = \frac{p}{2\pi \cdot r}$$

Do đó ta có :

$$\zeta = C'_1 \cdot r + \frac{C'_2}{r} - \frac{p}{4\pi \cdot D} \cdot r \cdot \ln \frac{r}{R}$$

Ở tại tâm ($r=0$), góc $\zeta=0$; do đó $\lim_{r \rightarrow 0} \left(r \cdot \ln \frac{r}{R} \right) = 0$, từ đó ta suy ra $C'_2 = 0$. Hằng số

C'_1 được xác định từ điều kiện biên khi $r=R$, $\zeta=0$. Với điều kiện đó ta cũng tìm thấy

$C'_1 = 0$, do đó:

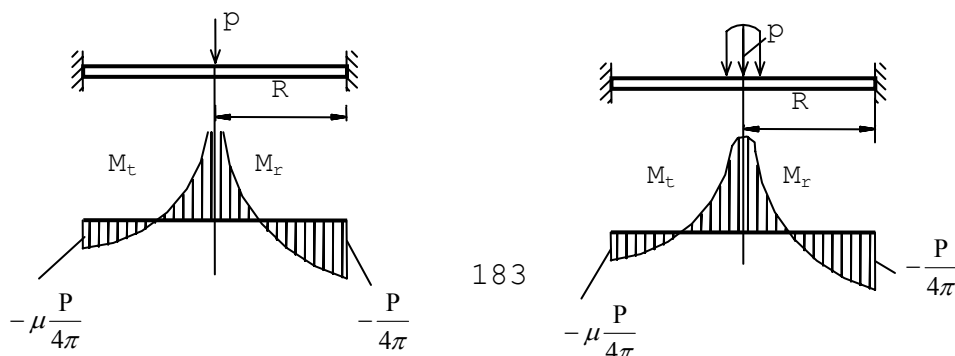
$$\zeta = \frac{p}{4\pi D} \cdot r \cdot \ln \frac{R}{r}$$

Vậy biểu thức các mô men uốn sẽ là:

$$M_r = \frac{p}{4\pi} \left[(1 + \mu) \cdot \ln \frac{R}{r} - 1 \right]$$

$$M_t = \frac{p}{4\pi} \left[(1 + \mu) \cdot \ln \frac{R}{r} - \mu \right]$$

Biểu đồ mô men uốn được biểu diễn trên hình 21.10. Ta thấy tại giữa tấm mô men uốn có trị số tăng lên vô cùng vì tại đây trị số lực cắt tăng lên vô cùng và điểm ở tâm trở nên điểm đặc biệt.



Trong thực tế không có lực tập trung tại một điểm, lực tập trung chỉ có trong sơ đồ để tính, bao giờ lực cũng đặt trên một diện tích nào đó, vì vậy trị số M_r và trị số M_t là hữu hạn, (hình 21.11).

Độ võng tại tâm của tấm có một trị số xác định.

$$w = C_3 - \frac{p \cdot r^2}{8\pi D} \cdot \left(\ln \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \right)$$

Từ điều kiện $r=R, w=0$, ta có: $C_3 = \frac{p \cdot R^2}{16\pi \cdot D}$

Do đó: $w = \frac{p}{8\pi \cdot D} \cdot \left[\frac{1}{2}(R^2 - r^2) - r^2 \cdot \ln \frac{R}{r} \right]$

Độ võng tại tâm là:

$$w_{\max} = \frac{p \cdot R^2}{16\pi \cdot D}$$

Ví dụ 3: Vẽ biểu đồ mô men uốn cho tấm chịu lực tác dụng tải trọng P phân bố đều trên đường tròn bán kính a (hình 21.12) và bị ngâm chung quanh.

Bài giải: Ta có hai miền rõ rệt: phần bên trong đường tròn đường kính $2a$ và phần bên ngoài.

Phần bên trong trị số lực cắt $Q=0$, do đó phương trình góc xoay sẽ có dạng:

$$\zeta_1 = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

Vì tại tâm $\zeta_1 = 0$, nên ta xác định ngay được $C_2=0$, do đó:

$$\zeta_1 = C_1 r \quad (1)$$

Ở phần ngoài trị số lực Q sẽ là:

$$Q = \frac{p}{2\pi r}$$

Từ đó ta có phương trình góc xoay là:

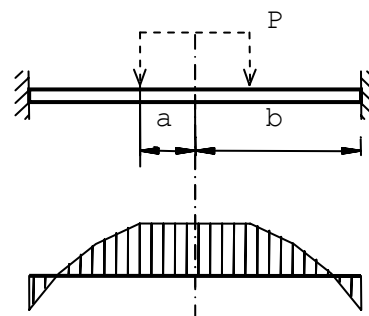
$$\zeta_2 = C'_2 r + \frac{C'_1}{r} - \frac{p}{4\pi D} r \ln \frac{r}{a} \quad (2)$$

Các hằng số C_1, C'_1 và C'_2 được xác định từ điều kiện liên kết của hai miền.

Với $r = a$: $\zeta_1 = \zeta_2$ và $M_{r1} = M_{r2}$.

Với $r = b$: $\zeta_2 = 0$.

Từ đó ta có hệ thống ba phương trình:



Hình 21.12: Sơ đồ tính mô men tấm tròn chịu lực phân bố đều

$$\left. \begin{aligned} C_1 a &= C_1' a + \frac{C_2'}{a} \\ C_1 &= C_1' - \frac{C_2'}{a^2} - \frac{p}{4\pi D} \\ C_1' b + \frac{C_2'}{b} - \frac{pb}{4\pi D} \ln \frac{b}{a} & \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Phương trình thứ hai của hệ thống đó thiết lập từ điều kiện $M_{r_1} = M_{r_2}$, có nghĩa là:

$$\left(\frac{d\zeta_1}{dr} + \mu \zeta_1 \right)_{r=a} = \left(\frac{d\zeta_2}{dr} + \mu \zeta_2 \right)_{r=a}$$

Giải hệ phương trình, ta tìm thấy :

$$C_1 = \frac{p}{4\pi D} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$C_1' = \frac{p}{4\pi D} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right)$$

$$C_2' = -\frac{pa^2}{8\pi D}$$

Từ đó ta tìm mô men uốn ở các miền như sau:

$$\text{Ở miền trong: } M_r = M_t = \frac{p(1+\mu)}{4\pi} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} - \frac{1}{2} \right) = \text{const}$$

$$\text{Ở miền ngoài: } M_r = \frac{p}{4\pi} \left[(1+\mu) \left(\ln \frac{b}{r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right) + \frac{a^2}{2r^2} (1-\mu) - 1 \right]$$

$$M_t = \frac{p}{4\pi} \left[(1+\mu) \left(\ln \frac{b}{r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right) - \frac{a^2}{2r^2} (1-\mu) - \mu \right]$$

Biểu đồ được biểu diễn trên hình 21.12

21.2. TẤM CHỮ NHẬT CHỊU UỐN.

Khi xét tấm tròn chịu uốn ta chỉ gặp các hàm chịu ứng suất và chuyển vị với một biến số. Trong bài toán này ta gặp các hàm số với hai biến số. Đó là khó khăn khi giải bài toán.

Các giả thiết mà ta đã sử dụng để giải cho bài tấm tròn chịu uốn đều được sử dụng để giải với bài toán tấm chữ nhật chịu uốn như giả thiết của Kiếc-hốp về đường pháp tuyến cũng như thừa nhận biến dạng và chuyển vị là rất bé so với chiều dày của tấm. Ta thiết lập phương trình vi phân cơ bản của tấm trong hệ tọa độ Đê-các.

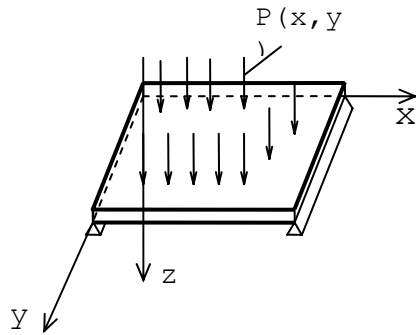
21.2.1. Xét tương quan giữa chuyển vị, biến dạng và ứng suất.

Giả sử có tấm chữ nhật chịu uốn như hình 21.13.

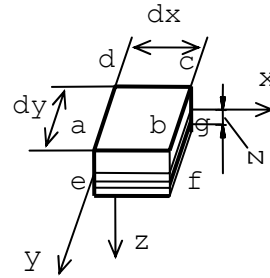
Hệ trục tọa độ được chọn như hình vẽ. Các trục ox , oy nằm trong mặt trung gian khi tấm chưa biến dạng và oz là pháp tuyến của mặt trung gian đó.

Tách một phân tử vô cùng bé bởi các mặt cắt song song với các mặt cắt toạ độ xoz và yoz. Phân tử được biểu diễn như trên hình 21.14.

Cũng như trên, ta xét các biến dạng theo phương x và y của một lớp ijkl (hình

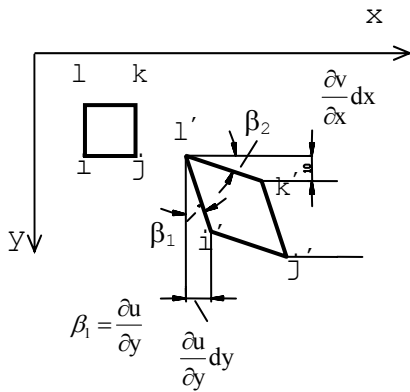


Hình 21.13: Tấm chữ nhật chịu uốn



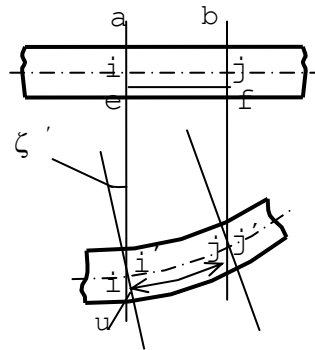
Hình 21.14: Phân tử tính nội lực

21.15) cách mặt trung gian một khoảng z.



Gọi ζ là góc xoay của pháp tuyến ac (hình 21.16). Tương quan giữa ζ và độ võng w là:

Hình 21.15: sơ đồ tính biến dạng



Hình 21.16: Sơ đồ tính góc xoay

$$\zeta = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Góc xoay của pháp tuyến bf sẽ có trị số là:

$$\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot dx$$

Vậy biến dạng theo phương x là:

$$\epsilon_x = z \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (21-13)$$

Tương tự ta có:

$$\epsilon_y = z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (21-14)$$

Xét đến biến dạng góc trong lớp ijkl. Gọi u và v là chuyển vị của các điểm.

Theo phương x và y, ta có

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

Tương quan giữa u, v và w là như sau:

$$u = z \cdot \zeta = z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = z \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

Từ đó ta có :

$$\gamma_{xy} = 2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (21-15)$$

Cũng như trên, các tương quan định luật Hooke, được viết dưới dạng:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot 2(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot 2(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \gamma_{xy}$$

Thay các trị số ε_x , ε_y và γ_{xy} được tính từ (21-13), (21-14), (21-15) vào đây ta có :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} &= -\frac{E \cdot z}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (21-16)$$

Ngoài thành phần τ_{xy} , trên các mặt cắt còn có các ứng suất tiếp τ_{yz} và τ_{xz} hướng theo phương trục z. Ở đây chúng ta cũng thừa nhận giả thiết về các lớp không ép lên nhau trong quá trình tấm biến dạng.

21.2.2. Các thành phần nội lực và phương trình cân bằng.

Trên mỗi mặt cắt của phân tố đều có đủ sáu thành phần nội lực: lực kéo, lực cắt theo phương thẳng đứng, lực cắt theo phương ngang, các mô men uốn và mô men xoắn. Song mô men uốn nằm trong mặt phẳng trung gian có trị số quá bé nên có thể xem bằng không. Thực vậy khi dx và dy là những lượng vô cùng bé và có thể xem ứng suất pháp phân bố dọc theo dx và dy là phân bố đều nên nó không sinh ra các mô men.

Ta cũng dễ dàng chứng minh rằng các lực kéo và lực cắt theo phương x và y là bằng không. Ta có:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot dy \cdot dz = -\frac{E \cdot dy}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot dz = 0$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot dx \cdot dz = -\frac{E \cdot dx}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot dz = 0$$

$$S_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot dx \cdot dz = -\frac{E \cdot dx}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot dz = 0$$

$$S_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \cdot dy \cdot dz = -\frac{E \cdot dy}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot dz = 0$$

Do đó trên các mặt cắt của phân tố ta chỉ còn lại ba thành phần nội lực: mô men uốn M_x hoặc M_y , mô men xoắn M_{xy} và các thành phần lực cắt Q_x ; Q_y (Một lần nữa ta

nhắc lại rằng $M_x, M_y; M_{xy}$ và Q_x, Q_y là cường độ các thành phần nội lực trên đơn vị dài).
Ta có các biểu thức tương quan giữa ứng suất và nội lực như sau:

$$M_x \cdot dy = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dy \cdot zdz; \quad M_y \cdot dx = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dx \cdot zdz$$

$$M_{xy} \cdot dy = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dy \cdot zdz; \quad M_{yx} \cdot dx = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dx \cdot zdz$$

Hay
$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot zdz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot zdz; \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \cdot zdz$$

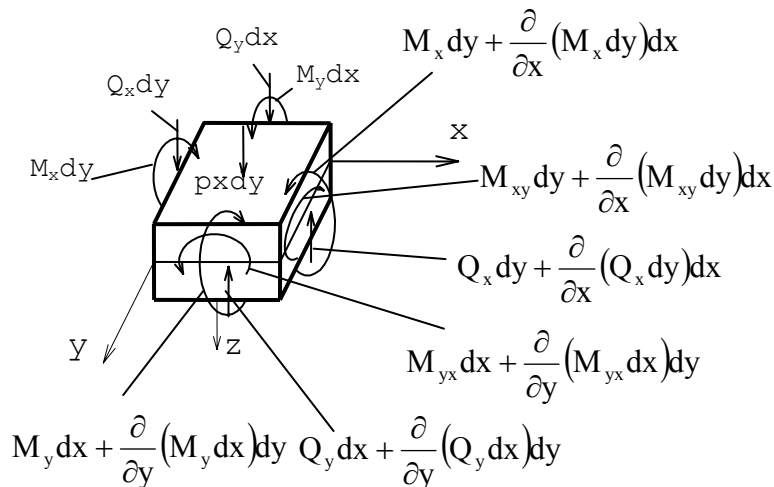
Đem thay các trị số của ứng suất (21-16) vào đây ta được:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= M_{yx} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (21-17)$$

Trong đó: $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)}$ (21-18), được gọi là độ cứng khi uốn của tấm.

Các thành phần nội lực cũng như ngoại lực đặt trên phân tố được biểu diễn trên hình 21.17. Chiều của nội lực trên phân tố được quy ước là dương như trên hình vẽ.

Chuyển từ mặt này sang mặt cắt kia, các thành phần nội lực có giá số được trình bày như trên hình 21.17.



Hình 21.17: Sơ đồ biểu diễn các thành phần nội lực và ngoại lực

Chiếu tất cả các lực đặt trên phân tố xuống trục z và lấy tổng mô men của các lực đối với trục x và trục y ta được các phương trình cân bằng sau đây:

$$\left. \begin{aligned} p dx dy + Q_x \cdot dy - \left[Q_x dy + \frac{\partial}{\partial x} (Q_x dy) dx \right] + \\ + Q_y dx - \left[Q_y dx + \frac{\partial}{\partial y} (Q_y dx) dy \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} M_y dx + \frac{\partial}{\partial y} (M_y dx) dy - M_y dx + \left[Q_y dx + \frac{\partial}{\partial y} (Q_y dx) dy \right] - \\ - M_{xy} dy + \left[M_{xy} dy + \frac{\partial}{\partial x} (M_{xy} dy) dx \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x dy - \left[M_x dy + \frac{\partial}{\partial x} (M_x dy) dx \right] - \left[Q_x dy + \frac{\partial}{\partial x} (Q_x dy) dx \right] dx - \\ - \left[M_{yx} dx + \frac{\partial}{\partial y} (M_{yx} dx) dy \right] + M_{yx} dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Sau khi rút gọn, ba phương trình trên có dạng:

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \\ Q_y &= -\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \\ Q_x &= -\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (21-19)$$

Đưa (21-17) vào (21-19) với các giả thiết là h và D không phụ thuộc vào x và y , hai biểu thức cuối của (21-19) có thể viết lại như sau:

$$Q_x = D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$Q_y = D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

Dùng kí hiệu toán tử Lapolatxơ ∇^2 ta có thể viết gọn lại như sau:

$$Q_x = D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (21-20)$$

$$Q_y = D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \quad (21-21)$$

Trong đó: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Đưa (21-20) và (21-21) vào phương trình đầu (21-19), ta được:

$$p = D \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 w + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 w \right]$$

Hay viết gọn lại: $P = D \cdot \nabla^2 \cdot \nabla^2 w$ (21-22)

Phương trình đó được viết dưới dạng khai triển như sau :

$$\frac{p}{D} = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \quad (21-23)$$

Phương trình đó được gọi là phương trình của Sôphi Giécmen. Phương trình đó không những dùng cho tấm chữ nhật mà còn đúng với mọi tấm khi sử dụng hệ tọa độ Đề-các với các giả thiết mà ta đã nêu ở trên.

21.2.3. Các điều kiện biên.

Nghiệm tổng quát của phương trình (21-23) gồm có hai phần:

$$w = f(x, y) + \Phi(x, y)$$

Trong đó: $f(x, y)$ là một nghiệm riêng; $\Phi(x, y)$ là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất:

$$\nabla^2 \cdot \nabla^2 w = 0$$

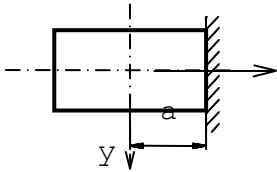
Một hàm φ nào đó mà thoả mãn điều kiện $\nabla^2 w = 0$ thì sẽ được gọi là hàm điều hoà. Cho nên hàm số $\Phi(x, y)$ được gọi là hàm trùng điều hoà. Song không phải tất cả mọi hàm điều hoà thoả mãn phương trình (21-23) đã là nghiệm của bài toán. Chỉ có nghiệm nào thoả mãn các điều kiện biên mới là nghiệm của bài toán và chính đó là khó khăn của bài toán tấm nói chung và hình chữ nhật nói riêng.

Các điều kiện biên là như sau:

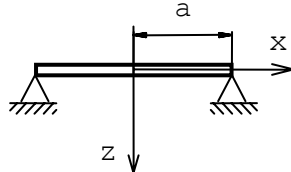
1. Biên là ngàm. Giả sử tấm có ngàm tại hoành độ $x=a$. Tại đó ta phải có hai điều kiện: độ võng và góc xoay theo phương vuông góc với ngàm là bằng không (xem hình 21.18):

$$(w)_{x=a} = 0 \quad (21-24)$$

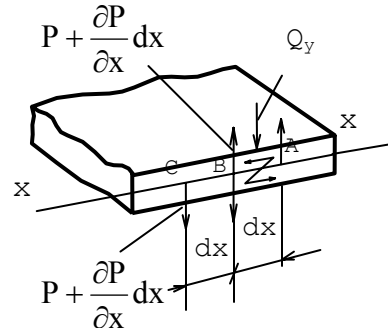
$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} = 0 \quad (21-25)$$



Hình 21.18:
Biên là ngàm



Hình 21.19:
Biên là gối
tựa



Hình 21.20:
Biên tự do

2. Biên đặt trên gối tựa (xem hình 21.19).

Tại đó có hai điều kiện: độ võng bằng không và mô men uốn cũng bằng không. Giả sử biên có vị trí tại $x=a$. Vậy: $(w)_{x=a} = 0$ (21-26)

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (21-27)$$

Chú ý rằng với điều kiện $(w)_{x=a} = 0$ kéo theo $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

Do đó điều kiện (21-27) có thể viết gọn lại là:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ hay } \nabla^2 w = 0 \quad (21-28)$$

3. Biên treo tự do. Khi đó cả ba thành phần ứng suất $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{xy}$ trên các biên đều bằng không. Điều kiện đó tương đương với mô men uốn M_y , lực cắt Q_y và mô men xoắn M_{yx} phải bằng không. Song nếu có cả ba điều kiện thì sẽ mâu thuẫn với giả thuyết về pháp tuyến thẳng. Thực vậy vì đã có M_{yx} thì pháp tuyến không còn thẳng nữa. Do đó để thể hiện cả ba điều kiện thường mô men xoắn M_{xy} được đổi thành lực cắt.

Giả sử trên đoạn $AB=dx$ (hình 21.20) ta có mô men xoắn $M_{xy}dx$. Ta thay mô men xoắn đó bằng một ngẫu lực P ngược chiều:

$$\begin{aligned} P \cdot dx &= M_{xy} dx. \\ \text{Vậy} \quad P &= M_{xy} \end{aligned}$$

Xét đoạn tiếp $BC=dx$. Trên đoạn này mô men xoắn có trị số là $\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) dx$.

Thay nó bằng ngẫu lực $\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \right)$. Vậy trên mỗi đoạn ta có một thành phần lực cắt phụ:

$$Q_1 = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

Tại các điểm ở góc ta có các lực tập trung như $P_1 = M_{yx_1}$ và $P_2 = M_{yx_2}$. Như vậy lực cắt ở các biên sẽ được trừ đi một lượng là:

$$Q_y = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

Do đó các điều kiện $M_{yx}=0$ và $Q_y=0$ được thay bằng một điều kiện duy nhất là:

$$Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0$$

Ta có thể viết: $M_y = 0$ hay $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$

$$Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0 \text{ hay } \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0 \quad (21-29)$$

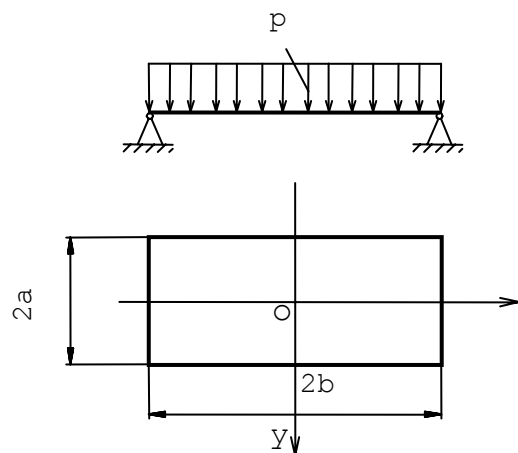
Ví dụ 4: Tính tấm chữ nhật có bốn biên tựa trên các gối tựa và chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều p . Gọi $2a$ và $2b$ là các cạnh dài và ngắn của tấm (xem hình 21.21).

Bài giải: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, vì bài toán có tính chất đối xứng nên hàm biểu diễn theo phương trình của mặt đàn hồi là một hàm chẵn. Điều kiện biên là như sau:

$$\begin{aligned} \text{Với } x=\pm a, w=0, M_x=0, \\ y=\pm b, w=0, M_y=0. \end{aligned}$$

Theo 21-28, ta có:

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=\pm a} = 0 \quad (1)$$



Hình 21.21: Tấm chữ nhật chịu tải phân bố đều đặt trên bốn gối tựa

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=\pm b} = 0 \quad (2)$$

Chọn hàm w dưới dạng:

$$w = f(x) + \sum_{1,3,5,\dots}^n \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi \cdot y}{2a} + B_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi \cdot y}{2a} \right) \sin \frac{n\pi(a+x)}{2a} \quad (3)$$

Trong đó $f(x)$ là một nghiệm riêng (hàm chỉ phụ thuộc vào một biến số). Ta phải chọn A_n và B_n để w thỏa mãn phương trình vi phân $\nabla^2 \nabla^2 w = 0$ và phải là một hàm chẵn. Ngoài ra đối với $x=\pm a$ các số hạng không phụ thuộc vào A_n và B_n phải bằng không. Cả đạo hàm bậc hai theo x hoặc y của nó cũng phải bằng không

Để xác định $f(x)$ ta sử dụng phương trình vi phân (21-23). Thay $f(x)$ vào ta có:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{p}{D}$$

$$\text{Đặt} \quad f(x) = \frac{p}{D} \left(\frac{x^4}{24} + \alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x^2 + \gamma \cdot x + \delta \right)$$

Trong đó $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các hằng số bất kì.

Hàm $f(x)$ phải là một hàm chẵn, vậy $\alpha = \gamma = 0$.

Từ điều kiện (1), ta có:

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=\pm a} = 0 \quad \text{và} \quad [w]_{x=\pm a} = 0$$

Để ý đến tính chất của hàm dưới dấu Σ của (3), ta xác định được:

$$\beta = -\frac{a^2}{4}; \quad \delta = \frac{5a^4}{24}$$

$$\text{Vậy:} \quad f(x) = \frac{p}{D} \left(\frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{4} a^2 \cdot x^2 + \frac{5}{24} a^4 \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó:} \quad w &= \frac{p}{24D} (x^4 - 6a^2 \cdot x^2 + 5a^4) + \\ &+ \sum_{1,3,5,\dots}^n \left(A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{2a} + B_n y \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2a} \right) \sin \frac{n\pi(a+x)}{2a} \end{aligned} \quad (4)$$

Hàm đó với mọi giá trị A_n, B_n đều thỏa mãn điều kiện trên các biên tại $x=\pm a$. Bây giờ ta phải chọn A_n và B_n sao cho thỏa mãn các điều kiện biên với $y=\pm b$. Nghĩa là ta phải

$$\text{có:} \quad [w]_{y=\pm b} = 0 \quad \text{và} \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=\pm b} = 0 \quad (5)$$

Để đạt được điều đó phần đại số ở biểu thức (4) phải được triển khai theo các hàm lượng giác:

$$\frac{p}{24D} (x^4 - 6a^2 x^2 + 5a^4) = \sum_{1,3,5,\dots}^n \alpha_n \sin \frac{n\pi(a+x)}{2a}$$

$$\text{Với} \quad \alpha_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^{+a} f(x) \sin \frac{n\pi(a+x)}{2a} dx$$

Sau khi lấy tích phân ta được:

$$\alpha_n = \frac{32pa^4}{(\pi n)^5 D} (1 - \cos \pi n)$$

Vậy với các trị số n chẵn $\alpha_n=0$ và với các trị số n lẻ:

$$\alpha_n = \frac{64Pa^4}{(\pi n)^5 \cdot D}$$

Do đó w có dạng :

$$w = \sum_{1,3,5,\dots}^n \left[\frac{64pa^4}{(\pi n)^5 \cdot D} + A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n y}{2a} + B_n y \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{2a} \right] \sin \frac{\pi n (a+x)}{2a}$$

Để thoả mãn điều kiện (5) với mọi giá trị của x, hệ số của mỗi số hạng phải thoả mãn, nghĩa là :

$$A_n \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a} + B_n b \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi n b}{2a} = -\frac{64pa^4}{(\pi n)^5 \cdot D}$$

$$A_n \frac{\pi n}{2a} \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a} + B_n \left[2 \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a} + b \frac{\pi n}{2a} \operatorname{sh} \frac{\pi n b}{2a} \right] = 0$$

Từ đó ta tìm thấy:

$$A_n = -\frac{32pa^4}{(\pi n)^5 \cdot D} \frac{2 + \frac{\pi n b}{2a} \operatorname{th} \frac{\pi n b}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a}}$$

$$B_n = \frac{32pa^4}{(\pi n)^5 \cdot D} \frac{\frac{\pi n}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a}}$$

Vậy phương trình của mặt đàn hồi sẽ là:

$$w = \frac{p(1-\mu^2)}{2Eh^3} \left\{ x^4 - 6a^2 x^2 + 5a^4 + \frac{1536a^4}{\pi^4} \sum_{1,3,5,\dots}^n \frac{1}{n^4 \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a}} \times \right.$$

$$\left. \times \left[-\left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \operatorname{th} \frac{\pi n b}{2a} \right) \operatorname{ch} \frac{\pi n y}{2a} + \frac{y}{4a} \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{2a} \right] \sin \frac{\pi n (a+x)}{2a} \right\}$$

Độ võng lớn nhất là tại tâm. Với $x=y=0$, ta có:

$$w_0 = \frac{pa^4(1-\mu^2)}{2Eh^3} \left[5 - \frac{1536}{\pi^4} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^4 \operatorname{ch} \frac{\pi n b}{2a}} \left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \operatorname{th} \frac{\pi n b}{2a} \right) \right]$$

Ta có thể viết gọn lại dưới dạng:

$$w_0 = \xi \frac{pa^4}{Eh^3} \quad (7)$$

Để xác định được các mô men uốn M_x và M_y ta xác định các đạo hàm hạng hai riêng phần của w theo x và y:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{6p(1-\mu^2)}{Eh^3} \left\{ x^2 - a^2 - \frac{128a^4}{\pi^4} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4 \cdot \text{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \times \right. \\ \left. \times \left[-\left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \text{th} \frac{\pi nb}{2a} \right) \text{ch} \frac{\pi ny}{2a} + \frac{y}{4a} \text{sh} \frac{\pi ny}{2a} \right] \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 \sin \frac{\pi n(a+x)}{2a} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{p(1-\mu^2)}{Eh^3} \cdot \frac{768a^4}{\pi^4} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4 \cdot \text{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \times \\ \times \left[-\left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \text{th} \frac{\pi nb}{2a} \right) \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 \text{ch} \frac{\pi ny}{2a} + \frac{1}{2a} \cdot \frac{\pi n}{2a} \text{ch} \frac{\pi ny}{2a} + \frac{y}{4a} \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2 \text{sh} \frac{\pi ny}{2a} \right] \\ \times \sin \frac{\pi n(a+x)}{2a}$$

Theo (21-17) ta có các biểu thức M_x và M_y :

$$M_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]$$

$$M_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

Mô men uốn lớn nhất là tại gốc tọa độ. Trị số của chúng là:

$$M_{x_0} = \frac{pa^2}{2} \left\{ -1 + \frac{32}{\pi^4} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^4 \text{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \left[(1-\mu)(\pi n)^2 \left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \text{th} \frac{\pi nb}{2a} \right) + \mu \pi n \right] \right\}$$

$$M_{y_0} = \frac{pa^2}{2} \left\{ -\mu + \frac{32}{\pi^4} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^4 \text{ch} \frac{\pi nb}{2a}} \left[-(1-\mu)(\pi n)^2 \left(\frac{1}{\pi n} + \frac{b}{4a} \text{th} \frac{\pi nb}{2a} \right) + \pi n \right] \right\}$$

Hay có thể viết gọn lại :

$$M_{x_0} = \chi pa^2; \quad M_{y_0} = \gamma pa^2$$

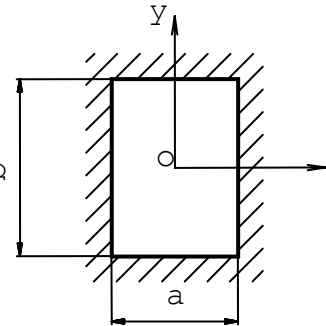
Các hệ số ξ , χ , γ phụ thuộc vào tỉ số b/a . Nếu lấy $\mu=0,30$ ta lập được bảng sau đây (bảng 21.1).

Một cách tương tự như vậy với tấm chịu ngàm chung quanh (hình 21.22), ta tìm thấy độ võng lớn nhất ở tâm:

$$w_0 = \alpha_1 \frac{pa^4}{Eh^3}$$

và mô men uốn lớn nhất là ở giữa cạnh dài, nghĩa là tại $x=\pm a/2$ và $y=0$:

$$M_x^{\max} = \beta_1 \cdot pa^2$$



Hình 21.22: Tấm chịu ngàm chung quanh

Bảng 21.1.

| b/a | ξ | χ | γ |
|-----|-------|--------|----------|
|-----|-------|--------|----------|

| | | | |
|-----|--------|--------|--------|
| 1 | 0,6928 | 0,1916 | 0,1916 |
| 1,2 | 0,9856 | 0,2504 | 0,2004 |
| 1,4 | 1,232 | 0,308 | 0,2024 |
| 1,6 | 1,4496 | 0,3448 | 0,1972 |
| 1,8 | 1,6272 | 0,3792 | 0,1916 |
| 2 | 1,7696 | 0,4068 | 0,1856 |
| 3 | 2,1376 | 0,4756 | 0,1616 |
| 4 | 2,24 | 0,494 | 0,1536 |
| 5 | 2,2656 | 0,4984 | 0,15 |
| 6 | 2,2752 | 0,5 | 0,15 |

Các hệ số α_1, β_1 phụ thuộc vào tỉ số b/a . Nếu lấy $\mu=0,3$ ta có một trị số α_1 và β_1 theo b/a như trong bảng 21.2:

Bảng 21.2

| b/a | 1 | 1,25 | 1,50 | 1,75 | 2 | |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| α_1 | 0,0138 | 0,0199 | 0,0240 | 0,0264 | 0,0277 | 0,0284 |
| β_1 | 0,0513 | 0,0665 | 0,757 | 0,0817 | 0,0829 | 0,0838 |

Ta có thể tìm thấy các trường hợp chịu lực khác của tấm chữ nhật trong các tác phẩm của B.G. Galenski và Timoshenko.

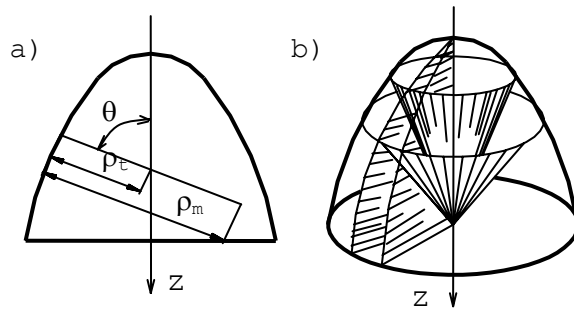
21.3.VỎ MỎNG TRÒN XOAY.

Ta gọi vỏ mỏng tròn xoay là khi mặt trung gian của vỏ có một trục đối xứng. Vì δ nhỏ nên có thể xem ứng suất pháp phân bố đều theo chiều dày của vỏ. Điều đó cũng có nghĩa là bỏ qua ảnh hưởng của thành phần mô men uốn. Cách tính toán dựa vào giả thuyết đó được gọi là lí thuyết không mô men.

Cũng cần nói thêm rằng: trong thực tế có khi có những lực tập trung tác dụng lên một nơi nào đó của vỏ hoặc có vành đai tăng cường, vùng biên chịu ngàm hay có sự thay đổi đột ngột về độ cong, ứng suất do mô men uốn gây nên là rất đáng kể. Song ảnh hưởng của mô men uốn chỉ nằm trong phạm vi rất hẹp. Ở xa các vùng đó ảnh hưởng của mô men uốn là rất bé có thể bỏ qua được.

Khi δ càng nhỏ thì lí thuyết không mô men càng đúng, càng gần với thực tế. Ở đây ta chỉ xem xét trường hợp áp suất tác dụng lên vỏ có tính chất đối xứng, nghĩa là trục đối xứng của vỏ cũng là trục đối xứng của tải trọng. Xét vỏ mỏng tròn xoay chịu áp lực phân bố đều bên trong như hình 21.23.

Gọi ρ_m là bán kính cong của đường kinh tuyến và ρ_1 là bán kính cong của đường vĩ tuyến tại một điểm nào đó trên mặt phẳng trung gian của vỏ mỏng. Các bán kính đó là bán kính chính của mặt cong. Chúng nằm trên pháp tuyến của mặt cong tại điểm đang xét. Gọi θ là góc làm bởi pháp tuyến này với trục đối xứng của vỏ, ρ_m và ρ_1 là những hàm số đối với θ . ρ_t là đoạn đường sinh của mặt nón giới hạn bởi đáy của đường tròn vĩ tuyến và đỉnh là giao điểm của pháp tuyến với trục



Hình 21.23:Vỏ mỏng tròn xoay chịu lực áp lực nhân bố đều

đối xứng của vỏ. ρ_m là bán kính cong của đường kinh tuyến tại điểm đang xét. ρ_m và ρ_t cũng được xác định trên pháp tuyến chung nhưng rõ ràng tâm cong của đường kinh tuyến không nằm trên trục đối xứng của mặt (xem hình 21.23a)

Ta tách ra khỏi vỏ một phần tử bởi các mặt sau đây:

- Hai mặt cắt là hai mặt nón đi qua hai đường vi tuyến rất gần nhau. Chúng có các đường sinh tạo với nhau một góc $d\theta$.

- Hai mặt kinh tuyến tạo với nhau một góc $d\varphi$.

Phần tử được biểu diễn như trên hình 21.23b.

Vệ lẽ do áãúi xãĩng nãĩn cãĩc gĩc vĩaĩng luãn luãn áãũc bãĩo tĩn trong quá trình vỏ biến dạng và vì vậy trên các mặt cắt không có ứng suất tiếp, chỉ có các ứng suất pháp σ_m và σ_t theo phương kinh tuyến và vi tuyến.

Chiếu tất cả các lực lên phương pháp tuyến của phần tử ta có phương trình cân bằng như sau:

$$p \cdot \rho_m \rho_t d\theta d\varphi - 2\sigma_m \delta \rho_t d\varphi \sin \frac{d\theta}{2} - 2\sigma_t \cdot \delta \cdot \rho_m d\theta \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} = 0$$

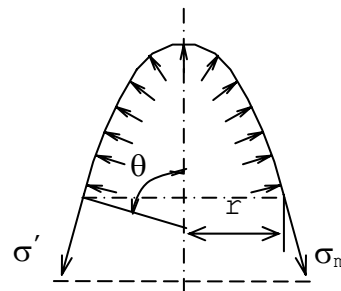
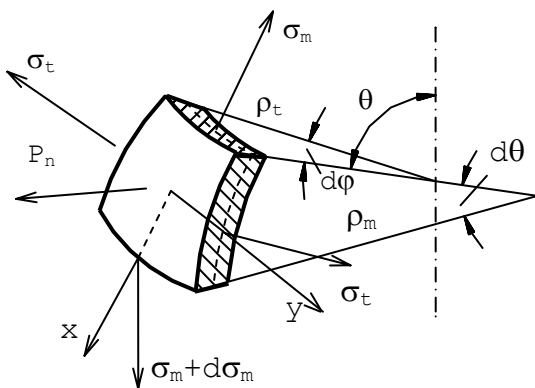
Vì $d\theta$ và $d\varphi$ là rất bé nên có thể xem $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$, $\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$. Sau khi rút gọn và chia cả hai vế cho ρ_m, ρ_t, δ ta được phương trình:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \quad (21-30)$$

Phương trình đó được gọi là phương trình Lapolatxơ.

Để thiết lập phương trình thứ hai, chúng ta xét sự cân bằng của một phần vỏ. Ví dụ cắt vỏ theo một mặt nón có đường sinh tạo với trục một góc θ (xem hình 21.25). Gọi P thành phần hợp lực của tải trọng trên phương của trục vỏ. Phương trình hình chiếu của các lực lên phương đó là:

$$\sigma_m \cdot 2\pi \cdot r \cdot \delta \sin \theta = P \quad (21-31)$$



T
rong đó
r là bán

Hình 21.24: Sơ đồ biểu diễn nội lực trên một phần tử

Hình 21.25: Nội lực trên mặt nón

kính của đường tròn đáy của hình nón.

Hệ phương trình (21-30) và (21-31) cho phép ta xác định được σ_m và σ_t . Ứng suất chính thứ ba là ứng suất ép giữa các lớp song song với thành vỏ. Ứng suất đó có thể bỏ

qua so với σ_m và σ_t . Thực vậy, ví dụ với điểm trong cùng, ứng suất đó là lớn nhất và bằng p , trong khi đó σ_m và σ_t có trị số vào cỡ $p \cdot \frac{\rho_m}{\delta}$ và $p \cdot \frac{\rho_t}{\delta}$, mà ρ_t và ρ_m là rất lớn so với δ .

Vậy trạng thái ứng suất có thể xem là trạng thái ứng suất phẳng.

Trong quá trình tính toán ta phải sử dụng định lí về hình chiếu sau đây:

Định lí 1: Nếu trên một mặt nào đó chịu tác dụng của một hệ áp lực p phân bố đều thì dù hình dạng của mặt đó như thế nào, thành phần hình chiếu của áp lực trên một phương nào đó sẽ là tích của áp suất với hình chiếu của mặt đó lên mặt phẳng vuông góc với phương chiếu.

Giả sử mặt F đã cho (hình 21.26), trên đó ta có hệ áp suất phân bố đều p . Ta phải tìm thành phần hình chiếu của áp lực P trên phương trục x . Thành phần đó được tính với biểu thức tích phân:

$$P_x = \int_F p \cos \varphi dF$$

Trong đó: φ -góc gồm giữa pháp tuyến của dF và trục x .

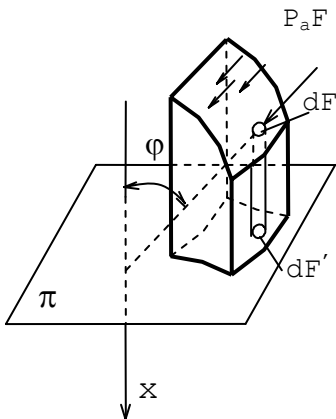
Hình chiếu diện tích dF trên mặt π vuông góc với trục x và bằng:

$$dF' = dF \cdot \cos \varphi$$

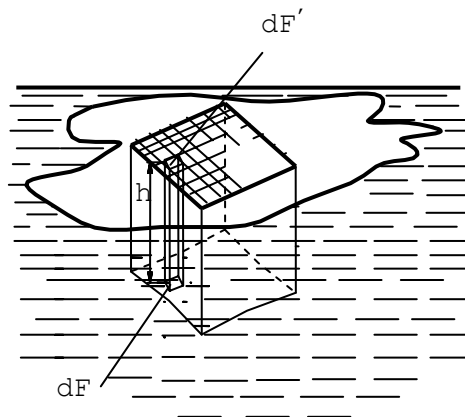
Do đó ta có thể viết lại: $P_x = p \cdot \int_F dF' = p \cdot F'$

F' là hình chiếu của F trên π .

Định lí thứ hai thường gặp là định lí về áp suất chất lỏng.



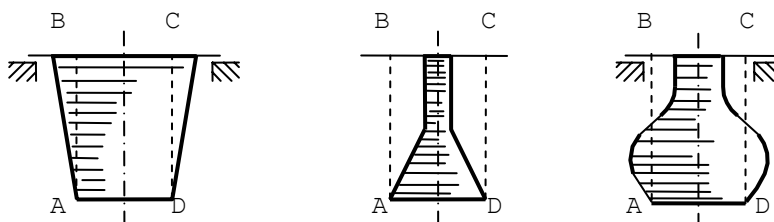
Hình 21.26: Mặt chịu áp suất rắn



Hình 21.27: Mặt chịu áp suất lỏng

Định lí thứ 2: Nếu trên một mặt nào đó chịu tác dụng áp suất của chất lỏng (hình 21.27) thì thành phần áp lực thẳng đứng là bằng trọng lượng cả thể tích cột chất lỏng đặt trên diện tích đó.

Trên các hình vẽ 21.28 ta thấy áp lực đặt trên AD là bằng trọng lực của cả cột chất lỏng BADC dù hình dạng của bình ở phía trên là như thế nào.



Hình 21.28: Kết cấu các dạng bình chịu áp suất lỏng

Thực vậy, khi mặt AD là nằm ngang thì áp suất của chất lỏng ở mọi nơi là bằng nhau và bằng $p = \gamma \cdot x$. γ là trọng lượng riêng của chất lỏng.

Theo định lí thứ nhất, hình chiếu của áp lực tác dụng lên AD trên phương thẳng đứng bằng áp suất nhân với diện tích hình chiếu của AD trên phương nằm ngang. Ở đây diện tích hình chiếu cũng chính là nó, do đó ta có:

$$P_x = F \cdot p = F \cdot x \cdot \gamma$$

$F \cdot x$ là thể tích của cột chất lỏng ở phía trên AD, vậy P_x là bằng trọng lượng của cả cột chất lỏng phía trên AD.

Ví dụ 5: Vỏ cầu bán kính R, chiều dày δ chịu áp suất bên trong p (hình 21.29). Xác định ứng suất trên thành vỏ.

Bài giải: Đối với vỏ cầu, ta có: $\rho_m = \rho_t = R$ và vì lí do đối xứng, nên:

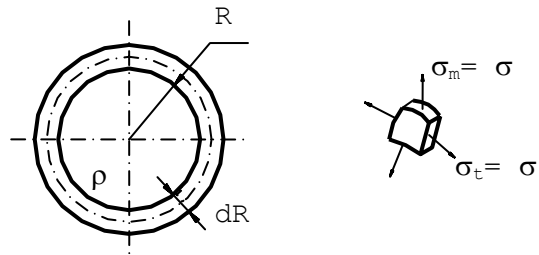
$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{p \cdot R}{2\delta}$$

Thành phần ứng suất thứ ba coi như bằng không. Như vậy ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất

$$\text{lớn nhất là: } \sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{p \cdot R}{2\delta}$$

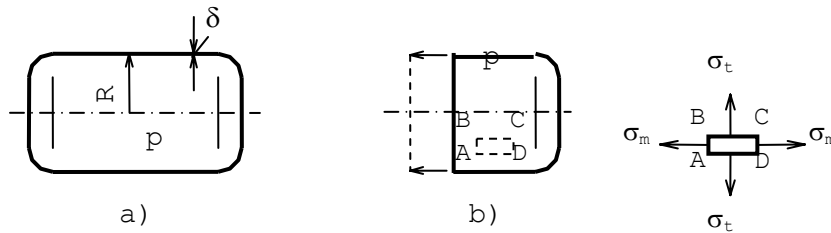
Điều kiện bền của vỏ là:

$$\frac{p \cdot R}{2\delta} \leq [\sigma]$$



Hình 21.29: Sơ đồ tính ứng suất vỏ cầu.

Ví dụ 6: Một bình chứa hình trụ (xem hình 21.30) chịu áp suất bên trong p. Bán kính hình trụ là R_1 và chiều dày của thành bình là δ . Xác định ứng suất trong thành bình.



Hình 21.30: Sơ đồ tính ứng suất của bình hình trụ chịu áp suất bên trong.

Bài giải: Ta tưởng tượng cắt hình với mặt cắt ngang (hình 21.30b) vớt bỏ một phần và xét sự cân bằng của phần còn lại. Ta có phương trình cân bằng:

$$\sigma_m \cdot 2\pi \cdot R \cdot \delta = P \tag{1}$$

Thành phần hình chiếu của áp lực lên đáy theo phương của trục bình là:

$$P = \pi R^2 p$$

$$\text{Từ đó ta có: } P = \pi R^2 p = \sigma_m \cdot 2\pi \cdot R \cdot \delta$$

$$\text{Hay } \sigma_m = \frac{pR}{2\delta} \tag{2}$$

Vì thân bình là hình trụ, nên $\rho_m = \infty$; $\rho_t = R$.

Do đó từ phương trình Lapolatxơ ta tìm thấy:

$$\sigma_t = \frac{pR}{\delta} \quad (3)$$

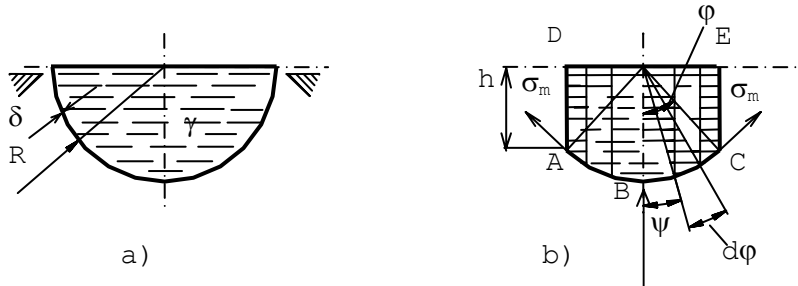
Vậy ứng suất vòng lớn gấp hai lần ứng suất kinh tuyến.

Thành phần ứng suất thứ ba xem như bằng không. Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất, ta có điều kiện bền của vỏ trụ là:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{p \cdot R}{\delta} \leq [\sigma]$$

So sánh với ví dụ 1, ta thấy bình chịu áp suất có dạng cầu là lợi hơn vì σ_{td} nhỏ hơn hai lần khi bình có độ dày như nhau.

Ví dụ 7: Thùng bán cầu bán kính R, chiều dày δ (hình 21.31) đựng đầy chất lỏng với trọng lượng riêng γ . Xác định ứng suất trong thành bình và vẽ các biểu đồ σ_m , σ_t , σ_{td} .



Hình 21.31: Sơ đồ tính ứng suất của thùng bán cầu đựng đầy chất lỏng

Bài giải : Ta dùng một mặt cắt hình nón chỏm cầu với góc 2γ (hình 21.31b) và thiết lập phương trình cân bằng cho chỏm cầu đó, thể tích ADECB được tính bởi biểu

thức:

$$V = \int_0^\varphi 2\pi R^3 \sin \psi \cos^2 \psi d\varphi$$

Từ đó :

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos^3 \varphi)$$

Viết phương trình cân bằng tổng hình chiếu các lực lên phương thẳng đứng, ta tìm

thấy :

$$\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{3\delta} \cdot \frac{1 - \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \quad (1)$$

Sử dụng phương trình Lapolatxơ và chú ý $\rho_m = \rho_t = R$ với $p = \gamma R \cos \varphi$, ta được:

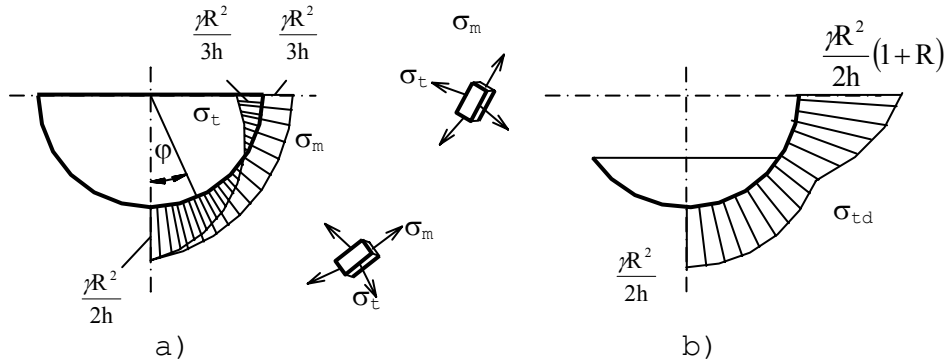
$$\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{3h} \left[3 \cos \varphi - \frac{1 - \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right] \quad (2)$$

Các biểu đồ σ_m , σ_t được biểu diễn trên hình 21.32. Qua các biểu đồ ta thấy σ_m và σ_t ở điểm thấp nhất của bình có trị số bằng nhau. Ở điểm trên cùng có trị số tuyệt đối bằng nhau nhưng ngược dấu nhau.

Ứng suất tương đương tính theo thuyết bền của M_0 là:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \alpha \sigma_3$$

Trong đó α là tỷ số giữa ứng suất nguy hiểm khi kéo và ứng suất nguy hiểm khi nén.



Hình 21.32: Biểu đồ ứng suất

- Xét ở hai miền khác nhau: miền σ_m và σ_t là ngược dấu, khi đó ở vùng phía trên ta có:

$$\sigma_{td} = \sigma_m - \alpha \sigma_t$$

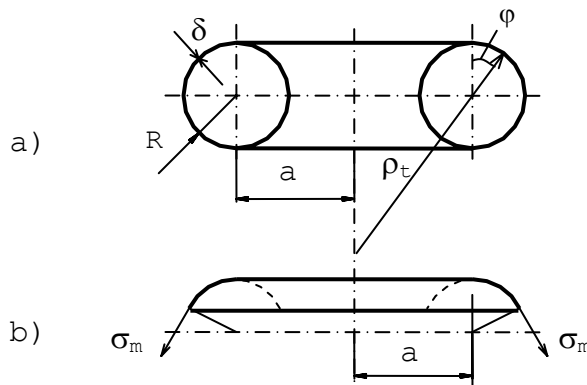
- Xét ở hai miền có σ_m và σ_t cùng dấu:

Ứng suất tương đương sẽ có trị số $\sigma_{td} = \sigma_m$

Do đó biểu đồ σ_{td} có điểm gãy khúc tại vị trí thay đổi dấu của σ_t như trên hình 21.32b. Trị số lớn nhất là:

$$\sigma_{td}^{\max} = \frac{\gamma R^2}{3h}(1 + \alpha)$$

Ví dụ 8: Xác định ứng suất trên thành ống hình xuyên bán kính R chịu áp suất p bên trong. Kích thước của hình xuyên được biểu diễn trên hình 21.33.



Bài giải. Sử dụng các mặt cắt vuông góc với bề mặt của hình xuyên, chia hình xuyên thành hai phần, tương tự như hình vẽ và xét sự cân bằng của phần trên (hình 21.33b).

Thiết lập phương trình hình chiếu của các lực theo phương thẳng đứng, ta có:

$$\sigma_m \cdot 2\pi\delta(a + R \sin \varphi) \sin \varphi = p\pi[(a + R \sin \varphi)^2 - a^2]$$

$$\sigma_m = \frac{pR(2a + R \sin \varphi)}{2h(a + R \sin \varphi)}$$

Từ phương trình Lapolatxơ với $\rho_m=R$ và $\rho_t = \frac{a + R \sin \varphi}{\sin \varphi}$, ta tìm được:

$$\sigma_t = \frac{pR}{2\delta}$$

Ứng suất σ_m là cực đại khi $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\sigma_m^{\max} = \frac{pR}{2\delta} \cdot \frac{2a - R}{a - R}$$

Vì σ_m và σ_t có cùng dấu, vậy ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất :

$$\sigma_{td} = \sigma_m^{\max} = \frac{pR}{2\delta} \cdot \frac{2a - R}{a - R}$$

Ví dụ 9: Thùng chứa hình nón đựng đầy chất lỏng (xem hình 21.34) có trọng lượng riêng là γ . Xác định ứng suất trên thành bình.

Bài giải: Dùng mặt cắt là mặt nón vuông góc với bề mặt của bình. Xét sự cân bằng của phần dưới. Viết phương trình cân bằng tổng hình chiếu lên phương thẳng đứng, ta có :

$$2\pi \cdot y \operatorname{tg}\alpha \cdot \delta \cdot \sigma_m \cos\alpha = Q + Q_1 \quad (1)$$

Q là trọng lượng của khối chất lỏng trong hình chóp và Q_1 là trọng lượng của cột chất lỏng phía trên hình chóp. Ta có :

$$Q = \frac{\pi \cdot y^3 \operatorname{tg}^2\alpha}{3} \gamma$$

$$\text{và } Q_1 = \gamma \cdot \pi \cdot y^2 \cdot \operatorname{tg}^2\alpha (h - y) \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta tìm thấy:

$$\sigma_m = \frac{\gamma \cdot y \cdot \operatorname{tg}\alpha (3h - 2y)}{6} \quad (3)$$

Sử dụng phương trình Lapoátxơ với chú ý

$\rho_m = \infty$, $\rho_t = \frac{y \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$ và $p = \gamma(h - y)$, ta tìm thấy:

$$\sigma_t = \frac{\gamma(h - y)}{\delta} \cdot \frac{y \operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} \quad (4)$$

Lấy đạo hàm theo y , ta sẽ tìm thấy số cực đại của σ_t tại $y = \frac{h}{2}$. Trị số đó là:

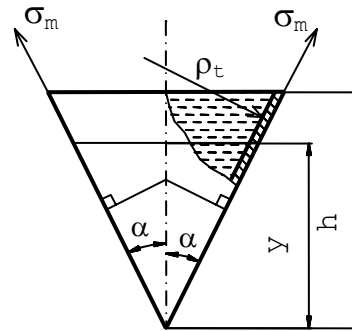
$$\sigma_t^{\max} = \frac{\gamma h^2}{4\delta} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} \quad (5)$$

Tương tự ta có thể tìm thấy σ_m^{\max} ở tại $y = \frac{3}{4}h$ và có trị số là:

$$\sigma_m^{\max} = \frac{3}{16} \cdot \frac{\gamma h^2}{\delta} \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} \quad (6)$$

σ_m và σ_t tại đỉnh của hình chóp là bằng không.

Ví dụ 10: Để có thể thực hiện các công tác ở sâu dưới nước người ta đã sử dụng một vỏ mỏng hình parabolôit tròn xoay và thả xuống độ sâu như hình vẽ. Vẽ biểu đồ ứng suất bên trong thành vỏ. Cho biết $a=1\text{m}$, $b=2\text{m}$ và $\delta=3\text{mm}$.



Hình 21.34: Sơ đồ tính ứng suất của thùng hình nón chứa đầy chất lỏng

Bài giải: Xác định hệ trục tọa độ oxy như hình 21.35. Dạng kinh tuyến của mặt parabolôit được biểu diễn bởi phương trình:

$$y = \frac{b}{a}x^2 \quad (1)$$

Thể tích phần trên của vỏ tính đến mức y là:

$$V = \int_0^y \pi \cdot x^2 dy = \frac{\pi a^2}{2b} y^2 \quad (2)$$

Thể tích phía trong của vỏ là: $V_B = \frac{\pi}{2} a^2 \cdot b \quad (3)$

Bây giờ ta hãy xác định mức chất lỏng ở bên trong của vỏ. Nghĩa là ta phải xác định y_1 và H_1 (hình 21.35).

Áp suất p của không khí bên trong vỏ là bằng áp suất của chất lỏng ở độ sâu H_1 . Nghĩa là :

$$p = \gamma \cdot H_1 + P_a \quad (4)$$

p_a là áp suất khí quyển ở mặt thoáng bên trên của chất lỏng. Mặt khác p được tính theo định luật Bôi-Mariôt như sau:

$$p = p_a \cdot \frac{V_B}{V_1} \quad (5)$$

V_1 là thể tích tương ứng với y_1 , do đó ta có:

$$p = p_a \cdot \frac{b^2}{y_1^2} \quad (6)$$

Theo (4) ta có :

$$p_a \cdot \frac{b^2}{y_1^2} = \gamma(H - b + y_1) + p_a$$

Từ đó ta có :

$$y_1^3 + y_1^2 \left(\frac{p_a}{\gamma} + H - b \right) = \frac{p_a}{\gamma} b^2$$

Với $p_a = 1 \text{atm}$ và các kích thước đã cho như trên hình vẽ, ta có:

$$y_1^3 + 1500y_1^2 = 4 \cdot 10^7$$

Từ đó ta có:

$$y_1 = 155,5 \text{cm}$$

$$p = p_a \cdot \frac{b^2}{y_1^2} = 16,55 \text{N/cm}^2$$

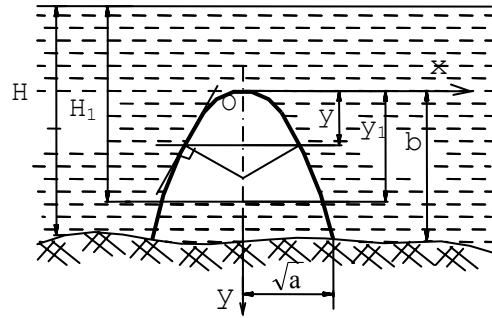
Sử dụng một mặt cắt hình nón vuông góc với mặt vỏ và xét sự cân bằng của phần trên (hình 21.35). Lực theo chiều trục đang tác dụng lên phần đang xét gồm có:

- Áp lực trong của vỏ. Trị số là: $p\pi x^2$
- Trọng lượng của cột chất lỏng ở phía trên của vỏ:

$$-\gamma \left[\pi x^2 (H - b + y) - \frac{\pi a^2}{2b} y^2 \right]$$

- Áp lực của khí quyển: $-p_a \pi x^2$

Từ đó ta có phương trình cân bằng:



Hình 21.35: Vỏ mỏng parabolôit thả sâu trong nước

$$\sigma_m \cdot 2\pi x \cdot \delta \sin \theta = (p - p_a) \cdot \pi \cdot x^2 - \gamma \cdot \left[\pi x^2 (H - b + y) - \frac{\pi a^2}{2b} y \right] \quad (7)$$

Ta phải xác định $\sin \theta$.

Để dàng nhận thấy rằng $\operatorname{tg} \theta = y'$. Vậy $\sin \theta = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$

Do đó :
$$\sin \theta = \frac{2b}{a} \sqrt{\frac{y}{b} \left[1 + \frac{4b^2}{a^2} - \frac{y}{b} \right]}^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

Để tính σ_t ta phải xác định các bán kính cong ρ_m và ρ_l

Ta có :
$$\frac{1}{\rho_m} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Do đó :
$$\rho_m = \frac{a^2}{2b} \left[1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (9)$$

$$\rho_l = \frac{x}{\sin \theta} = \frac{a^2}{2b} \left[1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

Áp suất tác dụng lên vỏ tại điểm đang xét là:

$$p^* = p - [p_a + \gamma(H - b + y)] \quad (11)$$

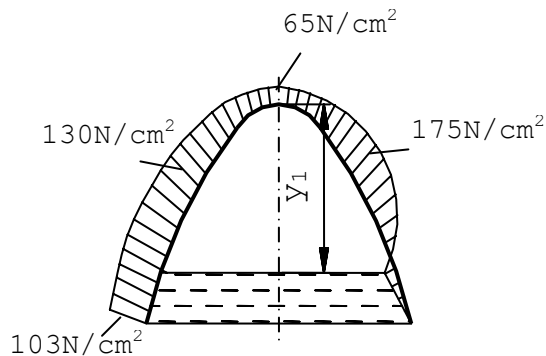
Sau khi thay (8) vào (7) rồi đưa vào phương trình Lapolatxơ cùng với (9), (10), (11), ta tìm thấy:

$$\sigma_m = \frac{a^2}{4b\delta} \left[p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b} \right) \right] \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_t = \frac{a^2}{4b\delta} \left\{ 2 \left[p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{y}{b} \right) \right] - \frac{p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{b} \right)}{1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b}} \right\} \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Các công thức đó chỉ dùng khi y biến thiên trong khoảng từ 0 đến y_1 .

Nếu $y > y_1$ thì $p^* = 0$ vì áp suất ở bên trong và bên ngoài là như nhau. Song các thành phần lực mà ta tính toán ở trên là không thay đổi. Trị số của σ_m và σ_t sẽ là:



Hình 21.36: Sơ đồ ứng suất

$$\sigma_m = \frac{a^2}{4b} \cdot \frac{y_1}{y} \left[p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1}{b} \right) \right] \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_t = -\frac{a^2}{4b\delta} \cdot \frac{y_1}{y} \left[p - p_a - \gamma b \left(\frac{H}{b} - 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_1}{b} \right) \right] \left(1 + \frac{4b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Biểu đồ ứng suất được biểu diễn như trên hình 21.36.

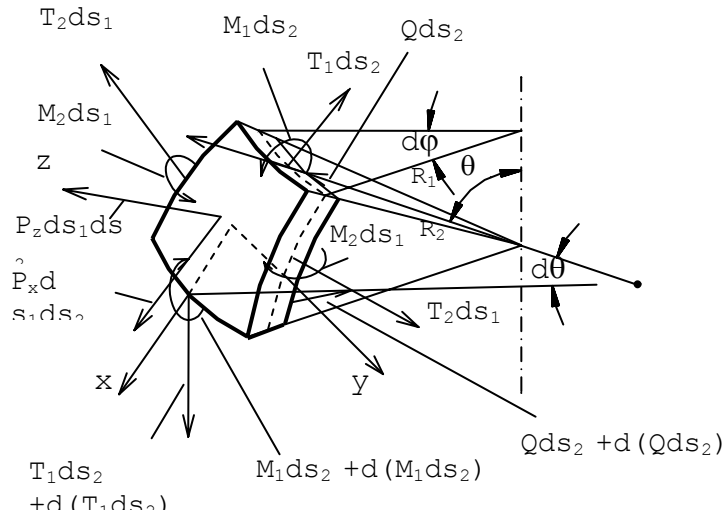
21.4. LÝ THUYẾT TỔNG QUÁT VỀ VỎ ĐỐI XỨNG

21.4.1. Phương trình cân bằng.

Trong trường hợp tổng quát, ta phải để ý đến sự phân bố không đều của σ_m và σ_t theo chiều dày của vỏ. Khi đó trên các mặt cắt của phân tố, ngoài các lực căng còn có các mô men uốn. Lí thuyết vỏ có tính đến các mô men này được gọi là lí thuyết mô men.

Phân tố được vẽ lại trên hình 21.37.

Trên hình vẽ đó ta dùng chỉ số 1 và 2 để chỉ các phương kinh tuyến và vĩ tuyến. Gọi T_1, T_2 và M_1, M_2 là các ứng lực và mô men uốn trên đơn vị độ dài của các cung. Vì lí do đối xứng T_2 và M_2 có trị số như nhau còn T_1 và M_1 có thể có những trị số khác nhau khi đi từ vĩ tuyến này sang vĩ tuyến khác. Do M_1 có sự biến thiên nên trên các mặt cắt phải có lực cắt Q và $Q+dQ$ (Q là lực cắt trên đơn vị chiều dài). Ta cũng giả thiết rằng phần tải trọng đặt trên vỏ là đối xứng qua trục vỏ. Một cách tổng quát có thể phân tải trọng đó thành hai thành phần: thành phần theo phương pháp tuyến p_z và thành phần theo phương tiếp tuyến của đường kinh tuyến đi qua điểm đang xét p_x . (Hệ trục oxy được xác định như hình vẽ).



Hình 21.37: Sơ đồ phân tố chịu lực tổng quát

Thiết lập các phương trình cân bằng.

Chiếu các lực lên phương trục z ta có phương trình:

$$T_2 \cdot ds_1 \cdot \frac{ds_2}{R_2} + T_1 \cdot ds_2 \cdot \frac{ds_1}{R_1} + d(Qds_2) = p_z ds_1 ds_2$$

Trong đó: R_1 và R_2 là bán kính cong của đường kinh tuyến và đường vĩ tuyến.

Vì $ds_1 = R_1 \cdot d\theta$ và $ds_2 = R_2 \cdot \sin \theta d\phi$

Chú ý góc $d\phi$ là góc của hai mặt cắt kinh tuyến của phân tố.

Nên phương trình được viết lại dưới dạng:

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} (Q R_2 \sin \theta) = p_z \quad (21-32)$$

Chiều tất cả các lực xuống trục đối xứng của vỏ, ta có phương trình:

$$T_1 ds_2 \sin \theta - [T_1 ds_2 + d(T_1 ds_2)] \sin(\theta + d\theta) + Q ds_2 \cos \theta - [Q ds_2 + d(Q ds_2)] \cos(\theta + d\theta) + p_z ds_1 ds_2 \cos \theta - p_x ds_1 ds_2 \sin \theta = 0$$

Hay: $\frac{d}{d\theta} [R_2 \sin \theta (T_1 \sin \theta + Q \cos \theta)] = R_1 R_2 \sin \theta (p_z \cos \theta - p_x \sin \theta)$ (21-33)

Lấy tổng mô men của các lực đối với trục y ta được:

$$Q ds_1 ds_2 - d(M_1 ds_2) + M_2 ds_1 \cos \theta \cdot d\varphi = 0$$

Hay: $Q \cdot R_1 R_2 \sin \theta - \frac{d}{d\theta} (M_1 \cdot R_2 \sin \theta) + M_2 R_1 \cos \theta = 0$ (21-34)

Vì lí do đối xứng nên các phương trình khác hoàn toàn thoả mãn.

Lấy tích phân phương trình (21-33) ta được:

$$R_2 \sin \theta (T_1 \sin \theta + Q \cos \theta) = C + \int R_1 R_2 \sin \theta (p_z \cos \theta - p_x \sin \theta) d\theta$$
 (21-35)

Gọi r là khoảng cách từ điểm đang xét đến trục đối xứng, ta có các liên hệ sau đây:

$$R_1 d\theta = ds_1 \text{ và } R_2 \sin \theta = r$$
 (21-36)

Thay (21-36) vào (21-35) ta sẽ được biểu thức thể hiện sự cân bằng của một phần vỏ (xem hình 21.38). Hằng số C là tùy thuộc lực dọc trục đặt lên vỏ. Thật vậy, xét sự cân bằng của phần vỏ ta có:

$$(T_1 \sin \theta + Q \cos \theta) 2\pi r = P_0 + \int (p_z \cos \theta - p_x \sin \theta) 2\pi r ds_1$$

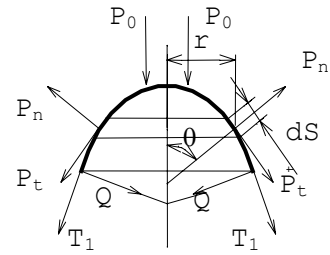
Trong đó $p_0 = 2\pi C$ là lực tập trung dọc theo trục của vỏ. Nếu thay (21-36) vào đây ta lại được biểu thức (21-35)

Để tiện trong quá trình tính toán sau này, chúng ta sử dụng các biểu thức sau đây:

$$F(\theta) = R_2 \sin \theta (T_1 \sin \theta + Q \cos \theta)$$

hay
(21-37)

$$F(\theta) = C + \int R_1 R_2 \sin \theta (p_z \cos \theta - p_x \sin \theta) d\theta$$



Hình 21.38:

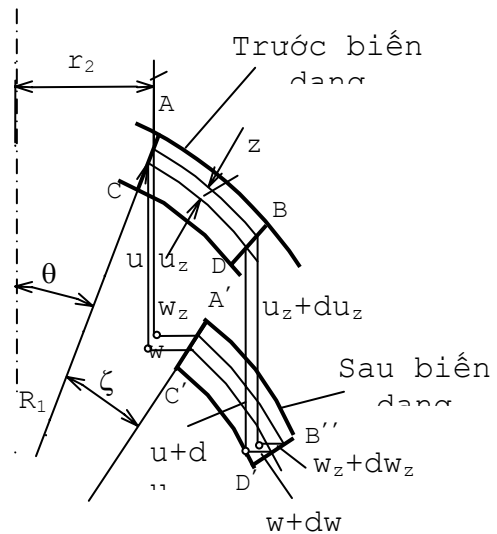
Trạng thái chịu lực của phần vỏ

Trong các trường hợp thường gặp hàm $F(\theta)$ có thể xác định từ điều kiện cân bằng, vì vậy hàm đó được gọi là hàm tải trọng.

21.4.2. Phương trình tương thích giữa chuyển vị và biến dạng.

Khảo sát đoạn cong AB nằm trên mặt kinh tuyến của vỏ và cách mặt trung gian một khoảng cách z. Do sự biến dạng của vỏ, đoạn cong đó có các chuyển vị. Gọi A'B' là vị trí mới của AB sau biến dạng xem hình 21.39.

Kí hiệu u_z và w_z là các thành phần chuyển vị của một điểm nào đó trên AB theo chiều trục và chiều vuông góc với trục trên mặt kinh tuyến. Gọi C và D là chân các pháp tuyến của một mặt trung gian đi qua A và B, u và w là thành phần chuyển vị của các điểm trên CD và ζ



Hình 21.39: Sơ đồ chuyển vị của phần vỏ

là góc xoay của các pháp tuyến sau biến dạng, ta có các biểu thức tương quan $A'B'$, $C'D'$; và AB , CD như sau:

$$A'B' = AB(1 + \varepsilon_{1z})$$

$$C'D' = CD(1 + \varepsilon_1)$$

Trong đó ε_{1z} và ε_1 là các biến dạng của AB và CD .

Xét đa giác $CDC'D'$ (hình 21.39), chiếu đa giác đó xuống phương ngang và phương thẳng đứng. Ta có:

$$w + CD(1 + \varepsilon_1)\cos(\theta + \zeta) - w + dw - CD\cos\theta = 0$$

$$u + CD(1 + \varepsilon_1)\sin(\theta + \zeta) - u - du - CD\sin\theta = 0$$

Chú ý ζ là nhỏ so với θ và $CD = R_1 d\theta$, ta sẽ được:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{R_1 d\theta} &= -\zeta \sin\theta + \varepsilon_1 \cos\theta \\ \frac{du}{R_1 d\theta} &= \zeta \cos\theta + \varepsilon_1 \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (21-38)$$

Tương tự ta có thể viết:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw_z}{(R_1 + z)d\theta} &= -\zeta \sin\theta + \varepsilon_{1z} \sin\theta \\ \frac{du_z}{(R_1 + z)d\theta} &= \zeta \cos\theta + \varepsilon_{1z} \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (21-39)$$

Bây giờ chiếu đa giác $AA'CC'$ lên phương ngang và phương thẳng đứng. Ta được:

$$\left. \begin{aligned} w_z &= w + z\zeta \cos\theta \\ u_z &= u + z\zeta \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (21-40)$$

Thay w_z vào (21-39) sẽ được:

$$\frac{dw}{(R_1 + z)d\theta} + \frac{z}{R_1 + z} \cdot \frac{d(\theta \cos\theta)}{d\theta} = \zeta \sin\theta + \varepsilon_{1z} \cos\theta$$

Dựa vào biểu thức đầu của (21-38) ta có thể khử w trong biểu thức này và sẽ được:

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + \frac{z}{R_1 + z} \cdot \frac{d\zeta}{d\theta}$$

Vì z là vô cùng bé, nên có thể viết lại:

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + \frac{z}{R_1} \cdot \frac{d\zeta}{d\theta} \quad (21-41)$$

Như vậy ta có được biến dạng theo phương kính tuyến.

Biến dạng theo phương vĩ tuyến ε_{2z} được xác định bằng độ giãn của một đường tròn qua A bán kính r :

$$\varepsilon_{2z} = \frac{w_z}{(R_2 + z)\sin\theta}$$

$$\text{Đối với điểm} \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R_2 \sin\theta} \quad (21-42)$$

Với biểu thức (21-40) có thể viết lại:

$$\varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + z \frac{\zeta}{R_2} \operatorname{ctg}\theta \quad (21-43)$$

Thay trị số w từ (21-42) và biểu thức đầu (21-38) ta có:

$$R_1 \zeta = \operatorname{ctg}\theta (R_1 \varepsilon_1 - R_2 \varepsilon_2) - \frac{d}{d\theta} (R_2 \varepsilon_2) \quad (21-44)$$

21.4.3. Tương quan giữa ứng lực và biến dạng.

Theo định luật Hooke các tương quan giữa ứng suất và biến dạng là như sau:

$$\sigma_{1z} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{1z} + \mu \varepsilon_{2z})$$

$$\sigma_{2z} = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{2z} + \mu \varepsilon_{1z})$$

Thay các biểu thức (21-41) và (21.43) vào ta được:

$$\sigma_{1z} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) + z \left(\frac{1}{R_1} \frac{d\zeta}{d\theta} + \mu \frac{\zeta}{R_2} \operatorname{ctg}\theta \right) \right]$$

$$\sigma_{2z} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) + z \left(\frac{\zeta}{R_2} \operatorname{ctg}\theta + \mu \frac{1}{R_1} \frac{d\zeta}{d\theta} \right) \right]$$

Từ đó dễ dàng xác định được các thành phần ứng lực và mô men nội lực:

$$T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{1z} dz ; \quad T_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{2z} dz$$

$$M_1 = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{1z} \cdot z \cdot dz ; \quad M_{21} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{2z} \cdot z \cdot dz$$

Dấu trừ để chỉ mô men uốn làm căng thớ ngoài.

Sau khi tính các tích phân, chúng ta có:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 + \mu \varepsilon_2) \\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 + \mu \varepsilon_1) \end{aligned} \right\} \quad (21-45)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -D \left[\frac{1}{R_1} \frac{d\zeta}{d\theta} + \mu \frac{\zeta}{R_2} \operatorname{ctg}\theta \right] \\ M_2 &= -D \left[\frac{\zeta}{R_2} \operatorname{ctg}\theta + \mu \frac{1}{R_1} \frac{d\zeta}{d\theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (21-46)$$

Trong đó :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

Từ các phương trình (21-45), ta tìm thấy:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{Eh}(T_1 - \mu T_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{Eh}(T_2 - \mu T_1) \end{aligned} \right\} \quad (21-47)$$

Nói tóm lại ta được tám phương trình (21-32); (21-33); (21-34); (21-44); (21-46); (21-47) với tám ẩn số T_1 ; T_2 ; M_1 ; M_2 ; Q ; ζ ; ε_1 và ε_2 . Để giải phương trình trên ta tìm cách đưa hệ về dạng đối xứng.

21.4.4. Đưa hệ phương trình về dạng đối xứng.

Thay trị số ε_1 và ε_2 từ (21-47) vào (21-44), ta có:

$$ER_1\zeta = \text{ctg}\theta \left[\frac{T_1}{h}(R_1 + \mu R_2) - \frac{T_2}{h}(R_2 + \mu R_1) \right] - \frac{d}{d\theta} \left[\frac{R_2}{h}(T_2 - \mu T_1) \right] \quad (21-48)$$

Bây giờ quay trở về hệ phương trình cân bằng. Sử dụng biểu thức thứ hai (21-37), phương trình (21-35) được viết lại dưới dạng:

$$T_1 = \frac{F(\theta)}{R_2 \sin^2 \theta} - Q \text{ctg}\theta$$

Thay biểu thức đó vào (21-32), ta được:

$$T_2 = p_z R_2 - \frac{F(\theta)}{R_1 \sin^2 \theta} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{d}{d\theta} (Q \cdot R_2)$$

Sử dụng các kí hiệu:

$$\frac{d}{d\theta} (*) = (*)' ; QR_2 = V \quad (21-49)$$

Sau khi thay T_1 và T_2 vào (21-48), ta có:

$$\begin{aligned} EhR_1\zeta &= \frac{R_2}{R_1} V'' + \left[\frac{R_2}{R_1} \text{ctg}\theta + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)' \right] \cdot V' - \frac{R_1}{R_2} \text{ctg}'\theta - \frac{h'}{h} \frac{R_2}{R_1} \cdot V' - \\ &- \mu V \left[\text{ctg}^2\theta + h \left(\frac{\text{ctg}\theta}{h} \right)' \right] + \frac{F(\theta)}{\sin^2 \theta} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \text{ctg}\theta + h \left(\frac{R_2}{hR_1} + \frac{\mu}{h} \right)' \right\} - \\ &- h \left(\frac{R_2^2 \cdot p_z}{h} \right) - (R_2 + \mu R_1) \cdot R_2 p_x \end{aligned}$$

Thay trị số của M_1, M_2 từ (21-46) vào (21-34), ta được:

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_1} \theta'' + \left[\frac{R_2}{R_1} \text{ctg}\theta + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)' \right] \cdot \zeta - \frac{R_1}{R_2} \zeta \cdot \text{ctg}^2\theta + 3 \frac{h'}{h} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \zeta' + \\ + \frac{\mu}{h} (3h' \text{ctg}\theta - h) \zeta = - \frac{R_1}{D} \cdot V \end{aligned}$$

Hai phương trình cuối cùng chỉ chứa hai ẩn số V và ζ .

$$\text{Kí hiệu : } L(*) = \frac{R_2}{R_1} (*)'' + \left[\frac{R_2}{R_1} \text{ctg}\theta + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)' \right] (*)' - \frac{R_1}{R_2} \text{ctg}^2\theta (*) \quad (21-50)$$

Ta có thể viết chúng gọn lại như sau:

$$\left. \begin{aligned} L(V) + \mu V + \frac{h'}{h} \left(\mu V \operatorname{ctg} \theta - \frac{R_2}{R_1} V' \right) &= EhR \cdot \zeta + \phi(\theta) \\ L(\zeta) - \mu \zeta + \frac{3h'}{h} \left(\mu \zeta \operatorname{ctg} \theta + \frac{R_2}{R_1} \zeta' \right) &= -\frac{R_1}{R} \end{aligned} \right\} \quad (21-51)$$

$$\text{Trong đó :} \quad \phi(\theta) = h \left(\frac{R_2^2 p_z}{h} \right)' + (R_2 + \mu R_1) R_2 p_x - \frac{F(\theta)}{\sin^2 \theta} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right) \operatorname{ctg} \theta + h \left(\frac{R_2}{h R_1} + \frac{\mu}{h} \right) \right\}' \quad (21-52)$$

Đó là dạng tổng quát của vỏ mỏng tròn xoay tính với lý thuyết có mô men. Đôi khi θ được thay bằng biến số r (r là khoảng cách từ điểm trên mặt trung gian đến trục đối xứng), các phương trình sẽ có dạng đơn giản hơn một ít vì toán tử $L(*)$ viết gọn hơn, song viết dưới dạng đó phương trình sẽ rất khó giải với những điểm đặc biệt khi $\theta = \pi/2$. Giải hệ trên ta sẽ tìm thấy ζ và V , do đó nội lực, biến dạng và các chuyển vị u và w được xác định. Thực vậy:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \left[\frac{1}{R_1} \frac{d\zeta}{d\theta} + \mu \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_2} \cdot \zeta \right] \\ M_2 &= -D \left[\frac{1}{R_2} \operatorname{ctg} \theta + \mu \frac{1}{R_1} \cdot \frac{d\zeta}{d\theta} \right] \\ Q &= \frac{V}{R_2} \end{aligned}$$

Và như ở trên ta đã có:

$$T_1 = \frac{F(\theta)}{R_2 \sin^2 \theta} - \frac{V}{R_2} \operatorname{ctg} \theta$$

$$\text{và} \quad T_2 = p_z R_z - \frac{F(\theta)}{R_1 \sin^2 \theta} - \frac{V}{R_1} \cdot \frac{dV}{d\theta}$$

Cuối cùng từ (21-47) nhận được:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{Eh} \left[\frac{F(\theta)}{R_2 \sin^2 \theta} - \frac{V}{R_2} \operatorname{ctg} \theta - \mu \left(p_z R_z - \frac{F(\theta)}{R_1 \sin^2 \theta} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dV}{d\theta} \right) \right] \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{Eh} \left[p_z R_z - \frac{F(\theta)}{R_1 \sin^2 \theta} - \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dV}{d\theta} - \mu \left(\frac{F(\theta)}{R_2 \sin^2 \theta} - \frac{V}{R_2} \operatorname{ctg} \theta \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (21-53)$$

Các thành phần chuyển vị u và w được xác định từ (21-39) như sau:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dw}{d\theta} &= R_1 (\varepsilon_1 \cos \theta - \zeta \sin \theta) \\ \frac{du}{d\theta} &= R_1 (\varepsilon_1 \sin \theta + \zeta \cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (21-54)$$

Các thành phần ứng suất sẽ có trị số là:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1z} &= \frac{T_1}{h} + z \cdot \frac{12M_1}{h^3} \\ \sigma_{2z} &= \frac{T_2}{h} + z \cdot \frac{12M_2}{h^3} \end{aligned} \right\} \quad (21-55)$$

Khi độ dày h là hằng số thì các phương trình (21-51) và (21-52) sẽ có dạng đơn giản như sau:

$$\left. \begin{aligned} L(V) + \mu V &= Eh \cdot R_1 \zeta + \phi(\theta) \\ L(\zeta) - \mu \zeta &= -\frac{R_1}{D} V \end{aligned} \right\}$$

Trong đó:

$$\phi(\theta) = h \left(\frac{R_2^2 p_z}{h} \right)' + (R_2 + \mu R_1) R_2 p_x - \frac{F(\theta)}{\sin^2 \theta} \left\{ \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right) \text{ctg} \theta + \left(\frac{R_2}{R_1} \right)' \right\}$$

21.4.5. Điều kiện biên.

Tích phân hệ phương trình (21-51) ta có bốn hằng số tích phân. Các hằng số đó đều xác định từ các điều kiện biên của bài toán. Nghĩa là phụ thuộc vào điều kiện cố định ở biên cũng như cách chịu lực hoặc chuyển vị ở biên.

Ta xét một số trường hợp cụ thể sau đây:

a. Ở biên của vỏ chịu ngàm cứng, (hình 21.40):

Ta có hai điều kiện sau đây:

- Góc xoay của pháp tuyến của mặt trung gian là bằng không $\zeta=0$.
- Chuyển vị theo phương hướng kính là bằng không $w=0$.

Điều đó dẫn đến điều kiện (công thức 21-42):

$$\varepsilon_2 = \frac{w}{R_2 \sin \theta} = 0$$

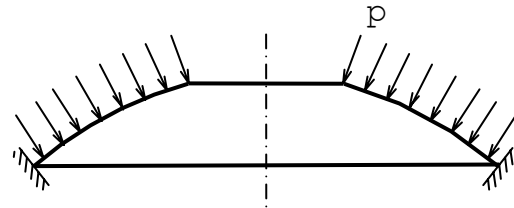
Hai điều kiện khác được xác định từ biên thứ hai của vỏ.

Chúng ta cũng chú ý rằng, với liên kết ngàm chuyển vị ζ theo chiều trục cũng bằng không. Để có được trị số ζ chúng ta phải tích phân phương trình thứ hai của 21-54, như vậy trong phương trình:

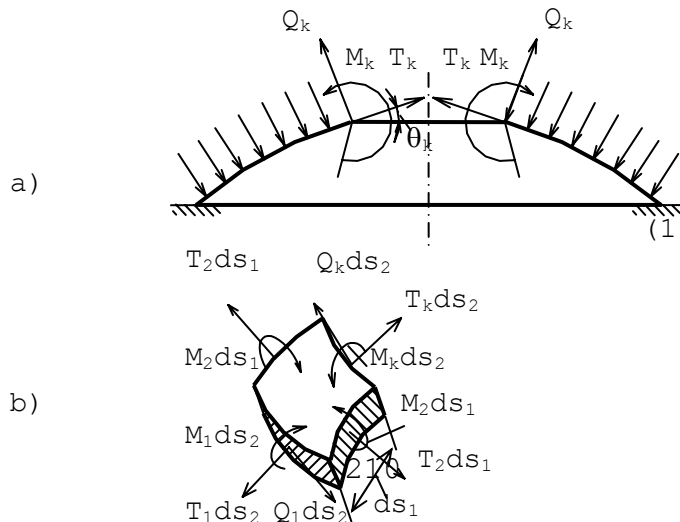
$$u=0$$

Ta có thêm hằng số tích phân mới và sẽ trở thành hệ 5 phương trình với 5 ẩn số.

b. Ở các biên của vỏ chịu tải trọng T_k , Q_k và mô men M_k (hình 21.41).



Hình 21.40:
Vỏ chịu ngàm cứng ở biên



Xét sự cân bằng của một phân tử ngay sát biên ta được:

$$T_1 = T_k, \quad Q = Q_k, \quad M_1 = M_k$$

Song hai điều kiện đầu không phải là các phương trình độc lập. Nếu một điều kiện được thoả mãn thì điều kiện thứ hai cũng thoả mãn và hàm $F(\theta)$ từ biểu thức (21-37) sẽ được xác định. Thực vậy, với phân tử mà ta đã xét trước đây bây giờ được viết lại như sau:

$$T_1 \sin \theta_k + Q \cos \theta_k = T_k \sin \theta_k + Q_k \cos \theta_k$$

Vậy nếu $T_1 = T_k$ thì $Q = Q_k$, do đó điều kiện biên chỉ còn lại hai điều kiện:

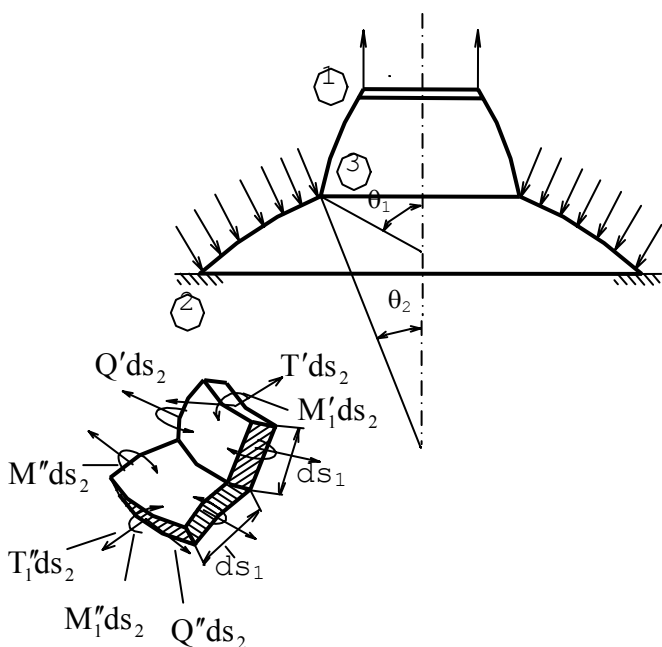
$$Q = Q_k \text{ và } M_1 = M_k$$

Nếu biên giới của vỏ là tự do thì điều kiện biên sẽ là:

$$Q_1 = 0 \text{ và } M_1 = 0$$

c. Trường hợp hai vỏ tiếp nối nhau, hình 21.42a.

Khi có hai vỏ nối nhau, số hằng số tích phân phải xác định là tám. Ta phải xác



Hình 21.42: hai vỏ nối tiếp nhau (a) và phân tử chịu lực được tách ra từ điểm tiếp giáp (b)

định tám phương trình để xác định tám hằng số đó. Bốn phương trình được thiết lập từ các điều kiện ở các biên riêng biệt, còn bốn phương trình khác được thiết lập từ điều kiện tiếp giáp giữa hai vỏ. Xét phân tử được tách ra từ điểm tiếp giáp (hình 21.42b).

Giả sử $ds_1 \rightarrow 0$, đồng thời với ds_1 , từ điều kiện cân bằng ta được:

$$M'_1 = M''_1$$

Nếu chiếu các lực xuống trục của vỏ ta được điều kiện để chọn hàm $F(\theta)$. Điều kiện thứ hai có được khi chiếu tất cả các lực xuống một phương nào

đó, ví dụ theo phương của Q' chẳng hạn.

$$\text{Khi đó: } Q' = Q'' \sin(\theta_1 - \theta_2) - T'' \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

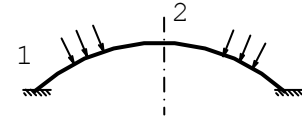
Như vậy ta đã có hai phương trình. Hai phương trình khác được xác định từ điều kiện chuyển vị hoặc biến dạng của vỏ. Tại điểm tiếp giáp ta phải có:

$$\zeta' = \zeta''; \quad w' = w''; \quad (\varepsilon'_2 = \varepsilon''_2)$$

Thành phần chuyển vị u như trên đã nói là không cần xét đến.

d. Vỏ trụ kín.

Ví dụ có vỏ trụ kín như hình 21.43, khi đó biên thứ hai có bán kính bằng không. Như vậy các hằng số tích phân có trị số tiến tới vô cùng, điều đó không đúng với thực tế, vì ứng suất và biến dạng tại đó có trị số giới nội, do đó điều kiện biên tại đỉnh (điểm 2) là: $\zeta \neq \infty; T_1 \neq \infty$



Hình 21.43:
Vỏ trụ kín

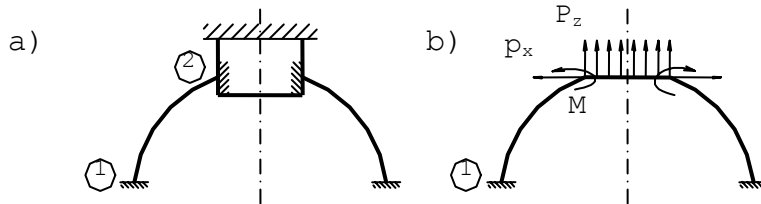
e. Vỏ trụ được cố định cả hai biên.

Khi đó nếu biết các phản lực ở một biên thì mới xác định được hàm $F(\theta)$ từ điều

kiện cân bằng. Trong nhiều trường hợp như các ví dụ trên hình 21.44 ta chưa có các phản lực tại các biên, do đó để xác định $F(\theta)$ ta phải có các điều kiện khác.

Ta cũng gọi loại bài toán đó là bài toán siêu tĩnh.

Việc xác định điều kiện biên của bài toán siêu tĩnh cũng tiến hành tương tự như hệ siêu tĩnh. Trên một biên nào đó của vỏ, ta đặt các lực p thay cho phản lực của gối tựa và tính $F(\theta)$ theo p (xem hình 21.44b).



Hình 21.44: a) Vỏ trụ được cố định cả hai biên
b) Sơ đồ tương đương

Sau đó p được xác định từ điều kiện chuyển

vị u theo chiều trục tại các điểm trên biên là bằng không. Như vậy ta có sáu hằng số tích phân phải xác định: [bốn hằng số tích phân của hệ phương trình (21-51), một hằng số tích phân khi lấy tích phân phương trình thứ hai của (21-54) và trị số của p], song ta có sáu điều kiện biên như sau. Ví dụ vỏ trên hình 21.45.

Trên biên 1 ta phải có:

$$\zeta = 0; \varepsilon_2 = 0; u = 0$$

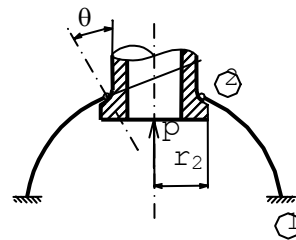
Trên biên 2:

$$M_1 = 0; Q = \frac{p}{2\pi r_2} \cos \theta; u = 0$$

Vỏ trên hình 21.45.

Trên biên 1: $\zeta = 0; \varepsilon_2 = 0; u = 0$

Trên biên 2: $\zeta = 0; \varepsilon_2 = 0; u = 0$



Hình 21.45:
Sơ đồ tính toán

21.5. ỨNG SUẤT UỐN TRONG VỎ TRỤ CHỊU SUẤT BÊN TRONG.

ÁP

Ở phần trên chúng ta đã thiết lập các công thức tổng quát để tính vỏ khi kể đến các mô men uốn. Khi tính toán cho những trường hợp cụ thể như vỏ là hình chóp hay một hình cầu với chiều dày không đổi, các công thức sẽ được rút gọn hơn, song sự tính toán vẫn còn phức tạp. Với phạm vi của giáo trình không cho phép ta đưa tất cả những điều đó vào mà ở đây ta chỉ đề cập một trường hợp đơn giản nhất là vỏ trụ chịu áp lực bên trong.

Ví dụ với vỏ trụ như hình 21.46a, xét phân tố được tách ra bởi các mặt cắt qua kinh tuyến và vĩ tuyến (xem hình 21.46b).

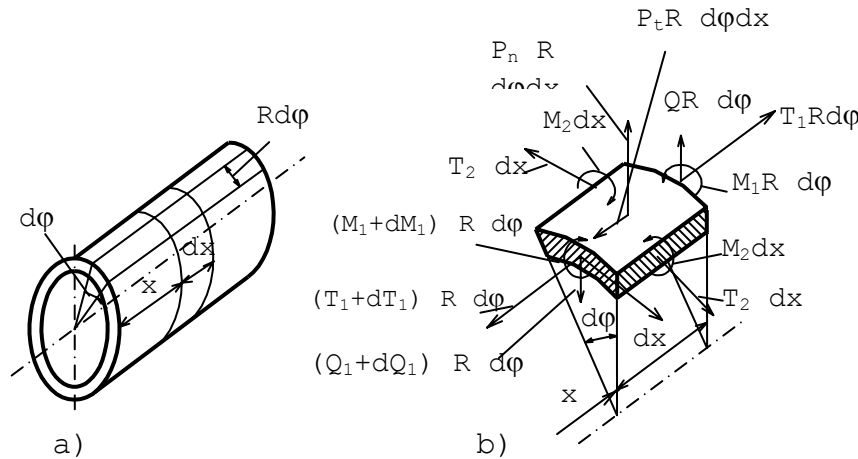
Các phương trình được rút gọn lại như sau:

- Chiều tất cả các lực xuống trục của vỏ, ta có:

$$dT_1 R d\varphi + p_1 R d\varphi dx = 0$$

- Chiều các lực xuống phương pháp tuyến:

$$-T_2 dx \cdot d\varphi + dQ \cdot R \cdot d\varphi + p_n \cdot R d\varphi \cdot dx = 0$$



Hình 21.46: Vỏ trụ chịu áp suất bên trong (a) và ứng suất uốn khi vỏ lực chiu

- Lấy tổng mô men của các lực với trục y:

$$Qdx + dM_1$$

Từ phương trình đầu ta có: $T_1 = C - \int p_1 dx$

Nếu \$p_1=0\$ thì \$T_1\$ là hằng số.

Từ phương trình thứ hai ta có:

$$\frac{dQ_1}{dx} = p_n - \frac{T_2}{R} \quad (21-56)$$

Phương trình thứ ba cho ta liên hệ: $\frac{dM_1}{dx} = \zeta \quad (21-57)$

Vì tính chất đối xứng nên những phương trình cân bằng khác luôn luôn thoả mãn.

Kí hiệu \$w\$ là chuyển vị theo phương bán kính và \$\zeta\$ là góc xoay của pháp tuyến mặt trung gian (hình 21.47), ta dễ dàng tìm thấy tương quan:

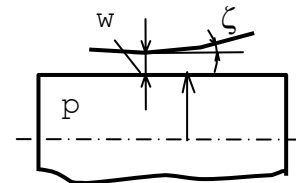
$$\frac{dw}{dx} = \zeta \quad (21-58)$$

Độ giãn dài tỉ đối của một thớ AB cách mặt trung gian một khoảng cách \$z\$ do uốn gây nên là:

$$\frac{zd\zeta}{dx}$$

Độ giãn dài toàn phần của AB phải tính đến độ giãn do lực dọc trục gây ra:

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + z \frac{d\zeta}{dx} \quad (21-59)$$



Hình 21.47: Sơ đồ tính chuyển vị \$w\$

Trong đó: ε_1 là độ giãn tương đối tương ứng của mặt trung gian.
Biến dạng dài tỉ đối theo hướng tiếp tuyến vòng sẽ là:

$$\varepsilon_{2z} = \frac{w}{R} \quad (21-60)$$

Các biểu thức (21-59) và (21-60) thay thế cho các biểu thức (21-41) và (21-43).
Từ định luật Hooke tổng quát ta có:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{1z} + \mu\varepsilon_{2z}) = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\varepsilon_1 + \mu \frac{w}{R} + z \cdot \frac{d\zeta}{dx} \right] \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{2z} + \mu\varepsilon_{1z}) = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\mu\varepsilon_1 + \frac{w}{R} + \mu z \frac{d\zeta}{dx} \right] \end{aligned} \right\} \quad (21-61)$$

Từ đó ta dễ dàng xác định các thành phần mô men uốn và lực kéo với các biểu thức:

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 z dz ; & M_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 z dz \\ T_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 dz ; & T_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2 dz \end{aligned}$$

Thay các trị số σ_1 và σ_2 vào ta có:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\varepsilon_1 + \mu \frac{w}{R} \right) z + z^2 \cdot \frac{d\zeta}{dx} \right] dz \\ M_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\mu\varepsilon_1 + \frac{w}{R} \right) z + \mu z^2 \cdot \frac{d\zeta}{dx} \right] dz \\ T_1 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\varepsilon_1 + \mu \frac{w}{R} \right) + z \cdot \frac{d\zeta}{dx} \right] dz \\ T_2 &= \frac{E}{1-\mu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\mu\varepsilon_1 + \frac{w}{R} \right) + \mu z \cdot \frac{d\zeta}{dx} \right] dz \end{aligned}$$

Vì ε_1 , w và $\frac{d\zeta}{dx}$ không phụ thuộc vào z nên:

$$\int_{-h/2}^{h/2} dz = h ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0 ; \quad \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}$$

Do đó ta có:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \frac{d\zeta}{dx} = D \cdot \frac{d\zeta}{dx} \\ M_2 &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \mu \frac{d\zeta}{dx} = \mu \cdot D \cdot \frac{d\zeta}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (21-62)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\varepsilon_1 + \mu \cdot \frac{w}{R} \right) \\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{w}{R} + \mu\varepsilon_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (21-63)$$

Khử ε_1 trong hai phương trình (21-63) ta tìm thấy liên hệ:

$$T_2 = \frac{Eh}{R} w + \mu \cdot T_1 \quad (21-64)$$

Từ phương trình đầu của (21-62) và từ (21-58), ta có:

$$M_1 = D \cdot \frac{d^2 w}{dx^2}$$

Thay vào các phương trình vi phân (21-57) và (21-56), ta được:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{T_2}{R} = p_n$$

Tính T_2 từ (21-64) và thay vào phương trình cuối cùng này, ta được:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2 D} w = \frac{p_n}{D} - \mu \frac{T_1}{RD}$$

Sử dụng các kí hiệu:

$$\begin{aligned} \frac{Eh}{R^2 D} &= \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h^2} = 4k^4 \\ k &= \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2}} \end{aligned} \quad (21-65)$$

Phương trình vi phân trên được viết dưới dạng:

$$w^{(IV)} + 4k^4 w = \frac{p_n}{D} - \frac{\mu T_1}{RD} \quad (21-66)$$

Trong đó T_1 xem như đã biết, vì đó là hai ứng lực theo chiều trục. Nếu $p_n=0$ thì T_1 được xác định từ điều kiện chịu lực ở hai gối đầu.

Khi phương trình (21.65) đã được giải, nghĩa là ta đã có w thì các thành phần mô men và nội lực khác đều được xác định. Thực vậy ta sẽ có:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= Dw'' \\ M_2 &= \mu Dw'' \\ Q &= Dw''' \end{aligned} \right\} \quad (21-67)$$

Ta dễ dàng tìm thấy các thành phần ứng suất như sau:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{T_1}{h_1} \pm \frac{6M_1}{h^2} \\ \sigma_2 &= \frac{T_2}{h} \pm \frac{6M_2}{h^2} \end{aligned} \right\} \quad (21-68)$$

Bây giờ ta đi sâu vào cách giải phương trình vi phân (21-67). Đó là phương trình vi phân tuyến tính với các hệ số là hằng số, do đó nghiệm sẽ có dạng hàm số vòng và hàm số hypebôlich. Nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất:

$$w^{(IV)} + 4k^4 \cdot w = 0 \quad (21-69)$$

có dạng : $w = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx} (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx)$

Trong nghiệm đó ta có hai số hạng, một tắt nhanh theo x và một số hạng lại tăng lên theo x . Điều đó cho phép ta bỏ qua một số hạng và bài toán sẽ được đơn giản hơn rất

hiều. Kí hiệu w^* là một nghiệm riêng của (21-66) thì nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đó sẽ là :

$$w = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + w^* \quad (21-70)$$

Ta sẽ làm rõ cách giải bằng những ví dụ cụ thể sau đây:

Ví dụ 1: Tính ứng suất thành trên thành bình vỏ trụ đựng đầy chất lỏng như hình vẽ 21.47. Gọi trọng lượng riêng của chất lỏng là γ .

Kích thước cho như sau: $R=1m$, $h=5mm$, $H=5m$, vật liệu của vỏ bằng thép $E = 2 \cdot 10^5 N/mm^2$, $\mu = 0,3$, $\gamma = 0,01N/cm^3$

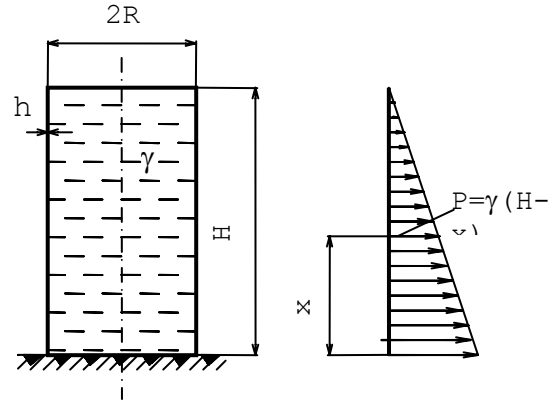
Bài giải: Gọi x là khoảng cách từ đáy đến điểm đang xét ở trên thành bình. Áp suất tại đó là :

$$p = \gamma(H - x) \quad (1)$$

Ứng lực theo phương dọc trục $T_1=0$, vì vậy có thể chọn nghiệm riêng của (21-66) dưới dạng :

$$w^* = \frac{\gamma(H - x)}{4k^4 D} \quad (2)$$

Nghiem tổng quát sẽ là:



Hình 21.47: Sơ đồ tính ứng suất trên thành bình vỏ trụ đựng đầy chất lỏng

$$w = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + \frac{\gamma(H - x)}{4k^4 D}$$

(3)

Các điều kiện biên sẽ như sau:

$$\text{Với } x=0, w=0 \text{ và } \frac{dw}{dx} = 0$$

$$\text{Với } x=H, M_1=0 \text{ và } Q=0$$

Từ (21-67) và (19-68) suy ra:

$$\text{Với } x=H \text{ thì } \frac{d^2 w}{dx^2} \text{ và } \frac{d^3 w}{dx^3} = 0$$

Từ các điều kiện đó ta có hệ thống bốn phương trình để xác định bốn hằng số C_1, C_2, C_3, C_4 như sau:

$$C_2 + C_4 = -\frac{\gamma H}{4k^4 D}$$

$$C_1 - C_2 + C_3 + C_4 = \frac{\gamma}{4k^5 D}$$

$$-C_1 e^{-kH} \cos kH + C_2 e^{-kH} \sin kH + C_3 e^{kH} \cos kH - C_4 e^{kH} \sin kH = 0$$

$$C_1 e^{-kH} (\sin kH + \cos kH) + C_2 e^{-kH} (\cos kH - \sin kH) +$$

$$+ C_3 e^{kH} (\cos kH - \sin kH) - C_4 e^{kH} (\cos kH + \sin kH) = 0 \quad (4)$$

Khử C_3 và C_4 ta nhận được:

$$-C_1 [e^{-kH} \cos kH + e^{kH} \cos kH] + C_2 [e^{-kH} \sin kH + e^{kH} (2 \cos kH + \sin kH)] =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\gamma}{4k^5} e^{kH} \cos kH - \frac{\gamma H}{4k^4 D} e^{kH} (\sin kH - \cos kH) \\
&- C_1 [e^{-kH} (\sin kH + \cos kH) - e^{kH} (\cos kH - \sin kH)] + \\
&+ C_2 [e^{-kH} (\cos kH - \sin kH)] + e^{kH} (3 \cos kH - \sin kH) = \\
&= \frac{\gamma}{4k^5 D} e^{kH} (\cos kH - \sin kH) - \frac{\gamma H}{4k^4 D} \cdot 2e^{kH} \cos kH \quad (5)
\end{aligned}$$

Từ (21-65) ta có :

$$k = \sqrt[4]{\frac{3(1-0,09)}{100^2 \cdot 0,5^2}} = 0,18178 \text{cm}^{-1}$$

$$kH = 91$$

Rõ ràng trị số $e^{-kH} = e^{-91}$ là quá nhỏ so với $e^{kH} = e^{91}$, vì vậy ta có thể bỏ qua trị số e^{-kH} trong hai phương trình cuối cùng này. Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\gamma}{4k^4 D} \left(\frac{1}{k} - H \right); \quad C_2 = -\frac{\gamma}{4k^4 D} \\
C_3 &= C_4 = 0
\end{aligned}$$

Thực ra phải nói rằng C_3 và C_4 không phải là bằng không mà có một trị số nào đó song rất bé so với C_1, C_2 . Sự bé đó giống với sự tương quan giữa e^{-kH} và e^{kH}

Nếu phải tính cụ thể thì chúng ta có thể thực hiện phương pháp đúng dần để giải hệ phương trình (5) trên đây.

Ta hãy quay lại biểu thức (3). Chú ý rằng C_3 và C_4 là rất nhỏ nên số hạng thứ hai:

$$e^{kx} (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx)$$

có thể bỏ qua so với số hạng thứ nhất:

$$e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx)$$

Sai số do sự bỏ qua đó gây ra càng nhỏ khi x càng nhỏ. Với x lớn, giả dụ $x \approx H$, sự bỏ qua đó không còn đúng vì lí do C_3 và C_4 có trị số tương đối lớn. Thực vậy lúc đó e^{kx} lại trở nên cực kì lớn và haisố hạng trên trở nên cùng hạng. Song ngay trong trường hợp đó sự bỏ qua trên đây không đưa đến những sai số đáng kể, vì rằng như chúng ta đã thấy, trị số mô men uốn và ứng suất lớn nhất lại nằm ở vùng bị ngàm, nghĩa là tại nơi mà sự bỏ qua đó cho ta công thức đúng nhất.

Với điều nhận xét đó, nếu phải khảo sát chính các hàm w ở miền $w \approx H$, thì ta có nên chuyển gốc hệ trục tọa độ và như vậy sẽ thay đổi điều kiện biên và do đó cũng bỏ qua C_3 và C_4 . Với cách đó hàm số tắt dần với hệ số e^{-kx} sẽ cho phép ta xác định chính xác ứng suất trong vỏ trụ ở tại biên thứ hai.

Lập luận bỏ qua phần tăng của hàm w và khảo sát phần hàm số tắt dần còn lại trong vùng biên của vỏ một cách độc lập với nhau (ta gọi là hiệu ứng biên).

Rõ ràng rằng phương pháp đó chỉ có thể ứng dụng cho trường hợp H khá lớn để trị số e^{-kH} có thể bỏ qua so với e^{+kH} . Giả sử sai số cho phép đó là 5%, khi đó ta có:

$$0,05e^{kH} < e^{-kH}$$

$$\text{Do đó :} \quad kH > -\frac{1}{2} \ln 0,05 = 1,5$$

Trong trường hợp đang xét, từ công thức (21-65)

$$\frac{H}{\sqrt{Rh}} > \frac{1,5}{\sqrt[3]{3(1-\mu^2)}} = 1,16 \approx 1$$

Tóm lại, khả năng xét hiệu ứng ở các biên khác nhau là tùy thuộc vào trị số $\frac{H}{\sqrt{Rh}}$.

Nói cách khác, sự bỏ qua trên đây là cho phép trong trường hợp chiều cao của trụ không bé hơn trị số bình quân giữa bán kính và chiều dày.

$$H > \sqrt{Rh}$$

Ta tính tiếp cho bài toán:

Thay C_1 và C_2 vào biểu thức (3) và tính các đạo hàm ta có:

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\gamma}{4k^4 D} \left\{ e^{-kx} \left[\left(\frac{1}{k} - H \right) \sin kx - H \cos kx \right] + H - x \right\} \\ \zeta &= -\frac{\gamma}{4k^4 D} \left\{ e^{-kx} [(2kH - 1) \sin kx + \cos kx] - 1 \right\} \\ M_1 &= -\frac{\gamma}{2k^2} \cdot e^{-kx} \left[H \sin kx + \left(\frac{1}{k} - H \right) \cos kx \right] \\ M_2 &= \mu M_1, T_2 = \frac{Eh}{R} w \\ Q &= \frac{\gamma}{4k^2} \cdot e^{-kx} [\sin kx + (1 - 2H) \cos kx] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Để xác định ứng suất lớn nhất ta vẽ biểu đồ T_2 và M_1 (xem hình 21.48). Qua biểu đồ đó ta thấy trị số mô men uốn lớn nhất tại ngàm và trị số đó giảm rất nhanh khi đi xa khỏi ngàm. Ứng lực T_2 tại ngàm là lớn nhất và giảm nhanh chóng khi càng cách xa ngàm, và đồ thị biểu diễn T_2 là một đường thẳng. Phương trình của đường thẳng đó dễ dàng được xác định từ biểu thức (6) và (21-64). Với trị số x khá lớn:

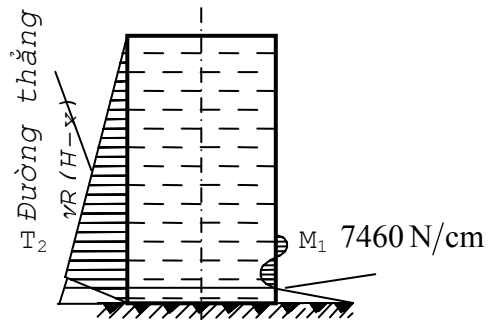
$$\begin{aligned} w &= \frac{\gamma}{4k^4 D} (H - x) \\ T_2 &= \gamma R (H - x) \end{aligned}$$

Các biểu thức này trùng với các biểu thức được tính với lý thuyết mô men. Quả vậy, từ điều kiện cân bằng của một nửa vòng hình trụ (hình 21.49) ta có:

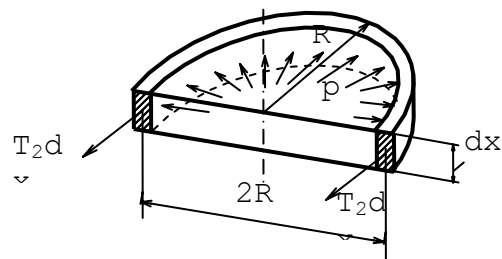
$$2pR \cdot dx = 2T_2 dx$$

$$T_2 = pR = \gamma \cdot R(H - x)$$

Như vậy, với những điểm xa ngàm sự tính toán ứng suất theo lý thuyết có mô men có thể thay bằng lý thuyết không mô men vì mô men uốn tại những nơi đó không còn ý nghĩa.



Hình 21.48: Sơ đồ tính ứng suất



Hình 21.49: Sơ đồ tính ứng suất

Ứng suất cực đại là ứng suất tại các điểm bên trong và bên ngoài của vỏ tại ngàm. Theo công thức (21-68) trị số các ứng suất chính tại mặt trong của vỏ là:

$$\sigma_1 = \frac{0}{0,5} + \frac{6 \cdot 74,6}{0,5^2} = 1790 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{0}{0,5} + 0,3 \cdot \frac{6 \cdot 74,6}{0,5^2} = 537 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_3 = 0$$

Ứng suất tương đương theo thuyết bền ứng suất lớn nhất là:

$$\sigma_{td} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 1790 \text{ N/cm}^2$$

Ở mặt ngoài của vỏ ta có:

$$\sigma_1 = -1790 \text{ N/cm}^2, \sigma_2 = -540 \text{ N/cm}^2, \sigma_3 = 0, \sigma_{td} = 1790 \text{ N/cm}^2.$$

Nếu ta tính ứng suất lớn nhất theo lý thuyết không mô men và tính với ứng lực kéo lớn nhất tại ngàm:

$$T_2 = \gamma R \cdot H$$

Ta sẽ có:
$$\sigma = \frac{T_2}{h} = \frac{10^{-2} \cdot 100 \cdot 500}{0,5} = 1000 \text{ N/cm}^2$$

Như vậy sai số gần gấp hai lần tại ngàm, do đó trong trường hợp này không thể tính theo lý thuyết không mô men được.

Ví dụ 2: Ống mỏng được cố định bởi hai mặt côn như hình vẽ 21.50. Xác định luật phân bố của ứng lực và mô men uốn trong ống. Cho biết $l=30\text{cm}$, $R=5\text{cm}$, $\mu = 0,3$. Giả sử $p_n=p_t=0$.

Bài giải: Ứng lực theo trục là:
$$T_1 = \frac{P}{2\pi R}$$

Bỏ qua lực ma sát trên mặt côn, trị số lực cắt Q được chỉ dẫn trên hình 21.51 và xác định bởi biểu thức:

$$Q = \frac{p\sqrt{3}}{2\pi R}$$

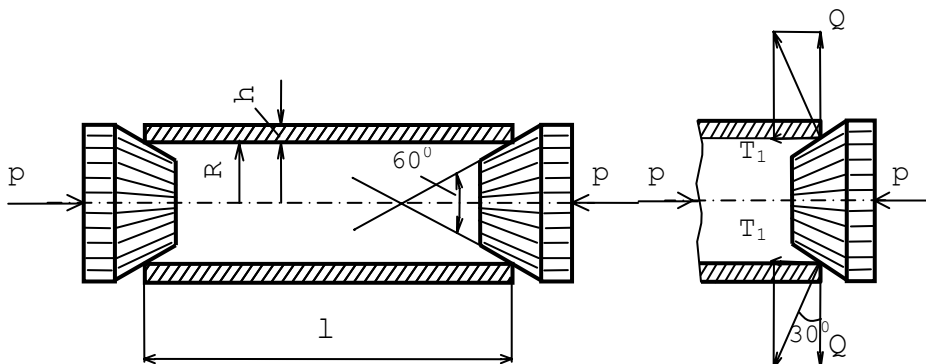
Nghiệm riêng của (21-56) được chọn dưới dạng:

$$w^* = \frac{\mu T}{4k^4 D \cdot R} = \frac{\mu \cdot P}{2\pi E \cdot h}$$

Nghiệm tổng quát của hàm chuyển vị theo (21-70) có dạng:

$$w = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx} (C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + \frac{\mu p}{2\pi E h}$$

Chọn gốc hệ trục tọa độ là một đầu góc.



Hình 21.50: Ống mỏng được cố định bởi

Hình 21.51: Sơ đồ tính ứng suất và mô men

Lập lại tất cả các lập luận như trên ta thấy có thể bỏ qua C_3 và C_4 khi tính ứng suất với điều kiện e^{-kx} có thể bỏ qua so với e^{kl} .

Ta tính
$$kl = \sqrt[4]{\frac{3(1-0,09)}{5^2 \cdot 0,5^2}} \cdot 30 = 24,4$$

Vậy việc bỏ qua C_3 và C_4 là cho phép, biểu thức của chuyển vị có thể viết lại dưới dạng:

$$w = e^{-kx} (C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + \frac{\mu p}{2\pi Eh}$$

Các đạo hàm của w là :

$$w' = ke^{-kx} [-(C_1 + C_2) \sin kx + (C_1 - C_2) \cos kx]$$

$$w'' = 2k^2 e^{-kx} (C_2 \sin kx + C_1 \cos kx)$$

$$w''' = 2k^3 e^{-kx} [(C_1 - C_2) \sin kx + (C_1 + C_2) \cos kx]$$

Thiết lập các điều kiện biên:

Với $x=0$, $M_1=0$ ($w' = 0$) và $Q = Dw''' = \frac{p\sqrt{3}}{2\pi R}$

Từ điều kiện thứ nhất ta rút ra được $C_1=0$ và từ điều kiện thứ hai $C_2 = \frac{p\sqrt{3}}{2\pi R}$

Từ đó:

$$w = \frac{p}{\pi Eh} \left[kR\sqrt{3}e^{-kx} \cos kx + \frac{\mu}{2} \right]$$

Các ứng lực có trị số là: $T_1 = -\frac{p}{2\pi R}$

$$T_2 = \frac{p}{\pi} k\sqrt{3}e^{-kx} \cos kx$$

Và trị số mô men uốn là:

$$M_1 = \frac{p\sqrt{3}}{2\pi kR} e^{-kx} \sin kx$$

$$M_2 = \mu M_1$$

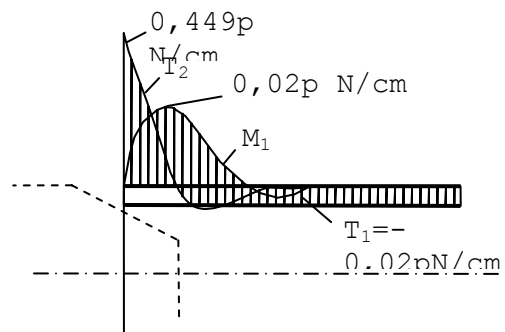
Từ các phương trình đó ta có thể vẽ các biểu đồ của mô men uốn và ứng lực T_1, T_2 như trên hình 21.52.

Các ứng suất lớn nhất là tại điểm gần vị trí cố định của ống, trị số của chúng là:

$$\sigma_2 = -\frac{0,449P}{0,5} = +0,898 \text{ N/cm}^2$$

Ứng suất tương đương là:

$$\sigma_{td} = \sigma_1 - \sigma_3 = 0,952 \text{ N/cm}^2$$



Hình 21.52:
Biểu đồ mô men và ứng lực

CÂU HỎI TỰ HỌC.

21.1. Thế nào là tấm và vỏ, phân biệt chúng ?

21.2. Phương hướng tính ứng suất đối với tấm tròn chịu lực phân bố đối xứng ?

- 21.3. Các công thức tính ứng suất của tấm tròn ?
- 21.4. Sự khác nhau khi tính toán tấm tròn và tấm chữ nhật ?
- 21.5. Các công thức tính ứng suất trong tấm chữ nhật ?
- 21.6. Cách xét các biến dạng và ứng suất đối với vỏ ?
- 21.7. Các biểu thức tính ứng suất đối với vỏ trụ ?
- 21.8. Các phương trình cân bằng đối với vỏ đối xứng ?
- 21.9. Phương trình tương thích giữa chuyển vị và biến dạng.
- 21.10. Tương quan giữa biến dạng và ứng lực ?
- 21.11. Ứng suất uốn trong vỏ trụ chịu áp suất bên trong ?



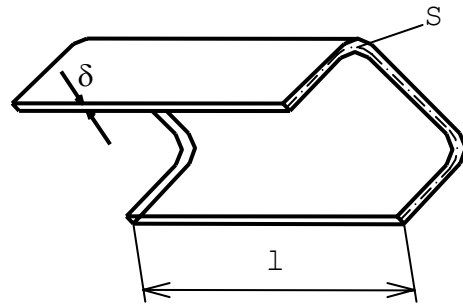
Chương 22

KẾT CẤU THANH THÀNH MỎNG

22.1. KHÁI NIỆM.

Kết cấu thanh thành mỏng là một dạng thanh theo định nghĩa trước đây, tức là nó cũng là một vật thể có kích thước theo một phương lớn hơn rất nhiều so với kích thước theo hai phương kia. Thế nhưng kích thước theo một phương trong hai phương còn lại rất nhỏ. Và thường chu vi của nó là hở, chúng ta sẽ rõ điều này khi đi vào nội dung nghiên cứu. Và kết cấu thanh thành mỏng có thể xem là một kết cấu đặc biệt. Kết cấu này cũng thường gặp trong ngành cơ khí, xây dựng, đặc biệt được ứng dụng trong kết cấu máy bay, tàu thủy, toa xe... Vì vậy chúng tôi cho rằng việc giới thiệu những vấn đề cơ bản của tính toán của kết cấu thanh thành mỏng dưới đây là cần thiết.

Ở hình 22.1 biểu diễn một thanh thành mỏng, thanh này có bề dày δ rất bé so với chu tuyến S (đường trung bình của mặt cắt ngang) và S này lại rất bé so với chiều dài l của thanh. Loại kết cấu thanh thành mỏng này có ưu việt ở chỗ là trọng lượng nhỏ nhưng chịu lực lớn cho nên nó được sử dụng trong kết cấu máy bay, tàu thủy, ô tô, tàu hỏa, một số công trình xây dựng và cầu....



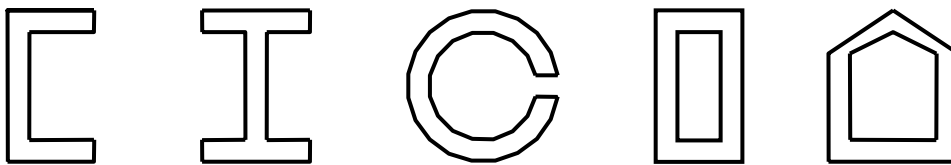
Hình 22.1: Kết cấu một thanh thành mỏng

Tính toán về kết cấu thanh thành mỏng cũng là một chuyên đề lớn đã được một số nhà bác học như Timôsenko, Vlasốp... nghiên cứu. Đặc biệt Vlasốp không những nghiên cứu về tính toán độ bền mà còn nghiên cứu về ổn định, về dao động của các kết cấu thanh thành mỏng, vì vậy đôi khi người ta còn gọi là lý thuyết của Vlasốp. Chúng ta làm quen với một số định nghĩa sau:

- Mặt cách đều hai mặt bên của một thanh được gọi là mặt trung gian. Giao tuyến của mặt trung gian với mặt cắt ngang gọi là đường trung gian. Hình dáng của đường trung gian còn được gọi là chu tuyến của mặt cắt ngang.

- Thanh có mặt cắt ngang hở thì chu tuyến của nó là một đường hở và thanh có mặt cắt ngang là kín thì chu tuyến của nó là một đường kín.

- Bề dày δ của thanh cũng có thể không đổi hoặc thay đổi (xem hình 22.2).



Hình 22.2: Bề dày của thanh thành mỏng

22.2. ĐẶC TRƯNG QUẠT CỦA MẶT CẮT NGANG CỦA MỘT THANH THÀNH MỎNG HỞ.

22.2.1. Tọa độ quạt (trong hệ độc cực).

Giả sử có một đường chu tuyến như trên hình 22.3. Ta chọn một điểm O bất kì trên đường đó làm gốc tọa độ và lấy một điểm P bất kì trên mặt phẳng chứa mặt cắt ngang gọi là điểm cực. Có một điểm A trên đường chu tuyến cách O theo đường chu tuyến là S, ta xét phân tố AB có độ dài theo đường chu tuyến là dS (xem hình 22.3), ta có:

- Hai lần diện tích tam giác PAB là:
 $d\omega = r \cdot dS$

Trong đó r là khoảng cách từ P đến đường tiếp tuyến tại A.

- Ta gọi tích phân dưới đây là tọa độ quạt của A:

$$\omega = \int_s^S d\omega = \int_0^S r dS \quad \text{cm}^2 \quad (22-1)$$

- Tọa độ quạt này về trị số bằng 2 lần diện tích của tia PA quét trong mặt cắt khi A chạy từ O đến điểm đang xét. Dấu của tọa độ quạt được xem là (+) khi tia A quanh điểm P theo chiều kim đồng hồ và là (-) khi tia PA quay ngược chiều kim đồng hồ. Vậy tọa độ quạt phụ thuộc vào vị trí của cực P và gốc tọa độ O đã chọn.

Dưới đây chúng ta trình bày cách tính và vẽ các biểu đồ quạt.

Ví dụ 1: Cho một đường trung gian và chọn gốc tọa độ O và cực P như trên hình vẽ 22.4.

Bài giải: Tọa độ A là 2 lần diện tích của tam giác POA:

$$\omega_A = -PO \times OA = -a \cdot S$$

Đại lượng này mang dấu (-) vì tia PA quét từ O → A quay ngược chiều kim đồng hồ.

Giá trị của tọa độ quạt tại một điểm trên đường chu tuyến được vẽ ứng với tung độ của nó kể từ đường trung tuyến (xem hình vẽ 22.4). Với cách làm như vậy:

Tại điểm (1) sẽ có : $\omega_1 = -a^2$

Tại điểm (2) sẽ có : $\omega_2 = -2a^2$

Tại điểm (3) sẽ có : $\omega_3 = +a^2$

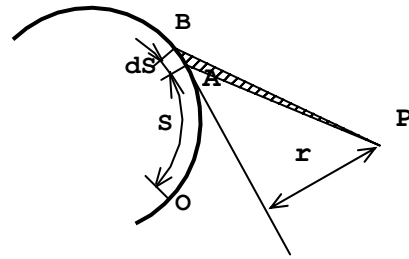
Tại điểm (4) sẽ có : $\omega_4 = 0$

(Tại điểm 4 có hai giá trị từ O đến (3) và từ (3)-(4) bằng nhau nhưng ngược dấu)

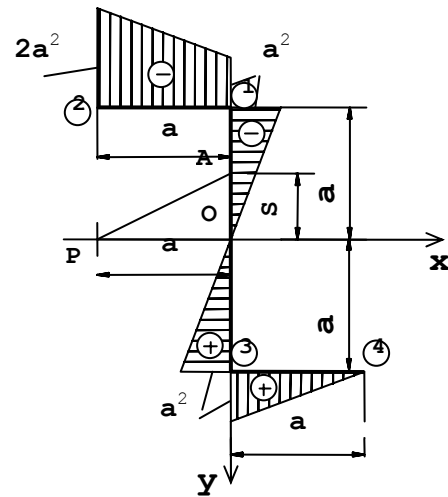
Ví dụ 2: Hãy vẽ biểu đồ tọa độ quạt của đường chu tuyến của mặt cắt ngang được biểu diễn trên hình 22.5.

Bài giải: Với cách chọn gốc O và cực P như trên hình vẽ thì khi A chạy trên đường PO2 hay P-3, giá trị của tọa độ quạt bằng không.

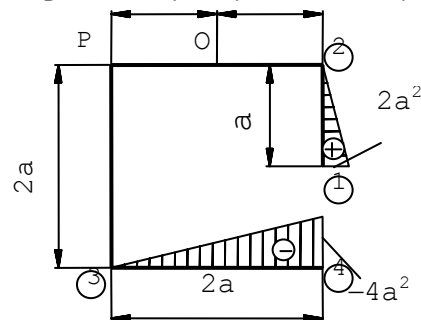
Tại điểm (1) : $\omega_1 = 2a^2$



Hình 22.3: Tính diện tích quạt trong hệ tọa độ độc cực



Hình 22.4: Sơ đồ chọn gốc tọa độ aO và cực P



Hình 22.5: Biểu đồ tọa độ quạt

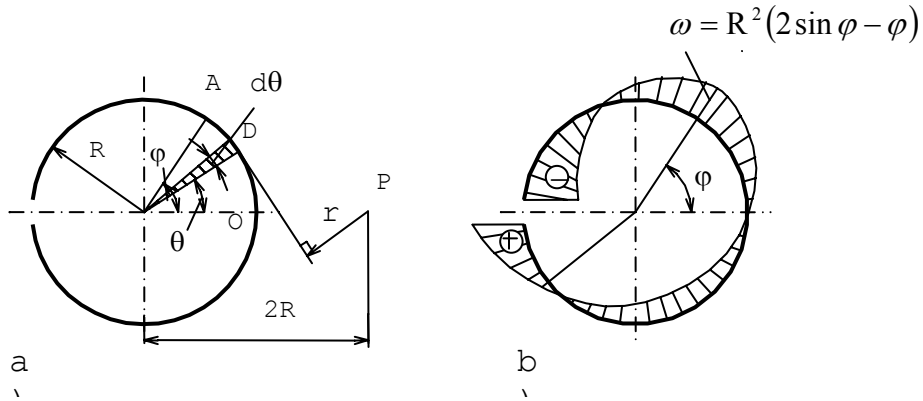
Tại điểm (2) : $\omega_1 = -4a^2$

Biểu đồ tọa độ quạt được biểu diễn trên hình 22.5.

Ví dụ 3: Trên hình 22.6 biểu diễn một đường chu tuyến tròn hở với vị trí cực và góc như hình vẽ. Hãy vẽ biểu đồ tọa độ của nó.

Bài giải: Gọi θ là góc ở tâm của cung $OD=S$ và r là khoảng cách từ P đến đường tiếp tuyến của vòng tròn tại D , r được xác định:

$$r = 2R \cdot \cos\theta - R \quad (1)$$



Hình 22.6:
Đường chu tuyến tròn hở (a) và biểu đồ tọa độ quạt của nó (b)

Vậy tọa độ quạt tại A là diện tích quạt do tia PD quét khi D chạy từ $O \rightarrow A$.

$$\omega_A = \int_S r dS = R^2 \int_0^\varphi (2 \cos\theta - 1) d\varphi$$

Hay
$$\omega_A = R^2(2 \sin\varphi - \varphi) \quad (2)$$

Căn cứ vào (2) ta vẽ được biểu đồ tọa độ quạt như trên hình 22.6b

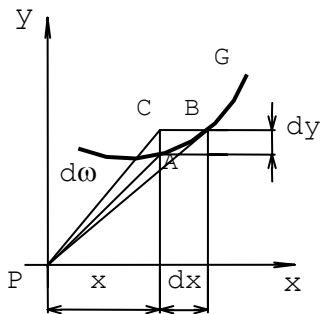
22.2.2. Tọa độ quạt trong hệ trục vuông góc.

Trong hệ tọa độ vuông góc Pxy có một đường cong G biểu diễn một đoạn của đường trung gian của một mặt cắt ngang nào đó (xem hình 22.7).

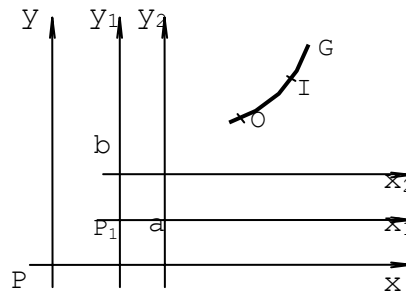
Một cách gần đúng, ta xem diện tích vi phân $d\omega$ là bằng hai lần hiệu của hai diện tích của hai tam giác PBC và PAC_1 , nên ta có:

$$d\omega = ydx - xdy \quad (22-2)$$

Trong đó x, y là tọa độ của điểm A và $(x+dx), (y+dy)$ là tọa độ của điểm B.



Hình 22.7: Tọa độ quạt trong hệ trục vuông góc



Hình 22.8: Quan hệ tọa độ quạt khi đường cong có hai cực

Chúng ta cũng có thể thiết lập tương quan giữa các tọa độ quạt đối với 2 cực bất kì.

Thật vậy: trong mặt phẳng chứa đường cong G lấy hai cực P_1 và P_2 với hai trục song song $P_1x_1y_1$ và $P_2x_2y_2$ như trên hình vẽ 22.8. Tọa độ của cực P_2 trong hệ trục $P_1x_1y_1$ là a, b . Giả sử đã xác định được tọa độ quạt trên cung $OI=S$ tương ứng với cực P_1 , bây giờ hãy xác định tọa độ quạt của đoạn cung đó với cực mới là P_2 .

Tương tự như trên ta có:

$$d\omega_2 = y_2 dx_2 - x_2 dy_2$$

Theo hình 22.8 ta có được quan hệ sau:

$$x_2 = x_1 - a; y_2 = y_1 - b$$

Vậy:
$$d\omega_2 = (y_1 - b)dx_1 - (x_1 - a)dy_1$$

Lấy tích phân hai vế dọc theo \widehat{OI} , ta có:

$$\omega_2(S) = \omega_1(S) - b(x_1 - x_{10}) + a(y_1 - y_{10})$$

Trong đó x_1 và y_1 là tọa độ của điểm I và x_{10}, y_{10} là tọa độ của điểm O trong hệ tọa độ $P_1x_1y_1$. Nếu có một hệ trục bất kì song song với chúng là Pxy chẳng hạn (xem hình 22.8) thì ta có thể viết ω_2 dưới dạng mới:

$$\omega_2(S) = \omega_1(S) - b(x - x_0) + a(y - y_0) \quad (22-3)$$

Từ biểu thức (22-3) ta có nhận xét sau đây: Khi thay đổi vị trí cực P, nghĩa là giá trị a, b thay đổi thì tọa độ quạt sẽ thay đổi một trị số tỉ lệ bậc nhất đối với các tọa độ x, y . Khi thay đổi vị trí gốc O trên cung, nghĩa là thay đổi vị trí tọa độ x_0, y_0 thì tọa độ quạt thay đổi một hằng số.

22.2.3. Đặc trưng quạt và cách xác định chúng.

Cũng như trong chương đặc trưng hình học trước đây, ta có các định nghĩa sau đây:

- Gọi mô men tĩnh quạt là biểu thức sau:

$$S_\omega = \iint_F \omega dF \quad (\text{cm}^4) \quad (22-4)$$

- Gọi mô men quạt đường là:

$$\left. \begin{aligned} J_{\omega_x} &= \iint_F \omega y dF (\text{cm}^5) \\ J_{\omega_y} &= \iint_F \omega x dF (\text{cm}^5) \end{aligned} \right\} \quad (22-5)$$

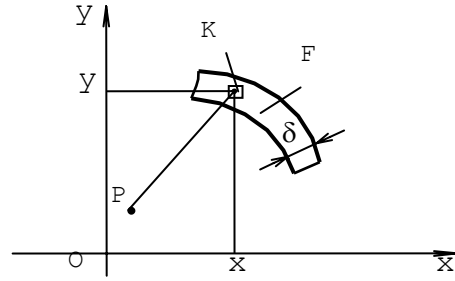
- Gọi mô men tĩnh quạt là tích phân sau:

$$J_\omega = \iint_F \omega^2 dF \quad (\text{cm}^6) \quad (22-6)$$

Với F là diện tích của mặt cắt ngang; x, y là tọa độ của điểm K nào đó trên mặt cắt ngang và ω là tọa độ quạt tương ứng của điểm K đó đối với cực P đã chọn (hình 22.9).

Trong trường hợp bề dày δ không đổi thì các biểu thức tích phân trên có dạng như sau :

$$\left. \begin{aligned} S_{\omega} &= \delta \int_S \omega dS \\ J_{\omega_x} &= \delta \int_S \omega y dS \\ J_{\omega_y} &= \delta \int_S \omega x dS \\ J_{\omega} &= \delta \int_S \omega^2 dS \end{aligned} \right\} \quad (22-7)$$



Hình 22.9: Cách xác định các đặc trưng của quạt

Rõ ràng nếu biểu đồ tọa độ quạt ω đã được xác định thì các tích phân (22-7) có thể tính dễ dàng. Nếu các đường chu tuyến có những đoạn thẳng thì các tích phân (22-7) có thể xác định bằng phương pháp nhân biểu đồ VêrêSaghin như trong chương tính chuyển vị.

Ví dụ 4: Hãy tính các đặc trưng quạt cho hình 22.6a (trong ví dụ 3).

Bài giải: Ta đã xác định được tọa độ quạt tại điểm A bất kỳ trên chu tuyến ở ví dụ 3 là:

$$\omega_A = R^2(2 \sin \varphi - \varphi)$$

Vậy các đặc trưng quạt theo (22-7) được tính như sau:

$$S_{\omega} = \iint_F \omega dF = R^3 \delta \int_{-\pi}^{\pi} (2 \sin \varphi - \varphi) d\varphi = 0$$

$$J_{\omega_y} = \iint_F x \omega dF = R^4 \delta \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi (2 \sin \varphi - \varphi) d\varphi$$

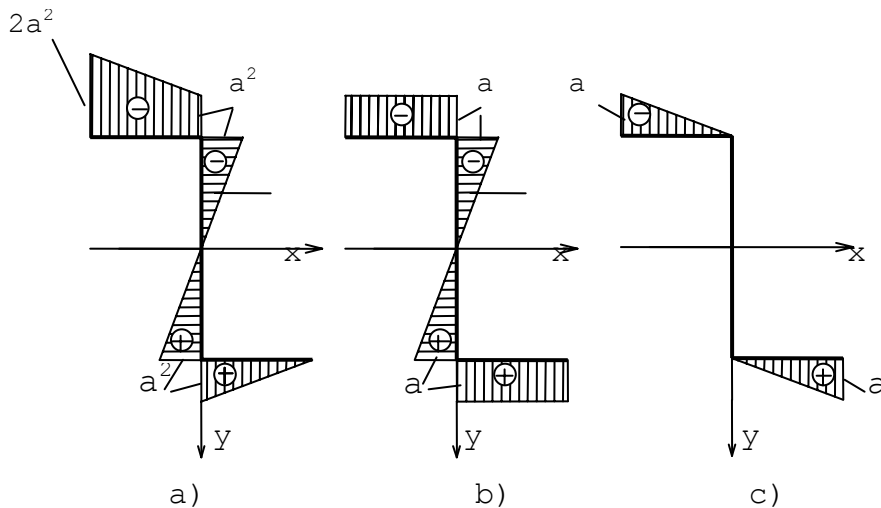
$$J_{\omega_x} = \iint_F y \omega dF = R^4 \delta \int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi (2 \sin \varphi - \varphi) d\varphi$$

$$J_{\omega} = \iint_F \omega^2 dF = R^5 \delta \int_{-\pi}^{\pi} (2 \sin \varphi - \varphi)^2 d\varphi = 2\pi \left(\frac{\pi^2}{3} - 2 \right) R^5 \delta$$

Chú ý : $dF = \delta \times d\varphi$

Ví dụ 5: Hãy xác định các đặc trưng của quạt của mặt cắt với chu tuyến của nó được biểu diễn trên hình 22.10.

Bài giải : Ngoài biểu đồ tọa độ quạt đã được vẽ ở ví dụ 1 (hình 22.10a). Để có



Hình 22.10: ²²⁸ Biểu đồ tọa độ quạt (a) và biểu đồ về giá trị y và x ở đường chu tuyến (b), (c)

được các đặc trưng quạt ta vẽ thêm về giá trị của y và x ở các vị trí của đường chu tuyến (xem hình 22.10b, 20.10c).

Bây giờ chúng ta lần lượt tính các đặc trưng quạt bằng cách nhân biểu đồ VêrêSaghin:

$$S_{\omega} = \iint_F \omega dF = \delta \int_S \omega dF = -\delta \frac{a^3}{2}$$

$$J_{\omega_x} = \iint_F \omega y dF = \frac{\delta a^4}{3}$$

$$J_{\omega_y} = \iint_F \omega x dF = \delta a^4$$

$$J_{\omega} = \iint_F \omega^2 dF = \frac{7}{3} \delta a^5$$

Chúng ta có một số định nghĩa cần lưu ý như sau:

- Nếu $J_{\omega_x} = J_{\omega_y} = 0$ thì cực P lúc này sẽ là cực chính.
- Nếu $S_{\omega} = 0$ thì gốc O tương ứng gọi là gốc chính.
- Biểu đồ tọa độ quạt tương ứng với cực chính và gốc chính được gọi là biểu đồ tọa độ quạt chính. Mô men quán tính quạt tương ứng với biểu đồ đó được gọi là mô men quán tính quạt chính. Như ở ví dụ 4 thì P và O là các cực chính và gốc chính và trị số J_{ω} được gọi là mô men quán tính quạt chính.

Với các định nghĩa đó việc xác định cực chính, gốc chính là rất quan trọng. Dưới đây chúng ta trình bày cách xác định cực và gốc chính đó.

Ta có một chu tuyến của mặt cắt ngang như trên hình vẽ 22.11. Giả sử có hệ tọa độ Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt đó. Ta chọn cực P_1 bất kì, mà với nó ta đã tính được tọa độ quạt ω_1 và các đặc trưng khác đối với hệ trục tọa độ $P_1x_1y_1$.

Gọi P_2 là cực chính phải tìm thì theo định nghĩa là:

$$J_{\omega_{2y}} = \iint_F \omega_2 x dF = 0$$

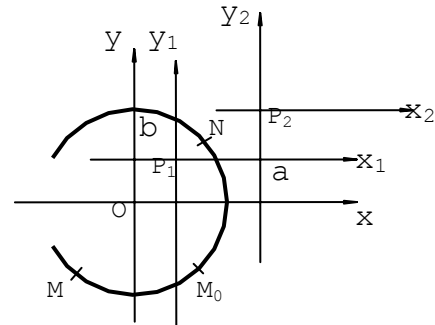
và
$$J_{\omega_{2x}} = \iint_F \omega_2 y dF = 0$$

Từ biểu thức (22-3), ta có:

$$J_{\omega_{2y}} = \iint_F [\omega_1 - b(x - x_0) + a(y - y_0)] x dF = 0$$

$$J_{\omega_{2x}} = \iint_F [\omega_1 - b(x - x_0) + a(y - y_0)] y dF = 0$$

Cũng như ở trên a và b là tọa độ của cực P_2 trong hệ tọa độ $P_1x_1y_1$. Nếu có một hệ trục song song thì cực P_2 và P_1 trong hệ này có tọa độ là (x_2, y_2) và (x_1, y_1) thì trị số a và b lúc này là hiệu số của tọa độ x_2, x_1 và y_2, y_1 . Chú ý như giả thiết ở trên Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm, thì ta sẽ có:



Hình 22.11: Sơ đồ xác định cực và gốc chính

$$\left. \begin{aligned} a &= x_2 - x_1 = \frac{-J_{\omega_{1x}}}{J_x} \\ b &= y_2 - y_1 = \frac{J_{\omega_{1y}}}{J_y} \end{aligned} \right\} \quad (22-8)$$

Đây là công thức để xác định tọa độ của P_2 từ vị trí P_1 bất kì.

Vị trí của điểm gốc chính được xác định từ điều kiện: $S_{\omega}=0$

Trên hình vẽ 22.11 lúc đầu ta chọn một điểm bất kì là M làm gốc, tọa độ quạt của N đối với điểm gốc M được kí hiệu là ω_M . Nếu chọn một điểm M_0 khác làm gốc thì ta sẽ có mối quan hệ trên hình 22.11 sẽ là:

$$\omega_M^N = \omega_{M_0}^N + \omega_M^{M_0}$$

Vậy:

$$\omega_{M_0}^N = \omega_M^N - \omega_M^{M_0}$$

Nếu xem M_0 là điểm gốc chính thì:

$$S_{\omega_{M_0}^N} = \iint_F \omega_{M_0}^N dF = 0$$

Hay

$$S_{\omega_{M_0}^N} = \iint_F (\omega_M^N - \omega_M^{M_0}) dF = 0$$

Suy ra:

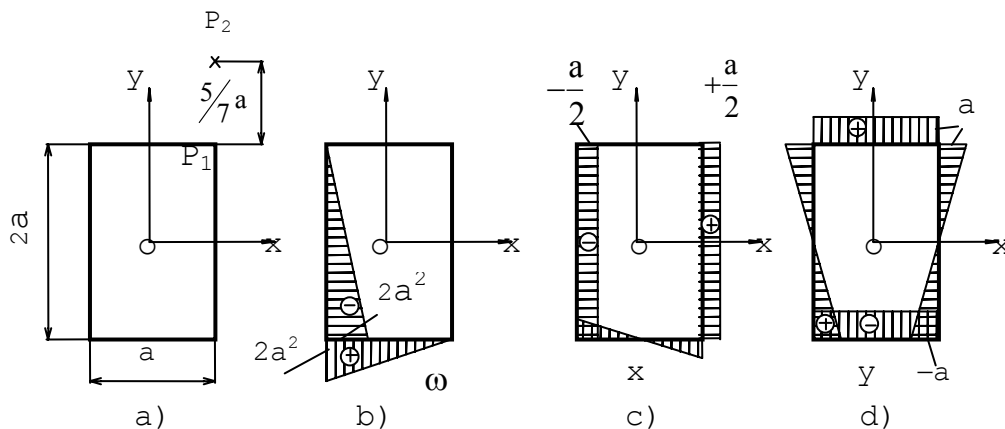
$$\iint_F \omega_M^N dF - \omega_M^{M_0} \iint_F dF = 0$$

Cuối cùng ta tính được $\omega_M^{M_0}$ như sau:

$$\omega_M^{M_0} = \frac{\iint_F \omega_M^N dF}{F} \quad (22-9)$$

Công thức (22-8) cho phép ta xác định được tọa độ quạt của điểm M_0 từ điểm gốc M bất kì đã chọn ban đầu.

Ví dụ 6: Hãy xác định cực chính và góc chính của chu tuyến hình chữ nhật với bề dày δ không đổi như trên hình 22.12.



Hình 22.12: Xác định cực chính và góc chính của chu tuyến hình chữ nhật với chiều dày δ không đổi

Bài giải: Đầu tiên ta phải xác định hệ trục tọa độ quán tính chính trung tâm của mặt cắt này, do bề dày δ không đổi nên hệ trục quán tính trung tâm cũng là Oxy (xem hình 22.12a). Như trong chương đặc trưng hình học ta xác định dễ dàng các đại lượng sau đây:

Lúc đầu ta chọn P_1 là ở góc hình chữ nhật (xem hình 22.12a). Từ đây ta tính được tọa độ quạt ω_1 (xem hình 22.12b). Để tính các mô men quạt ta phải vẽ thêm các biểu đồ x và y (hình 22.12c và 22.12d). Sau đó ta dùng phương pháp nhân biểu đồ VêrêSaghin, ta được:

$$J_{\omega_1 y} = \iint_F x \cdot \omega_1 dF = \frac{5}{6} a^4 \cdot \delta$$

và
$$J_{\omega_1 x} = \iint_F y \cdot \omega_1 dF = -\frac{1}{3} a^4 \cdot \delta$$

$$J_x = \frac{10}{3} a^3 \delta$$

$$J_y = \frac{7}{6} a^3 \delta$$

Cực P_2 được xác định nhờ công thức (22-8):

$$x_2 = \frac{1}{10} a + x_1; \quad y_2 = \frac{5}{7} a + y_1$$

Ứng với cực P_2 và góc O ta vẽ được biểu đồ quạt như trên hình 22.13.

Mô men tĩnh quạt đối với góc O là:

$$\iint_F \omega_0^N dF = \frac{38}{70} a^3 \delta$$

Từ công thức (22-9) ta xác định được tọa độ quạt đối với góc chính O:

$$\omega^* = \frac{\iint_F \omega_0^N dF}{F} = \frac{\frac{38}{70} a^3 \delta}{6a\delta} = 0,09a^2$$

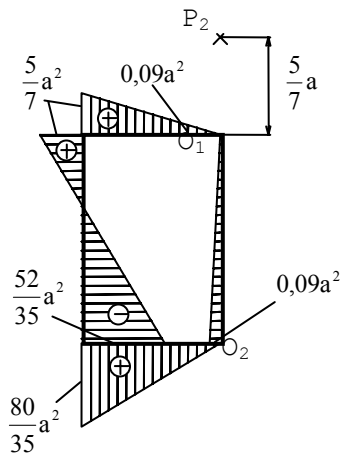
Trên hình 22.13 có hai điểm O_1 và O_2 có góc tọa độ quạt bằng $0,09a^2$. Ta chọn O_1 gần cực P_2 là điểm góc chính.

22.3. ỨNG SUẤT TIẾP TRONG THÀNH MỎNG KHI CHỊU UỐN NGANG.

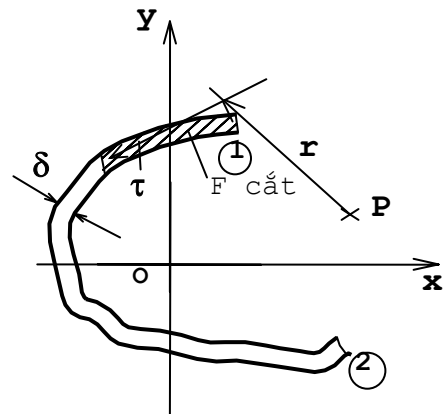
Ứng với bài toán uốn ngang thì trên mặt cắt ngang của thanh phải có hai thành phần nội lực là mô men uốn M_x và lực cắt Q_y . Như vậy chúng ta đã biết để tính giá trị ứng suất pháp ta vẫn sử dụng công thức đã được xây dựng trong phần uốn thuần túy:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \cdot y \quad (22-10)$$

Đối với kết cấu thanh thành mỏng ta có thể sử dụng khá chính xác công thức Durapski để tính ứng



Hình 22.13: Biểu đồ quạt



Hình 22.14: Sơ đồ tính ứng suất tiếp τ

suất tiếp mà ta đã thiết lập phần tính ứng suất trong chương uốn ngang phẳng:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^c}{J_x \cdot \delta} \quad (22-11)$$

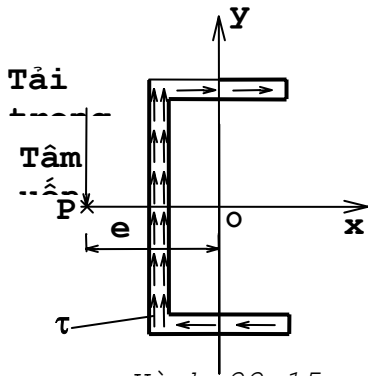
Trong đó S_x^c là mô men tĩnh của phần diện tích bị cắt lấy đối với trục quán tính trung tâm x, δ là bề dày (xem hình 22.14) và xem ứng suất phân bố đều trên δ .

Nếu trên mặt cắt có xuất hiện thêm lực cắt theo phương x (Q_x) thì giá trị ứng suất tiếp do Q_x sinh ra cũng được tính tương tự:

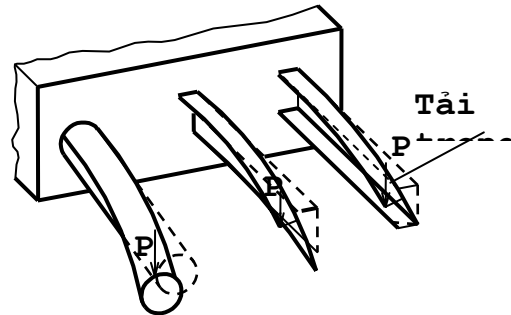
$$\tau = \frac{Q_x S_y^c}{J_y \cdot \delta} \quad (22-12)$$

Ứng suất tiếp τ này có một tính chất quan trọng là: Ứng suất tiếp này tạo thành một luồng trên mặt cắt. Rõ ràng hợp lực của nó trên toàn bộ mặt cắt sẽ là các lực cắt Q_y và Q_x . Nếu thu gọn hợp lực của các ứng suất tiếp đó về trọng tâm của mặt cắt, nó sẽ gây ra một mô men xoắn phụ quanh trọng tâm O của mặt cắt (xem hình 22.15). Có nghĩa là khi tải trọng tác dụng tại O thì bài toán uốn ngang phẳng ngoài mô men uốn M_x và lực cắt Q_y

còn có một mô men xoắn phụ nữa. Mô men xoắn này sẽ làm cho mặt cắt vênh đi như trên hình 22.16. Chắc rằng sẽ có một điểm nào đó để khi tải trọng tác dụng theo phương y đặt tại điểm đó thì mô men xoắn phụ này bị triệt tiêu, điểm đó được gọi là **tâm uốn**. Chú ý là mặt cắt ta đang nghiên cứu thì trục y không phải là trục đối xứng nên tâm uốn sẽ lệch khỏi trọng tâm O- điểm P chẳng hạn nó nằm trên trục x nhưng lệch qua một bên (xem hình 22.15). Bây giờ chúng ta xác định tâm uốn đó.



Hình 22.15:
Luồng ứng suất cắt



Hình 22.16: Mô men xoắn phụ do ứng suất tiếp gây ra

Một cách tổng quát trước tiên ta giả sử tính mô men xoắn nội lực này do ứng suất tiếp τ gây ra đối với một điểm P nào đó (xem hình 22.14) thì:

$$M_p = \iint_F \tau \cdot \delta \cdot r dS$$

Trong đó r là khoảng cách từ P đến phương của ứng suất tiếp τ và dS là độ dài vi phân của đường chu tuyến tại ứng suất tiếp đó. Giá trị $r dS$ chính là vi phân tọa độ quạt đo của đường chu tuyến đối với cực P.

Thay giá trị của ứng suất tiếp τ tính từ các biểu thức (22-11) và (22-12) vào M_P ta có:

$$M_P = \frac{Q_y}{J_x} \iint_F S_x^* \frac{d\omega}{dF} \cdot dF + \frac{Q_x}{J_y} \iint_F S_y^* \frac{d\omega}{dF} \cdot dF$$

Ở biểu thức này có hai tích phân tương tự nhau nên ta chỉ xét một số hạng rồi suy ra cho số hạng kia.

Ta chỉ xét số hạng sau:

$$\iint_F S_x^* \frac{d\omega}{dF} \cdot dF = S_x^* \cdot \omega \Big|_{S_1}^{S_2} - \iint_F \frac{dS_x^*}{dF} \cdot dF$$

Trong đó S_1 và S_2 chỉ trị số $S_x^* \cdot \omega$ ở vị trí (1) và vị trí (2) (hình 22.14). Rõ ràng tại vị trí (1) thì $S_x^* = 0$ vì tại điểm đầu $F_{cắt} = 0$, tại vị trí (2) ở cuối mặt cắt thì $S_x^* = 0$ vì trục x là trục quán tính chính trung tâm thì mô men tĩnh toàn hình lấy đối với nó phải bằng không.

Cho nên:

$$\iint_F S_x^* \frac{d\omega}{dF} \cdot dF = \iint_F \frac{dS_x^*}{dF} \omega \cdot dF$$

Trong đó ta có :

$$\frac{dS_x^*}{dF} = y$$

Điều đó cho ta biểu thức:

$$\iint_F S_x^* \cdot \omega dF = \iint_F y \cdot \omega \cdot dF = J_{\omega_x}$$

Như vậy cuối cùng ta có mô men nội lực do ứng suất tiếp τ gây ra tại điểm P là:

$$M_P = \frac{Q_y}{J_x} \cdot J_{\omega_x} + \frac{Q_x}{J_y} \cdot J_{\omega_y}$$

Muốn mô men này triệt tiêu với mọi giá trị Q_x, Q_y thì phải có điều kiện:

$$J_{\omega_x} = J_{\omega_y} = 0 \quad (22-13)$$

Tức là điểm P sẽ là cực chính, khi nó là tâm uốn của mặt cắt ngang.

Chúng ta có thể xác định tâm uốn dễ dàng hơn. Thật vậy, chúng ta hãy quan sát lại hình 22.15, với cách đặt lực theo phương y (không phải là trục đối xứng), thì các luồng ứng suất sẽ tạo thêm một mô men xoắn quanh điểm O. Bây giờ chúng ta dịch chuyển điểm đặt lực trên trục x từ O sang điểm P nào đó (xem hình 22.15). Ta thấy hợp lực các ứng suất ở cánh trên và cánh dưới với điểm P một mô men thuận chiều kim đồng hồ và mô men đó được tính:

$$T = \int_0^b \tau \cdot \delta \cdot dt = \frac{Q_y h \cdot \delta}{2J_x} \int_0^b t dt = \frac{Q_y \cdot h \cdot \delta \cdot b^2}{4J_x}$$

Với

$$\tau = \frac{Q_y S_x^c}{I_x \cdot \delta} = \frac{Q_y}{I_x \delta} \cdot \delta \cdot t \cdot \frac{h}{2}$$

Trong đó: Q_y - lực cắt; S_x^c - mô men tĩnh của phần bị cắt; δ - bề dày của mặt cắt; h - chiều cao của mặt cắt; b - chiều rộng của mặt cắt; t - biến số từ $0 \rightarrow b$.

Còn hợp lực các ứng suất tiếp trong lòng là R chẳng hạn nó gây ra mô men xoắn đối với điểm P sẽ là $R \cdot e$ có chiều ngược lại với mô men xoắn ở các đế tạo ra. Và hay mô men này nếu bằng nhau sẽ xác định được độ lệch e để P trở thành tâm uốn.

Vậy:
$$R \cdot e = 2T \cdot \frac{h}{2}$$

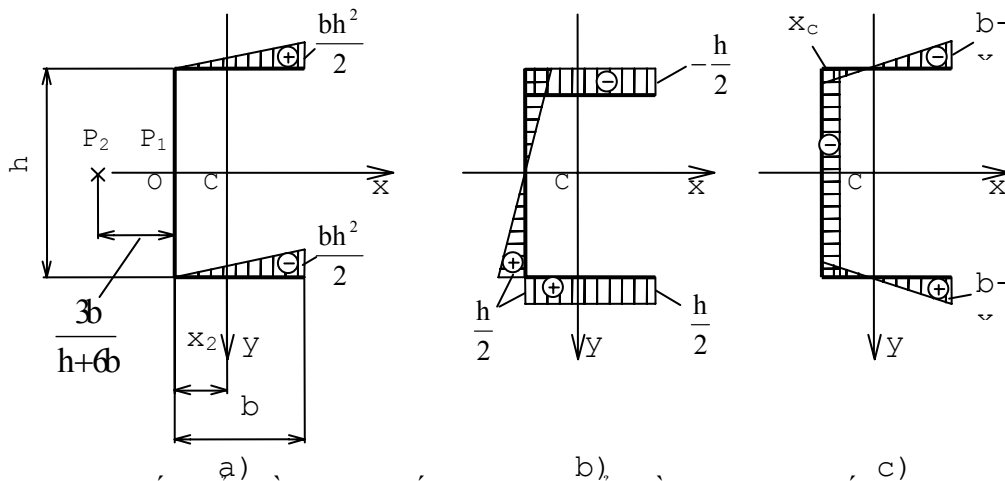
Suy ra:
$$e = \frac{T \cdot h}{R} = \frac{Qh^2 \delta \cdot b^2}{4J_x Q} = \frac{\delta h^2 b^2}{4J_x}$$

Nếu δ nhỏ hơn b và h nhiều thì ta có thể lấy gần đúng:

$$I_x = \frac{\delta h^3}{12} + 2 \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot \delta \cdot b = \frac{\delta \cdot h^3}{12} + \frac{\delta b h^2}{2}$$

Ví dụ 7: Xác định tâm uốn của mặt cắt ngang chữ \square như trên hình vẽ 22.17 Cho bề dày của nó là δ không đổi.

Bài giải: Trước hết ta chọn hệ trục cxy là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang. Lúc đầu ta lấy P_1 và O là cực và gốc của mặt cắt (xem hình 22.17a). Biểu đồ tọa độ quạt ω_1 tương ứng với cực P_1 ta đã gặp và được trình bày trên hình đó. Còn biểu đồ tọa độ x, y được biểu diễn trên hình 22.17b và 22.17c.



Ta nhận thấy biểu đồ tọa độ x là đối xứng, mà biểu đồ ω_1 lại phản đối xứng, cho nên:

$$\int_F x \omega_1 dF = 0$$

Hình 22.17: Xác định tâm uốn của mặt cắt ngang chữ \square

Còn $J_{\omega_1 x}$ được xác định như sau:

$$J_{\omega_1 x} = 2 \cdot \frac{bh}{2} \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \delta = \frac{b^2 h^2}{4} \cdot \delta$$

Giá trị mô men quán tính của mặt cắt ngang đối với trục x sẽ là:

$$J_x = \frac{\left(b + \frac{\delta}{2} \right) (h + \delta)^3}{12} - \frac{\left(b - \frac{\delta}{2} \right) (h - \delta)^3}{12}$$

$$J_x = \frac{\delta h^2 (h + 6b)}{12}$$

Từ công thức (22-8) ta tìm được tọa độ của cực chính là:

$$a = -\frac{J_{\omega_1 x}}{J_x} = \frac{3b^2}{h + 6b}; b = 0$$

Tức là P_2 nằm trên trục x về phía âm và cách cực P_1 ban đầu một khoảng:

$$a = -\frac{3b^2}{h + 6b}$$

Chúng ta cũng có thể suy luận một cách khác: Trước tiên ta xác định mô men xoắn nội lực đối với P_1 :

$$M_{P_1} = 2 \frac{h}{2} \int_0^b \tau \cdot \delta \cdot dS = Q_y \frac{3b^2}{h + 6b}$$

Để P_2 là cực chính (là tâm uốn) thì mô men đối với nó phải bằng không, nghĩa là:

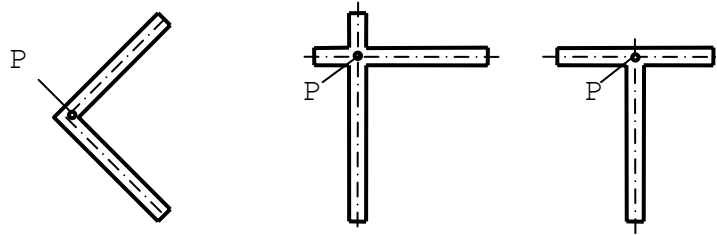
$$Q_y \cdot \overline{P_1 P_2} + Q_y \frac{3b^2}{h + 6b} = 0$$

Vậy :

$$\overline{P_1 P_2} = -\frac{3b^2}{h + 6b}$$

Chú ý: Đối với các mặt cắt có hai trục đối xứng thì tâm uốn sẽ trùng với trọng tâm của mặt cắt hoặc nếu mặt cắt có một trục đối xứng thì khi tải trọng tác dụng theo trục đó (điều này đã được nói và giới hạn trong chương uốn ngang phẳng).

Còn đối với những mặt cắt giải chữ nhật đồng quy tại một điểm (xem hình 22.18) thì tâm uốn hay là cực chính là điểm đồng quy đó vì rằng luồng ứng suất tiếp qua điểm đó nên không gây ra mô men xoắn đối với nó.

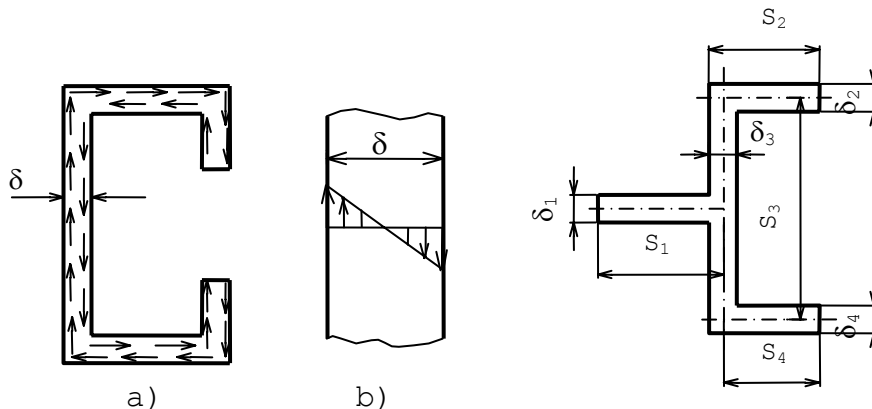


Hình 22.18: Tâm uốn của một số hình chữ nhật đồng quy

22.4. BÀI TOÁN THANH THÀNH MỎNG

XOẢN

Đối với những kết cấu thanh thành mỏng thường là những giải chữ nhật hẹp ghép lại, vì vậy những tính toán về xoắn đối với hình chữ nhật trong lý thuyết đàn hồi mà ta đã giới thiệu trong chương xoắn vẫn có thể sử dụng được đối với các kết cấu thanh thành mỏng. Sự phân bố ứng suất tiếp trong thanh thành mỏng được biểu diễn trên hình 22.19a và trên bề dày δ được phóng đại như trên hình 22.19b. Hình này chỉ rõ cho ta thấy ở mép giá trị ứng suất lớn nhất (giống như xoắn thanh mặt cắt chữ nhật đã gặp ở chương xoắn).



Hình 22.19: Sự phân bố ứng suất tiếp trong thanh thành mỏng

Hình 22.20: Sơ đồ tính mô men xoắn ở mặt cắt không thể kéo dài

Đối với những mặt cắt như trên hình 22.19a ta có thể tưởng tượng kéo ra thành một giải hình chữ nhật có cùng một bề dày không đổi, thì ứng suất tiếp lớn nhất ở giữa cạnh dài và trị số của nó là:

$$\tau_{\max} = \frac{3,33M_z}{\delta^2 \cdot S} \quad (22-14)$$

Góc xoay được tính với công thức:

$$\varphi = \frac{3,33M_z \cdot l}{G \cdot \delta^3 \cdot S} \quad (22-15)$$

Trong đó: δ - Bề dày của thanh; S- Chiều dài của đường chu tuyến; l- Chiều dài của thanh.

- Trong trường hợp này xem giải chữ nhật có tỉ số cạnh dài trên cạnh ngắn là $l/\delta = \infty$. Nên hệ số $\alpha=0,33$ và $\gamma=0,33$.

Cũng có khi với mặt cắt không thể kéo dài thành một giải chữ nhật như trên hình 22.20 chẳng hạn thì ta xem mô men xoắn M_z là tổng các mô men xoắn trong từng phần:

$$M_z = \frac{\varphi G}{3l} [\delta_1^3 \cdot S_1 + \delta_2^3 \cdot S_2 + \dots + \delta_n^3 \cdot S_n], \text{ Suy ra:}$$

$$\varphi = \frac{3M_z \cdot l}{G[\delta_1^3 \cdot S_1 + \delta_2^3 \cdot S_2 + \dots + \delta_n^3 \cdot S_n]} \quad (22-16)$$

Đối với những thanh mỏng hở từ kết quả ứng suất lớn nhất xuất hiện ở trung điểm cạnh dài có thể suy ra ứng suất lớn nhất ở nơi có bề dày lớn nhất. Giả sử đoạn đó là đoạn thứ i, thì :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{3M_z}{\delta_i^2 \cdot S_i} \\ \varphi &= \frac{3M_z l}{G\delta_i^3 S_i} \end{aligned} \right\} \quad (22-17)$$

Giá trị này cũng là góc xoắn ở mặt cắt đó. Từ (22-17) ta có thể có :

$$\tau_{\max} = \varphi \cdot G \frac{\delta_i}{l} = \varphi G \frac{\delta_{\max}}{l}$$

Đưa giá trị φ tính từ (22-16) vào đây, cuối cùng ta có:

$$\tau_{\max} = \frac{3M_z \cdot \delta_{\max}}{\delta_1^2 \cdot S_1 + \delta_2^2 \cdot S_2 + \dots + \delta_n^2 \cdot S_n} \quad (22-18)$$

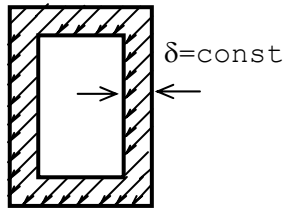
- Chúng ta xét trường hợp mặt cắt ngang có chu vi khép kín. Có thể nói sự phân bố ứng suất ở loại mặt cắt này khác với trường hợp mặt cắt hở. Nếu mặt cắt khép kín mà chiều dày δ của nó không thay đổi như trên hình 22.21, thì ứng suất tiếp cũng sẽ phân bố đều theo bề dày. Nếu mặt cắt ngang của thanh mỏng khép kín có bề dày thay đổi như hình 22.22a thì quy luật phân bố ứng suất phức tạp hơn. Thật vậy ta thử tách một đoạn thanh vô cùng bé có bề dày thay đổi (xem hình 22.22b) chịu xoắn thuần túy với M_z . Chúng ta hãy xét sự cân bằng của phân tố đó.

Phương trình chiếu các lực theo trục z ta có:

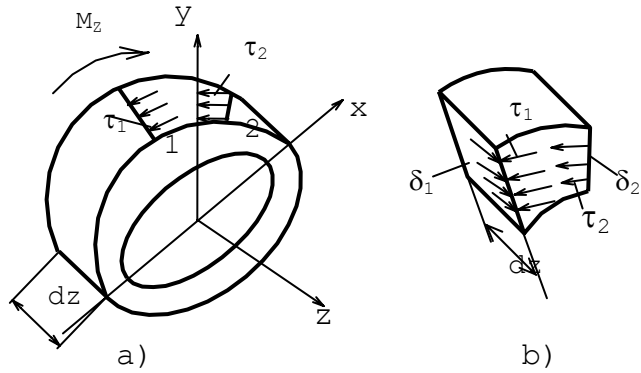
$$\tau_1 \delta_1 dz = +\tau_2 \delta_2 dz$$

hay

$$\tau_1 \delta_1 = +\tau_2 \delta_2$$



Hình 22.21: Sơ đồ phân bố ứng suất tiếp khi chiều dài không đổi



Hình 22.22. Sơ đồ phân bố ứng suất tiếp khi chiều dài thay đổi

Chú ý: Theo luật đối ứng thì τ_1 theo phương z ở đường 1 là hướng vào đường 1 (xem hình 22.22b) và τ_2 theo phương z ở đường 2 là hướng ra đường 2, cho nên chiếu lên trục z ta có kết quả ở trên. Kết quả này cho ta kết luận là tích số $\tau \cdot \delta$ là hằng số trên chu vi của mặt cắt ngang. Như vậy nơi nào bề dày bé thì giá trị ứng suất lớn. Và trị số mô men xoắn trên mặt cắt ngang sẽ là:

$$M_z = \int_s \tau \cdot \delta \cdot \rho \cdot dS$$

Trong đó ρ là đoạn \overline{OA} trên hình 22.23, O là điểm bất kì nào đó trên mặt cắt. A là điểm trên phương τ mà ta kẻ đường vuông góc với nó, dS là vi phân của một đoạn chu tuyến quanh điểm B có τ tác dụng. Vì $\tau \cdot \delta$ là hằng số nên tích phân trên viết lại như sau:

$$M_z = \tau \cdot \delta \int_s \rho dS$$

Biểu thức tích phân này chẳng qua nó bằng hai lần diện tích giới hạn bởi đường chu tuyến khép kín của mặt cắt (trên hình 22.23). Nếu kí hiệu diện tích đó là F^* thì:

$$M_z = \tau \cdot \delta \cdot 2F^* \quad (22-19)$$

Từ đó có giá trị ứng suất tiếp cực đại:

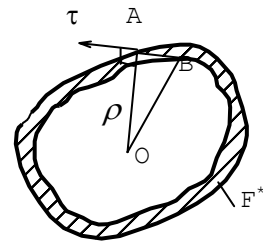
$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{2F^* \cdot \delta_{\min}} \quad (22-20)$$

Góc xoắn φ được tính theo phương pháp năng lượng như sau: Ta biết rằng trong trượt thuần túy thì thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong một đơn vị thể tích là bằng $\frac{\tau^2}{2G}$. Vậy thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong phân tố sẽ là:

$$du = \frac{\tau^2 \delta \cdot dz \cdot dS}{2G}$$

Vậy thế năng biến dạng đàn hồi trong toàn thanh sẽ là:

$$u = \frac{1}{2G} \int_s \tau^2 \delta \cdot dS \cdot dz = \frac{1}{2G} \int_s \frac{\tau^2 \delta^2 dS}{\delta}$$



Hình 22.23: Sơ đồ tính M_z

Mà theo (22-19) thì:
$$\tau^2 \delta^2 = \frac{M_Z^2}{4F^*}$$

Cho nên:

$$u = \frac{1 \cdot M_Z^2}{8GF^{*2}} \int_s \frac{dS}{\delta}$$

Biểu thức $\int_s \frac{dS}{\delta}$ phụ thuộc vào sự thay đổi chiều dày δ theo chu vi của mặt cắt ngang; nó cũng là một đặc trưng hình học.

Mặt khác, với sự tác dụng xoắn thuần túy của một mô men ngoại lực là M^* thì công của nó bằng thế năng biến dạng đàn hồi nói trên sẽ là:

$$U = \frac{1}{2} M^* \varphi$$

Do đây là bài toán xoắn thuần túy cho nên mô men nội lực và ngoại lực bằng nhau: $M^* = M_Z$

Từ đó ta suy ra:
$$\varphi = \frac{M_Z \cdot l}{4GF^{*2}} \int_s \frac{dS}{\delta} \quad (22-21)$$

Nếu δ là hằng số thì:

$$\varphi = \frac{M_Z \cdot l \cdot S}{4GF^{*2} \cdot \delta} \quad (22-22)$$

Ví dụ 8: Tính ứng suất và góc xoắn trong ống thành mỏng cuốn bằng thép lá trong hai trường hợp:

a/ Khi mép ống được tự do (hình 22.24a).

b/ Khi mép ống bị dính chặt (hình 22.24b).

Cho đường kính trung bình là D .

Bài giải:

a/ Ở phương án thứ nhất:

Thanh có mặt cắt ngang hở. Dựa vào các công thức (22-14) và (22-15), ta có:

$$\tau_{(1)} = \frac{3M}{\pi D \cdot \delta} \quad \text{và} \quad \varphi_{(1)} = \frac{3M \cdot l}{G \pi D \cdot \delta^3}$$

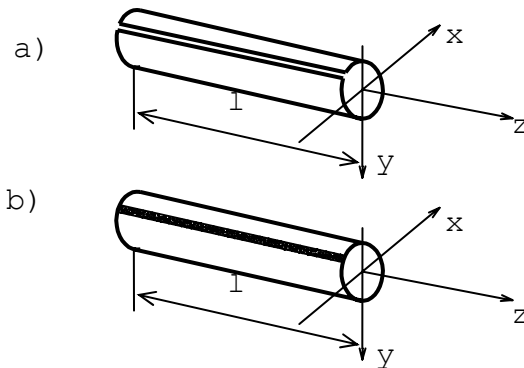
b/ Với phương án thứ hai:

Thanh có mặt cắt ngang kín, thì theo các công thức (22-20) và (22-22) ta có:

$$\tau_{(2)} = \frac{M^*}{2 \frac{\pi D^2}{4} \cdot \delta}$$

và

$$\varphi_{(2)} = \frac{M^* \cdot l \cdot \pi \cdot D}{4G \left(\frac{\pi D^2}{4} \right)^2 \cdot \delta}$$



Hình 22.24. Ống thành mỏng cuốn bằng thép lá:

a- Khi mép ống được tự do.

b- Khi mép ống bị dính chặt

Để so sánh hai trường hợp này ta lập tỉ số:

$$\frac{\tau_{(1)}}{\tau_{(2)}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{D}{\delta} \quad \text{và} \quad \frac{\varphi_{(1)}}{\varphi_{(2)}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{D^2}{\delta^2}$$

Như vậy độ lớn của ứng suất tỉ lệ cùng độ lớn D/δ và góc xoắn có tỷ lệ cùng độ lớn của D^2/δ^2 . Vì D lớn hơn δ rất nhiều do đó với các thanh mặt cắt ngang khép kín có độ cứng và khả năng chịu lực lớn hơn thanh tương tự có mặt cắt ngang hở

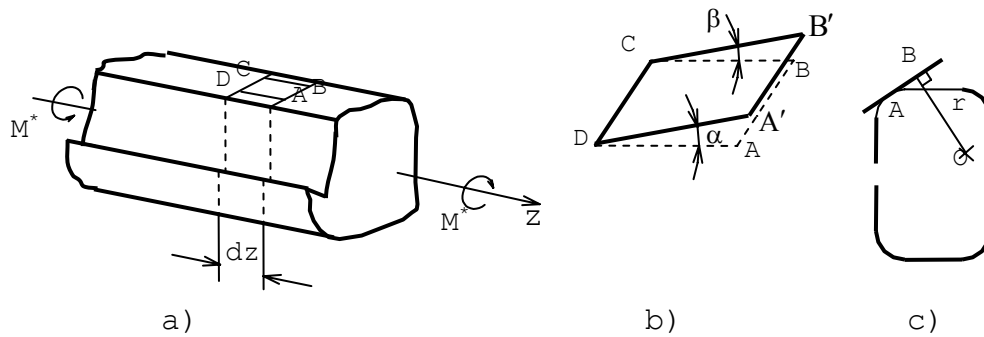
22.5. ĐỘ VÊNH CỦA MẶT CẮT NGANG KHI BỊ UỐN

Đối với thanh thành mỏng, đặc biệt là khi mặt cắt ngang là hở, thì khi chịu xoắn thuần túy mặt cắt ngang của thanh sẽ bị vênh. Để xác định độ vênh này chúng ta dựa vào các giả thuyết sau đây.

Ta giả thiết rằng biến dạng của thanh là bé và như vậy trong quá trình biến dạng chu tuyến của mặt cắt ngang vẫn giữ nguyên hình dáng ban đầu.

Chúng ta hãy xét một thanh thành mỏng hở chịu xoắn như trên hình 22.25a.

Giả sử rằng khi chịu xoắn mặt cắt ngang của thanh bị xoay đi quanh một điểm O nào đó được gọi là tâm xoắn.



Hình 22.25: Thanh thành mỏng hở chịu xoắn

Bây giờ chúng ta khảo sát phân tử $ABCD$ như trên hình 22.25b. Sau khi biến dạng các điểm sẽ về các vị trí mới, nhưng để xét biến dạng tương đối chúng ta coi như giữ cạnh CD , thì điểm $A \rightarrow A'$ và $B \rightarrow B'$. Và cạnh DA coi như trượt một góc α và CB trượt một góc tương đối β . Góc trượt γ sẽ là tổng $\alpha + \beta$. Ta tính các góc đó như sau (hình 22.25b):

$$\alpha = \frac{AA'}{dz}$$

Đoạn AA' là chuyển vị được tính bằng:

$$AA' = r d\varphi$$

Trong đó: - r là khoảng cách từ tâm xoắn O đến tiếp tuyến với chu tuyến tại điểm A (xem hình 22.25c); $d\varphi$ - là góc xoắn tương đối của AB so với CD .

Vậy :

$$\alpha = \frac{r d\varphi}{dz} = r \cdot \theta$$

θ - góc xoắn tỉ đối của thanh.

Nếu gọi W là chuyển vị của các điểm trên mặt cắt theo phương của trục Z . Ta có :

$$\beta = \frac{dW}{dS}$$

Vậy góc trượt γ sẽ được tính như sau:

$$\gamma = r\theta + \frac{dW}{dS} = \frac{\tau}{G} \quad (\text{theo Hooke})$$

Với giả thiết nêu trên ta có thể coi trên đường trung gian góc xoay của thành mỏng tại đó bằng 0, nên $\tau = 0$, vậy ta có:

$$dW = -r\theta \cdot dS = -\theta \cdot d\omega$$

(chú ý: $d\omega$ chính là vi phân toạ độ quạt của chu tuyến mặt cắt ngang).

Lấy tích phân đó ta có:

$$W = -\theta \int d\omega = -\theta \cdot \omega \quad (22-23)$$

Theo công thức (22-23) ta thấy chuyển vị W chính là độ vênh của các mặt cắt, nó phụ thuộc vào góc xoắn tỉ đối θ và toạ độ quạt ω .

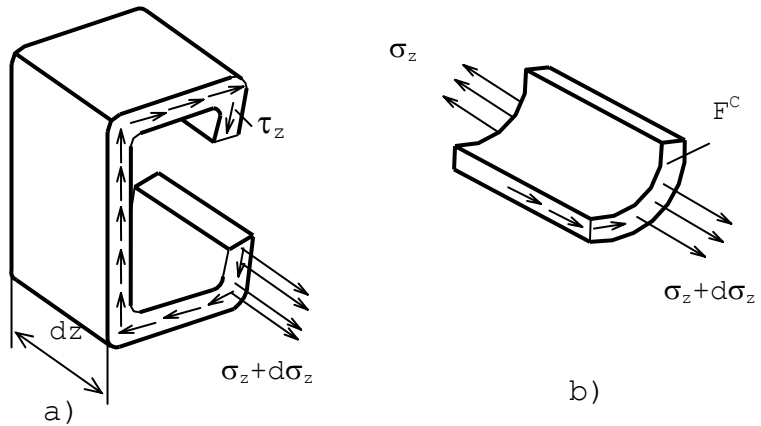
Sự thay đổi θ dọc trục z tạo nên một hệ ứng suất tiếp phụ. Thật vậy giả sử ta xét một đoạn thanh dz (xem hình 22.26a), nó sẽ có biến dạng theo dz sẽ là:

$$\varepsilon_z = \frac{dW}{dz} = -\frac{d\theta}{dz} \cdot \omega$$

Và ứng suất pháp tương ứng σ_z sẽ là:

$$\sigma_z = -E\omega \cdot \frac{d\theta}{dz} \quad (22-24)$$

Giả sử σ_z là một hàm số biến thiên theo z , tại mặt trước có σ_z tác dụng thì mặt sau tăng thêm một lượng dz sẽ có $\sigma_z + d\sigma_z$ tác dụng (xem hình 22.26b), Chính sự chênh lệch của ứng suất pháp này mà trên các thành mặt cắt phải xuất hiện ứng suất τ để đảm bảo sự cân bằng của phân tử dưới tác dụng của chúng (xem hình 22.26b). Chiếu tất cả các lực lên trục z , ta tìm thấy giá trị:



Hình 22.26: sự xuất hiện hệ ứng suất pháp và ứng suất tiếp khi θ thay đổi

$$\tau_z \cdot \delta = -\int_{F^c} \frac{d\sigma_z}{dz} \cdot dF$$

Trong đó F^c là phần diện tích trên mặt cắt ngang của phân tử đang xét. Thay trị số σ_z từ (22-24) vào đây ta có :

$$\tau_z \cdot \delta = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_F \omega dF \quad (22-$$

25)

Ta nhận thấy rằng ứng suất tiếp trên đường trung gian cũng như các điểm khác trên các mặt cắt vẫn khác không. Tức là ngay đường chu tuyến cũng bị vênh, cho nên các công thức đã xây dựng mang tính gần đúng.

22.6. XOẮN KIỀM CHẾ THANH THÀNH MỎNG CÓ MẶT CẮT HỖ.

Một thanh thành mỏng được xem là chịu xoắn kiểm chế khi ở nơi nào đó của thanh có những liên kết hạn chế độ vênh của mặt cắt ngang. Ví như thanh chịu ngàm một đầu, đầu kia tự do hoặc những gờ cứng được hàn vào thanh...

Dưới đây ta xét một thanh ngàm một đầu và một đầu tự do chịu xoắn thuần túy như trên hình 22.27. Ở nơi ngàm thì thành phần chuyển vị W bằng không, ở đây không có sự vênh được. Nhưng càng xa đầu ngàm thì sự xoắn càng tự do nên độ vênh của mặt cắt ngang càng lớn. Với bài toán xoắn thuần túy nên lực dọc và mô men uốn đều không có. Cho nên thành phần ứng suất pháp do xoắn gây ra phải tạo ra một hệ nội lực cân bằng. Vì vậy ta có:

$$\int_F \sigma_z y dF = 0; \int_F \sigma_z x dF = 0; \int_F \sigma_z dF = 0$$

Thay giá trị σ_z tính ở biểu thức (20-24) vào đây ta được:

$$\int_F \omega y dF = 0; \int_F \omega x dF = 0; \int_F \omega dF = 0$$

Toạ độ quạt ω được tính với tâm xoắn. Hai biểu thức đầu chứng tỏ tâm xoắn trùng với cực chính của mặt cắt và tâm xoắn cũng trùng với tâm uốn. Tích phân thứ 3 cho ta xác định góc chính của toạ độ quạt ω .

Mô men xoắn do ứng suất tiếp tạo nên gồm hai đại lượng:

$$M_z = M_1 + M_2$$

M_1 - Mô men xoắn do ứng suất vòng gây nên (xem lại hình 22.19). Trị số này được xác định như sau

$$M_1 = GJ_0\theta \quad (22-26)$$

Trong đó: J - là một đặc trưng hình học của mặt cắt ngang mà ta gọi là độ cứng khi xoắn (xem chương xoắn thuần túy). Chẳng hạn với một mặt cắt ngang, nếu có thể triển khai thành một giải hình chữ nhật thì công thức (22-15), J được tính như sau:

$$J = \frac{\delta^3 \cdot S}{3}$$

Hoặc mặt cắt không thể khai triển thành giải chữ nhật thì :

$$J = \frac{\delta_1^3 \cdot S_1 + \delta_2^3 S_2 + \dots + \delta_n^3 S_n}{3}$$

M_2 là mô men xoắn luồng τ_z gây ra (xem hình 22-26):

$$M_2 = \int_S \tau_z \delta \cdot r \cdot dS = \int_F \tau_z \cdot \delta \cdot d\omega$$

Đưa giá trị τ_z từ biểu thức (22-25) vào đây ta có :

$$M_2 = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_F \left(\int_{F^c} \omega dF \right) d\omega$$

Dùng phương pháp tích phân đoạn, ta có thể viết lại như sau:

$$M_2 = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \left[\omega \int \omega dF \Big|_{S_1}^{S_2} - \int \omega^2 F \right]$$

Nhưng $\int \omega dF \Big|_{S_1}^{S_2} = 0$

(nhìn vào hình 22.10 thì hiểu được điều này)

Vậy: $M_2 = -EJ_\omega \frac{d^2\theta}{dz^2} \quad (22-27)$

Cuối cùng ta được mô men tổng cộng sẽ là:

$$M_z = GJ\theta - EJ_\omega \frac{d^2\theta}{dz^2}$$

Nếu ta đặt $\frac{GJ}{EJ_\omega} = \alpha^2$ thì phương trình vi phân trên sẽ được viết lại :

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \alpha^2\theta = -\alpha \frac{M_z}{GJ} \quad (22-28)$$

M_z là một hàm đối với z , xem như đã biết theo điều kiện bài toán.
Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đó là :

$$\theta = C_1 \cdot \text{Sh}\alpha z + C_2 \cdot \text{ch}\alpha z + \theta^* \quad (22-29)$$

Trong đó θ^* - là nghiệm riêng của phương trình vi phân bậc 2 (22-28); các hằng số tích phân C_1 và C_2 được xác định từ điều kiện biên (liên kết) của thanh.

Ví dụ 9: Xác định ứng suất pháp và ứng suất tiếp trong thanh chữ I ngàm một đầu và một đầu tự do chịu xoắn như trên hình 22.27. Các dữ kiện cho như sau: $h=200\text{mm}$; $b=100\text{mm}$; $\delta=10\text{mm}$; $l=1\text{m}$; $\mu=0,3$; $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$; $M_z=M^* = \text{hằng số}$.

Bài giải: Sử dụng phương trình (22-28):

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \alpha^2\theta = -\alpha^2 M^*$$

Ta chọn nghiệm riêng dưới dạng:

$$\theta^* = \frac{M^*}{GJ}$$

Vậy nghiệm tổng quát sẽ là:

$$\theta = C_1 \cdot \text{Sh}\alpha z + C_2 \cdot \text{ch}\alpha z + \frac{M^*}{EJ}$$

Các hằng số C_1, C_2 được xác định từ các điều kiện biên sau :

Tại ngàm $z=0$ thì $W=0$; khi $z=l$ (đầu tự do) ứng suất pháp σ_z bằng không.

Từ các biểu thức (22-23) và (22-24) ta có thể viết lại như sau:

Khi $z=0 \rightarrow \theta=0$

Khi $z=l \rightarrow \frac{d\theta}{dz} = 0$

Cuối cùng ta có một hệ phương trình để xác định C_1 và C_2 như sau:

$$\left. \begin{aligned} C_2 + \frac{M^*}{GJ} &= 0 \\ C_1 \cdot \alpha \cdot \text{ch}\alpha l + C_2 \cdot \alpha \cdot \text{sh}\alpha l &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Giải hệ phương trình này ta được giá trị các hằng số C_1 và C_2 :

$$C_1 = \frac{M^*}{GJ} \text{th}\alpha l; \quad C_2 = -\frac{M^*}{GJ}$$

Vậy giá trị góc xoắn tỉ đối sẽ là:

$$\theta = \frac{M^*}{GJ} [1 + \text{th}\alpha l \cdot \text{sh}\alpha z - \text{ch}\alpha z]$$

Góc xoắn lớn nhất tại đầu mút tự do sẽ là:

$$\varphi = \int_0^l \theta dz = \frac{M^* l}{GJ} \left[1 - \frac{1}{\alpha l} \operatorname{th} \alpha l \right]$$

Giá trị ứng suất pháp lớn nhất tại ngàm sẽ là:

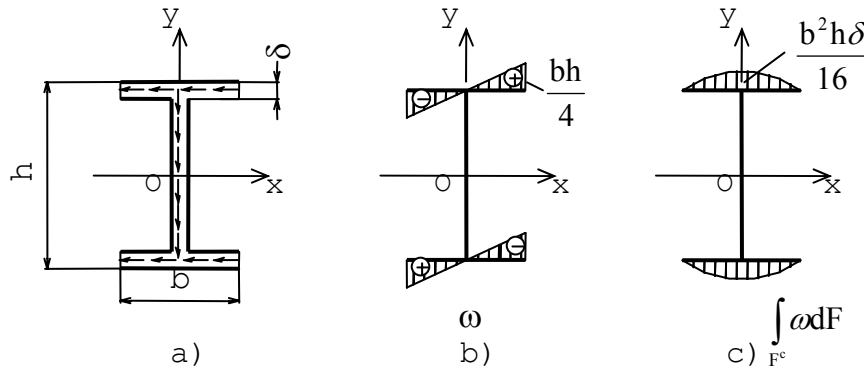
$$\sigma_z = -E\omega \frac{d\theta}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{EM^*}{GJ} \cdot \omega \cdot \alpha \operatorname{th} \alpha l$$

Giá trị của mô men xoắn M_1 và M_2 tại một mặt cắt bất kì sẽ là:

$$M_1 = GJ\theta = M^* [1 + \operatorname{th} \alpha l \cdot \operatorname{sh} \alpha z - \operatorname{ch} \alpha z]$$

$$M_2 = -EJ_\omega \frac{d^2\theta}{dz^2} = -M^* [1 + \operatorname{th} \alpha l \cdot \operatorname{sh} \alpha z - \operatorname{ch} \alpha z]$$

J_ω được xác định như đã chỉ dẫn ở phần trên. Ví dụ đối với sắt hình chữ I thì biểu đồ tọa độ chính được trình bày trên hình 22.28b. Với phép nhân biểu đồ VêrêSaghin ta



Hình 22.28: Xác định ứng suất pháp và ứng suất tiếp trong thanh chữ I ngàm một đầu và một đầu tự do (xem hình 22.27); Biểu đồ tọa độ quạt (b); Ứng suất tiếp lớn nhất tại giao điểm (c)

có :

$$J_\omega = \frac{1}{24} b^3 h^2 \cdot \delta$$

Độ cứng khi xoắn của mặt cắt ngang:

$$J = \frac{1}{3} \delta^3 (2b + h)$$

Do đó hệ số α được xác định như sau:

$$\alpha^2 = \frac{4}{1 + \mu} \frac{\delta^2 (2b + h)}{b^3 \cdot h^2} = 3,08 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{mm}^2}$$

$$\alpha = 1,5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mm}} \quad \text{và} \quad \alpha l = 1,75$$

Tra bảng các hàm số hyperbolic, ta tìm được:

$$\frac{1}{\alpha l} \operatorname{th} \alpha l = \frac{0,0411}{1,75} = 0,537$$

Tiếp theo ta tính được góc xoắn tự do là:

$$\varphi = \frac{M^* l}{GJ} \cdot 0,46$$

So sánh với thanh mà hai đầu tự do, khi đó góc xoắn của thanh là:

$$\varphi = \frac{M^* l}{GJ}$$

Ta thấy khi có ngàm thì góc xoắn ở đầu tự do của nó chỉ bằng 0,46 góc xoắn khi hai đầu tự do hoàn toàn.

Giá trị ứng suất pháp lớn nhất sẽ là:

$$\sigma_{\max} = \frac{EM^*}{GJ} \cdot \frac{bh}{4} \cdot \alpha \theta \alpha l = 161 \cdot 10^{-3} M^* \text{ N/cm}^2$$

Chú ý :Thông nhất về đơn vị.

Trị số ứng suất tiếp lớn nhất là: $\tau_{1\max} = \frac{3M_1}{\delta^2(2b+h)}$ (ứng suất tiếp ở đế)

$$\tau_{2\max} = -\frac{M_2}{J_{\omega} \delta} \int_{F^c} \omega dF \quad (\text{ứng suất tiếp ở lòng})$$

Ở ngàm thì $M_1=0, M_2=M^*$

Do đó: $\tau_{1\max} = 0$

$$\text{Và} \quad \tau_{2\max} = -\frac{M^*}{J_{\omega} \cdot \delta} \left(\int_{F^c} \omega dF \right)_{\max} = \pm \frac{3}{2} \frac{M^*}{bh\delta}$$

$$\tau_{2\max} = \pm 0,75 \cdot 10^{-3} M^* \text{ N/cm}^2$$

Điểm đạt được $\tau_{2\max}$ là giao điểm giữa lòng và đế, vì tại đó $\int_{F^c} \omega dF$ là lớn nhất (xem

hình 22.28c).

Tại đầu tự do khi $z=l, M_1$ và M_2 có giá trị: $M_1 = 0,6614M^*$ và $M_2 = 0,3386M^*$

Lúc này ứng suất tiếp sẽ là :

$$\tau_{1\max} = 49,6 \cdot 10^{-3} M^* \text{ N/cm}^2$$

$$\tau_{2\max} = 2,5 \cdot 10^{-3} M^* \text{ N/cm}^2$$

Trong trường hợp xoắn thuần túy tự do (không có sự kiềm chế) thì:

$$\tau_{1\max} = \frac{3M^*}{\delta^2(2b+h)} = 75 \cdot 10^{-3} M^* \text{ N/cm}^2$$

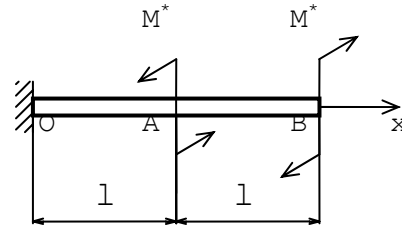
$$\tau_{2\max} = 0$$

Ví dụ 10: Hãy xác định góc xoắn tại A của thanh thành mỏng chịu tác dụng của hai mô men xoắn ngược chiều nhau như trên hình 22.29.

Bài giải: Tại mặt cắt A do hai mô men xoắn ngược nhau nên khi thanh OB không phải là thanh thành mỏng thì sẽ không bị xoay, tức là không có góc xoắn. Nhưng ở đây là thanh thành mỏng thì tại A sẽ có góc xoắn.

Chúng ta viết phương trình góc xoắn tỉ đối cho cả hai đoạn OA và AB:

1/ Đối với đoạn OA vì $M_z=0$, nên:



Hình 22.29: Sơ đồ xác định góc xoắn

$$\theta_1 = C_1 \operatorname{sh} \alpha z + C_2 \operatorname{ch} \alpha z$$

2/ Đối với đoạn AB thì:

$$\theta_2 = C_3 \operatorname{sh} \alpha z + C_4 \operatorname{ch} \alpha z + \frac{M^*}{GJ}$$

Những điều kiện biên để xác định các hằng số tích phân như sau:

Tại $z=0$, $\theta_1 = 0$

Tại $z=l$ thì: $\theta_1 = \theta_2$ và $\frac{d\theta_1}{dz} = \frac{d\theta_2}{dz}$

(Bởi vì tại A thì tính góc xoắn và ứng suất tính theo công thức của hai đoạn phải như nhau, do tính liên tục của thanh).

Tại $z=2l$ (tại đầu tự do) thì: $\frac{d\theta_1}{dz} = 0$ vì $\sigma_z = 0$

Dựa vào 4 điều kiện biên trên ta xác định được các phương trình để xác định C_1 , C_2 , C_3 và C_4 :

$$\left. \begin{aligned} C_1 \operatorname{sh} \alpha l - C_3 \operatorname{sh} \alpha l - C_4 \operatorname{ch} \alpha l &= \frac{M^*}{GJ} \\ C_1 \operatorname{ch} \alpha l - C_3 \operatorname{ch} \alpha l - C_4 \operatorname{sh} \alpha l &= 0 \\ C_3 \operatorname{ch} 2\alpha l + C_4 \operatorname{sh} 2\alpha l &= 0 \\ C_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Giải hệ phương trình trên ta có được các hằng số C_1 , C_2 , C_3 và C_4 .

Chú ý :

$$\operatorname{ch} \alpha l = \frac{e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}}{2}$$

$$\operatorname{sh} \alpha l = \frac{e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}}{2}$$

Các giá trị của các hằng số tích phân trên sẽ là:

$$C_1 = \frac{M^* \operatorname{sh} \alpha l}{G \cdot J \cdot \operatorname{ch} 2\alpha l}$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = \frac{M^* \operatorname{th} \alpha l}{G \cdot J \cdot e^{\alpha l}}$$

$$C_4 = -\frac{M^*}{G \cdot J \cdot e^{\alpha l}}$$

Vậy:

$$\theta_1 = \frac{M^*}{GJ} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{\operatorname{ch} 2\alpha l} \cdot \operatorname{sh} \alpha \cdot z$$

Và góc xoắn tại A sẽ là :

$$\varphi = \int_0^l \theta_1 dz = \frac{M^*}{\alpha GJ} \cdot \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{\operatorname{ch} 2\alpha l} \cdot (\operatorname{ch} \alpha l - 1)$$

Giá trị α được xác định từ biểu thức:

$$\alpha^2 = \frac{GJ}{EJ_\omega}$$

Góc xoắn A là do độ vênh của mặt cắt ngang giữa hai đoạn gậy ra.

22.7. TRƯỜNG HỢP CHỊU LỰC TỔNG QUÁT CỦA THANH THÀNH MỎNG HỖ.

22.7.1. Khái niệm về Bimomen.

Chúng ta đã biết, khi θ là một hàm số đối với z , thì do sự vênh của các mặt cắt ngang mà trên nó xuất hiện một hệ ứng suất tiếp phụ τ_2 và ứng suất pháp phụ là:

$$\sigma_z = -E \cdot \omega \cdot \frac{d\omega}{dz} \quad (22-30)$$

M_2 là một mô men xoắn gây nên bởi ứng suất τ_2 ta đã biết ở trên, σ_z theo (22-30) gây nên một nội lực tự cân bằng. Để thoả mãn điều kiện cân bằng đó thì ω phải được tính từ cực chính và gốc chính.

Bây giờ chúng ta hãy chú ý đến biểu thức sau đây:

$$B = \int_F \sigma_z \cdot \omega dF = - \int_F E \omega^2 \frac{d\theta}{dz} dF$$

$E \cdot \frac{d\theta}{dz}$ là hằng số, nên:

$$B = -E \frac{d\theta}{dz} \int_F \omega^2 dF = -E \frac{d\theta}{dz} \cdot J_\omega \quad (22-31)$$

Giá trị B này được gọi là đại lượng Bimomen.

Ta thay (22-31) vào (22-24) ta sẽ được:

$$\sigma_z = \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega \quad (22-32)$$

Biểu thức (22-32) này có dạng tương tự như biểu thức tính ứng suất pháp do mô men uốn gây nên mà ta đã gặp trong uốn thuần túy. Thứ nguyên của Bimomen là $N \cdot cm^2$ và nó là một hệ nội lực tự cân bằng.

Dưới đây xin dẫn ra một vài trị số B.

Ví dụ với thanh chữ I chịu tác dụng của 4 lực ở các đỉnh. Bốn lực này tạo thành hai ngẫu lực tự cân bằng (xem hình 22.30), thì B được xác định như sau:

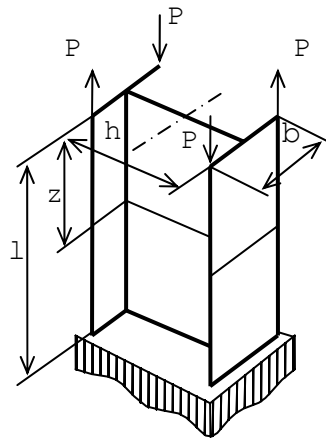
$$B = \int_F \sigma_z \cdot \omega \cdot dF = \sum_{i=1}^4 P_i \omega_i$$

ω_i được tính với cực chính và gốc chính. Trong trường hợp này các điểm đó trùng với trọng tâm của mặt cắt. Do đó ta có:

$$B = 4P \cdot \frac{bh}{4} = P \cdot b \cdot h$$

Trên hình 22.30 dễ dàng thấy rằng các mặt cắt không có lực dọc vì 4 lực P đó tự triệt tiêu và cũng không có mô men uốn vì các mô men cũng tự triệt tiêu.

22.7.2. Trường hợp chịu lực tổng quát của thanh thành mỏng.



Hình 22.30: Sơ đồ xác định trị số B với thanh chữ I chịu tác dụng của 4 lực ở

Khi chịu lực tổng quát thì hệ ứng suất trên mặt cắt ngang là tổng ứng suất pháp do lực dọc, mô men uốn và Bimomen sinh ra:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x + \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega$$

Và ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang sẽ do các mô men xoắn M_z , do mô men kiềm chế và các lực cắt Q_y, Q_x sinh ra.

$$\tau_{Q_y} = \frac{Q_y \cdot S_x}{J_x \cdot \delta} ; \quad \tau_{Q_x} = \frac{Q_x \cdot S_y}{J_y \cdot \delta} ; \quad \tau_1 = \frac{3M_z}{\delta^2 \cdot S}$$

hoặc

$$\tau_1 = \frac{3M_z \cdot \delta_{\max}}{\delta_1^3 \cdot S_1 + \delta_2^3 \cdot S_2 + \dots + \delta_n^3 \cdot S_n}$$

và

$$\tau_2 = \frac{E}{\delta} \cdot \frac{d^2\theta}{dz^2} \int \omega dF$$

Ví dụ 11: Hãy tính góc tỉ đối của thanh chịu lực như trên hình 22.30.

Bài giải: Do các lực ngược chiều từng đôi một nên $M_z=0$, nên nghiệm của phương trình (22-28) sẽ là:

$$\theta = C_1 \operatorname{sh}\alpha z + C_2 \operatorname{ch}\alpha z$$

Với điều kiện biên:

Tại $z=0 \rightarrow B=P \cdot h \cdot b$

Tại $z=l \rightarrow W=0$

Căn cứ (22-31) và (22-23) ta có: $\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=0} = C_1 \cdot \alpha = -\frac{P \cdot b \cdot h}{EJ_\omega}$

Từ $z=l$ thì $C_1 \operatorname{sh}\alpha l + C_2 \operatorname{ch}\alpha l = 0$

Từ đây ta xác định được C_1 và C_2 , vậy:

$$\theta = \frac{Pbh}{\alpha EJ_\omega} [\operatorname{th}\alpha l \cdot \operatorname{ch}\alpha \cdot z - \operatorname{sh} \cdot z]$$

Nếu như l rất dài thì $\operatorname{th}\alpha l \approx 1$ và $\theta = \frac{Pbh}{\alpha EJ_\omega} e^{-\alpha z}$.

Với biểu thức này ta thấy θ sẽ nhỏ dần theo tọa độ z .

Ví dụ 12: Một thanh chịu lực như trên hình 22.31. Hãy khảo sát góc xoắn φ , góc xoắn tỉ đối θ và thành phần Bimomen của mặt cắt. Sau đó tính ứng suất trên mặt cắt ngang của nó.

Bài giải: Trong trường hợp này lực P không những gây ra kéo, uốn mà còn gây ra sự xoắn đối với thanh. Về mặt ngoại lực thì $M_z=0$ ở mọi mặt cắt cho nên giá trị góc xoắn tỉ đối theo (22-28) sẽ là:

$$\theta = C_1 \operatorname{sh}\alpha z + C_2 \operatorname{ch}\alpha z$$

Với hệ tọa độ chọn như trên hình vẽ, thì các điều kiện biên sẽ là : $z=0$ và $z=l$ thì $\theta=0$, từ đó chúng ta tìm được Bimomen sẽ là:

$$B = \int_F \sigma \omega dF = P \cdot \omega_A$$

ω_A là tọa độ quạt của điểm đặt lực đối với cực chính và gốc chính (A chính là tâm xoắn đã được xác định ở hình 22.15).

Từ (22-31) ta có: $\left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=0} = \left(\frac{d\theta}{dz}\right)_{z=l} = -\frac{P \cdot \omega_A}{EJ_\omega} = -\frac{B}{EJ_\omega}$

Với các hệ thức này ta xác định được C_1 và C_2 như sau:

$$C_1 = -\frac{B_0}{\alpha EJ_\omega} \cdot \frac{\operatorname{ch}\alpha l - 1}{\operatorname{sh}\alpha l}; C_2 = \frac{B_0}{\alpha EJ_\omega}$$

Vậy góc xoắn tỉ đối sẽ là:

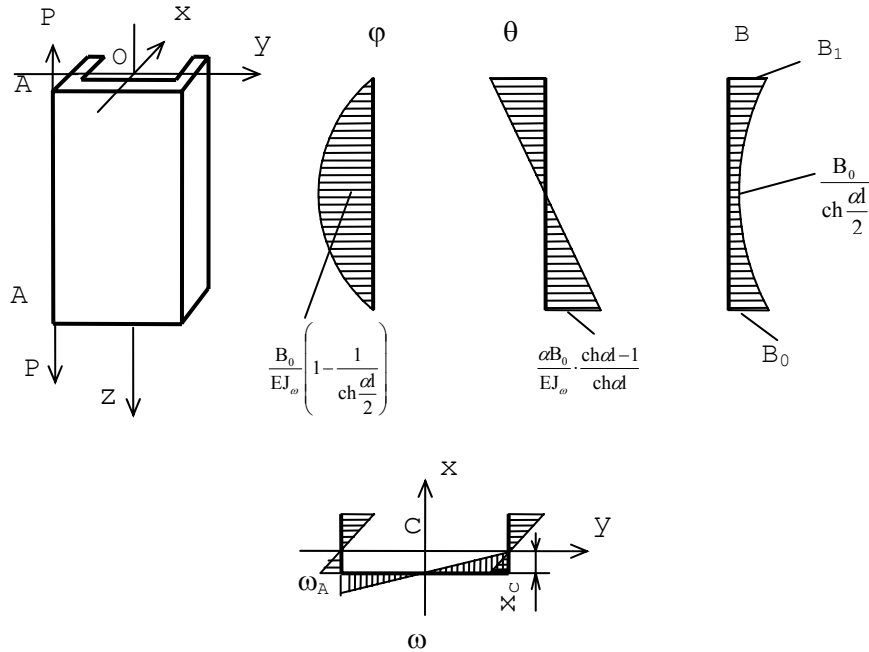
$$\theta = \frac{B_0}{\alpha EJ_\omega} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha l} [\operatorname{sh}\alpha \cdot z - \operatorname{sh}\alpha l + \operatorname{sh}\alpha(1-z)]$$

Và góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt ở góc tọa độ và mặt cắt ở tọa độ z sẽ là :

$$\varphi = \int_0^z \theta dz = \frac{B_0}{\alpha^2 \cdot E \cdot J_\omega} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha l} \cdot [\operatorname{sh}\alpha z - \operatorname{sh}\alpha l + \operatorname{sh}\alpha(1-z)]$$

Các biểu đồ biểu diễn các đại lượng ω , φ , θ và B được trình bày trên hình 22.31. Ứng suất pháp tại một điểm bất kì nào đó trên mặt cắt ngang sẽ là:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x + \frac{B}{J_\omega} \cdot \omega$$



Hình 22.31: Sơ đồ xác định φ , θ , B của một

Trong đó các giá trị tuyệt đối của các thành phần nội lực là:

$$N_z = P; M_x = P \cdot \frac{h}{2}; M_y = P \cdot x_0$$

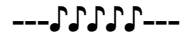
Và Bimomen được xác định:

$$B = -\frac{B_0}{\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha l} [\alpha \operatorname{sh}\alpha z + \operatorname{sh}\alpha(1-z)]$$

CÂU HỎI TỰ HỌC

22.1. Cách xác định đặc trưng quạt của một hình phẳng ?

- 22.2. Các đặc trưng của một mặt cắt ngang là gì ? Cách xác định chúng.
22.3. Các biểu thức để tính ứng suất tiếp trong các thanh thành mỏng ?
22.4. Một thanh thành mỏng khi bị xoắn sẽ xuất hiện ứng suất như thế nào ? Sự khác nhau giữa các mặt cắt ngang là hở và mặt cắt ngang là kín ?
22.5. Nói về sự xoắn kiềm chế.
22.6. Đại lượng Bimomen là gì ? Khi nào thì xuất hiện nó ? Cách tính ?



BÀI TOÁN TIẾP XÚC

Trong các ngành kĩ thuật chúng ta gặp rất nhiều trường hợp hai vật thể tiếp xúc với nhau. Ví dụ như sự tiếp xúc của hai bánh răng ăn khớp, sự tiếp xúc giữa bánh vít và trục vít, giữa ổ bi với bạc, giữa vành trong của ổ bi với trục truyền động, giữa hai trục cán với nhau... Khi mới tiếp xúc, ban đầu có thể là điểm hay đường, nhưng sau khi biến dạng tăng lên thì sự tiếp xúc của hai vật thể đàn hồi sẽ biến thành tiếp xúc mặt. Diện tích tiếp xúc thường rất bé so với bề mặt của vật thể, nên sự xuất hiện giữa biến dạng và ứng suất chỉ tập trung ở miền tiếp xúc có tính cục bộ. Điều đó có nghĩa là biến dạng và ứng suất chỉ tập trung ở miền tiếp xúc và giảm rất nhanh ở ngoài miền tiếp xúc, đồng thời ứng suất xuất hiện ở miền tiếp xúc có giá trị rất lớn, nó dẫn đến sự phá huỷ ở vùng đó.

Ứng suất có thể là ứng suất tĩnh, cũng có thể là ứng suất động hoặc ứng suất thay đổi theo thời gian. Khi chi tiết chịu ứng suất tiếp xúc thay đổi theo thời gian nó cũng gây ra hiện tượng mỏi lớp bề mặt và dĩ nhiên nó cũng làm cho các vết nứt vi mô phát triển thành những vết nứt bề mặt và bề mặt sẽ bị phá huỷ, làm cho bề mặt bị rỗ, hoặc tróc.

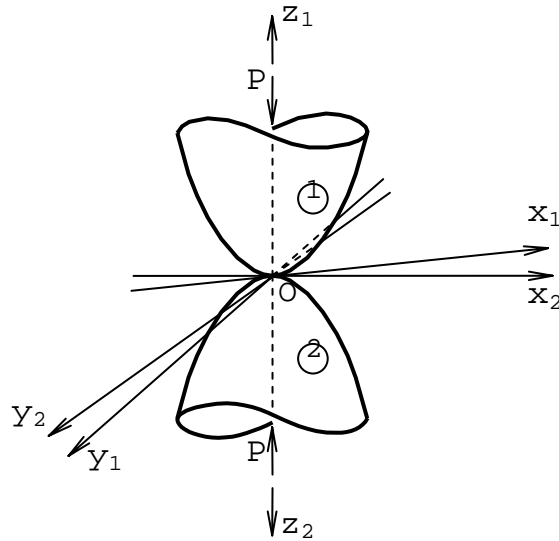
Trong khi xem xét bài toán tiếp xúc chúng ta cần công nhận một số lời giải cũng như kết quả mà lí thuyết đàn hồi đã chứng minh.

23.1. BÀI TOÁN TIẾP XÚC CỦA HEZT.

Giả sử có hai vật thể đàn hồi, đồng nhất, đẳng hướng tiếp xúc với nhau tại điểm O không phải là điểm kì dị. Lúc đó vật thể (1) tác dụng lên vật thể (2) một lực ép P (xem hình 23.1). Bây giờ chúng ta hãy xác định diện tích tiếp xúc, độ dịch gần của hai vật thể, quy luật phân bố áp suất trên diện tích tiếp xúc. Tức là nghiên cứu trạng thái biến dạng, ứng suất xuất hiện ở hai vật thể tiếp xúc đó để tính toán độ bền và độ cứng của chúng.

23.1.1. Quan hệ hình học đối với bề mặt của hai vật thể tiếp xúc.

Trước hết chúng ta tạo các hệ trục như trên hình vẽ 23.1. Hai hệ trục tọa độ đó chung gốc O-là điểm tiếp xúc hai vật thể. Các hệ trục Ox_1y_1 và Ox_2y_2 cùng nằm trong một mặt phẳng tiếp xúc chung của hai vật thể đang khảo sát. Các trục Oz_1 và Oz_2 trùng với pháp tuyến chung của hai mặt cong có chiều dương hướng vào trong mỗi vật thể đang xét. Có thể xem phương trình của hai mặt vật thể cũng như quanh vùng tiếp xúc là hàm của tọa độ x_1, y_1 và x_2, y_2 .



Hình 23.1: Hai vật thể đàn hồi, đồng nhất và đẳng hướng tiếp xúc với nhau

$$Z_1 = F_1(x_1, y_1); \quad Z_2 = F_2(x_2, y_2) \quad (21-1)$$

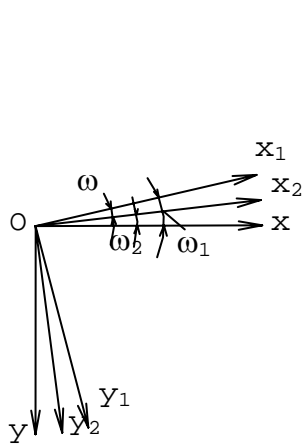
Nếu ta chọn các hệ trục Ox_1y_1 và Ox_2y_2 sao cho chúng trùng với phương các toạ độ cong chính, theo giáo trình hình học giải tích thì các phương trình hình học (23-1) sẽ có dạng:

$$\left. \begin{aligned} 2Z_1 &= K_{11} \cdot x_1^2 + K_{12} \cdot y_1^2 \\ 2Z_2 &= K_{21} \cdot x_2^2 + K_{22} \cdot y_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (23-2)$$

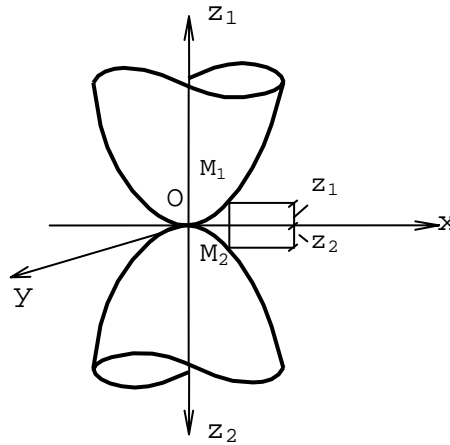
Trong đó K_{11} , K_{12} , K_{21} và K_{22} là độ cong chính của các mặt vật thể tại điểm tiếp xúc (tại gốc O) và có giá trị dương khi tâm cong tương ứng ở bên trong vật thể.

Một cách tổng quát có thể coi các trục x_1 , y_1 và x_2 , y_2 không trùng nhau.

Bây giờ chúng ta hãy chọn một hệ trục chung Oxy cho hai vật thể có gốc tại O và cũng nằm trong mặt tiếp xúc chung. Các trục x_1 , x_2 tạo với trục x những góc tương ứng ω_1, ω_2 như trên hình vẽ 23.2. Và ta có hệ thức đổi trục toạ độ như sau:



Hình 23.2: Hệ trục tọa độ



Hình 23.3: Biểu diễn độ dịch gần của hai vật thể

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \omega_1 - y \sin \omega_1 \\ y_1 &= x \sin \omega_1 + y \cos \omega_1 \\ x_2 &= x \cos \omega_2 - y \sin \omega_2 \\ y_2 &= x \sin \omega_2 + y \cos \omega_2 \end{aligned}$$

Thay các giá trị này vào biểu thức (23-2), ta được:

$$\begin{aligned} 2Z_1 &= x^2(K_{11} \cos^2 \omega_1 + K_{12} \sin^2 \omega_1) + y^2(K_{11} \sin^2 \omega_1 + K_{12} \cos^2 \omega_1) - \\ &\quad - xy(K_{11} - K_{12}) \sin 2\omega_1 \\ 2Z_2 &= x^2(K_{21} \cos^2 \omega_2 + K_{22} \sin^2 \omega_2) + y^2(K_{21} \sin^2 \omega_2 + K_{22} \cos^2 \omega_2) - \\ &\quad - xy(K_{21} - K_{22}) \sin 2\omega_2 \end{aligned}$$

Ta có thể viết ở một dạng gọn hơn:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= A_1 x^2 - A_2 xy + A_3 y^2 \\ Z_2 &= B_1 x^2 - B_2 xy + B_3 y^2 \end{aligned} \right\} \quad (23-3)$$

Trong đó các giá trị A_1, \dots, B_3 là các hằng số nào đó phụ thuộc vào điều kiện bài toán. Nếu chọn được hệ toạ độ Oxy sao cho số hạng tích số xy triệt tiêu thì biểu thức (23-3) sẽ còn lại:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= A_1x^2 + A_3y^2 \\ Z_2 &= B_1x^2 + B_3y^2 \end{aligned} \right\}$$

Bây giờ chúng ta hãy xét hai điểm $M_1; M_2$ ở trên hai mặt cong cùng nằm trên đường thẳng song song với trục Z_1OZ_2 (xem hình 23.3), từ đây ta có :

$$\overline{M_1M_2} = Z_1 + Z_2 = (A_1 + B_1)x^2 + (A_3 + B_3)y^2$$

$$\text{Có thể viết gọn hơn : } \overline{M_1M_2} = Ax^2 + By^2 \quad (23-4)$$

Trong đó :

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} [K_{11} \cos^2 \omega_1 + K_{12} \sin^2 \omega_1 + K_{21} \cos^2 \omega_2 + K_{22} \sin^2 \omega_2] \\ B &= \frac{1}{2} [K_{11} \sin^2 \omega_1 + K_{12} \cos^2 \omega_1 + K_{21} \sin^2 \omega_2 + K_{22} \cos^2 \omega_2] \end{aligned} \right\} \quad (23-5)$$

Nếu đặt $\omega = \omega_1 + \omega_2$ và biến đổi (23-5), cuối cùng ta có:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \left[(K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}) - \sqrt{(K_{11} - K_{12})^2 + (K_{21} - K_{22})^2 + 2(K_{11} - K_{12}) \cdot (K_{21} - K_{22}) \cos 2\omega} \right] \\ B &= \frac{1}{4} \left[(K_{11} + K_{12}) + (K_{21} + K_{22}) + \sqrt{(K_{11} - K_{12})^2 + (K_{21} - K_{22})^2 + 2(K_{11} - K_{12}) \cdot (K_{21} - K_{22}) \cos 2\omega} \right] \end{aligned} \right\} \quad (23-6)$$

Gọi M là giao điểm của $\overline{M_1M_2}$ với mặt phẳng Oxy. Nếu $\overline{M_1M_2} = Z_1 + Z_2$ là một hằng số thì quỹ tích của điểm M được xác định bởi phương trình.

$$Z_1 + Z_2 = Ax^2 + By^2 = C = \text{const} \quad (23-7)$$

C là một hằng số tùy ý. Nếu xem C là một tham số thì trên mặt tiếp xúc Oxy phương trình (23-7) biểu diễn một họ đường elip đồng dạng có tâm là O .

23.1.2. Kích thước diện tích tiếp xúc, độ dịch gần và giá trị áp suất cực đại.

Trong quá trình thiết lập chúng ta sử dụng một số giả thiết sau:

1. Vật liệu làm việc trong miền đàn hồi tuân theo định luật Hooke.
2. Diện tích vùng tiếp xúc rất bé so với bề mặt của hai vật thể tiếp xúc, biến dạng ở vùng càng xa vùng tiếp xúc càng bé (Butxinet đã nghiên cứu chuyên vị trong bán không gian đàn hồi, cho nên nhờ giả thiết này ta có thể sử dụng kết quả tính toán của Butxinet).
3. Bỏ qua lực ma sát trên diện tích tiếp xúc, tức là xem áp lực tiếp xúc vuông góc với bề mặt tiếp xúc).

Nếu chúng ta gọi $W_1(O)$ và $W_2(O)$ là chuyển vị điểm tiếp xúc tại gốc tọa độ O về hai phía của 2 vật thể và δ là độ dịch gần của hai vật thể tại điểm tiếp xúc ban đầu O thì:

$$\delta = W_1(O) + W_2(O)$$

Tương tự ta gọi W_1 và W_2 là chuyển vị theo phương z của hai điểm M_1 và M_2 cùng ở trên đường thẳng song song với trục z_1 và z_2 (xem hình 23.3). Trước khi biến dạng khoảng cách giữa hai điểm đó là $Z_1 + Z_2$, sau biến dạng khoảng cách đó bớt đi một đoạn:

$$W_1(O) - W_1 + W_2(O) - W_2 = \delta - (W_1 + W_2) \quad (23-8)$$

Ta có nhận xét: Sau khi biến dạng những điểm nào thỏa mãn (23-8) thì sẽ nằm trong vùng tiếp xúc, còn những điểm nằm ngoài miền tiếp xúc sẽ tuân theo bất đẳng thức sau:

$$Z_1 + Z_2 > \delta - (W_1 + W_2) \quad (23-9)$$

Như đã lí luận ở trên nếu xa vùng tiếp xúc thì chuyển vị rất bé và có thể xem $W_1+W_2=0$ và có nghĩa là độ dịch gần nhau có giá trị là δ .

Tại điểm O trị số $Z_1+Z_2=0$, những điểm trên chu vi diện tích tiếp xúc có tổng Z_1+Z_2 đạt giá trị lớn nhất (so với các điểm khác trong vùng tiếp xúc) và sẽ là:

$$Z_1 + Z_2 = \delta = \text{const} \quad (23-10)$$

Căn cứ vào (23-7) và (23-10) ta sẽ đi đến kết luận là chu vi của diện tích tiếp xúc là một đường enlip mà các nửa trục của nó trùng với các nửa trục của enlip:

$$Ax^2 + By^2 = C = \text{const}$$

Các chuyển vị W_1 và W_2 sử dụng theo kết quả của Butxinet là:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= K_1 \int_F \frac{P(x,y)}{r} dF \\ W_2 &= K_2 \int_F P(x,y) dF \end{aligned} \right\} \quad (23-11)$$

Trong đó :
$$K_1 = \frac{1-\mu_1}{2\pi G_1}; \quad K_2 = \frac{1-\mu_2}{2\pi G_2}$$

$\mu_1; \mu_2$ - Hệ số poatxong của vật thể (1) và (2).

$G_1; G_2$ - Mô đun đàn hồi khi trượt của vật thể (1) và (2).

$P(x,y)$ - Cường độ áp lực tiếp xúc.

Căn cứ vào phương trình (23-4) và (23-8) ta có được:

$$Z_1 + Z_2 = Ax^2 + By^2 = \delta - (W_1 + W_2)$$

Đưa giá trị W_1 và W_2 theo (23-11) vào biểu thức này và biến đổi ta có :

$$\delta - (Ax^2 + By^2) = K_0 \int_F \frac{P}{r} dF \quad (23-12)$$

Trong đó :
$$K_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1-\mu_1}{2\pi G_1} + \frac{1-\mu_2}{2\pi G_2} \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right]$$

E_1, E_2 - là mô đun đàn hồi của vật thể (1) và (2).

r - là khoảng cách từ tâm O đến 1 điểm nào đó trong mặt phẳng tiếp xúc.

Biểu thức (23-12) cho phép ta xác định các đại lượng cần tìm khi biết được quy luật phân bố của áp lực $P(x,y)$ trên miền tiếp xúc.

Chúng ta đã biết diện tích tiếp xúc là một đường enlip, điểm tiếp xúc tại góc tọa độ O sẽ chịu áp lực lớn nhất, càng xa tâm thì áp lực càng nhỏ và trên chu vi tiếp xúc áp lực sẽ đạt một giá trị tương đối nhỏ. Hezt đã kết luận quy luật phân bố P tại điểm bất kì (x,y) trên diện tích tiếp xúc tỉ lệ với tung độ ξ của enlipxoit có dạng:

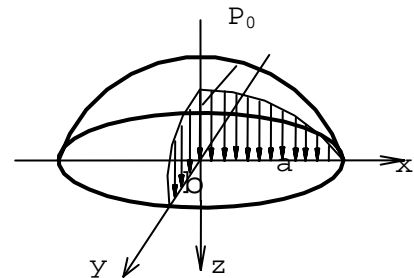
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{c}\right)^2 = 1$$

a, b, c -là các bán trục của enlipxoit (hình 23.4).

Điều đó cũng có nghĩa là Hezt cho rằng :

$$P(x,y) = P_0 \frac{\xi}{c}$$

hay:
$$P(x,y) = P_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$



Hình 23.4:
Quy luật phân bố của P

P_0 - là cường độ áp lực tại điểm tiếp xúc O.
 Gọi tổng hợp tất cả các áp lực ở vùng tiếp xúc P, thì:

$$P = \int_F P(x, y) dF$$

Và
$$P_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi ab} \quad (23-13)$$

Sử dụng kết quả của bài toán Butxinet về tính độ lún khi có hệ lực phân bố, sau khi biến đổi biểu thức (23-12), ta có :

$$\delta - (Ax^2 + By^2) = K_0 \frac{P_0}{a} \left\{ abK(e) - \frac{b}{a} D(e)x^2 - \frac{a}{b} [K(e) - D(e)y^2] \right\} \quad (23-14)$$

Trong đó:

$$D(e) = \frac{1}{e^2} [K(e) - L(e)]$$

$$K(e) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

và
$$L(e) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \cdot d\varphi$$

Những biểu thức này là các tích phân enliptic phụ thuộc vào tâm sai e của đường enlip (chu vi của diện tích tiếp xúc):

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (23-15)$$

Căn cứ vào phương trình (23-14), thực hiện cân bằng của từng trị số tương ứng của vế trái và vế phải, ta sẽ được:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= K_0 P_0 b \cdot K(e) \\ A &= K_0 P_0 \cdot \frac{b}{a^2} D(e) \\ B &= K_0 P_0 \cdot \frac{1}{b} [K(e) - D(e)] \end{aligned} \right\} \quad (23-16)$$

Bây giờ ta lập tỉ số A/B và chú ý đến giá trị tâm sai e, ta được:

$$\frac{A}{B} = (1 - e^2) \frac{D}{K - D}$$

Cho e các trị số khác nhau và sử dụng hằng số tích phân enliptic ta xây dựng được đồ thị biểu diễn quan hệ giữa e và tỉ số A/B như trên hình 23.5.

Ta kí hiệu $\sum K = K_{11} + K_{12} + K_{21} + K_{22}$ và từ (23-6) ta suy ra được:

$$\sum K = 2(A + B).$$

Nhờ các biểu thức tính e, A, B ở trên ta nhận được các giá trị a, b, P_0, δ sau khi đã biến đổi:

$$\left. \begin{aligned} a &= n_a \sqrt[3]{\frac{3 K_0 P}{2 \sum K}} \\ b &= n_b \sqrt[3]{\frac{3 K_0 P}{2 \sum K}} \\ \delta &= n_\delta \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3 \left(\sum K\right)^2}{K_0}} \\ P_0 &= n_p \cdot \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{9}{4} K_0^2 P^2 \sum K} \end{aligned} \right\} (23-17)$$

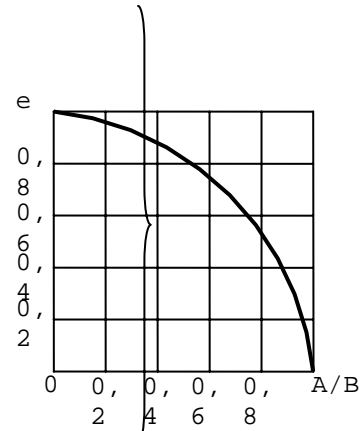
Trong đó : $n_p = \frac{1}{n_a \cdot n_b}$

mà : $n_a = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \left(1 + \frac{A}{B}\right) D(e)}$

$$n_b = \sqrt[3]{\frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{A}{B}\right) \left[K(e) - D(e) \sqrt{1 - e^2} \right]} \quad (23-18)$$

và

$$n_\delta = K(e) \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{A}{B}\right) \cdot D(e)}}$$



Hình 23.5: Đồ thị biểu diễn quan hệ giữa e và tỉ số A/B

Để làm sáng tỏ những điều đã nói ta hãy xét ví dụ sau:

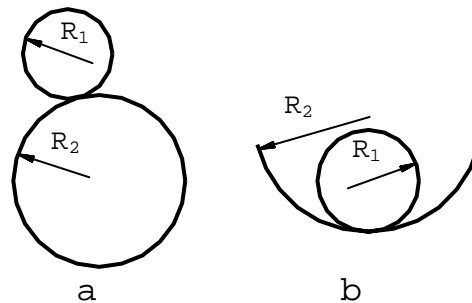
Ví dụ 1: Cho hai vật thể mặt cầu bán kính R_1 và R_2 tiếp xúc với nhau chịu tác dụng một lực ép P . Hãy tính bán kính trục của diện tích tiếp xúc a, b , áp lực tiếp xúc P_0 và độ dịch gần δ (xem hình vẽ 23.26a).

Bài giải: Trong trường hợp này:

$$\sum K = 2 \left(\frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \right) = 2 \frac{R_1 \pm R_2}{R_1 \cdot R_2}$$

Dấu trừ ứng với trường hợp tiếp xúc ở mặt trong như hình 23.6b.

Từ biểu thức 23-6 ta có $A=B$ và theo đồ thị trên hình 23.5 với $A/B=1$ ta có $e=0$. Với các giá trị đó ta tra bảng về tích phân elliptic (trong các sổ tay toán học) ta tìm được:



Hình 23.6: Hai vật thể mặt cầu tiếp xúc với nhau. a- tiếp xúc ngoài; b- tiếp xúc trong

$$K(0) = L(0) = \frac{\pi}{2} \text{ và } D(0) = \frac{\pi}{4}$$

Tiếp theo ta đưa các trị số này vào biểu thức (23-18) ta tìm được giá trị $n_a = n_b = n_\delta = 1$. Mang các giá trị này vào (23-17) ta tìm được:

$$\left. \begin{aligned} a = b &= 0,9086 \cdot \sqrt[3]{K_0 P \frac{R_1 R_2}{R_2 \pm R_1}} \\ P_0 &= 0,5784 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{K_0^2} \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 \pm R_1} \right)^2} \\ \delta &= 0,8255 \cdot \sqrt[3]{(K_0 P)^2 \frac{R_2 \pm R_1}{R_1 R_2}} \end{aligned} \right\} \quad (23-19)$$

Nếu hai vật thể tiếp xúc cùng vật liệu thì $E_1 = E_2 = E$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0,3$ (đối với thép thông thường).

Và lúc đó
$$K_0 = 2 \frac{1 - \mu^2}{E} = \frac{1,82}{E}$$

Vậy các giá trị ở biểu thức (23-19) sẽ là :

$$\left. \begin{aligned} a = b &= 1,109 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 \pm R_1}} \\ P_0 &= 0,388 \cdot \sqrt[3]{P E^2 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 \pm R_1} \right)^2} \\ \delta &= 1,231 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E} \right)^2 \frac{R_2 \pm R_1}{R_1 R_2}} \end{aligned} \right\} \quad (23-20)$$

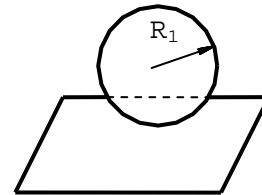
Ví dụ 2: Một vật thể hình cầu có bán kính R_1 , tiếp xúc với mặt phẳng chịu lực ép P . Hãy tính bán kính a , b , cường độ áp lực tại tâm P_0 của diện tích tiếp xúc và độ dịch gần δ (xem hình 23.7).

Bài giải : Mặt phẳng tiếp xúc được xem $R_2 = \infty$.

Lúc này: $\frac{R_2 + R_1}{R_2 \cdot R_1} = \frac{1}{R_1}$ và $\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = R_1$ (vì $R_2 = \infty$, nên xem R_1 nhỏ so với R_2).

Thay các đại lượng này vào (23-20), ta sẽ tìm được:

$$\left. \begin{aligned} a = b &= 1,109 \cdot \sqrt[3]{\frac{P \cdot R_1}{E}} \\ P_0 &= 0,3880 \cdot \sqrt[3]{\frac{P E^2}{R_1^2}} \\ \delta &= 1,231 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E R_1} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (23-20)$$



Hình 23.7: Vật thể hình cầu tiếp xúc với mặt phẳng

Ví dụ 3: Cho hai hình trụ tròn có bán kính $R_1=R_2=R$ có trục vuông góc với nhau như trên hình 23.8 chịu một lực ép tập trung P . Xác định bán kính lớn nhất tại a, b , cường độ áp lực tại tâm P_0 của diện tích tiếp xúc và độ dịch gần δ .

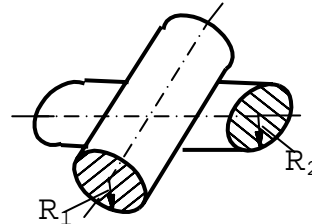
Bài giải: Như trên ta có: $\sum K = 2 \cdot \frac{2}{R}$ và trong trường hợp này thì: $A/B=1$.

Tra ở hình 23.5 với $e=0$, căn cứ vào biểu thức có được ở phần trên thì:

$$\left. \begin{aligned} a &= b = 0,9086 \cdot \sqrt[3]{K_0 PR} \\ P_0 &= 0,5784 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{(K_0)^2 R}} \\ \delta &= 0,8255 \cdot \sqrt{\frac{(K_0 P)^2}{R}} \end{aligned} \right\} \quad (23-22)$$

Nếu hai vật thể tiếp xúc cùng vật liệu, tức là $E_1 = E_2 = E$ và $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ thì (23-22) đưa về dạng:

$$\left. \begin{aligned} a &= b = 1,193 \cdot \sqrt[3]{\frac{PR}{E}} \\ P_0 &= 0,388 \cdot \sqrt[3]{P \left(\frac{E}{R}\right)^2} \\ \delta &= 1,231 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \cdot \frac{1}{R}} \end{aligned} \right\} \quad (23-23)$$



Hình 23.8: Hai mặt trụ tiếp xúc có trục vuông góc với nhau

23.2. TẾP XÚC ĐƯỜNG

Xét hai hình trụ tròn có bán kính R_1 và R_2 , có trục song song tiếp xúc với nhau như hình 23.9. Chúng tiếp xúc với nhau theo một đường ở thời điểm chưa chịu lực được gọi là tiếp xúc đường.

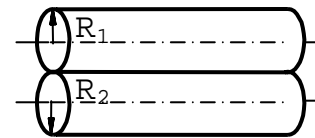
Mở rộng lý thuyết tiếp xúc điểm, theo (23-6) ta tính các đại lượng A và B như sau:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

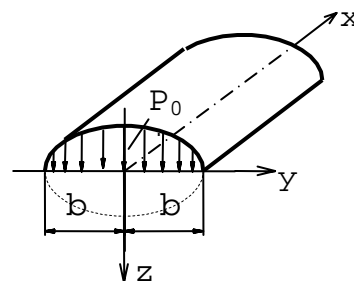
Từ trên đồ thị hình 23.5, khi $A/B=0$ thì tâm sai $e=1$. Với các giá trị tra bảng các tích phân elliptic ta được $D(e)=\infty$, $K(e)-D(e)=L(e)=1$. Từ biểu thức (23-17) ta suy ra được hình elip trở thành một dải được giới hạn bởi hai đường thẳng song song có $a=\infty$ và chiều rộng hẹp $2b$ như trên hình (23.10).

Áp lực enlipxoít:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{c}\right)^2 = 1$$



Hình 23.9: Hai hình trụ tiếp xúc có trục song song với



Hình 23.10: Khi $a=\infty$ và b hẹp, elip thành một dải

sẽ trở thành hình trụ enliptic:

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{c}\right)^2 = 1$$

Lúc này áp lực phân bố trên chiều rộng $2b$ theo quy luật:

$$P = P_0 \cdot \frac{\xi}{c} = P_0 \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$$

Trong đó P_0 là áp suất lớn nhất trên đường trung bình của dải. Vậy nếu quy ra áp suất đường theo chiều dài của hình trụ (từ lực phân bố mặt chuyển thành lực phân bố đường trong mô hình tính toán) ta sẽ có:

$$q = \int_{-b}^b P dy = P_0 \int_{-b}^b \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \cdot dy$$

Suy ra

$$q = P_0 \frac{\pi b}{2} \quad (23-24)$$

Gọi P là tổng lực ép giữa hai hình trụ thì từ các biểu thức (23-13) và (23-24) ta có quan hệ giữa P và q sẽ là:

$$P = \frac{4}{3} q \cdot a \quad (23-25)$$

Chú ý: Trong thực tế a không phải lớn vô cùng, nên P xác định được. Từ những kết quả đó ta có các biểu thức sau đây để xác định các đại lượng cần thiết:

$$a = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{A}{B}\right) D(e) \frac{K_0 \cdot q}{\sum K}}$$

$$B = \sqrt{\frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{A}{B}\right) [K(e) - D(e)] \frac{K_0 \cdot q}{\sum K}}$$

Trong trường hợp tiếp xúc đường này vì $e=1$ nên $D(e)=\infty$; $K(e)-D(e) = L(e)=1$, bán kính a xem là ∞ thì bán kính trục b sẽ là:

$$b = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{K_0 q}{\sum K}}$$

Từ giá trị này ta tính được giá trị áp lực lớn nhất:

$$P_0 = \sqrt[3]{\frac{\sum K}{\pi K_0}} \cdot q$$

Nếu hai vật thể này cùng một vật liệu thì ta sẽ có $K_0 = \frac{1,82}{E}$ và chiều rộng b sẽ là:

$$b = 1,522 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{E \sum K}} \quad (23-26)$$

Và giá trị áp suất lớn nhất sẽ là:

$$P_0 = 0,518 \cdot \sqrt[3]{q \cdot E \sum K}$$

Chú ý: Những biểu thức ta vừa thiết lập dựa trên cơ sở hai hình trụ dài vô hạn, tức là xem $a=\infty$, nhưng trên thực tế a hữu hạn nên người ta vẫn sử dụng chúng.

Trị số độ dịch gần δ giữa hai hình trụ là một đại lượng hữu hạn. Nó không những phụ thuộc vào biến dạng cục bộ tại miền tiếp xúc mà còn phụ thuộc vào biến dạng của toàn thể vật thể. Vì vậy độ dịch gần của hai hình trụ có chiều dài hữu hạn bị ép về hai phía bởi tải trọng phân bố được sử dụng kết quả của Covanski B.S đưa ra:

$$\delta = \frac{q}{\pi} \left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1} \left(\ln \frac{2R_1}{b} + 0,407 \right) + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \left(\ln \frac{2R_2}{b} + 0,407 \right) \right]$$

Trong đó b được tính theo biểu thức (23-24).

Nếu hai hình trụ cùng vật liệu và $\mu=3$, thì:

$$\delta = 0,579 \frac{q}{E} \left[\ln \frac{4R_1 \cdot R_2}{b^2} + 0,814 \right]$$

Các công thức xác định P_0 , b , δ vẫn sử dụng cho các trường hợp riêng lẽ sau :

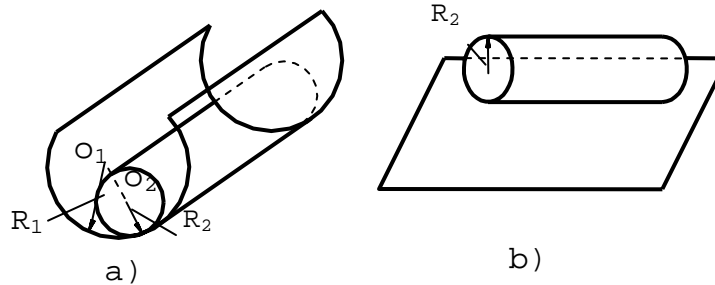
1- Hình trụ có bán kính R_2 tiếp xúc với mặt trụ lõm bán kính $R_1 > R_2$ (xem hình

23.11a). Ta tính được:

$$\sum K = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 \cdot R_2}$$

2- Hình trụ bán kính R_2 tiếp xúc với mặt phẳng như hình 23.11b, lúc này xem

$R_1=\infty$, nên $\sum K = \frac{1}{R_2}$.



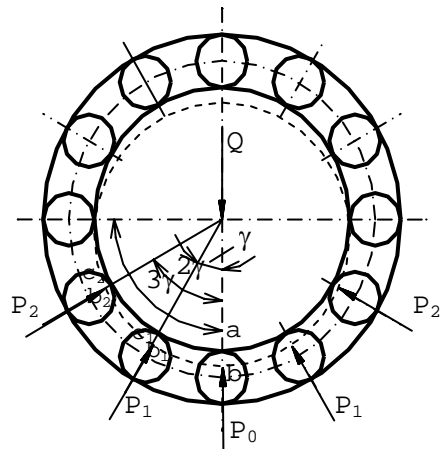
Hình 23.11: Trường hợp riêng
a- Hình trụ tiếp xúc với mặt trụ lõm $R_1 > R_2$
b- Hình trụ tiếp xúc với mặt

23.3. MỘT SỐ BÀI TOÁN TIẾP XÚC THƯỜNG GẶP.

23.3.1. Tính ổ bi chịu tải trọng tĩnh.

Ổ bi được biểu diễn trên hình vẽ 23.12 và sơ đồ chịu lực cũng được biểu diễn trên hình vẽ đó.

Ổ bi gồm có vành trong (ca trong), vành ngoài (ca ngoài), các vòng cách và các viên bi. Trên các vành người ta tạo nên các rãnh hình lòng máng để làm đường trượt cho các viên bi. Các



Hình 23.12:
Ổ bi và sơ đồ chịu lực

vòng cách giữ cho các viên bi có được vị trí tương đối với nhau.

Ổ bi chịu tải trọng Q. Tải trọng đó truyền xuống các viên bi qua vành trong và từ các viên bi chuyển xuống vành ngoài rồi tác dụng lên thành máy. Dễ dàng nhận thấy rằng viên bi ở vị trí thấp nhất sẽ là viên bi chịu tải trọng lớn nhất. Chúng ta phải xác định trị số của tải trọng này.

Để đơn giản bài toán ta giả sử rằng:

a) Ổ bi được lắp khít, khe hở theo hướng kính giữa vành trong, vành ngoài và các viên bi bằng không.

b) Ta chỉ tính đến biến dạng của bi và vành tại điểm tiếp xúc. Biến dạng do độ uốn của các vành được bỏ qua.

Bây giờ ta hãy tưởng tượng: dưới tác dụng của Q, vành trong được xem như một vật rắn tuyệt đối, có một chuyển vị $\delta_0=ab$ theo phương của lực. Vành ngoài cũng được xem như cứng tuyệt đối. Do đó sự biến dạng của các viên bi tạo nên các chuyển vị $ab, a_1b_1, a_2b_2...$ theo phương tải trọng Q của các điểm tiếp xúc $a, a_1, a_2...$. Các chuyển vị đó phải bằng nhau và bằng:

$$ab=a_1b_1=a_2b_2=...=\delta_0 .$$

Từ các tam giác $a_1b_1c_1, a_2b_2c_2$ v.v...ta có thể tìm thấy các thành phần chuyển vị theo phương bán kính của các điểm tiếp xúc là :

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= a_1c_1 = \delta_0 \cos \gamma \\ \delta_2 &= a_2c_2 = \delta_0 \cos 2\gamma \\ \dots \\ \delta_n &= a_n c_n = \delta_0 \cos n\gamma \end{aligned} \right\} \quad (23-25)$$

Ở đây góc $\gamma, 2\gamma, \dots, n\gamma$ là các góc làm bởi các phương của lực Q và phương bán kính đi qua tâm của các viên bi. Ta nhận thấy rằng góc lớn nhất trong chúng phải nhỏ hơn $\frac{\pi}{2}$ ($n\gamma < \frac{\pi}{2}$) vì các viên bi phía trên không chịu lực.

Các chuyển vị $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ là độ dịch gần của các vật thể tiếp xúc. Chúng được tính với công thức tổng quát như sau:

$$\delta = n_\delta \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{4} \eta^2 \sum k \cdot P^2} \quad (23-26)$$

với

$$n_\delta = K \cdot \sqrt[3]{\frac{H}{\pi^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{B}{A}} \cdot \frac{1}{D}}$$

Sử dụng công thức đó ta dễ dàng biểu diễn các chuyển vị qua trị số lực tác dụng như sau:

$$\left. \begin{aligned} \delta_0 &= C \cdot P_0^{2/3} \\ \delta_1 &= C \cdot P_1^{2/3} \\ \dots \\ \delta_n &= C \cdot P_n^{2/3} \end{aligned} \right\} \quad (23-27)$$

Với các biểu thức (23-25) và (23-27) ta có thể biểu diễn P_1, P_2, \dots, P_n theo P_0 như sau

:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_0 \cos^{3/2} \gamma \\ P_2 &= P_0 \cos^{3/2} 2\gamma \\ \dots \\ P_n &= P_0 \cos^{3/2} n\gamma \end{aligned} \right\} \quad (23-28)$$

Từ phương trình cân bằng ta có:

$$Q = P_0 + 2P_1 \cos \gamma + 2P_2 \cos 2\gamma + \dots + 2P_n \cos n\gamma$$

Thay (23-28) vào, ta có :

$$Q = P_0 [1 + 2 \cos^{5/2} \gamma + 2 \cos^{5/2} 2\gamma + \dots + 2 \cos^{5/2} n\gamma]$$

Ta gọi k là tỉ số:

$$k = \frac{i}{1 + 2 \cos^{5/2} \gamma + 2 \cos^{5/2} 2\gamma + \dots + 2 \cos^{5/2} n\gamma} \quad (23-29)$$

Trong đó i là số viên bi được lắp trong vành. Tương quan giữa P_0 và Q được viết gọn lại dưới dạng :

$$P_0 = k \cdot \frac{Q}{i} \quad (21-30)$$

Với các phép toán cụ thể ta thấy khi thay đổi i từ 10 đến 20 trị số k hầu như không đổi. Ta giả sử lấy $i=10$, khi đó:

$$k = \frac{10}{1 + 2 \cos^{5/2} 30^\circ + 2 \cos^{5/2} 60^\circ} = 4,38$$

Với $i=20$, ta tìm được $k=4,37$.

Nếu kể đến khe hở giữa các vành với bi và kể đến độ biến dạng khi uốn của các vành thì hệ k được nâng lên một ít. Thường người ta chọn $k=5$, vậy:

$$P_0 = 5 \cdot \frac{Q}{i} \quad (23-31)$$

Diện tích tiếp xúc giữa bi và các vành:

Diện tích đó có dạng hình elip. Các bán trục được xác định như sau:

Với các kích thước đã cho trên hình 23.13, ta có các độ cong chính là:

$$k_{11} = k_{12} = \frac{2}{d_0}$$

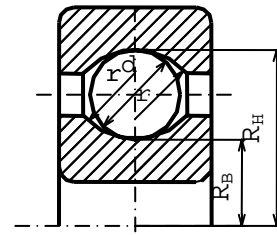
Đối với vành trong độ cong $k_{21} = 1/R_B$ và với vành ngoài $k_{21} = 1/R_H$

Độ cong chính k_{22} của hai vành là như nhau và bằng $k_{22} = -1/r$.

Diện tích tiếp xúc ở đây là một hình elip. Các bán kính chính a, b được xác định bởi công thức (23-17).

Trị số áp suất lớn nhất P_0 được xác định bởi công thức (23-17) và điều kiện bền của bi là : $P_0 \leq [P_0]$.

Ví dụ 4: Cho ổ bi số hiệu 217 với các kích thước sau đây: đường kính trong $d=85\text{mm}$; đường kính ngoài $D=150\text{mm}$; bề rộng $B=28\text{mm}$; đường kính bi $d_0=19,84\text{mm}$; số bi $i=10$; bán kính mặt cắt ngang của lòng máng $r=0,515d_0=10,23\text{mm}$; tải trọng tác dụng lên ổ bi $Q=34000\text{N}$. Cho biết $[P_0] = 35000 \text{ N/cm}^2$.



Hình 23.13:
Kích thước ổ bi

Tính độ bền của ổ bi.

Bài giải : Với các kích thước đã cho, ta suy ra:

Độ dày cực tiểu của ổ bi dọc theo lòng máng là:

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{D-d}{2} - d_0 \right) = \frac{1}{2} (32,5 - 19,84) = 6,33 \text{ mm}$$

Bán kính của lòng máng thuộc vành ngoài:

$$R_H = \frac{D}{2} - h = 75 - 6,33 = 68,67 \text{ mm}$$

Bán kính của lòng máng thuộc vành trong:

$$R_B = \frac{d}{2} + h = 42,5 + 6,33 = 48,83 \text{ mm}$$

Tải trọng đặt lên viên bi ở vị trí thấp nhất là:

$$P_0 = 5 \cdot \frac{Q}{i} = 5 \cdot \frac{34000}{10} = 17000 \text{ N}$$

Bi và các vành cùng làm bằng một vật liệu có mô đun đàn hồi $E = 2,12 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ và hệ số Poisson $\mu = 0,30$. Vậy hằng số đàn hồi có trị số là:

$$\eta = 2 \frac{1-\mu^2}{E} = 0,858 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{N}$$

Trị số các độ cong chính là :

$$k_{11} = k_{12} = \frac{2}{d_0} = \frac{2}{1,984} = 1,008 \text{ 1/cm}$$

Với vành ngoài:

$$k_{21} = -\frac{1}{R_H} = -\frac{1}{6,867} = -0,1456 \text{ 1/cm}$$

$$k_{22} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{6,867} = -0,1456 \text{ 1/cm}$$

Với vành trong: $k_{21} = \frac{1}{R_B} = \frac{1}{4,883} = 0,2048 \text{ 1/cm}$

$$k_{22} = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{1,023} = -0,9775 \text{ 1/cm}$$

Vậy với sự tiếp xúc của bi với vành ngoài ta có :

$$\sum k = 2 \cdot 1,008 - 0,1456 - 0,9775 = 0,8929 \text{ 1/cm}$$

Với những số liệu ở trên và dùng công thức (23-18), ta xác định được các hệ số:

$$n_a = 3,594 + \frac{0,9317 - 0,9303}{0,9342 - 0,9303} (3,683 - 3,594) = 3,626$$

$$n_b = 0,4253 - 0,3590 \cdot 0,054 = 0,4234$$

$$n_p = 0,6542 - 0,3590 \cdot 0,0075 = 0,6515$$

Chú ý: Để tiện lợi trong tính toán người ta lập bảng để có n_0, n_b, n_δ, n_p thông qua tỉ số A/B.

Từ đó ta có :

$$a = 3,626 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{0,858 \cdot 10^{-7}}{0,8920} \cdot 17000} = 0,489 \text{cm}$$

$$b = 0,4234 \cdot 0,1348 = 0,0570 \text{cm}$$

$$P_0 = \frac{0,6515}{3,14} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{0,8929}{0,858 \cdot 10^{-7}} \right)^2 \cdot 17000} = 291000 \text{N/cm}^2$$

Với sự tiếp xúc của bi và vành trong ta có :

$$\sum k = 2 \cdot 1,008 + 0,2048 - 0,9775 = 1,243 \text{ 1/cm}$$

Và tính ra các hệ số sẽ là: $n_a = 4,156$; $n_b = 0,3942$; $n_p = 0,6104$

Từ đó ta có :

$$a = 4,156 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{0,858 \cdot 10^{-7}}{1,243} \cdot 17000} = 0,502 \text{ cm}$$

$$b = 0,3942 \cdot 0,1207 = 0,0476 \text{ cm}$$

$$P_0 = \frac{0,6104}{3,14} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{1,243}{0,858 \cdot 10^{-7}} \right)^2} = 34000 \text{N/cm}^2$$

Đối với vật liệu làm bi và vành $[P_0] = 35000 \text{N/cm}^2$.

Để tính độ bền ta có thể so sánh P_0 với $[P_0]$.

Thực ra như ta đã nói ở trên, điểm nguy hiểm nhất là tại trong lòng vật thể ở độ sâu $z=0,8b$. Trị số ứng suất tiếp cực đại tại đó là $\tau_{\max} = 0,325P_0$, khi tỉ số $\frac{b}{a} = 0,5$. Với các trị số khác của tỉ số $\frac{b}{a}$, τ_{\max} có trị số xấp xỉ $0,325P_0$. Khi $\frac{b}{a} = 0,1$ thì $\tau_{\max} = 0,310P_0$ và khi $\frac{b}{a} = 0$ thì $\tau_{\max} = 0,300P_0$. Ta phải so sánh trị số này với $[\tau]$

Song vì chúng chỉ khác nhau bởi một hằng số nên ta có thể định ra $[P_0]$ từ $[\tau]$ và điều kiện bền của vật thể là:

$$P_0 \leq [P_0]$$

Để tiện lợi hơn người ta đưa ra cách tính độ bền như sau :

Ta nhận thấy các bán kính R_B và R_H có thể được biểu diễn qua đường kính d_0 của bi. Thực vậy, có thể viết $R_B = \alpha d_0$ và $R_H = \beta d_0$; α và β là các hệ số không thay đổi đối với một họ ổ bi có một tỉ lệ kích thước nhất định.

Vì rằng áp suất giữa bi và vành trong lớn hơn áp suất giữa bi và vành ngoài, do đó ta chỉ cần cứ vành trong để tính độ bền.

Tổng độ cong có trị số là :

$$\sum k = 2 \cdot \frac{2}{d_0} + \frac{1}{R_B} - \frac{1}{r} = \frac{1}{d_0} \left(4 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$$

Hằng số đàn hồi là:

$$\eta = 2 \frac{1 - \mu^2}{E} = 0,858 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{N}$$

Tải trọng đặt lên bi là:

$$P_0 = 5 \cdot \frac{Q}{i}$$

Thay các đại lượng đó vào công thức (23-24), ta xác định được biểu thức P_0 như sau :

$$P_0 = c \cdot \sqrt[3]{\frac{Q}{id_0^2}} \quad (23-32)$$

Hệ số C được tính với biểu thức:

$$C = n_p \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(4 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)^2 \cdot \left(\frac{10^7}{0,858} \right)^2} \cdot 5 \quad (23-33)$$

Ví dụ với trường hợp ta đang xét :

$$C = \frac{0,6104}{3,14} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(4 + \frac{1}{2,46} - \frac{1}{0,515} \right)^2 \cdot \left(\frac{10^7}{0,858} \right)^2} \cdot 5 = 77000$$

Công thức (23-32) được viết lại dưới dạng:

$$P_0 = 77000 \cdot \sqrt[3]{\frac{Q}{id_0^2}} \quad (23-34)$$

Đối với một họ ổ bi, C là một hằng số và công thức (23-34) trở thành công thức chung cho họ ổ bi đó .

Nếu giả sử rằng áp suất cho phép $[P_0] = 339000 \text{ N/cm}^2$, ta sẽ đi đến biểu thức tính lực Q lớn nhất có thể đạt được như sau:

$$Q = \left(\frac{339000}{77000} \right)^3 \cdot i \cdot d_0^2 = 85i \cdot d_0^2 \text{ N} \quad (23-35)$$

Nếu giả sử sử dụng $[P_0] = 347000 \text{ N/cm}^2$, ta sẽ được:

$$Q = \left(\frac{347000}{77000} \right)^3 \cdot i \cdot d_0^2 \approx 92i \cdot d_0^2 \text{ N} \quad (23-36)$$

Các công thức (23-35) và (23-36) là những công thức đã sử dụng trong sổ tay công nghệ chế tạo máy.

23.3.2. Tính tiếp xúc giữa hình cầu và tấm phẳng.

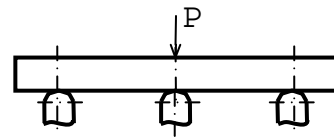
Ví dụ 5: Phôi của tấm tròn chịu nén bởi lực $Q=7500\text{N}$ lên ba điểm tựa có hình dạng mặt cầu bán kính $R=15\text{mm}$ (xem hình 23.14). Cả ba gối tựa cầu đều được đặt trên một đường tròn nào đó đồng tâm với phôi và cách nhau theo một góc 180° . Do đó Q được phân bố đều trên các gối tựa.

Tính kích thước của diện tích tiếp xúc và áp lực lớn nhất giữa các gối tựa và tấm tròn. Xác định độ chuyển dịch của phôi do biến dạng của các gối tựa dưới tác dụng của các lực nén gây nên. Vật liệu của phôi cũng như các gối tựa là bằng thép.

Hỏi nếu tấm phôi là gang thì các kết quả sẽ thay đổi thế nào ?

Bài giải: Tải trọng lên mỗi gối tựa là:

$$P = \frac{1}{3} Q = 2500\text{N}$$



Hình 23.14:
Phôi tấm tròn chịu lực

Với thép ta có $E = 2,12 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ và $\mu = 0,28$. Vậy hằng số đàn hồi của vật liệu khi tiếp xúc là:

$$\eta = 2 \frac{1-\mu^2}{E} = 0,878 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{N}$$

Ở đây sự tiếp xúc có thể xem như giữa hình cầu và mặt phẳng. Ta có $R=R_1$ và $R_2=\infty$. Bán kính diện tích tiếp xúc là :

$$a = 0,9086 \cdot \sqrt[3]{\eta P \cdot R} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 0,063 \text{ mm}$$

Áp suất lớn nhất ở tâm: $P_0 = 0,5784 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{\eta^2} \cdot \frac{1}{R^2}} = 300.000 \text{ N/cm}^2$

Chuyển dịch của phôi là độ dịch gần của hai vật tiếp xúc:

$$\delta = 0,8255 \cdot \sqrt[3]{(\eta P)^2 \frac{1}{R}} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = 0,026 \text{ cm}$$

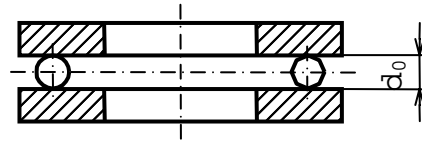
Đối với thép hợp kim crôm áp suất P_0 trên đây là cho phép. Nếu phôi là gang ta có: $E = 1,2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ và $\mu=0,25$. Hằng số đàn hồi có trị số là:

$$\eta = \frac{i - 0,28^2}{2,1 \cdot 10^7} + \frac{1 - 0,25^2}{1,2 \cdot 10^7} = 1,22 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2/\text{N}$$

Ta tìm thấy: $a=7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}=0,07 \text{ mm}$; $P_0 \approx 230000 \text{ N/cm}^2$; $\delta=3,3 \cdot 10^3 \text{ cm}=0,033 \text{ mm}$

Ví dụ 6: Ổ bi chặn có các vành phẳng không có rãnh (hình 23.15). Hãy xác định:

- 1-Lực cho phép Q tác dụng lên chiều trục.
- 2-Kích thước diện tích tiếp xúc giữa bi và vành.
- 3-Độ dịch gần giữa hai vành do biến dạng đàn hồi gây nên.



Hình 23.15: Ổ bi chặn

Cho biết số bi $i=20$ viên, đường kính của các viên bi là $d_0=1 \text{ cm}$. Vật liệu của vành và của bi là thép hợp kim crôm. Áp suất cho phép lớn nhất là $[P_0] = 350000 \text{ N/cm}^2$.

Bài giải: Theo công thức (23-21) với $\mu=0,30$, ta có:

$$P_0 = 0,3880 \cdot \sqrt[3]{PE^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^2} \quad (1)$$

Trong trường hợp đang xét ta có:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{d_0} \text{ và } \frac{1}{R_2} = 0$$

Áp lực tác dụng lên một viên bi được tính với biểu thức :

$$P = \frac{P}{0,8i} \quad (2)$$

Hệ số 0,8 thể hiện sự phân bố không đều của tải trọng lên mỗi viên bi. Kết hợp giữa (1) và (2), ta tìm thấy:

$$Q = 3,42 \frac{P_0^3 \cdot i \cdot d_0^2}{E^2}$$

Thay trị số vào ta có:

$$Q = 3,42 \frac{350000^3 \cdot 20 \cdot 1}{(2,12 \cdot 10^7)^2} = 6530\text{N}$$

Tải trọng tác dụng lên mỗi viên bi là:

$$P = \frac{P}{0,8i} = \frac{6530}{0,8 \cdot 20} = 408\text{N}$$

Bán kính của diện tích tiếp xúc là:

$$a = b = 1,109 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{E} \cdot \frac{d_0}{2}} = 1,109 \cdot \sqrt[3]{\frac{408}{2,12 \cdot 10^7} \cdot \frac{1}{2}} \approx 0,024\text{cm}$$

Độ dịch gần giữa bi và vành là :

$$\delta = 1,231 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2 \cdot \frac{2}{d_0}} = 1,231 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{408}{2,12 \cdot 10^7}\right)^2 \cdot 2} \approx 0,0011\text{cm}$$

Độ dịch gần giữa hai vành là: $2\delta=0,0022\text{cm}$.

23.3.3. Tính tiếp xúc giữa hai hình trụ.

Ví dụ 7: Ổ bi con lăn của bánh xe tàu điện có kích thước $120 \times 260 \times 86\text{mm}$. Tính chiều rộng của diện tích tiếp xúc giữa con lăn và vành (xem hình 23.16).

Các kích thước của ổ bi như sau: $d_0=36\text{mm}$; $L=58\text{mm}$; $D=154\text{mm}$; số lượng con lăn $i=13$; tải trọng tác dụng lên ổ bi là $Q=45000\text{N}$.

Bài giải: Con lăn chịu tải trọng lớn nhất ở dưới cùng. Tải trọng tác dụng lên con lăn đó được tính với biểu thức:

$$P = 4,6 \cdot \frac{Q}{i} = 4,6 \cdot \frac{45000}{13} = 15900\text{N}$$

Chiều dài làm việc của con lăn: $l = L - 2\lambda = 58 - 8 = 50\text{cm}$

Trong đó λ là chiều rộng của khe rãnh ở hai đầu con lăn (hình 23.16). Vậy cường độ tải trọng đường là:

$$q = \frac{P}{l} = \frac{15900}{5} = 3180\text{ N/cm}$$

Chiều rộng của diện tích tiếp xúc giữa vành trong

và con lăn là :

$$b = 1,522 \cdot \sqrt[3]{\frac{q}{E} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

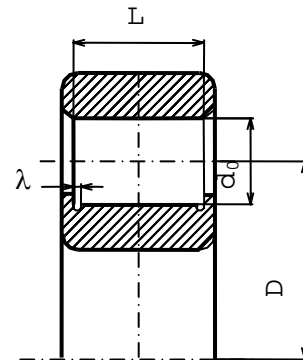
$$= 1522 \cdot \sqrt[3]{\frac{318}{2,12 \cdot 10^7} \cdot \frac{1,8 \cdot 7,7}{1,8 + 7,7}} = 0,0225\text{cm}$$

Chiều rộng của dải tiếp xúc là $2b=0,45\text{mm}$. Trị số này là rất bé so với bán kính của con lăn và vành ($R_1=18\text{mm}$; $R_2=77\text{mm}$).

Áp suất lớn nhất trên diện tích tiếp xúc là:

$$P_0 = 0,4180 \sqrt{qE \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}} = 0,4180 \sqrt{318 \cdot 2,12 \cdot 10^7 \cdot \frac{1,8 + 7,7}{1,8 \cdot 7,7}} = 89900\text{ N/cm}^2$$

Thường đối với thép ổ bi, áp suất cho phép là $[P_0]=250000\text{ N/cm}^2$. Vậy ta thấy áp suất trên là còn rất bé so với áp suất cho phép.



Hình 23.16: Ổ bi con lăn của bánh xe tàu điện

Ví dụ 8: Xác định áp suất lớn nhất giữa hai bánh răng trụ răng thẳng khi chúng tiếp xúc nhau ở vị trí điểm ăn khớp (hình 23.17). Khảo sát các trường hợp sau đây:

1- Bánh chủ động và bánh bị động cùng làm bằng một vật liệu.

2- Bánh chủ động bằng thép và bánh bị động bằng gang.

Bài giải: Ở đây ta chỉ xét ở một thời điểm nhất định. Tại thời điểm đó xem tải trọng là tĩnh định. Ta cũng thừa nhận rằng, vật liệu là đồng nhất và đẳng hướng, không kể đến độ khác biệt của lớp tôi bề mặt.

Một cách gần đúng ta sử dụng công thức (23-39) để tính áp suất lớn nhất trong vùng tiếp xúc, nghĩa là xem sự tiếp xúc là dài vô hạn. Thừa nhận hệ số Poatxông của thép và của gang là như nhau ($\mu=0,28$). Do đó hằng số đàn hồi η của vật liệu là :

$$\mu = 2(1 - \mu^2) \cdot \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} = 1,84 \frac{1}{E_0}$$

E_0 được gọi là mô đun đàn hồi thu gọn:

$$(E_0 = \frac{2E_1 E_2}{E_1 + E_2})$$

Với thép ta có $E_1 = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ và với gang ta có $E_2 = 1,5 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$. Vậy $E_0 = 1,7 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$.

Khi các bánh răng cùng làm bằng một vật liệu thì ta có $E=E_0$.

Gọi ρ_1 và ρ_2 là bán kính cong của dạng răng tại điểm ăn khớp. Khi đó tổng độ cong của các bánh răng là:

$$\sum k = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_0}$$

ρ_0 được gọi là bán kính cong thu gọn, ta có:

$$P_0 = \sqrt{\frac{1}{1,84} \cdot \frac{q E_0}{\rho_0}} = 0,416 \cdot \sqrt{\frac{q \cdot E_0}{\rho_0}}$$

Từ hình vẽ 23.30, ta dễ dàng tìm thấy:

$$\rho_1 = \frac{d_1}{2} \sin \alpha \quad \text{và} \quad \rho_2 = \frac{d_2}{2} \sin \alpha$$

Trong đó: d_1 và d_2 là đường kính của đường tròn ăn khớp của các bánh răng; α là góc ăn khớp (hình 23.18).

Cường độ tải trọng phân bố là:

$$q = \frac{P_n}{l} = \frac{P}{l \cos \alpha}$$

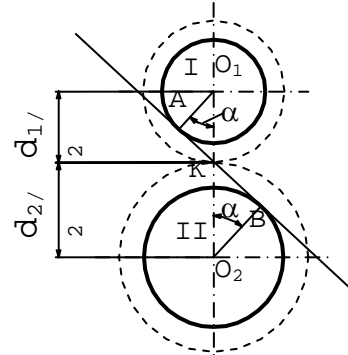
Trong đó : l -chiều dài của răng.

P_n -lực theo phương pháp tuyến với bề mặt răng.

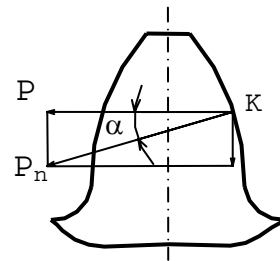
P - lực vòng.

Vậy áp lực cực đại trên diện tích tiếp xúc là:

$$P_0 = 0,832 \cdot \sqrt{\frac{E_0}{\sin 2\alpha} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \cdot \frac{P}{l}}$$



Hình 23.17: Hai bánh răng răng thẳng ăn khớp với nhau



Hình 23.18: Góc ăn khớp

Ví dụ 9: Tính áp lực lớn nhất và kích thước của diện tích giữa bánh xe và đường ray của toa xe chở hàng có bốn cụm bánh (hình 23.19). Trọng lượng của toa tàu $Q=60t$; bán kính của đầu đường ray $r=300mm$. Đường kính của bánh xe $D=900mm$

Bài giải: Ở đây ta có thể xem như sự tiếp xúc của hai mặt trụ có trục vuông góc với nhau. Vậy diện tích tiếp xúc là một đường elip với các bán trục chính là a và b .

Tải trọng của bánh xe truyền xuống đường ray là:

$$P = \frac{Q}{4 \times 2} = 75000N$$

Các độ cong chính của bánh xe là :

$$k_{11} = \frac{2}{D} = 0,0222 \text{ 1/cm} ; k_{22} = 0$$

Các độ cong chính của đường ray là :

$$k_{21} = \frac{1}{r} = \frac{1}{30} = 0,0333 \text{ 1/cm} ; k_{22} = 0$$

Các mặt cong chính k_{11} và k_{22} vuông góc với nhau, do đó $\cos 2\omega = -1$. Vậy ta tính được các hệ số :

$$n_a = 1,141 + \frac{0,2000 - 0,1894}{0,2207 - 0,1894} (1,168 - 1,141) = 1,150$$

$$n_b = 0,8837 - 0,3387(0,8837 - 0,8660) = 0,8777$$

$$n_p = 0,9919 - 0,3387(0,9919 - 0,9890) = 0,9909$$

Tổng các độ cong của các bề mặt tiếp xúc:

$$\sum k = \frac{2}{D} + \frac{1}{r} = 0,0555 \text{ 1/cm}$$

Lấy $E=2 \cdot 10^7 N/cm^2$ và $\mu=0,30$, ta có:

$$\eta = 2 \frac{1 - \mu^2}{E} = 0,91 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^2/N$$

Khi đó các kích thước của diện tích tiếp xúc sẽ là:

$$a = 1,150 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{0,91 \cdot 10^{-7}}{0,0555} \cdot 75000} = 1,150 \cdot 0,569 = 0,65 \text{ cm}$$

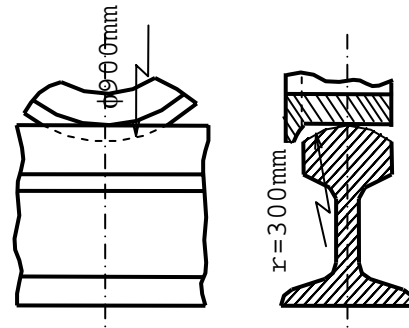
$$b = 0,8777 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{0,91 \cdot 10^{-7}}{0,0555} \cdot 75000} = 0,8777 \cdot 0,569 = 0,5 \text{ cm}$$

Áp suất lớn nhất trong vùng diện tích tiếp xúc là:

$$P_0 = 0,9909 \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{2} \left(\frac{0,0555}{0,91 \cdot 10^{-7}} \right)^2 \cdot 75000} \approx 110000 \text{ N/cm}^2$$

Để kiểm tra lại ta có thể sử dụng công thức (23-27) để tính :

$$P_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{75000}{\pi \cdot 0,65 \cdot 0,50} \approx 110000 \text{ N/cm}^2$$



Hình 23.19: Bánh xe và đường ray tiếp xúc với nhau

Hai cách tính này cho ta một kết quả.

CÂU HỎI TỰ HỌC.

- 23.1. Quan hệ hình học đối với hai bề mặt của vật thể tiếp xúc ?
- 23.2. Chứng minh diện tích hai vật thể tiếp xúc có thể coi là một elip .
- 23.3. Bài toán hai hình trụ tròn tiếp xúc ?
- 23.4. Các biểu thức các đại lượng a , b trong bài toán tiếp xúc ?
- 23.5. Các biểu thức áp lực lớn nhất P_0 và độ dịch gần δ ?
- 23.6. Bài toán tiếp xúc của hình trụ với mặt phẳng ?
- 23.7. Bài toán hai hình trụ tiếp xúc có hai trục vuông góc với nhau ?
- 23.8. Bài toán hai hình trụ tiếp xúc có hai trục song song với nhau ?
- 23.9. Khi tính các ổ bi cần chú ý những yếu tố nào cho từng loại ?



TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bùi Trọng Lưu, Nguyễn Y Tô
Sức bền vật liệu (tập 1, 2)
Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp Hà nội, 1964.
2. Lê Quang Minh, Nguyễn Văn Vượng
Sức bền vật liệu (tập 1, 2, 3). Nhà xuất bản Giáo dục, 1997.
3. Lê Ngọc Hồng
Sức bền vật liệu. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật Hà nội, 2000.
4. Phan kì Phùng, Đặng Việt Cương
Lí thuyết dẻo và từ biến. Nhà xuất bản Giáo dục, 1997.
5. L.M KachHarop (Người dịch: Lê Minh Khanh và Ngô Thành Phong)
Cơ sở lí thuyết dẻo
Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp Hà nội, 1987.
6. Vũ Đình Cự
Vật lí chất rắn
Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật Hà nội, 1997.
7. Nguyễn Văn Vượng.
Lí thuyết đàn hồi ứng dụng. Nhà xuất bản Giáo dục, 1999.
8. Nguyễn Xuân Lưu
Lí thuyết đàn hồi. Nhà xuất bản giao thông vận tải, 2002.
9. Lê Công Trung
Đàn hồi ứng dụng. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật Hà nội, 1999.
10. X.P.Timosenko, X.Voinopski-Krige. Các Người dịch: Phạm Hồng Giang, Vũ Thành Hải, Nguyễn Khải, Đoàn Hữu Quang
Tấm và vỏ. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật Hà nội, 1971.
11. N.I. BeĐukhop (Người dịch: Phan Ngọc Châu)
Cơ sở lí thuyết đàn hồi
Lí thuyết từ biến
Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp Hà nội, 1978.
12. Đào Huy Bích
Lí thuyết quá trình đàn dẻo. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà nội, 1999.



BÀI GIẢNG

UCT

SỨC BỀN **V**ẬT LIỆU

**Bộ môn Sức bền Vật liệu
Trường Đại học GTVT**

Sức bền vật liệu F1

❑ Đề cương

Cung cấp các thông tin tổng quan, cách đánh giá và triết lý chung của khoá học.

❑ Bài giảng

Cung cấp lịch trình các bài giảng.

❑ Bài tập

Cung cấp các thí dụ mẫu, bài tập tự làm (bài tập bắt buộc và bài tập tham khảo).

❑ Kiểm tra

Cung cấp câu hỏi hướng dẫn ôn thi, kiểm tra môn học. Lịch thi, hình thức thi và qui định trọng số đánh giá kết quả.

❑ Nghiên cứu khoa học và Olympic Sức bền vật liệu

Cung cấp thông tin về các hoạt động nghiên cứu khoa học giữa bộ môn và người học cũng như các cuộc thi Olympic Sức bền vật liệu.

Đề cương - Sức bền vật liệu F1

Thông tin chung

Giảng viên: Vũ Ngọc Linh
Văn phòng: P303 Nhà A6
ĐT: 04.3766 0141 hoặc 0983 017 384

Giờ làm việc: 8:00am-11:30am

1:00pm-4:30pm

Email: vnlsbvl@yahoo.com

Homepage: www.sucbenvatlieu.com

Trợ giảng: Hà Văn Quân

Văn phòng: P303 Nhà A6

ĐT: 04.3766-0141

Giờ làm việc: 8:00am-11:30am

1:00pm-4:30pm

Email :

Điểm đánh giá:

| | |
|--------------------------------|-----|
| Chuyên cần | 10% |
| Kiểm tra, thảo luận, chuyên đề | 20% |
| Thi | 70% |

Điều kiện bắt buộc: Bài tập lớn; Thực hành thí nghiệm.

Tài liệu bắt buộc:

Vũ Đình Lai, Giáo trình Sức Bền Vật Liệu, NXB GTVT, 2007.

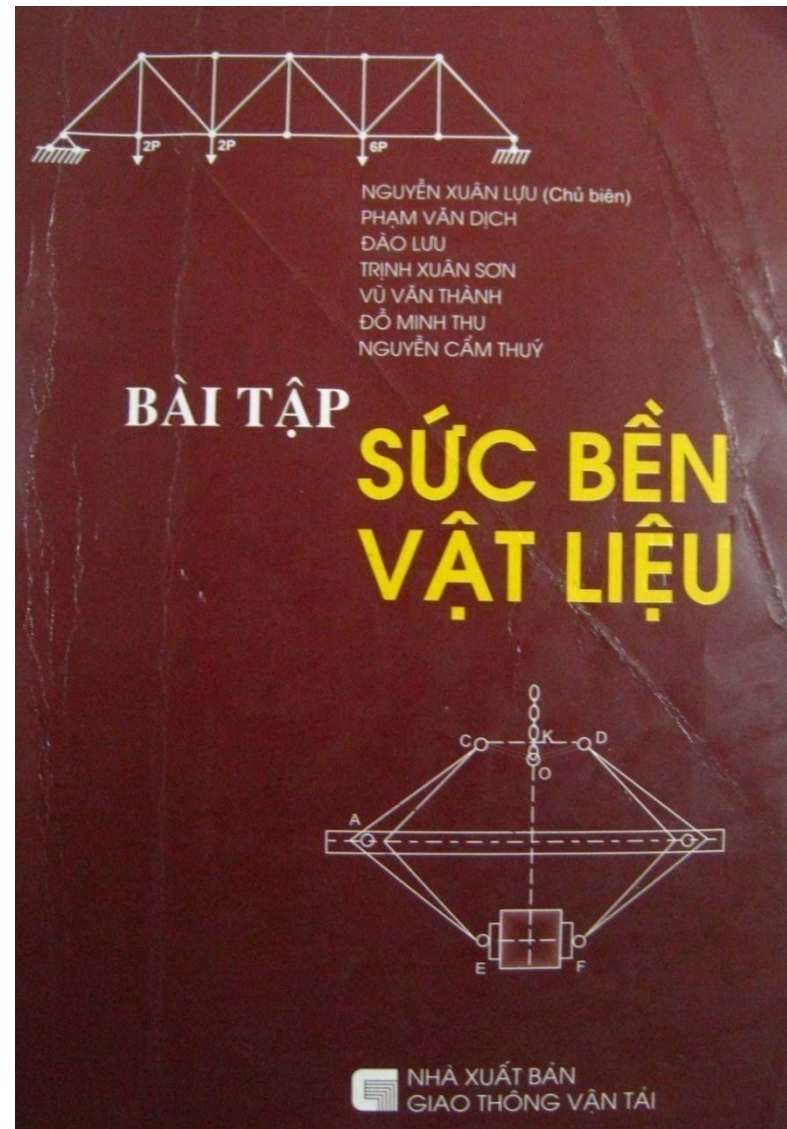
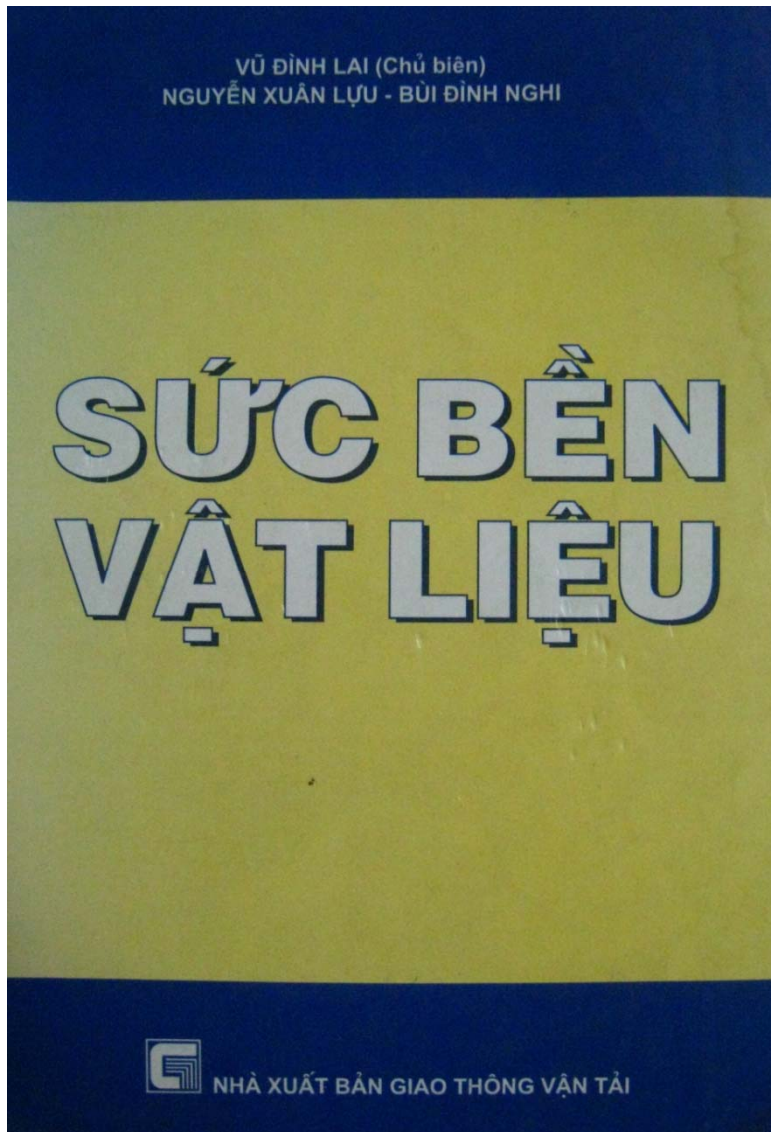
Nguyễn Xuân Lựu, Bài tập Sức Bền Vật Liệu, NXB GTVT, 2005.

Tài liệu tham khảo: giới thiệu trong từng nội dung chi tiết.

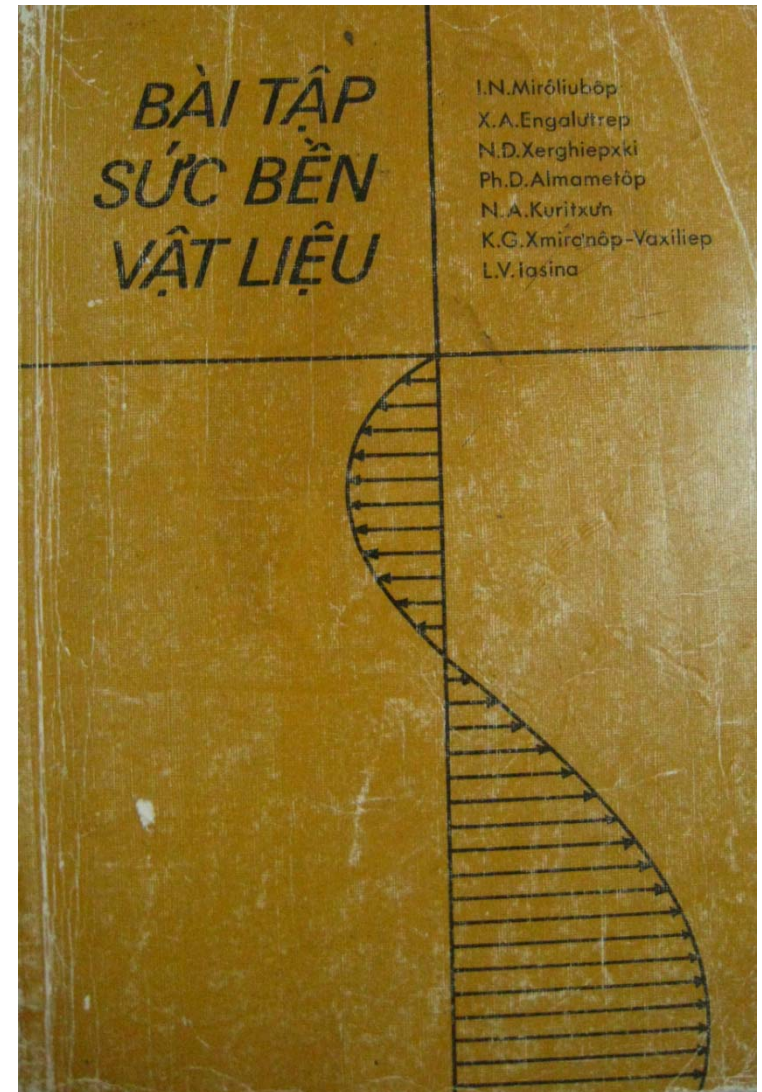
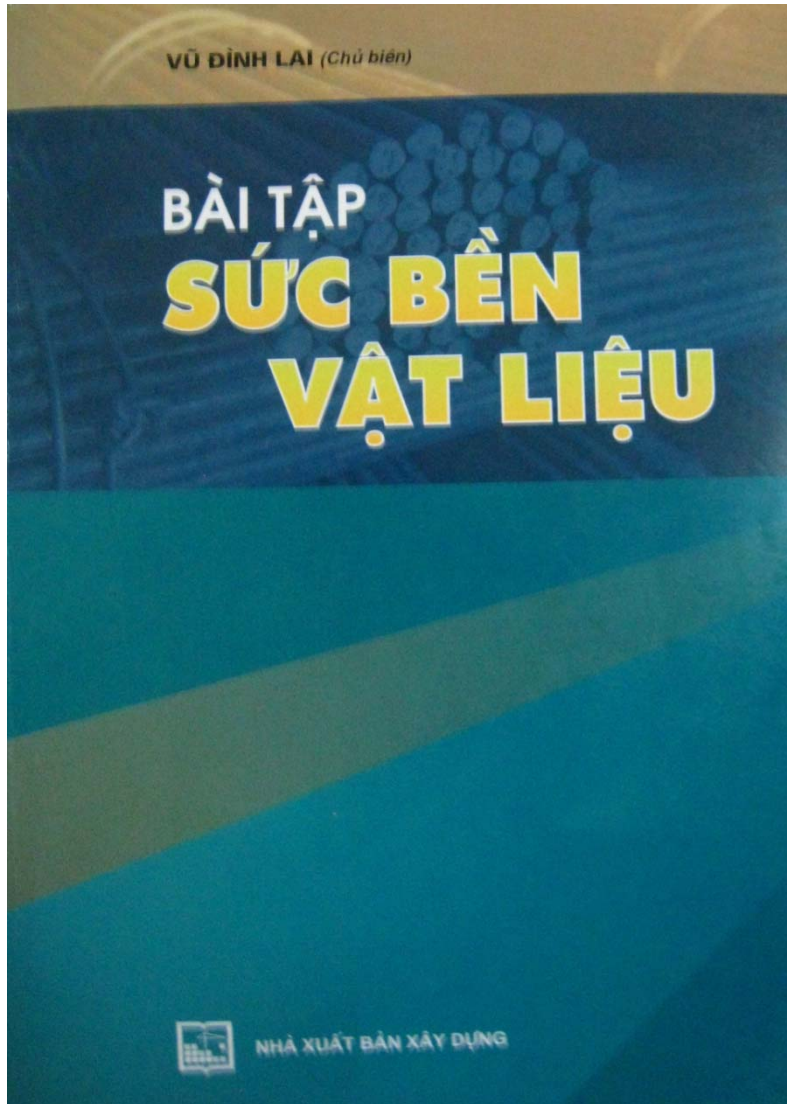
Tài liệu bắt buộc



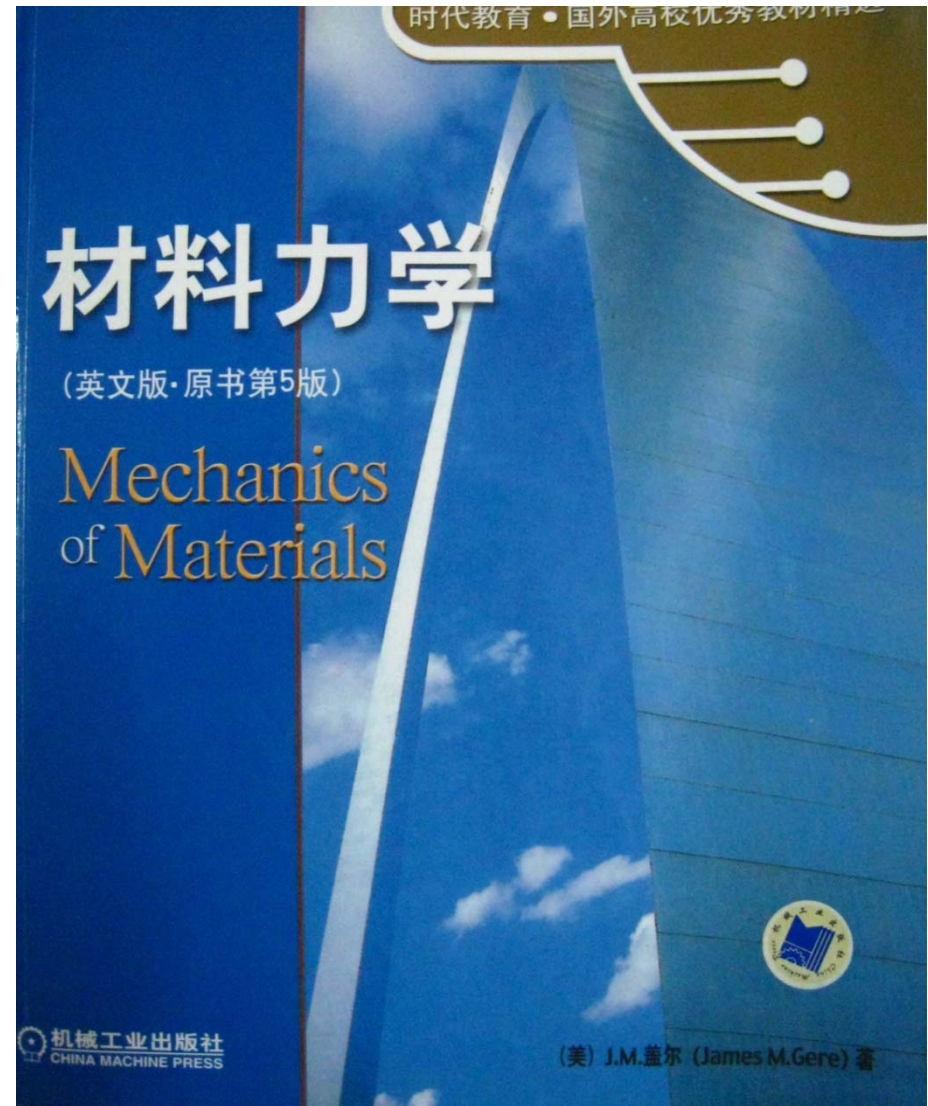
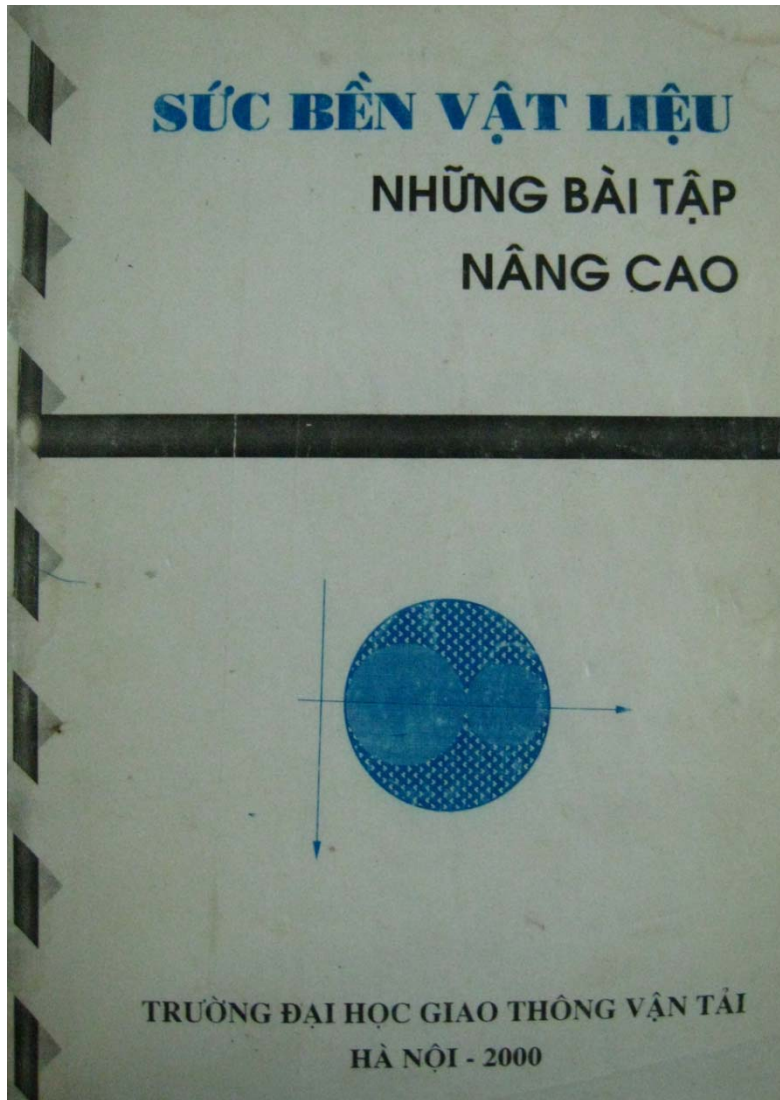
Tài liệu bắt buộc



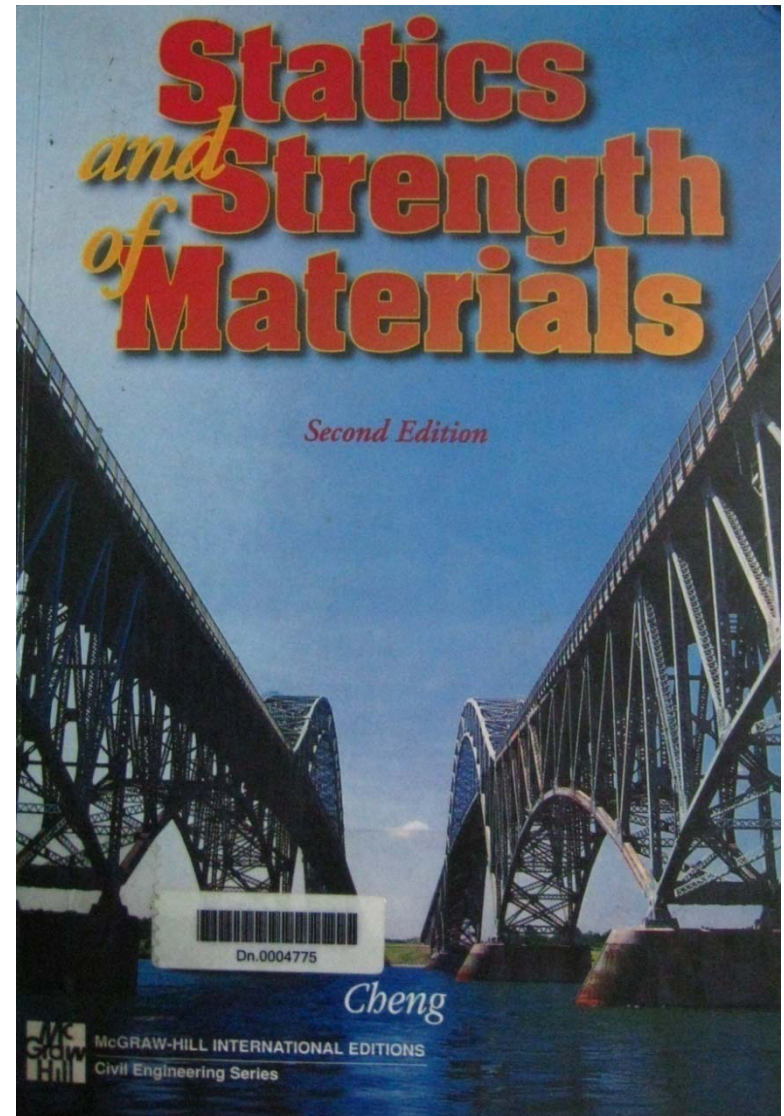
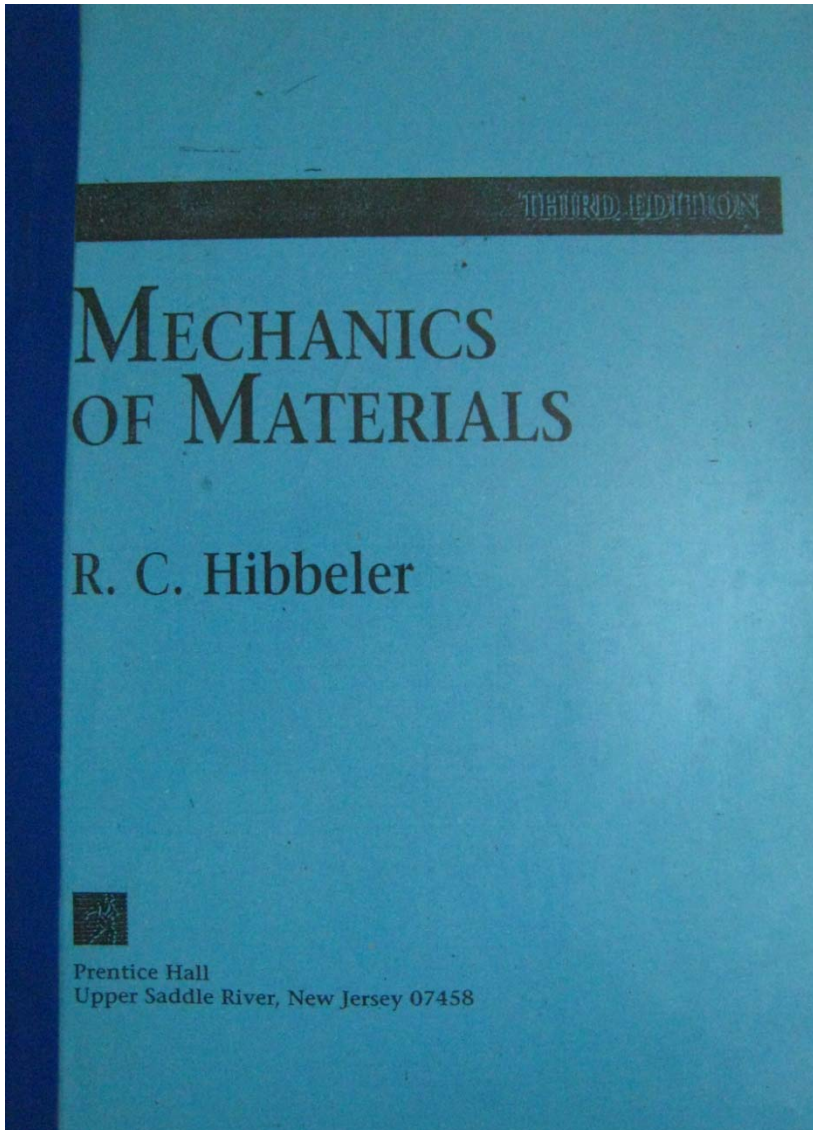
Tài liệu tham khảo



Tài liệu tham khảo



Tài liệu tham khảo



Đề cương - Sức bền vật liệu F1

Mục đích môn học

1. Người học hiểu rõ các phương pháp tính toán kết cấu, chi tiết máy về ba mặt: độ bền, độ cứng và độ ổn định.
2. Người học biết vận dụng các phương pháp tính toán vào kiểm toán và thiết kế mới kết cấu, chi tiết máy.

Mô tả chung

- Nghiên cứu các khái niệm cơ bản: **nội lực, ứng suất, biến dạng.**
- Khái niệm: **trạng thái ứng suất, biến dạng,**
- Quan hệ giữa ứng suất biến dạng (**định luật Hooke**),
- Các tiêu chí về độ bền .
- Tính toán các **đặc trưng hình học.**
- Ba trường hợp chịu lực cơ bản: **kéo nén đúng tâm, xoắn, uốn phẳng.**

Đề cương - Sức bền vật liệu F1

Nội dung chính

| Chương | Chủ đề | Đọc |
|---------------|---|----------------------|
| 1 | Mở đầu | Tr.1-Tr.17 |
| 2 | Thanh chịu kéo nén đúng tâm. | Tr.19-Tr.39 |
| 3 | Trạng thái ứng suất, biến dạng, định luật Hooke. | Tr.41-Tr.73 |
| 4 | Lý thuyết bền. | Tr.77-Tr.83 |
| 5 | Đặc trưng hình học. | Tr.85-Tr.94 |
| 6 | Thanh chịu xoắn | Tr.97-Tr.108 |
| 7 | Thanh chịu uốn. | Tr.111-Tr.128 |
| 8 | Biến dạng thanh chịu uốn. | Tr.129-Tr.145 |

Đề cương - Sức bền vật liệu F1

Kiến thức liên quan

Toán cao cấp:

Đạo hàm, tích phân, phương trình vi phân, chuỗi số, véc tơ, ma trận, trị riêng, các phương pháp số...

Vẽ kỹ thuật:

Đọc bản vẽ kỹ thuật (hình chiếu đứng, chiếu bằng, chiếu cạnh, hình phối cảnh, hình cắt...).

Cơ học lý thuyết:

Cân bằng của vật rắn, cách tính phản lực liên kết, chuyển động của vật rắn...

Đề cương - Sức bền vật liệu F1

Nhiệm vụ của người học

- Tham dự đầy đủ các giờ học lý thuyết trên lớp
- Tự học: Chuẩn bị bài trước mỗi buổi học trên lớp. Hệ thống, phân tích, tổng hợp các kiến thức đã học, nghiên cứu sâu và mở rộng kiến thức môn học. Vận dụng các kiến thức đã học vào giải bài tập;
- Tham dự các bài kiểm tra giữa kỳ để tích lũy điểm thành phần;
- Hoàn thành bài tập lớn để tích lũy điểm thành phần và đảm bảo điều kiện dự thi kết thúc học phần;
- Hoàn thành công tác thí nghiệm để đảm bảo điều kiện dự thi kết thúc học phần;
- Tích cực hoàn thành các phần thực hành và tham gia thảo luận trên lớp.



Bài giảng - Sức bền vật liệu F1



| Ngày | Bài giảng | Đọc | Ví dụ | Bài tập nộp |
|------|---------------------|------|-------|-------------|
| | BG1 | Mục: | VD1 | Q1 |
| | BG2 | Mục: | | |
| | BG3 | Mục: | VD2 | Q2 |
| | BG4 | Mục: | | |
| | BG5 | Mục: | | |
| | BG6 | Mục: | VD3 | Q3 |
| | BG7 | Mục: | | |
| | BG8 | Mục: | | |
| | BG9 | Mục: | VD4 | Q4 |
| | BG10 | Mục: | | |
| | BG11 | Mục: | | |
| | BG12 | Mục: | VD5 | Q5 |
| | BG13 | Mục: | | |
| | BG14 | Mục: | | |



Bài tập - Sức bền vật liệu F1

Bài tập bắt buộc

Chương 1:

Chương 2:

Chương 3:

Chương 4:

Chương 5:

Chương 6:

Chương 7:

Bài tập lớn

Bài tập không bắt buộc

Chương 1:

Chương 2:

Chương 3:

Chương 4:

Chương 5:

Chương 6:

Chương 7:



Kiểm tra - Sức bền vật liệu F1

Kiểm tra giữa học phần (Trắc nghiệm khách quan và tự luận)

Thi kết thúc học phần (Vấn đáp)



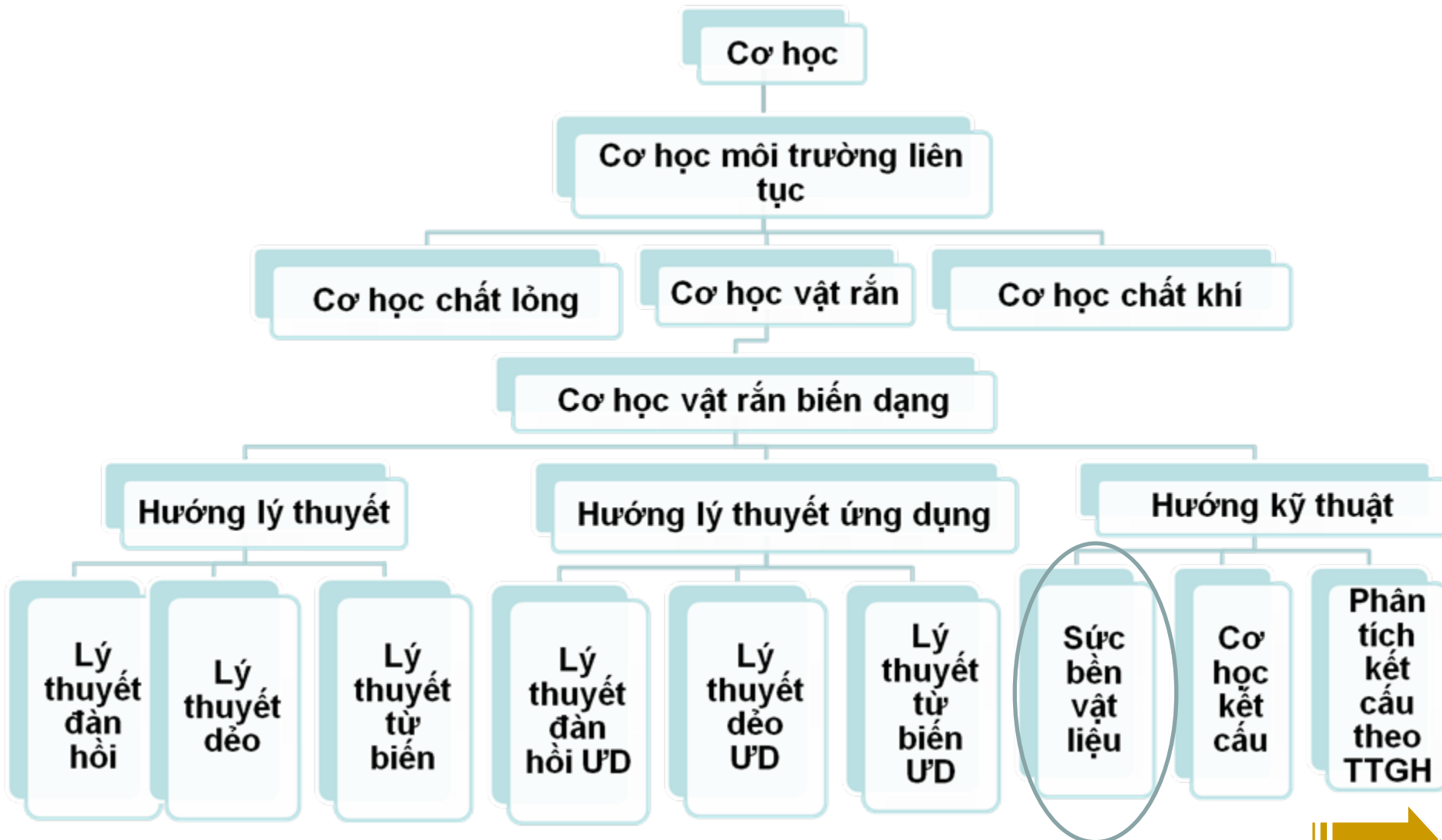
BÀI GIẢNG

UCT

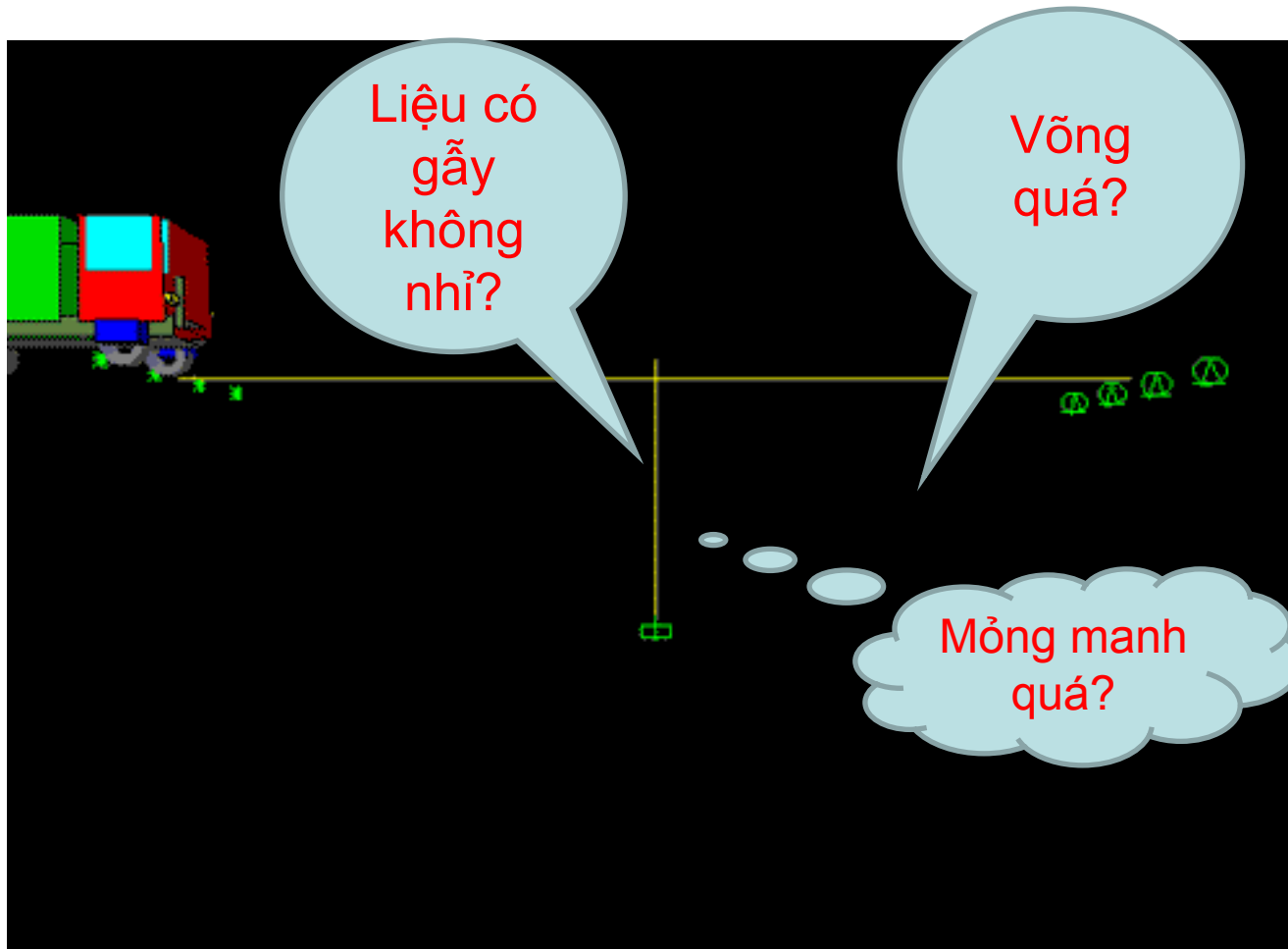
Chương mở đầu

**Bộ môn Sức bền Vật liệu
Trường Đại học GTVT**

BG1- **Vị trí**, nhiệm vụ, đối tượng và phương pháp nghiên cứu của môn học



BG1- Vị trí, **nhiệm vụ**, đối tượng và phương pháp nghiên cứu của môn học



BG1- Vị trí, **nhiệm vụ**, đối tượng và phương pháp nghiên cứu của môn học

Tính toán về độ bền

Tính toán bảo đảm cho kết cấu không bị phá hỏng (đứt, trượt, gãy...).

Tính toán về độ cứng

Tính toán bảo đảm cho kết cấu biến dạng ở mức độ sao cho khai thác được bình thường.

Tính toán về ổn định

Tính toán về khả năng của kết cấu giữ được hình thái biến dạng hữu hạn ban đầu.

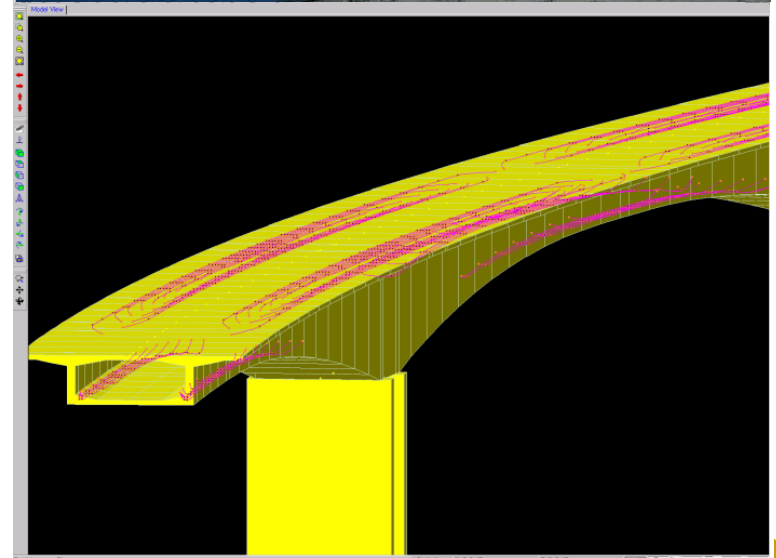


BG1- Vị trí, nhiệm vụ, **đối tượng** và phương pháp nghiên cứu của môn học

Vật thể thực

Bộ phận kết cấu công trình

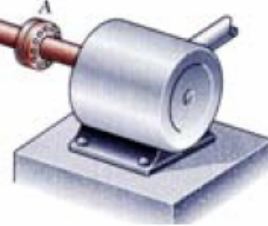
Chi tiết máy



ĐỘNG CƠ

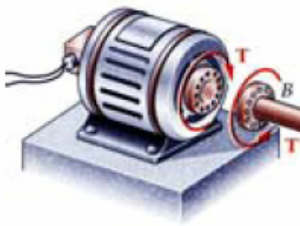


TUABIN

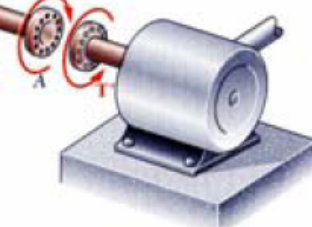


(a)

ĐỘNG CƠ



TUABIN

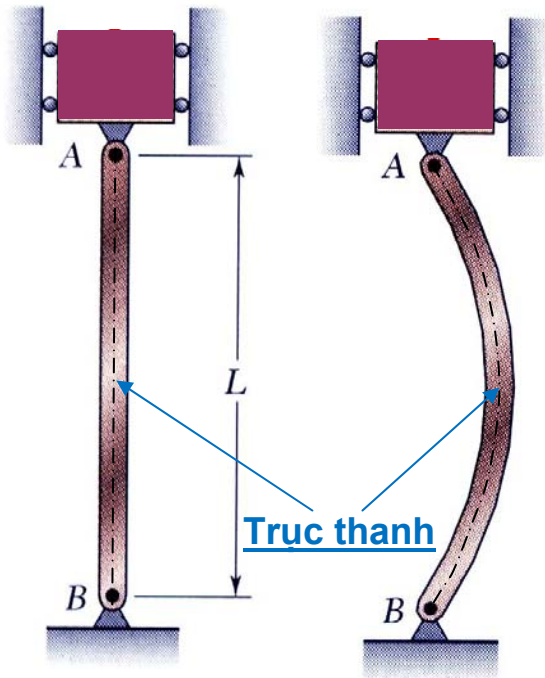


(b)

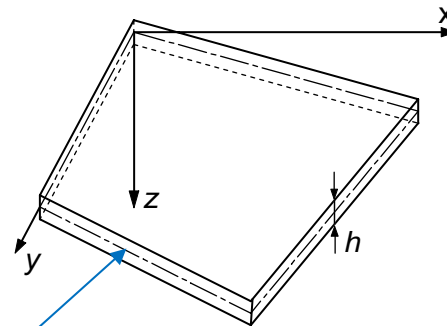
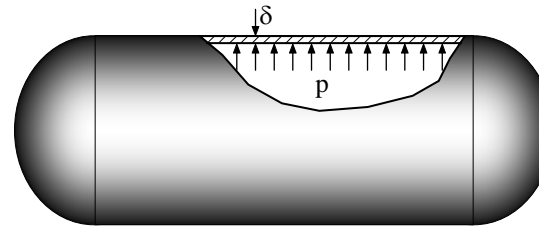


BG1- Vị trí, nhiệm vụ, **đối tượng** và phương pháp nghiên cứu của môn học

Phân loại vật thể thực

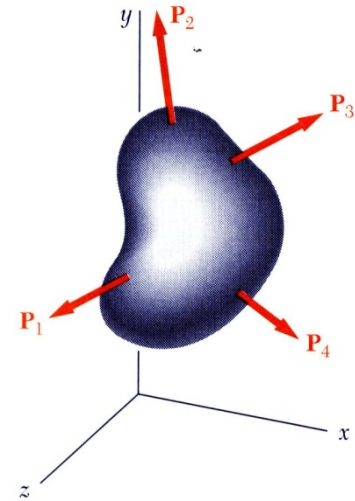


Thanh



Mặt trung bình

Tấm, vỏ



Vật thể khối



BG1- Vị trí, nhiệm vụ, đối tượng và **phương pháp nghiên cứu** của môn học

Để xây dựng phương pháp tính, dựa vào:

- ✓ Phương trình cân bằng tĩnh (hay động)
- ✓ Phương trình biến dạng
- ✓ Phương trình vật lý

Ba bài toán cơ bản của Sức bền vật liệu

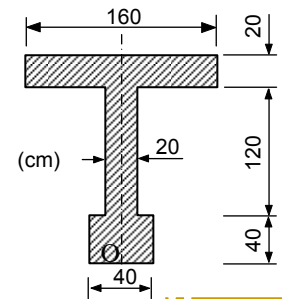
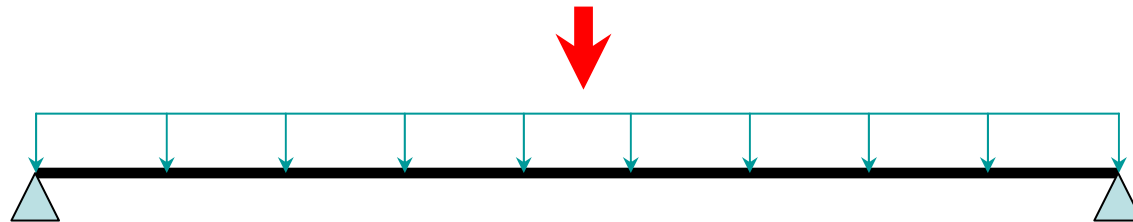
- ✓ Bài toán kiểm tra
- ✓ Bài toán xác định tải cho phép
- ✓ Bài toán xác định kích thước hình học



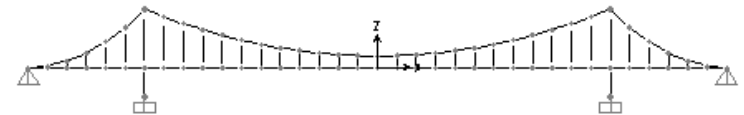
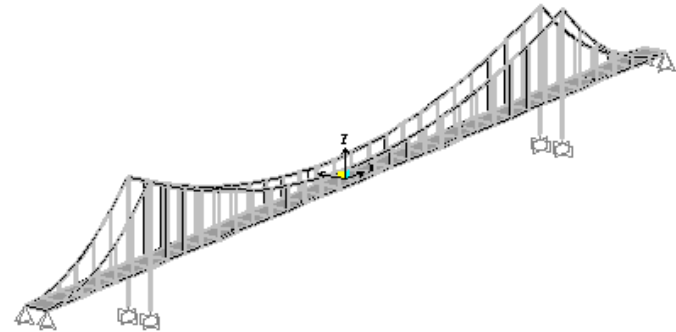
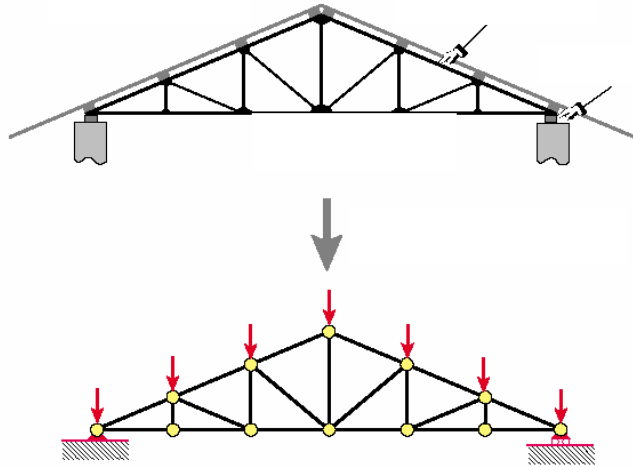
BG2- Sơ đồ tính, tải, các liên kết và phản lực liên kết

Sơ đồ tính

là hình vẽ đối tượng tính toán đã được đơn giản hóa, chỉ còn mang những đặc điểm cần thiết cho việc tính toán.

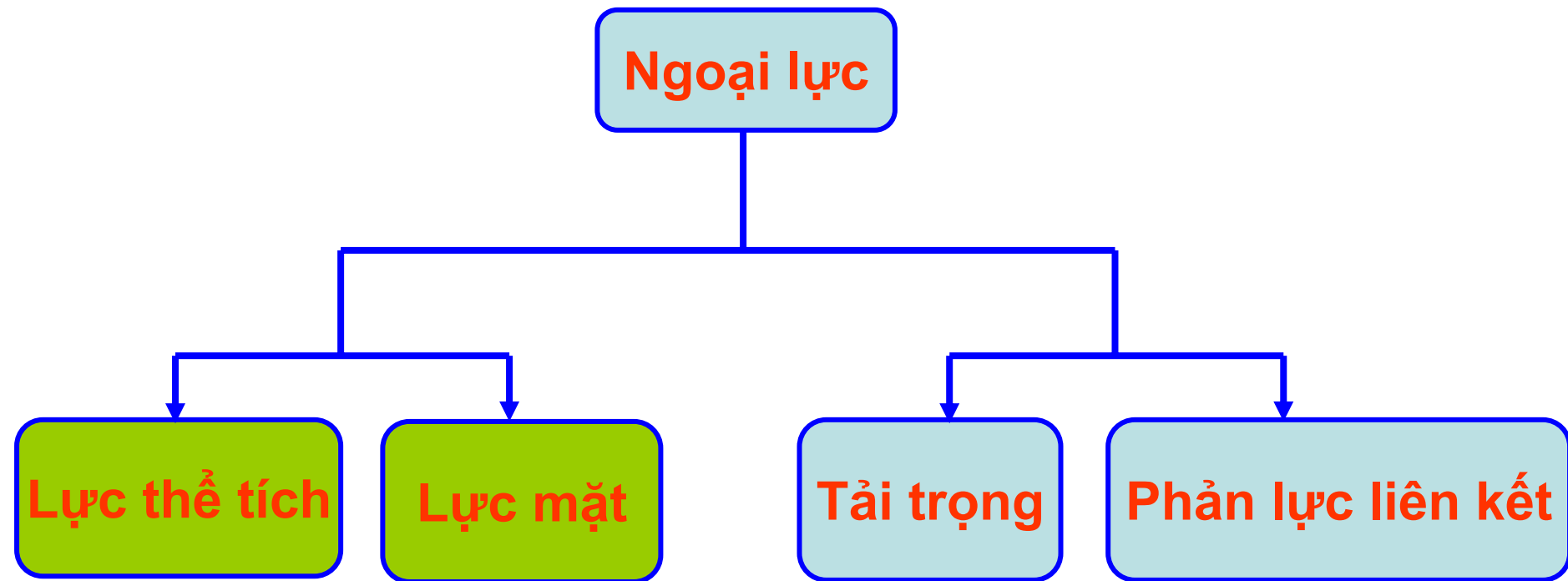


BG2- Sơ đồ tính, tải, các liên kết và phản lực liên kết



BG2- Sơ đồ tính, ngoại lực, các liên kết và phản lực liên kết

Ngoại lực: là yếu tố từ môi trường bên ngoài tác động vào kết cấu gây ra nội lực, biến dạng cho kết cấu.



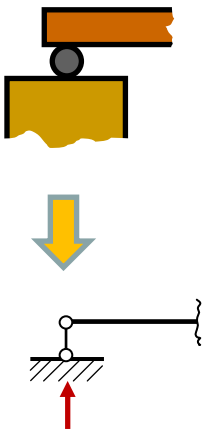
BG2- Sơ đồ tính, tải, các liên kết và phản lực liên kết

Liên kết là chi tiết ràng buộc các bộ phận kết cấu với nhau hoặc với môi trường bên ngoài (đất...).

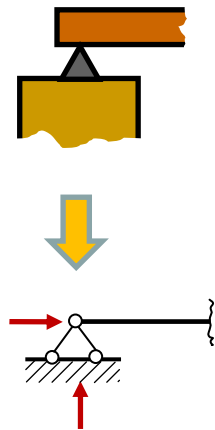
Lực liên kết và phản lực liên kết là các lực tương tác giữa các bộ phận kết cấu với nhau hoặc giữa các bộ phận kết cấu với môi trường bên ngoài (đất...) thông qua các liên kết.

Một số loại liên kết thường gặp

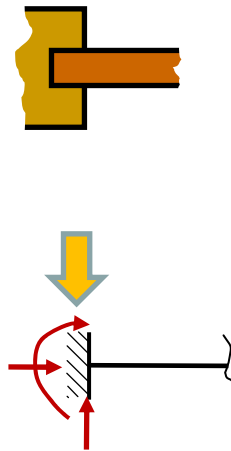
Gối di động



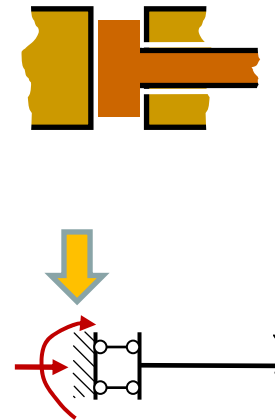
Gối cố định



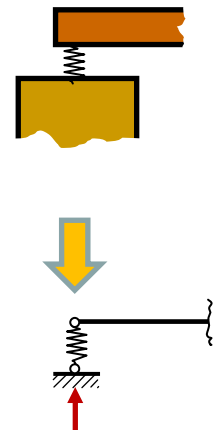
Ngàm



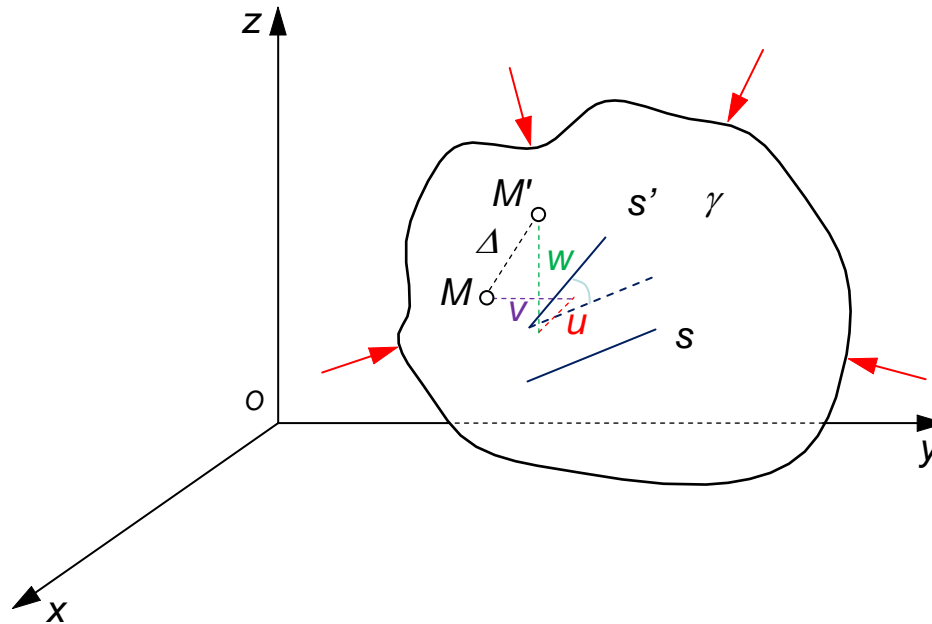
Ngàm trượt



Gối đàn hồi



BG3- Chuyển vị, biến dạng



Δ là chuyển vị đường của điểm M

u là chuyển vị đường theo phương x của điểm M

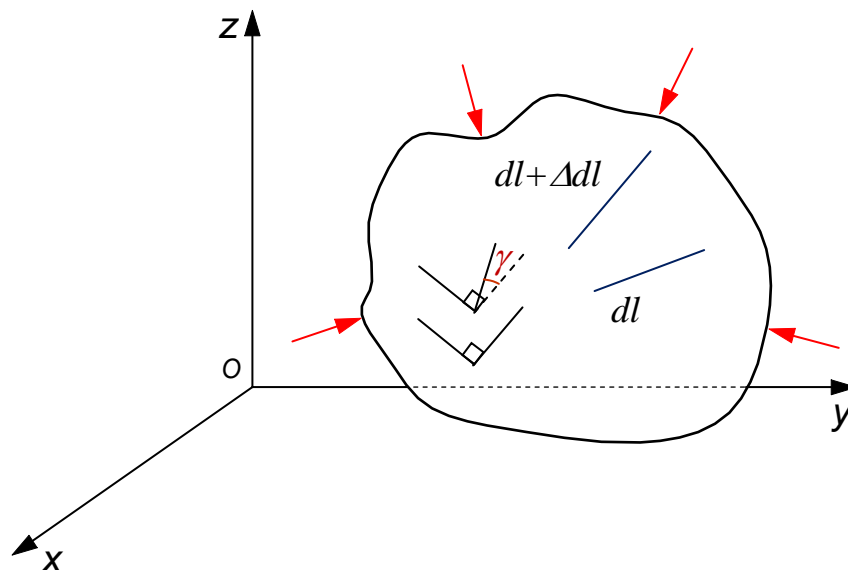
v là chuyển vị đường theo phương y của điểm M

w là chuyển vị đường theo phương z của điểm M

γ là chuyển vị góc của đoạn s



BG3- Chuyển vị, biến dạng



$$\varepsilon = \frac{\Delta dl}{dl}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz}$$

Δdl là biến dạng dài tuyệt đối của đoạn dl

ε là biến dạng dài tỷ đối (tương đối) của đoạn dl

ε_x là biến dạng dài tỷ đối (tương đối) của đoạn dl theo phương x

ε_y là biến dạng dài tỷ đối (tương đối) của đoạn dl theo phương y

ε_z là biến dạng dài tỷ đối (tương đối) của đoạn dl theo phương z

γ là góc trượt trong mặt phẳng chứa góc vuông đang xét

γ_{xy} là góc trượt trong mặt phẳng song song với mặt phẳng xoy

γ_{yz} là góc trượt trong mặt phẳng song song với mặt phẳng $yozy$

γ_{zx} là góc trượt trong mặt phẳng song song với mặt phẳng zox

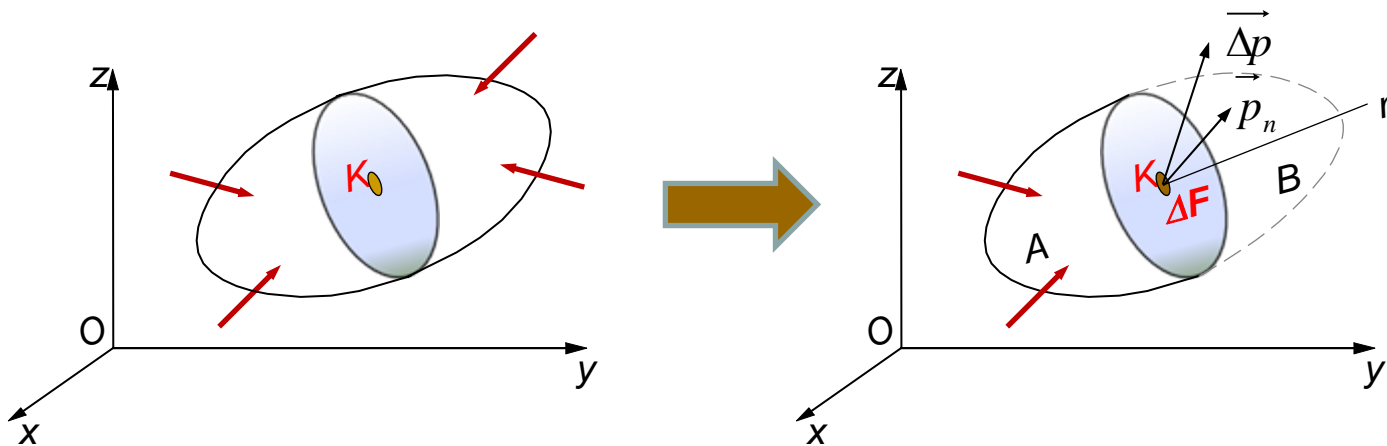
$\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2$; $\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz}/2$; $\varepsilon_{zx} = \gamma_{zx}/2$ là các biến dạng góc (biến dạng trượt)



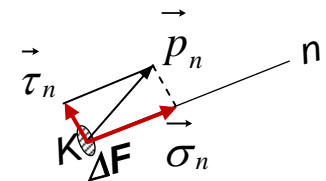
BG4- Nội lực, ứng suất

Nội lực là lượng biến thiên của lực liên kết giữa các phần tử vật chất của vật thể khi có ngoại lực tác dụng.

Để xác định nội lực ta sử dụng **phương pháp mặt cắt**



$$\vec{p}_{tb} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta F}$$
$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta F}$$



ứng suất là mật độ phân bố của nội lực

p_{tb} là ứng suất toàn phần trung bình tại điểm K trên mặt cắt đang xét

p_n là ứng suất toàn phần tại điểm K trên mặt cắt đang xét

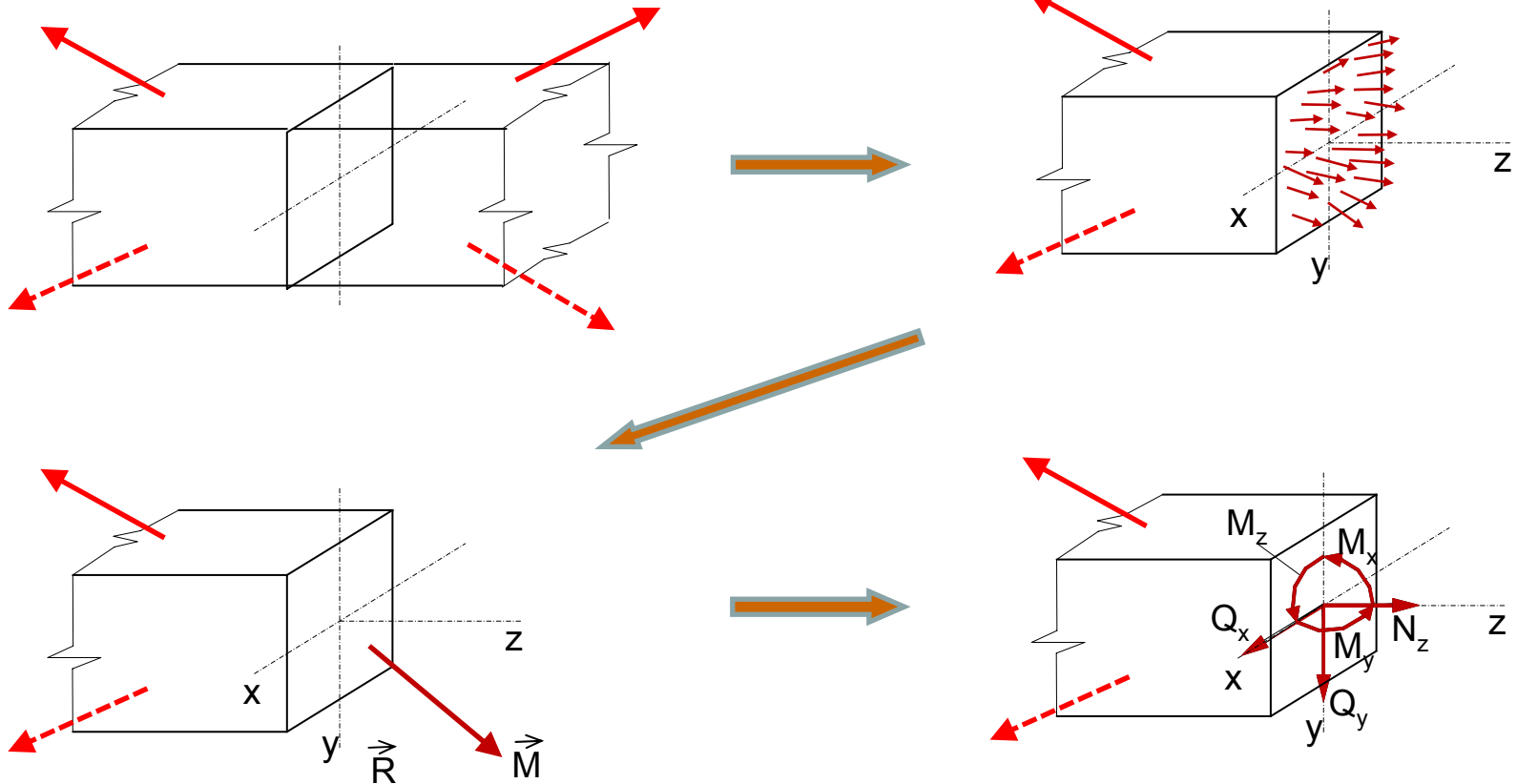
σ_n là ứng suất pháp tại điểm K trên mặt có pháp tuyến n

τ_n là ứng suất tiếp tại điểm K trên mặt có pháp tuyến n



BG4- Nội lực, ứng suất

Nội lực thu gọn trên mặt cắt ngang thanh



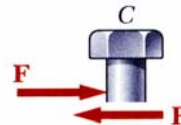
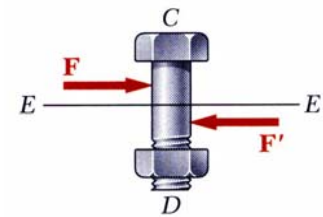
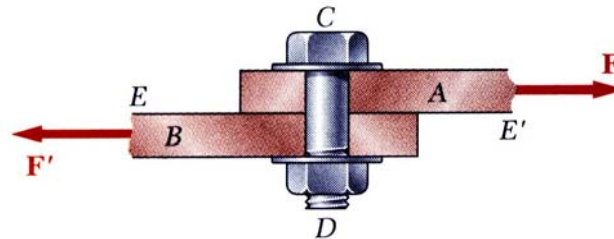
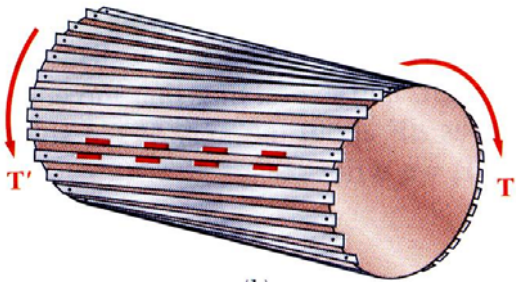
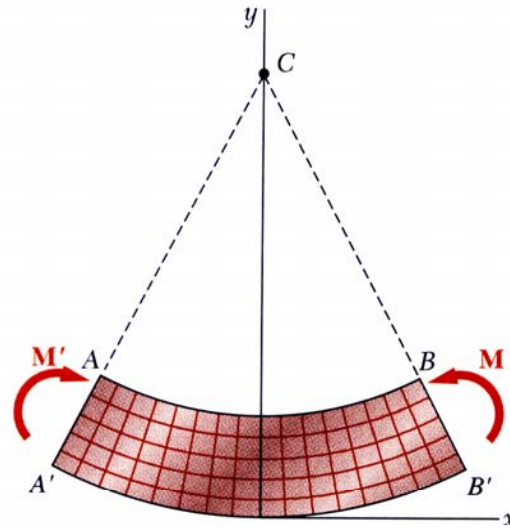
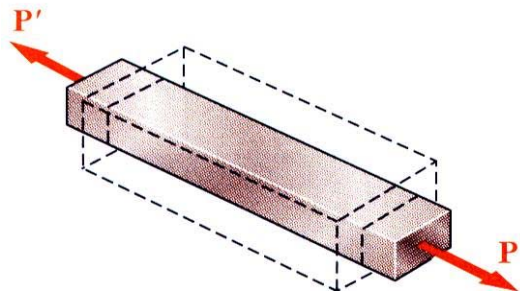
N_z
 Q_x, Q_y
 M_x, M_y
 M_z

- lực dọc trục,
- lực cắt,
- mô men uốn,
- mô men xoắn.



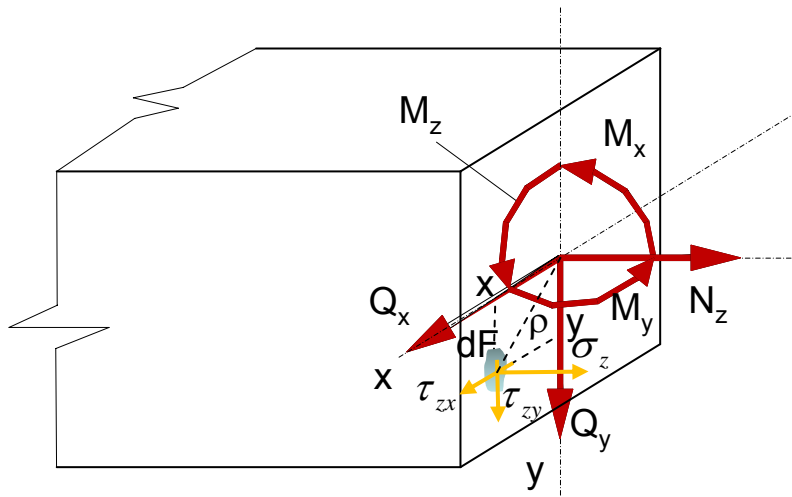
BG4- Nội lực, ứng suất

Hiệu ứng biến dạng của sáu thành phần nội lực trên mặt cắt ngang thanh



BG4- Nội lực, ứng suất

Quan hệ giữa các nội lực thu gọn và các thành phần ứng suất trên mặt cắt ngang thanh



$$N_z = \int_F \sigma_z dF$$

$$M_x = \int_F y \sigma_z dF$$

$$Q_x = \int_F \tau_{zx} dF$$

$$M_y = \int_F x \sigma_z dF$$

$$Q_y = \int_F \tau_{zy} dF$$

$$M_z = \int_F (x \tau_{zy} - y \tau_{zx}) dF$$



BG5- Các giả thiết của môn học

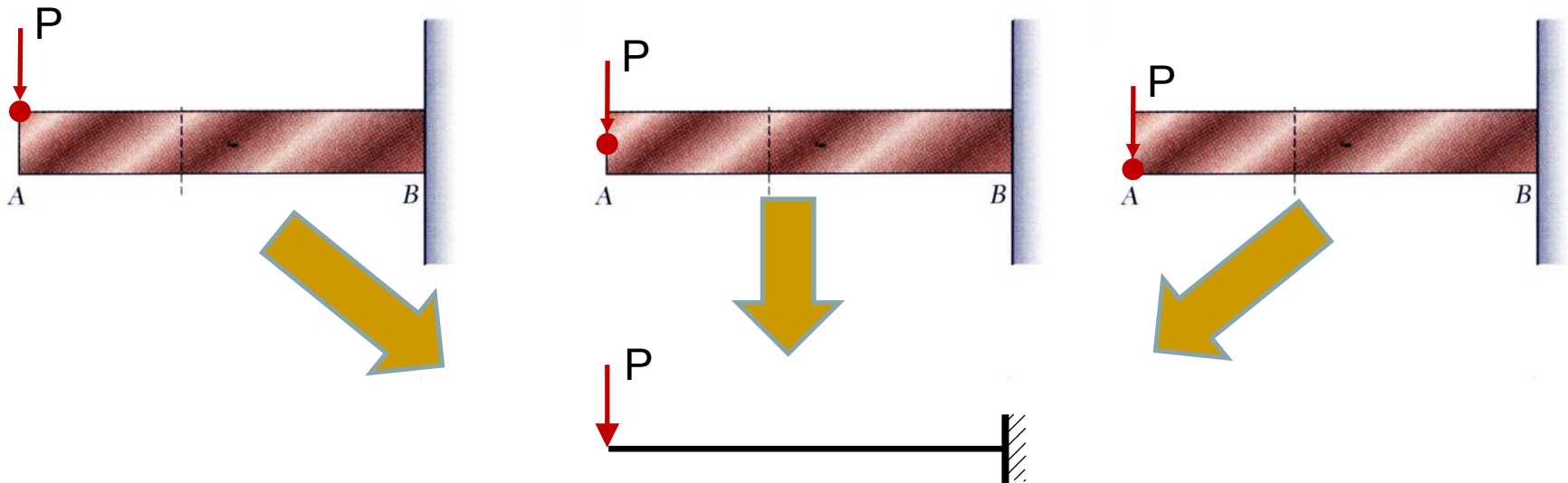


Vật liệu:

- Liên tục, đồng nhất, đẳng hướng,
- Đàn hồi tuyến tính.

Kết cấu: Biến dạng nhỏ.

Nguyên lý Saint – Venant:



Ở đủ xa nơi đặt lực, trạng thái ứng suất và biến dạng không phụ thuộc vào cách đặt lực mà chỉ phụ thuộc vào hợp lực.



BG6- Khái niệm bài toán tĩnh định, bài toán siêu tĩnh

Bài toán tĩnh định:

là bài toán có thể tính được các thành phần nội lực chỉ cần dựa vào các phương trình cân bằng tĩnh học

Bài toán siêu tĩnh:

là bài toán không thể tính được các thành phần nội lực nếu chỉ cần dựa vào các phương trình cân bằng tĩnh học.

Cách giải: bổ sung thêm các phương trình biến dạng, phương trình vật lý



Ôn tập tại lớp

Học gì???

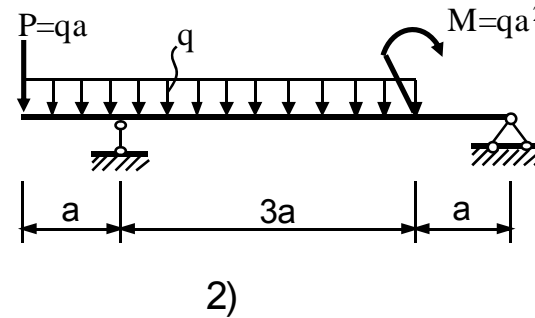
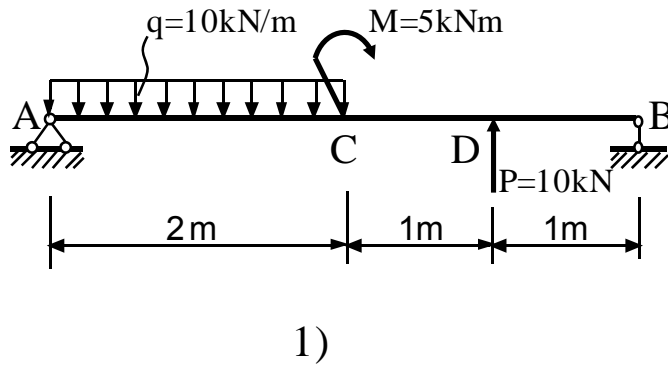
Hiểu gì???

Làm gì???





Hãy tính phản lực liên kết của các kết cấu sau:



Hãy đổi các đơn vị sau đây:

$$\begin{aligned}20\text{kN/cm}^2 &= \dots \text{ bar} \\20\text{daN/cm}^2 &= \dots \text{ MPa} \\20\text{MN/cm}^2 &= \dots \text{ bar} \\20\text{MPa} &= \dots \text{ bar}\end{aligned}$$

Hãy cho biết môn Cơ học lý thuyết nằm ở đâu trong sơ đồ hình cây của cơ học?



Bài tập & Câu hỏi ôn tập

Bài tập về nhà

Bài tập số 3,4 trang 22 sách giáo trình

Câu hỏi ôn tập

Hãy tìm 5 thí dụ thực tế mà sơ đồ tính đưa về thanh và hệ thanh, 5 thí dụ về tấm hoặc vỏ?

Hãy cho 2 thí dụ thực tế về lực thể tích, lực mặt?



Chương 2

KÉO NÉN ĐÚNG TÂM

(Thanh chịu lực dọc trục)

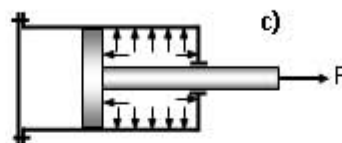
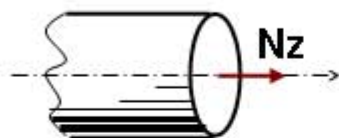


Nội dung chính

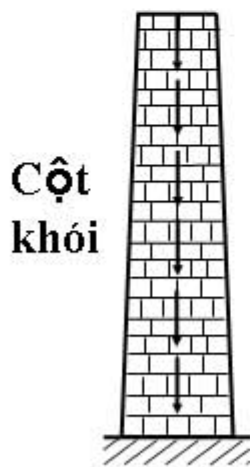
- 1) Khái niệm
- 2) Nội lực
- 3) Ứng suất
- 4) Biến dạng
- 5) Các đặc trưng cơ lý của vật liệu
- 6) Tính về độ bền và độ cứng
- 7) Thế năng biến dạng đàn hồi
- 8) Bài toán siêu tĩnh

Khái niệm

Trên mặt cắt ngang thanh chỉ tồn tại một thành phần nội lực duy nhất $N_z \neq 0$ thì thanh chịu kéo, nén đúng tâm.

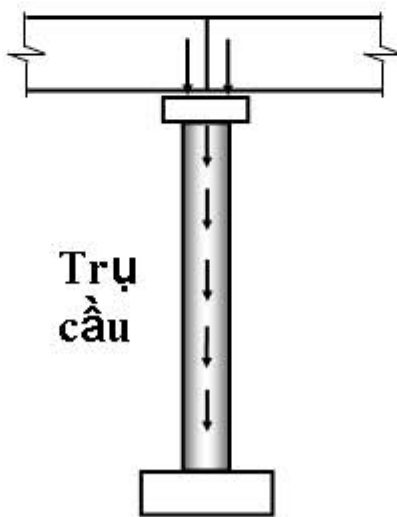


Cần
Pistong



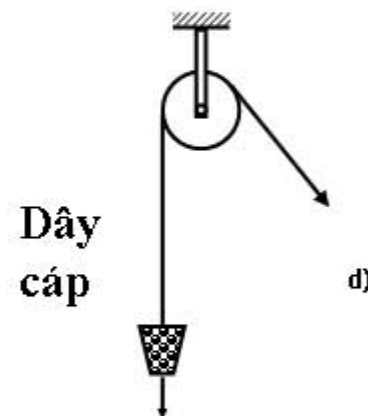
Cột
khói

a)



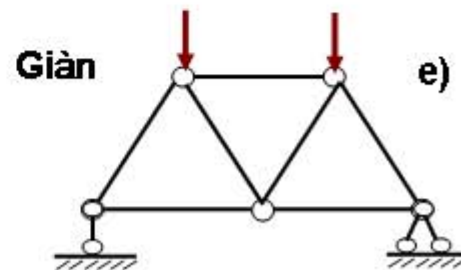
Trụ
cầu

b)



Dây
cáp

d)

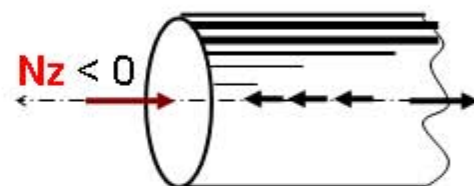
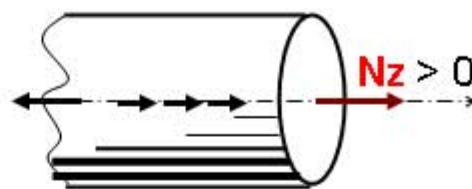


Giàn

e)

Nội lực

- a) Qui ước dấu
- b) Biểu Phương pháp tính
- c) Biểu đồ nội lực
- d) Quan hệ vi phân



Phương pháp mặt cắt:

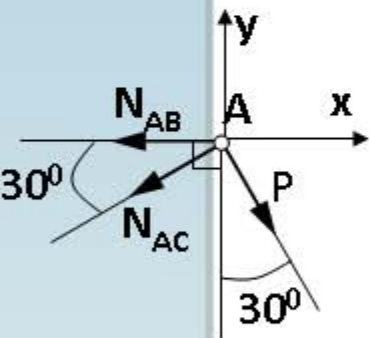
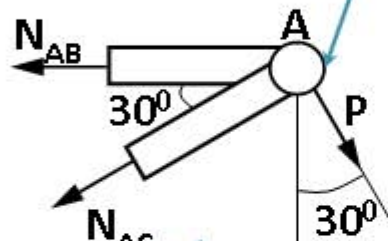
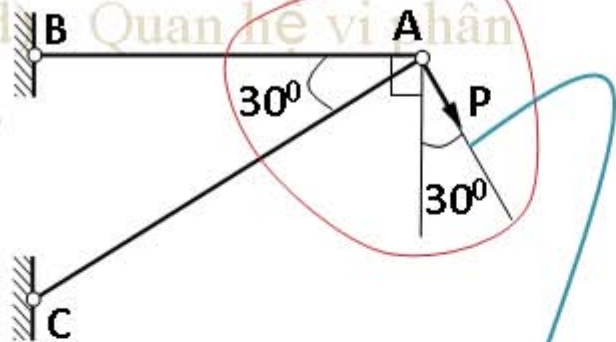
Bước 1: Chia kết cấu làm 2 phần

Bước 2: Giữ lại một phần, thay thế tác dụng của phần bỏ đi vào phần còn lại bằng nội lực tương ứng.

Bước 3: Viết phương trình cân bằng cho phần giữ lại

b) Phương pháp tính

c) Biểu đồ nội lực
d) Quan hệ vị trí

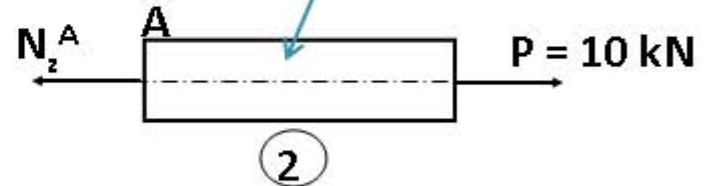
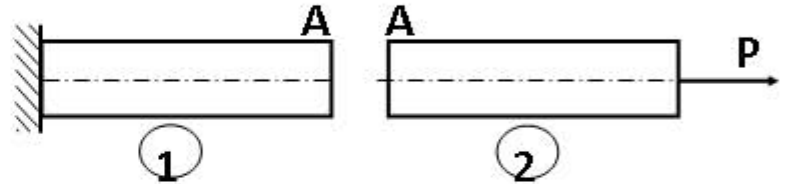
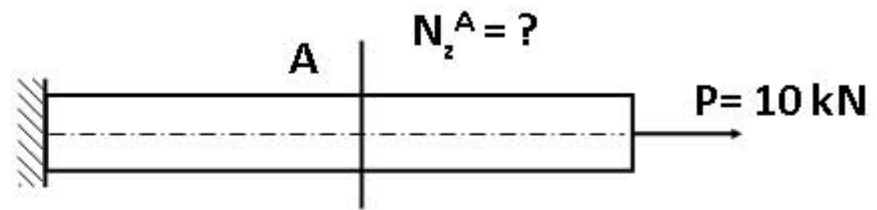


$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -N_{AB} - N_{AC} \cos 30^\circ + P \sin 30^\circ = 0 \\ -N_{AC} \sin 30^\circ - P \cos 30^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_{AC} = -P \cot 30^\circ \\ N_{AB} = \frac{P}{\sin 30^\circ} \end{cases}$$

Ví dụ

Kéo nén đúng tâm thanh thẳng



$$\sum Z = 0 \quad N_z^A - P = 0$$

$$N_z^A = P = 10 \text{ kN}$$

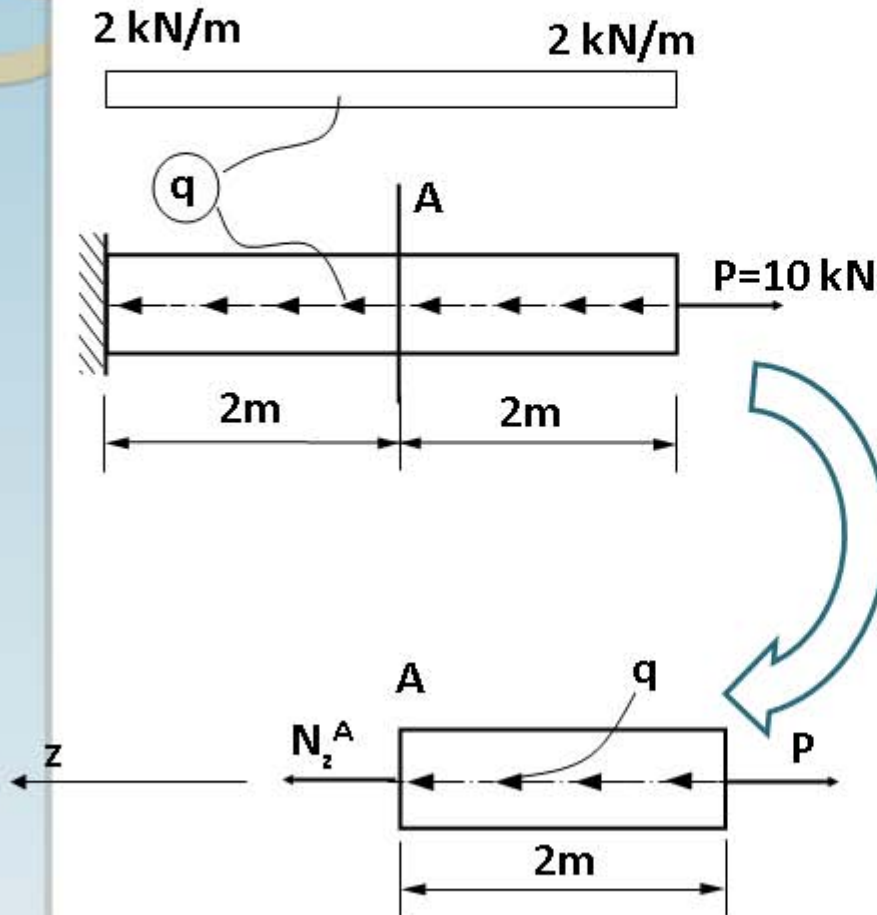
- a) Qui ước dấu
- b) Phương pháp tính**
- c) Biểu đồ nội lực
- d) Quan hệ vi phân

Ví dụ

$$N_z^A = ?$$



Biết giờ



$$\sum Z = 0$$

$$N_z^A - P + q \cdot 2 = 0$$

$$N_z^A = P - q \cdot 2 = 6 \text{ kN}$$

- b) Phương pháp tính
- c) Biểu đồ nội lực**
- d) Quan hệ vi phân

Khái niệm:

Biểu đồ nội lực là đồ thị dùng để biểu diễn sự biến thiên nội lực dọc theo trục của thanh

Trình tự vẽ:

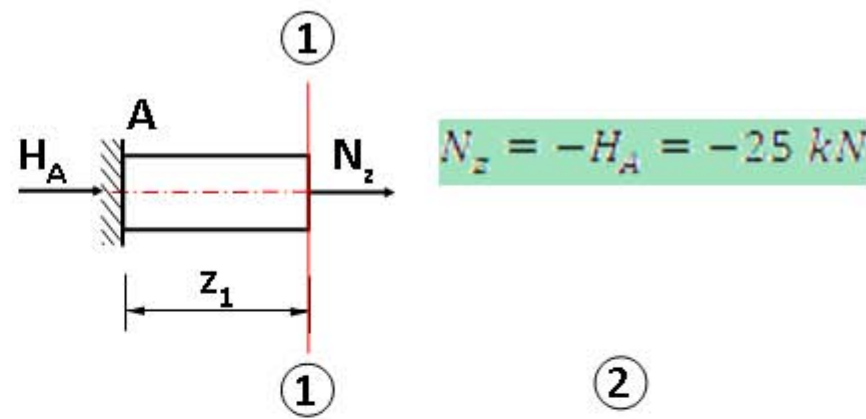
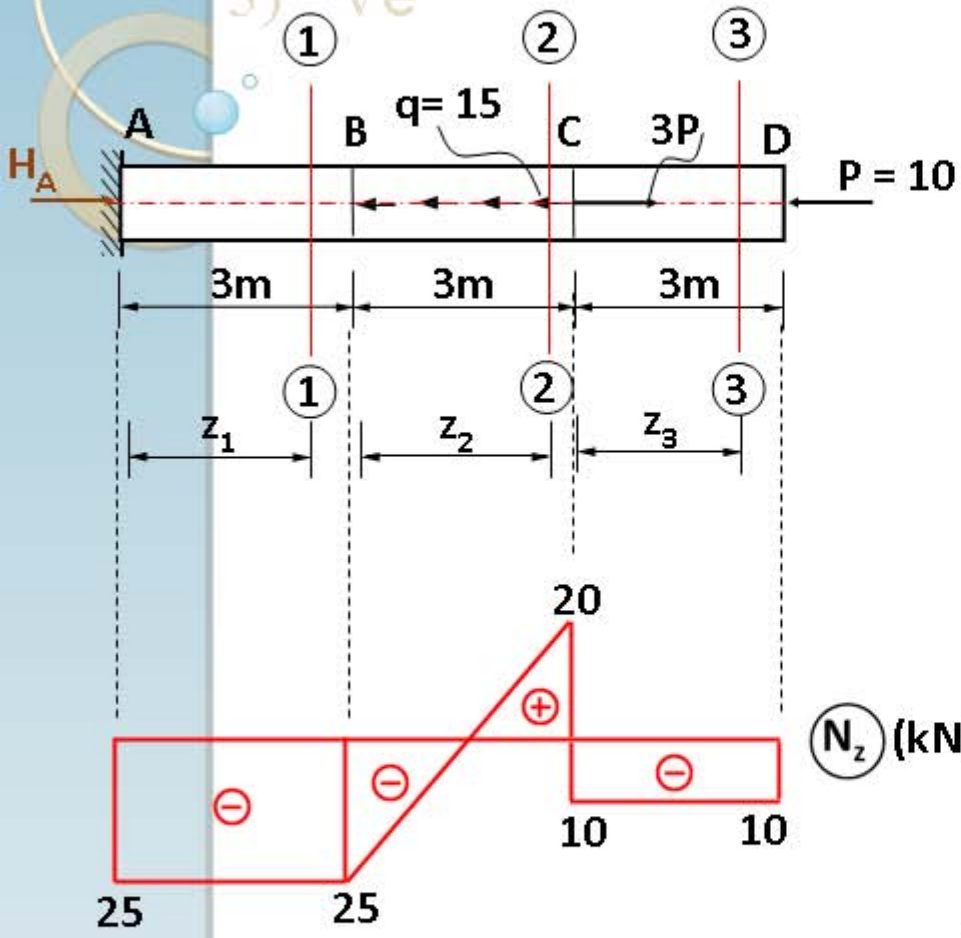
- Bước 1 - Tính phản lực liên kết
- Bước 2 - Chia đoạn
- Bước 3 - Lập biểu thức cho từng đoạn
- Bước 4 - Vẽ biểu đồ nội lực

Nội lực

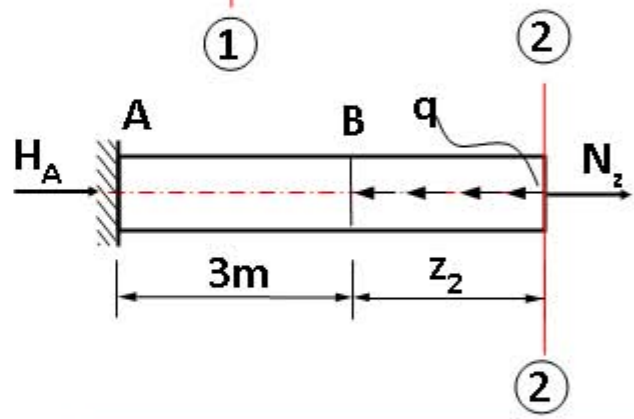
- 1) Tính phản lực liên kết
- 2) Chia đoạn
- 3) Vẽ

Ví dụ

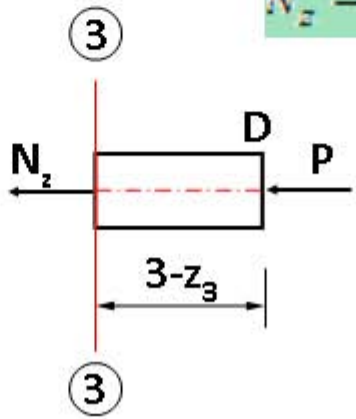
$$H_A = 3q - 3P + P = 3 \cdot 15 - 3 \cdot 10 + 10 = 25 \text{ (kN)}$$



$$N_z = -H_A = -25 \text{ kN}$$



$$N_z = -H_A + q \cdot z_2 = -25 + 15 \cdot z_2$$



$$N_z = -P = -10 \text{ kN}$$

Nội lực

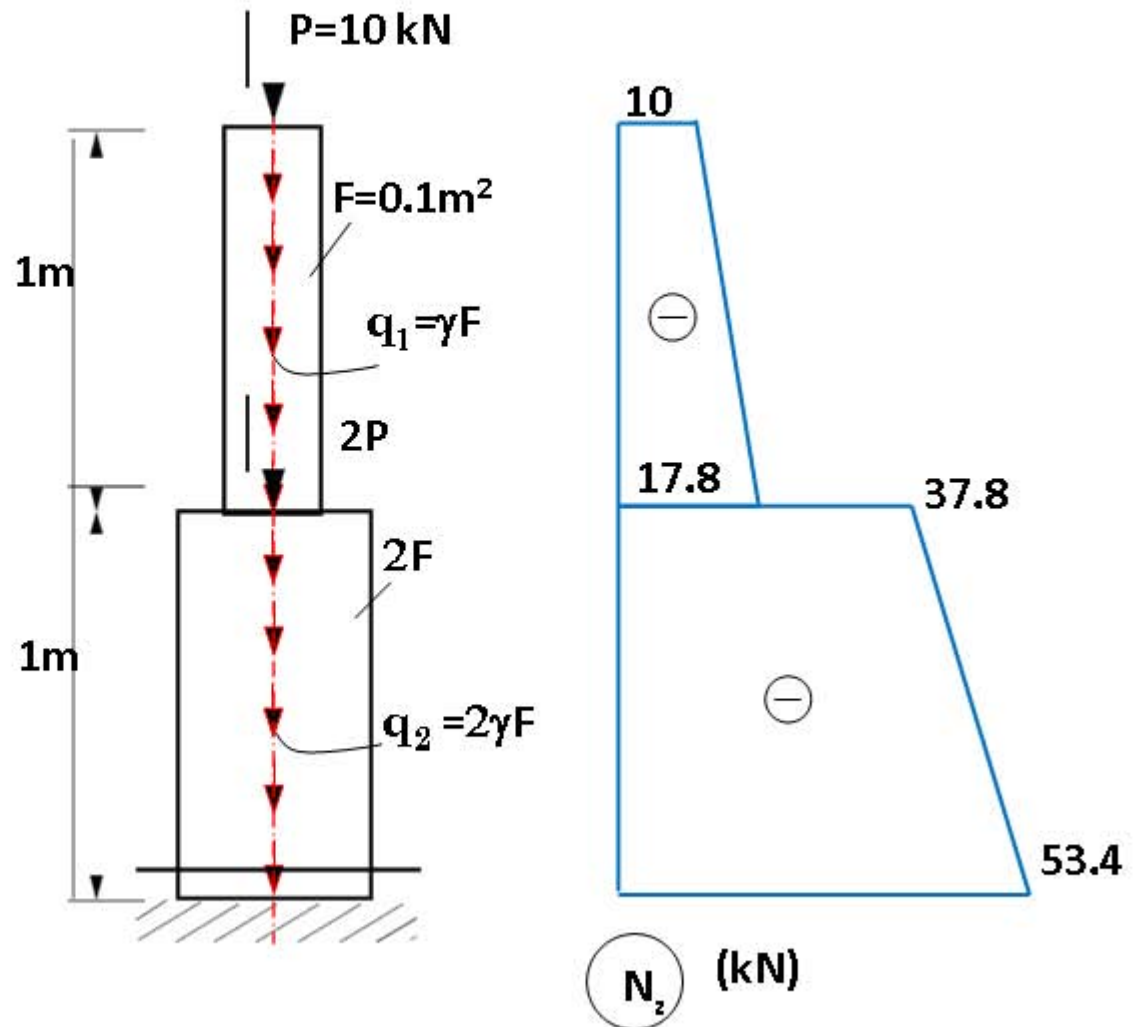
Bài tập làm tại lớp.

Vẽ biểu đồ nội lực

$$\gamma = 78 \text{ T/m}^3$$



Hết giờ



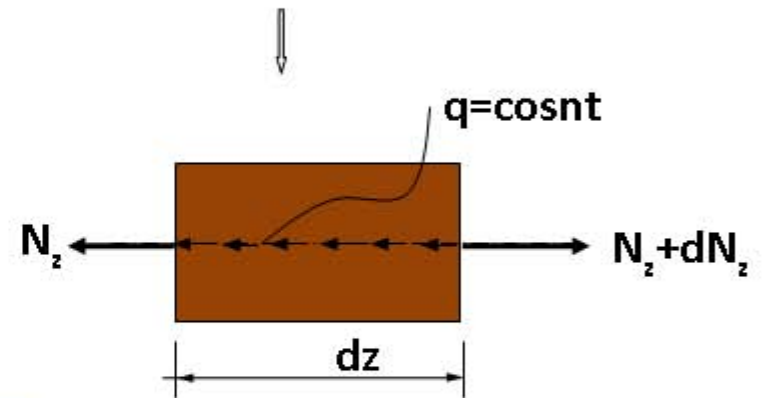
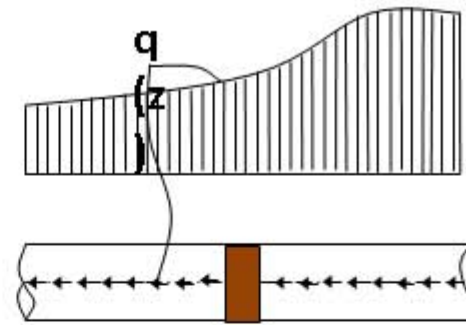
c) Biểu đồ nội lực
d) Quan hệ vi phân

Kéo nén đúng tâm thanh thẳng

$$\sum z = 0$$

$$(N_z + dN_z) - N_z - q \cdot dz = 0$$

$$\frac{dN_z}{dz} = q$$



- a) Đạo hàm bậc một của lực dọc trục theo z bằng tải trọng phân bố.**
b) Vẽ nhanh biểu đồ lực dọc

- 1) **Bậc N_z**
- 2) **ΔN_z**
- 3) **Đầu thanh, MC có lực tập trung**

Ứng suất

- 1) Trên mặt cắt ngang
 - a) Các giả thiết tính toán
 - b) Thành lập công thức
- 2) Trên mặt cắt xiên

1) Trên mặt cắt ngang

- a) Các giả thiết tính toán
- b) Thành lập công thức

2) Trên mặt cắt xiên

CT 1.6
(chương 1)

$$N_z = \int_F \sigma_z dF$$

$$\sigma_z = \text{const.}$$

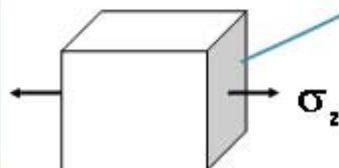
$\Delta dz = \text{const}$
(gt 2)

$$\epsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \text{const}$$

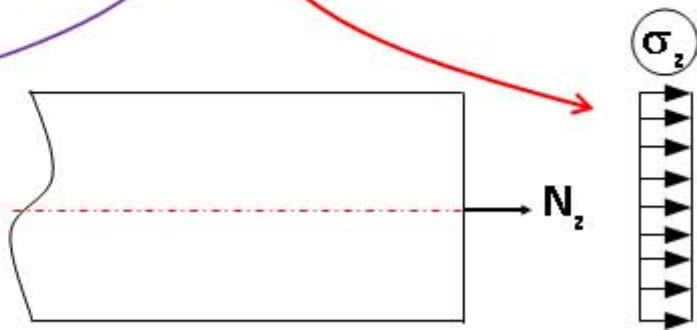
$$\sigma_z = \frac{N_z}{F}$$

ĐL Hooke

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$



E – Mô đun đh



1) Trên mặt cắt ngang

a) Các giả thiết tính toán

b) Thành lập công thức

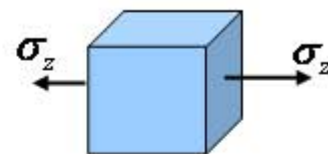
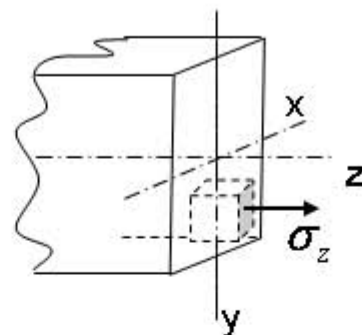
Lưới ô vuông



Lưới chữ nhật



Kéo nén đùng tâm thanh thẳng



$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

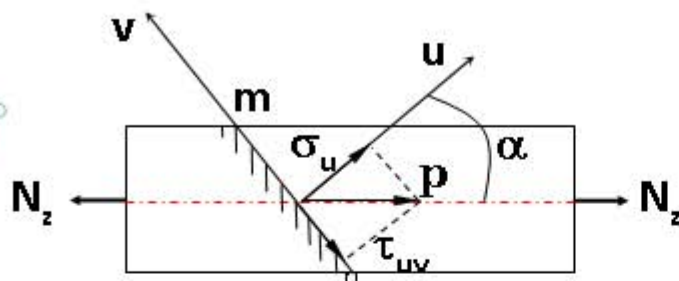
$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất pháp tại mỗi điểm.

Gt1: Các thớ dọc không tác dụng ép hoặc đẩy lẫn nhau

Gt2: Mặt cắt ngang trước khi chịu lực là phẳng

2) Trên mặt cắt xiên



p : ứng suất toàn phần;

σ_u : ứng suất pháp;

τ_{uv} : ứng suất tiếp.

$$\sigma_u = p \cdot \cos \alpha$$

$$\tau_{uv} = p \cdot \sin \alpha$$

$$p = \frac{N_z}{F_x}$$

$$F_x = \frac{F}{\cos \alpha}$$

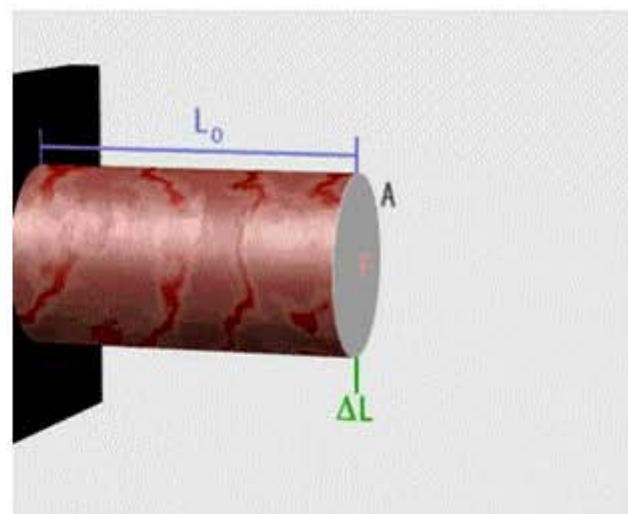
$$\begin{cases} \sigma_u = \frac{N_z}{F} \cos^2 \alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha \\ \tau_{uv} = \frac{N_z}{F} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma_z \sin 2\alpha \end{cases}$$

- 1) Tại một điểm có nhiều giá trị ứng suất trên các mặt cắt khác nhau.
- 2) $\sigma_{\max} = \sigma_z, \alpha = 0$
- 3) $\tau_{\text{ctri}} = 0.5 \sigma_z; \alpha = 45^\circ, 135^\circ$

1) Biến dạng dọc trục.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} \\ \sigma_z &= \frac{N_z}{F} \end{aligned} \right\} \varepsilon_z = \frac{N_z}{EF}$$

$$\varepsilon = \frac{d\Delta l}{dz} \quad \varepsilon = \frac{d\Delta l}{dz} \quad d\Delta l = \varepsilon_z dz$$



Độ biến dạng của cả đoạn

$$\Delta l = \int_1 d\Delta l = \int_1 \varepsilon_z dz = \int_1 \frac{N_z}{EF} dz \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \int \frac{N_z}{EF} dz$$

Độ biến dạng của cả thanh (gồm nhiều đoạn):

$$\Delta l = \sum_i \int_{l_i} \frac{N_z^i}{EF_i} dz$$

EF/L : Độ cứng chống kéo nén của thanh

Nếu $N_z/EF = \text{const} \Rightarrow \Delta l = \frac{N_z l}{EF}$

EF : Độ cứng chống kéo nén đơn vị của thanh

2) Biến dạng ngang

$$\varepsilon_x = -\mu \varepsilon_z$$

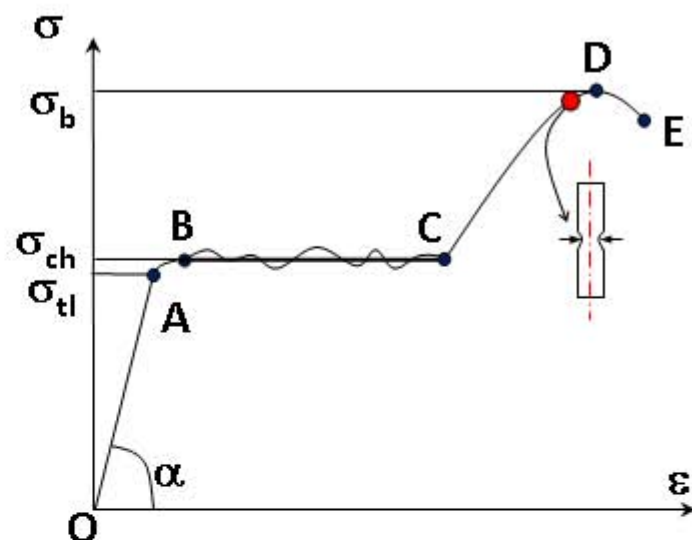
μ – hệ số nở ngang,
 $\mu = 0 \div 0.5$

Đặc trưng vật liệu

Kéo nén đúng tâm thanh thẳng

- 1) Thí nghiệm kéo thép mềm (thép CT38)
- 2) Kéo một số vật liệu khác
- 3) Nén vật liệu

- Vật dẻo : Thép, Nhôm, các hợp kim ...
- Vật liệu giòn : Bê tông, gang



Hình 2.11 Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng

$$\sigma = \frac{P}{F}; \epsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

- Giai đoạn đàn hồi \overline{OA} : Giới hạn tỉ lệ $\sigma_{tl} = 2100 \text{ daN/cm}^2$, $E = \text{tga}$
- Giai đoạn chảy \overline{BC} : giới hạn chảy, $\sigma_{ch} = 2400 \text{ daN/cm}^2$
- Giai đoạn tái bền CDE: giới hạn bền - đứt, $\sigma_b = 3800 \text{ daN/cm}^2$

Đặc trưng vật liệu

1) Thí nghiệm kéo thép CT38

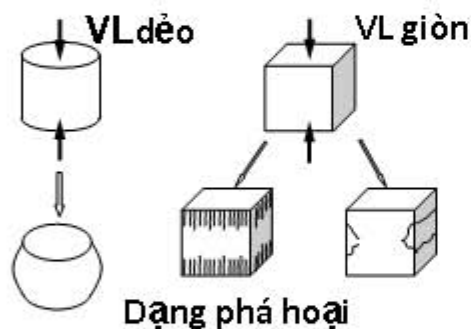
2) Kéo, nén một số vật liệu khác

• Nén vật liệu

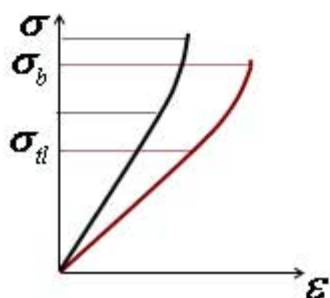
Hình 2.12 Biểu đồ kéo một số vật liệu

Thí nghiệm nén vật liệu

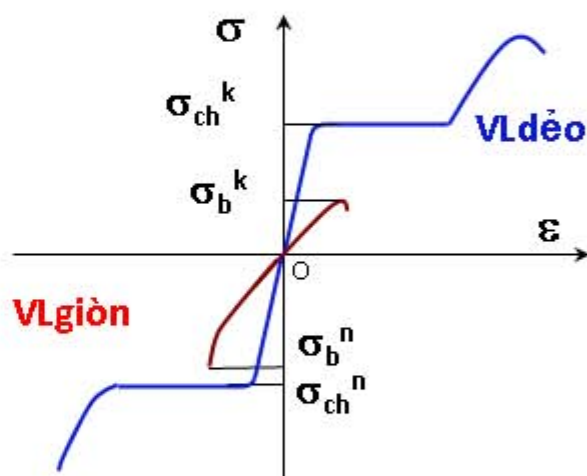
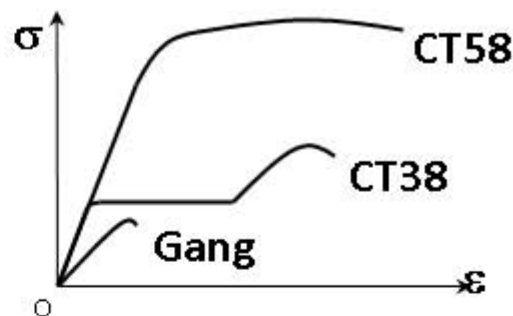
Mẫu thí nghiệm



Biểu đồ nén một số vật liệu giòn



Kéo nén đùng tâm thanh thẳng



Hình 2.13 Khác nhau giữa biểu đồ kéo, nén vật liệu dẻo và giòn

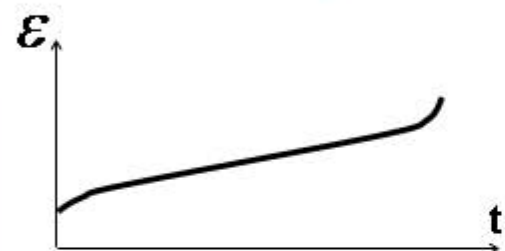
- Miền chảy
- Dẻo đối xứng qua O
- Giòn không đối xứng, $\sigma_b^k \ll \sigma_b^n$

Đặc trưng vật liệu

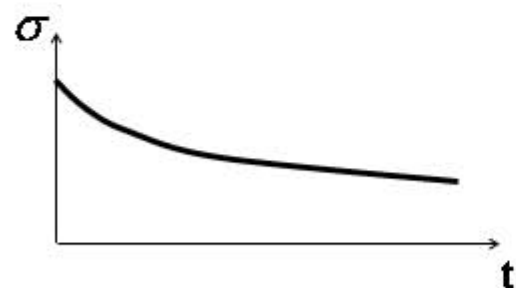
Các nhân tố ảnh hưởng đến đặc trưng cơ học của vật liệu.

a. Hiện tượng cứng nguội.

b. Hiện tượng từ biến.

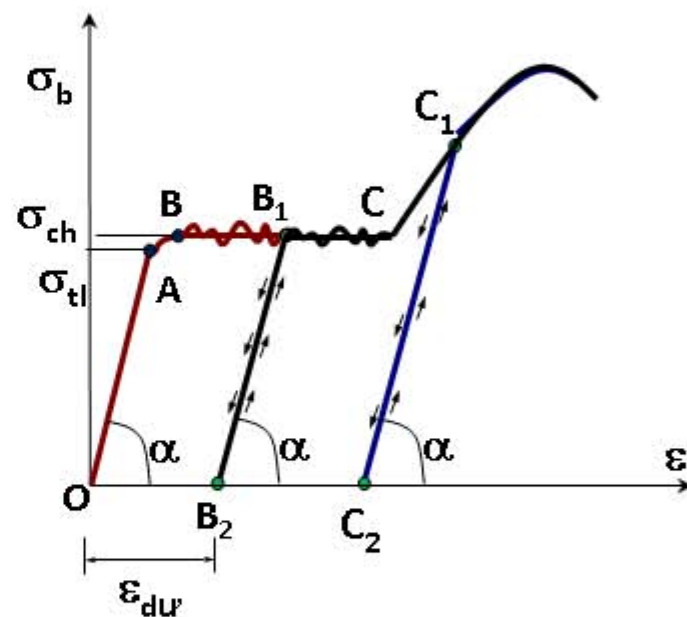


Hiện tượng rão



Hiện tượng chùng

c. Ảnh hưởng của nhiệt độ.



Tính về độ bền và độ cứng

Điều kiện bền

Bài toán

Kéo nén đung tâm thanh thẳng

Kiểm tra $\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} \leq [\sigma]$

Thiết kế $[F] = \frac{N_{max}}{F}$

XD tải $[N] = F[\sigma]$

$\sigma_{max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}$

Tính toán
Giả thiết
Đồng nhất

Nguy hiểm, σ_{ch}, σ_b

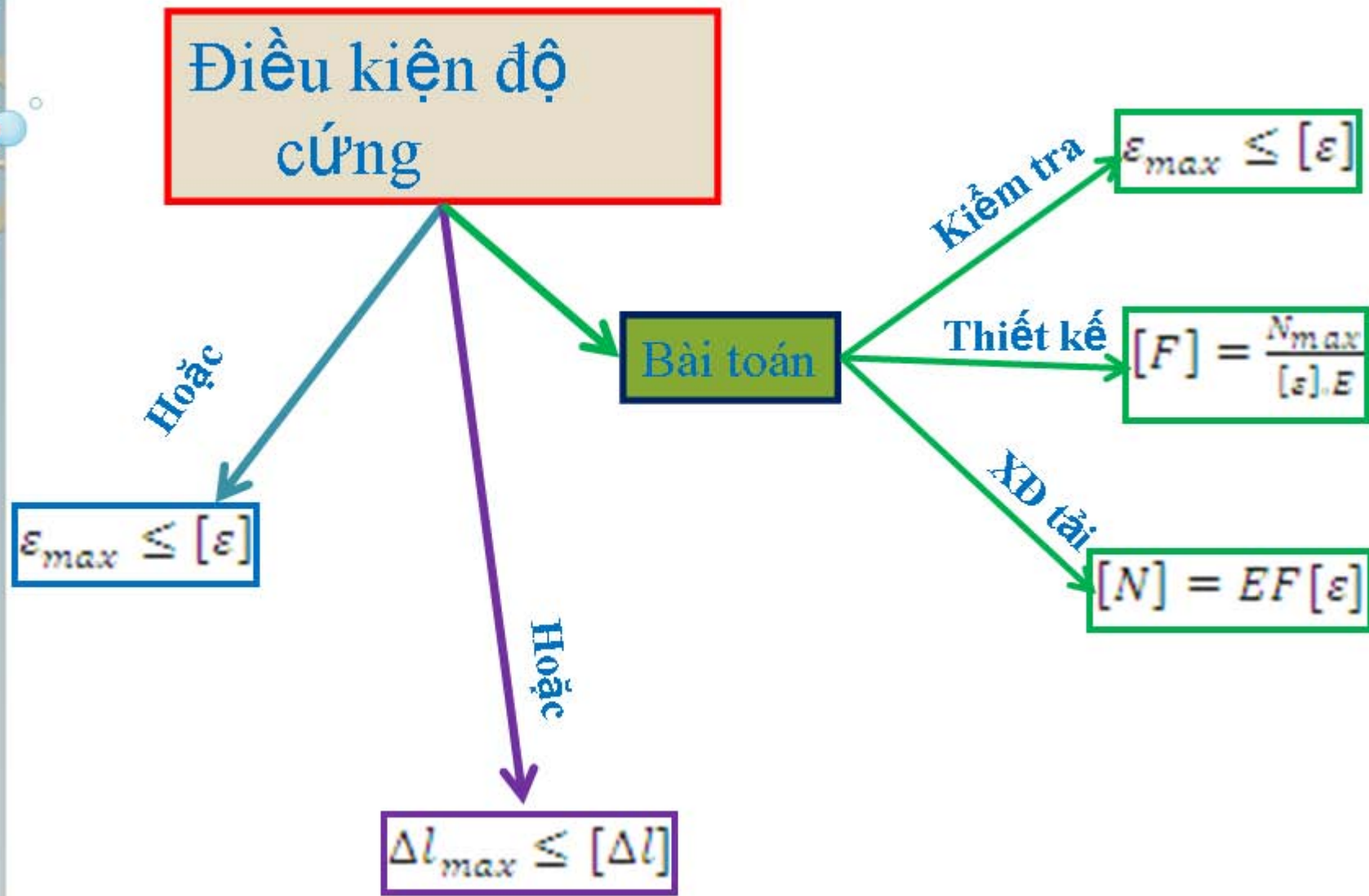
An toàn
Quan trọng

TTGH $\sum n_i \cdot N_i^{tc} \leq F \cdot R^{tc} = F \cdot k \cdot m \cdot R^{tc}$

N_i^{tc} – Tải trọng tiêu chuẩn, i
 n_i – Hệ số vượt tải i ,
 F – Diện tích mặt cắt ngang thanh,
 R^{tc} – Cường độ tính toán của vật liệu,
 k – Hệ số đồng nhất của vật liệu, $k \leq 1$,
 m – Hệ số điều kiện làm việc, $m \leq 1$.

Tính về độ bền và độ cứng

Kéo nén đúng tâm thanh thẳng

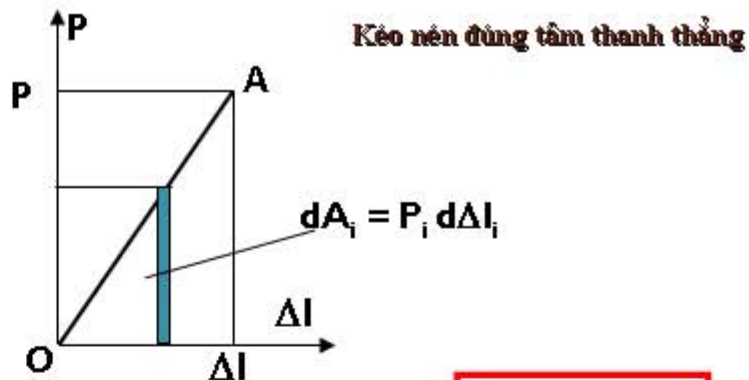
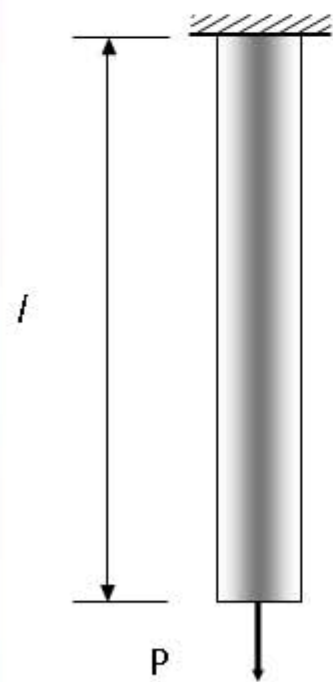


Thế năng biến dạng đàn hồi

1) Khái niệm :

- Thế năng biến dạng đàn hồi: U .
- Thế năng biến dạng đàn hồi riêng: $u=U/V$

2) Thế năng biến dạng đàn hồi trong thanh chịu lực dọc trục.



Bảo toàn năng lượng

$$U = A$$

Tại một thời điểm

$$dA_i = P_i d\Delta l_i$$

Toàn quá trình

$$A = \int A_i = \int_{\Delta l} P_i \cdot d\Delta l = \Omega_{OAC} = \frac{1}{2} \Delta l \cdot P = \frac{N_z^2 l}{2EF}$$

$$U = \frac{N_z^2 l}{2EF}$$

Mở rộng

$$U = \sum \int_i \frac{N_i^2}{2EF_i} dz$$

Dầm AB cứng tuyệt đối.

AB, BC: $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$, $R = 16 \text{ kN/cm}^2$.a) N_1 ? N_2 ? σ_1 ? σ_2 ?b) $[P]$?c) Δ_p ?

$$\sigma_{\max} = \max(\sigma_1, \sigma_2) \leq R$$

$$\frac{P}{3} \leq R$$

$$[P] = 3 \cdot R = 3 \cdot 16 = 48 \text{ (kN)}$$

Hình 2.15 Sơ đồ chịu lực và chuyển vị của hệ

$$\sum m_B = N_1 \cdot 3 - P \cdot 1 = 0$$

$$\sum m_A = N_2 \cdot 3 - P \cdot 2 = 0$$

$$N_1 = \frac{P}{3} \quad \sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{P}{3 \cdot F_1} = \frac{P}{3}$$

$$N_2 = \frac{2 \cdot P}{3} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{2P}{3 \cdot F_2} = \frac{2P}{9}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EF_1} = \frac{16 \cdot 200}{2 \cdot 10^4 \cdot 1} = 0.16 \text{ cm}$$

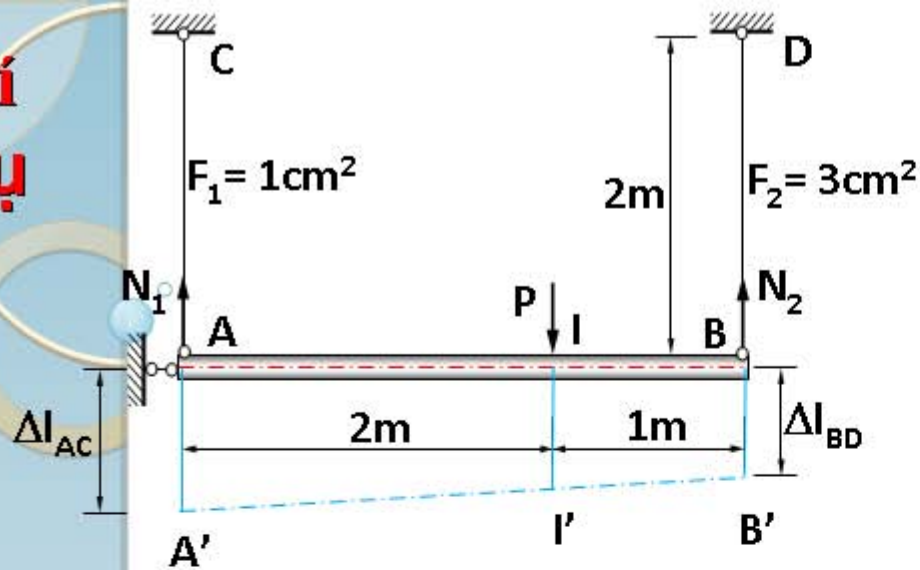
$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EF_2} = \frac{32 \cdot 200}{2 \cdot 10^4 \cdot 3} = 0.10667 \text{ cm}$$

$$\Delta_p = II' = BB' + 1 \cdot \frac{AA' - BB'}{3}$$

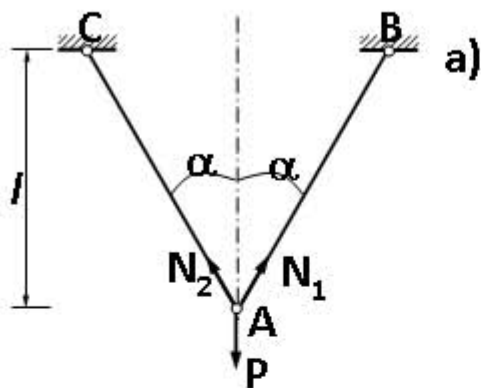
$$\Delta_p = 0.12444 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} P \Delta_p \quad U = \frac{N_1^2 l}{2EF_1} + \frac{N_2^2 l}{EF_2}$$

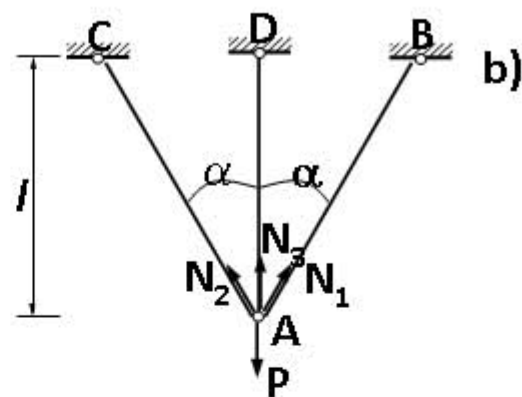
Ví dụ



Khái niệm.



Kết cấu tĩnh định



Kết cấu siêu tĩnh

- **Hệ a) 2 ẩn, 2 phương trình. Tĩnh định**
- **Hệ b) 3 ẩn, 2 phương trình. Siêu tĩnh**

Kết cấu siêu tĩnh là kết cấu có số ẩn số lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học độc lập có thể lập. Hiệu số ẩn số với số phương trình gọi là bậc siêu tĩnh.

Cách giải.

- 1) Phương trình cân bằng tĩnh học
- 2) Phương trình hình học
- 3) Phương trình vật lý

Tính nội lực trong các thanh hệ b). Các thanh cùng EF.

1) Tĩnh học

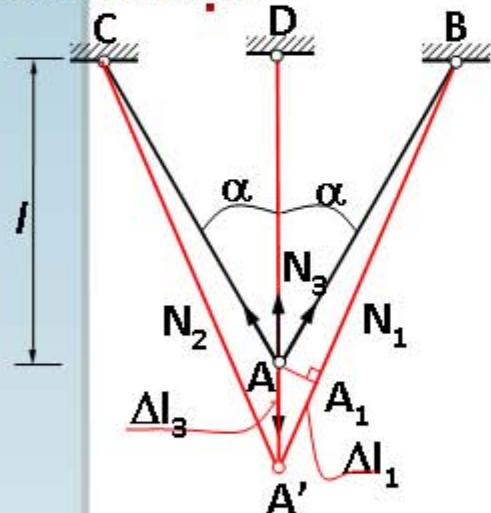
$$\sum X = N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0$$

$$\sum Y = N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + N_3 - P = 0$$

$$N_3 = \frac{P}{2 \cos^3 \alpha + 1}$$

$$N_1 = N_2 = \frac{P \cos^2 \alpha}{2 \cos^3 \alpha + 1}$$

2) Hình học



$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha$$

Hình 2.17 Sơ đồ biến dạng của hệ thanh

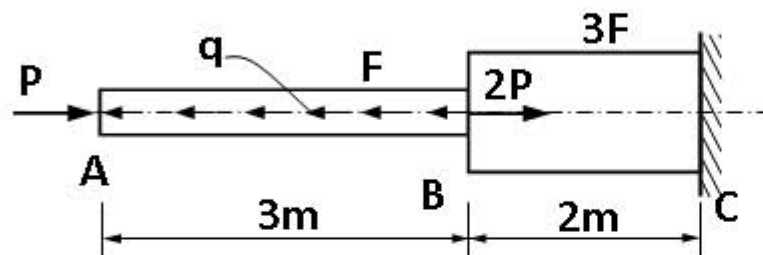
Kết hợp

3) Vật lý

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF} = \frac{N_3 l}{EF}$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF} = \frac{N_1 l}{EF \cos \alpha}$$

Ví dụ (sinh viên tự làm)



$$P = 10 \text{ kN}, q = 5 \text{ kN/m},$$

$$F = 3 \text{ cm}^2,$$

$$R_k = 5 \text{ kN/cm}^2, R_n = 15$$

$$\text{kN/cm}^2, [\varepsilon] = 0.02.$$

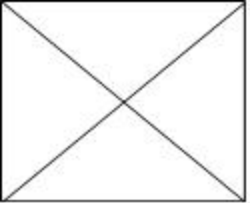
Cho một thanh mặt cắt thay đổi

a) Tính và vẽ biểu đồ nội lực.

b) Kiểm tra độ bền và độ cứng cho thanh.

c) Tính chuyển vị đầu tự do của thanh, $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$.

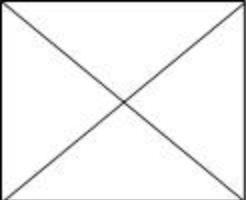
d) Nếu tại đầu tự do đặt ngàm cứng, vẽ lại biểu đồ nội lực trong thanh.



BÀI GIẢNG
SỨC BỀN VẬT LIỆU F1

**CHƯƠNG 3. Trạng thái ỨNG SUẤT,
BIẾN DẠNG, ĐỊNH LUẬT HOOKE**





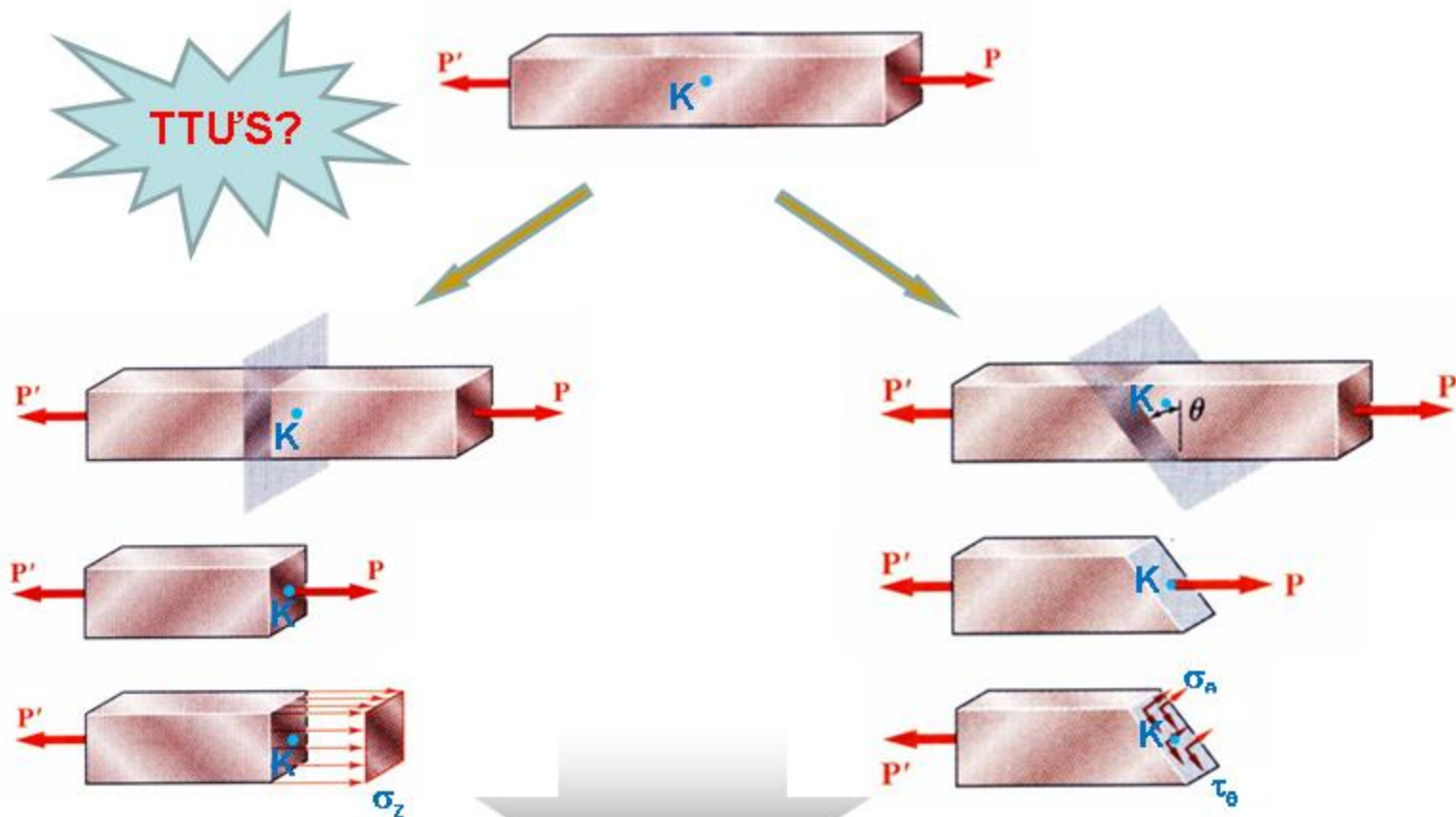
Nội dung chính



- ✓ Trạng thái ứng suất , phân tích trạng thái ứng suất phẳng tại một điểm trong vật thể đàn hồi .
- ✓ Trạng thái biến dạng, phân tích trạng thái biến dạng phẳng tại một điểm trong vật thể đàn hồi .
- ✓ Quan hệ ứng suất-biến dạng (định luật Hooke).
- ✓ Các định lý cơ bản về thế năng biến dạng đàn hồi.



BG3.1- Khái niệm trạng thái ứng suất



Có vô số mặt cắt đi qua điểm K \rightarrow có vô số ứng suất pháp và ứng suất tiếp tại điểm K ứng với các mặt cắt đi qua điểm đó



BG3.1- Khái niệm trạng thái ứng suất

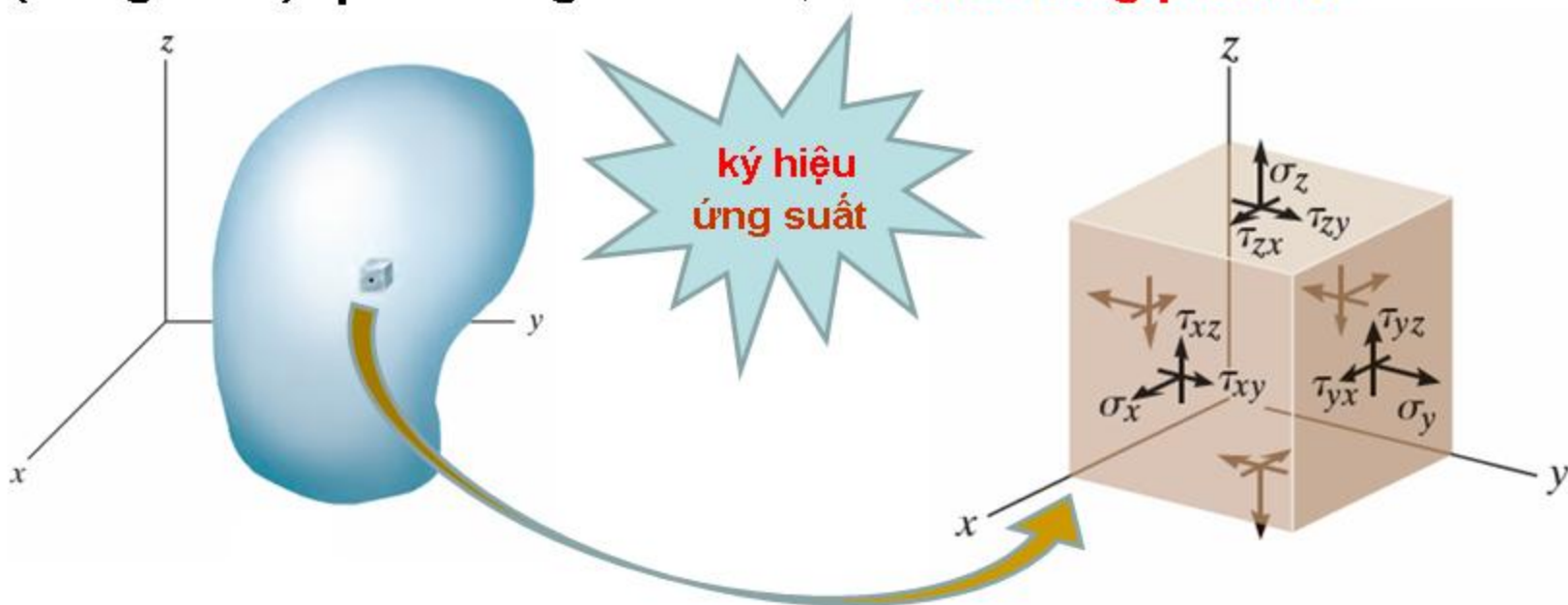


Khái niệm TTU'S

Tập hợp ứng suất trên tất cả các mặt đi qua một điểm trong vật thể đàn hồi khi chịu lực được gọi là **trạng thái ứng suất** tại điểm đó.

Phương pháp nghiên cứu TTU'S

Dùng **phương pháp mặt cắt** tách ra một phân tử vô cùng bé (đồng nhất) tại điểm nghiên cứu, xét **cân bằng phân tử**.

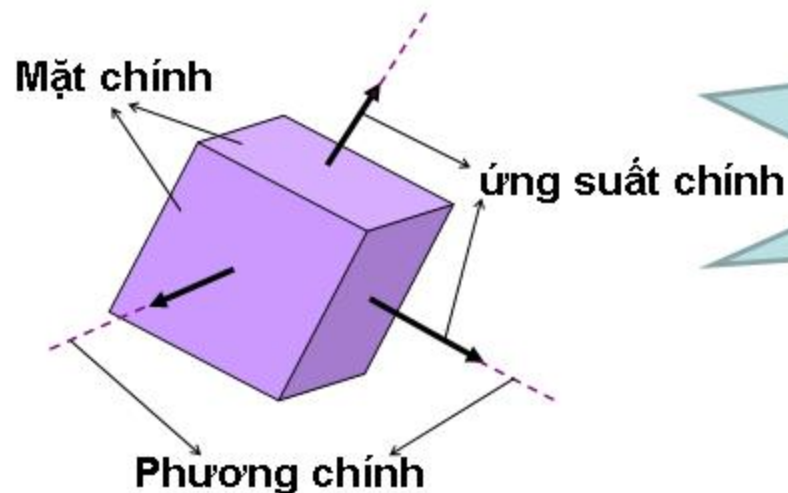


BG3.1- Khái niệm trạng thái ứng suất



Mặt chính, phương chính, ứng suất chính

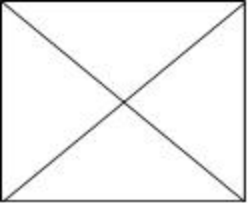
- Mặt có ứng suất tiếp bằng không được gọi là **mặt chính**.
- Phương pháp tuyến của mặt chính được gọi là **phương chính**.
- Ứng suất pháp trên mặt chính được gọi là **ứng suất chính**.



Tại một điểm luôn tồn tại ít nhất 3 phương chính vuông góc với nhau.

Ký hiệu ứng suất chính

$$\sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I$$
$$(\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1)$$

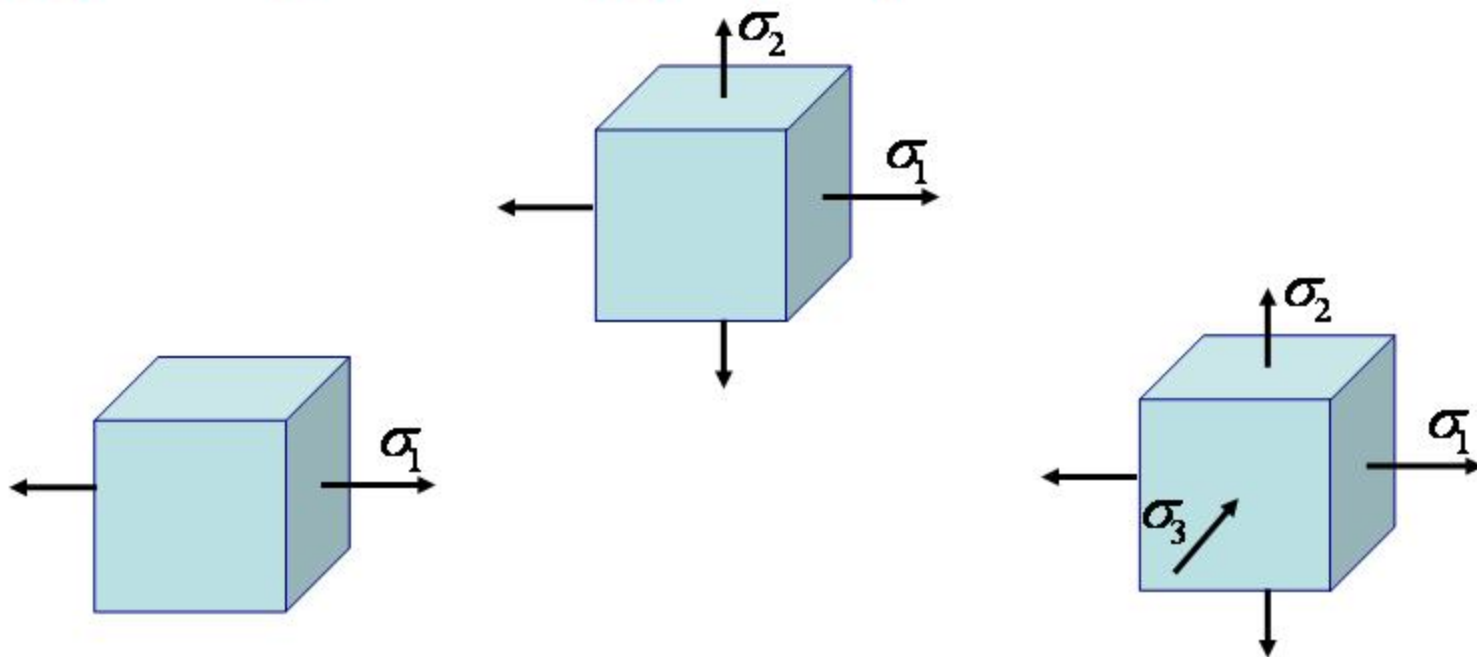


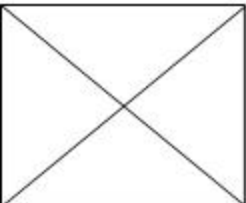
BG3.1- Khái niệm trạng thái ứng suất



Loại trạng thái ứng suất

- Trạng thái ứng suất đường (đơn).
- Trạng thái ứng suất phẳng (mặt).
- Trạng thái ứng suất không gian (khối).





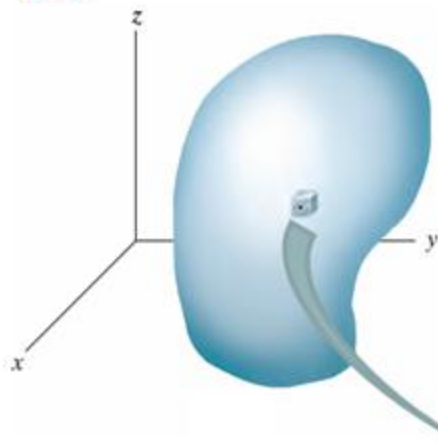
BG3.2- Nghiên cứu trường ứng suất trong vật thể đàn hồi khi chịu tải (phương trình động lực học)

Phương pháp nghiên cứu trường ứng suất

Dùng **phương pháp mặt cắt** tách ra một phân tử vô cùng bé (không đồng nhất) tại một điểm trong vật thể, xét **cân bằng phân tử**.

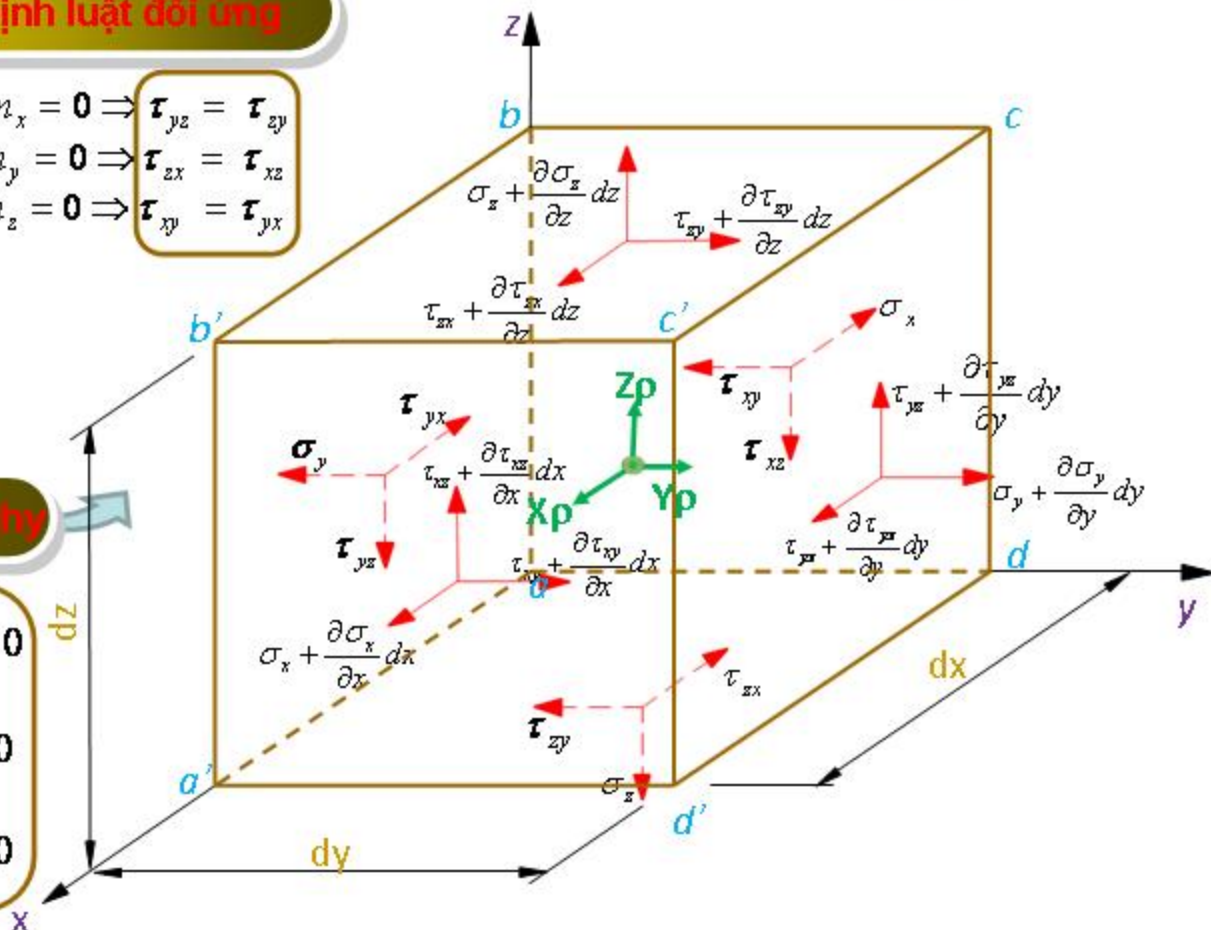
Định luật đối ứng

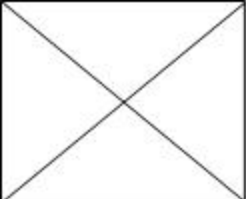
$$\begin{aligned} \Sigma mom_x = 0 &\Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \Sigma mom_y = 0 &\Rightarrow \tau_{zx} = \tau_{xz} \\ \Sigma mom_z = 0 &\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \end{aligned}$$



Phương trình cân bằng Cauchy

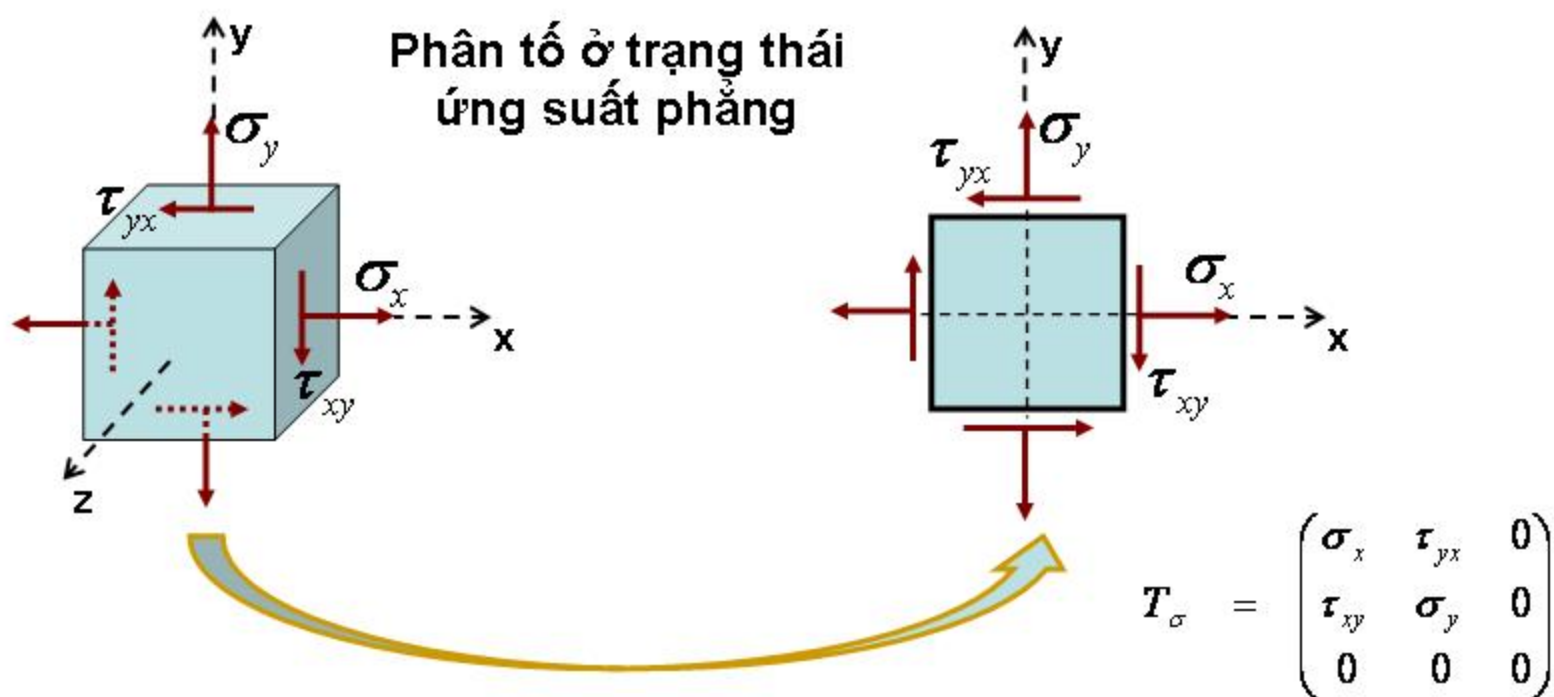
$$\begin{aligned} \Sigma X = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X\rho = 0 \\ \Sigma Y = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y\rho = 0 \\ \Sigma Z = 0 &\Rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z\rho = 0 \end{aligned}$$





BG3.3- Nghiên cứu trạng thái ứng suất

Nghiên cứu trạng thái ứng suất phẳng bằng phương pháp giải tích



Tính đối ứng của ứng suất tiếp.

Viết phương trình cân bằng:

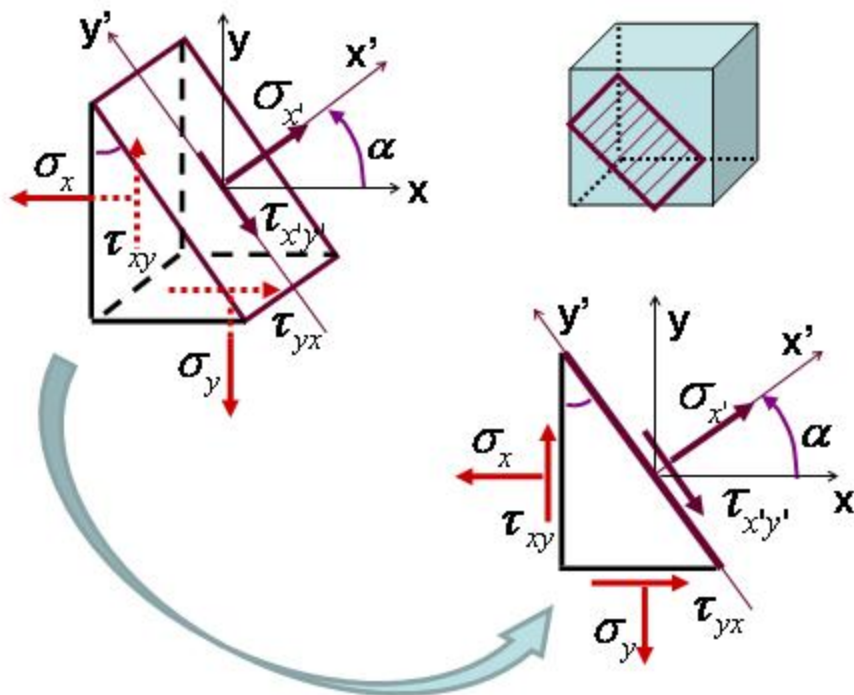
$$\sum mom_z = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Chiều đối ứng

BG3.3- Nghiên cứu trạng thái ứng suất

Nghiên cứu trạng thái ứng suất phẳng bằng phương pháp giải tích

➤ Xác định ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt nghiêng



$$\begin{aligned}\Sigma X' = 0 &\Rightarrow \sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \Sigma Y' = 0 &\Rightarrow \tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha\end{aligned}$$

Thay α bởi $\alpha + 90^\circ$ ta được:

$$\begin{aligned}\sigma_{y'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{y'x'} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha\end{aligned}$$

Chú ý dấu của các thành phần ứng suất và góc α .

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'}$$

Bất biến thứ nhất của trạng thái ứng suất

BG3.3- Nghiên cứu trạng thái ứng suất

Nghiên cứu trạng thái ứng suất phẳng bằng phương pháp giải tích

➤ **Xác định ứng suất chính, mặt chính và phương chính**

Nếu α_0 là góc hợp bởi trục x và phương chính thì:

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0$$

$$\text{tg } 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

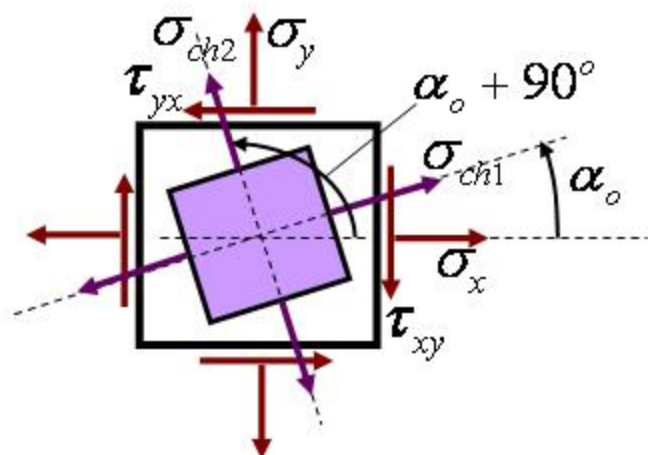
Hai phương chính vuông góc với nhau : $\begin{cases} \alpha_0 \\ \alpha_0 + 90^\circ \end{cases}$

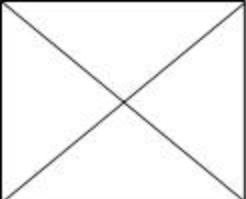
Hai ứng suất chính :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

Chứng minh ứng suất chính là ứng suất pháp cực trị.

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{matrix} \alpha_0 \\ \alpha_0 + 90^\circ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} = \begin{matrix} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{matrix}$$





BG3.3- Nghiên cứu trạng thái ứng suất

Nghiên cứu trạng thái ứng suất phẳng bằng phương pháp giải tích

➤ **Xác định ứng suất tiếp cực trị**

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Pháp tuyến của mặt có ứng suất tiếp cực trị.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

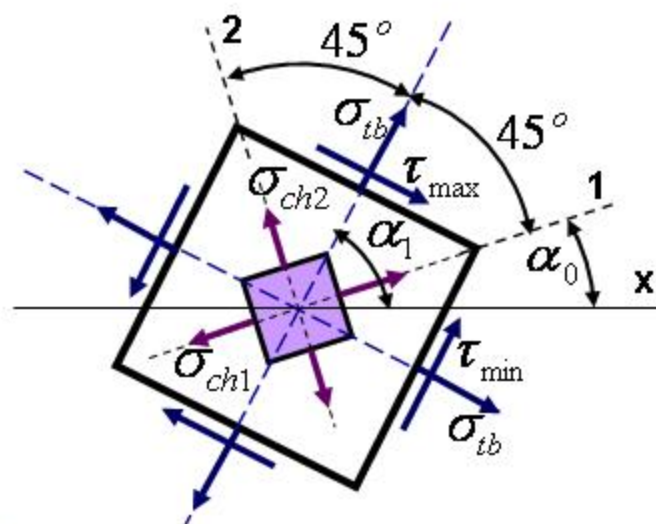
➔ Hai mặt có ứng suất tiếp cực trị vuông góc với nhau : $\begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_1 + 90^\circ \end{cases}$

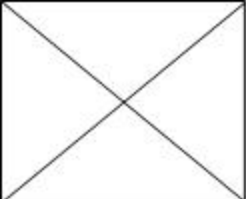
Ứng suất pháp trên mặt có ư.s. tiếp cực trị.

$$\sigma_{tb} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Góc tạo bởi mặt chính và mặt có ứng suất tiếp cực trị.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 \cdot \operatorname{tg} 2\alpha_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_0 + 45^\circ$$



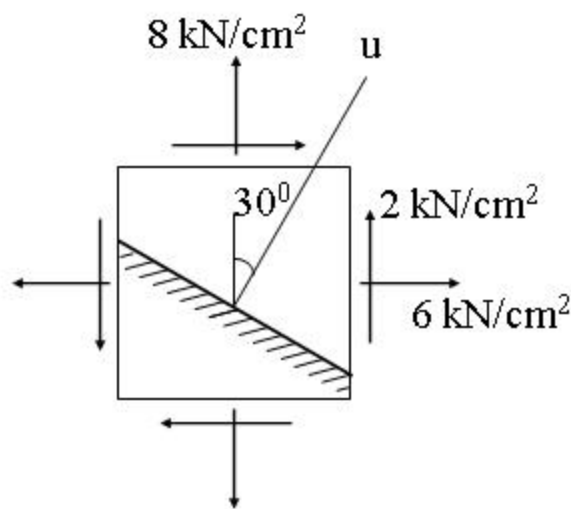


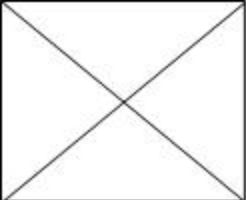
BG3.3- Nghiên cứu trạng thái ứng suất

Nghiên cứu trạng thái ứng suất phẳng bằng phương pháp giải tích

➤ Thí dụ thực hành

1. Tính ứng suất pháp, ứng suất tiếp trên mặt nghiêng?
2. Tính các ứng suất chính và xác định phương chính tương ứng?
3. Tính các ứng suất tiếp cực trị và xác định phương có ứng suất tiếp cực trị tương ứng?





BG3.3- Nghiên cứu trạng thái ứng suất

Nghiên cứu trạng thái ứng suất phẳng bằng phương pháp đồ thị

➤ Khái niệm và ý nghĩa của vòng tròn Mohr ứng suất

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{x'y'} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{x'y'})^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2$$

Ý nghĩa của vòng tròn Mohr ứng suất

Tọa độ của một điểm trên vòng tròn Mohr ứng suất: $(\sigma_{x'}; \tau_{x'y'})$

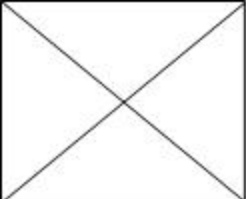
Chính là cặp ứng suất pháp, ứng suất tiếp trên một mặt nghiêng của phân tử tại điểm đang xét.

Vòng tròn Mohr ứng suất

Là phương trình của đường tròn trong hệ tọa độ $\sigma - \tau$ có tâm C.

Tọa độ trọng tâm $C \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; 0 \right)$

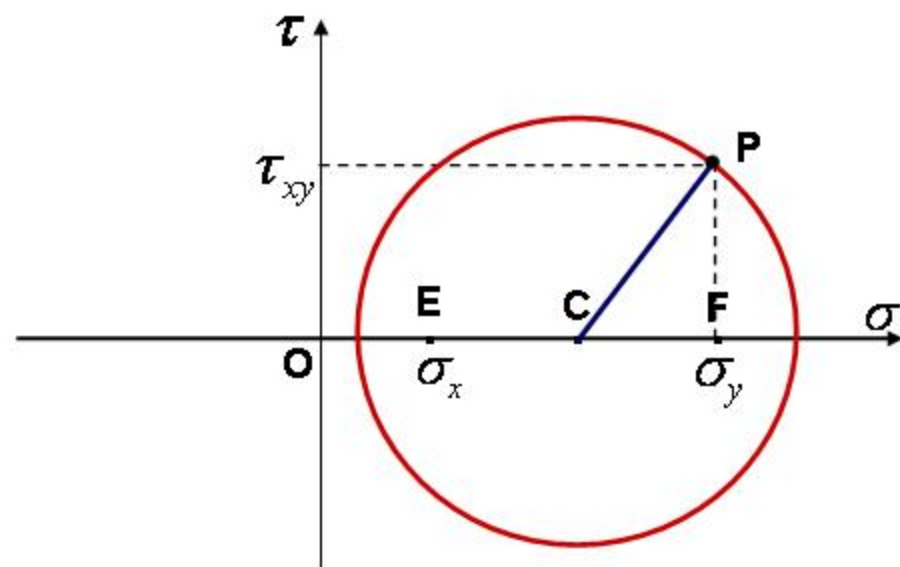
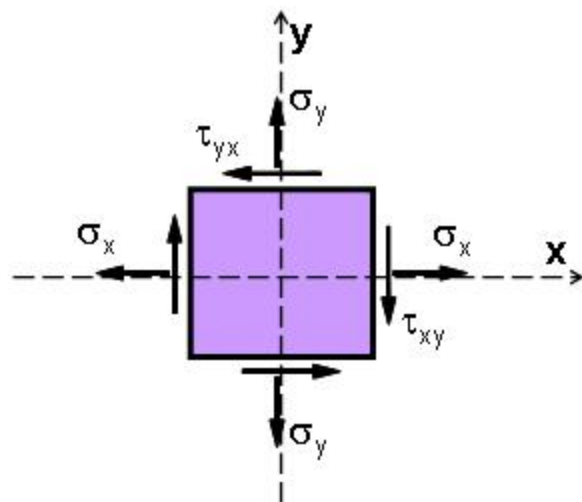
Bán kính: $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + (\tau_{xy})^2}$



BG3.3- Nghiên cứu trạng thái ứng suất

Nghiên cứu trạng thái ứng suất phẳng bằng phương pháp đồ thị

➤ **Cách vẽ vòng tròn Mohr ứng suất**

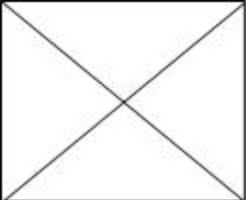


Tâm C của vòng tròn Mohr : $E(\sigma_x; 0)$, $F(\sigma_y; 0)$.
C là điểm giữa của EF

Cực P của vòng tròn Mohr : $P(\sigma_y; \tau_{xy})$

Bán kính vòng tròn Mohr $R = CP$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

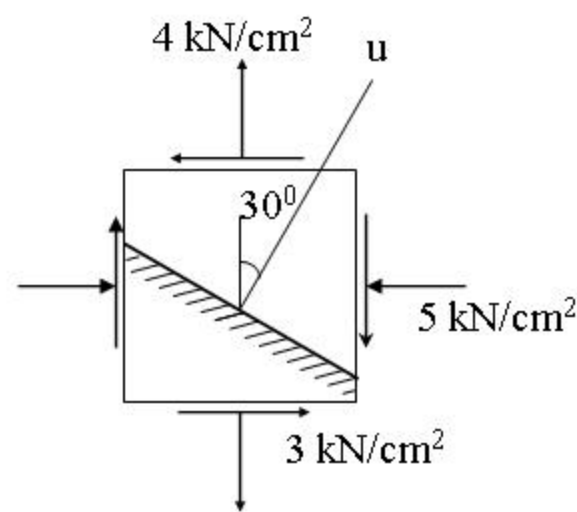


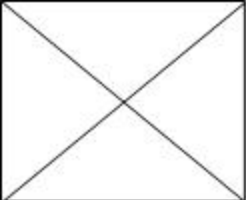
BG3.3- Nghiên cứu trạng thái ứng suất

Nghiên cứu trạng thái ứng suất phẳng bằng phương pháp đồ thị

➤ Thí dụ thực hành

1. Vẽ vòng tròn Mohr ứng suất?
2. Tính ứng suất pháp, ứng suất tiếp trên mặt nghiêng?
3. Tính các ứng suất chính và xác định phương chính tương ứng?
4. Tính các ứng suất tiếp cực trị và xác định phương có ứng suất tiếp cực trị tương ứng?

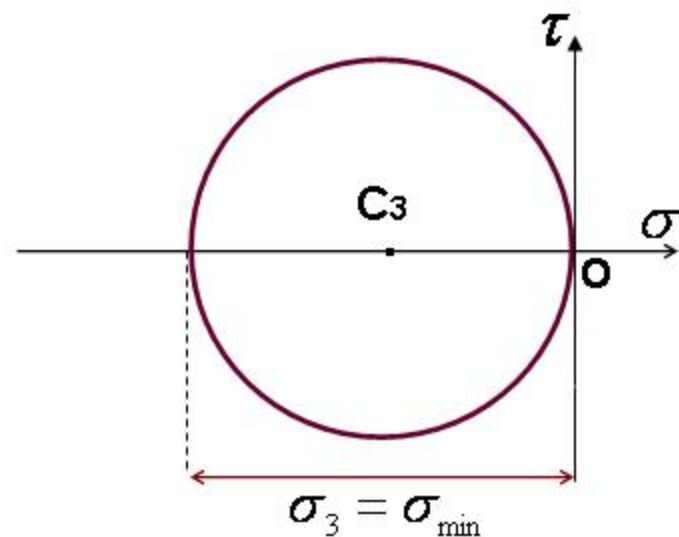
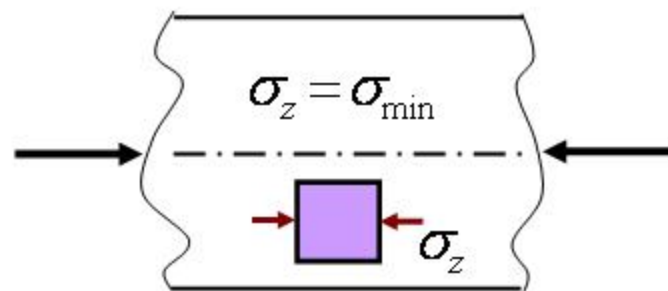
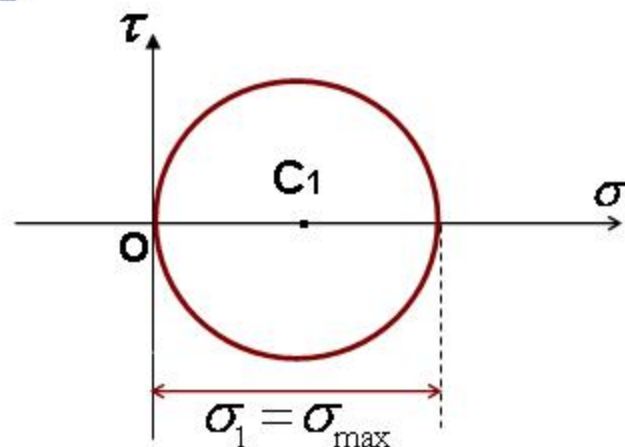
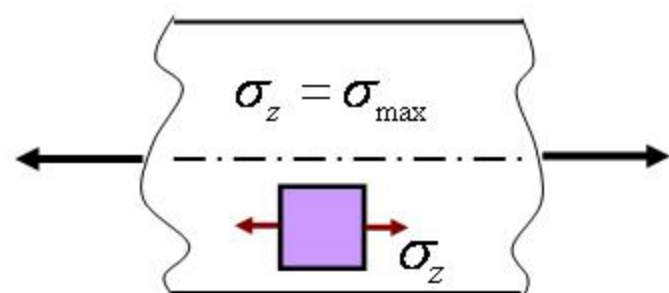


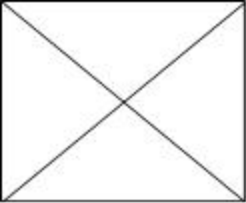


BG3.3- Nghiên cứu trạng thái ứng suất

Một số trường hợp riêng của trạng thái ứng suất phẳng

➤ Trạng thái ứng suất đường

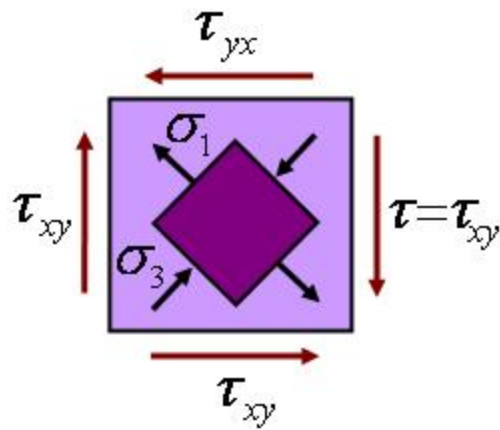
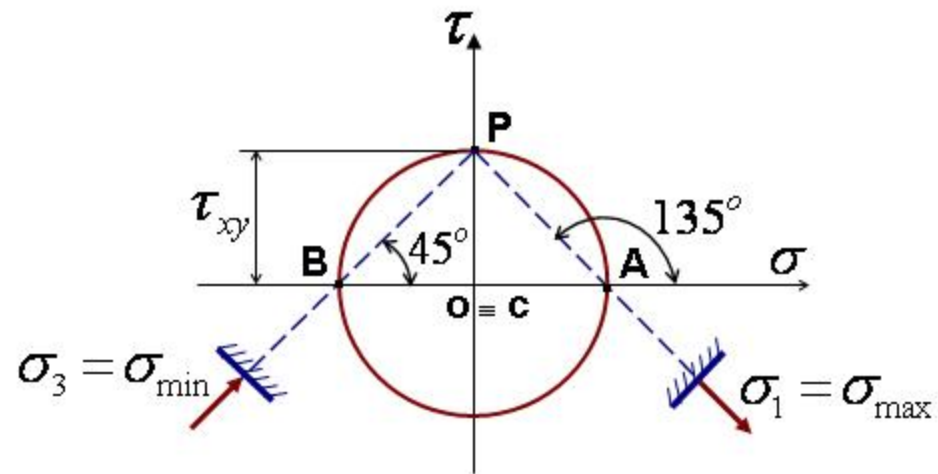
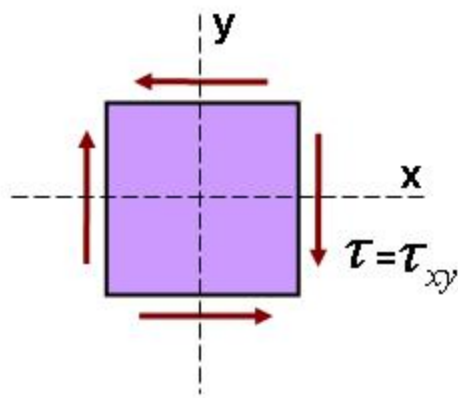




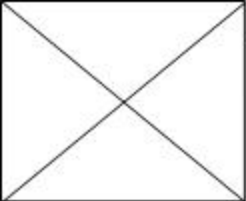
BG3.3- Nghiên cứu trạng thái ứng suất

Một số trường hợp riêng của trạng thái ứng suất phẳng

➤ Trượt thuần túy

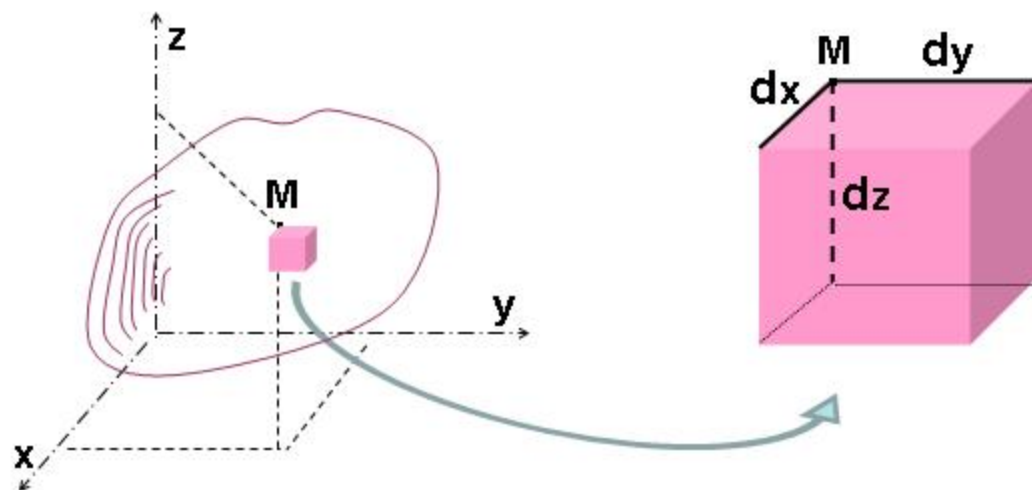


$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \tau_{\max} = -\tau_{\min} = \tau_{xy}$$



BG3.4- Các thành phần biến dạng và khái niệm trạng thái biến dạng

Các thành phần biến dạng



Biến dạng đường tương đối: biểu thị sự thay đổi kích thước phân tử theo ba phương trục tọa độ.

$$\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{dx_l - dx}{dx}$$

$$\epsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = \frac{dy_l - dy}{dy}$$

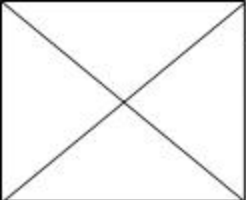
$$\epsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{dz_l - dz}{dz}$$

Biến dạng góc: biểu thị sự thay đổi góc vuông trong từng mặt phẳng tọa độ.

γ_{xy} Sự thay đổi góc vuông trong mặt phẳng xoy

γ_{yz} Sự thay đổi góc vuông trong mặt phẳng yoz

γ_{zx} Sự thay đổi góc vuông trong mặt phẳng zox



BG3.4- Các thành phần biến dạng và khái niệm trạng thái biến dạng

Phương trình biến dạng Cauchy

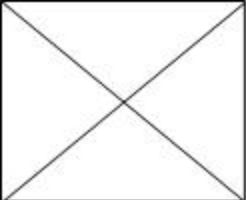
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Các biến dạng góc:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} ; \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} ; \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \gamma_{zx} .$$



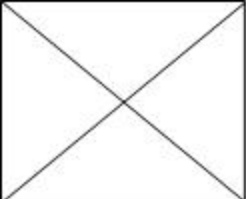
BG3.5- Nghiên cứu trạng thái biến dạng

Tương tự toán học giữa trạng thái ứng suất và trạng thái biến dạng:

| | | | | | | |
|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| Trạng thái ứng suất | σ_x | σ_y | σ_z | τ_{xy} | τ_{yz} | τ_{zx} |
| Trạng thái biến dạng | ε_x | ε_y | ε_z | ε_{xy} | ε_{yz} | ε_{zx} |



**Có thể áp dụng các tính toán của
trạng thái ứng suất cho trạng thái biến dạng**



BG3.5- Nghiên cứu trạng thái biến dạng

Thí dụ một số tính toán trong phân tích trạng thái biến dạng phẳng:

➤ Xác định biến dạng đường và biến dạng góc theo phương xiên

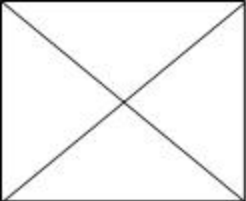
$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha - \varepsilon_{xy} \sin 2\alpha \\ \varepsilon_{x'y'} &= \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \varepsilon_{xy} \cos 2\alpha\end{aligned}$$

➤ Xác định biến dạng chính và phương biến dạng chính:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + (\varepsilon_{xy})^2} = \varepsilon_{\max/\min}$$

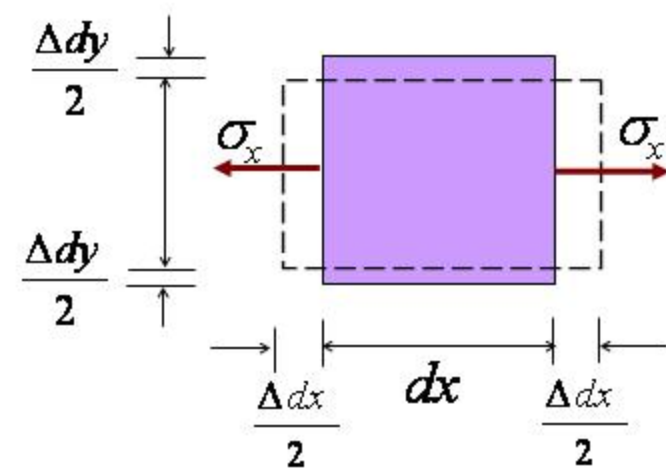
➤ Xác định góc trượt cực trị:

$$\gamma_{\max/\min} = \pm 2 \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + (\varepsilon_{xy})^2}$$



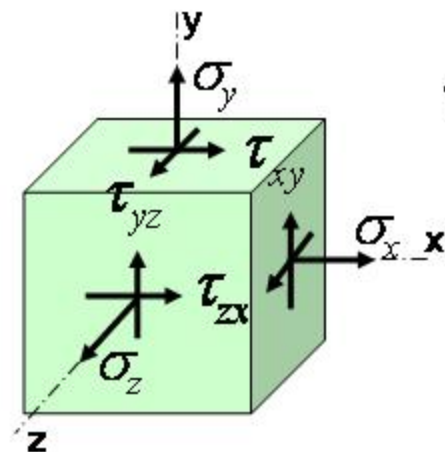
BG3.6- Định luật Hooke

Định luật Hooke tổng quát cho trạng thái ứng suất không gian:



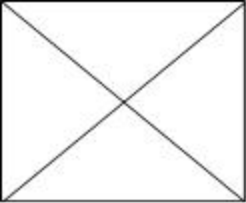
Trạng thái ứng
suất đường

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$
$$\varepsilon_y = -\mu \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$



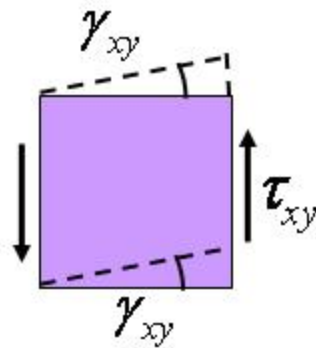
Trạng thái ứng
suất khối

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x) \right]$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right]$$



BG3.6- Định luật Hooke

Định luật Hooke về trượt :



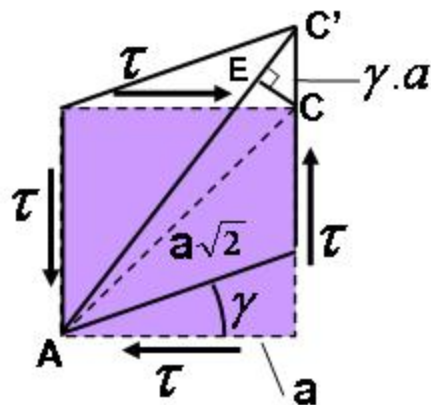
$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$2\varepsilon_{zx} = \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

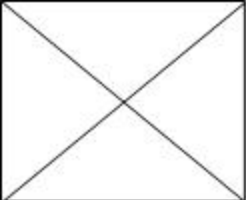
G – mô đun đàn hồi trượt

Quan hệ giữa các hằng số đàn hồi:



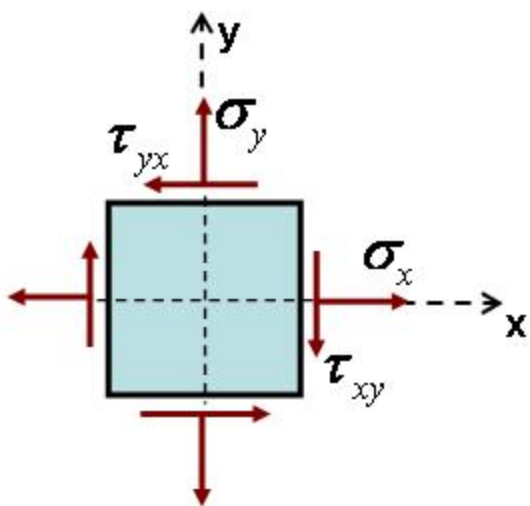
$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{1}{E} (\sigma_{45^\circ} - \mu \sigma_{135^\circ}) = \frac{\tau(1+\mu)}{E} = \frac{EC}{AE} = \frac{EC}{AC} = \frac{CC' \frac{\sqrt{2}}{2}}{AC} = \frac{\gamma}{2}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$



BG3.6- Định luật Hooke

Định luật Hooke cho trạng thái ứng suất phẳng:



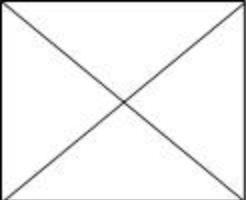
$$\sigma_z = 0; \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0;$$



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x)$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$



BG3.7- Biến đổi thể tích

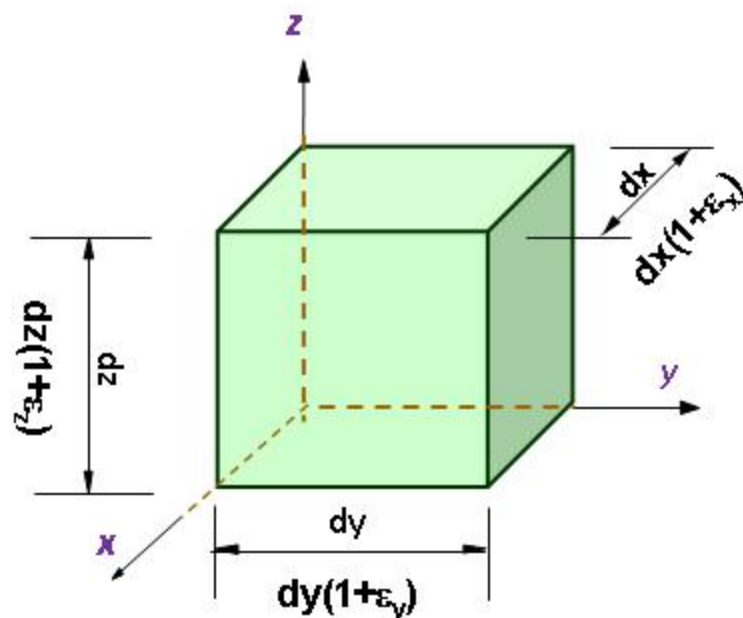
$$dV = dx dy dz$$

$$dV_1 = dx(1+\varepsilon_x) \cdot dy(1+\varepsilon_y) \cdot dz(1+\varepsilon_z)$$

$$dV_1 \approx dx dy dz (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

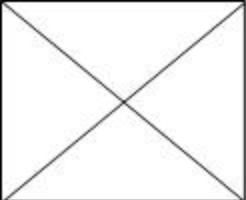
$$\theta = \frac{dV_1 - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$



θ : độ biến đổi thể tích tương đối

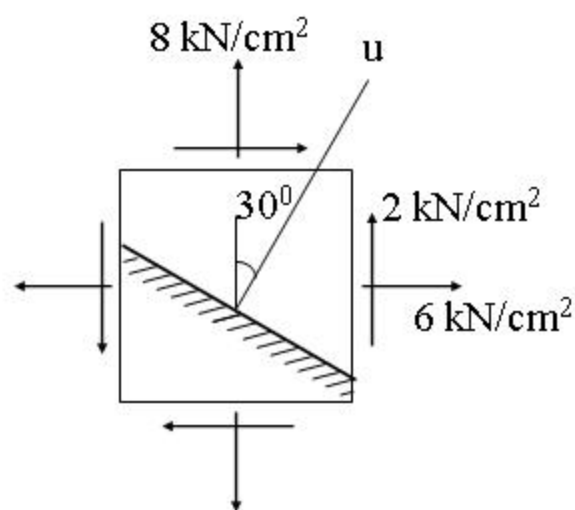
Tại sao μ không
lớn hơn 0,5?



BG3.8- Thực hành tính toán

➤ Thí dụ thực hành

Tính biến dạng đường theo phương x , y , và u .



Biết: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$, $\mu = 0,3$.



BG3.8- Thế năng biến dạng đàn hồi

Các định lý về năng lượng

➤ Định lý Clapeyron

Thế năng biến dạng đàn hồi riêng của phân tố:

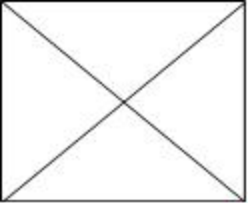
$$u = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

➤ Định lý Castigliano

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x; \quad \frac{\partial u}{\partial \sigma_y} = \varepsilon_y; \quad \frac{\partial u}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z; \quad \frac{\partial u}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}; \quad \frac{\partial u}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz}; \quad \frac{\partial u}{\partial \tau_{zx}} = \gamma_{zx}.$$

➤ Định lý Green

$$\frac{\partial u}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x; \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y; \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z; \quad \frac{\partial u}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}; \quad \frac{\partial u}{\partial \gamma_{yz}} = \tau_{yz}; \quad \frac{\partial u}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx}.$$



Bài tập & Câu hỏi ôn tập



Bài tập về nhà

3.1, 3.2, 3.5, 3.8, 3.9, 3.13, 3.15, 3.16, 3.17, 3.19

Câu hỏi ôn tập

3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.11, 3.12, 3.13, 3.16, 3.17.

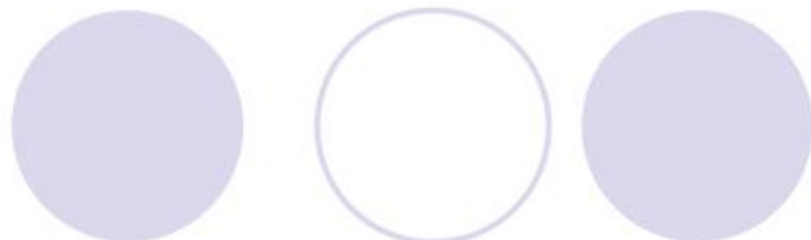


CHƯƠNG 4

Lý thuyết bền



Nội dung chính



- **Đại cương.**
- **Các Lý thuyết bền.**
- **Về việc sử dụng các lý thuyết bền.**

BG1 Đại cương

- **Tính về độ bền** trong trường hợp trạng thái ứng suất đường.

Điều kiện bền theo phương pháp ứng suất cho phép. $\sigma_{\max} \leq [\sigma]$

Trong đó $[\sigma] = \frac{\sigma_o}{n}$

Ứng suất nguy hiểm

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_o = \sigma_{ch} \text{ Vật liệu dẻo.} \\ \sigma_o = \sigma_b \text{ Vật liệu giòn.} \end{array} \right.$$

σ_o xác định bằng thí nghiệm kéo, nén phá huỷ mẫu vật liệu.



Trạng thái ứng suất đường giới hạn.

- **Trường hợp trạng thái ứng suất phức tạp.**

- * **Rất khó** thực hiện T.N các mẫu thử ở **trạng thái ứng suất khối.**
- * **Số lượng** T.N phải làm rất lớn đáp ứng các **tỉ số khác nhau của ứng suất chính.**



Việc làm thí nghiệm xác định **trạng thái ứng suất giới hạn** tương ứng là rất hạn chế

Lý thuyết bền
(tiêu chí bền)



- * Giả thuyết về nguyên nhân phá huỷ vật liệu.
- * Đánh giá về độ bền cho vật liệu chịu tác dụng của trạng thái ứng suất phức tạp.

BG2 Các lý thuyết bền.

1. Lý thuyết **biến dạng dài lớn nhất** (L.T bền thứ hai – Tiêu chí Mariotte).

$$\epsilon_{\max} \leq \epsilon_{gh}^d$$



$$\sigma_{td2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

Lý thuyết này phù hợp nhiều với vật liệu giòn.

2. Lý thuyết **ứng suất tiếp lớn nhất** (L.T bền thứ ba – Tiêu chí Tresca – Saint venant).

$$\tau_{\max} \leq \tau_{gh}^d$$



$$\sigma_{td3} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

Lý thuyết thứ ba phù hợp nhiều với vật liệu dẻo.

3. Lý thuyết **thế năng biến đổi hình dáng lớn nhất**
(L.T bền thứ tư – Tiêu chí Huber-Von Mises).

$$u_{HD} \leq u_{HDgh}^d$$



$$\sigma_{td4} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma]$$

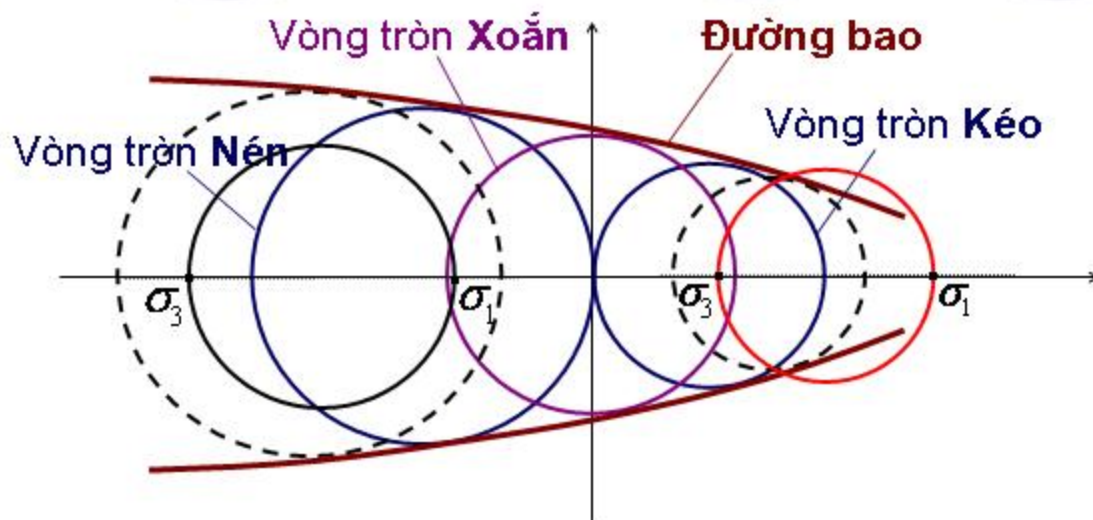
Lý thuyết thứ tư cũng phù hợp với vật liệu dẻo và so với thực tế thì nó phù hợp hơn so với lý thuyết bền thứ ba.

4. Lý thuyết bền Mohr (Tiêu chí Mohr).

4. Lý thuyết bền Mohr (Tiêu chí Mohr).

Các thí nghiệm phá huỷ vật liệu ở trạng thái ứng suất phức tạp.

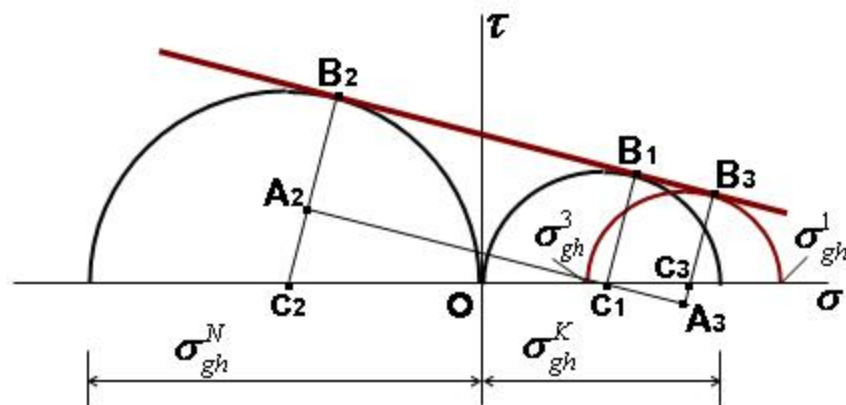
Vẽ các vòng tròn chính $\sigma_1 - \sigma_3$



Đường bao gần đúng vẽ dựa vào ba vòng tròn **Kéo**, **Nén** và **Xoắn**.

Đường bao gần đúng vẽ theo hai vòng tròn **Kéo** và **Nén**.

$$\sigma_{tdMo} = \sigma_1 - \frac{\sigma_o^K}{\sigma_o^N} \sigma_3 \leq [\sigma]$$



BG3 Việc sử dụng các lý thuyết bền.

- Phụ thuộc vào vật liệu
- Phụ thuộc vào quy trình

Bài tập ứng dụng.

Hình hộp lập phương cạnh $a = 20\text{cm}$

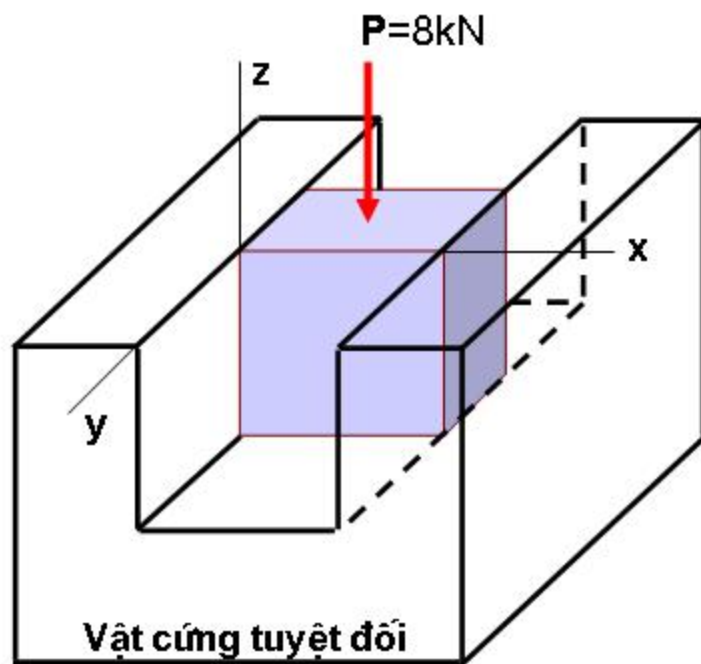
1) Tính các ứng suất chính của trạng thái ứng suất trong hộp. Bỏ qua ma sát giữa các mặt tiếp xúc. Biết các hằng số đàn hồi của vật liệu :

$$E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2; \mu = 0,25$$

2) Tính thể tích của hình hộp sau khi biến dạng.

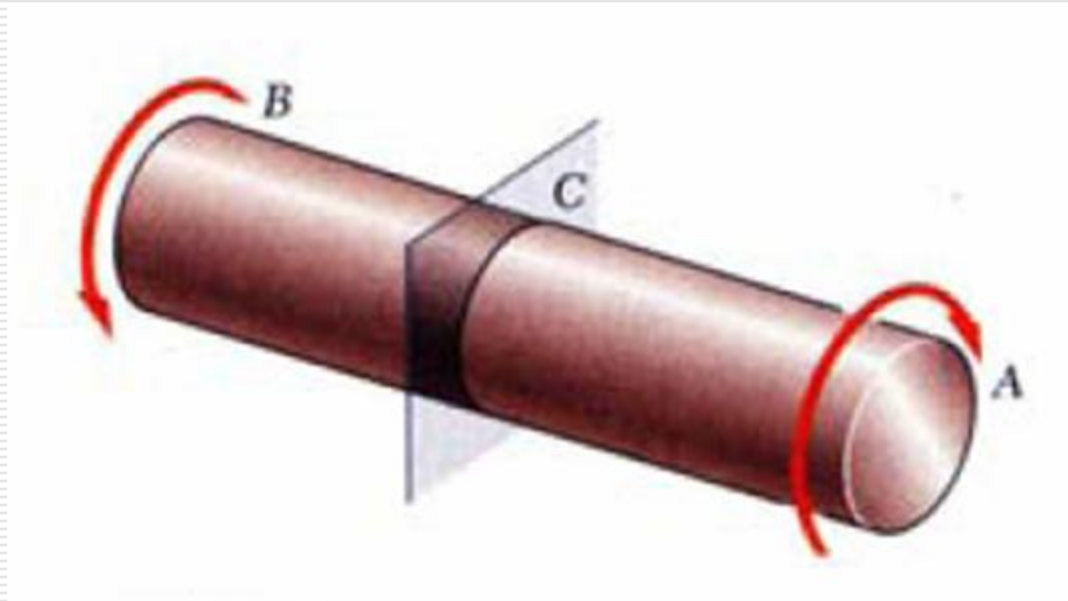
3) Kiểm tra bền cho vật liệu hộp. Sử dụng lý thuyết bền thứ tư với ứng suất cho phép là

$$[\sigma] = 1600 \text{ daN/cm}^2$$



Chương 6

XOẮN THUẦN TÚY THÀNH THẲNG

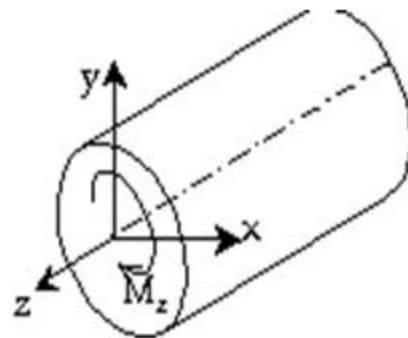
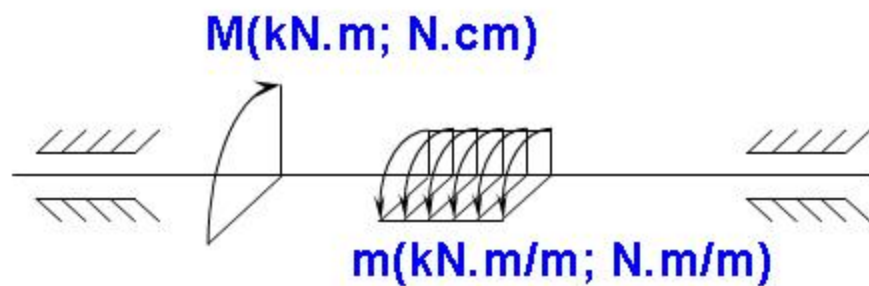
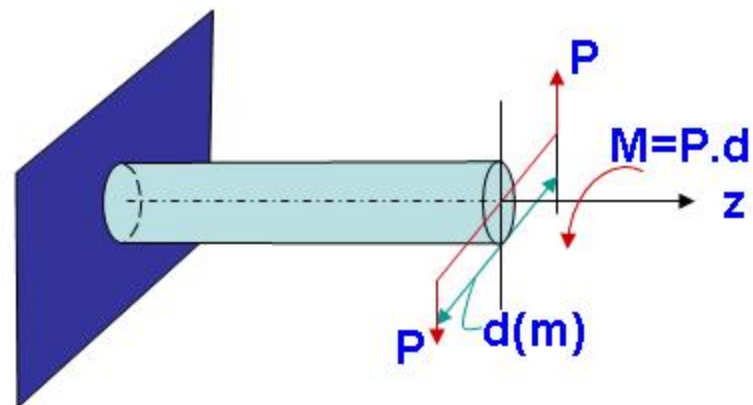
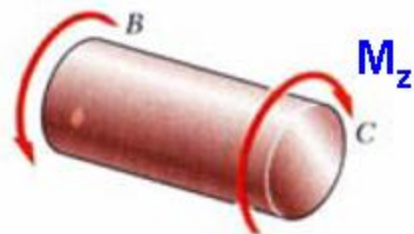
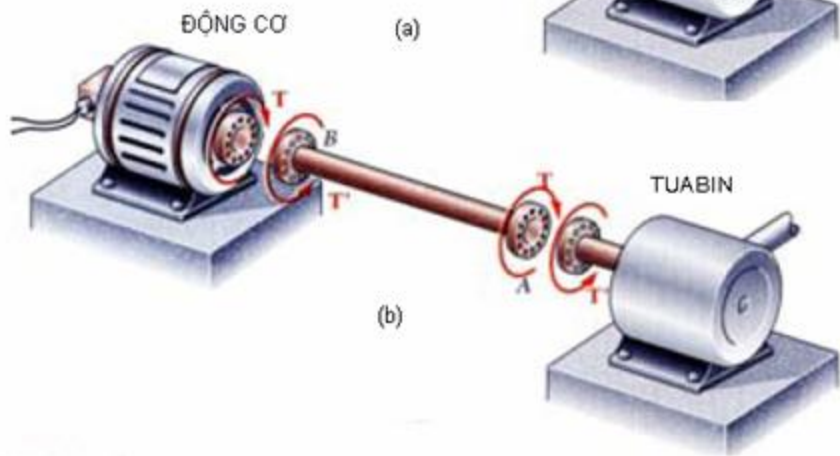
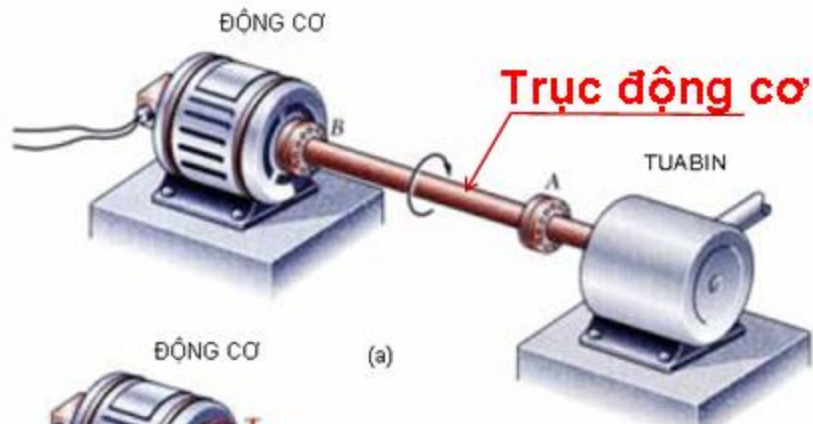


NỘI DUNG CHÍNH

- 1. Nội lực – biểu đồ nội lực.**
- 2. Ứng suất trong trục tròn xoắn thuần túy.**
- 3. Biến dạng trục tròn xoắn thuần túy.**
- 4. Tính về độ bền và độ cứng trục tròn xoắn thuần túy.**
- 5. Thế năng biến dạng đàn hồi trong xoắn.**
- 6. Bài toán xoắn siêu tĩnh.**
- 7. Ứng suất và biến dạng của thanh có mặt cắt ngang hình chữ nhật chịu xoắn.**

I. Định nghĩa-Nội lực.

1. Nội lực Trên mặt cắt ngang chỉ có một thành phần nội lực là mô men xoắn M_z tác dụng.

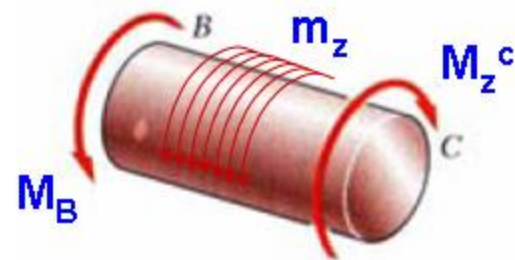
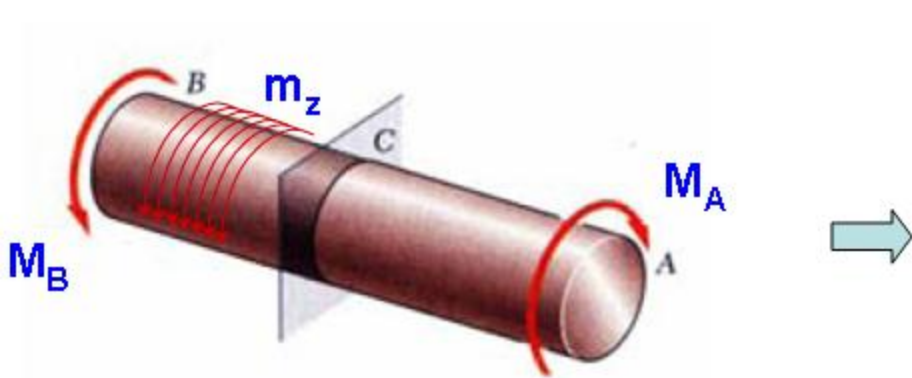


$$M_z \neq 0$$

$$Q_y = 0$$

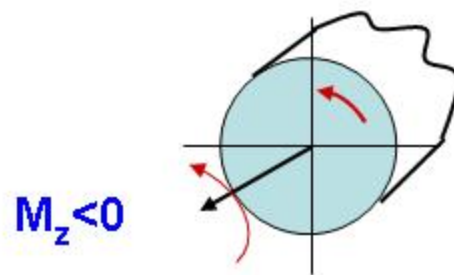
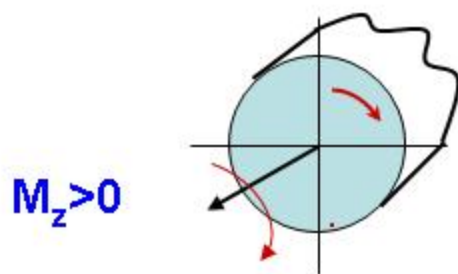
$$N_z = 0$$

2. Tính nội lực: phương pháp mặt cắt



$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_z^C = M_B + \int_{BC} m_z dz$$

3. Quy ước dấu nội lực:



I. Định nghĩa-Nội lực.

4. Biểu đồ mô men xoắn: Là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của nội lực M_z trên các mặt cắt ngang của trục thanh.

Trình tự vẽ:

Bước 1- Tính phản lực liên kết

Bước 2- Chia đoạn tại các vị trí có M, cường độ m thay đổi

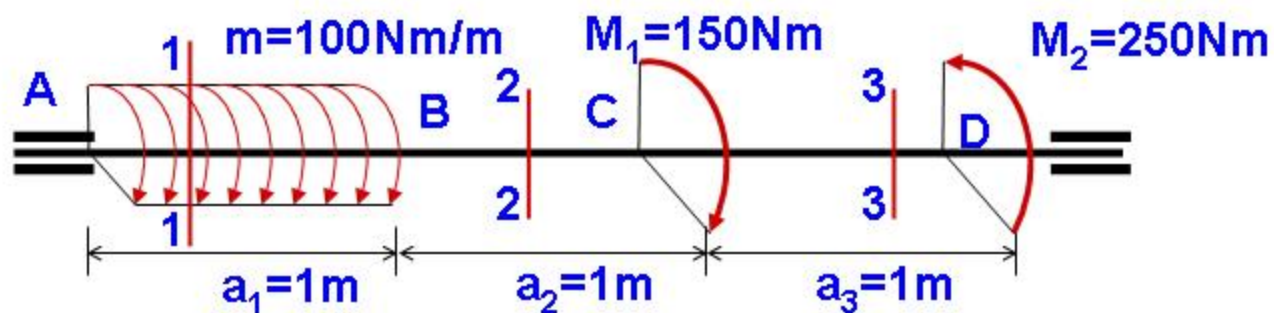
Bước 3- Tính nội lực cho từng đoạn : $M_z=f(z)$

Dùng mặt cắt. Xét cân bằng một bên.

Bước 4 - Vẽ biểu đồ nội lực

I. Định nghĩa-Nội lực.

Ví dụ 1: Vẽ biểu đồ nội lực của trục bị xoắn như sau.



Giải

B1: Tính phản lực nếu cần

B2: Chia đoạn: AB, BC, CD

B3: Xét từng đoạn:

AB: $M_z^{1-1} = m \cdot z_1$ (gốc tại A)

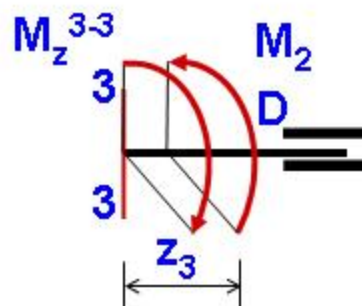
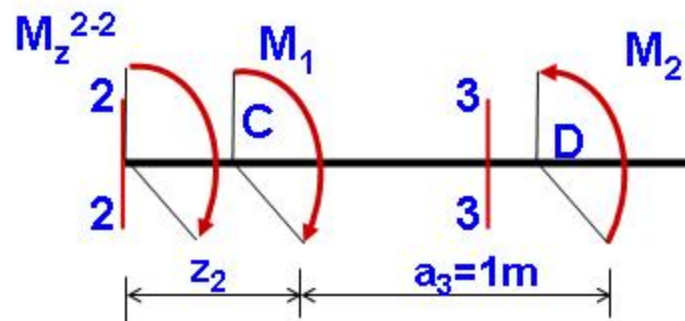
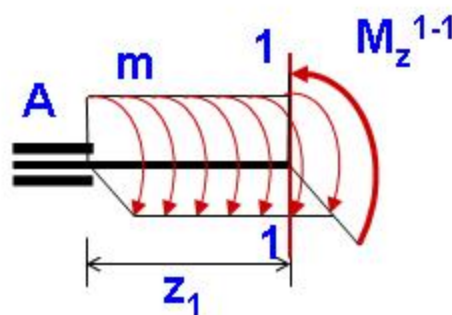
Tại A: $M_z^{1-1} = 0$

Tại B: $M_z^{1-1} = 100 \cdot 1 = 100$ (Nm)

BC: $M_z^{2-2} = 250 - 150 = 100$ (Nm)

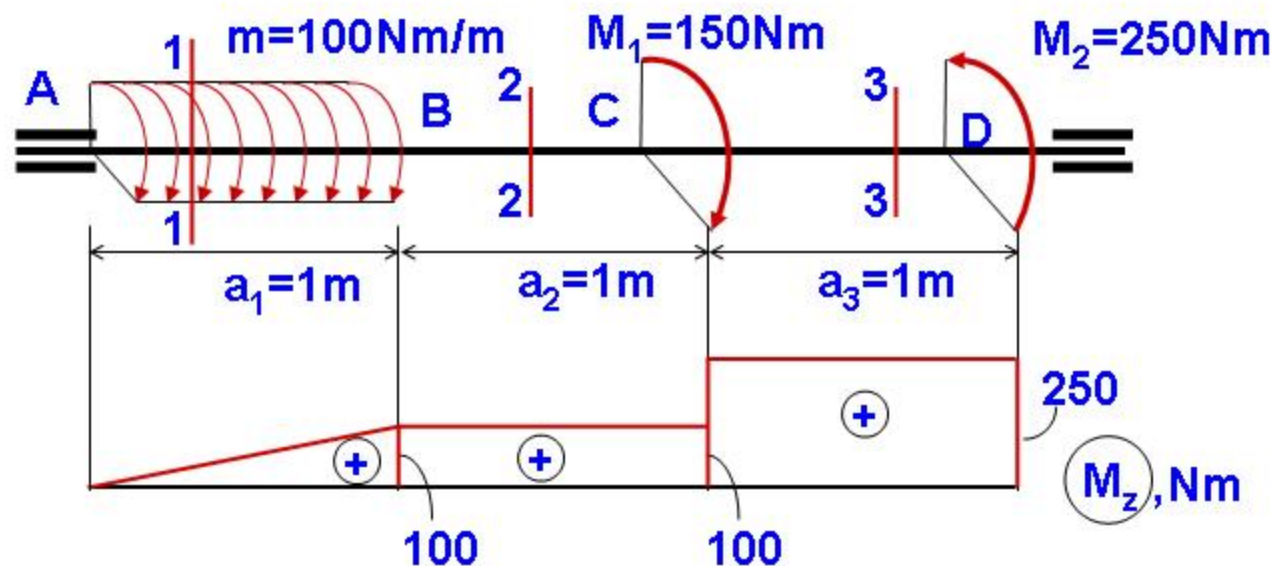
CD: $M_z^{3-3} = 250$ (Nm)

B4: Vẽ biểu đồ



I. Định nghĩa-Nội lực.

Vẽ biểu đồ nội lực:



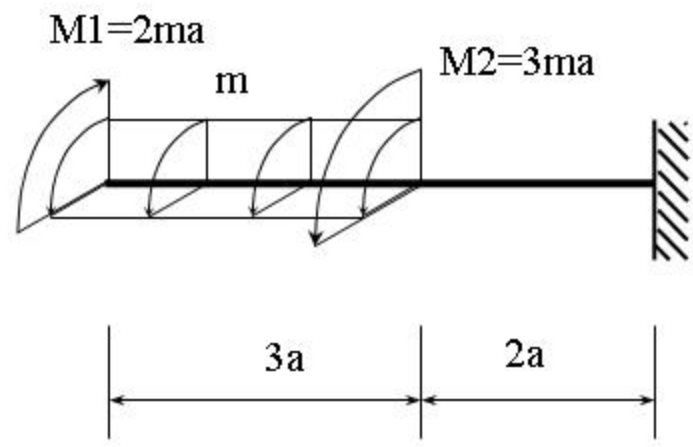
Nhận xét:

+ $m=0 \rightarrow$ biểu đồ M_z là hằng số

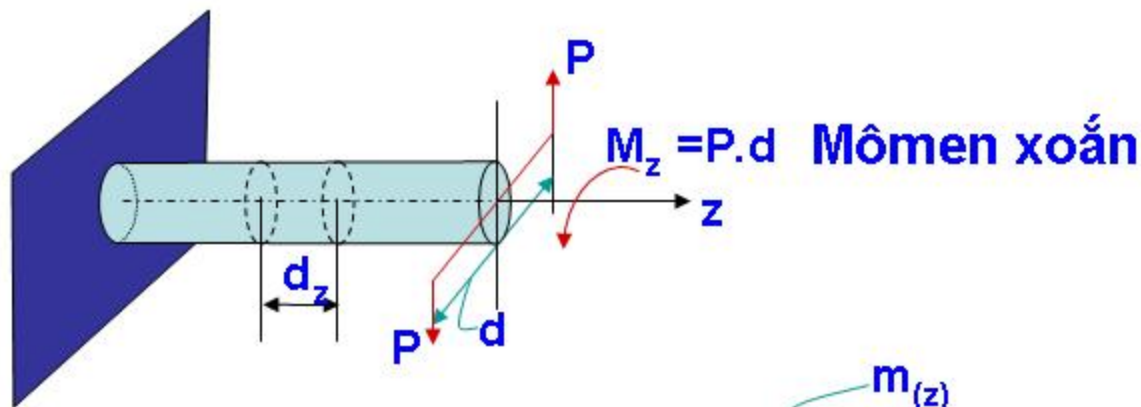
+ $m=hs \rightarrow$ biểu đồ M_z là bậc 1.

+ Tại vị trí có mômen tập trung \rightarrow biểu đồ M_z có bước nhảy

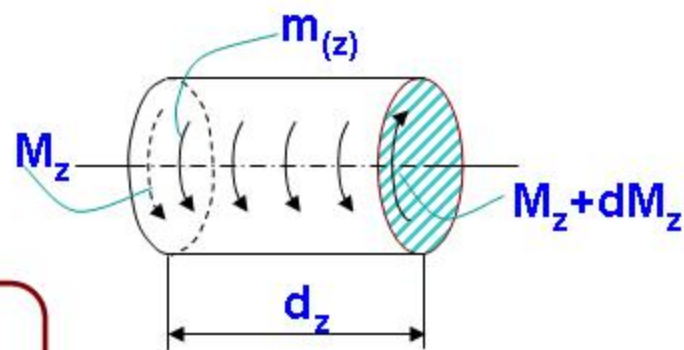
Ví dụ 2: Vẽ biểu đồ nội lực của trục bị xoắn như sau.



5. Quan hệ vi phân giữa ngoại lực xoắn phân bố $m_{(z)}$ với mô men xoắn M_z



Xét phân tử dz



$$\sum M_z = 0 \Rightarrow m_{(z)} = \frac{dM_z}{dz}$$

⇒ Đạo hàm của mô men xoắn bằng ngoại lực xoắn phân bố

II. Ứng suất trên mặt cắt ngang trục tròn bị xoắn thuần túy

1) Quan sát thực nghiệm – Giả thiết.

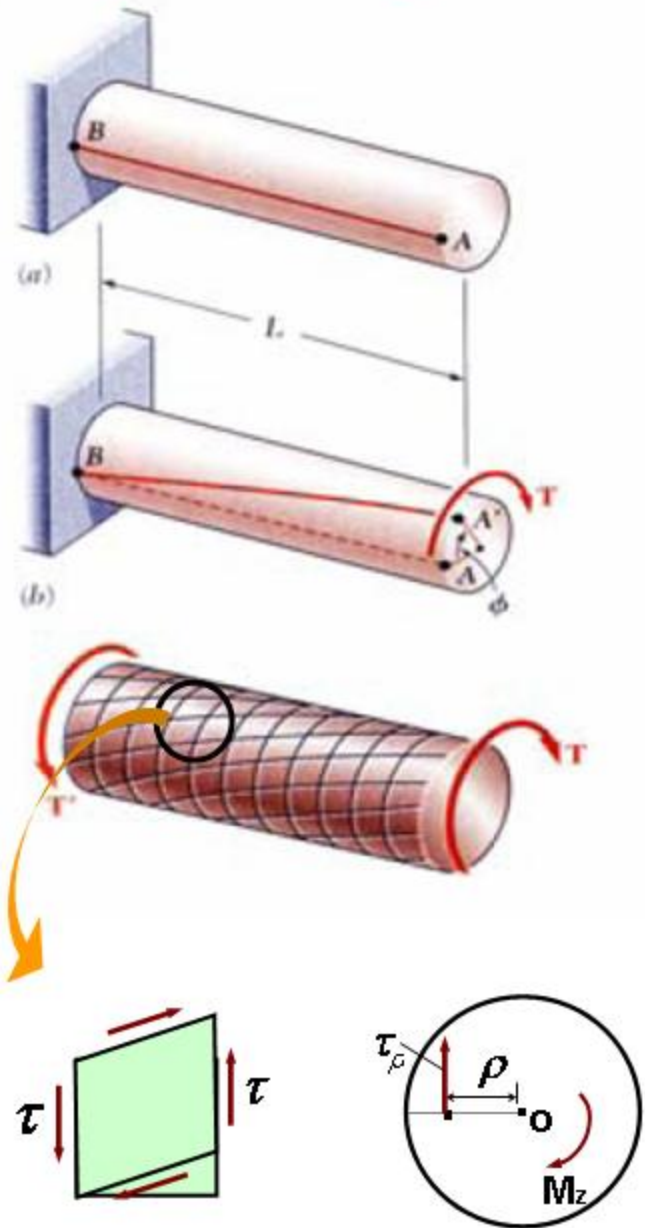
* **Thí nghiệm:**

* **Giả thiết:**

- Mặt cắt phẳng
- Bán kính thẳng và có chiều dài không đổi.
- Trục thanh thẳng và có chiều dài không đổi trước và sau khi biến dạng.

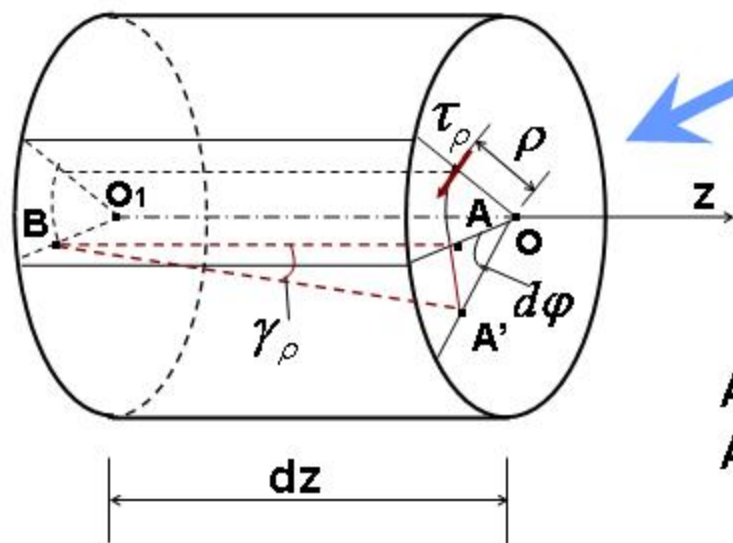
* **Phân tích ứng suất :**

Tại một điểm trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất tiếp τ_ρ tác dụng vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.



2) Thành lập công thức tính ứng suất.

- Tách đoạn trục dz , xét điều kiện biến dạng.



$$\left. \begin{array}{l} AA' = \rho \cdot d\varphi \\ AA' = \gamma_{\rho} \cdot dz \end{array} \right\} \Rightarrow \gamma_{\rho} = \rho \frac{d\varphi}{dz} \quad (1)$$

- Định luật Hooke trong trượt thuần túy.

$$\tau_{\rho} = G \cdot \gamma_{\rho} \quad (2)$$

- Điều kiện cân bằng.

$$M_z = \int_F \tau_{\rho} \cdot \rho \cdot dF \quad (3)$$

- Kết hợp (1),(2),(3) :

$$M_z = \int_F G \cdot \frac{d\varphi}{dz} \cdot \rho^2 \cdot dF = \frac{d\varphi}{dz} GJ_0$$

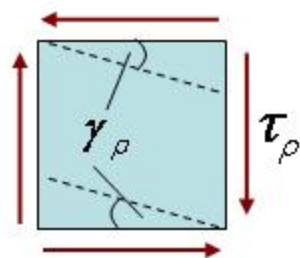
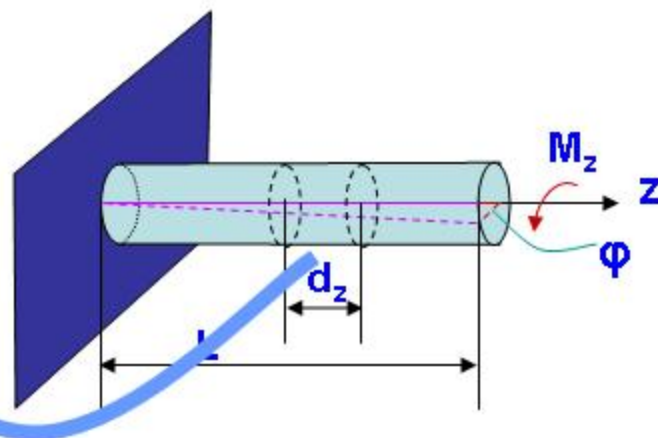
$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_0} \quad (4)$$

θ : gọi là góc xoắn tỉ đối.

- Kết hợp (1),(2),(4) :

$$\frac{\gamma_{\rho}}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_0}$$

$$\frac{\tau_{\rho}}{G\rho} = \frac{M_z}{GJ_0} \Rightarrow \tau_{\rho} = \frac{M_z}{J_0} \rho \quad (5)$$

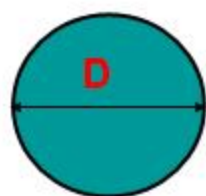


- ứng suất tiếp cực trị tại các điểm trên chu vi ngoài mặt cắt.

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_o} \cdot \rho_{\max} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_o}$$

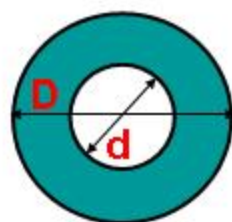
Đặt : $W_o = \frac{J_o}{\rho_{\max}}$ **Mômen chống xoắn**

Hình tròn



$$W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$$

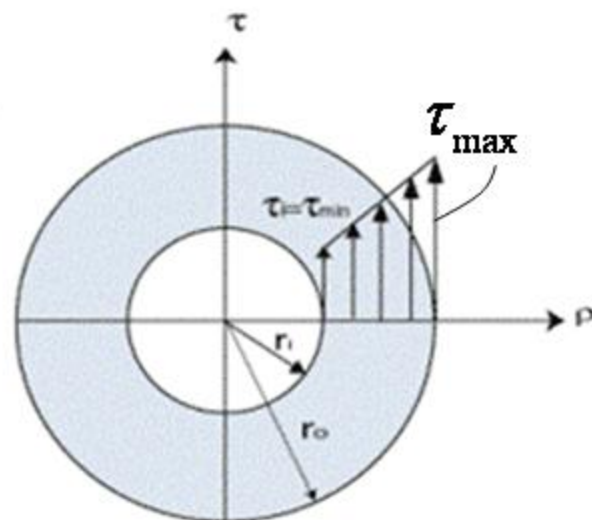
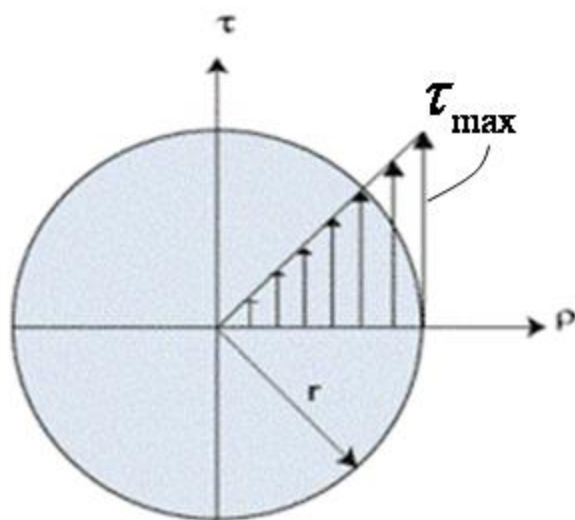
Hình vành khăn



$$W_o = \frac{\pi \cdot D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

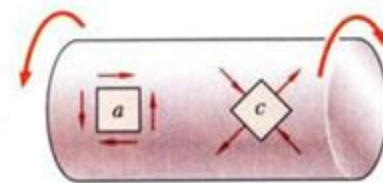
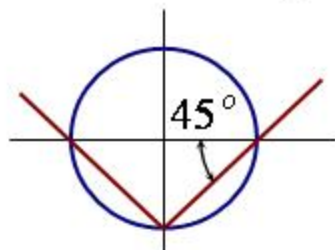
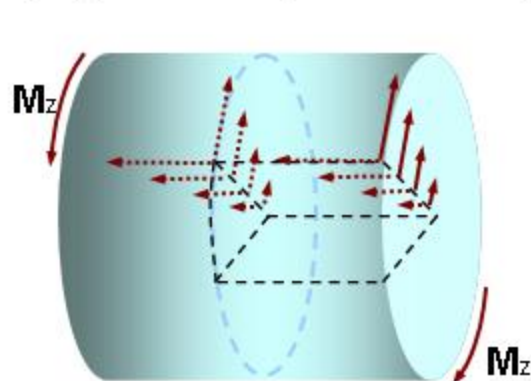
$$\alpha = \frac{d}{D}$$

- Phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang.



III. Trạng thái ứng suất

* Trạng thái ứng suất trong xoắn thuần túy.



$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min} = \tau_{\max} = -\tau_{\min}$$

T.T ứng suất
trượt thuần túy

* Dạng phá hủy của trục khi làm bằng các vật liệu khác nhau.

45°



Xương



Vật liệu giòn



Nhôm



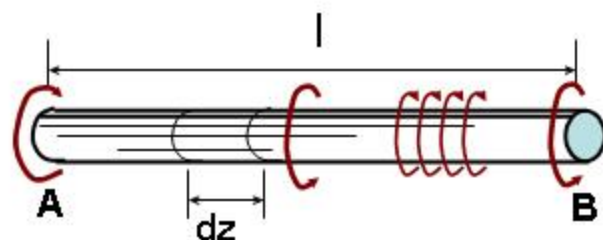
Vật liệu dẻo

III. Biến dạng trục tròn chịu xoắn

-Tách đoạn trục dz .

$d\varphi$ là góc xoắn tương đối giữa hai đầu đoạn.

Theo (4):
$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_o} \rightarrow \varphi = \int_l d\varphi = \int_l \frac{M_z}{GJ_o} dz$$



- Trường hợp tổng quát M_z và J_o biến thiên trên nhiều đoạn. Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt đầu trục

$$\varphi_{AB} = \sum \int_{l_i} \frac{M_z^i}{GJ_o^i} dz$$

- Nếu $\frac{M_z}{G.J_o}$ là hằng số trên chiều dài l : $\varphi_{AB} = \frac{M_z l}{GJ_o}$

$G.J_o$: Độ cứng chống xoắn đơn vị
 $\frac{G.J_o}{l}$: Độ cứng chống xoắn trục

- Góc xoắn tỷ đối θ là góc xoắn tương đối giữa 2 mặt cắt ngang cách nhau 1 đơn vị chiều dài.

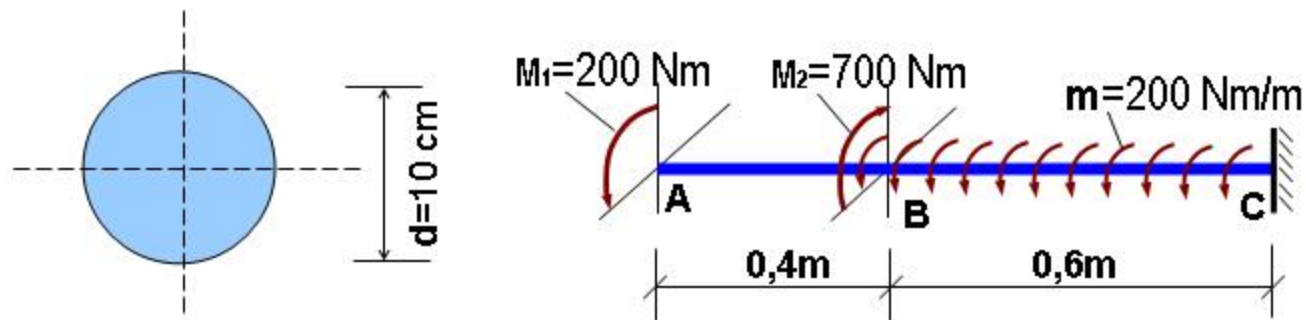
$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_o}$$



Cường độ biến dạng xoắn tại từng mặt cắt trên trục

Ví dụ thực hành.

Một trục bị xoắn như hình vẽ.



- 1) Vẽ biểu đồ nội lực trên trục.
- 2) Tính ứng suất tiếp cực đại trên trục.
- 3) Tính góc xoắn tại mặt cắt đầu tự do. Biết $G = 8 \cdot 10^3 \text{ kN/cm}^2$

IV. Thế năng biến dạng đàn hồi của thanh bị xoắn

* Trường hợp thanh có nội lực và mặt cắt **biến đổi liên tục** trên từng đoạn.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_z^2}{GJ_o} dz$$

* Trường hợp thanh có nội lực và mặt cắt **không đổi** trên từng đoạn.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{M_{zi}^2 l_i}{GJ_o}$$

* Trường hợp l , M_z và GJ_o là **hằng số**:

$$U = \frac{M_z^2 \cdot l}{2 \cdot GJ_o}$$

V. Tính trục tròn về độ bền.

Điều kiện bền:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_o} \leq R_c$$
$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_o} \leq [\tau]$$

R_c cường độ chịu
cắt của vật liệu

$[\tau]$ ứng suất tiếp cho phép.

- Theo lý thuyết bền 3: $R_c = 0,5R$
- Theo lý thuyết bền 4: $R_c = 0,58R$

Ba bài toán cơ bản:

- a./ Kiểm tra bền
- b./ Xác định tải trọng cho phép: $M=?$
- c./ Chọn kích thước mặt cắt ngang: $d=?$

VI. Tính trực tròn về độ cứng.

Điều kiện độ cứng

$$|\theta|_{\max} \leq [\theta]$$



$$\left(\frac{M_z}{GJ_o} \right)_{\max} \leq [\theta]$$

Ba bài toán cơ bản:

- a/ Kiểm tra điều kiện cứng.
- b/ Xác định tải trọng cho phép.
- c/ Chọn kích thước mặt cắt ngang.

Ví dụ:

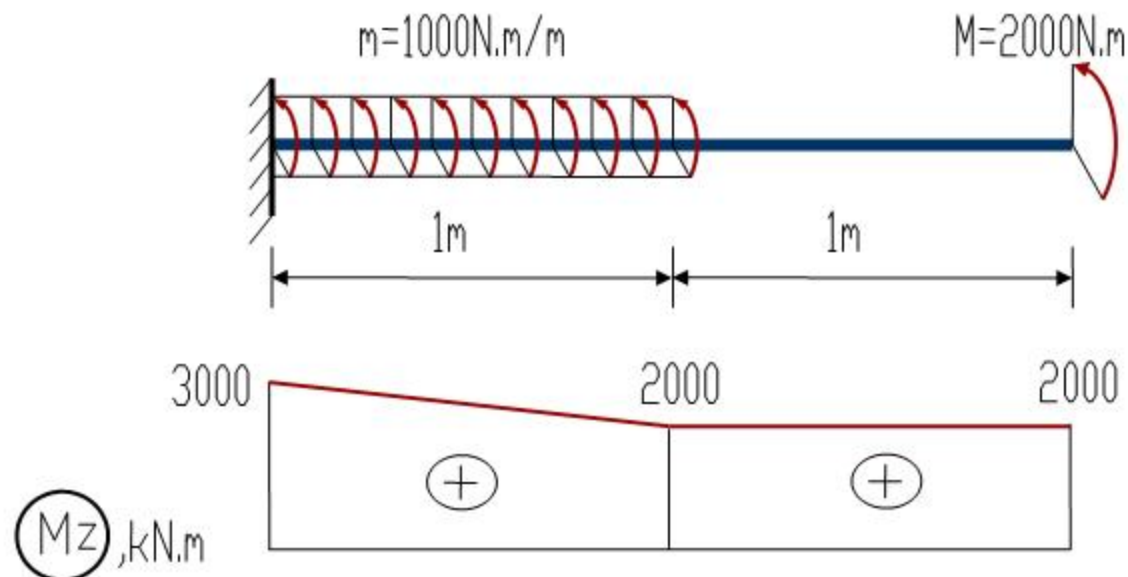
Cho trục tròn **đặc** có đường kính d , $G=8 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2$,

$[\tau]=2000 \text{N/cm}^2$, $[\theta]=0,4^\circ/\text{m}$.

-Vẽ biểu đồ nội lực.

-Tính đường kính trục theo điều kiện bền.

-Kiểm tra độ cứng của trục theo đường kính trên.



$d = 11,6 \text{cm}$; $|\theta|_{\text{max}} = 0,124^\circ/\text{m}$.

Trục đảm bảo điều kiện bền và điều kiện cứng.

VII. Bài toán siêu tĩnh

- Là bài toán có số ẩn lớn hơn số phương trình **cân bằng tĩnh học độc lập**.

Cách giải : Lập thêm phương trình hình học (điều kiện biến dạng).

+ Phương trình c.b tĩnh học:

$$M_A + M_B - M = 0$$

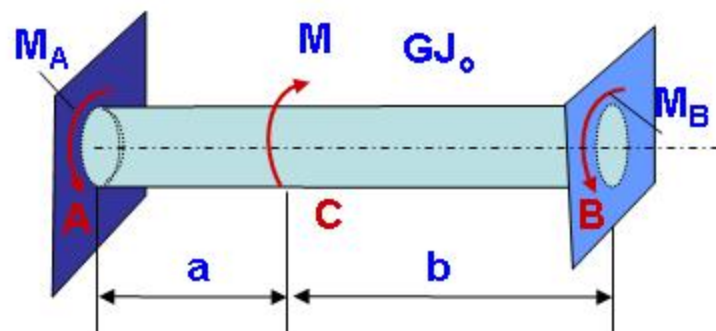
+ Phương trình hình học:

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0$$

- Kết quả:

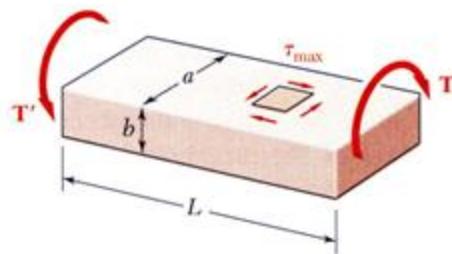
$$M_A = M \frac{b}{a+b}$$

$$M_B = M \frac{a}{a+b}$$



X. Tính độ bền và độ cứng của trục mặt cắt không tròn

+ Mặt cắt hình chữ nhật



+ Ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\tau_{max} = \tau_{yx} = \frac{M_z}{W_{x0}}, \quad W_{x0} = \alpha ab^2$$

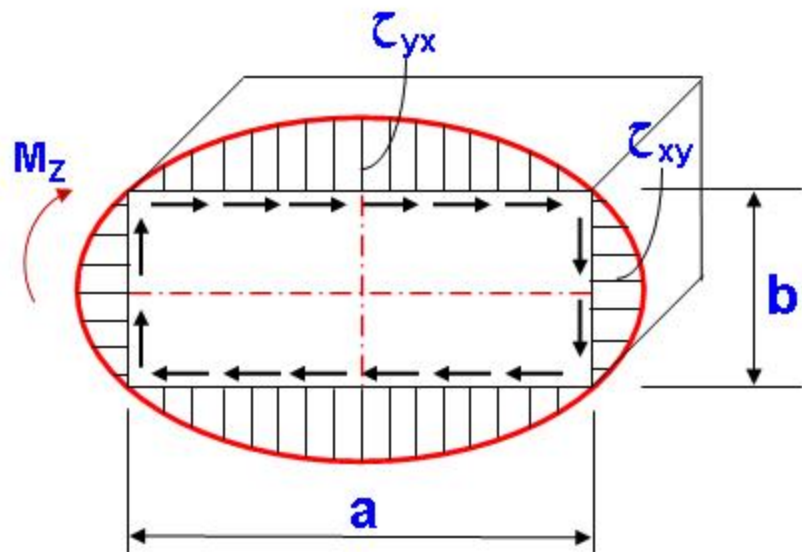
$$\tau_{xy} = \gamma \cdot \tau_{yx}$$

+ Góc xoắn đơn vị:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_{x0}}; \quad J_{x0} = \beta \cdot a \cdot b^3$$

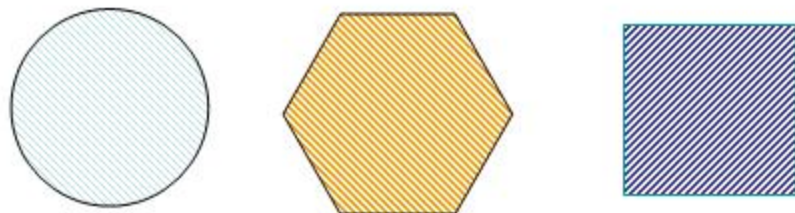
α, γ, β tra bảng theo a/b (SGK tr117)

+ Các mặt cắt thành mỏng: (SGK tr 117)



XI. Mặt cắt ngang chịu xoắn hợp lý

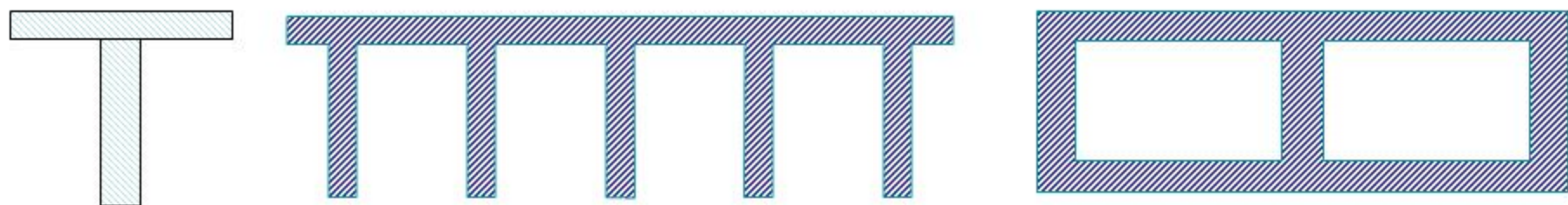
+ Mặt cắt đặc:



+ Mặt cắt đặc và rỗng cùng diện tích thì mặt cắt rỗng hợp lý hơn

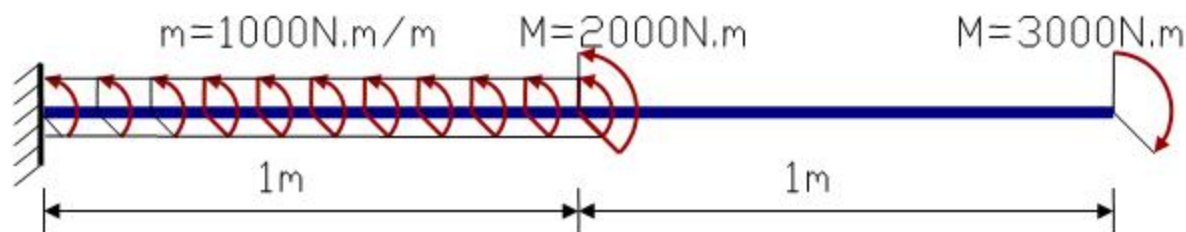


+ Mặt cắt thành mỏng kín hợp lý hơn mặt cắt thành hở



Bài tập thực hành

1. Ý nghĩa của độ cứng chống xoắn?
2. Ứng suất và biến dạng một thanh chịu xoắn thay đổi thế nào khi mặt cắt tròn đặc thay bằng mặt cắt tròn rỗng cùng diện tích?
3. Cho trục tròn rỗng có đường kính $D=10\text{cm}$, $d=8\text{cm}$, $G=8 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2$, $[\tau]=2000 \text{N/cm}^2$, $[\theta]=0,4^\circ/\text{m}$
 - Vẽ biểu đồ nội lực
 - Kiểm tra độ bền và độ cứng của trục tròn.
 - Nếu thanh có mặt cắt tròn thì đường kính là bao nhiêu để đảm bảo điều kiện bền và cứng.
 - Tính góc xoắn của đầu tự do khi đó.



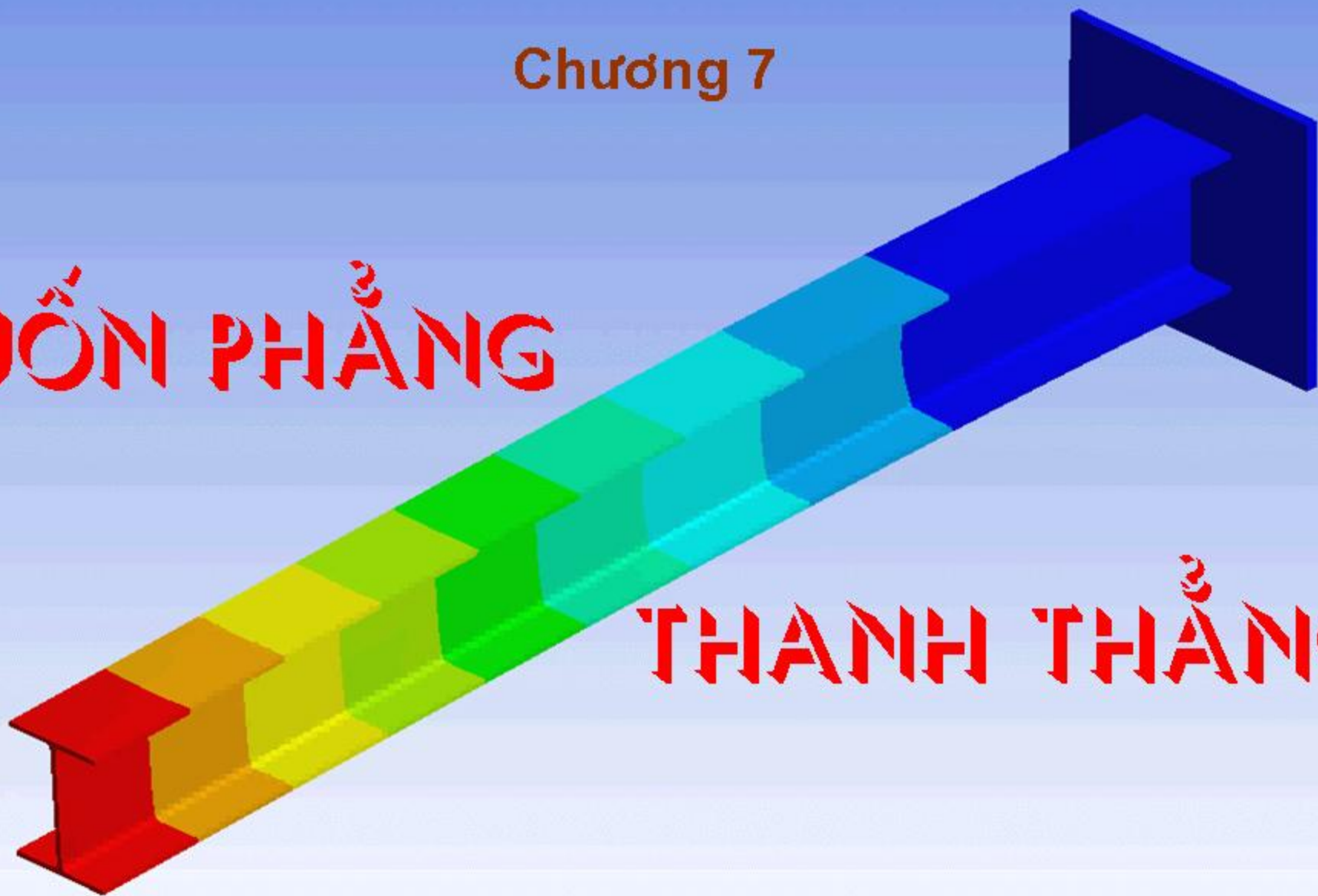
Bài tập chương 6 :

6.1; 6.3; 6.4; 6.5; 6.6; 6.7; 6.8; 6.9; 6.10; 6.14; 6.15; 6.17

Chương 7

UỐN PHẪNG

THANH THẪNG



Đặt vấn đề



Kéo nén đúng tâm



Xoắn thuần túy



Uốn phẳng

Nội dung chính

- I- Một số khái niệm.
- II- Nội lực.
- III- Ứng suất trên mặt cắt ngang dầm.
- IV- Trạng thái ứng suất trong dầm.
- V - Thế năng biến dạng đàn hồi.
- VI- Tính về độ bền của dầm uốn phẳng.
- VII- Dầm có độ bền đều.
- VIII- Tâm uốn.
- IX- Mặt cắt hợp lý của dầm uốn phẳng.

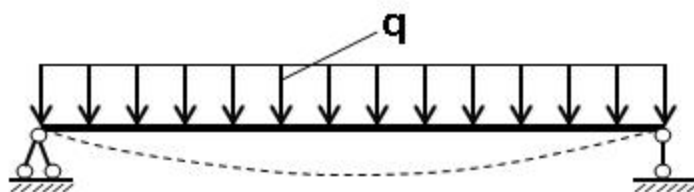
I- Các khái niệm.

a. Biến dạng uốn.

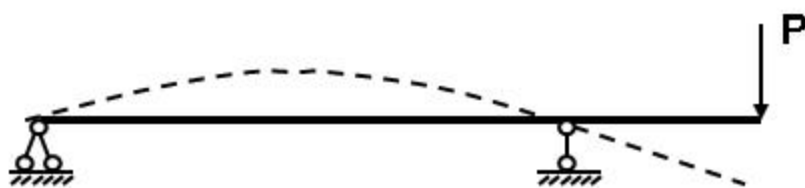
Là biến dạng làm trục thanh bị cong đi. Các thanh bị uốn thường gọi là dầm (khi đặt ngang)



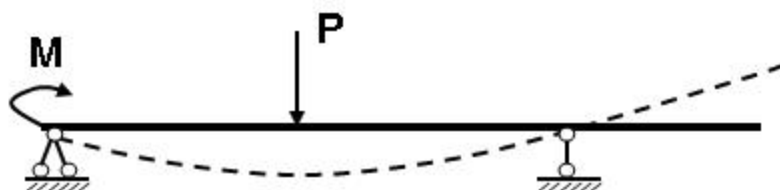
Dầm công xon



Dầm giản đơn



Dầm mút thừa



Dầm mút thừa

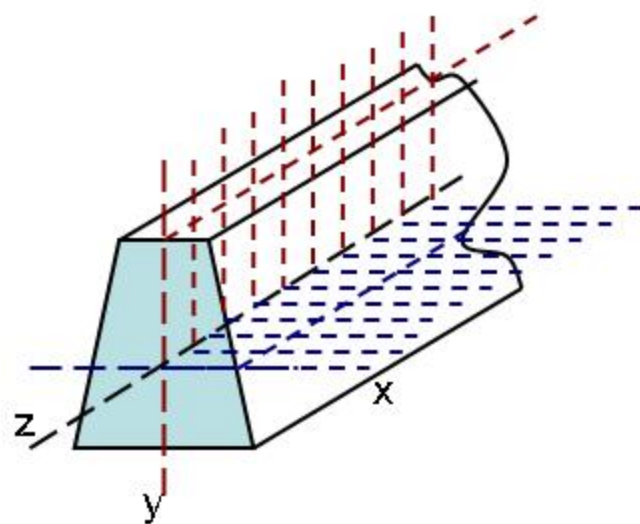
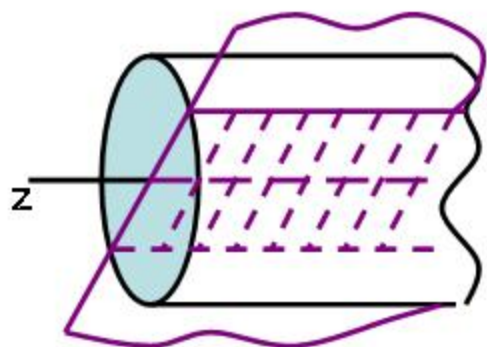
b. Mặt phẳng chính.

Là mặt phẳng chứa trục dầm và một trục chính của mặt cắt ngang.

Một dầm nói chung có **2 mặt phẳng chính**.

Mặt phẳng chính **zox** (nằm ngang)

Mặt phẳng chính **zoy** (thẳng đứng)



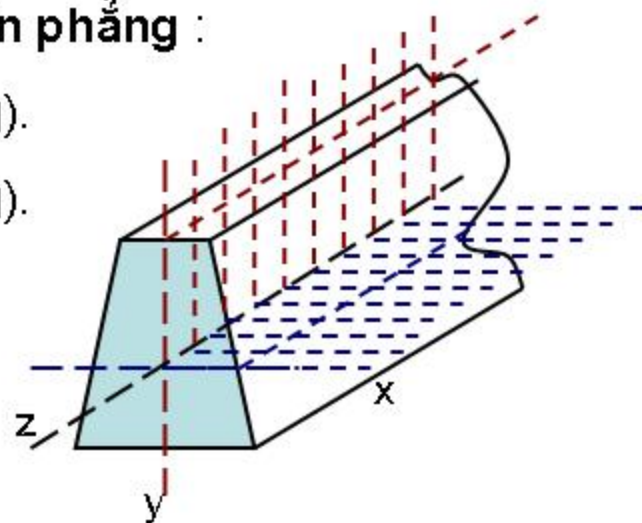
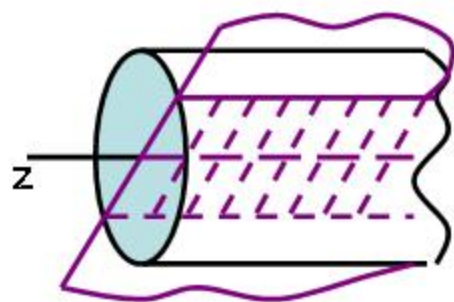
Dầm mặt cắt ngang hình tròn có **vô số mặt phẳng chính** là tất cả các mặt phẳng chứa trục dầm.

c. Uốn phẳng.

Là trường hợp dầm bị **uốn trong mặt phẳng chính**.

* Một dầm nói chung sẽ có thể xảy ra **hai trường hợp uốn phẳng** :

- Uốn phẳng trong **mặt phẳng zox** (mặt phẳng nằm ngang).
- Uốn phẳng trong **mặt phẳng zoy** (mặt phẳng thẳng đứng).

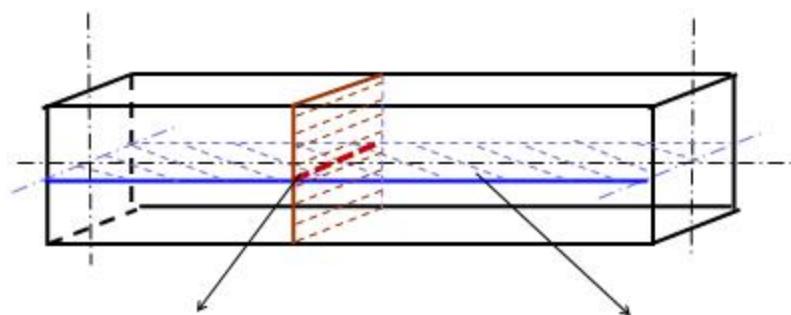
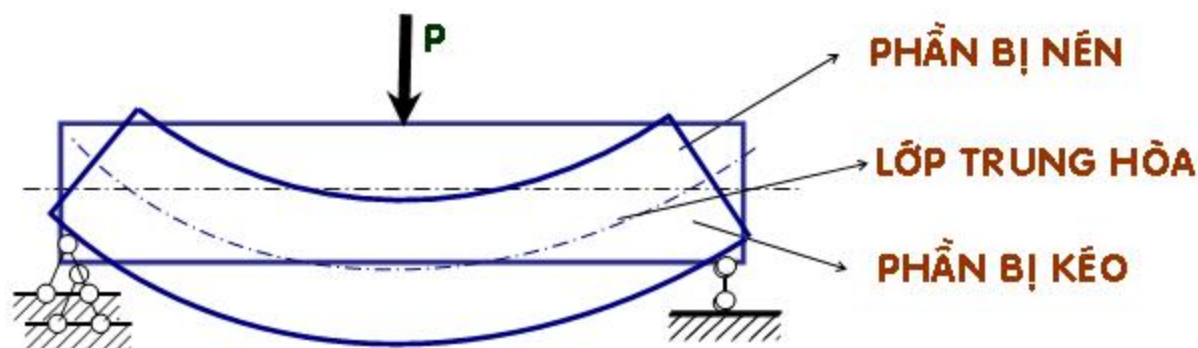


* Với dầm **mặt cắt ngang hình tròn** thì luôn luôn ở trường hợp uốn phẳng.

* Từ khái niệm **uốn phẳng** của dầm ta cũng có thể đưa ra được khái niệm dầm **uốn xiên** : là trường hợp dầm bị uốn trong mặt phẳng không trùng với mặt phẳng chính.

d. Mặt trung hòa, đường trung hòa.

- **Mặt trung hòa** là mặt chứa trục dầm, phân cách giữa phần dầm bị kéo và phần dầm bị nén
- **Đường trung hòa** là giao của mặt trung hòa với mặt cắt ngang dầm.



ĐƯỜNG TRUNG HÒA

LỚP TRUNG HÒA

II. Nội lực trên mặt cắt ngang dầm.

1. Định nghĩa dầm uốn phẳng :

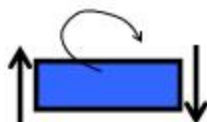
- Xét uốn phẳng trong mặt phẳng yoz (mặt phẳng đứng)

Mô men uốn M_x

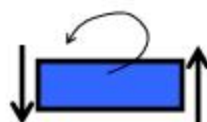
Lực cắt Q_y

- Chiều của nội lực được quy ước theo dấu.

Lực cắt Q_y



$Q_y > 0$



$Q_y < 0$

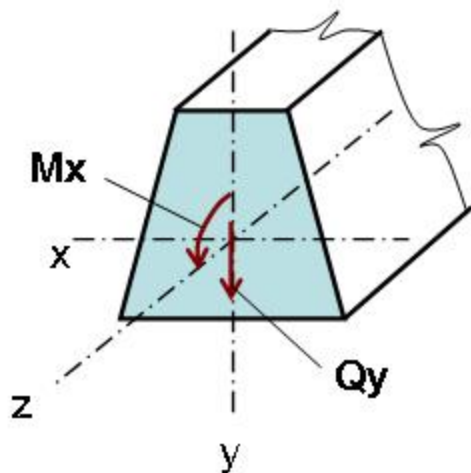
Mô men uốn M_x



$M_x > 0$ làm dầm kéo thõ dưới



$M_x < 0$ làm dầm kéo thõ trên

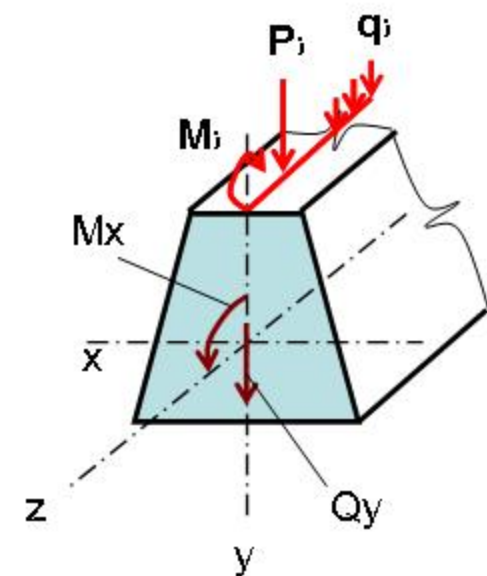


2. Phương pháp mặt cắt tính nội lực trong dầm.

Nội dung : Ta viết hai phương trình cân bằng để tính M_x và Q_y

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_y = \sum_{1ben} (P_Y^i; q_Y^i; R_Y^i \dots)$$

$$\sum mom_x = 0 \Rightarrow M_x = \sum_{1ben} mom_x (M_i; P_i; q_i; R_i \dots)$$



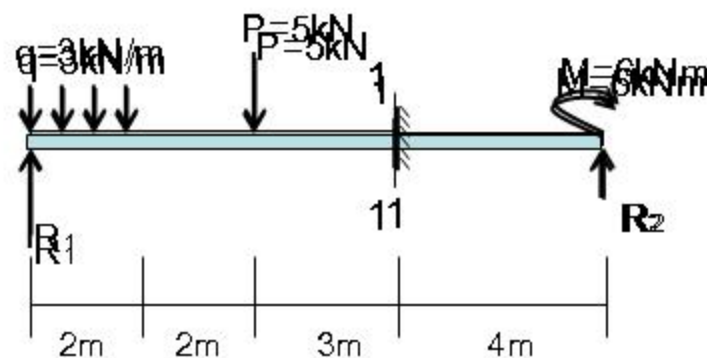
Ví dụ Tính nội lực tại mặt cắt 1-1 trên dầm chịu lực như hình vẽ.

Các phản lực $R_1 = 8,1 \text{ kN}$; $R_2 = 2,9 \text{ kN}$.

Theo biểu thức tính nội lực trên ta được :

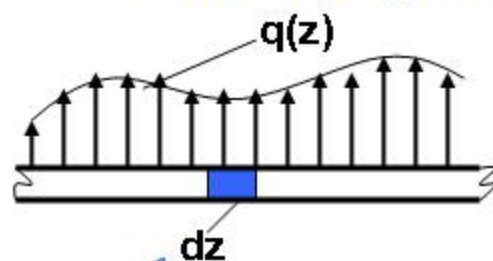
$$Q_y = R_1 - q \cdot 2 - P = 8,1 - 3 \cdot 2 - 5 = -2,9 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} M_x &= R_1 \cdot 7 - q \cdot 2 \cdot 6 - P \cdot 3 = 8,1 \cdot 7 - 3 \cdot 2 \cdot 6 - 5 \cdot 3 \\ &= 5,7 \text{ kNm} \end{aligned}$$



3. Quan hệ vi phân giữa nội lực M_x, Q_y và tải trọng phân bố $q(z)$ trên dầm.

Tách ra một vi phân dầm dz

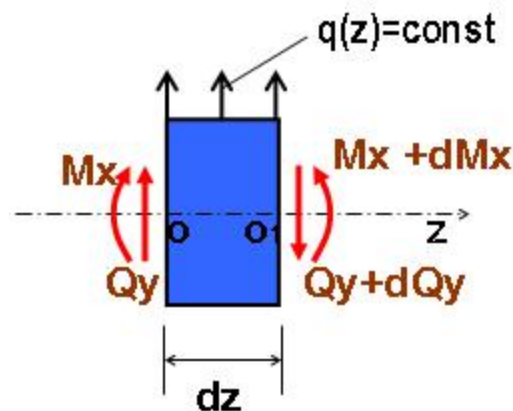


$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_y + q(z).dz - Q_y - dQ_y = 0$$

$$\Rightarrow q(z) = \frac{dQ_y}{dz}$$

$$\sum \text{mom}_o = 0 \Rightarrow M_x - q(z) \cdot \frac{dz^2}{2} - M_x - dM_x + (Q_y + dQ_y) \cdot dz = 0$$

$$\Rightarrow Q_y = \frac{dM_x}{dz}$$



$$q(z) = \frac{dQ_y}{dz} = \frac{d^2 M_x}{dz^2}$$

Kết hợp hai quan hệ trên ta được

Chú ý: chiều trục z sang phải. Tải trọng phân bố $q(z)$ cũng theo qui ước dấu:

$q(z) > 0$ chiều đi lên \uparrow

$q(z) < 0$ chiều đi xuống \downarrow

4. Biểu đồ nội lực.

Theo 4 bước như đã nêu trong các trường hợp chịu lực khác.

Ví dụ 1: Một dầm chịu lực như sau. Vẽ biểu đồ nội lực trên dầm. Cho giá trị các tải trọng : $M = 10 \text{ kNm}$; $P = 3 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$

- **Tính phản lực** : Viết phương trình cân bằng.

$$\sum \text{mom}_A = 0 \Rightarrow R_B = 12 \text{ kN};$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow R_A = -5 \text{ kN}$$

- **Chia dầm** thành hai đoạn **AB** và **BC**.

- **Viết biểu thức nội lực cho từng đoạn dầm:**

Đoạn AB Cắt mặt cắt 1-1, $z = 0 \div 3 \text{ m}$

$$Q_y = R_A = -5 \text{ kN}$$

$$M_x = M + R_A \cdot z = 10 - 5z \quad (\text{kNm})$$

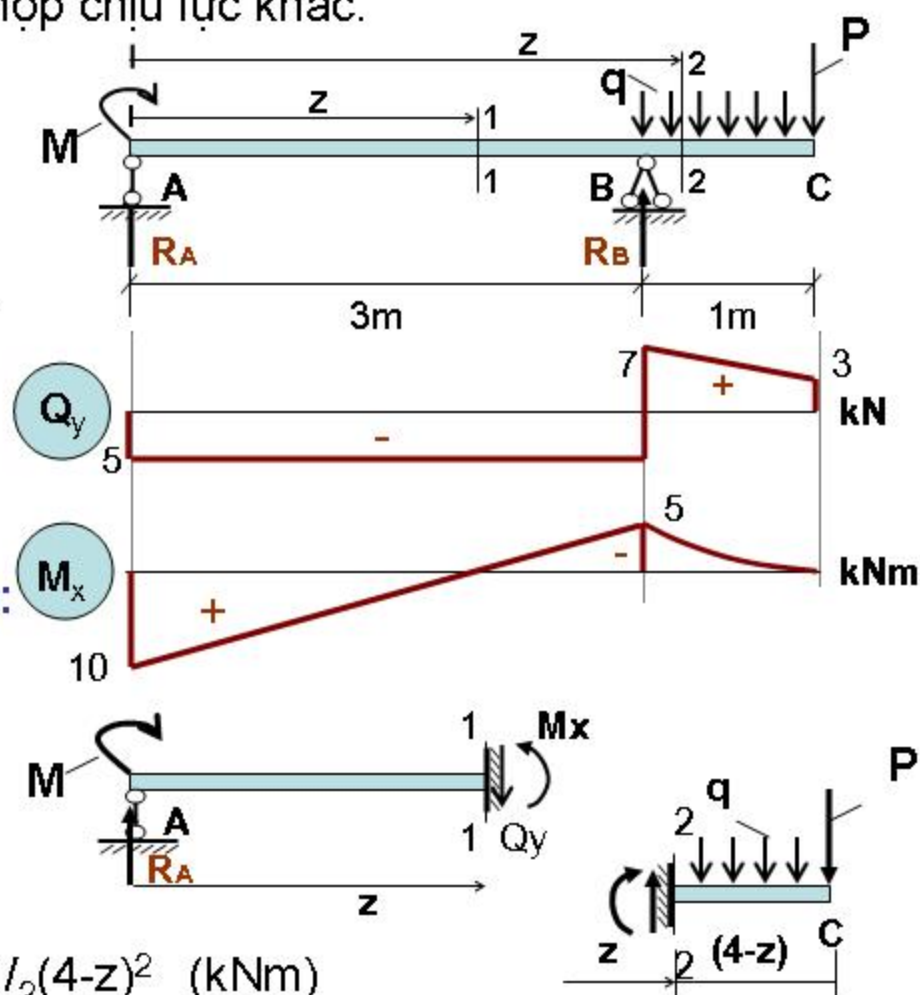
Đoạn BC Cắt mặt cắt 2-2, $z = 3 \div 4 \text{ m}$

$$Q_y = P + q \cdot (4-z) = 3 + 4(4-z) \quad (\text{kN})$$

$$M_x = -P \cdot (4-z) - q \cdot \frac{1}{2}(4-z)^2 = -3(4-z) - 4 \cdot \frac{1}{2}(4-z)^2 \quad (\text{kNm})$$

- **Vẽ biểu đồ nội lực** :

- **Nhận xét** :



Ví dụ 2: Vẽ biểu đồ nội lực trên dầm uốn như sau.

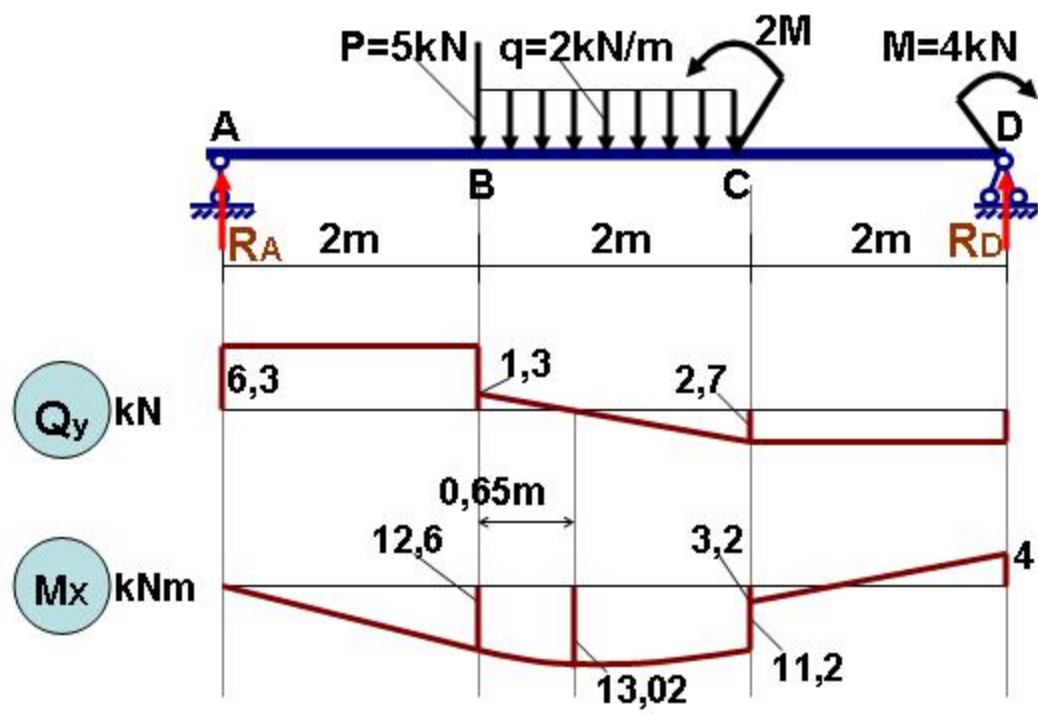
- **Tính phản lực:**

$$R_A = 6,3 \text{ kN}$$

$$R_D = 2,7 \text{ kN}$$

- **Chia dầm thành 3 đoạn.**

- **Vẽ nhanh biểu đồ.**

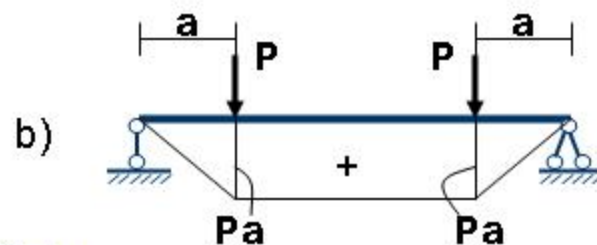


III. ứng suất trên mặt cắt ngang dầm.

1/ Dầm uốn thuần túy.

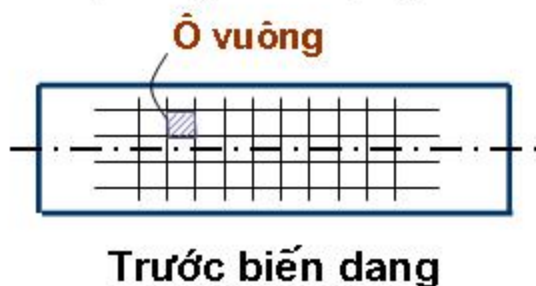
Nội lực: M_x , ($Q_y = 0$).

Một số ví dụ dầm uốn thuần túy



1/ Quan sát thực nghiệm, các giả thiết tính.

- Quan sát sự thay đổi dạng của các đường kẻ sau khi dầm biến dạng.



- Các giả thiết tính :

Giả thiết mặt cắt ngang phẳng:

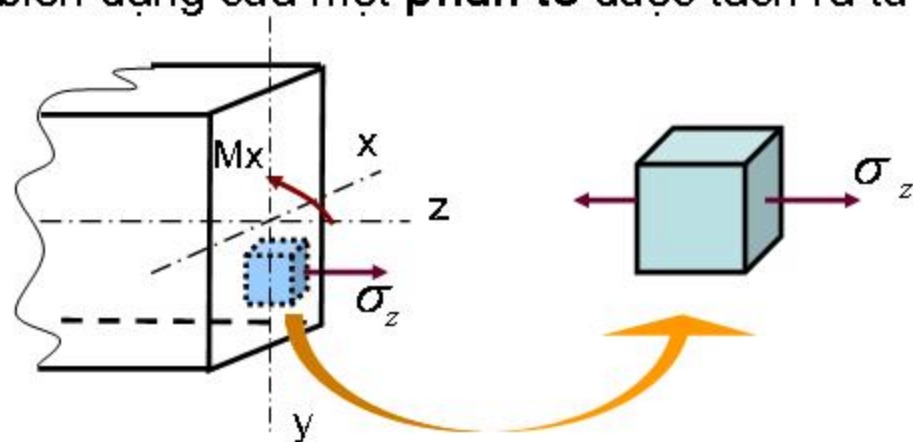
Giả thiết các thớ dọc dầm:

Giả thiết trục dầm có chiều dài không đổi.

2/ Thành lập công thức tính ứng suất.

- Phân tích ứng suất.

Để ý biến dạng của một **phần tử** được tách ra từ một dầm uốn thuần túy.



Phần tử ở trạng thái ứng suất đường.

- Thành lập công thức tính σ_z

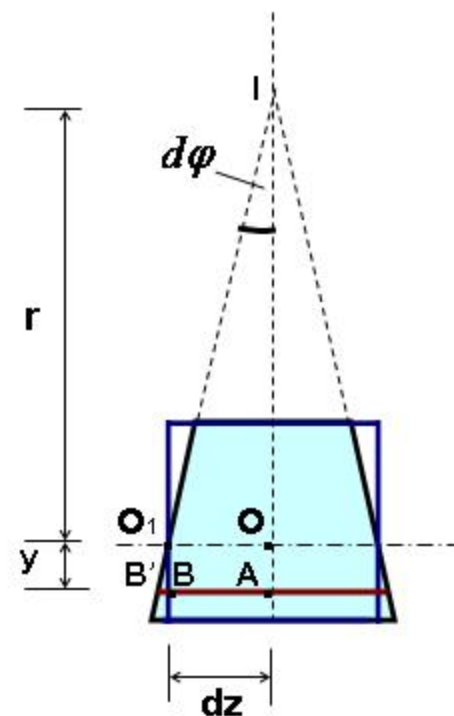
* **Định luật Hooke** cho trạng thái ứng suất đường

$$\sigma_z = \varepsilon_z E \quad (1)$$

* **Xét biến dạng** của một đoạn dầm dz .

Để ý thứ dọc dầm AB. Độ cong của trục dầm xác định bằng bán kính chính khúc r . Hai mặt cắt ngang quay tương đối với nhau một góc là $d\varphi$. Ta có quan hệ:

$$\frac{BB'}{OO_1} = \frac{O_1B}{IO} \Rightarrow \varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{y}{r} \quad (2)$$



-Thành lập công thức tính σ_z (Tiếp theo)

- Điều kiện cân bằng** giữa nội lực và ứng suất trên mặt cắt là :

$$\sigma_z = \varepsilon_z \cdot E \quad (1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{y}{\rho} \quad (2)$$

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = 0 \quad (3)$$

$$M_y = \int_F \sigma_z \cdot x dF = 0 \quad (4)$$

$$M_x = \int_F \sigma_z \cdot y dF \quad (5)$$

Kết hợp (1),(2),(3)

$$N_z = \int_F \frac{y}{r} \cdot E \cdot dF = \frac{E}{r} \int_F y dF = \frac{E}{r} \cdot S_x = 0$$

$$\Rightarrow S_x = 0$$

Ta chứng minh được trục x là trục trung tâm

Kết hợp (1),(2),(4)

$$M_y = \int_F \frac{y}{r} \cdot E \cdot x \cdot dF = \frac{E}{r} \int_F y \cdot x \cdot dF = \frac{E}{r} J_{xy} = 0$$

$$\Rightarrow J_{xy} = 0$$

Ta chứng minh được hệ trục xoy là hệ trục chính trung tâm

Kết hợp (1),(2),(5)

$$M_x = \int_F \frac{y}{r} \cdot E \cdot y \cdot dF = \frac{E}{r} \int_F y^2 \cdot dF = \frac{E}{r} J_x$$

$$(6) \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{M_x}{E J_x}$$

Độ cong của dầm ($1/r$) tỉ lệ với mô men uốn M_x . Tích $E \cdot J_x$ gọi là độ cứng chống uốn của mặt ngang dầm.

$$\sigma_z = \varepsilon_z \cdot E = \frac{1}{r} \cdot y \cdot E = \frac{M_x}{E J_x} \cdot y \cdot E$$

Kết hợp (1),(2),(6)

$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \cdot y \quad (7)$$

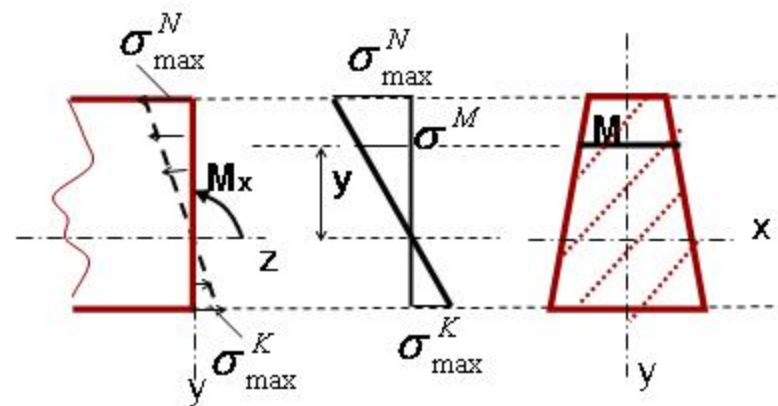
Trục x chính là đường trung hòa (trục trung hòa) của mặt cắt.

- Biểu đồ ứng suất pháp trên mặt cắt ngang dầm uốn thuần túy.

- Ứng suất pháp cực đại tại những điểm xa đường trung hòa nhất (có tọa độ y_{\max}).

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{\max}$$

Trên biểu đồ σ_z ta nhận thấy có hai giá trị ứng suất pháp cực đại σ_{\max}^K σ_{\max}^N .



Trong tính toán, ta đưa ra đại lượng W_x gọi là mô men chống uốn :

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$$

Mô men chống uốn đặc trưng cho khả năng chống uốn của mặt cắt dầm

Ứng suất pháp cực đại tính theo công thức sau :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}$$

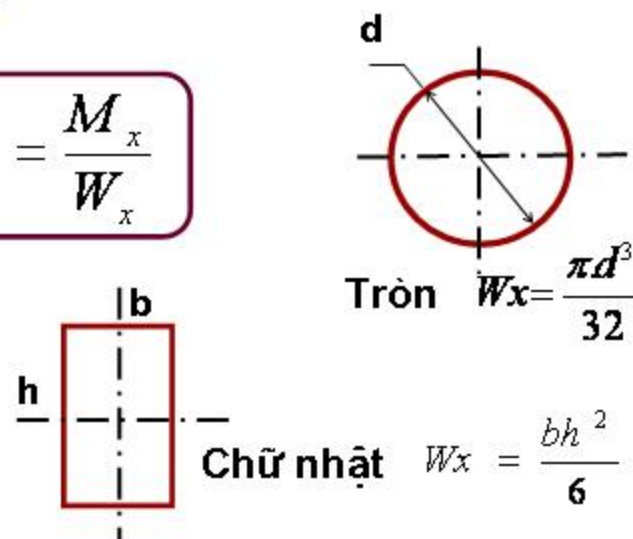
- Các điểm có cùng tọa độ y (điểm M) có ứng suất là :

$$\sigma_z^M = \frac{M_x}{J_x} y^M$$

* Mô men chống uốn của một số mặt cắt ngang dầm thường gặp.

*Thép mặt cắt định hình như I, [.. các giá trị mô men chống uốn bảng tra.

* Mặt cắt có trục x không chia đôi chiều cao có hai giá trị :



$$W_x^K = \frac{J_x}{y_{\max}^{keo}} ; W_x^N = \frac{J_x}{y_{\max}^{nen}}$$

2/ Dầm uốn ngang phẳng.

Dầm uốn ngang phẳng trên mặt cắt ngang có thêm **Lực cắt Qy**. Phân tích và tính ứng suất trong dầm uốn ngang như sau :

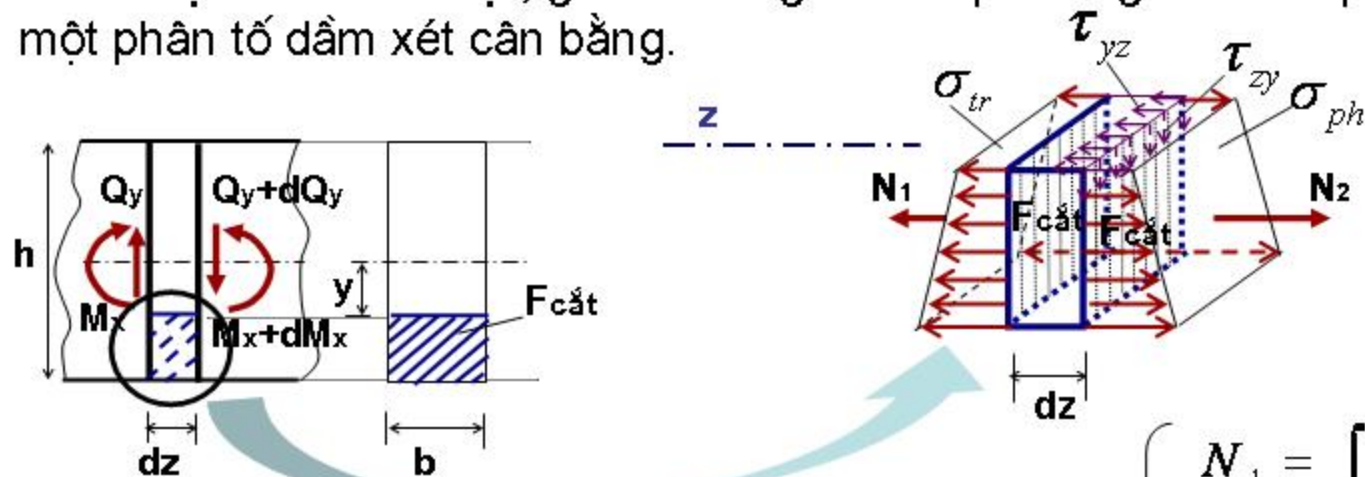
- **Mô men uốn M_x** gây ra ứng suất pháp σ_z tính như trong dầm uốn thuần túy.

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y$$

- **Lực cắt Q_y** gây ra ứng suất tiếp, ứng suất này thay đổi theo phương y và coi như không đổi theo phương x trong trường hợp mặt cắt cao và hẹp ngang.

a. Tính ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang thanh đặc.

Xét dầm mặt cắt chữ nhật, giả thiết ứng suất tiếp không đổi theo phương x. Tách một phân tử dầm xét cân bằng.



Chiếu các lực tác dụng vào phần tách ra lên phương của trục z

$$\sum Z = -N_1 - dT + N_2 = 0 \quad (8)$$

Trong đó :

$$\begin{cases} N_1 = \int_{F_c} \sigma_{tr} dF \\ N_2 = \int_{F_c} \sigma_{ph} dF \\ dT = \tau_{yz} \cdot b \cdot dz \end{cases}$$

Các ứng suất pháp: $\sigma_{tr} = \frac{Mx}{Jx} \cdot y$ $\sigma_{ph} = \frac{Mx + dMx}{Jx} \cdot y$

Giải phương trình (8) ta được **biểu thức tính ứng suất tiếp** :

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x^{Fc}}{Jx \cdot b^c}$$

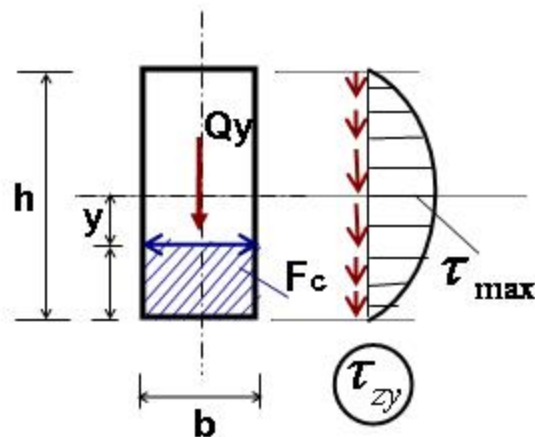
(9) Công thức **Giurapxki**

Trường hợp mặt cắt chữ nhật.

Với :

$$S_x^{Fc} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$Jx = \frac{bh^3}{12}$$



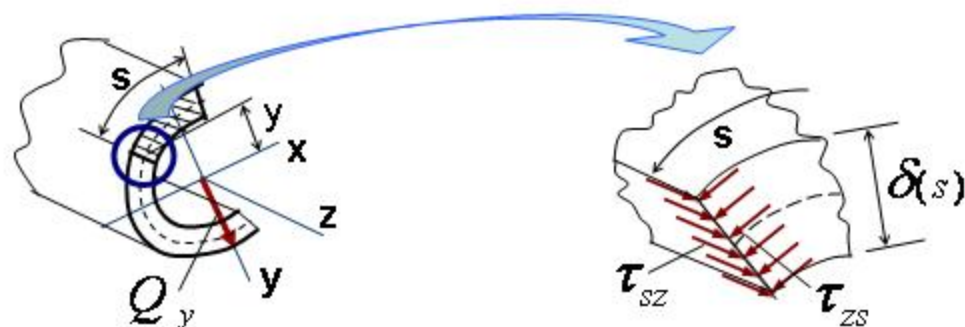
Ta được qui luật phân bố bậc hai của ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang :

$$\tau_{zy} = \frac{6Qy}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

ứng suất tiếp lớn nhất tại các **điểm trên đường trung hòa (y = 0)** :

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Qy}{b \cdot h}$$

b. ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang thành mỏng hở



$$\tau_{zs} = \tau_{sz} = \frac{Q_y}{J_x} \cdot \frac{S_x(s)}{\delta(s)}$$

Để tính thành phần ứng suất τ_{zs} ta vẫn sử dụng công thức Giurapxki.

Phân tích ứng suất trên mặt cắt thép hình chữ I.

- ứng suất tiếp trên bản cánh

$$\tau_{zx} = \frac{Q_y \cdot h}{J_x} \cdot \xi$$

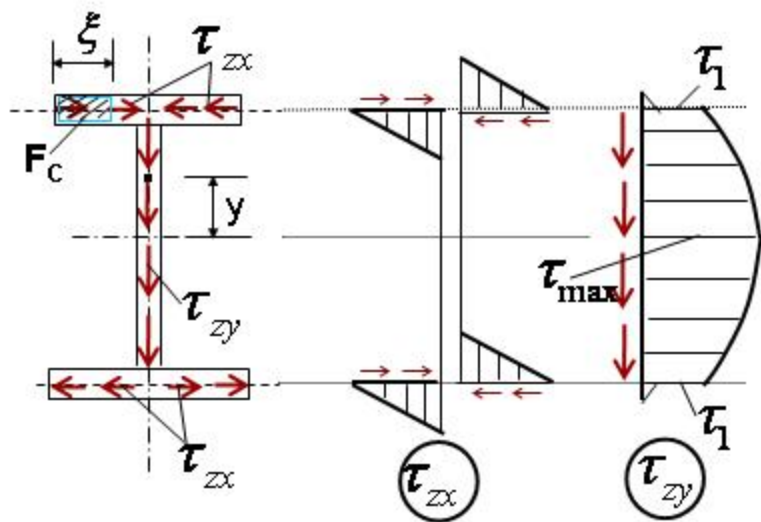
- ứng suất tiếp trên bản bụng

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{J_x \cdot d} \left(S_x^{\frac{1}{I}} - d \frac{y^2}{2} \right)$$

* ứng suất tiếp lớn nhất trên đường trung hoà

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y}{J_x \cdot d} S_x^{\frac{1}{I}}$$

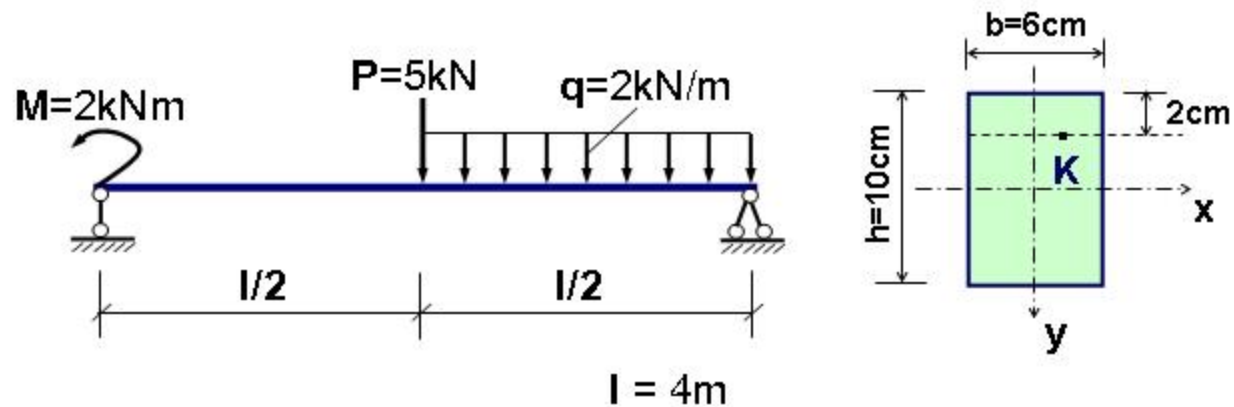
* ứng suất tiếp tại các điểm tiếp giáp bản bụng và bản cánh, các điểm 1.



$$\tau_1 = \frac{Q_y}{J_x \cdot d} \left[S_x^{\frac{1}{I}} - \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right]$$

III. ứng suất trên mặt cắt ngang dầm.

Thí dụ thực hành



1. Tính và vẽ biểu đồ nội lực trên dầm.
2. Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp cực đại trên dầm.
3. Tính ứng suất pháp và ứng suất tiếp tại điểm **K** trên mặt cắt nguy hiểm của dầm (mặt cắt có cả M_x , Q_y cùng lớn).

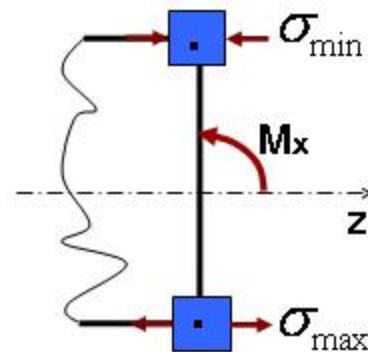


IV. Trạng thái ứng suất trong dầm uốn phẳng.

1. Dầm uốn thuần tuý.

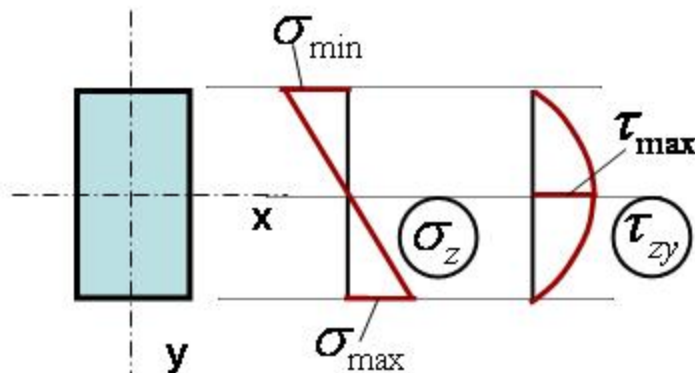
Tại một điểm trên mặt cắt ngang chỉ có $\sigma_z = \frac{Mx}{J_x} \cdot y$

Trạng thái ứng suất trong dầm là trạng thái ứng suất đường.



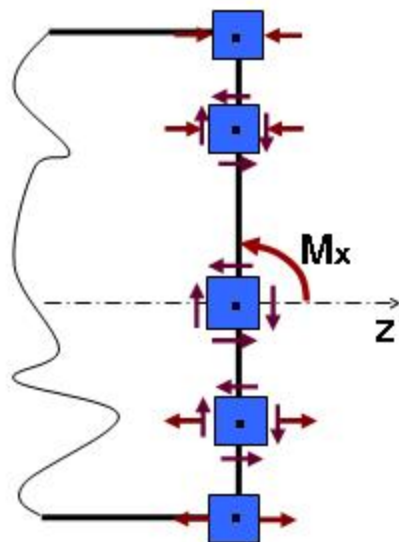
2. Dầm uốn ngang phẳng.

Dựa trên sự phân bố σ và τ trên mặt cắt chữ nhật.

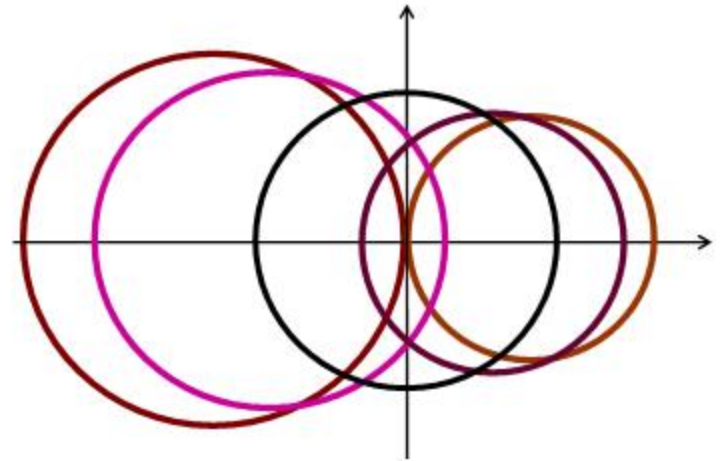


Trong dầm uốn ngang có ba loại trạng thái ứng suất :

- **Trạng thái ứng suất đường.** Tại các điểm xa đường trung hoà nhất.
- **Trạng thái ứng suất trượt thuần tuý.** Tại các điểm trên đường trung hoà.
- **Trạng thái ứng suất phẳng.** Tại các điểm còn lại trên mặt cắt.

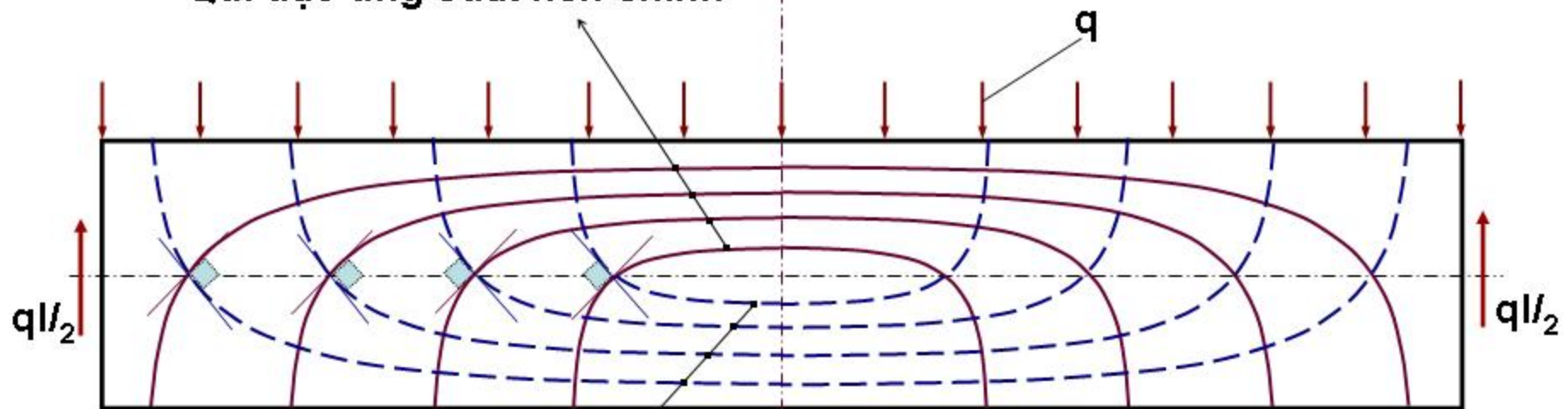


- Vòng tròn Mohr của trạng thái ứng suất trong dầm uốn ngang phẳng.



- Quỹ đạo ứng suất chính.

Quỹ đạo ứng suất nén chính



Quỹ đạo ứng suất kéo chính

V. Thế năng biến dạng đàn hồi trong biến dạng uốn.

Thế năng biến dạng đàn hồi riêng trong dầm.

Trạng thái ứng suất chỉ có $\sigma_z \neq 0; \tau_{zy} \neq 0$

Theo công thức tổng quát

$$u = \frac{1}{2E} \sigma_z^2 + \frac{1}{2G} \tau_{zy}^2$$
$$\Rightarrow u = \frac{M_x^2 \cdot y^2}{2EJx^2} + \frac{Q_y^2 \cdot (S_x^{Ec})^2}{2GJx^2 \cdot b_c^2}$$

Thế năng biến dạng đàn hồi trong toàn dầm.

$$U = \int_V u \cdot dV$$

$$U = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_x^2}{EJx} dz + \frac{k}{2} \int_l \frac{Q_y^2}{GF} dz$$

Trong đó hệ số $k = \frac{F}{Jx^2} \int_F \frac{(S_x^{Fc})^2}{b^2} dF$ là hệ số không thứ nguyên phụ thuộc vào dạng mặt cắt

Một số trường hợp : Mặt cắt chữ nhật $k=1,2$;

Mặt cắt tròn $k=1,1$;

Thép hình I , [$k = \frac{F}{F_b}$

(F_b là diện tích bản bụng)

VI. Tính về độ bền cho dầm uốn phẳng.

1. Dầm uốn thuần túy.

a) Điều kiện bền.

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \iff \frac{Mx}{W_x} \leq [\sigma]$$

- Vật liệu dẻo $[\sigma]^K = [\sigma]^N = [\sigma] \implies \sigma_{\max} = \max(\sigma_{\max}^K; \sigma_{\max}^N)$

- Vật liệu giòn $[\sigma]^K \neq [\sigma]^N \implies \begin{cases} \sigma_{\max}^K \leq [\sigma]^K \\ \sigma_{\max}^N \leq [\sigma]^N \end{cases}$

b) Ba bài toán tính về độ bền.

- Bài toán kiểm tra bền.
- Bài toán xác định mặt cắt.
- Bài toán tính tải trọng cho phép.

2. Dầm uốn ngang.

a) Điều kiện bền;

- Các điểm ở trạng thái ứng suất đường: Đ.K bền như trong trường hợp uốn thuần túy.

- Các điểm ở trạng thái ứng suất trượt thuần túy: $\tau_{\max} \leq [\tau]$

- Các điểm ở trạng thái ứng suất phẳng: Đ.K bền phải dựa theo lý thuyết bền.

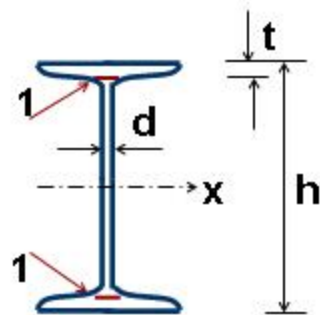
Lý thuyết bền 3 $\sigma_{td3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$

Lý thuyết bền 4 $\sigma_{td4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$

b) Ba bài toán tính về độ bền.

Ví dụ.

Dầm giản đơn chịu tải trọng phân bố đều cường độ q . Mặt cắt ngang: I số hiệu 20. Tính giá trị tải trọng cho phép. Biết vật liệu dầm có $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$; $[\tau] = 10 \text{ kN/cm}^2$. Sử dụng lý thuyết bền thứ 3



$$I_{20} : h=20\text{cm}; d=0,52\text{cm}; \\ t=0,84\text{cm}; J_x=1840\text{cm}^4; \\ w_x=184\text{cm}^3; S_x=104\text{cm}^3$$

Giải.

- Phản lực gối $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$

- Vẽ biểu đồ nội lực.

- Tính tải trọng cho phép theo **điều kiện bền theo ứng suất pháp.**

$$\sigma_{\max} = \frac{Mx}{W_x} \leq [\sigma]$$

$$\frac{ql^2}{8 \cdot w_x} \leq [\sigma] \Rightarrow q \leq \frac{8w_x[\sigma]}{l^2} \Rightarrow [q] = \frac{8 \cdot 184 \cdot 16}{400^2} = 0,147 \text{ kN/cm}^2$$

- Kiểm tra **đ.k bền cho hai trạng thái ứng suất** còn lại.

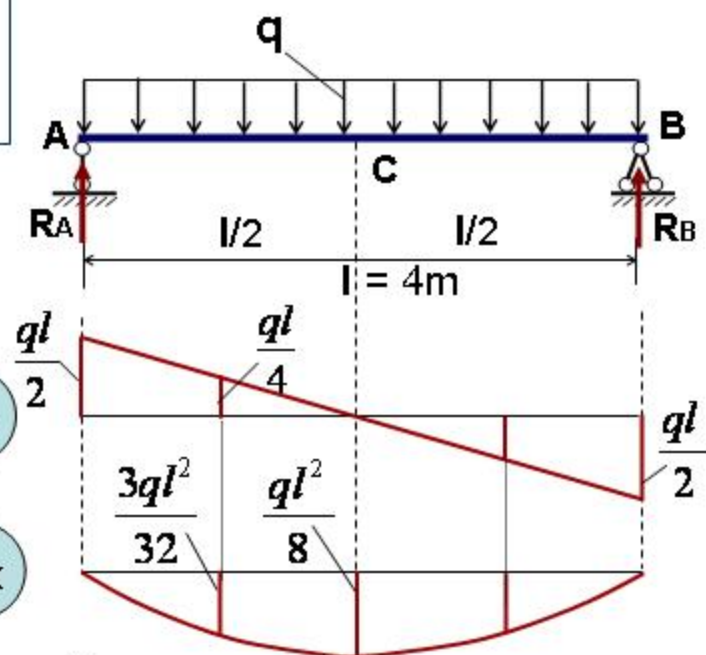
* Các điểm trên đường trung hoà.

$$\tau_{\max} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{Q_y \cdot S_x}{J_x \cdot d} \leq [\tau] \Rightarrow \frac{ql \cdot S_x}{2 \cdot J_x \cdot d} = \frac{0,147 \cdot 400 \cdot 104}{2 \cdot 1840 \cdot 0,52} = 3,196 \text{ kN/cm}^2 < 10 \text{ kN/cm}^2$$

* Các điểm 1

$$\sigma_1 = \frac{M_x^1}{J_x} \cdot y^1 = \frac{3ql^2}{32 \cdot J_x} \left(\frac{h}{2} - t \right) = 10,992 \text{ kN/cm}^2; \tau_1 = \frac{Q_y}{J_x \cdot d} \left[S_x - \frac{d}{2} \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right] = 1,63 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{td3} = \sqrt{\sigma_1^2 + 4 \cdot \tau_1^2} = \sqrt{10,992^2 + 4 \cdot 1,63^2} = 11,46 \text{ kN/cm}^2 < [\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$$



VII. Khái niệm về dầm có độ bền đều.

Dầm mà có ứng suất lớn nhất trên tất cả các mặt cắt ngang bằng nhau gọi là dầm có độ bền đều.

Ví dụ.

Dầm có mặt cắt ngang chữ nhật, chiều rộng b không đổi. Tìm qui luật biến thiên của chiều cao h để dầm có độ bền đều. Tức là ứng suất pháp lớn nhất trên các mặt cắt đều bằng nhau, lấy bằng giới hạn phá hoại của vật liệu là

Mô men uốn tại các mặt cắt $Mx_{(z)} = P \cdot z$

$$\sigma_{\max}(z) = \frac{Mx_{(z)}}{w_x} = \frac{6P \cdot z}{bh^2} = \text{const} = \sigma_o \Rightarrow h_{(z)}^2 = \frac{6P \cdot z}{\sigma_o \cdot b}$$

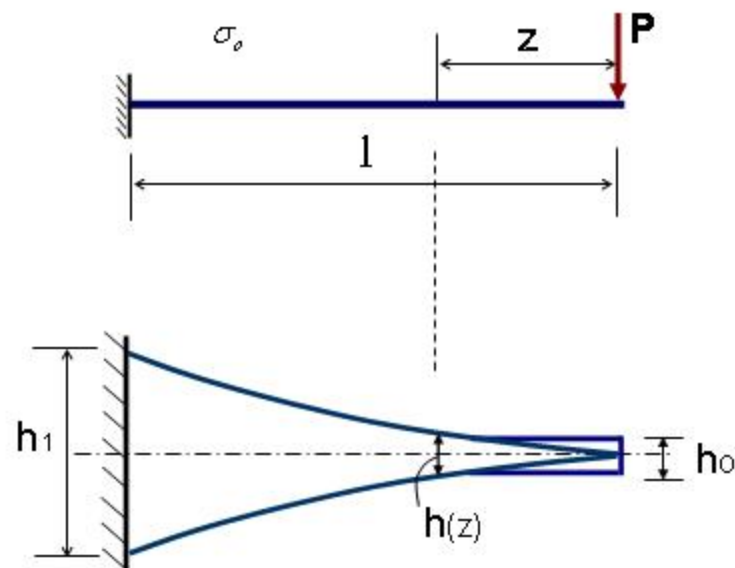
$$\sigma_{\max}(z=l) = \frac{6Pl}{bh_1^2} = \sigma_o \Rightarrow h_1^2 = \frac{6Pl}{\sigma_o \cdot b}$$

Như vậy biến thiên chiều cao mặt cắt sẽ theo qui luật sau :

$$h_{(z)}^2 = h_1^2 \cdot \frac{z}{l}$$



$$h_{(z)} = h_1 \sqrt{\frac{z}{l}}$$



Chiều cao h_o tính theo độ bền chịu lực cắt

$$\tau_{\max} = \tau_o \Rightarrow \frac{3Q_y}{2b \cdot h_{(z)}} = \tau_o \Rightarrow \frac{3P}{2bh_{(z)}} = \tau_o \Rightarrow h_{(z)} = h_o = \frac{3P}{2b \tau_o}$$

VIII. Khái niệm về tâm uốn của mặt cắt.

Trường hợp thanh mặt cắt thành mỏng, trục y không phải là trục đối xứng.

Lấy ví dụ mặt cắt chữ [

Hợp lực cắt trên bản bụng T_1 .
$$T_1 = \int_F \tau_{zy} dF \approx Q_y$$

Hợp lực cắt trên bản cánh T_2 .
$$T_2 = \frac{\tau_{zx}^{\max} b t}{2} = \frac{Q_y b^2 h t}{4 J_x}$$

T_2 trên bản cánh tạo thành một ngẫu lực M_c .

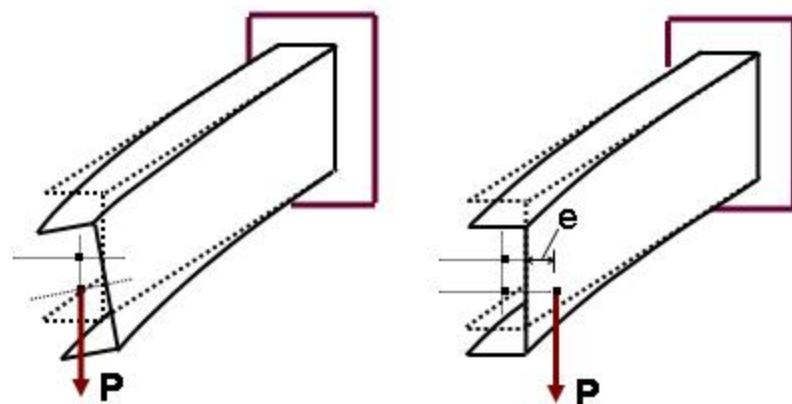
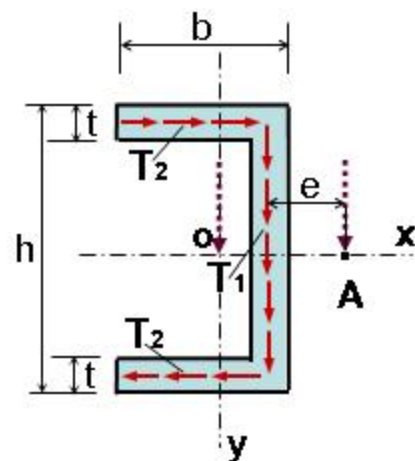
$$M_c = T_2 \cdot h = \frac{Q_y \cdot b^2 \cdot h^2 \cdot t}{4 J_x}$$

T_2 và M_c có thể thu gọn thành một lực đặt tại điểm **A** cách bản bụng một khoảng e .

$$e = \frac{M_c}{T_1} = \frac{M_c}{Q_y} = \frac{b^2 h^2 t}{4 J_x}$$

Điểm **A** được gọi là **tâm uốn**.

Nếu ngoại lực (mặt phẳng chứa tải trọng) đi qua điểm **A** thì sẽ tránh được biến dạng xoắn trong dầm mặt cắt thành mỏng như trên khi bị uốn phẳng.



VIII. Dạng mặt cắt hợp lý của dầm về mặt độ bền.

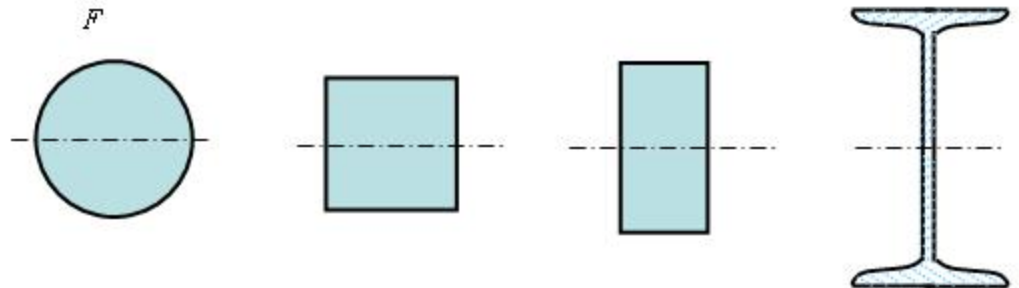
* Xét đến ảnh hưởng của mô men uốn thì mặt cắt hợp lý của dầm có dạng sao cho giảm được ứng suất pháp cực đại.

$$\sigma_{\max} = \frac{Mx}{Wx}$$

Tăng mô men chống uốn w_x . $w_x = \frac{Jx}{y_{\max}}$

Tăng mô men quán tính J_x . $J_x = \int_F y^2 dF$

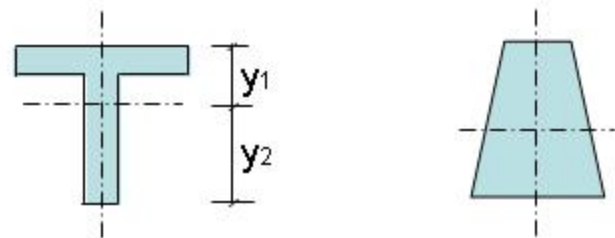
Mặt cắt càng tăng chiều cao thì càng tăng được khả năng chịu uốn của dầm.



* Xét thêm về mặt vật liệu.

- Vật liệu dẻo $[\sigma]^K = [\sigma]^N$ Mặt cắt có trục x là trục đối xứng sẽ hợp lý về độ bền

- Vật liệu giòn $[\sigma]^K \neq [\sigma]^N$ Mặt cắt hợp lý nhất là làm sao cho σ_{\max}^K và σ_{\max}^N trên mặt cắt cùng đồng thời đạt đến giới hạn phá hoại.



- **Câu hỏi:**

1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 12; 14.

- **Bài tập:**

1; 2; 3; 5; 6; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 21; 23; 26.

Chương 8

BIẾN DẠNG CỦA DẦM UỐN PHẪNG

Nội dung chính

- **Khái niệm.**
- **Phương trình vi phân đường đàn hồi.**
- **Phương pháp tích phân.**
- **Phương pháp thông số ban đầu.**
- **Phương pháp đồ toán.**
- **Tính dầm siêu tĩnh.**
- **Tính dầm về độ cứng.**

BG1. Khái niệm chung.

1. **Đường đàn hồi** : là đường cong của trục dầm sau biến dạng.

2. **Chuyển vị** của một mặt cắt trên dầm.

- Chuyển vị đường theo phương đứng $v(z)$: độ võng.
theo phương ngang $w(z)$ bỏ qua.

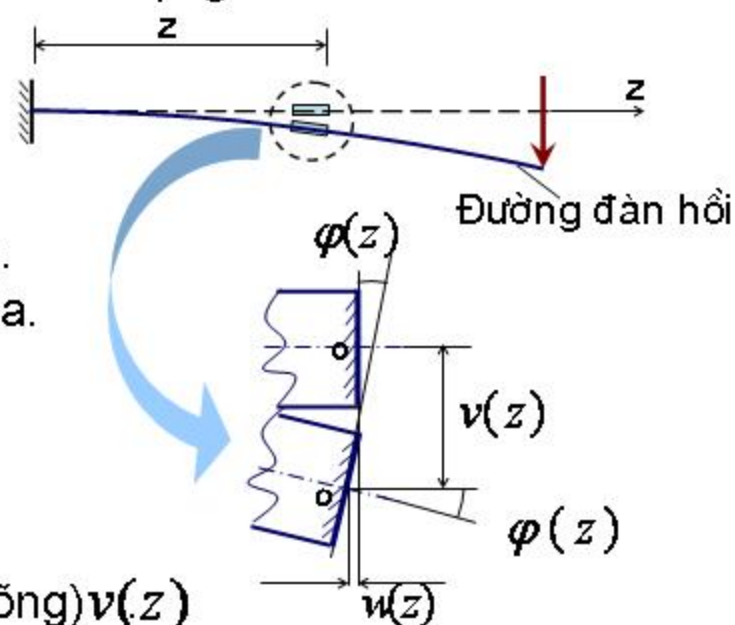
- Chuyển vị góc $\varphi(z)$: góc quay.

Quy ước dấu:

3. **Phương trình đường đàn hồi** (phương trình độ võng) $v(z)$
Phương trình góc quay $\varphi(z)$.

4. **Quan hệ vi phân** giữa độ võng và góc quay trên dầm.

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi \Rightarrow \varphi(z) = \frac{dv(z)}{dz}$$



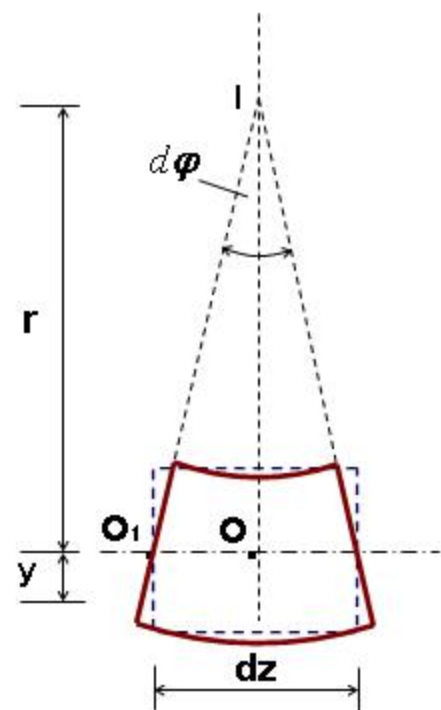
BG2. Phương trình vi phân đường đàn hồi.

1. ảnh hưởng của mô men uốn.

$$\text{Độ cong của dầm: } \frac{1}{r} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

$$\text{Theo hình vẽ: } \frac{1}{r} = \frac{d\varphi(z)}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow \frac{d^2v(z)}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x}$$



Để phù hợp với qui ước dấu nội lực, trong kỹ thuật hay chọn chiều trục y hướng xuống.

$$M_x < 0$$
$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} > 0$$

$$M_x > 0$$
$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} < 0$$



$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

Phương trình vi phân đường đàn hồi

2. ảnh hưởng của lực cắt.

$$\frac{dv(z)}{dz} = k \frac{Q_y}{GF}$$

BG3. Phương pháp tích phân xác định đường đàn hồi.

1. Tích phân hai vế phương trình đường đàn hồi.

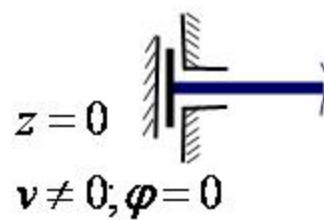
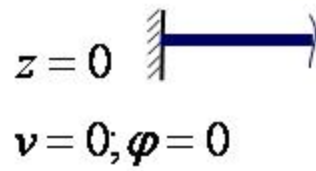
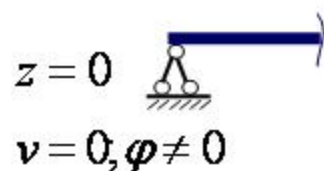
$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

$$\varphi(z) = -\int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C$$

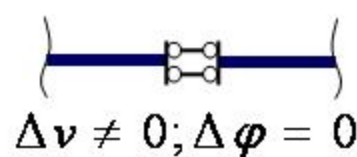
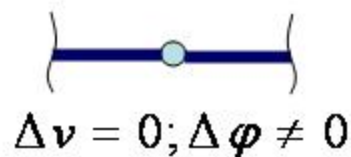
$$v(z) = -\iint \frac{M_x}{EJ_x} dz^2 + Cz + D$$

Các hằng số tích phân C và D xác định theo **điều kiện biên** và **điều kiện liên tục**

Điều kiện biên.



Điều kiện liên tục.



Trường hợp dầm có n đoạn, việc tích phân sẽ phải thực hiện trên từng đoạn. Có 2n hằng số tích phân. Có cách giải riêng

2. Ví dụ. Viết phương trình độ võng, góc quay của công xon chịu tải trọng phân bố đều. $EJ_x = \text{const}$

- mô men uốn : $M_x(z) = M_x^{1-1} = -\frac{qz^2}{2}$

- Ptvp đường đàn hồi của dầm :

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} = +\frac{qz^2}{2EJ_x}$$

- Tích phân hai vế:
$$\begin{cases} \varphi(z) = \frac{qz^3}{6EJ_x} + C \\ v(z) = \frac{qz^4}{24EJ_x} + Cz + D \end{cases}$$

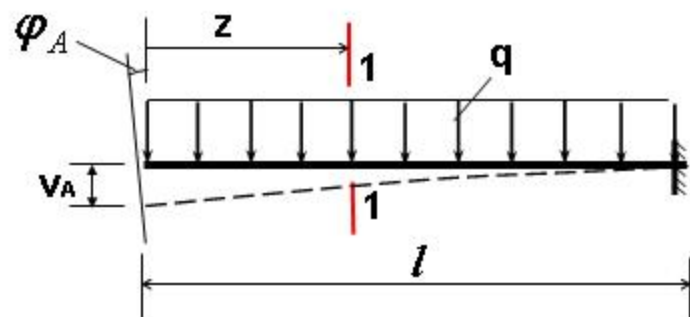
- Điều kiện biên:

Tại ngàm B :

$$z = l \rightarrow \varphi_B = 0 \rightarrow \frac{ql^3}{6EJ_x} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{ql^3}{6EJ_x}$$

$$z = l \rightarrow v_B = 0 \rightarrow \frac{ql^4}{24EJ_x} + Cz + D = 0 \Rightarrow D = \frac{ql^4}{8EJ_x}$$

- ý nghĩa về dấu của chuyển vị trên dầm.



- Độ võng và góc quay lớn nhất trên dầm tại đầu A, $z = 0$:

$$\varphi_A = -\frac{ql^3}{6EJ_x}; v_A = \frac{ql^4}{8EJ_x}$$

BG4. Phương pháp thông số ban đầu.

1) Nội dung phương pháp: Xét dầm có độ cứng EJ_x không đổi, tải trọng tác dụng bất kỳ. PT đường đàn hồi phải chia thành n đoạn.

- Công thức tổng quát đường đàn hồi của dầm viết dưới dạng truy hồi.

$$v_i = v_{i-1} + \Delta v_i$$

v_{i-1} là p.trình đường đàn hồi đoạn thứ $(i-1)$.

v_i là p.trình đường đàn hồi đoạn thứ i .

Δv_i là hàm số gia đường đ.hồi của đoạn thứ i so với $(i-1)$.

- Đoạn thứ 1: $v_1 = v_0 + \Delta v_1 = \Delta v_1$

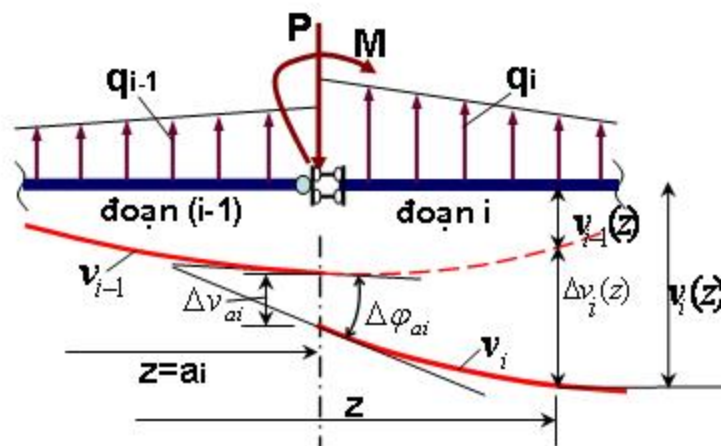
- Tính hàm số gia là dạng khai triển theo chuỗi Tay-lo :

$$\Delta v_i = \Delta v_{ai} + \Delta v'_{ai}(z - a_i) + \Delta v''_{ai} \frac{(z - a_i)^2}{2!} + \dots$$

- Dựa vào các quan hệ vi phân đã biết, tính được số gia các đạo hàm.

$$\Delta v'_{ai} = \Delta \varphi_{ai}; \Delta v''_{ai} = -\frac{\Delta M_{ai}}{EJ_x}; \Delta v'''_{ai} = -\frac{\Delta Q_{ai}}{EJ_x}; \Delta v^{IV}_{ai} = -\frac{\Delta q_{ai}}{EJ_x}; \Delta v^V_{ai} = -\frac{\Delta q'_{ai}}{EJ_x}$$

Trong đó : $\Delta v_{ai}; \Delta \varphi_{ai}; \Delta M_{ai}; \Delta Q_{ai}; \Delta q_{ai}; \Delta q'_{ai}$ là số gia của độ võng, góc quay, mô men, lực cắt, lực phân bố, đạo hàm lực phân bố tại mặt cắt chia đoạn có tọa độ $z = a_i$.



Thông số
đầu mỗi đoạn

BG4. Phương pháp thông số ban đầu. (tiếp)

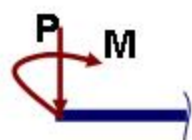
- Phương trình hàm số gia của đoạn thứ i :

$$\Delta v_i = \Delta v_{ai} + \Delta \varphi_{ai} (z - a_i) - \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{\Delta M_{ai}}{2!} (z - a_i)^2 + \frac{\Delta Q_{ai}}{3!} (z - a_i)^3 + \frac{\Delta q_{ai}}{4!} (z - a_i)^4 + \frac{\Delta q'_{ai}}{5!} (z - a_i)^5 + \dots \right]$$

- Phương trình đường đàn hồi của đoạn thứ nhất : $i = 1$

$$v_1 = \Delta v_1 \Rightarrow v_1 = \Delta v_1 = v_0 + \varphi_0 \cdot z - \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{M_0}{2!} z^2 + \frac{Q_0}{3!} z^3 + \frac{q_0}{4!} z^4 + \frac{q'_0}{5!} z^5 \right)$$

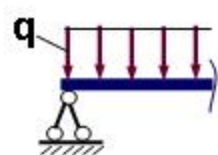
Trong đó : v_0 ; φ_0 ; M_0 ; Q_0 ; q_0 ; q'_0 là giá trị của độ võng, góc quay, mô men, lực cắt, lực phân bố, đạo hàm lực phân bố tại mặt cắt đầu trái dầm có tọa độ $z=0$.



$$v_0 \neq 0, \varphi_0 \neq 0$$

$$M_0 = M;$$

$$Q_0 = -P$$



$$v_0 = 0; \varphi_0 \neq 0$$

$$M_0 = 0; Q_0 \neq 0;$$

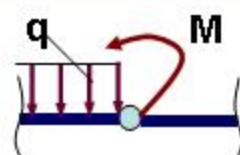
$$q_0 = -q$$



$$v_0 = 0; \varphi_0 = 0$$

$$M_0 \neq 0; Q_0 \neq 0;$$

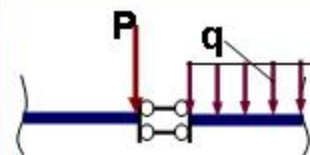
$$q_0 = 0$$



$$\Delta v = 0; \Delta \varphi \neq 0$$

$$\Delta M = -M; \Delta Q = 0$$

$$\Delta q = 0 - (-q) = q$$



$$\Delta v \neq 0; \Delta \varphi = 0$$

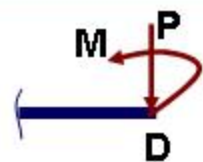
$$\Delta M = 0; \Delta Q = -P$$

$$\Delta q = -q - 0 = -q$$

2) Trình tự giải theo phương pháp thông số ban đầu:

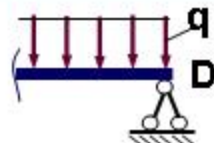
- **Chia dầm** thành n đoạn.
- **Lập bảng thông số đầu** mỗi đoạn.
- **Viết phương trình chuyển vị** và **nội lực** của từng đoạn theo công thức truy hồi.
- **Tìm điều kiện biên để xác định các thông số chưa biết.** Điều kiện biên được suy ra từ các giá trị nội lực và chuyển vị đã xác định tại các mặt cắt cụ thể trên dầm.

Một số ví dụ xác định điều kiện biên :



$$M_x^D = M$$

$$Q_y^D = P$$



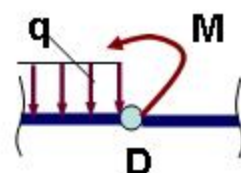
$$M_x^D = 0$$

$$v^D = 0$$



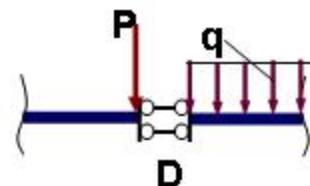
$$\varphi^D = 0$$

$$v^D = 0$$



$$M_x^{ph} = -M$$

hoặc $M_x^{tr} = 0$



$$Q_y^{tr} = P$$

hoặc $Q_y^{ph} = 0$

3) Ví dụ:

Cho một dầm tĩnh định nhiều nhịp chịu lực như hình vẽ.

- Chia dầm thành 4 đoạn.
- Lập bảng thông số ban đầu.
- Viết phương trình các đoạn:

Đoạn 1
$$v_1 = v_A + \varphi_A \cdot z + \frac{M}{EJ_x} \cdot \frac{z^2}{2!}$$

$$\varphi_1 = \varphi_A + \frac{M}{EJ_x} z$$

$$M_1 = -M$$

$$Q_1 = 0$$

Đoạn 2 ; Đoạn 3 ; Đoạn 4 .

- Điều kiện xác định các thông số chưa biết.

Tại B: $z = a$

(1) $v_B = 0 \Rightarrow v_{1(z=a)} = 0$

Tại C: $z = 2a$

(2) $M_C = 0 \Rightarrow M_{2(z=2a)} = 0$

Tại D: $z = 3a$

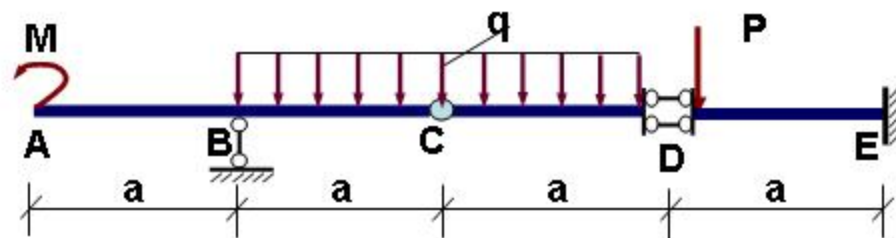
(3) $Q_D^{tr} = 0 \rightarrow Q_{3(z=3a)} = 0$

Hoặc $Q_D^{ph} = 0 \rightarrow Q_{4(z=3a)} = -P$

Tại E: $z = 4a$

(4) $v_E = 0 \rightarrow v_{4(z=4a)} = 0$

(5) $\varphi_E = 0 \rightarrow \varphi_{4(z=4a)} = 0$



| $Z=0$ | $Z=a$ | $Z=2a$ | $Z=3a$ |
|---------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $v_A=?$ | $\Delta v_B=0$ | $\Delta v_C=0$ | $\Delta v_D=?$ |
| $\varphi_A=?$ | $\Delta \varphi_B=0$ | $\Delta \varphi_C=?$ | $\Delta \varphi_D=0$ |
| $M_A=-M$ | $\Delta M_B=0$ | $\Delta M_C=0$ | $\Delta M_D=0$ |
| $Q_A=0$ | $\Delta Q_B=?$ | $\Delta Q_C=0$ | $\Delta Q_D=-P$ |
| $q_A=0$ | $\Delta q_B=-q$ | $\Delta q_C=0$ | $\Delta q_D=q$ |
| $q'_A=0$ | $\Delta q'_B=0$ | $\Delta q'_C=0$ | $\Delta q'_D=0$ |

- Vẽ biểu đồ chuyển vị và nội lực trên dầm.

BG5. Phương pháp đồ toán.

- Dựa vào các quan hệ vi phân :



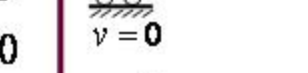



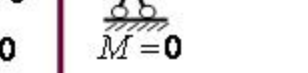

$$\begin{cases} \frac{d^2 M_x}{dz^2} = \frac{dQ_y}{dz} = q(z) \\ \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = \frac{d\varphi(z)}{dz} = -\frac{M_x}{EJ_x} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 M_{gt}}{dz^2} = \frac{dQ_{gt}}{dz} = q_{gt}$$

- Tính **chuyển vị** trên một dầm do tải trọng gây ra (**dầm thực**) bằng cách tính **nội lực** trên một dầm khác (**dầm giả**), dầm này chịu tác dụng của **tải trọng giả**:

$$q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

M_x là biểu thức mô men trên dầm thực.
 EJ_x là độ cứng chống uốn của dầm thực.

- **Dầm giả** được suy ra từ **dầm thực**. Một số trường hợp thường gặp :

| | | | | |
|-----------------|---|---|--|---|
| Dầm thực | $v=0$ $\varphi \neq 0$  | $v=0$ $\varphi=0$  | $v \neq 0$ $\varphi \neq 0$  |  |
| Dầm giả | $M=0$ $Q \neq 0$  | $M=0$ $Q=0$  | $M \neq 0$ $Q \neq 0$  |  |

- **Trình tự giải** : Vẽ biểu đồ mô men trên dầm thực.

Xác định dầm giả. Đặt tải trọng giả lên dầm giả.

Tính chuyển vị trên dầm thực.

$$v = M_{gt}; \varphi = Q_{gt}$$

Ví dụ.

Dầm giản đơn có $EJ = \text{const}$.

Tính độ võng và góc quay lớn nhất trên dầm.

Giải : Sử dụng phương pháp đồ toán.

- Vẽ biểu đồ mô men trên dầm thực.

- Dầm giả, tải trọng giả:

$$q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ}; \quad q_{gt}^C = -\frac{Pl}{4EJ}$$

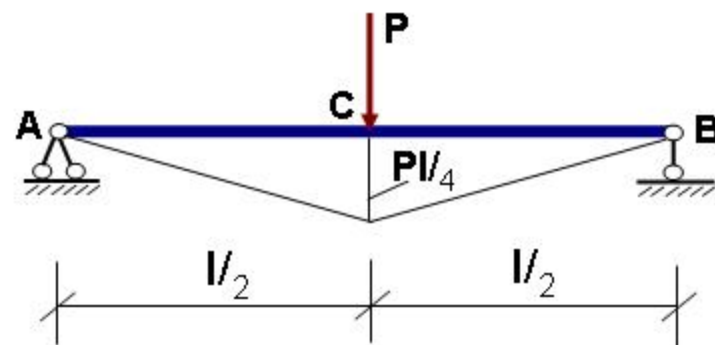
- Tính chuyển vị trên dầm thực bằng cách tính nội lực trên dầm giả.

Phản lực gối dầm giả: $R_A = R_B = \frac{Pl^2}{16EJ}$

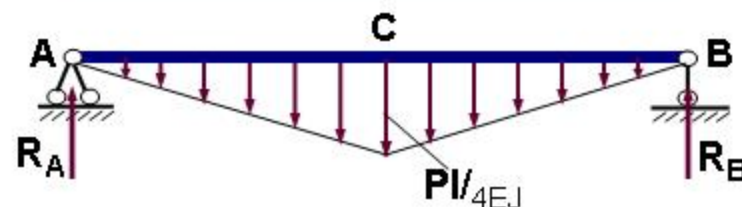
Góc quay lớn nhất trên dầm tại mặt cắt gối. $\varphi_A = -\varphi_B = \frac{Pl^2}{16EJ}$

Độ võng lớn nhất tại mặt cắt giữa dầm.

$$V_{\max} = V_C = M_{gt}^C = \frac{Pl^3}{48EJ}$$



Sơ đồ dầm giả, tải trọng giả.



Nhận xét : * Phù hợp với tính chuyển vị tại mặt cắt cụ thể.

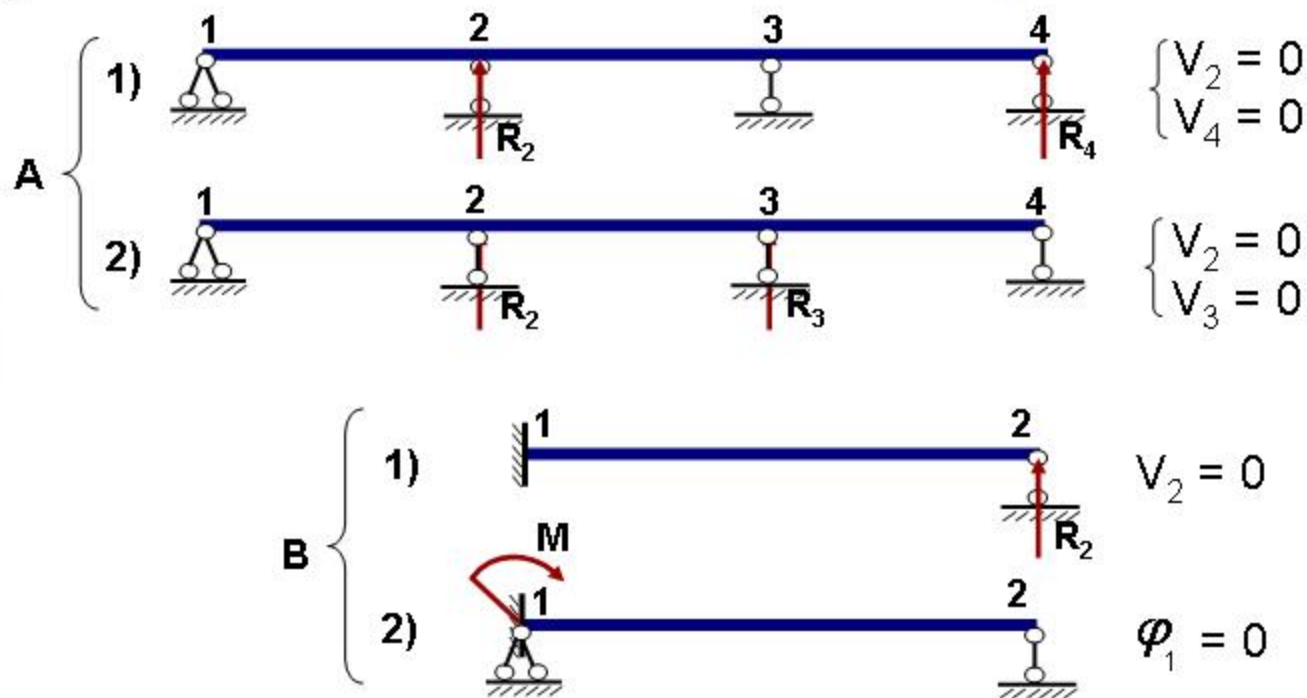
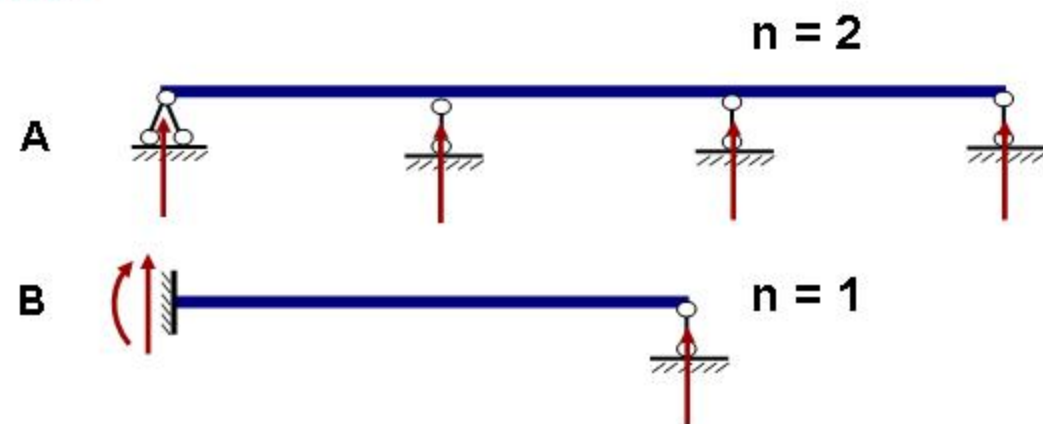
* Không thuận tiện trong trường hợp biểu đồ mô men là đường cong.

BG6. Tính dầm siêu tĩnh.

1) Khái niệm dầm siêu tĩnh.

2) Tính dầm siêu tĩnh.

- Bỏ liên kết gối thừa.



Dầm tĩnh định

- Viết phương trình hình học : dựa vào chuyển vị tại các mặt cắt có liên kết gối thừa.

Ví dụ:

Vẽ biểu đồ mô men uốn và lực cắt trên dầm chịu lực như sau. Dầm có độ cứng $EJ = \text{const}$.

Giải:

- Tính phản lực gối R_B bằng phương trình biến dạng:

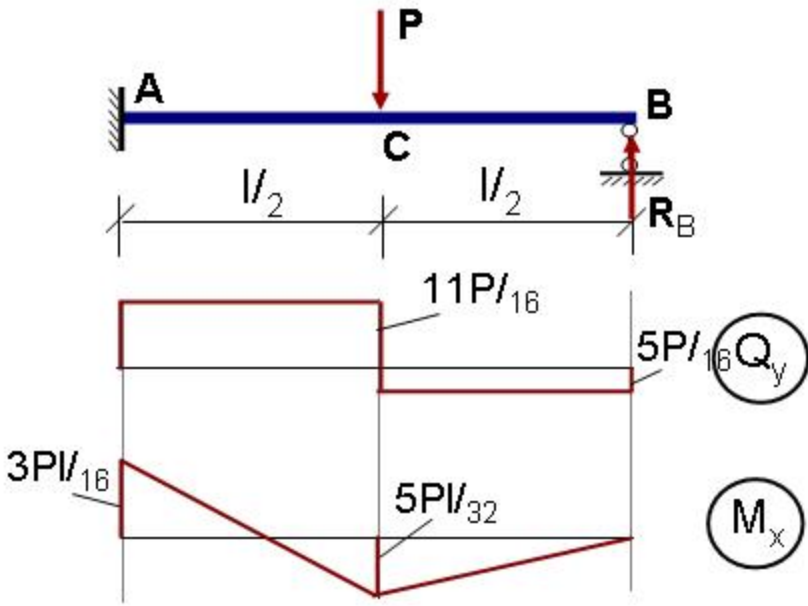
$$V_B = V_B^P + V_B^{R_B} = 0$$

$$V_B^{R_B} = \frac{R_B l^3}{3EJ}; V_B^P = -\frac{5Pl^3}{48EJ}$$

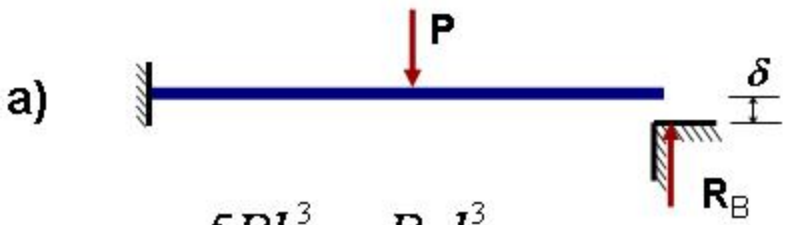
Giải phương trình:

$$\frac{5Pl^3}{48EJ} - \frac{R_B l^3}{3EJ} = 0 \rightarrow R_B = \frac{5P}{16}$$

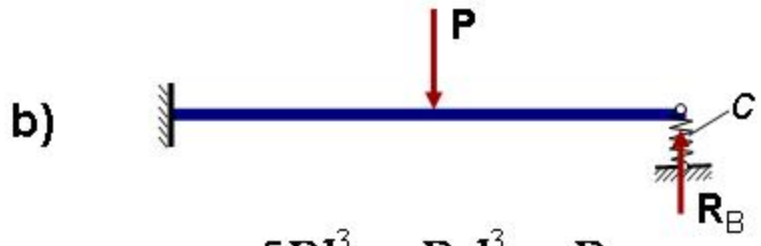
- Vẽ biểu đồ nội lực.



*** Phương trình biến dạng với một số dạng liên kết thừa:**



$$V_B = \delta \Rightarrow \frac{5Pl^3}{48EJ} - \frac{R_B l^3}{3EJ} = \delta$$



$$V_B = \lambda_{ix} \Rightarrow \frac{5Pl^3}{48EJ} - \frac{R_B l^3}{3EJ} = \frac{R_B}{c}$$

BG7. Tính độ cứng và mặt cắt hợp lý về độ cứng.

1. Tính về độ cứng.

- Điều kiện về độ cứng của dầm.

$$\frac{f_{\max}}{l} \leq \left[\frac{f}{l} \right]$$

f_{\max} là độ võng lớn nhất trên dầm.

l chiều dài nhịp dầm.

$\left[\frac{f}{l} \right]$ Giá trị được quy định trong Tiêu chuẩn kỹ thuật của mỗi ngành.
Ví dụ ngành xây dựng công trình:

$$\left[\frac{f}{l} \right] = \frac{1}{800} \div \frac{1}{400}$$

- Ba bài toán tính về độ cứng của dầm.

2. Mặt cắt hợp lý về độ cứng.

Dựa theo độ cứng chống uốn EJ_x của dầm thì các mặt cắt có J_x càng lớn càng làm dầm cứng hơn. Như vậy mặt cắt hợp lý xét về độ cứng cũng tương tự như xét về độ bền.

***Câu hỏi:**

1; 2; 7; 8; 9; 10; 11.

***Bài tập:**

1; 2; 4; 6; 9; 10; 11; 12; 13; 15; 20; 22; 23; 31.

TRƯỜNG TRUNG CẤP CẦU ĐƯỜNG VÀ DẠY NGHỀ
KHOA CẦU ĐƯỜNG



BÀI GIẢNG
MÔN HỌC : SỨC BỀN VẬT LIỆU

Giáo viên : Nguyễn Phú Bình
Bộ môn : Cơ sở
Hệ đào tạo : Trung cấp Cầu đường
Thời gian : 24 tháng
Số tiết : 40 tiết

Chương 1
NHỮNG KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ SỨC BỀN VẬT LIỆU

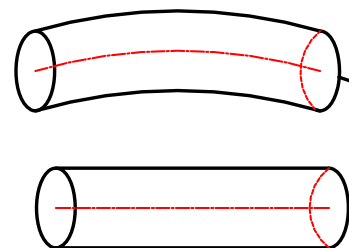
Sức bền vật liệu là một môn học nghiên cứu các phương pháp tính toán về độ bền, độ cứng và độ ổn định của các bộ phận công trình hay chi tiết máy dưới tác dụng của ngoại lực, sự thay đổi nhiệt độ...

Ở môn học Cơ học lý thuyết, ta mới xét sự cân bằng của vật thể (xem là rắn tuyệt đối) dưới tác dụng của hệ lực phẳng. Nhưng thực tế, các vật thể mà ta khảo sát, nghiên cứu đều là vật rắn thực, điều đó bắt buộc ta phải xét đến sự biến dạng của vật thể trong quá trình chịu tác dụng của hệ lực (bên ngoài). Trong phạm vi môn học này, sẽ giới thiệu một số khái niệm cơ bản về ngoại lực, nội lực... và các giả thiết nhằm đơn giản cho việc nghiên cứu và tính toán.

1.1. Những khái niệm cơ bản về ngoại lực, nội lực, ứng suất, biến dạng

1.1.1. Các giả thiết đối với vật liệu

Môn học Sức bền vật liệu, đối tượng mà ta nghiên cứu khảo sát vật rắn thực: đó là một thanh, một cấu kiện hay một bộ phận công trình nào đó. Thường hình dạng của vật rắn thực được nghiên cứu có dạng thanh thẳng, thanh cong hoặc thanh bất kỳ (hình 1.1). Vật liệu cấu tạo nên thanh có thể là thép, gang... Tuy vậy, khi nghiên cứu nếu xét đến mọi tính chất thực của vật thể sẽ phức tạp, do đó để đơn giản chúng ta chỉ những tính chất cơ bản và lược bỏ đi những tính chất thứ yếu không có ảnh hưởng lớn đến kết quả nghiên cứu và tính toán. Muốn vậy, chúng ta phải đề ra các giả thiết cơ bản, nêu lên một số tính chất chung cho vật liệu. Các giả thuyết về vật liệu là:



Hình 1.1

a) *Giả thiết 1: Vật liệu có tính liên tục, đồng chất và đẳng hướng.*

Một vật liệu được xem là *liên tục và đồng chất* khi trong thể tích của vật thể đều có vật liệu (hoàn toàn không có khe hở) và tính chất của vật liệu ở mọi điểm trong vật thể đều như nhau.

Tính *đẳng hướng* của vật liệu nghĩa là tính chất của vật liệu theo mọi phương đều như nhau. Giả thiết này phù hợp với thép, đồng còn với gạch, đá, gỗ thì không hoàn toàn phù hợp.

b) *Giả thiết 2: Giả thuyết vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi và tính đàn hồi của vật liệu xem là đàn hồi tuyệt đối.*

Trong thực tế, dù lực bé đến đâu, vật liệu cũng không có tính đàn hồi tuyệt đối. Song qua thực nghiệm cho thấy: khi lực chưa vượt quá một giới hạn nhất định thì biến dạng dư trong vật thể là bé nên có thể bỏ qua được và biến dạng của vật thể được xem là tỷ lệ thuận với lực gây ra biến dạng đó. Giả thuyết này chính là nội dung định luật Húc. Thực tế giả thuyết này chỉ phù hợp với vật liệu là thép, đồng...

c) *Giả thiết 3: Biến dạng của vật thể do ngoại lực gây ra được xem là bé.*

Giả thiết này thừa nhận được vì trong thực tế biến dạng của vật thể so với kích thước của chúng nói chung là rất nhỏ. Từ giả thiết 3 này, trong quá trình chịu lực, trong nhiều trường hợp, ta có thể xem điểm đặt của ngoại lực là không thay đổi khi vật thể bị biến dạng.

1.1.2. Các khái niệm về ngoại lực, nội lực, phương pháp mặt cắt

a) *Ngoại lực*: Ngoại lực là lực tác động từ những vật thể khác hoặc môi trường xung quanh lên vật thể đang xét.

Ngoại lực bao gồm: Lực tác động (còn gọi là tải trọng) và phản lực liên kết (xem hình 1.2). Có thể phân loại ngoại lực theo nhiều cách, ở đây ta phân loại ngoại lực theo hai cách:

- Theo cách tác dụng của các ngoại lực: có thể chia ngoại lực thành hai loại: tập trung và lực phân bố.

+ Lực tập trung: là lực tác dụng lên vật thể trên một diện tích truyền lực rất bé so với kích thước của vật thể, nên ta coi như một điểm trên vật.

Ví dụ: Áp lực của bánh xe lửa trên đường ray là một lực tập trung. Lực tập trung có thể là lực đơn vị Niuton (N), hoặc ngẫu lực (hay mômen tập trung), đơn vị của mômen tập trung là Niuton mét (Nm).

Cách biểu diễn lực tập trung và mômen tập trung (xem hình 1.3).

+ Lực phân bố: là lực tác dụng liên tục trên một đoạn dài hay trên một diện tích truyền lực nhất định trên vật thể.

Ví dụ: Áp lực gió lên tường biên của nhà là phân bố theo diện tích. Lực phân bố theo chiều dài có đơn vị N/m. Lực phân bố theo diện tích có đơn vị N/m². Lực phân bố có trị số bằng nhau tại mọi điểm (được gọi là lực phân bố đều – hình 1.4a) hoặc không bằng nhau (được gọi là lực phân bố không đều) (hình 1.4b).

- Theo tính chất tác dụng (về thời gian) của tải trọng có thể chia ngoại lực thành hai loại: tải trọng tĩnh và tải trọng động.

+ Tải trọng tĩnh là tải trọng khi tác dụng lên vật thể có trị số tăng dần từ không đến một giá trị nhất định và sau đó không thay đổi (hoặc thay đổi rất ít).

Ví dụ: Trọng lượng của mái nhà, áp lực của nước lên thành bể.

+ Tải trọng động là loại tải trọng, hoặc có giá trị thay đổi trong thời gian rất ngắn từ giá trị không đến giá trị cuối cùng hoặc làm cho vật thể bị dao động.

Ví dụ: Lực của búa máy đóng vào đầu cọc, động đất...

b) *Nội lực*:

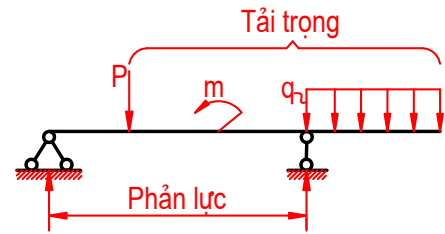
Trong một vật thể giữa các phân tử có các lực liên kết để giữ cho vật thể có hình dạng nhất định. Khi ngoại lực tác dụng, các lực liên kết đó sẽ tăng lên để chống lại sự biến dạng do ngoại lực gây ra. Độ tăng đó của lực liên kết được gọi là *nội lực*.

Như vậy, nội lực chỉ xuất hiện khi có ngoại lực đó. Nhưng do tính chất cơ học của vật liệu, nội lực chỉ tăng đến một trị số nhất định nếu ngoại lực tăng quá lớn, nội lực không tăng được nữa, lúc này vật liệu bị biến dạng quá mức và bị phá hỏng. Vì vậy, việc xác định nội lực phát sinh trong vật thể khi chịu tác dụng của ngoại lực là một vấn đề cơ bản của SBVL.

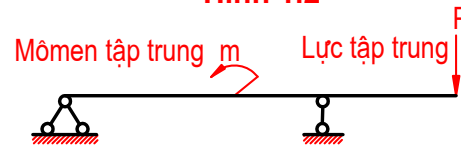
c) *Phương pháp mặt cắt*:

Giả sử có một vật thể cân bằng dưới tác dụng ngoại lực, tưởng tượng dùng một mặt phẳng cắt vật thể đó ra hai phần A và B (hình 1.5a).

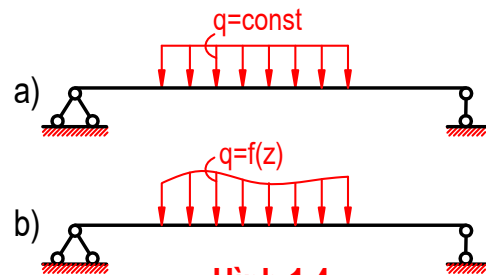
Giả sử bỏ đi phần B, giữ lại phần A để xét. Rõ ràng để phần A được cân bằng, thì trên mặt cắt phải có hệ lực phân bố. Hệ lực này chính là những nội lực cần tìm (hình 1.5b).



Hình 1.2

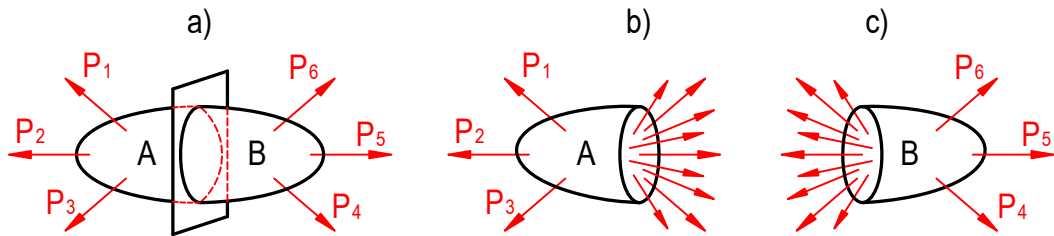


Hình 1.3



Hình 1.4

Hệ nội lực đó chính là của phần B tác dụng lên phần A. Từ đây ta có thể suy rộng ý nghĩa của nội lực là: “*Nội lực là lực tác động của bộ phận này lên bộ phận kia của vật thể*”.



Hình 1.5

Dựa vào khái niệm đó và căn cứ vào nguyên lý tác dụng và phản tác dụng, trên mặt cắt phần B cũng có nội lực: đó chính là lực tác dụng của phần A lên phần B. Nội lực trên mặt cắt phần A và phần B có trị số bằng nhau, cùng phương nhưng ngược chiều, vì vậy khi tính nội lực, tùy ý có thể xét một trong hai phần vật thể. Mặt khác, vì phần A (hoặc phần B) cân bằng nên nội lực và ngoại lực tác dụng lên phần đó tạo thành một hệ lực cân bằng. Căn cứ vào điều kiện cân bằng tĩnh học của phần đang xét ta có thể tính được nội lực đó.

Trong trường hợp vật thể đàn hồi là một thanh, mặt cắt được xét là mặt cắt ngang thì khi ta thu gọn hợp lực của hệ nội lực về trọng tâm O của mặt cắt, sẽ cho ta một lực R và một mômen M_0 . Nói chung R và M_0 có phương, chiều bất kỳ trong không gian. Ta phân tích R thành ba thành phần (hình 1.6), thành phần trên trục z gọi là lực dọc và ký hiệu là N_z , các thành phần trên trục x và y gọi là lực cắt và ký hiệu là Q_x, Q_y ; mômen M_0 cũng được phân tích thành ba thành phần quay chung quanh ba trục là M_x, M_y, M_z . Các mômen: M_x, M_y được gọi là mômen uốn và M_z được gọi là mômen xoắn. Sáu thành phần đó được gọi là sáu thành phần của nội lực.

Dùng các phương trình cân bằng tĩnh học ta có thể xác định được các thành phần nội lực đó theo các ngoại lực. Với các phương trình hình chiếu lên các trục tọa độ:

$$\Sigma z = 0; \Sigma y = 0; \Sigma x = 0$$

$$\Rightarrow \text{ta tìm được } N_z, Q_y, Q_x.$$

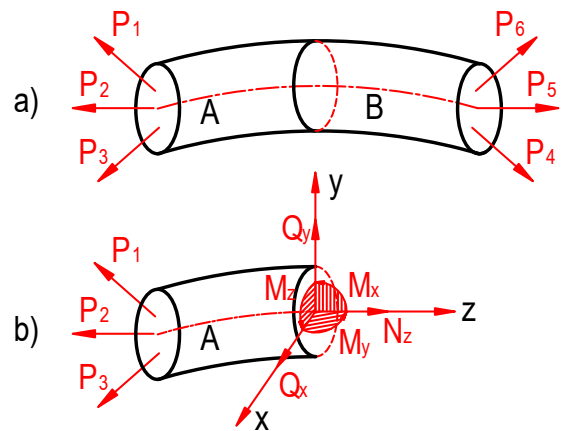
Với các phương trình mômen đối với các trục tọa độ:

$$\Sigma M_z = 0; \Sigma M_x = 0; \Sigma M_y = 0$$

$$\Rightarrow \text{ta tìm được } M_z, M_x, M_y.$$

Ta thường gặp tải trọng nằm trong mặt phẳng đối xứng yOz. Khi đó các thành phần nội lực: $Q_x = 0, M_z = 0, M_y = 0$. Như vậy trên các mặt cắt lúc này chỉ còn 3 thành phần nội lực N_z, Q_y và M_x . Như vậy phương pháp mặt cắt cho phép ta xác định được các thành phần nội lực trên mặt cắt ngang bất kỳ của thanh khi thanh chịu tác dụng của ngoại lực.

Cần chú ý rằng nếu ta xét sự cân bằng của một phần nào đó thì nội lực trên mặt cắt có thể coi như ngoại lực tác dụng lên phần đó.



Hình 1.6

1.1.3 Ứng suất

Căn cứ vào giả thuyết cơ bản 1 về sự liên tục của vật liệu, ta có thể giả định nội lực phân bố liên tục trên toàn mặt cắt, để biết sự phân bố nội lực ta hãy đi tìm trị số của nội lực tại một điểm nào đó trong vật thể.

Giả sử tại điểm K chẳng hạn, xung quanh điểm K lấy một diện tích khá nhỏ ΔF . Hợp lực của nội lực trên diện tích ΔF là ΔP . Ta có tỷ số: $\frac{\Delta P}{\Delta F} = \vec{P}_{tb}$

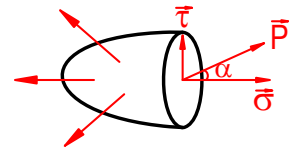
P_{tb} được gọi là ứng suất trung bình tại K.

Khi cho $\Delta F \rightarrow 0$ thì $\vec{P}_{tb} \rightarrow \vec{P}$ và \vec{P} được gọi là ứng suất tại K, còn gọi là ứng suất toàn phần. Như vậy: *ứng suất toàn phần tại P tại điểm bất kỳ trên mặt cắt là tỷ số giữa trị số nội lực tác dụng trên phân tố diện tích bao quanh điểm K đó với chính diện tích đó.*

Đơn vị của ứng suất P là: N/m^2 ; kN/m^2 ; MN/m^2 .

Từ định nghĩa trên ta có thể xem ứng suất toàn phần P là trị số nội lực trên một đơn vị diện tích. Biểu diễn ứng suất toàn phần P bằng một véc tơ đi qua điểm đang xét trên mặt cắt:

- Phân ứng suất toàn phần \vec{P} ra thành hai thành phần: ứng suất thành phần có phương tiếp tuyến với mặt cắt được gọi là *ứng suất tiếp*, ứng suất thành phần có phương vuông góc với mặt cắt được gọi là *ứng suất pháp* (hình 1.7). Ứng suất tiếp ký hiệu là τ (đọc là tô). Ứng suất pháp ký hiệu là σ (đọc là xích ma). Nếu α là góc hợp bởi ứng suất toàn phần P và phương pháp tuyến thì:



Hình 1.7

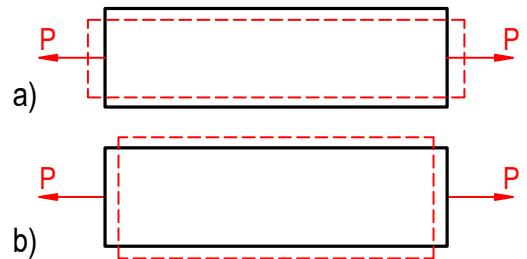
$$\sigma = P \cdot \cos \alpha ;$$

$$\tau = P \sin \alpha ;$$

1.1.4. Các loại biến dạng:

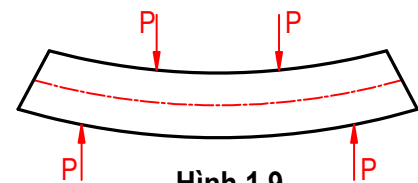
Vật thể khảo sát (dưới dạng thanh) là vật rắn thực. Dưới tác dụng của ngoại lực, vật rắn có biến dạng ít hay nhiều. Trong mục này ta xét các biến dạng của vật rắn thực (thanh) khi chịu tác dụng của lực.

Khi thanh chịu tác dụng của những lực đặt dọc theo trục thanh thì thanh bị giãn ra hay co lại. Ta gọi thanh chịu kéo hay nén (hình 1.8). Trong quá trình biến dạng trục thanh vẫn thẳng (đường đứt nét biểu diễn hình dạng của thanh sau khi biến dạng).



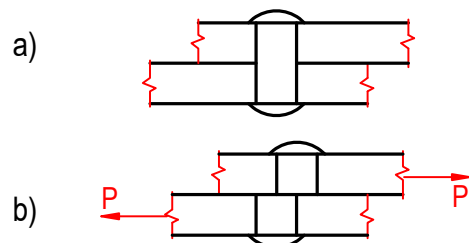
Hình 1.8

Khi thanh chịu tác dụng của các lực vuông góc với trục thanh, trục thanh bị uốn cong, ta gọi thanh chịu uốn (hình 1.9).



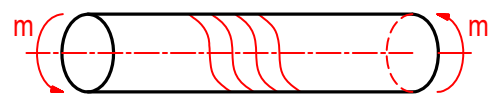
Hình 1.9

Có trường hợp, dưới tác dụng của ngoại lực, một phần này của thanh có xu hướng trượt trên phần khác. Biến dạng trong trường hợp này gọi là biến dạng trượt. Ví dụ: Trường hợp chịu lực của đinh tán (hình 1.10).



Hình 1.10

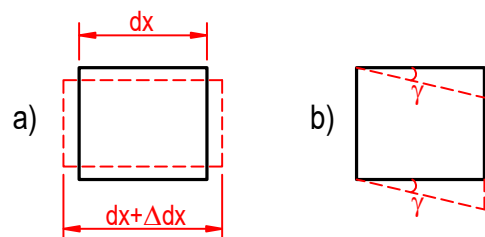
Khi ngoại lực nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục thanh và tạo thành các ngẫu lực trong mặt phẳng đó thì làm cho thanh bị xoắn (hình 1.11). Sau biến dạng các đường sinh ở bề mặt ngoài trở thành các đường xoắn ốc.



Hình 1.11

Ngoài các trường hợp đơn giản đó, trong thực tế còn gặp nhiều trường hợp chịu lực phức tạp. Biến dạng của thanh có thể vừa kéo đồng thời vừa uốn, vừa xoắn.

Xét biến dạng một phân tố trên một thanh biến dạng, tách ra khỏi thanh một phân tố hình



Hình 1.12

hộp rất bé. Biến dạng của phân tử có thể ở một trong các dạng sau:

- Nếu trong quá trình biến dạng mà góc vuông của phân tử không thay đổi, chỉ có các cạnh của phân tử bị co giãn, ta nói phân tử có *biến dạng kéo hoặc nén* (hình 1.12a).

- Nếu trong quá trình biến dạng, các cạnh của phân tử không thay đổi nhưng các góc vuông của phân tử bị thay đổi không vuông góc nữa, ta nói phân tử có *biến dạng trượt* (hình 1.12b).

Gọi γ là độ thay đổi của góc vuông thì γ được gọi là *góc trượt*.

Với một vật thể bị biến dạng dưới tác dụng của ngoại lực, nói chung các điểm trong lòng vật thể không còn ở vị trí cũ nữa, mà chúng dời đến một vị trí mới nào đó. Độ chuyển dời đó gọi là *chuyển vị*.

1.2. Nguyên lý độc lập tác dụng

Nội dung của nguyên lý độc lập tác dụng: “*Kết quả tác dụng gây ra do một hệ lực thì bằng tổng kết quả gây ra do từng lực trong hệ đó tác dụng một cách riêng biệt*”.

Thí dụ: Xét dầm AB trên hình 1.13. Dưới tác dụng của lực P_1, P_2 điểm C có độ chuyển dời CC' . Sơ đồ chịu lực của dầm AB có thể phân thành hai sơ đồ chịu lực:

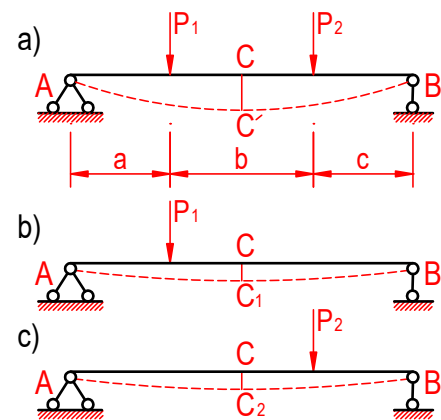
- Với sơ đồ dầm chỉ chịu tác dụng của P_1 thì độ dịch chuyển của điểm C là CC_1 .

- Với sơ đồ dầm chỉ chịu tác dụng của P_2 thì độ dịch chuyển của điểm C là CC_2 .

Theo nguyên lý độc lập tác dụng thì:

$$CC' = CC_1 + CC_2.$$

* **Chú ý:** Nguyên lý độc lập tác dụng của các lực chỉ sử dụng được trong điều kiện vật liệu tuân theo giả thiết 2 và 3.



Hình 1.13

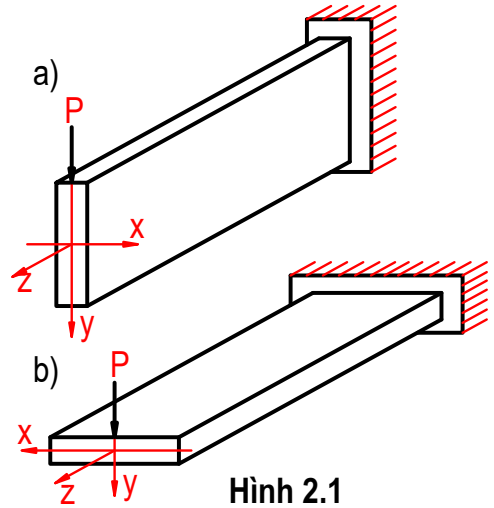
CÂU HỎI CHƯƠNG 1

1. Nêu những giả thiết cơ bản về vật liệu của môn học SBVL? Nguyên lý độc lập tác dụng của lực?
2. Ngoại lực, nội lực là gì? Phân loại chúng như thế nào?
3. Ứng suất là gì? Có mấy loại ứng suất? Đơn vị của ứng suất?
4. Trình bày phương pháp mặt cắt để xác định nội lực?

Chương 2 ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA TIẾT DIỆN

2.1. Khái niệm ban đầu

Xét hai trường hợp chịu uốn của một thanh như trên hình vẽ (hình 2.1). Bằng trực giác ta dễ dàng nhận thấy rằng: nếu tác dụng lực như hình vẽ 2.1a thanh sẽ có khả năng chịu lực lớn hơn cách tác dụng lực như trường hợp trên hình vẽ 2.1b. Như vậy ở đây khả năng chịu lực của thanh còn tùy thuộc vào phương tác dụng của lực đối với mặt cắt. Do vậy, ngoài đặc trưng hình học là diện tích mặt cắt F của thanh, còn có những đặc trưng hình học khác của mặt cắt ngang. Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu các đặc trưng hình học nói trên.



2.2 Mômen tĩnh của hình phẳng

Giả sử có một hình phẳng có diện tích F nằm trong mặt phẳng của hệ trục tọa độ xOy (hình 2.2). Xét một vi phân diện tích dF có tọa độ là x, y . Nếu lấy tích phân biểu thức $y dF$ và $x dF$ trên toàn bộ diện tích F ta được:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \int_F y dF \\ S_y &= \int_F x dF \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

S_x, S_y gọi là *mômen tĩnh* của hình phẳng diện tích F đối với trục Ox, Oy .

Nếu dùng đơn vị diện tích là m^2 , chiều dài là m thì đơn vị của mômen tĩnh là m^3 .

Nếu biết được diện tích của hình và tọa độ trọng tâm của nó đối với hệ trục xOy ta có:

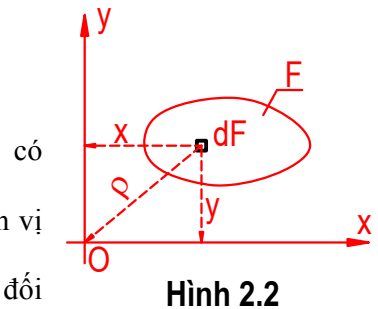
$$\left. \begin{aligned} \int_F y dF &= y_c F \\ \int_F x dF &= x_c F \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Trong đó: y_c, x_c là tọa độ trọng tâm C của hình phẳng hay khoảng cách (có mang dấu) từ trọng tâm C của hình đến các trục tọa độ Ox, Oy .

F - là diện tích của hình.

Do đó ta có thể viết:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= y_c \times F \\ S_y &= x_c \times F \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$



Từ (2.3) có thể rút ra công thức xác định tọa độ trọng tâm C của hình phẳng:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{S_y}{F} \\ y_c &= \frac{S_x}{F} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Khi $x_c = y_c = 0$ tức là trục x và trục y đi qua trọng tâm của hình thì $S_x = S_y = 0$. Cho nên mômen tĩnh của diện tích hình phẳng đối với trục bất kỳ đi qua trọng tâm của nó luôn bằng không. Người ta gọi trục đi qua trọng tâm của hình là *trục trung tâm*. Giao điểm của hai trục trung tâm thì được gọi là *trọng tâm của mặt cắt*. Mômen tĩnh của hình phẳng có thể có dấu (+) hoặc (-) tùy thuộc vào dấu của tọa độ trong các công thức (2.1), (2.4).

Chú ý: Khi tính mômen tĩnh của hình phẳng có dạng phức tạp, ta chia hình đó ra thành nhiều hình đơn giản, sau đó lấy tổng đại số các mômen tĩnh của các hình đơn giản hợp thành.

2.3. Mômen quán tính của hình phẳng

2.3.1. Các định nghĩa về mômen quán tính

Giả sử có một hình phẳng có diện tích F, một hệ trục Oxy đi qua trọng tâm của hình (hình 2.2).

- Nếu lấy tích phân biểu thức $y^2 dF$, $x^2 dF$ trên toàn bộ diện tích F của hình ta được:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_F y^2 \times dF \\ J_y &= \int_F x^2 \times dF \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

J_x, J_y gọi là *mômen quán tính* của hình phẳng có diện tích F đối với trục Ox và Oy.

- Nếu lấy tích phân biểu thức $x.y.dF$ trên toàn bộ diện tích của hình, ta có:

$$J_{xy} = \int_F x \times y \times dF \quad (2.6)$$

J_{xy} gọi là *mômen quán tính ly tâm* của hình phẳng có diện tích F đối với hệ trục Oxy.

Gọi ρ là khoảng cách từ vi phân diện tích dF đến điểm O (gốc tọa độ) nằm trong mặt phẳng của hình (hình 2.2). Lấy tích phân biểu thức $\rho^2 dF$ trên toàn bộ diện tích, ta được:

$$J_0 = \int_F \rho^2 \times dF \quad (2.7)$$

J_0 gọi là *mômen quán tính độc cực* của hình phẳng đối với điểm O.

Theo hình 2.2 ta có: $\rho^2 = x^2 + y^2$ (2.8)

Thay 2.8 vào 2.7 ta có: $J_0 = \int_F \rho^2 dF = \int_F (x^2 + y^2) dF = \int_F y^2 dF + \int_F x^2 dF$

Hay là: $J_0 = J_x + J_y$ (2.9)

Vậy: *Mômen quán tính độc cực của hình phẳng bằng tổng các mômen quán tính của hình phẳng đối với hai trục vuông góc giao nhau tại điểm đó.*

Đơn vị của các loại mômen quán tính kể trên là m^4 .

Các loại mômen quán tính đối với một trục (J_x, J_y) hay đối với một điểm (J_0) luôn luôn có dấu dương vì trong các biểu thức định nghĩa của chúng ta có các bình phương khoảng cách x, y và ρ . Còn mômen quán tính ly tâm (J_{xy}) có thể có dấu dương hoặc âm tùy thuộc vào dấu các tọa độ x, y và do đó có thể bằng 0.

Chú ý: Khi xác định mômen quán tính của các hình có dạng phức tạp, ta cũng chia hình thành các hình đơn giản để tính, sau đó cộng các mômen quán tính của hình đơn giản hợp thành.

2.3.2. Trục quán tính chính trung tâm

Nếu mômen quán tính ly tâm của một hình đối với một hệ trục Oxy bằng không thì ta gọi hệ trục Oxy là *hệ trục quán tính chính*, gọi tắt là *hệ trục chính*:

$$J_{xy} = 0$$

Người ta cũng chứng minh được rằng với hệ trục quán tính chính Oxy, mômen quán tính của hình phẳng đối với một trong hai trục đó là cực đại (J_{\max}) còn đối với trục kia là cực tiểu (J_{\min}) so với bất kỳ trục nào khác, đi qua gốc O của hệ trục. Nếu hệ trục chính có gốc trùng với trọng tâm hình phẳng thì được gọi là *hệ trục quán tính chính trung tâm*. Hệ trục quán tính chính trung tâm là hệ trục mômen tĩnh và mômen quán tính ly tâm luôn bằng không:

$$\begin{cases} S_x = S_y = 0 \\ J_{xy} = 0 \end{cases}$$

Mômen quán tính của hình phẳng đối với hệ trục chính trung tâm gọi là *mômen quán tính chính trung tâm*.

Các hình phẳng có ít nhất một trục đối xứng thì rất dễ dàng xác định được hệ trục quán tính chính trung tâm. Hệ trục chính trung tâm đó gồm trục đối xứng và trục trung tâm vuông góc với trục đối xứng. Ta chứng minh điều này:

Giả sử có hình chữ T (hình 2.3) có trục đối xứng y, trục trung tâm x vuông góc với y đi qua trọng tâm O của hình. Nếu xem hình đã cho ghép bởi hai hình A và B thì mômen quán tính ly tâm của toàn hình là:

$$J_{xy} = J_{xy}^A + J_{xy}^B$$

Trong đó: J_{xy}^A, J_{xy}^B là mômen quán tính ly tâm của hình A và B đối với hệ trục Oxy.

Ta xét phân tử đối xứng dF . Trên mỗi phần A và B, tung độ y của phân tử có cùng trị số và dấu. Hoành độ x của phân tử có cùng trị số dấu nhưng ngược dấu. Do đó sau khi thực hiện tích phân $x.y.dF$ theo công thức (2.6) trong mỗi phần A và B được:

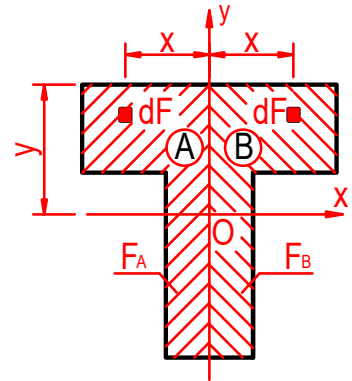
$$J_{xy}^A = -J_{xy}^B. \text{ Vậy: } J_{xy} = -J_{xy}^B + J_{xy}^A = 0$$

Mặt khác trọng tâm O của mặt cắt nằm trên trục đối xứng y nên từ O nếu vẽ trục x vuông góc với trục y, ta sẽ có hệ trục Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm của hình chữ T. Đó là điều phải chứng minh.

Nếu một hình phẳng có hai hoặc nhiều trục đối xứng thì từ kết quả ta có thể suy ra rằng hai trục đối xứng vuông góc với nhau tạo thành một hệ trục quán tính chính trung tâm.

Để giải quyết các bài toán sau này về chịu lực của thanh ta cần phải biết các trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt thanh.

Trong thực tế thường gặp những mặt cắt có trục đối xứng, còn mặt cắt không trục đối xứng thì ít gặp, nên việc xác định hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt thường dễ dàng hơn.



Hình 2.3

2.3.3. Mômen quán tính của một số hình đơn giản

a. Hình chữ nhật:

Một hình chữ nhật có chiều dài là h , chiều rộng là b . Hệ trục quán tính chính trung tâm là Oxy, trong đó trục x song song với cạnh b , trục y song song với cạnh h (hình 2.4). Ta tính mômen quán tính trung tâm J_x . Theo công thức định nghĩa, ta có:

$$J_x = \int_F y^2 dF$$

Xét một vi phân diện tích dF giới hạn bởi hai đường song song với trục y và cách nhau bởi một đoạn dy . Diện tích của nó là:

$$dF = b \cdot dy$$

Áp dụng công thức 2.5, ta được:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \quad \text{Vậy:}$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} \quad (2.11)$$

Đó là công thức tính mômen quán tính chính trung tâm của hình chữ nhật đối với trục trung tâm x .

Bằng phương pháp tương tự, ta tính được mômen quán tính của hình chữ nhật đối với trục trung tâm y :

$$J_y = \frac{hb^3}{12} \quad (2.12)$$

b. Hình tam giác:

Có một hình tam giác, cạnh đáy là b , chiều cao h , hệ trục Oxy, trong đó trục x song song với cạnh đáy b và đi qua trọng tâm C của tam giác (hình 2.5). Để tính J_x ta lấy vi phân diện tích dF là dải phân tử song song với trục x , có chiều dày dy , với:

$$dF = b_y \cdot dy$$

Trong đó: $\frac{b_y}{b} = \frac{\frac{2}{3} \times h - y}{h} \Rightarrow b_y = \frac{b}{h} \times \left(\frac{2h}{3} - y \right)$.

Thay vào, ta có: $dF = b_y dy = \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - y \right) dy$

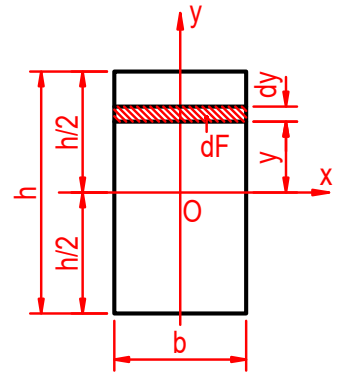
Áp dụng công thức 2.5 ta được:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}} \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{3} - y \right) y^2 dy = \frac{b}{h} \left(\frac{2h}{9} y^3 - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2h}{3}}$$

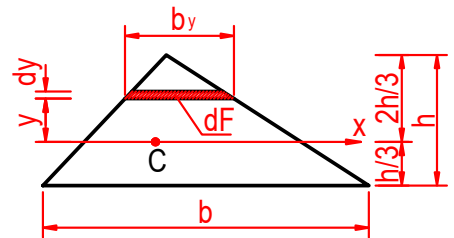
$$\Rightarrow J_x = \frac{bh^3}{36} \quad (2.13)$$

Đó là công thức tính mômen quán tính của hình tam giác đối với trục trung tâm x song song với cạnh đáy b .

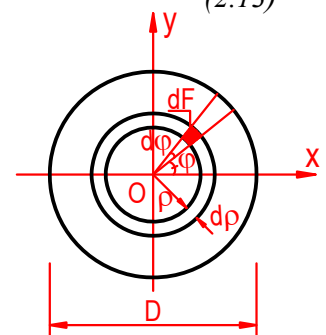
c. Hình tròn:



Hình 2.4



Hình 2.5



Hình 2.6

Để đơn giản, ta tính mômen quán tính của hình tròn đối với điểm C (chính là trọng tâm mặt cắt), theo định nghĩa :

$$J_0 = \int_F \rho^2 dF$$

Trong đó chọn dF là hình được giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính: ρ , $(\rho + d\rho)$ và hai đường bán kính lập với trục x góc φ , $(\varphi + d\varphi)$ như hình 2.6.

Ta có: $dF = \rho \cdot d\varphi \cdot d\rho = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$

$$\Rightarrow J_0 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho d\rho \cdot d\varphi$$

Khai triển biểu thức tích phân, ta có:

$$J_0 = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4 \quad (2.14)$$

Vì tính đối xứng của hình tròn, ta có $J_x = J_y$.

Ta có: $J_0 = J_x + J_y$

$$\text{Suy ra: } J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4} \approx 0,05D^4 \quad (2.15)$$

Do đó, khi trục trung tâm y thẳng góc với trục x, ta có: $J_x = J_y$.

Vậy theo công thức (4.9): $J_0 = J_x + J_y = 2J_x$

$$J_0 = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0,1D^4 \quad (2.16)$$

(2.16) là công thức tính mômen quán tính độc cực của hình tròn.

d. Hình vành khăn

Mômen quán tính của hình vành khăn đối với trục trung tâm bất kỳ x của hình bằng hiệu của mômen quán tính của hình tròn có đường kính lớn với mômen quán tính của hình tròn có đường kính nhỏ, tức là:

$$J_x = \frac{\pi \times R^4}{4} - \frac{\pi \times r^4}{4}$$

$$J_x = \frac{\pi \times R^4}{4} (1 - \eta^4) = \frac{\pi \times D^4}{64} (1 - \eta^4)$$

$$\approx 0,05 \times D^4 \times (1 - \eta^4) \quad (2.17)$$

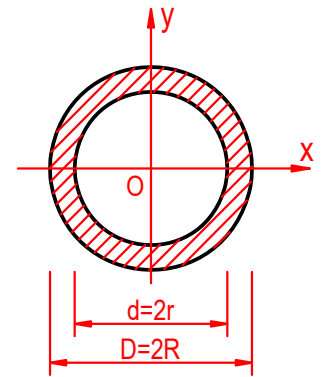
Trong đó: η là tỷ số giữa hai bán kính hoặc tỷ số giữa hai đường

kính nhỏ và lớn: $\eta = \frac{r}{R} = \frac{d}{D}$

Bằng phương pháp tương tự như trên, ta chứng minh được công thức tính mômen độc cực của hình vành khăn đối với trọng tâm của hình:

$$J_0 = \frac{\pi \times R^4}{2} \times (1 - \eta^4) = \frac{\pi \times D^4}{32} \times (1 - \eta^4) \approx 0,1 \times (1 - \eta^4)$$

(2.18)



Hình 2.7

2.3.4. Mômen quán tính với các trục song song

Ở đây ta sẽ nghiên cứu cách tính mômen quán tính của hình phẳng đối với trục song song với trục trung tâm của hình, mà đối với trục đó, ta đã biết trước mômen quán tính của hình. Xét một hình phẳng có diện tích F. Hệ trục Ox , Oy vuông góc đi qua trọng tâm O của hình.

Hệ trục $O_1x_1y_1$ song song với hệ trục Oxy . Khoảng cách giữa các trục song song x và x_1 là a , giữa y và y_1 là b . Xét vi phân diện tích dF có tọa độ x, y và x_1, y_1 (hình 2.8). Các tọa độ có liên hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 = x + b \\ y_1 = y + a \end{cases} \quad (2.19)$$

Theo công thức định nghĩa của mômen quán tính (2.5) đối với hệ trục $O_1x_1y_1$ ta có:

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF \quad (2.20)$$

Thay y_1 bằng biểu thức của nó trong (2.20) và lấy tích phân:

$$J_{x_1} = \int_F (y + a)^2 dF = \int_F (y^2 + a^2 + 2ay) dF \quad (2.21)$$

$$J_{x_1} = \int_F y^2 dF + a^2 \int_F dF + 2a \int_F y dF$$

(2.22) Căn cứ vào công thức (2.21) và (2.22), ta có thể viết:

$$J_{y_1} = J_x + a^2 F + 2aS_x \quad (2.23)$$

Vì trục x là trục trung tâm, do đó $S_x = 0$, do đó:

$$J_{x_1} = J_x + a^2 F \quad (2.24)$$

Với phương pháp tương tự như trên, ta sẽ được:

$$J_{y_1} = J_y + b^2 F \quad (2.25)$$

* **Chú ý** Các công thức (2.24) và (2.25) chỉ dùng được khi trục x và y đi qua trọng tâm của hình.

Từ (2.24) và (2.25) ta có thể phát biểu như sau: “Mô men quán tính của một hình phẳng đối với một trục bất kỳ bằng mô men quán tính của hình đối với trục trung tâm song song với nó cộng với tích của diện tích F của hình với bình phương khoảng cách hai trục”.

Các công thức (2.24) và (2.25) gọi là công thức chuyển trục song song Chúng rất tiện dùng để tính mômen quán tính của các hình phức tạp do bởi nhiều hình đơn giản (chữ nhật, tròn...) ghép lại.

* **Chú ý:** Ta thấy J_{x_1} luôn luôn lớn hơn J_x vì số hạng thứ hai trong công thức bao giờ cũng mang dấu dương, cho nên đối với một hệ trục song song mômen quán tính của hình phẳng đối với trục trung tâm là mômen quán tính nhỏ nhất.

2.4. Bán kính quán tính

Bán kính quán tính của hình phẳng F đối với trục x , trục y được định nghĩa bằng biểu thức:

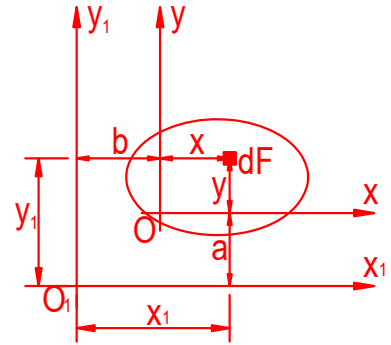
$$\begin{cases} i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} \\ i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} \end{cases} \quad (2.26)$$

Trong đó: i_x, i_y là bán kính quán tính của hình phẳng F đối với trục Ox, Oy .

J_x, J_y là mômen quán tính của hình phẳng F đối với trục Ox, Oy

F - là diện tích của hình phẳng.

Nếu xOy là hệ trục chính trung tâm của hình phẳng thì i_x, i_y gọi là bán kính chính trung tâm của hình đó. Đơn vị của i_x, i_y là cm, dm, m.



Hình 2.8

Trên đây ta đã có công thức tính mômen quán tính của các hình đơn giản nếu chia các mômen quán tính đó cho các diện tích tương ứng của mỗi hình, ta được bán kính quán tính của:

- Hình chữ nhật đối với các trục chính trung tâm x, y :

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = h \frac{\sqrt{12}}{12} = 0,289h \quad (2.27)$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \sqrt{\frac{b^3h}{12bh}} = b \frac{\sqrt{12}}{12} = 0,289b$$

- Hình tròn với các trục chính trung tâm x :

$$i_x = \sqrt{\frac{\pi R^4}{4\pi R^2}} = \frac{R}{2} = \frac{D}{4} \quad (2.28)$$

2.5. Môđun chống uốn của mặt cắt

Môđun chống uốn của mặt cắt đối với trục x và y được định nghĩa bằng biểu thức :

$$\begin{cases} W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} \\ W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} \end{cases} \quad (2.29)$$

Trong đó :

W_x, W_y là môđun chống uốn đối với các trục x và y .

J_x, J_y là mô men quán tính của mặt cắt F đối với hai trục x và y

x_{\max}, y_{\max} là khoảng cách từ những điểm xa nhất ở về hai phía của mặt cắt đối với trục x và y .

Đơn vị của môđun chống uốn là m^3 .

Dưới đây là trị số môđun chống uốn của một số mặt cắt thường gặp:

2.5.1. Mặt cắt hình chữ nhật

- Môđun chống uốn đối với trục x :

Ta thấy những điểm thuộc cạnh AD và BC có khoảng cách tới trục x lớn nhất:

$$y_{\max} = \frac{h}{2} \quad \text{với} \quad J_x = \frac{bh^3}{12} \quad \text{nên:} \quad W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12 \cdot \frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$

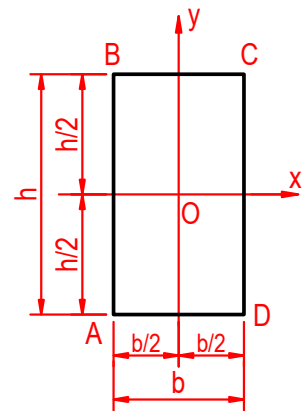
$$\Rightarrow W_x = \frac{bh^2}{6} \quad (2.30)$$

- Môđun chống uốn với trục y :

Ta cũng thấy các điểm thuộc cạnh AB và CD có khoảng cách tới trục y lớn nhất, nghĩa là:

$$x_{\max} = \frac{b}{2} \quad \text{và} \quad J_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$\text{Do đó ta cũng có:} \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{hb^3}{12 \cdot \frac{b}{2}} = \frac{hb^2}{6} \quad \Rightarrow W_y = \frac{hb^2}{6} \quad (2.31)$$



Hình 2.9

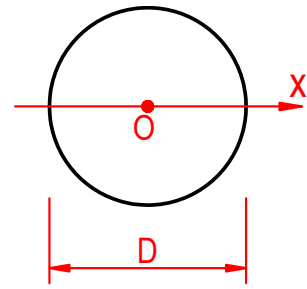
2.5.2. Mặt cắt hình tròn:

Đối với mặt cắt hình tròn ta có :

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} \quad \text{và} \quad y_{\max} = \frac{D}{2}$$

Nên: $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{\pi}{64} \frac{D^4}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32}$

$$\Rightarrow W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1D^3 \quad (2.32)$$



Hình 2.10

Ở cuối giáo trình này có giới thiệu những đặc trưng hình học của các loại thép hình (thép dẹt) sản xuất theo quy phạm.

2.6. Thí dụ tính toán

- **Ví dụ 1:** Xác định hệ trục quán tính chính trung tâm và mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt trên hình 2.11. Các kích thước trên hình vẽ tính bằng milimet (mm).

- **Bài giải:** Trước hết ta phải xác định trọng tâm C của mặt cắt. Ta thấy mặt cắt có một trục đối xứng y, do đó trọng tâm C của mặt cắt sẽ nằm trên y.

Ta chia mặt cắt ra làm 3 hình chữ nhật I, II, III và chọn trục x_0 nằm ngang đi qua trọng tâm của hình I. Từ công thức 4.4:

$$y_c = \frac{S_{x_0}}{F} = \frac{S_{x_0}^I + S_{x_0}^{II} + S_{x_0}^{III}}{F} \quad \text{Ta có:}$$

Mômen tĩnh của hình I là $S_{x_0}^I = 0$.

Mômen tĩnh của hình II và III là:

$$S_{x_0}^{II} = S_{x_0}^{III} = 14 \times 3 \times (-9) = -378 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

- Diện tích mặt cắt: $F = F^I + F^{II} + F^{III}$
 $= 12 \times 4 + 2 \times 14 \times 3 = 132 \text{ (cm}^2\text{)}.$

- Tung độ y_c của trọng tâm C bằng:

$$y_c = \frac{2 \times (-378)}{132} = -5,72 \text{ cm}.$$

Tung độ y_c có dấu (-) nghĩa là trọng tâm C của mặt cắt nằm trên trục y, về phía dưới trục x_0 cách trục x_0 một khoảng $y_c = 5,72 \text{ cm}$.

Qua C kẻ trục x thẳng góc với trục y hệ trục xCy là hệ trục quán tính trung tâm cần tìm.

Mô men quán tính chính trung tâm của mặt cắt là J_x và J_y .

Ta có: $J_x = J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III}$

Trong đó: $J_x^I, J_x^{II}, J_x^{III}$ là mômen quán tính của hình I, II, III đối với trục x.

Vì trục x không đi qua trọng tâm hình I, II, III nên áp dụng công thức chuyển trục song song, ta được:

$$J_x^I = \frac{12 \times 4^3}{12} + (-5,72)^2 \times 12 \times 4 = 1635 \text{ cm}^4$$

$$J_x^{II} = J_x^{III} = \frac{3 \times 14^3}{12} + (9 - 5,72)^2 \times 3 \times 14 = 1138 \text{ cm}^4$$

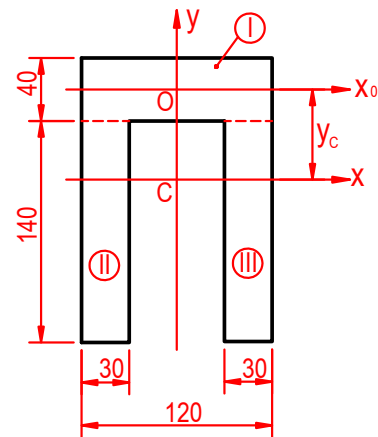
Do đó mômen quán tính của toàn bộ mặt cắt đối với trục trung tâm x là:

$$J_x = 1635 + 2 \times 1138 = 3911 \text{ cm}^4$$

Tính toán tương tự như trên đối với trục trung tâm y, ta cũng có:

$$J_y = J_y^I + J_y^{II} + J_y^{III}$$

Trong đó: $J_y^I = \frac{4 \times 12^3}{12} = 576 \text{ cm}^4$



Hình 2.11

$$J_y^{\text{II}} = J_y^{\text{III}} = \frac{14 \times 3^3}{12} + (1,5 + 3)^2 \times 14 \times 3 = 882 \text{ cm}^4$$

Do đó: $J_y = 576 + 2 \times 882 = 2340 \text{ cm}^4$

* Ta cũng có thể tính J_y bằng phương pháp khác:

Coi mặt cắt gồm một hình chữ nhật ABCD và một hình chữ nhật rỗng EFGH (hình 2.12). Ta tính được: $J_y = J_y^{\text{I}} - J_y^{\text{II}}$

J_y^{I} là mômen quán tính của hình chữ nhật ABCD.

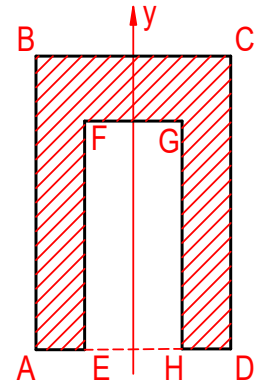
$$J_y^{\text{I}} = \frac{18 \times 12^3}{12} = 2592 \text{ cm}^4$$

J_y^{II} là mômen quán tính của hình chữ nhật rỗng EFGH

$$J_y^{\text{II}} = \frac{(18 - 4) \times (12 - 6)^3}{12} = 252 \text{ cm}^4$$

Do đó: $J_y = 2592 - 252 = 2340 \text{ cm}^4$

Vậy: $J_{\text{max}} = J_x = 3911 \text{ cm}^4$; $J_{\text{min}} = J_y = 2340 \text{ cm}^4$



Hình 2.12

- **Thí dụ 2:** Tính mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt ghép bởi hai thép hình chữ [số hiệu 16 như hình 2.13. Biết khoảng cách giữa hai thép [là $2d = 4 \text{ cm}$.

- **Bài giải:** Thép N⁰16 tra bảng phụ lục ta có:

- Toạ độ trọng tâm $z_0 = 1,79 \text{ cm}$.

- Diện tích mặt cắt là 18 cm^2 .

- Mômen quán tính đối với trục trung tâm

là 741 cm^4 và đối với trục y_0 là $62,6 \text{ cm}^4$.

Mô men quán tính chính trung tâm đối với trục x là J_x .

Đây là hình ghép nên ta có:

$$J_x = J_x^{\text{I}} + J_x^{\text{II}}$$

Vì hình I và hình II đều là thép chữ số hiệu như nhau

và trục x đi qua trọng tâm hình I và hình II, do đó ta có:

$$J_x^{\text{I}} = J_x^{\text{II}} = J_{x_0} = 741 \text{ cm}^4$$

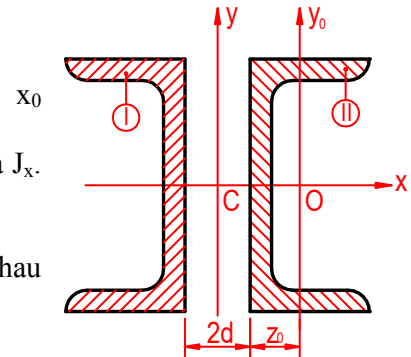
$$J_x = 2J_{x_0} = 2 \times 741 = 1482 \text{ cm}^4$$

Tương tự như trên ta cũng có: $J_y = J_y^{\text{I}} + J_y^{\text{II}}$

$$J_y^{\text{I}} = J_y^{\text{II}} = J_{y_0} + b^2 F = 62,6 + \left(\frac{4}{2} + 1,79\right)^2 \times 18 = 321 \text{ cm}^4$$

Vậy mômen quán tính chính trung tâm của toàn mặt cắt đối với trục y là:

$$J_y = 2 \times 321 = 642 \text{ cm}^4$$



Hình 2.13

- **Thí dụ 3:** Hãy tính bán kính quán tính và môđun chống uốn đối với trục x của mặt cắt chữ I trên hình 2.14. Kích thước trên hình lấy bằng cm.

- **Bài giải:** Trước hết ta tính mômen quán tính của mặt cắt đối với trục x:

Chia mặt cắt ra làm ba hình: I, II, III, ta có:

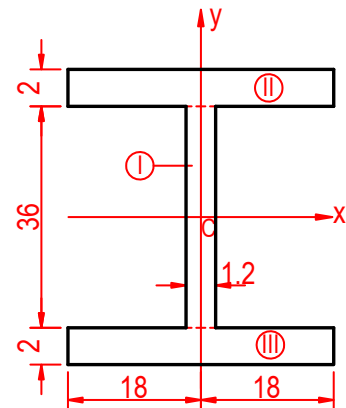
$$J_x = J_x^{\text{I}} + J_x^{\text{II}} + J_x^{\text{III}}$$

+ Mômen quán tính của I: $J_x = \frac{1,2 \times (36)^3}{12} = 4665,6 \text{ cm}^4$

+ Mômen quán tính của hình II và III:

Từ hình vẽ ta thấy hình II và III đối xứng nên có diện tích bằng nhau, vì vậy: $J_x^{\text{II}} = J_x^{\text{III}}$

$$= \frac{36 \times (2)^3}{12} + (18 + 1)^2 \times 36 \times 2 = 26016 \text{ cm}^4$$



Hình 2.14

Do đó: $J_x = 4665,6 + 2 \times 26016 = 56697,6 \text{ cm}^4$.

- Bán kính quán tính của mặt cắt đối với trục x. Áp dụng công thức:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}, \text{ với: } F = F_1 + F_2 + F_3 = 36 \times 1,2 + 2 \times 36 \times 2 = 187,2 \text{ cm}^2.$$

Do đó: $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \sqrt{\frac{56697,6}{187,2}} = 17,4 \text{ cm}$ hay $i_x = 0,174 \text{ m}$.

- Môđun chống uốn đối với trục x:

Áp dụng công thức: $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$, trong đó: $y_{\max} = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}$.

Do đó: $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{56697,6}{20} = 2834,88 \text{ cm}^3$.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1. Nêu đặc trưng hình học của hình phẳng. Viết công thức định nghĩa của chúng và cho biết các đơn vị thường dùng của các đại lượng J_x, J_y, J_0, S_x, S_y .
2. Thế nào là trục trung tâm, trục chính, hệ trục chính trung tâm? Cho ví dụ?
3. Mô men quán tính trung tâm là gì?
4. Chứng minh công thức chuyển trục song song để xác định mô men quán tính J_x của hình phẳng.

5. Tính mômen quán tính chính trung tâm của các mặt cắt cho như hình vẽ 2.15. Biết kích thước trên hình vẽ là mm.

6. Một mặt cắt có hình dạng và kích thước (mm) như hình 2.16. Hãy xác định:

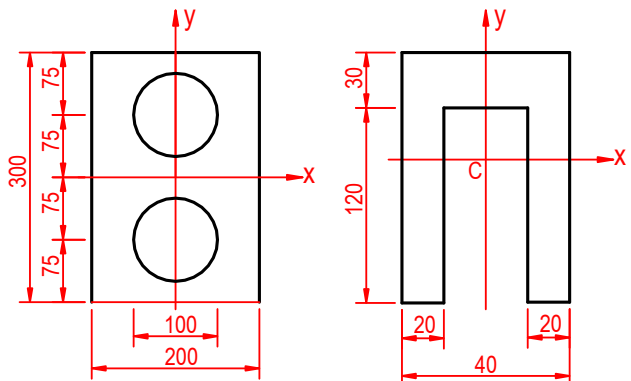
- Mô men quán tính và mô men tĩnh với trục y.

- Mô men quán tính chính trung tâm J_x, J_y ?

7. Cho mặt cắt ngang hình chữ T, kích thước (cm) như hình vẽ 2.17.

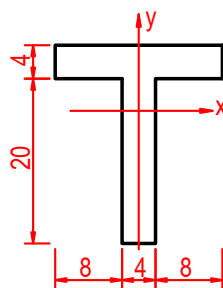
Xác định hệ trục quán tính trung tâm của hình phẳng Cxy. Xác định mô men quán tính J_x . Xác định mô men tĩnh của hình phẳng S_x .

8. Thanh ghép gồm hai thép [30 (hình 2.18). Xác định khoảng cách a để mặt cắt có hai mô men quán tính chính trung tâm bằng nhau ($J_x = J_y$).

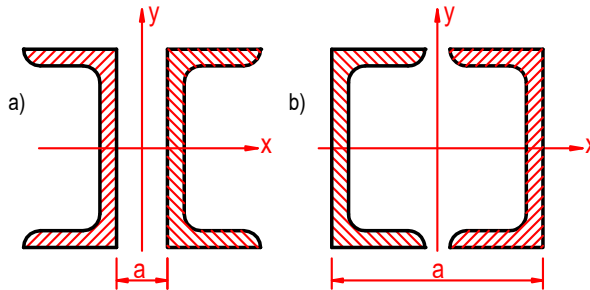


Hình 2.15

Hình 2.16



Hình 2.17



Hình 2.18

Chương 3. KÉO (NÉN) ĐÚNG TÂM

3.1. Khái niệm về kéo (nén) đúng tâm, lực dọc và biểu đồ lực dọc

3.1.1. Khái niệm về kéo (nén) đúng tâm

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu trường hợp chịu lực đơn giản nhất của thanh thẳng là khi thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm.

Khi ta tác dụng vào các đầu thanh hai lực song song ngược chiều, có phương trùng với phương của trục thanh và có trị số giống nhau, ta sẽ có:

- Hoặc thanh chịu kéo đúng tâm nếu lực hướng ra khỏi mặt cắt (hình 3.1a).
- Hoặc thanh chịu nén đúng tâm nếu lực hướng vào mặt cắt hình (3.1b).

Từ đó ta có định nghĩa: “*Thanh chịu kéo (nén) đúng tâm khi trên mọi mặt cắt ngang của thanh chỉ có một thành phần lực dọc N_z* ”.

Dưới đây ta sẽ nghiên cứu nội lực phát sinh trong thanh chịu kéo (nén) đúng tâm.



Hình 3.1

3.1.2. Lực dọc - biểu đồ lực dọc

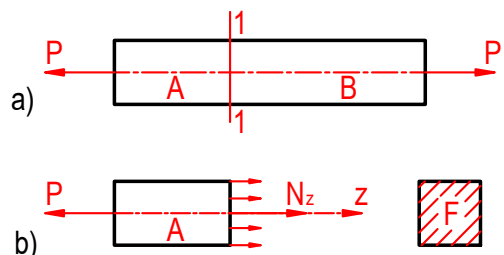
a). *Lực dọc*:

Giả sử xét một thanh chịu kéo đúng tâm bởi lực P. Để tính nội lực tại mặt cắt bất kỳ của thanh ta thường dùng phương pháp mặt cắt (hình 3.2).

Tưởng tượng cắt thanh tại mặt cắt 1-1, xét cân bằng phần A.

Muốn cho phần A cân bằng, thì hợp các nội lực trên mặt phải là nội lực N đặt tại trọng tâm mặt cắt và trùng với trục thanh. Lực N đó gọi là *lực dọc*.

Trị số lực dọc N được xác định từ điều kiện cân bằng tĩnh học của phần A (hoặc phần B), là tổng hình chiếu của các lực tác dụng lên phần đang xét xuống phương trục thanh (trục z) phải bằng không:



Hình 3.2

$$\Sigma Z = -P + N = 0 \text{ hay } N = P.$$

Dấu của lực dọc được quy ước như sau:

- N mang dấu dương (+) khi nó là lực kéo (N có chiều hướng ra ngoài mặt cắt).
- N mang dấu âm (-) khi nó là lực nén (N có chiều đi vào mặt cắt).

Từ trường hợp xét trên ta có trình tự xác định lực dọc N_z theo phương pháp mặt cắt như sau:

- + Dùng mặt cắt tưởng tượng cắt thanh thành hai phần, giữ lại phần đơn giản để xét.
- + Từ điều kiện cân bằng tĩnh học chiếu các lực đang xét xuống theo phương trục thanh (trục z) phải bằng 0. Từ đó ta xác định được N_z .

Nếu kết quả tính được là dương thì đó là lực kéo ngược lại là lực nén.

b). *Biểu đồ lực dọc:*

Để biểu diễn sự biến thiên lực dọc tại các mặt cắt dọc theo trục thanh, ta vẽ một đồ thị gọi là *biểu đồ lực dọc* N.

Vậy: “*Biểu đồ lực dọc là đường biểu diễn sự biến thiên lực dọc tại các mặt cắt dọc theo trục thanh*”.

Sau khi đã tính được lực dọc tại các mặt cắt khác nhau ta tiến hành vẽ biểu đồ lực dọc. Để vẽ biểu đồ lực dọc thường chọn trục hoành song song với trục thanh (hay còn gọi là đường chuẩn), còn nội lực biểu thị bằng đường vuông góc với trục hoành (trục z). Trình tự, cách vẽ biểu đồ lực dọc như sau:

- Chia thanh thành các đoạn bằng cách lấy điểm đặt lực tập trung, điểm đầu và cuối tải trọng phân bố làm ranh giới phân chia đoạn.
- Trên mỗi đoạn viết một biểu thức xác định nội lực theo hoành độ z: $N_z=f(z)$, căn cứ vào các biểu thức trên ta vẽ được biểu đồ cho từng đoạn.

Nếu: $N_z = \text{const}$ biểu đồ là đoạn thẳng song song với trục z, N_z là hàm bậc nhất (khi $q = \text{const}$) thì biểu đồ là đường thẳng xiên.

3.2. Ứng suất trên mặt cắt ngang

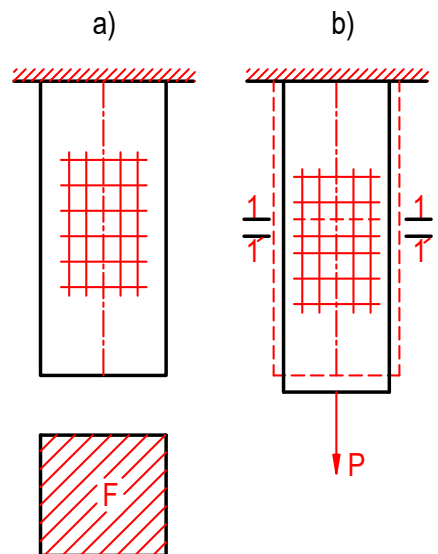
3.2.1 Ứng suất trên mặt cắt ngang

Để tính ứng suất trên mặt cắt, trước hết ta khảo sát biến dạng của thanh khi chịu kéo hoặc nén đúng tâm. Xét một thanh chịu kéo đúng tâm, trước khi thanh chịu lực, ta kẻ trên bề mặt ngoài của thanh những đường thẳng vuông góc với trục của thanh biểu thị cho các mặt cắt của thanh và những đường thẳng song song với trục của thanh biểu thị cho các thớ dọc của thanh (hình 3.3a).

Sau khi tác dụng lực kéo P, ta thấy những đoạn thẳng vuông góc với trục thanh di chuyển xuống phía dưới, nhưng vẫn thẳng và vuông góc trục, còn những đường thẳng song song với trục thanh thì dịch lại gần với nhau, nhưng vẫn thẳng và song song với trục của thanh (hình 3.3b). Với giả thiết biến dạng xảy ra bên trong thanh tương tự như biến dạng quan sát được bên mặt ngoài thanh, ta có thể kết luận:

1. Các mặt cắt của thanh vẫn phẳng và vuông góc với trục thanh.
2. Các thớ dọc của thanh vẫn thẳng và song song với trục thanh.

Dựa vào hai kết luận trên, ta có thể thấy nội lực phân bố trên mặt cắt phải có phương song song với trục thanh, tức là có phương vuông góc với mặt cắt. Vậy trên mặt cắt của thanh chịu kéo (hoặc nén) chỉ có ứng suất pháp σ .



Hình 3.3

Mặt khác dựa vào kết luận thứ nhất, ta thấy: khi bị biến dạng các thớ dọc bị chặn bởi cùng một mặt cắt (ví dụ mặt cắt 1-1) đều có độ giãn dài bằng nhau, do đó theo định luật Húc, nội lực phải phân bố đều trên mặt cắt, tức là ứng suất pháp tại mọi điểm trên mặt cắt phải có trị số bằng nhau.

Vậy ta có thể viết được biểu thức liên hệ giữa những nội lực σ phân bố trên mặt cắt với lực N của chúng như sau: $N = \sigma F$

Từ đó rút ra:
$$\sigma = \frac{N}{F}$$

Tổng quát ta có thể viết:
$$\sigma = \frac{\pm N}{F} \quad (3.1)$$

Công thức (3.1) cho phép tính ứng suất pháp σ nếu biết được lực dọc N và diện tích F của mặt cắt. Trong công thức (3.1) thì N là trị số tuyệt đối của lực dọc tại mặt cắt cần tìm ứng suất, lấy dấu dương (+) khi lực dọc là lực kéo, lấy dấu (-) khi lực dọc là lực nén. Công thức (3.1) có thể phát biểu như sau: “*Trị số ứng suất pháp trên mặt cắt thanh chịu kéo hay nén đúng tâm bằng tỷ số giữa lực dọc ở mặt cắt đó với diện tích mặt cắt đó*”.

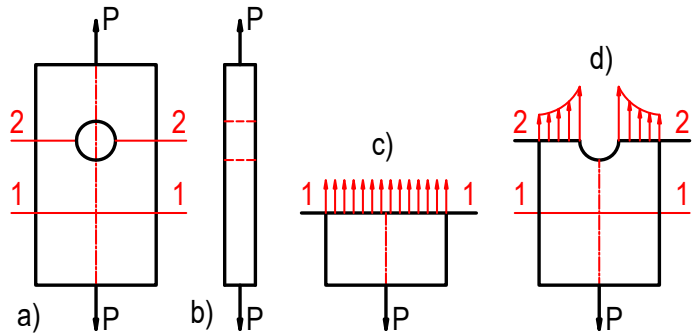
Người ta chứng minh được rằng ứng suất pháp σ trên mặt cắt vuông góc với trục thanh đạt trị số lớn nhất so với ứng suất pháp trên bất cứ mặt cắt nghiêng nào.

Ở đây ta thấy được ứng suất pháp phân bố đều trên mặt cắt của thanh, nhưng điều này chỉ đúng với những mặt cắt không nằm gần nơi có mặt cắt thay đổi đột ngột hoặc gần nơi có điểm đặt lực. Trong thực tế ở những mặt cắt rất gần điểm đặt lực cũng như gần nơi có mặt cắt thay đổi đột ngột thì ứng suất phân bố không đều, mà ở đó xuất hiện ứng suất tập trung σ .

Ví dụ: Tại mặt cắt 1-1 của thanh chịu kéo như hình 3.4 thì ứng suất phân bố đều trái lại ở mặt cắt 2-2 ứng suất phân bố không đều mà tại mép lỗ ứng suất có trị số lớn hơn ứng suất ở mặt cắt 1-1. Tỷ số giữa ứng suất lớn nhất với ứng suất trung bình σ (xem như ứng suất phân bố đều trên mặt cắt qua lỗ) gọi là hệ số tập trung ứng suất, ký hiệu α_{tt} :

$$\alpha_{tt} = \frac{\sigma_{tt}}{\sigma}$$

thường trị số α_{tt} nằm trong khoảng (1,2 43).



Hình 3.4

3.2.1. Biến dạng dọc và biến dạng ngang

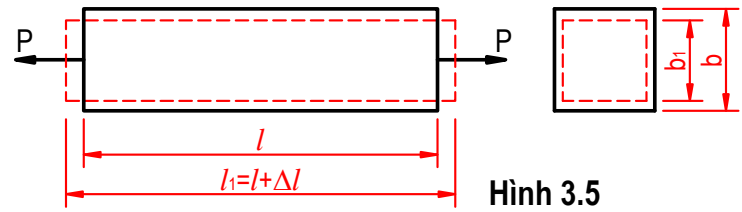
Khi chịu kéo chiều dài thanh sẽ dài thêm ra, nhưng chiều ngang co bớt lại (hình 3.5). Hoặc khi chịu nén thì chiều dài thanh ngắn lại nhưng chiều ngang thanh rộng ra (hình 3.6). Thanh bị biến dạng được vẽ bằng nét đứt.

Chiều dài thanh thay đổi một đoạn $\Delta l = l_1 - l$, Δl gọi là *biến dạng dọc tuyệt đối*. Nếu chiều dài thanh dài ra, Δl có trị số dương. Nếu chiều dài thanh ngắn đi, Δl có trị số âm, Δl gọi là *độ giãn dọc tuyệt đối* (khi $\Delta l > 0$), hoặc *độ co dọc tuyệt đối* (khi $\Delta l < 0$).

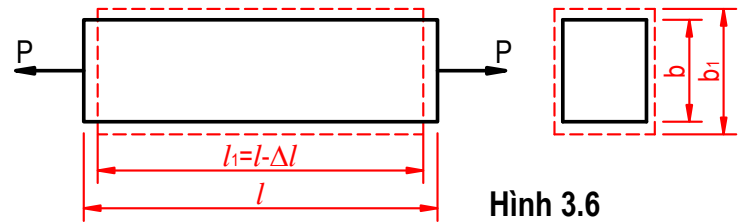
Để so sánh biến dạng dọc của thanh có chiều dài khác nhau, người ta đưa ra khái niệm *biến dạng dọc tương đối*TM (epxilon) tức là biến dạng dọc tuyệt đối trên một đơn vị chiều dài thanh và được tính bằng công thức:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.2)$$

Trong đó ε là một hư số cùng dấu với Δl . Như đã nói ở trên dưới tác dụng của lực kéo P, chiều dài thanh dài ra nhưng chiều ngang hẹp lại một đoạn $\Delta b = b_1 - b$, Δb gọi là biến dạng ngang tuyệt đối, Δb mang trị số dương nếu chiều ngang tăng thêm: Δb mang trị số âm nếu chiều ngang hẹp lại. Để so sánh biến dạng ngang của những thanh có kích thước ngang khác nhau, người ta dùng khái niệm biến dạng ngang tương đối ε_1 , tức là biến dạng ngang tuyệt đối trên một đơn vị chiều ngang thanh, và được tính theo công thức:



Hình 3.5



Hình 3.6

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta b}{b} \quad (3.3)$$

Trong đó ε_1 là một hư số có cùng dấu với Δb .

Nhiều thí nghiệm cho thấy giữa ε và ε_1 có một liên hệ với nhau như sau:

$$\mu = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \quad \text{hay} \quad \varepsilon_1 = -\mu\varepsilon \quad (3.4)$$

Dấu (-) trước tỷ số ε_1 và ε chứng tỏ chúng luôn ngược dấu nhau, nghĩa là nếu chiều dài thanh dài thêm thì chiều ngang thanh hẹp bớt lại và ngược lại.

Trong biểu thức (3.4), μ (muy) là hệ số Poátxông hay hệ số biến dạng ngang, nó đặc trưng cho tính đàn hồi của vật liệu. Trị số μ được xác định bằng thí nghiệm, hệ số này là một hư số, tùy từng loại vật liệu khác nhau trị số μ cũng khác nhau và nằm trong khoảng từ 0 đến 0,5.

Biến dạng dọc tuyệt đối Δl được tính như sau:

Qua thí nghiệm kéo nén những mẫu vật liệu khác nhau, nhà vật lý Rôbe Húc đã tìm thấy: Khi lực tác động P chưa vượt qua một giới hạn nào đó (giới hạn này tùy theo từng loại vật liệu) thì biến dạng dọc tuyệt đối Δl của mẫu thí nghiệm luôn luôn tỷ lệ thuận với lực P và biểu thức của nó có dạng:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} \quad (*), \text{ nếu chú ý rằng } N = P \text{ thì ta có thể viết:}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad (**)$$

Trong đó: E gọi là mô đuyên đàn hồi khi kéo (nén) của vật liệu.

Nó là một hằng số vật lý đặc trưng cho khả năng chống lại sự biến dạng khi chịu lực kéo hay nén của từng loại vật liệu trong phạm vi biến dạng đàn hồi.

Trị số E được xác định bằng thí nghiệm. Đơn vị tính: MN/m².

Trị số E của một số vật liệu thông thường cho trong bảng (3.2).

Tích số EF gọi là *độ cứng* khi kéo (nén) đúng tâm. Nếu thanh có độ cứng EF lớn thì biến dạng dọc tuyệt đối Δl nhỏ và ngược lại. Trị số Δl có thể mang dấu (+) hoặc (-) tùy thuộc vào dấu của lực dọc N.

Biểu thức (*) và (**) có thể viết thành :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EF} \quad (3.5)$$

Ta đã biết : $\sigma = \frac{N}{F}$ và $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ thay vào (3.5), ta có: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$.

Hay : $\sigma = \varepsilon.E$ (3.6)

Biểu thức 3.6 chính là nội dung của định luật Húc trong kéo nén đúng tâm. Ta có thể phát biểu định lý như sau: “ Trong kéo (nén) đúng tâm, ứng suất pháp σ tỷ lệ thuận với biến dạng dọc tương đối ε “.

Bảng 3.1 Hệ số μ của một số vật liệu thông thường

| Vật liệu | μ | Vật liệu | μ |
|----------|-------------|-----------|-------------|
| Thép | 0,25 ÷ 0,33 | Bạc | 0,39 |
| Đồng | 0,31 ÷ 0,34 | Thuỷ tinh | 0,25 |
| Đồng đen | 0,32 ÷ 0,35 | Đá học | 0,16 ÷ 0,34 |
| Gang | 0,23 ÷ 0,27 | Bê tông | 0,08 ÷ 0,18 |
| Chì | 0,45 | Gỗ dán | 0,07 |
| Nhôm | 0,32 ÷ 0,36 | Cao su | 0,47 |
| Kẽm | 0,21 | Nền | 0,5 |
| Vàng | 0,42 | | |

Bảng 3.2 Môđun đàn hồi E của một số vật liệu

| Vật liệu | E (tính bằng MN/m ²) |
|--|----------------------------------|
| Thép | 2,1x10 ⁵ |
| Gang (xám, trắng) | (1,1541,6)x10 ⁵ |
| Đồng, hợp kim đồng (đồng vàng, đồng đen) | 1,0x10 ⁵ |
| Nhôm và đuyara | 0,7x10 ⁵ |
| Khối xây: | |
| -Băng đá vôi | 0,6x10 ⁵ |
| -Băng gạch | 0,03x10 ⁵ |
| Bê tông nặng (khô cứng tự nhiên) | (0,214 0,38)x10 ⁵ |
| Gỗ dọc thớ | 0,1x10 ⁵ |
| Cao su | 0,00008x10 ⁵ |

Thí dụ tính toán:

- **Thí dụ 3.1:** Cho một thanh chịu lực trên hình 3.7a. Cho biết trọng lượng vật liệu làm thanh là γ , diện tích mặt cắt ngang của thanh là F, $l_1 = 1,5$ m, $l_2 = 1$ m. Hãy vẽ biểu đồ lực dọc cho thanh. Biết $P = 2\gamma F$.

- **Bài giải:** Dựa vào phương pháp mặt cắt, ta thiết lập biểu thức lực dọc tại các mặt cắt bất kỳ của thanh.

+ Trong đoạn AB: tưởng tượng cắt thanh tại các mặt cắt 1-1, giữ lại phần thanh bên dưới mặt cắt (hình 3.7b), ta có:

$$\Sigma Z = -\gamma F z_1 + N_1 = 0.$$

Trong đó: $\gamma F z_1$ là trọng lượng phần thanh đang xét.

Rút ra: $N_1 = \gamma F z_1$ ($N_1 > 0$, do đó N_1 là lực kéo) - với ($0 \leq z_1 \leq 1,5$).

+ Trong đoạn BC:
tương tự cắt thanh
tại mặt cắt 2-2, giữ lại
phần thanh bên dưới
mặt cắt (hình 3.7c), ta
có:

$$\Sigma Z = -\gamma F z_2 + P + N_2 = 0.$$

Trong đó: $\gamma F z_2$ là trọng
lượng phần thanh có
chiều dài z_2 , với $(1,5[$
 $z_2 [2,5)$.

Rút ra: N_2
 $= \gamma F z_2 - P = \gamma F z_2 - 2\gamma F$

$$N_2 = \gamma F(z_2 - 2).$$

Biểu thức N_1 biểu thị cho lực dọc tại mặt cắt bất kỳ trong đoạn AB, còn biểu thức N_2 biểu thị cho lực dọc tại mặt cắt bất kỳ trong đoạn BC. Vì các biểu thức N_1, N_2 khác nhau, nên ta không thể biểu diễn sự biến thiên của lực dọc trong toàn thanh bởi cùng một biểu thức N . Sự khác nhau đó xảy ra tại các mặt cắt có lực tập trung đặt trùng với trục thanh, hoặc có sự thanh đổi đột ngột của cường độ lực phân bố dọc theo trục thanh.

Để vẽ biểu đồ N , ta lấy một đường chuẩn (trục chuẩn song song với trục thanh có chiều dài bằng chiều dài trục thanh). Trên trục chuẩn z đặt những đoạn thẳng vuông góc có độ dài biểu thị (theo một tỷ lệ xích đã chọn) cho trị số của lực dọc N tại các mặt cắt tương ứng (hình 3.7d).

Trong trường hợp này lực dọc trong mỗi đoạn thanh là hàm bậc nhất theo z_1 , nên biểu đồ N là đường thẳng xiên. Để vẽ biểu đồ N cho từng đoạn thanh, ta khảo sát các biểu thức N_1 và N_2 .

Tại $z_1 = 0$ (mặt cắt A):

$$N_1 = 0$$

Tại $z_1 = 1,5$ m (mặt cắt sát B về phía dưới):

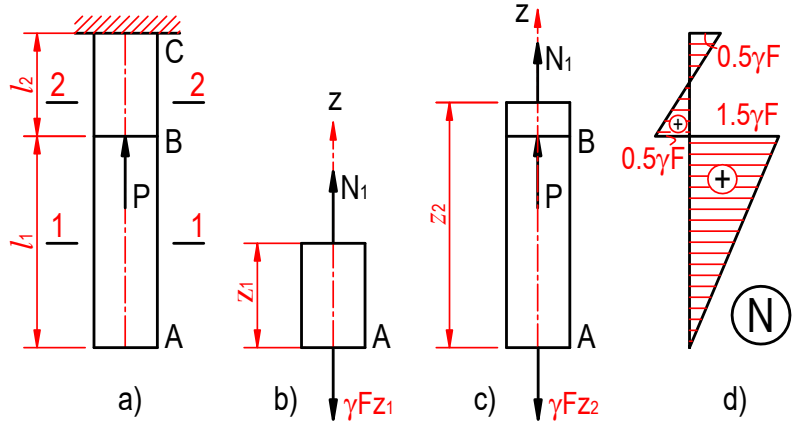
$$N_1 = 1,5\gamma F$$

Tại $z_2 = 1,5$ m (mặt cắt sát B về phía trên):

$$N_2 = \gamma F(1,5 - 2) = -0,5\gamma F$$

Tại $z_2 = 2,5$ m (mặt cắt C): $N_2 = \gamma F(2,5 - 2) \Rightarrow N_2 = 0,5\gamma F$

Tại mặt cắt B có lực tập trung P , biểu đồ có sự thay đổi đột ngột, ta nói biểu đồ có *bước nhảy*. Trị số tuyệt đối của bước nhảy đúng bằng trị số của lực P và bằng $2\gamma F$.



Hình 3.7

- **Thí dụ 3.2:** Dọc theo trục của một thanh thép tròn gồm hai đoạn có đường kính khác nhau, có các lực $P_1 = 40$ kN, $P_2 = 60$ kN và $P_3 = 80$ kN tác dụng như hình 3.8a. Diện tích mặt cắt ngang của thanh trong đoạn một là $F_1 = 2,5$ cm², trong đoạn hai là $F_2 = 4$ cm². Vẽ biểu đồ lực dọc, tìm ứng suất trong các đoạn thanh và biến dạng dọc tuyệt đối của thanh, khi tính không kể đến trọng lượng thanh.

- **Bài giải:** Để tính ứng suất trên mỗi đoạn thanh và biến dạng dọc tuyệt đối của toàn thanh ta phải tìm lực dọc trong mỗi đoạn thanh.

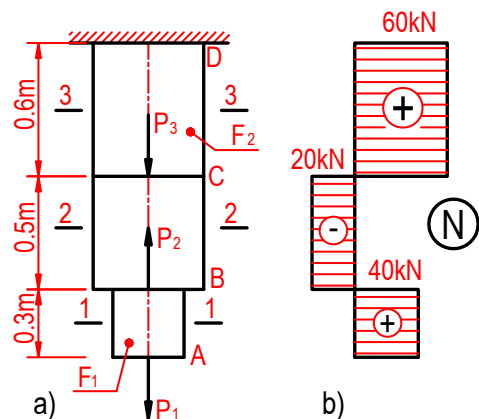
+ Trên đoạn AB: dùng mặt cắt bất kỳ 1-1 xét sự cân bằng phần thanh bên dưới mặt cắt ta có:

$$\Sigma Z = N_1 - P_1 = 0$$

$$\Rightarrow N_1 = P_1 = 40 \text{ kN}$$

(với giả thiết N_1 có chiều đi ra mặt cắt). Do đó $N_1 = 40$ kN (lực kéo) và không thay đổi trong đoạn AB.

+ Trên đoạn BC: dùng mặt cắt bất kỳ 2-2, xét sự cân bằng phần thanh bên dưới mặt cắt ta có:



Hình 3.8

$$\Sigma Z = N_2 - P_1 + P_2 = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = P_1 - P_2 = -20 \text{ kN}$$

Do đó $N_2 = -20 \text{ kN}$ (nén) và N_2 không thay đổi trong đoạn BC.

+ Trên đoạn CD: tương tự ta cũng dùng mặt cắt bất kỳ 3-3, xét cân bằng phần thanh bên dưới mặt cắt ta có:

$$\Sigma Z = 0 \Rightarrow N_3 = P_1 + P_3 - P_2 = 40 + 80 - 60 = 60 \text{ kN.}$$

Do đó $N_3 = 60 \text{ kN}$ (kéo) và không thay đổi suốt đoạn CD.

Sau khi tìm được lực dọc trong các đoạn thanh ta vẽ được biểu đồ lực dọc như hình (3.8b). Dựa vào biểu đồ lực dọc, áp dụng công thức (3.1) ta tính ứng suất trong các đoạn thanh:

- Đoạn AB: Lực dọc $N_1 = 40 \text{ kN}$, vậy ứng suất trong đoạn AB là:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{40}{2,5 \cdot 10^{-4}} = 16 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2 = 160 \text{ MN/m}^2.$$

- Đoạn BC: Lực dọc $N_2 = -20 \text{ kN}$, vậy ứng suất trong đoạn BC là:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = -\frac{20}{4 \cdot 10^{-4}} = -5 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2 = -50 \text{ MN/m}^2.$$

- Đoạn CD: Lực dọc $N_3 = 60 \text{ kN}$, vậy ứng suất trong đoạn CD là:

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = \frac{60}{4 \cdot 10^{-4}} = 15 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2 = 150 \text{ MN/m}^2.$$

Biến dạng dọc tuyệt đối của thanh sẽ bằng tổng đại số biến dạng dọc tuyệt đối của các đoạn thanh AB, BC và CD. Do vậy, ta phải tính biến dạng dọc tuyệt đối trong từng đoạn thanh có: trị số lực dọc không thay đổi, diện tích mặt cắt cũng không thay đổi, nên ta áp dụng công thức (3.5) để tính biến dạng dọc tuyệt đối cho các đoạn:

$$\text{- Đoạn AB: } \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EF_1} = \frac{40 \times 0,3}{2 \cdot 10^8 \times 2,5 \times 10^{-4}} = 2,4 \times 10^{-4} \text{ (m)}$$

$$\text{- Đoạn BC: } \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EF_2} = -\frac{20 \times 0,5}{2 \cdot 10^8 \times 4 \cdot 10^{-4}} = -1,25 \times 10^{-4} \text{ (m)}$$

$$\text{- Đoạn CD: } \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EF_3} = \frac{60 \times 0,6}{2 \cdot 10^8 \times 4 \cdot 10^{-4}} = 4,5 \times 10^{-4} \text{ (m)}$$

Vậy biến dạng dọc tuyệt đối của toàn thanh:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = (2,4 - 1,25 + 4,5) \times 10^{-4} = 5,65 \times 10^{-4} \text{ (m)}$$

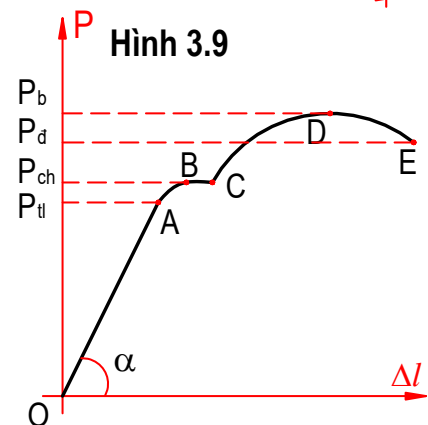
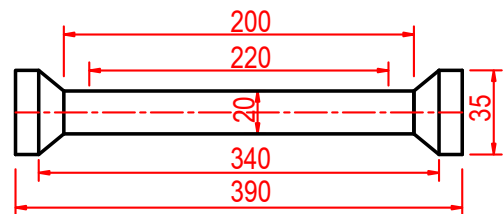
$$\Delta l = 0,565 \text{ mm} \approx 0,6 \text{ mm}$$

Vậy sau khi chịu tác dụng của lực chiều dài thanh dài thêm ra $\approx 0,6 \text{ mm}$.

3.3. Thí nghiệm kéo (nén) vật liệu

Muốn biết rõ tính chất cơ học của vật liệu, ta phải đem vật liệu ra thí nghiệm, để nghiên cứu những hiện tượng xảy ra trong quá trình biến dạng của nó cho tới khi bị phá hỏng. Thí nghiệm thường dùng là thí nghiệm kéo và nén, vì kết quả của thí nghiệm này có thể dùng cho nhiều trường hợp biến dạng khác (uốn). Trong điều kiện thông thường, người ta phân vật liệu ra làm hai loại: vật liệu dẻo như thép, đồng, nhôm... vật liệu giòn như gang, đá, bê tông... Dưới đây, ta lần lượt thí nghiệm kéo và nén mẫu của từng loại vật liệu để rút ra các đặc trưng cơ học của chúng.

3.3.1 Thí nghiệm kéo vật liệu dẻo



Hình 3.10

Mẫu thí nghiệm là một thanh thép non có hình dạng và kích thước theo mẫu quy định (hình 3.9). Gọi l là phần chiều dài làm việc của mẫu. Đặt mẫu vào máy kéo rồi cho lực kéo P tăng dần từ 0. Ta thấy chiều dài thanh tăng dần lên, chiều ngang thanh hẹp bớt cho đến khi lực kéo P đạt trị số cực đại P_b thì một chỗ nào đó trên thanh bị thắt lại, sau đó kéo giảm dần cho đến một trị số P_d và thanh bị đứt tại chỗ thắt. Tương quan giữa Δl và trị số của lực kéo P được thể hiện bằng đồ thị (hình 3.10). Trong đó trục hoành biểu diễn trị số của Δl và trục tung biểu diễn các trị số của lực kéo P .

Đồ thị đó gọi là biểu đồ kéo của vật liệu dẻo.

Đồ thị đó cho biết vật liệu khi chịu kéo đã qua 3 giai đoạn chính:

a) *Giai đoạn thứ nhất*: Giai đoạn tỷ lệ.

Vì trong giai đoạn này vật liệu có tính chất đàn hồi và tuân theo định luật Húc. Trên đồ thị giai đoạn này biểu thị bằng đường thẳng OA. Lực lớn nhất trong giai đoạn tỷ lệ là P_{tl} (P tỷ lệ). Gọi F_0 là diện tích ban đầu của mẫu thí nghiệm ta có:

$$\sigma_{tl} = \frac{P_{tl}}{F_0}$$

Ứng suất σ_{tl} gọi là *giới hạn tỷ lệ*, thường giới hạn này khó xác định.

Đối với thép số 3 thì $\sigma_{tl} = 200 \text{ MN/m}^2$.

b) *Giai đoạn thứ hai*: Giai đoạn chảy dẻo.

Vì giai đoạn AB thường rất ngắn nên người ta bỏ qua không khảo sát, sau giai đoạn này từ điểm B đồ thị bắt đầu có đoạn nằm ngang BC. Lúc này biến dạng của thanh tăng lên rõ rệt nhưng lực không tăng. Ta gọi giai đoạn này là giai đoạn chảy dẻo. Lực bắt đầu làm cho vật liệu chảy dẻo, ký hiệu P_{ch} . Gọi ứng suất tương ứng với giai đoạn này là *giới hạn chảy*:

$$\sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{F_0} \quad \text{Đối với thép số 3, } \sigma_{ch} = 240 \text{ MN/m}^2.$$

Đoạn nằm ngang trên đồ thị gọi là *điện chảy dẻo*.

c) *Giai đoạn thứ 3*: Giai đoạn cứng cố.

Vật liệu tự cứng cố để chống lại biến dạng. Khi lực đạt đến trị số cực đại P_b ($P_{bền}$) thì có một chỗ nào đó trên mẫu thử bị thắt lại. Sau đó lực P giảm xuống dần nhưng biến dạng vẫn tăng, cho đến lúc lực P giảm đến trị số P_d ($P_{đứt}$) thì thanh bị đứt tại chỗ thắt.

$$\text{Gọi giới hạn bền là } \sigma_b \text{ ta có: } \sigma_b = \frac{P_b}{F_0}.$$

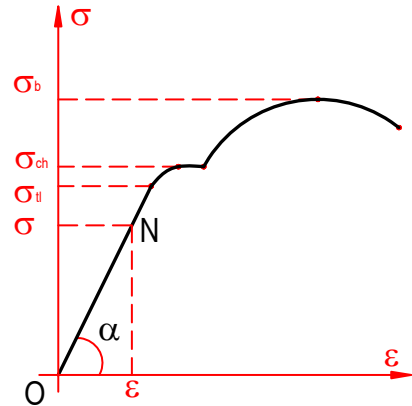
Đối với thép số 3, $\sigma_b = 420 \text{ MN/m}^2$

Khi ứng suất trong mẫu đạt đến trị số σ_b ta xem như mẫu bị phá hỏng mặc dù thực tế nó chưa bị phá hỏng.

Giới hạn tỷ lệ (σ_{tl}), giới hạn chảy (σ_{ch}), giới hạn bền (σ_b) đặc trưng cho tính chất chịu lực của vật liệu.

Ta thấy ứng suất pháp tính theo các công thức trên không phải là ứng suất thật phát sinh trong mẫu thí nghiệm, vì diện tích mặt cắt thanh thay đổi liên tục suốt thời gian thí nghiệm, nên ta gọi ứng suất này là ứng suất quy ước. Để biểu diễn mối liên hệ ứng suất và biến dạng, ta có thể vẽ đồ thị $\sigma - \epsilon$ (hình 3.12); đồ thị này không phụ thuộc vào kích thước mẫu và có dạng tương tự như đồ thị biểu diễn mối liên hệ giữa P và Δl (hình 3.11).

Thật vậy, muốn có đồ thị $\sigma - \epsilon$ ta chỉ việc chia tung độ và hoành độ của đồ thị quan hệ P và Δl cho F_0 là l_0 .



Hình 3.11

Đồ thị $\sigma - \epsilon$ cho ta thấy các trị số của σ_{tl} , σ_{ch} và σ_b .

Nếu lập quan hệ giữa hệ số góc của đoạn thẳng xiên trong đồ thị $\sigma - \epsilon$ với các tọa độ của một điểm bất kỳ N trong giới hạn của đoạn thẳng đó, ta có:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

Mặt khác theo định luật Húc: $E = \frac{\sigma}{\epsilon}$.

Vậy $\operatorname{tg}\alpha = E$ tức trị số môđun đàn hồi E khi kéo (nén) của vật liệu chính bằng hệ số góc của đoạn thẳng xiên trong đồ thị $\sigma - \epsilon$.

Ngoài các đặc trưng tính chịu lực của vật liệu ta còn hai đặc trưng khác để chỉ tính dẻo của vật liệu, đó là:

- *Độ giãn dài tương đối khi đứt*: tính theo phần trăm, ký hiệu δ (đọc là đen ta nhỏ):

$$\delta = \frac{l_1 - l}{l} \times 100\%$$

Trong đó: l_1 - chiều dài phần làm việc của mẫu sau khi bị đứt.

l - chiều dài phần làm việc của mẫu khi chưa làm việc.

- *Độ thắt tương đối khi đứt tính*: theo phần trăm ký hiệu là χ (đọc là cờ xi):

$$\psi = \frac{F_0 - F_1}{F_0} \times 100\%$$

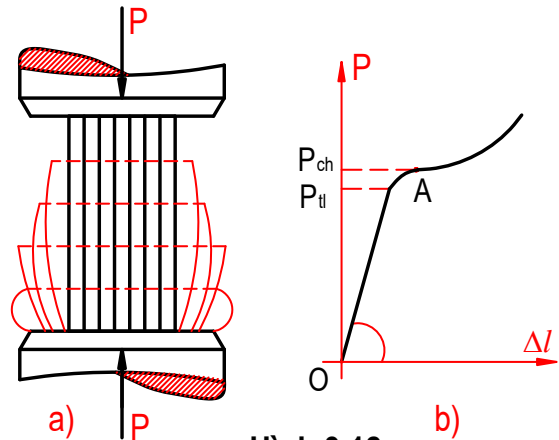
Trong đó: F_0 - diện tích mặt cắt của mẫu lúc đầu khi chưa chịu lực.

F_1 - diện tích mặt cắt của mẫu ở chỗ bị thắt, sau khi bị đứt.

Với một loại vật liệu nào đó δ và χ càng lớn thì vật liệu đó càng dẻo và ngược lại. Đối với thép số 3 thì $\delta \approx 30\%$ và $\chi \approx 60\%$.

3.3.2 Thí nghiệm nén vật liệu dẻo

Khi nén các vật liệu dẻo các mẫu thí nghiệm thường là hình trụ tròn có chiều cao lớn hơn đường kính một chút (hình 3.12a). Biểu đồ quan hệ giữa Δl và P như hình (3.12b). Qua biểu đồ ta thấy, vật liệu dẻo khi chịu nén cũng có giới hạn tỷ lệ, giới hạn chảy dẻo nhưng không có giới hạn bền vì lực càng tăng mẫu thí nghiệm càng xẹp xuống và đường kính của nó càng tăng lên (hình 3.12a). Cần chú ý đến đặc điểm của vật liệu dẻo: giới hạn tỷ lệ (kể cả giới hạn chảy nếu vật liệu là thép) và môđun đàn hồi đều có trị số khi kéo và khi nén xấp xỉ bằng nhau.



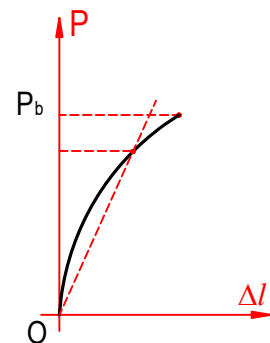
Hình 3.12

3.3.3. Thí nghiệm kéo vật liệu giòn

Vật liệu giòn chịu kéo kém nên bị phá hỏng đột ngột khi độ giãn dài và độ thắt tương đối còn rất nhỏ. Biểu đồ có dạng đường cong ngay từ khi ứng suất còn rất nhỏ. Nhìn vào biểu đồ ta thấy vật liệu không có giai đoạn tỷ lệ, giai đoạn chảy dẻo. Như vậy đối với vật liệu giòn chỉ có giới hạn bền:

$$\sigma_b = \frac{P_b}{F_0}$$

Trị số giới hạn bền này so với trị số giới hạn bền của vật liệu dẻo là rất thấp, tuy vật liệu không có giai đoạn tỷ lệ nhưng trong



Hình 3.13

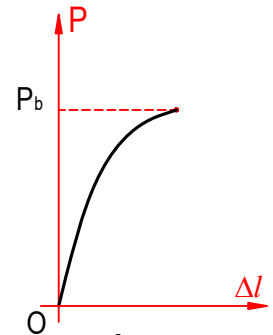
giới hạn làm việc thông thường đối với một số vật liệu giòn ta vẫn có thể áp dụng định luật Húc được.

Tùy theo mức độ chính xác khi tính toán ta có thể thay đoạn cong trong một phần nào đó của đồ thị bằng một đoạn thẳng (nét đứt ở hình 3.13) thể hiện biểu đồ kéo vật liệu giòn.

3.3.4. Thí nghiệm nén vật liệu giòn

Đối với vật liệu giòn khi chịu nén cũng bị phá hỏng ngay từ khi biến dạng còn rất nhỏ. Biểu đồ quan hệ Δl và P như hình 3.14, từ biểu đồ ta thấy vật liệu giòn khi chịu nén chỉ có giới hạn bền mà thôi, nhưng giới hạn bền này có trị số lớn hơn giới hạn bền khi kéo.

Qua các thí nghiệm trên đây, ta có thể nêu lên những điểm khác nhau giữa vật liệu dẻo và vật liệu giòn: vật liệu dẻo phát sinh biến dạng nhiều mới hỏng, vật liệu giòn biến dạng ít đã hỏng; vật liệu dẻo chịu kéo và nén như nhau, vật liệu giòn chịu nén tốt hơn chịu kéo rất nhiều.



Hình 3.14

3.4. Tính toán trong kéo (nén) đúng tâm

3.4.1. Khái niệm về ứng suất cho phép - hệ số an toàn

Ở trên đã nghiên cứu các giới hạn của vật liệu khi chịu lực, ta cần dựa vào các giới hạn này để tính toán các cấu kiện tùy theo chúng làm bằng vật liệu nào, để đảm bảo sao cho an toàn và tiết kiệm nhất.

Với vật liệu dẻo thường chọn *ứng suất nguy hiểm* ký hiệu σ_0 là giới hạn chảy, để đảm bảo cấu kiện khi chịu lực không có biến dạng lớn, còn với vật liệu giòn chọn ứng suất nguy hiểm là giới hạn bền. Để đảm bảo cho cấu kiện làm việc được an toàn, ta phải hạn chế ứng suất lớn nhất phát sinh trong cấu kiện, sao cho nó không vượt quá một trị số chỉ bằng một phần ứng suất nguy hiểm. Trị số này gọi là ứng suất cho phép, ký hiệu là $[\sigma]$ và tính theo công thức:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}, \quad \text{với } n \text{ là hệ số an toàn.}$$

Việc lựa chọn hệ số an toàn có ý nghĩa về mặt kỹ thuật cũng như về kinh tế. Thường hệ số an toàn do Nhà nước quy định dựa vào một số điều kiện sau:

- Tính chất của vật liệu: vật liệu dẻo hay vật liệu giòn, đồng chất hay không đồng chất.
- Điều kiện làm việc của cấu kiện.
- Tính chất quan trọng, thời gian sử dụng của cấu kiện (vĩnh viễn hay tạm thời).
- Mức độ chính xác của các giả thuyết khi tính toán và thiết kế - trình độ và phương pháp gia công (hay thi công).
- Tính chất của lực tác dụng lên cấu kiện (lực động, lực tĩnh, va chạm...).

Bảng 3.3. Ứng suất cho phép của một số vật liệu thông thường.

| Vật liệu | [σ] tính bằng MN/m ² | |
|--------------------|--|------------------------------|
| | Kéo | Nén |
| Thép xây dựng số 3 | $1,6 \times 10^2$ | $1,6 \times 10^2$ |
| Thép xây dựng số 5 | $1,4 \times 10^2$ | $1,4 \times 10^2$ |
| Đồng | $(0,3 \div 1,2) \times 10^2$ | |
| Nhôm | $(0,3 \div 0,8) \times 10^2$ | |
| Đuyara | $(0,8 \div 1,5) \times 10^2$ | |
| Gang xám | $(0,28 \div 0,8) \times 10^2$ | $(1,2 \div 1,5) \times 10^2$ |

3.4.2. Điều kiện cường độ-ba bài toán cơ bản

Thanh chịu kéo (nén) đúng tâm đảm bảo điều kiện cường độ khi ứng suất pháp lớn nhất phát sinh trong thanh phải nhỏ hơn hay tối đa bằng ứng suất pháp cho phép, nghĩa là:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma] \quad (3.7)$$

Từ điều kiện cường độ (3.7) ta có thể gặp ba loại bài toán cơ bản sau:

a) *Bài toán kiểm tra cường độ:*

Khi biết lực dọc trong thanh N, diện tích mặt cắt là F và ứng suất cho phép $[\sigma]$. Thanh đảm bảo cường độ khi thỏa mãn điều kiện:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$$

b) *Bài toán chọn diện tích mặt cắt F của thanh khi biết lực dọc N và ứng suất cho phép $[\sigma]$:*

Ta có công thức xác định diện tích mặt cắt F của thanh:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]} = [F]$$

c) *Bài toán xác định trị số lớn nhất của tải trọng mà thanh có thể chịu được theo công thức:*

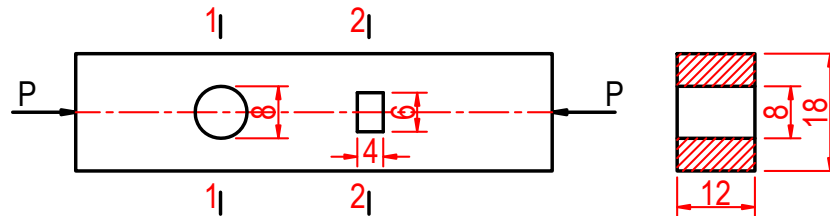
$$N [F[\sigma]] = [N]$$

Dưới đây ta sẽ nghiên cứu một ví dụ để làm sáng tỏ các vấn đề đã nêu trên.

- **Ví dụ 3.3:** Kiểm tra cường độ của một thanh gỗ. Trên thanh có các lỗ khuyết như ở hình 3.15. Lỗ tròn đường kính $d = 8$ cm, lỗ chữ nhật kích thước (4x6) cm. Thanh chịu lực nén $P = 96$ kN, ứng suất cho phép về nén của gỗ là $[\sigma]_n = 10$ MN/m².

- **Bài giải:** Ta phải kiểm tra cường độ của thanh ở mặt cắt có diện tích nhỏ nhất vì tại mặt cắt đó sẽ phát sinh ứng suất pháp lớn nhất.

Trong các mặt cắt 1-1 và 2-2 đi qua các lỗ khuyết, thì mặt cắt 1-1 nguy hiểm hơn vì diện tích chịu lực của thanh ở đây nhỏ hơn, diện tích mặt cắt này là: $F = (0,18 \times 0,12) - (0,08 \times 0,12) = 0,012$ m².



Hình 3.15

Ứng suất tại mặt cắt nguy hiểm là: $\sigma = \frac{-96}{0,012} = -8000$ kN/m² = -8 MN/m²

Ứng suất lớn nhất trong thanh: $|\sigma| = 8$ MN/m² < $[\sigma] = 10$ MN/m².

Vậy thanh đảm bảo cường độ.

- **Thí dụ 3.4:** Một thanh thép tròn chịu lực kéo đúng tâm $P = 1,2 \times 10^2$ kN. Tính đường kính tối thiểu của thanh, biết ứng suất cho phép $[\sigma] = 1,4 \times 10^2$ MN/m².

- **Bài giải:** Dựa vào công thức (3.8) ta có: $F \geq \frac{N}{[\sigma]}$

Ở đây: $N = P = 1,2 \times 10^2$ kN, hay: $\frac{\pi d^2}{4} \geq \frac{1,2 \times 10^2}{10^5} \Rightarrow d \geq 3,3 \times 10^{-2}$ (m).

Vậy chọn đường kính tối thiểu của thanh là $d = 3,3 \times 10^{-2}$ m = 3,3 cm.

- **Thí dụ 3.5:** Một thanh tuyệt đối cứng AB. Đầu A được bắt bản lề cố định vào tường, đầu kia chịu tác dụng của lực P. Thanh được giữ cân bằng nhờ thanh thép tròn CB nằm ngang có đường kính $d=16$ mm (hình 3.16). Hãy xác định trị số lớn nhất của lực P theo điều kiện cường độ thanh CB biết ứng suất cho phép của thanh CB là: $[\sigma]=1,6 \times 10^2$ MN/m².

- **Bài giải:** Thay bản lề A bằng các phản lực X_A, Y_A . Tường tượng cắt thanh BC bởi mặt cắt 1-1 trên thanh BC xuất hiện lực dọc N_{BC} ta có:

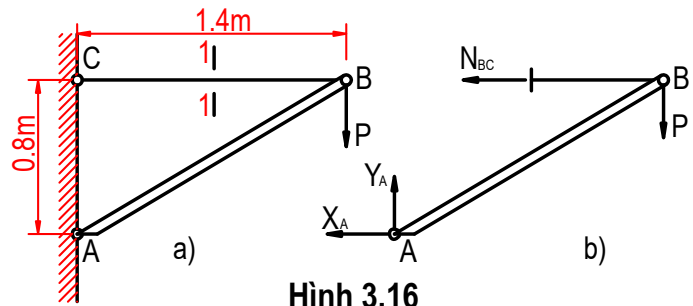
$$\begin{aligned} \Sigma M_A &= -1,4P + 0,8N_{BC} = 0 \\ \Rightarrow N_{BC} &= \frac{1,4P}{0,8} = 1,75P \end{aligned}$$

Từ công thức (3.9) ta có:

$$[N]_{BC} = F \times [\sigma] = \frac{(0,016)^2 \times 3,14 \times 1,6 \times 10^3}{4} = 32,15 \text{ kN}$$

Do đó lực P cho phép là: $[P] = \frac{[N]_{BC}}{1,75} = \frac{32,15}{1,75} = 18,37 \text{ kN}$.

Vậy trị số lớn nhất của lực P là 18,37kN.



Hình 3.16

3.4.3. Tính ứng suất có kể đến trọng lượng bản thân

Trong các công thức tính toán về kéo (nén) đúng tâm đã trình bày ở trên, ta bỏ qua ảnh hưởng của trọng lượng cấu kiện, vì trọng lượng này thường rất nhỏ so với độ lớn của lực tác dụng lên cấu kiện.

Nhưng trong trường hợp tính những thanh dài, trụ lớn, tường nặng, đập, bê máy... thì ảnh hưởng của trọng lượng cấu kiện cũng rất đáng kể.

Dưới đây ta sẽ xét trường hợp cụ thể đó.

a) Thanh có mặt cắt không đổi:

Giả sử có thanh thẳng đứng chiều dài l , diện tích mặt cắt không đổi là F . Ở đầu tự do có lực kéo đúng tâm P tác dụng (hình 3.17a). Thanh làm bằng vật liệu có trọng lượng riêng γ . Tìm ứng suất phát sinh trong thanh

Trước hết ta tìm lực dọc trong thanh. Tại mặt cắt bất kỳ 1-1 (hình 3.17b):

$$N = P + \gamma Fz$$

Biểu đồ N như hình 3.18c.

Ứng suất phát sinh trên mặt cắt 1-1 là:

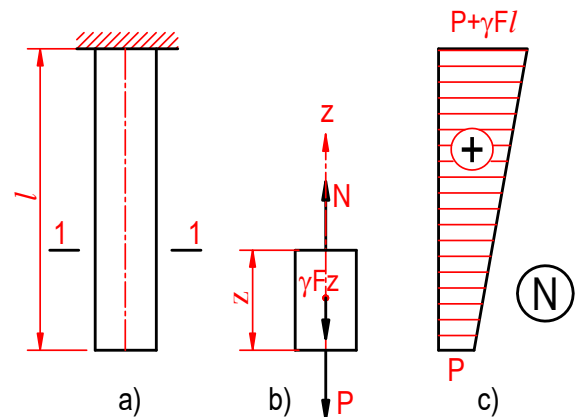
$$\sigma = \frac{P + \gamma Fz}{F} \quad \text{hay:} \quad \sigma = \frac{P}{F} + \gamma z$$

Do đó ứng suất phát sinh trên thanh cũng biến thiên dọc theo chiều dài thanh và có giá trị lớn nhất ở ngàm. Điều kiện cường độ trong trường hợp này là:

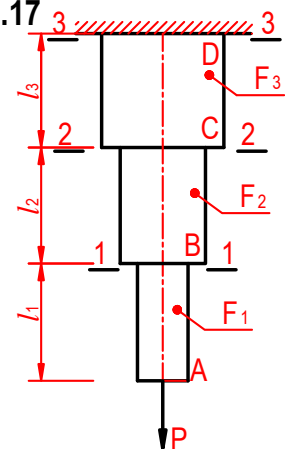
$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l \leq [\sigma]$$

Diện tích tối thiểu của thanh tính theo công thức:

$$F \geq [F] = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l}$$



Hình 3.17



Hình 3.18

Ngoại lực lớn nhất cho phép tính theo công thức:

$$P \leq [P] = F \times ([\sigma] - \gamma \times l).$$

b) Khi thanh có mặt cắt thay đổi từng nấc:

Trong phần trên ta thấy: nếu kể đến trọng lượng bản thân thanh thì ứng suất thay đổi dọc theo chiều dài thanh. Nếu ta dùng thanh có mặt cắt không thay đổi thì ở đầu thanh vật liệu chưa dùng hết khả năng. Do đó để cho ứng suất ở các mặt cắt không chênh lệch nhau lắm để dùng hết khả năng của vật liệu người ta làm những thanh có mặt cắt thay đổi từng nấc (hình 3.18). Ứng suất phát sinh trên các mặt cắt 1-1, 2-2 và 3-3 của các đoạn thanh AB, BC và CD có giá trị là:

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_1} + \gamma l_1; \quad \sigma_2 = \frac{P}{F_2} + \frac{\gamma l_1 F_1}{F_2} + \gamma l_2; \quad \sigma_3 = \frac{P}{F_3} + \frac{\gamma l_1 F_1}{F_3} + \frac{\gamma l_2 F_2}{F_3} + \gamma l_3$$

Ta cũng chọn các mặt cắt F_1, F_2, F_3 sao cho thỏa mãn điều kiện là ứng suất trên các mặt cắt đó tối đa là bằng ứng suất cho phép:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = [\sigma].$$

Muốn vậy chỉ việc thay các trị số $[\sigma]$ vào các đẳng thức trên ta sẽ được F_1, F_2 và F_3 nhỏ nhất. Ta có:

$$[F_1] = \frac{P}{[\sigma] - \gamma l_1}; \quad [F_2] = \frac{P + \gamma l_1 F_1}{[\sigma] - \gamma l_2}; \quad [F_3] = \frac{P + \gamma l_1 F_1 + \gamma l_2 F_2}{[\sigma] - \gamma l_3}.$$

- **Thí dụ 3.6:** Một cột bê tông cốt thép gồm hai đoạn, đoạn một có diện tích là $F_1 = 0,04 \text{ m}^2$, đoạn hai có diện tích là mặt cắt là $F_2 = 0,0625 \text{ m}^2$. Cột chịu lực nén đúng tâm $P = 20 \text{ kN}$. Hãy tính ứng suất lớn nhất trong từng đoạn cột biết trọng lượng riêng của bê tông $\gamma = 2500 \text{ kG/m}^3$ (hình 3.19a).

Bài giải: Trước hết ta tính lực dọc N.

Bằng phương pháp mặt cắt vẽ được biểu đồ lực dọc cho cột như trên hình 3.19b.

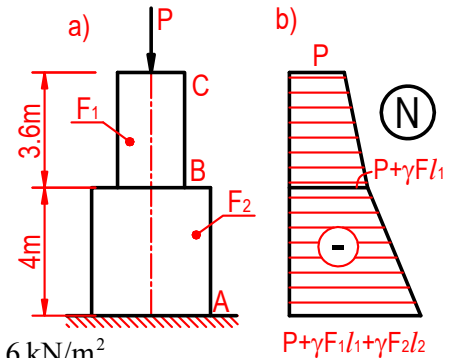
- Ứng suất lớn nhất trên đoạn BC (tại B):

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_1} + \gamma l_1 = \frac{20}{0,04} + 25 \times 3,6 = 590 \text{ kN/m}^2$$

$$(\gamma = 2500 \text{ kG/m}^3 = 25 \text{ kN/m}^3).$$

- Ứng suất lớn nhất đoạn AB (tại chân cột):

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_1} + \frac{\gamma F_1 l_1}{F_2} + \gamma l_2 = \frac{20}{0,04} + \frac{25 \times 0,04 \times 3,6}{0,0625} + 25 \times 4 = 477,6 \text{ kN/m}^2$$



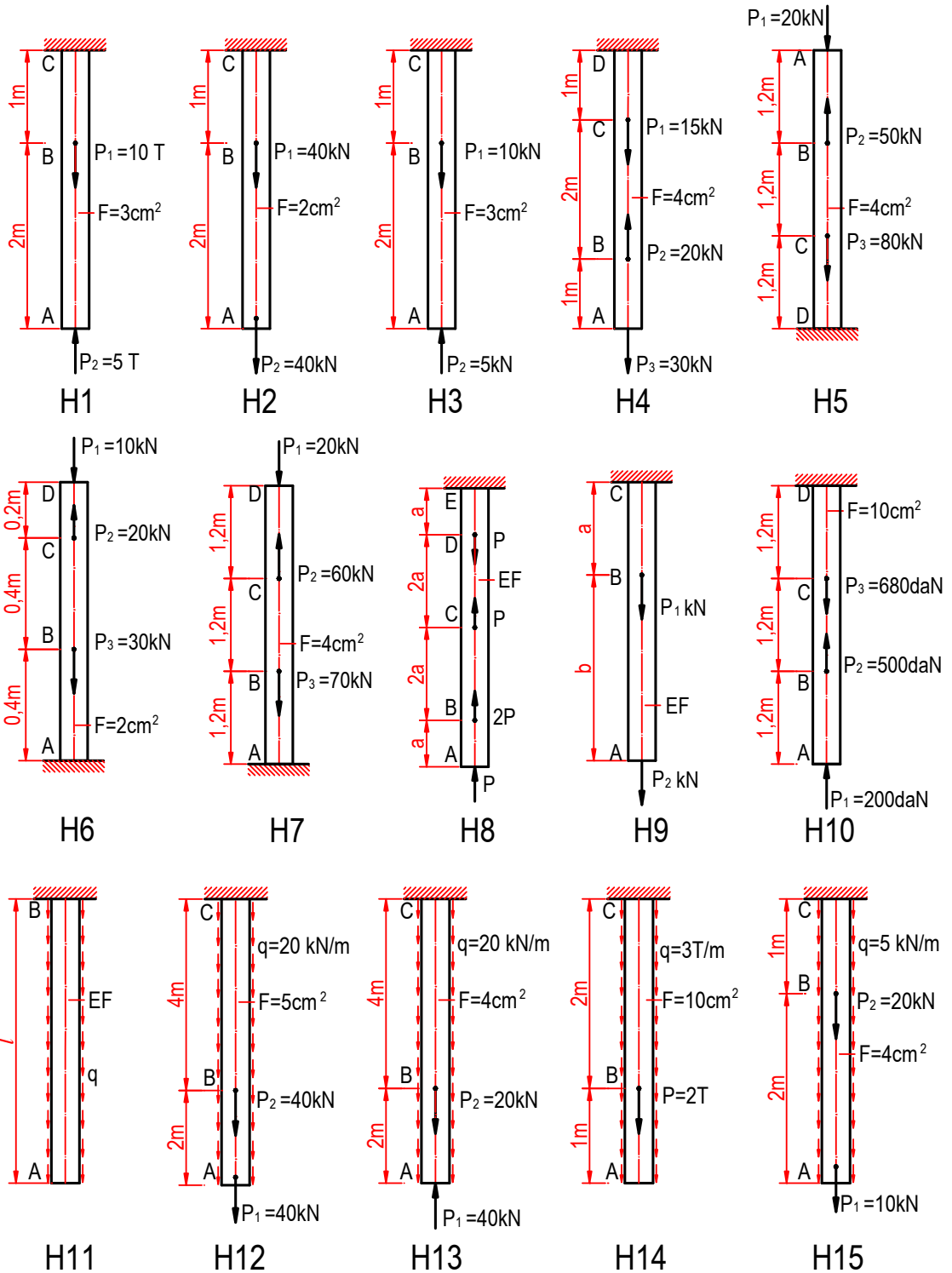
Hình 3.19

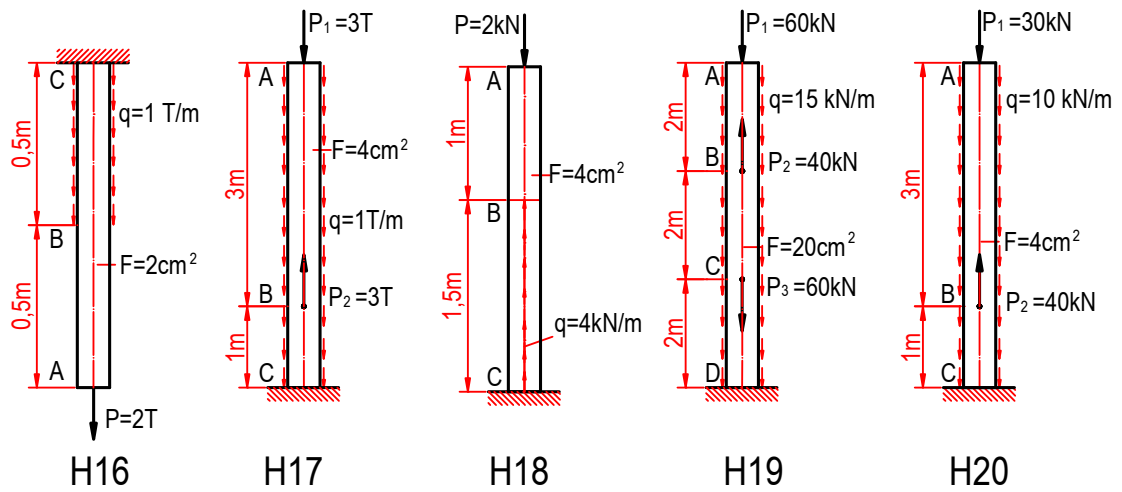
CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 3

1. Thế nào là thanh chịu kéo nén đúng tâm?
2. Nêu cách tính nội lực trên mặt cắt ngang của thanh chịu kéo (nén) đúng tâm.
3. Biểu đồ nội lực là gì? Cách vẽ biểu đồ nội lực?
4. Viết và giải thích công thức tính ứng suất trên mặt cắt ngang?
5. Thế nào là biến dạng dọc, biến dạng ngang tuyệt đối và tương đối? Viết và giải thích công thức tính biến dạng dọc tuyệt đối.
6. Giải thích ba giai đoạn khi thí nghiệm kéo vật liệu dẻo?

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Vẽ biểu đồ lực dọc, biểu đồ ứng suất và tính biến dạng dài tuyệt đối của các thanh ở hình 3.20, xem như khi bị nén các thanh không bị cong đi. Biết $E = 2 \cdot 10^2 \text{ daN/cm}^2$. Bỏ qua trọng lượng của các thanh.



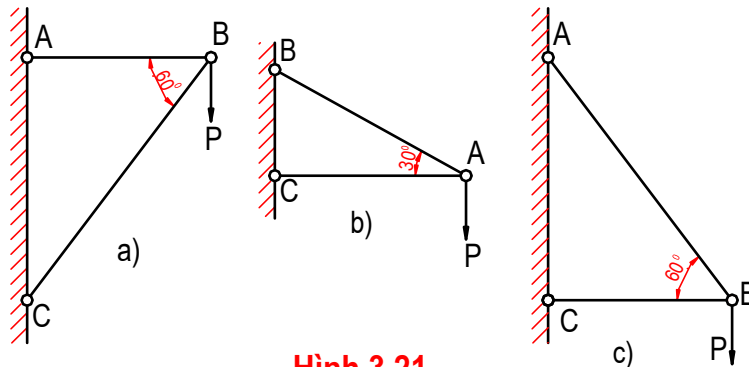


Hình 3.20

2. Giá ABC (hình 3.21a) thanh AB có $F = 10 \text{ cm}^2$, thanh BC có $F = 6,5 \text{ cm}^2$. Cả hai thanh đều bằng gang có: $[\sigma]_n = 900 \text{ daN/cm}^2$, $[\sigma]_k = 300 \text{ daN/cm}^2$. Xác định Q theo điều kiện bền (khi kéo và nén).

3. Giá ABC (hình 3.21b) thanh AB bằng thép tròn đường kính d có $[\sigma]_k = 1400 \text{ daN/cm}^2$, thanh gỗ vuông cạnh a có $[\sigma]_n = 130 \text{ daN/cm}^2$. Tại A treo vật nặng $P = 50 \text{ kN}$. Xác định d và a theo điều kiện bền.

4. Cho hệ thanh chịu lực như hình vẽ 3.21c. Hãy kiểm tra điều kiện bền cho các thanh biết: thanh AB có diện tích mặt cắt ngang $F_1 = 15 \text{ cm}^2$; $[\sigma_k] = 16 \text{ kN/cm}^2$. Thanh BC có diện tích mặt cắt ngang $F_2 = 8 \text{ cm}^2$, $[\sigma_n] = 14 \text{ kN/cm}^2$. Biết $P = 190 \text{ kN}$.



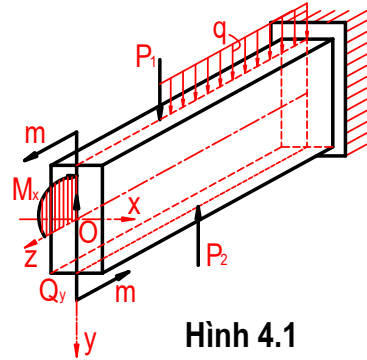
Hình 3.21

Chương 4 UỐN NGANG PHẪNG

4.1. Khái niệm

4.1.1. Định nghĩa về uốn phẳng

Ta sẽ xét những thanh thẳng mặt cắt có trục đối xứng. Trục đối xứng và trục thanh tạo thành *mặt phẳng đối xứng*. Những thanh đó sẽ *chịu uốn phẳng* khi thanh cân bằng dưới tác dụng của các lực nằm trong mặt phẳng đối xứng của thanh, có phương vuông góc với trục của thanh. Những lực này là ngẫu lực, lực tập trung hoặc phân bố. Thanh chịu uốn phẳng được gọi là *dầm*. Mặt phẳng chứa các lực và trục dầm gọi là *mặt phẳng tải trọng* (mặt phẳng Oyz trên hình 4.1). Giao tuyến giữa mặt phẳng tải trọng và mặt cắt ngang gọi là *đường tải trọng* (đường Oy trên hình 4.1). Nếu trục dầm sau khi bị uốn là một đường cong nằm trong mặt phẳng quán tính chính trung tâm thì sự uốn đó gọi là *uốn phẳng*. Hình 4.1 cho ta một ví dụ về dầm chịu uốn phẳng. Như vậy: *Khi trên mặt cắt ngang nội lực chỉ có hai thành phần: M_x, Q_y hoặc M_y, Q_x ta gọi thanh chịu uốn ngang phẳng.*

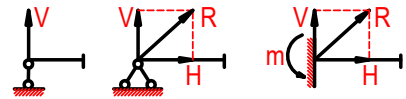


Hình 4.1

Từ định nghĩa trên ta có thể nhận biết được thanh chịu uốn phẳng dựa vào ngoại lực như sau: khi ngoại lực có phương vuông góc với trục của thanh và trùng với một trục đối xứng của mặt cắt thì thanh chịu uốn phẳng.

4.1.2. Gối tựa và phản lực gối tựa

Dầm được tựa trên các bộ phận đỡ, những bộ phận đỡ này gọi là *gối tựa* hay *liên kết*. Có ba loại liên kết thường gặp là: bản lề di động, bản lề cố định và ngàm. Hình 4.2 biểu thị sơ đồ tính toán và phản lực của ba loại liên kết trên. Để xác định phản lực gối tựa, ta dùng các phương trình cân bằng tĩnh học trong môn CHLT.



Hình 4.2

Nếu số phản lực gối tựa đúng bằng số phương trình cân bằng thì ta dễ dàng tìm được các phản lực, dầm đó gọi là *dầm tĩnh định*. Nếu dầm có số phản lực nhiều hơn số phương trình cân bằng tĩnh học, ta có *dầm siêu tĩnh*. Trong chương này, ta chỉ nghiên cứu dầm tĩnh định.

4.2. Nội lực trong dầm chịu uốn ngang phẳng

4.2.1. Khái niệm

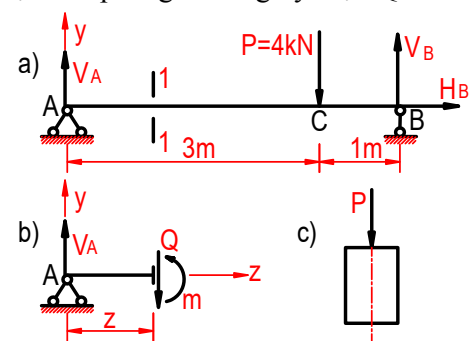
Như đã nêu ở trên, trong thanh chịu uốn phẳng ngoại lực nằm trong mặt phẳng đối xứng yOz, do đó trên mặt cắt các thành phần nội lực là $Q_x = 0, M_y = 0$ và $M_z = 0$. Mặt khác ngoại lực có phương vuông góc với trục thanh nên từ phương trình hình chiếu: $\Sigma z = 0 \Rightarrow N_z = 0$.

Như vậy: trên mặt cắt ngang của thanh chịu uốn phẳng chỉ tồn tại *hai thành phần nội lực*. Đó là *lực cắt Q_y* và *mômen uốn M_x* .

Để đơn giản, trong phần tìm nội lực của thanh chịu uốn phẳng ta dùng ký hiệu Q và M thay cho ký hiệu Q_y và M_x .

4.2.2. Phương pháp xác định Q và M:

Sau khi đã xác định thì toàn bộ ngoại lực tác dụng lên dầm đã được xác định. Ta sẽ đi xác định nội lực.



Hình 4.3

Giả sử có một dầm mặt cắt có trục đối xứng và chịu tác dụng của lực thẳng đứng P (hình 4.3a). Trị số lực P và kích thước của dầm cho trên hình vẽ. Hãy xác định nội lực tại mặt cắt bất kỳ của dầm.

Trước hết ta xác định phản lực tại các gối tựa A và B. Vì các ngoại lực bao gồm tải trọng P và các phản lực liên kết V_A, V_B và H_B là hệ lực cân bằng nên ta có:

$$\sum m_A = 4V_B - 4.3 = 0 \quad \rightarrow V_B = 3 \text{ kN.}$$

$$\sum m_B = -4V_A + 4.1 = 0 \quad \rightarrow V_A = 1 \text{ kN.}$$

$$\sum z = 0 \text{ cho thấy phản lực nằm ngang } H_B = 0.$$

Từ đây ta nhớ rằng phản lực dọc trục (nằm ngang) của dầm chịu uốn luôn bằng không. Để tính nội lực trong dầm ta dùng *phương pháp mặt cắt*. Tưởng tượng cắt dầm tại mặt cắt 1-1 cách gối A một đoạn z. Ta giữ lại một phần dầm để nghiên cứu. Giả sử ta giữ lại phần dầm bên trái mặt cắt 1-1 (hình 4.3b). Để phần dầm giữ lại được cân bằng thì ta phải đặt vào mặt cắt 1-1 những nội lực. Những nội lực này phân bố trên toàn bộ mặt cắt. Quy luật phân bố của chúng ta sẽ nghiên cứu ở phần sau. Như đã nêu ở trên, khi thu gọn hệ nội lực về trọng tâm mặt cắt ta sẽ được hai thành phần nội lực, đó là lực cắt Q (đơn vị: N) và mômen uốn M (đơn vị: Nm).

Phần dầm giữ lại cân bằng, nên nội lực và ngoại lực tạo thành hệ lực cân bằng. Từ điều kiện cân bằng tĩnh học của phần dầm đó ta có:

$$Q = V_A = 1 \quad (\text{kN}).$$

$$M = V_A \times z = z \quad (\text{kNm}).$$

Như vậy trị số lực cắt Q bằng trị số hình chiếu của ngoại lực V_A tác dụng lên phần dầm phía trái mặt cắt 1-1 lên mặt cắt đó, trị số mômen uốn M bằng trị số mômen của ngoại lực V_A lấy với trọng tâm mặt cắt 1-1.

Như ta đã biết ở chương 1 nội lực trên cùng một mặt cắt ở hai phần dầm (nằm bên phải và bên trái mặt cắt) thì bằng nhau về trị số nhưng ngược chiều nhau. Do đó tại mặt cắt 1-1 trên phần dầm bên phải của mặt cắt cũng có các nội lực Q và M bằng nhau về trị số nhưng ngược chiều với Q và M ở mặt cắt 1-1 trên phần dầm bên trái.

Nếu trên phần dầm đang xét có nhiều ngoại lực tác dụng thì lực cắt Q và mômen uốn M tại mặt cắt nào đó sẽ bằng tổng đại số lực cắt Q, mômen uốn M tại mặt cắt đó do từng ngoại lực tác dụng lên phần dầm đang xét gây ra.

Từ phương pháp mặt cắt ta rút ra quy tắc tính Q và M tại mặt cắt bất kỳ của dầm chịu uốn phẳng như sau:

- Về trị số:

+ Lực cắt Q tại một mặt cắt nào đó sẽ bằng tổng đại số hình chiếu của các ngoại lực về một phía của mặt cắt lên mặt cắt đó:

$$Q = \sum_{\text{1phía}} P_i + \sum_{\text{1phía}} q_i$$

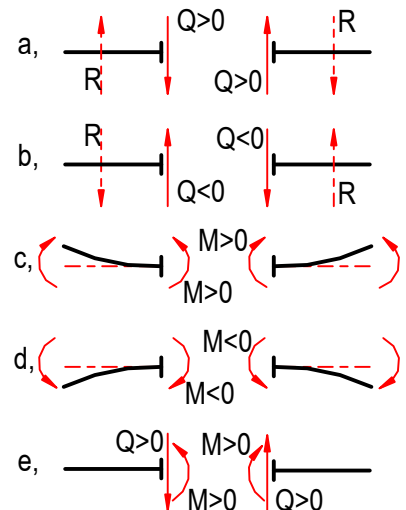
+ Mômen uốn M tại một mặt cắt nào đó sẽ bằng tổng đại số mômen của các ngoại lực ở về một phía của mặt cắt đối với trọng tâm mặt cắt đó:

$$M = \sum_{\text{1phía}} m_{P_i} + \sum_{\text{1phía}} m_{q_i} + \sum_{\text{1phía}} m_i$$

- Về dấu:

+ Lực cắt Q có dấu dương tại một mặt cắt nào đó, nếu ngoại lực tác dụng lên phần dầm xét giữ có khuynh hướng làm cho phần dầm xét giữ quay thuận chiều kim đồng hồ quanh trọng tâm mặt cắt đang xét (hình 4.4a). Ngược lại lực cắt Q có dấu âm (hình 4.4b).

+ Mômen uốn M có dấu dương tại một mặt cắt nào đó, nếu ngoại lực ở phần dầm xét giữ khuynh hướng làm cho các thớ dưới của dầm bị giãn, lúc đó xem như mặt cắt đang xét bị ngàm chặt (hình 4.5c). Ngược lại M có dấu âm (hình 4.5d).



Hình 4.5

Tổng hợp các trường hợp trên hình 4.5a,b,c,d ta được trường hợp nội lực mang dấu dương trên mặt cắt của dầm chịu uốn ngang phẳng (hình 4.5e).

4.2.3. Vẽ biểu đồ Q và M bằng phương pháp lập biểu thức

Thường trên những mặt cắt khác nhau của dầm lực cắt Q và mômen uốn M có trị số và dấu khác nhau. Điều đó có nghĩa là M và Q biến đổi theo vị trí mặt cắt trên trục dầm. Gọi z là hoành độ của mặt cắt thì M và Q là những hàm số biến thiên theo z, ký hiệu Q_z, M_z . Đồ thị biểu diễn sự biến thiên của Q và M dọc theo trục của dầm được gọi là *biểu đồ nội lực Q, M*.

Vẽ biểu đồ nội lực Q, M là một bước quan trọng trong quá trình tính toán dầm chịu uốn phẳng vì qua biểu đồ nội lực ta dễ dàng xác định được các vị trí có trị số lực cắt lớn nhất Q_{max} và mômen uốn lớn nhất M_{max} là những mặt cắt nguy hiểm nhất. Để vẽ biểu đồ nội lực Q và M ta tiến hành các bước sau đây:

a) *Xác định phản lực.*

b) *Chia dầm ra làm nhiều đoạn:* tại mỗi đoạn phải đảm bảo nội lực không thay đổi đột ngột. Muốn vậy ta phải dựa vào những mặt cắt có đặt lực hay mômen tập trung hoặc có sự thay đổi đột ngột của lực phân bố để phân đoạn.

Sau đó, bằng phương pháp mặt cắt lập biểu thức nội lực Q và M cho một mặt cắt bất kỳ trong từng đoạn.

c) *Vẽ biểu đồ Q và M:*

Đặt trục hoành (còn gọi là trục chuẩn) song song với trục dầm. Trên trục chuẩn dựng những tung độ có độ lớn biểu thị giá trị của Q hoặc M theo tỷ lệ xích nhất định. Dùng các biểu thức Q và M đã lập ở trên để vẽ biểu đồ của chúng. Ta qui ước:

- Các tung độ dương của biểu đồ Q đặt phía trên trục chuẩn, tung độ âm đặt phía dưới trục chuẩn.

- Tung độ dương của biểu đồ M đặt phía dưới trục chuẩn còn tung độ âm đặt phía trên trục chuẩn. Như vậy cũng có nghĩa là tung độ của biểu đồ M luôn đặt về phía thứ bị giãn của dầm.

Sau đây ta sẽ nghiên cứu một vài ví dụ về vẽ biểu đồ Q, M của các dạng dầm cơ bản chịu tải trọng tập trung, mômen tập trung, chịu lực phân bố.

- **Ví dụ 4.1:** Vẽ biểu đồ lực cắt Q và mômen uốn M cho dầm tựa trên hai gối bản lề A và B chịu tải trọng P như hình 4.6a.

- **Bài giải:**

a) *Xác định phản lực:*

Ngoại lực tác dụng gồm tải trọng P đã biết cùng các phản lực V_A, V_B chưa biết và thành phần nằm ngang $H_B = 0$, các phản lực giả thiết có chiều hướng lên như hình vẽ (hình 4.6a). Từ điều kiện cân bằng tĩnh học của dầm ta có:

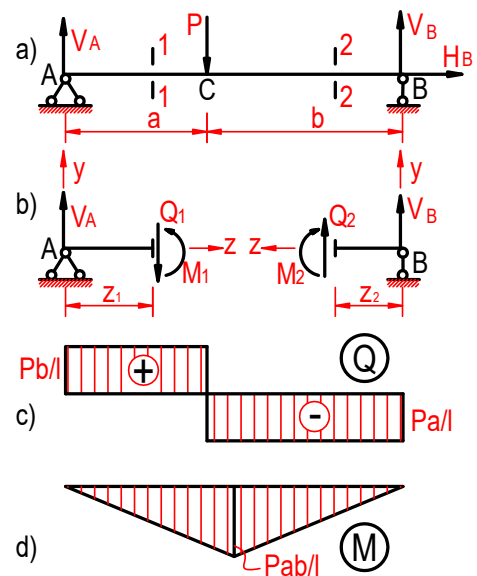
$$\sum m_A = V_B l - Pa = 0 \Rightarrow V_B = \frac{Pa}{l}$$

$$\sum m_B = -V_A l + Pb = 0 \Rightarrow V_A = \frac{Pb}{l}$$

b) *Phân đoạn và thiết lập biểu thức nội lực Q và M:* Căn cứ vào ngoại lực tác dụng, ta phân dầm làm hai đoạn AC và BC (C là điểm đặt của lực P):

- Biểu thức nội lực trong đoạn AC:

Để lập biểu thức Q, M tại mặt cắt bất kỳ trong đoạn AC, ta cắt dầm bằng mặt cắt 1-1 cách gối A một đoạn z_1 (hình 4.6b), xét phần dầm bên trái mặt cắt ($0 \leq z_1 \leq a$):



Hình 4.6

$$+ \text{Lực cắt } Q: \quad Q_1 = V_A = \frac{Pb}{l} \quad (1)$$

Q_1 có dấu dương vì ngoại lực V_A làm cho dầm bên trái mặt cắt quay cùng chiều kim đồng hồ quanh trọng tâm mặt cắt đang xét.

+ Mômen uốn tại mặt cắt 1-1:

$$M_1 = V_A \cdot z_1 = \frac{Pb}{l} z_1 \quad (2)$$

M_1 có dấu dương vì ngoại lực V_A làm cho thớ dưới của dầm bị giãn.

Khi $z_1 > a$ tức là mặt cắt đã vượt qua điểm C lúc này ngoại lực trên mặt cắt không chỉ có V_A mà còn có lực P , do đó biểu thức (1) và (2) không dùng được nữa và tại điểm C nội lực trong dầm thay đổi đột ngột. Chính vì vậy mà ta phải chia dầm ra làm hai đoạn và điểm C là ranh giới giữa hai đoạn.

- Biểu thức nội lực trong đoạn CB:

Để tính nội lực tại mặt cắt bất kỳ 2-2 cách gối B một đoạn z_2 ($0 \leq z_2 \leq b$). Xét phần dầm bên phải mặt cắt (hình 4.7b), ta tìm được:

$$+ \text{Lực cắt } Q \text{ tại mặt cắt 2-2:} \quad Q_2 = -V_B = -\frac{Pa}{l} \quad (3)$$

Lực cắt Q_2 có dấu âm vì ngoại lực V_B làm cho phần dầm đang xét quay ngược chiều kim đồng hồ.

$$+ \text{Mômen uốn tại mặt cắt 2-2:} \quad M_2 = V_B \cdot z_2 = \frac{Pa}{l} z_2 \quad (4)$$

M_2 cũng có dấu dương.

c) *Vẽ biểu đồ Q và M:*

- Trong đoạn AC:

Khi mặt cắt 1-1 thay đổi từ vị trí A đến C nghĩa là $0 \leq z_1 \leq a$ thì: theo (1) lực cắt Q_1 là hằng số, do đó biểu đồ Q_1 là đường thẳng song song với trục chuẩn (trục z) có tung độ bằng tung độ này đặt phía trên trục chuẩn vì $Q_1 > 0$ (hình 4.6c). Theo (2) mômen uốn M_1 là hàm bậc nhất của z_1 , do đó đường biểu diễn là đường thẳng xiên, được xác định bằng 2 điểm với:

$$z_1 = 0 \text{ (ứng với điểm A)} \quad \rightarrow \quad M = 0.$$

$$z_1 = a \text{ (ứng với điểm C)} \quad \rightarrow \quad M = P \times \frac{a \times b}{l}.$$

Và tung độ của điểm M đặt phía dưới trục chuẩn (hình 4.7d).

- Trong đoạn CB:

Theo (3) lực cắt $Q(z_2)$ là hằng số nên đường biểu diễn là đường thẳng song song với trục chuẩn. Các tung độ của biểu đồ đặt phía dưới trục chuẩn vì $Q_2 < 0$ (hình 4.6c). Theo (4) mômen uốn M_2 là hàm bậc nhất theo z_2 , đường biểu diễn cũng là đường thẳng xiên được xác định bởi hai điểm:

$$\text{Điểm B với } z_2 = 0 \quad \rightarrow \quad M = 0.$$

$$\text{Điểm C với } z_2 = b \quad \rightarrow \quad M = P \times \frac{a \times b}{l}.$$

Và tung độ của biểu đồ M cũng đặt phía dưới trục chuẩn (hình 4.6d).

Khi vẽ xong biểu đồ ta kẻ những đường gạch theo phương vuông góc với trục chuẩn (trục dầm) và đặt dấu vào biểu đồ Q, riêng biểu đồ mômen không ghi dấu (vì biểu đồ mômen được vẽ theo thớ bị giãn).

Từ biểu đồ nội lực vẽ ở trên ta thấy:

+ Mặt cắt có nội lực Q lớn nhất nằm trong đoạn AC với trị số:

$$Q_{\max} = P \frac{b}{l} \text{ (nếu } b > a \text{)}.$$

+ Mômen uốn lớn nhất tại mặt cắt C có trị số:

$$M_{\max} = P \frac{ab}{l}$$

* **Chú ý:**

1. Tại mặt cắt có lực tập trung V_A, V_B và P biểu đồ Q có bước nhảy, hướng của bước nhảy cùng chiều hướng lực tập trung nếu xét từ trái sang và ngược lại. Trị số tuyệt đối của các bước nhảy này bằng trị số của các lực V_A, V_B, P và tại đó biểu đồ M gãy khúc.

2. Nếu lực tập trung đặt tại giữa dầm ($a=b=l/2$) thì lực cắt lớn nhất:

$$Q_{\max} = \frac{P}{2}$$

Và mômen lớn nhất tại giữa dầm ($z=l/2$) là :

$$M_{\max} = P \frac{l}{4}$$

- **Thí dụ 4.2:** Vẽ biểu đồ lực cắt Q và mômen uốn M cho dầm chịu tải trọng phân bố đều với cường độ phân bố q như hình 4.7a.

- **Bài giải:** a) *Xác định phản lực:*

Ta xác định phản lực tại gối A và B của dầm, phản lực tại gối A là V_A , phản lực tại gối B là V_B . Hợp lực của tải trọng phân bố đều: $R = ql$ đặt tại chính giữa dầm. Viết các phương trình cân bằng tĩnh học cho dầm ta có:

$$\sum m_A = V_B l - ql \times \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{ql}{2}$$

$$\sum m_B = -V_A l + ql \times \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{ql}{2}$$

(ta dễ dàng nhận thấy phản lực $V_A = V_B = \frac{ql}{2}$ vì dầm

chịu tải trọng đối xứng).

b) *Phân đoạn và thiết lập biểu thức Q và M :*

Ta thấy trong suốt chiều dài dầm, từ A đến B ngoại lực không thay đổi đột ngột do đó dầm chỉ có một đoạn.

Để xác định nội lực cho dầm ta cắt dầm tại mặt cắt 1-1 cách gối A một đoạn z , phần dầm bên trái mặt cắt chịu tác dụng của các ngoại lực là phản lực V_A và lực phân bố đều trên chiều dài z có hợp lực là qz . Do đó, ta có:

$$Q(z) = V_A - qz = \frac{ql}{2} - qz = q\left(\frac{l}{2} - z\right)$$

$$M(z) = V_A z - q \times z \times \frac{z}{2} = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}$$

c) *Vẽ biểu đồ nội lực Q và M :*

- Lực cắt Q là hàm bậc nhất theo z nên đường biểu diễn là đường thẳng (hình 4.7b) được xác định bởi 2 điểm:

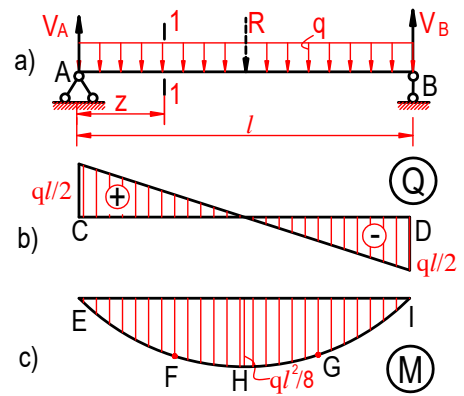
$$\text{Tại } z = 0 \text{ (điểm C): } Q = \frac{ql}{2}. \quad \text{Tại } z = l \text{ (điểm D): } Q = -\frac{ql}{2}.$$

- Mômen uốn M là hàm bậc hai theo z nên biểu đồ M là đường Parabol bậc 2 (hình 4.7c). Để vẽ biểu đồ cần xác định một số điểm sau:

$$\text{Tại } z = 0 \text{ (điểm E): } M = 0; \quad \text{Tại } z = \frac{l}{4} \text{ (điểm F): } M = \frac{3ql^2}{32}$$

$$\text{Tại } z = \frac{l}{2} \text{ (điểm H): } M = \frac{ql^2}{8}; \quad \text{Tại } z = \frac{3}{4}l \text{ (điểm G): } M = \frac{3ql^2}{32}$$

$$\text{Tại } z = l \text{ (điểm I): } M = 0.$$



Hình 4.7

* Căn cứ vào biểu đồ Q và M. Ta nhận thấy:

- Tại mặt cắt chính giữa dầm ($z = \frac{l}{2}$) ta có lực cắt $Q = 0$ và mômen đạt trị số lớn nhất :

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

- Mặt cắt tại gối A và B lực cắt đạt trị số lớn nhất: $|Q_{\max}| = \frac{ql}{2}$.

- **Thí dụ 4.3:** Vẽ biểu đồ lực cắt và mômen uốn cho dầm chịu lực tác dụng của mômen tập trung như hình vẽ (hình 4.8a).

- **Bài giải:** a) *Xác định phản lực:*

Để xác định phản lực V_A, V_B tại gối A và B ta dựa vào các phương trình cân bằng tĩnh học sau:

$$\Sigma M_A = -V_B l + m = 0 \Rightarrow V_B = \frac{m}{l}$$

$$\Sigma M_B = -V_A l + m = 0 \Rightarrow V_A = \frac{m}{l}$$

b) *Phân đoạn và viết biểu thức nội lực cho các đoạn:*

-Ta chia dầm làm hai đoạn AC và CB (điểm C là ranh giới giữa hai đoạn) vì tại C có mômen tập trung:

+ Biểu thức nội lực Q, M cho đoạn AC:

Cắt dầm tại mặt cắt 1-1 cách gối A một đoạn z_1 , xét phần dầm bên trái mặt cắt ta có:

$$Q(z_1) = V_A = \frac{m}{l}; \quad M(z_1) = V_A z_1 = \frac{m \times z_1}{l}$$

Mặt cắt 1-1 thay đổi từ A đến C, hay là hoành độ z_1 biến thiên: $0 \leq z_1 \leq a$.

+ Biểu thức nội lực Q, M cho đoạn CB: cắt dầm tại mặt cắt 2-2 cách gối B một khoảng z_2 (hình 4.8a), xét dầm bên phải mặt cắt ta có:

$$Q(z_2) = V_B = \frac{m}{l}; \quad M(z_2) = -V_B z_2 = -\frac{m \times z_2}{l}$$

Hoành độ z_2 của mặt cắt di chuyển từ B đến C nghĩa là $0 \leq z_2 \leq b$.

c) *Vẽ biểu đồ nội lực:*

Từ các biểu thức nội lực của hai đoạn ta thấy: trong hai đoạn AC và CB, lực cắt Q là hằng số, biểu đồ là đường thẳng song song với trục chuẩn (hình 4.9b) với tung độ bằng $\frac{m}{l}$. Biểu đồ mômen trong từng đoạn là hàm bậc nhất theo z. Biểu đồ M là đường xiên cụ thể là:

Khi $z_1 = 0$ (tại điểm A): $M = 0$.

Khi $z_1 = a$ (tại bên trái điểm C): $M = \frac{ma}{l}$.

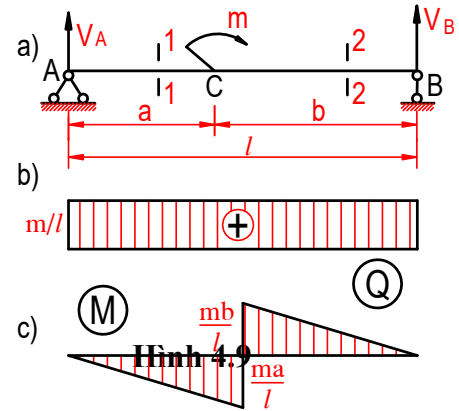
Khi $z_2 = 0$ (tại điểm B): $M = 0$.

Khi $z_2 = b$ (tại bên trái điểm C): $M = -\frac{mb}{l}$.

Biểu đồ được vẽ trên hình 4.8c. Nhìn vào biểu đồ Q, M ta thấy:

+ Lực cắt lớn nhất: $Q_{\max} = \frac{m}{l}$.

+Trị số mômen uốn lớn nhất: $|M_{\max}| = \frac{ma}{l}$ nếu $a > b$.



Hình 4.8

* **Chú ý:** Ở mặt cắt có mômen tập trung biểu đồ mômen có bước nhảy. Nếu xét từ trái qua phải gặp mômen quay thuận chiều kim đồng hồ thì bước nhảy đi hướng xuống và ngược lại. Nếu xét từ phải qua trái thì ngược lại. Trị số tuyệt đối của bước nhảy đúng bằng trị số mômen tập trung. Nhưng tại mặt cắt có mômen tập trung biểu đồ lực cắt không có gì thay đổi.

- **Ví dụ 4.4:** Vẽ biểu đồ nội lực Q, M cho dầm chịu tác dụng của lực phân bố như hình vẽ (hình 4.9a).

- **Bài giải:** a) *Xác định phản lực:*

Để xác định phản lực ta thay thế lực phân bố tam giác bằng hợp lực $R = \frac{ql}{2}$ đặt tại trọng tâm C của tam giác. Từ phương trình cân bằng, ta có:

$$\sum m_A = V_B l - \frac{ql}{2} \times \frac{2l}{3} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{ql}{3}$$

$$\sum m_B = -V_A l + \frac{ql}{2} \times \frac{l}{3} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{ql}{6}$$

b) *Phân đoạn và lập biểu thức nội lực Q, M:*

Ở đây dầm chỉ có một đoạn, để tìm nội lực tại mặt cắt bất kỳ ta cắt dầm tại mặt cắt cách A một đoạn z. Phần dầm bên trái mặt cắt chịu tác dụng của các ngoại lực là phản lực V_A và hợp lực của lực phân bố trong đoạn z có trị số bằng diện tích tam giác All (hình 4.10b) đi qua trọng tâm tam giác đó. Nội lực tại mặt cắt 1-1 là:

$$Q_{(z)} = V_A - q_z \times \frac{z}{2} \quad \text{và} \quad M_{(z)} =$$

$$V_A \times z - q_z \times \frac{z}{2} \times \frac{z}{3}$$

Cường độ của lực phân bố $q_{(z)}$, biến thiên bậc nhất theo z ta có thể tính $q_{(z)}$ dựa vào tam giác đồng dạng:

$$\frac{q_z}{q} = \frac{z}{l} \Rightarrow q_z = \frac{qz}{l}$$

Thay trị số $q_{(z)}$ vào biểu thức Q và M ta được:

$$\left. \begin{aligned} Q_z &= \frac{ql}{6} - \frac{qz^2}{2l} \\ M_z &= \frac{ql}{6}z - \frac{q}{6l}z^3 \end{aligned} \right\} (0 \leq z \leq l)$$

c) *Vẽ biểu đồ Q và M:*

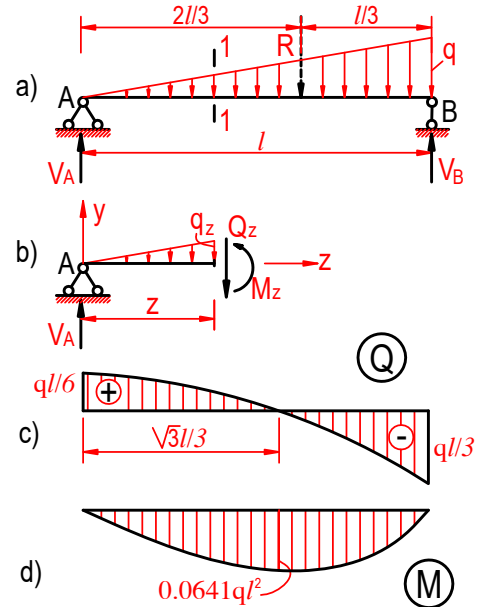
Từ biểu đồ nội lực trên ta thấy biểu đồ Q là hàm bậc 2 và biểu đồ M là hàm bậc 3 theo z. Để vẽ ta dựa vào một số điểm:

$$\text{Khi } z = 0 \text{ (tại A) thì: } Q = \frac{ql}{6}; \quad M = 0.$$

$$\text{Khi } z = \frac{l}{2} \text{ thì: } Q = \frac{ql}{24}; \quad M = 0,025ql^2$$

$$\text{Khi } z = l \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ thì: } Q = 0; \quad M = 0,0641ql^2$$

$$\text{Khi } z = l \text{ thì: } Q = -\frac{ql}{3}; \quad M = 0.$$



Hình 4.9

Biểu đồ Q và M được vẽ trên hình 4.9c,d.

Hoành độ $z = l \frac{\sqrt{3}}{3}$ ứng với mặt cắt $Q = 0$ và mômen uốn M đạt cực đại.

Hoành độ được xác định như sau:

$$\frac{dM}{dz} = \frac{ql}{6} - \frac{qz^2}{2l} = 0 \Rightarrow z = l \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ có } Q = 0.$$

Như vậy mômen uốn lớn nhất: $M_{\max} = M_{(z=\frac{l\sqrt{3}}{3})} = 0,0641ql^2$.

Tại mặt cắt $z = l \frac{\sqrt{3}}{3}$ có $Q = 0$

Tại mặt cắt $z = \frac{l}{2}$ (giữa dầm) mômen uốn: $M_{(z=\frac{l}{2})} = 0,0625ql^2$

Trị số mômen uốn này chỉ kém trị số cực đại là 2,4%. Do đó để tiện cho việc tính toán, ta có thể coi mặt cắt giữa dầm có giá trị mômen lớn nhất và bằng $0,0625ql^2$.

- **Thí dụ 4.5:** Vẽ biểu đồ lực cắt Q và mômen uốn M của dầm côngxon chịu tải trọng phân bố đều dọc theo trục dầm (hình 4.10a).

- **Bài giải:** Dùng mặt cắt 1-1 cách mút tự do một đoạn z (hình 4.10a) xét phần dầm bên trái mặt cắt, nội lực trên mặt cắt là:

$$Q_{(z)} = -qz;$$

$$M_{(z)} = -qz \times \frac{z}{2} = -\frac{qz^2}{2} \text{ với } (0 \leq z \leq l).$$

Nhìn vào biểu thức nội lực ta thấy: lực cắt Q là hàm bậc nhất theo z còn mômen uốn M là hàm bậc 2 theo z.

Ta đi tính trị số Q và M tại các mặt cắt sau:

$$\text{Khi } z = 0 \Rightarrow Q = 0; \quad M = 0.$$

$$\text{Khi } z = \frac{l}{2} \Rightarrow Q = -\frac{ql}{2}; \quad M = -\frac{ql^2}{8}.$$

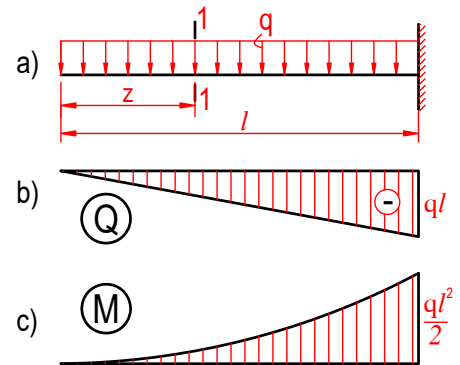
$$\text{Khi } z = l \Rightarrow Q = -ql; \quad M = -\frac{ql^2}{2}.$$

Biểu đồ Q và M được vẽ trên hình 4.10b,c.

Tại mặt cắt ngàm có nội lực lớn nhất: $|Q_{\max}| = ql$;

$$|M_{\max}| = \frac{ql^2}{2}.$$

Từ bài toán này rút ra nhận xét: Khi vẽ biểu đồ Q và M của dầm côngxon ta không cần xác định phân lực mà xét từ phía đầu tự do vào.



Hình 4.10

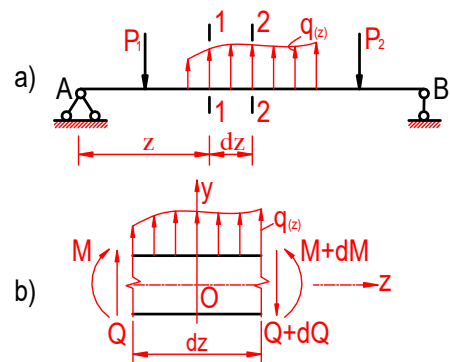
4.3. Định lý Giurapxki và ứng dụng của nó

Trong một dầm chịu uốn, giữa lực cắt Q, mômen uốn M và cường độ tải trọng phân bố q có một mối liên hệ toán học. Ta sẽ nghiên cứu mối liên hệ đó:

4.3.1 Định lý

Cho một dầm đặt trên hai gối A và B, chịu tải trọng bất kỳ như hình 4.11a.

Ta qui ước cường độ tải trọng phân bố $q(z)$ sẽ có dấu dương nếu nó hướng từ dưới lên trên và có dấu âm trong trường hợp ngược lại. Trên hình 4.11a giả thiết $q(z)$ hướng lên. Trong đoạn dầm chịu lực phân bố, xét hai mặt cắt bất kỳ 1-1 và 2-2 cách gối A một



Hình 4.11

đoạn là z và $(z + dz)$. Ta tách đoạn dz ra khỏi dầm (hình 4.11b). Trên mặt cắt 1-1 có nội lực là Q, M ; trên mặt cắt 2-2 có nội lực là $Q + dQ$ và $M + dM$. Vì đoạn dầm dz rất ngắn ta có thể xem $q(z)$ phân bố đều trên dz và có hợp lực $q(z)dz$. Gọi y là trục thẳng đứng, viết phương trình cân bằng cho đoạn thanh này, ta được:

$$\begin{aligned} \Sigma y &= Q - (Q + dQ) + q(z)dz = 0 \\ \Sigma m_0 &= -M + (M + dM) - Q \frac{dz}{2} - (Q + dQ) \frac{dz}{2} = 0 \end{aligned}$$

Từ phương trình thứ nhất ta rút ra được:
$$\frac{dQ}{dz} = q(z) \quad (4.1)$$

Từ phương trình thứ hai, sau khi bỏ qua lượng VCB bậc hai: $dQ \frac{dz}{2}$, ta được:

$$\frac{dM}{dz} = Q \quad (4.2)$$

Từ (4.1) và (4.2) ta suy ra được:
$$\frac{dM^2}{dz^2} = q(z) \quad (4.3)$$

Các công thức (4.1), (4.2) và (4.3) có một ý nghĩa rất quan trọng, đó cũng là các công thức biểu thị nội dung định lý Giurapxki. Định lý Giurapxki phát biểu như sau:

- Đạo hàm cấp một đối với z của lực cắt Q tại một mặt cắt nào đó bằng cường độ của tải trọng phân bố:
$$\frac{dQ}{dz} = q(z)$$
- Đạo hàm cấp một đối với z của mômen uốn M tại một mặt cắt nào đó bằng lực cắt Q tại mặt cắt đó:
$$\frac{dM}{dz} = Q$$
- Đạo hàm cấp hai đối với z của mômen uốn M tại một mặt cắt nào đó bằng cường độ tải trọng phân bố $q(z)$ tại mặt cắt đó:
$$\frac{dM^2}{dz^2} = q(z)$$

4.3.2. Ứng dụng của định lý

Các liên hệ nêu trên giữ một vai trò quan trọng trong việc vẽ và kiểm tra các biểu đồ Q và M . Thực vậy, dựa vào các liên hệ trên ta có thể phát biểu một số tính chất quan trọng sau:

- a) Nếu trên một đoạn dầm không có tải trọng phân bố [$q(z) = 0$] nghĩa là $\frac{dQ}{dz} = 0$;

$\frac{dM^2}{dz^2} = 0$ thì lực cắt Q sẽ là một hằng số và mômen uốn M sẽ là một hàm bậc nhất trong đoạn đó. Do đó biểu đồ Q là đường thẳng song song với trục chuẩn và biểu đồ mômen sẽ là đường thẳng xiên so với trục chuẩn. Ví dụ như biểu đồ ở (hình 4.6c,d). Trong trường hợp đặc biệt, nếu $Q = 0$ thì M là hằng số và biểu đồ M là đường thẳng song song với trục chuẩn.

b) Nếu trên đoạn dầm có lực phân bố đều [$q(z) = \text{const}$], thì trong đoạn đó, lực cắt sẽ là hàm bậc nhất, còn mômen uốn M sẽ là hàm bậc hai. Do đó, biểu đồ Q là đường thẳng xiên, biểu đồ M là một Parabol bậc hai. Ví dụ như biểu đồ ở (hình 4.7b,c). Trong trường hợp này, tại mặt cắt có $Q = 0$ thì M sẽ qua cực trị. Nếu Q đổi dấu từ dương sang âm, M sẽ qua cực đại và nếu Q đổi dấu từ âm sang dương, M sẽ qua cực tiểu.

c) Nếu trên đoạn dầm có lực phân bố theo đường bậc nhất, thì lực cắt Q là hàm bậc hai, mômen uốn M là hàm bậc ba (hình 4.9). Tại mặt cắt có $q = 0$ thì Q qua cực trị và M qua điểm uốn. Tại mặt cắt có $Q = 0$ thì M qua cực trị.

4.4. Vẽ biểu đồ nội lực Q và M bằng phương pháp nhận xét và phương pháp cộng tác dụng

4.4.1 Vẽ biểu đồ Q và M bằng phương pháp nhận xét

Khi vẽ biểu đồ nội lực, người ta làm theo các bước đã nói trong phần 4.2. Tức là sau khi xác định phân lực, lập biểu thức $Q(z)$, $M(z)$ và căn cứ vào đó để vẽ biểu đồ. Tuy nhiên, có thể dựa vào các nhận xét rút ra ở các ví dụ trong 4.2 và dựa vào các tính chất đã nói ở trong 4.3 (định lý Giurapxki) để tìm ra phương pháp vẽ biểu đồ Q, M nhanh nhất. Đó là phương pháp vẽ biểu đồ Q, M theo những điểm đặc biệt (còn gọi là phương pháp vẽ nhanh). Sau đây, ta sẽ trình bày cụ thể phương pháp đó.

Muốn vẽ biểu đồ Q, M theo những điểm đặc biệt, ta cần theo các quy tắc sau đây: vẽ biểu đồ từ nút trái sang nút phải của dầm, đường biểu diễn bao giờ cũng xuất phát từ trục chuẩn (trục hoành) và cuối cùng cũng trở về trục chuẩn.

1. Khi vẽ biểu đồ Q:

- Tại mặt cắt có lực tập trung thì biểu đồ Q có bước nhảy. Trị số tuyệt đối của bước nhảy bằng trị số của lực tập trung, hướng của bước nhảy trùng với hướng của lực tập trung.

- Tại mặt cắt có mômen tập trung biểu đồ Q không có gì thay đổi.

- Nếu trên đoạn dầm không có lực phân bố ($q = 0$) thì biểu đồ Q là một đường thẳng song song với trục z (trục chuẩn) trong đoạn đó.

- Nếu trên đoạn dầm có lực phân bố đều ($q = \text{hằng số}$) thì biểu đồ Q là một đường thẳng xiên theo hướng tải trọng q trong đoạn đó. Trị số lực cắt Q trong đoạn đó sẽ biến đổi, lượng biến đổi của lực cắt giữa hai mặt cắt bất kỳ bằng hợp lực của tải trọng phân bố trong đoạn dầm giới hạn bởi hai mặt cắt đó. Ví dụ, ở hình 4.12: trong đoạn dầm chịu tải trọng phân bố đều hướng xuống nên biểu đồ Q là đường thẳng xiên hướng xuống (kể từ trái sang phải) lượng biến đổi của lực cắt Q giữa hai mặt cắt cuối và đầu đoạn a là:

$$|Q_2 - Q_1| = qa$$

Lượng biến đổi lực cắt trong đoạn b là: $|0 - Q_1| = qb$

$$\text{Do đó: } b = \frac{|Q_1|}{q} \quad (4.4)$$

Hoặc ta có thể tính giá trị lực cắt theo công thức: $Q_{ph} = Q_{tr} + F_q$ (*)

Trong đó: Q_{ph} , Q_{tr} – lực cắt bên phải và bên trái đoạn đang xét.

F_q – diện tích tải trọng phân bố trong đoạn đang xét. Dấu của F_q được quy định như sau: $F_q > 0$ khi lực phân bố hướng lên trên và ngược lại $F_q < 0$ khi lực phân bố hướng xuống dưới.

* **Chú ý:** Tại vị trí có lực tập trung cần tính Q_{ph} và Q_{tr} ở điểm đó.

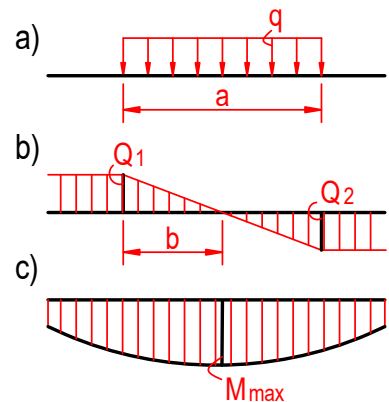
2. Khi vẽ biểu đồ mômen:

Để vẽ biểu đồ mômen ta tính trị số mômen uốn M tại các mặt cắt giới hạn những đoạn dầm mà ta đã phân chia để vẽ biểu đồ nội lực. Riêng vị trí có mômen tập trung thì cần tính mômen M tại hai mặt cắt bên trái và bên phải vị trí đó. Ngoài ra cần có những chú ý sau:

- Tại mặt cắt có lực tập trung biểu đồ mômen M bị gãy khúc.

- Tại mặt cắt có mômen tập trung biểu đồ mômen M có bước nhảy. Trị số tuyệt đối của bước nhảy bằng trị số của mômen tập trung. Hướng bước nhảy sẽ đi xuống nếu mômen tập trung quay thuận chiều kim đồng hồ và hướng bước nhảy đi lên trong trường hợp ngược lại.

- Trong đoạn dầm không có lực phân bố ($q = 0$) biểu đồ M là đường thẳng nằm ngang (nếu $Q = 0$) hoặc đường thẳng xiên (nếu $Q \neq 0$).



Hình 4.12

- Trong đoạn dầm có lực phân bố đều ($q = \text{const}$) biểu đồ M là một đường Parabol bậc hai. Đường cong này sẽ lồi về phía dưới nếu q hướng xuống dưới và ngược lại. Điểm cực trị của Parabol ứng với điểm mà biểu đồ Q cắt trục hoành, tức là với mặt cắt có $Q = 0$ (hình 4.12c) và có vị trí xác định bởi biểu thức (4.4).

Ở đây, ta có thể nêu ra cách tính trị số mômen M tại các mặt cắt giới hạn các đoạn dầm mà ta đã phân chia theo cách sau:

+ Trị số mômen uốn M tại một mặt cắt nào đó sẽ bằng tổng diện tích biểu đồ Q ở về một phía của mặt cắt, cộng hoặc trừ mômen tập trung (nếu có):

$$M = \Sigma F_Q \pm m_0$$

+ Nếu lấy diện tích biểu đồ Q ở về phía trái mặt cắt thì dấu của mômen cùng dấu với lực cắt, nếu lấy diện tích biểu đồ Q ở về phải mặt cắt thì dấu của mômen ngược dấu với lực cắt.

Cộng với mômen tập trung nếu mômen tập trung quay thuận chiều kim đồng hồ, trừ đi mômen tập trung trong trường hợp ngược lại.

Hoặc ta có thể tính giá trị mômen theo công thức: $M_{\text{ph}} = M_{\text{tr}} + F_Q$ (**)

Trong đó: M_{ph} , M_{tr} – mômen ở bên phải và bên trái đoạn đang xét.

F_Q - diện tích biểu đồ lực cắt trong đoạn đang xét. Dấu của F_Q được lấy theo dấu biểu đồ lực cắt.

* **Chú ý:** Tại vị trí có mômen tập trung cần tính M_{ph} và M_{tr} ở điểm đó.

Sau đây là ví dụ để làm sáng tỏ các vấn đề đã nêu ở trên.

- **Ví dụ 4.6:** Cho một dầm chịu tác dụng của tải trọng như hình vẽ (4.13a). Vẽ biểu đồ nội lực Q , M theo các điểm đặc biệt. Biết $q = 10 \text{ kN/m}$, $m_0 = qa^2 = 40 \text{ kNm}$, khoảng cách $AC = 2a$, $CB = a$; với $a = 2\text{m}$.

- **Giải:** a) **Xác định phản lực:**

Từ điều kiện cân bằng của dầm AB , ta dễ dàng tìm được phản lực V_A, V_B :

$$\Sigma m_A = -2qa \times \frac{2a}{2} - m_0 + 3aV_B = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{2a^2 + qa^2}{3a} = qa = 20 \text{ kN}$$

$$\Sigma m_B = 2qa \left(\frac{2a}{2} + a \right) - m_0 - 3aV_A = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{4qa^2 - m_0}{3a} = \frac{4qa^2 - qa^2}{3a} = qa = 20 \text{ kN}$$

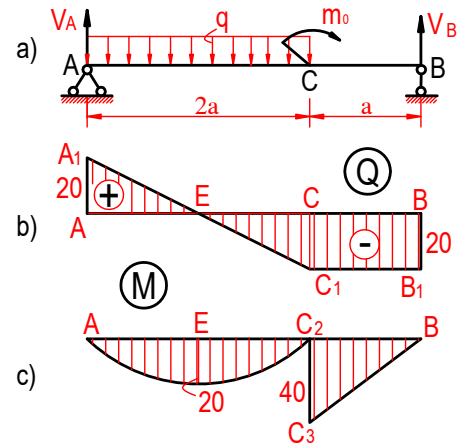
b) **Phân đoạn và vẽ biểu đồ nội lực Q , M cho từng đoạn:**

Trong trường hợp này ta phân dầm thành hai đoạn AC và CB . Để vẽ biểu đồ Q , M kẻ các trục chuẩn song song với trục thanh z , hạ các đường giống phân chia ranh giới các đoạn.

- **Vẽ biểu đồ Q :**

Ta vẽ từ nút trái sang nút phải của dầm. Ta thấy tại A có lực tập trung là phản lực V_A hướng lên trên, nên từ A trên trục chuẩn (trục hoành) ta dựng đoạn AA_1 hướng từ dưới lên. Độ lớn AA_1 biểu thị lực cắt Q tại mặt cắt A và có giá trị bằng $V_A = 20 \text{ kN}$. Trong đoạn AC dầm chịu tải trọng phân bố đều hướng xuống nên biểu đồ Q là đường thẳng xiên A_1C_1 hướng xuống. Vì hợp lực của lực phân bố trong đoạn AC là $10 \times 4 = 40 \text{ kN}$ mà tung độ của điểm A_1 là 20 kN nên tung độ của C_1 là 20 kN . Tại điểm C có mômen tập trung m_0 nhưng biểu đồ Q không thay đổi vì mômen tập trung không ảnh hưởng tới biểu đồ lực cắt.

Trong đoạn CB không có tải trọng phân bố nên biểu đồ Q là đoạn thẳng C_1B_1 song song với trục chuẩn. Tại B dầm chịu lực tập trung là phản lực $V_B = 20 \text{ kN}$ hướng lên trên



Hình 4.13

nên biểu đồ Q có bước nhảy từ dưới lên trên là đoạn B₁B và B₁B = 20 kN. Biểu đồ Q trên hình 4.13b.

- *Vẽ biểu đồ M:*

+ Trong đoạn AC biểu đồ M là Parabol bậc 2 lồi về phía dưới. Ta tính trị số mômen uốn trong đoạn này.

Tại mặt cắt A: $m_A = 0$ ta có điểm A với tung độ bằng 0 trên biểu đồ M.

Tại mặt cắt E biểu đồ M cực đại vì tại điểm đó có Q = 0. Theo (4.4) ta tính được chiều dài đoạn b: $b = \frac{20}{10} = 2\text{m}$. Vậy trị số mô men tại E là:

$$M_E = \frac{1}{2} \times 20 \times 2 = 20 \text{ kNm.}$$

Ta lấy diện tích biểu đồ Q bên trái E, lực cắt Q có dấu dương nên mômen M_E mang dấu dương trị số M_E đúng bằng diện tích tam giác AA₁E. Tung độ EE₁ = 20 kNm đặt dưới trục chuẩn. Độ lớn EE₁ biểu thị mômen ở mặt cắt E.

Tại mặt cắt sát bên trái điểm C ta có:

$$M_c^{\text{tr}} = \frac{1}{2} \times 20 \times 2 - \frac{1}{2} \times 20 \times 2 = 0$$

(M_c^{tr} = diện tích tam giác AA₁E = diện tích tam giác EC₁C). Ta có điểm C₂ với tung độ bằng 0 trên biểu đồ M. Với 3 điểm đặc biệt A, E₁ và C₂ ta cũng đủ để vẽ đường Parabol bậc 2 biểu diễn đồ thị M trong đoạn AC.

+ Trong đoạn CB: tại mặt cắt sát bên phải C có mômen tập trung m_o = 40 kNm quay thuận chiều kim đồng hồ, do đó biểu đồ M có bước nhảy từ trên xuống, trị số tuyệt đối của bước nhảy đúng bằng 40 kNm, độ lớn C₂C₃ biểu thị cho bước nhảy của m_o và bằng:

$$M_c^{\text{ph}} = \frac{1}{2} \times 20 \times 2 - \frac{1}{2} \times 20 \times 2 + 40 = 40 \text{ kNm}$$

Tại mặt cắt B có mômen M_B = 0. Điểm B ứng với tung độ bằng 0 trên biểu đồ M. Nối C₃ với B bằng đường thẳng ta được biểu đồ M trong đoạn CB. Biểu đồ M như trên hình 4.13c.

4.4.2. *Vẽ biểu đồ Q, M bằng phương pháp cộng tác dụng*

Khi dầm chịu tác dụng của nhiều tải trọng, nếu dùng phương pháp như đã nêu ở trên, ta hoàn toàn vẽ được biểu đồ nội lực cho dầm. Nhưng trong trường hợp này, nếu ta dùng phương pháp *cộng tác dụng* thì việc vẽ biểu đồ sẽ đơn giản hơn. Ta hãy xét một thí dụ sau đây:

- **Thí dụ 4.7:** Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm chịu tải trọng như hình 4.15a.

- **Bài giải:** Ta có thể coi tác dụng của lực phân bố và lực tập trung đối với dầm (hình 4.14a) bằng tổng các tác dụng riêng biệt của lực phân bố (hình 4.14b) và lực tập trung (hình 4.14c) đối với dầm đó.

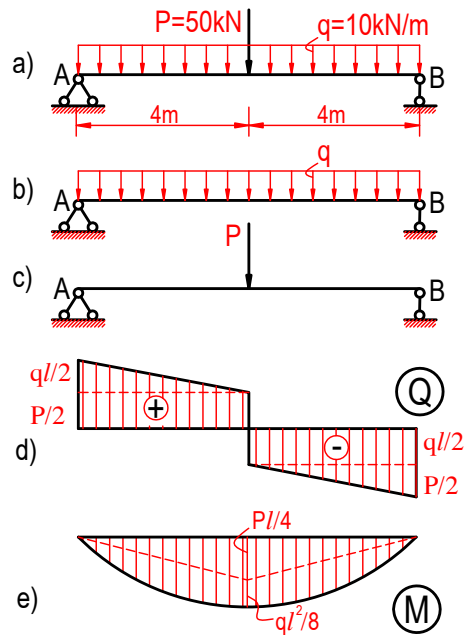
- Đối với dầm chịu lực phân bố đều ta đã vẽ biểu đồ nội lực ở thí dụ 4.2 (hình 4.7b, c).

- Đối với dầm chịu lực tập trung ta đã vẽ được biểu đồ nội lực ở thí dụ 4.1 (hình 4.6c,d). Để có được tung độ của biểu đồ nội lực (Q hoặc M) của dầm hình 4.14a ta cộng đại số các tung độ tương ứng của biểu đồ nội lực của dầm hình 4.14b và 4.14c. Đó là nội dung của phương pháp cộng tác dụng. Do đó, ta cộng biểu đồ ở hình 4.7b với biểu đồ ở hình 4.6c, ta được biểu đồ lực cắt Q của dầm đã cho (hình 4.14d). Với biểu đồ mômen uốn M ta cũng làm tương tự như vậy. Cộng biểu đồ ở hình 4.7c với biểu đồ ở hình 4.6d ta sẽ được biểu đồ mômen uốn M của dầm cho trên hình 4.14e. Như vậy lực cắt Q lớn nhất phát sinh tại mặt cắt ở hai đầu dầm:

$$|Q_{\max}| = \frac{P}{2} + \frac{ql}{2}$$

Và mômen uốn lớn nhất phát sinh tại mặt cắt giữa nhịp:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8}$$



Hình 4.14

- **Thí dụ 4.8:** Xác định nội lực lớn nhất M_{\max} , Q_{\max} trong dầm chịu lực phân bố ở hình 4.16a.

- **Bài giải:** Đối với tác dụng của lực phân bố hình thang (hình 4.15a) ta có thể xem bằng tổng tác dụng của lực phân bố đều (hình 4.15b) với lực phân bố tam giác (hình 4.15c). Với mỗi loại dầm đó, ta đã vẽ được biểu đồ nội lực ở thí dụ 4.2 và thí dụ 4.4

- Với dầm chịu lực phân bố đều mặt cắt có lực cắt lớn nhất tại hai đầu dầm:

$$Q_A = ? Q_B = \frac{ql}{2}$$

Và mặt cắt có mômen lớn nhất tại giữa nhịp:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8}$$

- Với dầm chịu lực phân bố tam giác mặt cắt có lực cắt lớn nhất tại gối B:

$$Q_B = -\frac{ql}{3}$$

Và mặt cắt có mômen lớn nhất tại giữa nhịp: M_{\max}

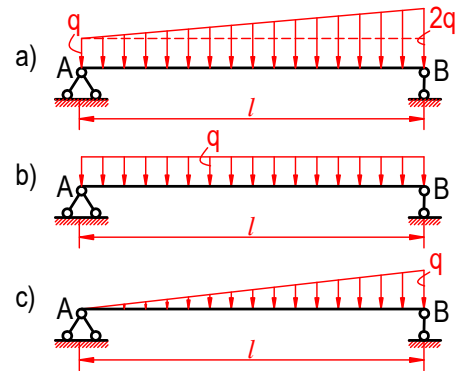
$$= \frac{ql^2}{16}$$

Do đó dùng phương pháp cộng tác dụng ta thấy với dầm chịu lực phân bố hình thang mặt

cắt có lực cắt lớn nhất tại gối B: $Q_{\max} = \left| \frac{ql}{2} + \frac{ql}{3} \right| = \frac{5}{6}ql$

Và mômen uốn phát sinh tại mặt cắt giữa nhịp:

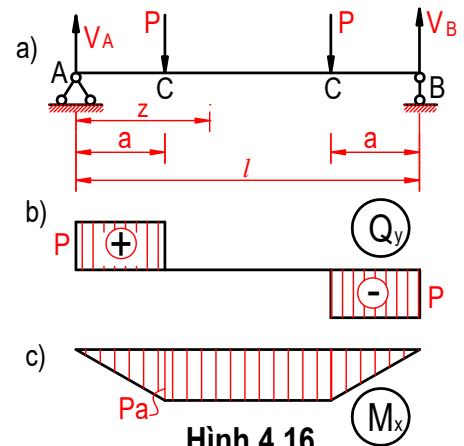
$$M = \frac{ql^2}{8} + \frac{ql^2}{16} = \frac{3ql^2}{16}$$



Hình 4.15

4.5. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn phẳng

4.5.1. Khái niệm về uốn thuần tuý



Hình 4.16

Ta nghiên cứu một dầm chịu tải trọng như hình vẽ (hình 4.16a). Sau khi vẽ biểu đồ lực cắt $Q(z)$ và mômen uốn $M(z)$, ta thấy giá trị lực cắt và mômen uốn tại một mặt cắt bất kỳ trong đoạn CD là:

$$Q(z) = 0$$

$$M(z) = P a = \text{const.}$$

Nếu trong một đoạn dầm lực cắt bằng không và mômen uốn bằng hằng số thì người ta nói đoạn dầm đó chịu *uốn thuần tuý*.

Như vậy: *Dầm chịu uốn thuần tuý phẳng khi trên mọi mặt cắt ngang của dầm lực cắt bằng không còn mômen uốn là một hằng số.*

Vậy đoạn dầm CD chịu uốn thuần tuý.

4.5.2. Ứng suất trong dầm chịu uốn thuần tuý.

a) *Quan sát biến dạng:*

Để tiện cho việc quan sát biến dạng ta xét một đoạn thanh thẳng chịu uốn hình chữ nhật nằm giữa hai mặt cắt 1-1 và 2-2 (hình 4.17a). Ở mặt bên của thanh vẽ những đường thẳng song song với trục thanh biểu thị cho những thớ dọc và những đường thẳng vuông góc với trục thanh biểu thị cho các mặt cắt, những đường này tạo thành những lưới ô chữ nhật nhỏ (hình 4.18a). Sau khi thanh bị uốn, ta thấy:

- Những đường thẳng đã vẽ vuông góc với trục thanh vẫn là đường thẳng và vuông góc với trục thanh bị uốn cong.

- Những đường thẳng đã kẻ song song với trục thanh trở thành những đường cong đồng dạng với trục thanh bị uốn cong.

Từ đó, nếu giả thiết biến dạng bên trong thanh tương tự như những biến dạng trên mặt ngoài thì ta đi đến kết luận sau:

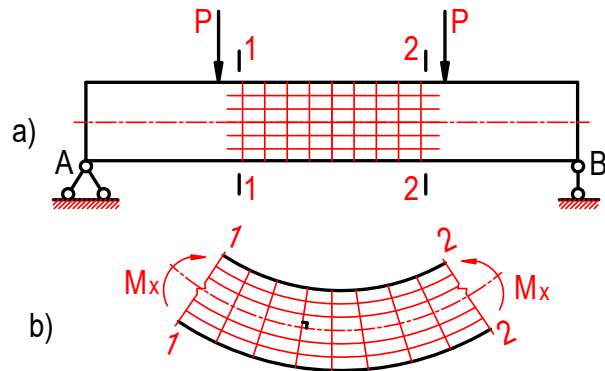
1. Các mặt cắt của dầm trước và sau khi bị uốn *đều phẳng và vuông góc với trục dầm*.

2. Khi dầm bị uốn, do các thớ dọc của thanh thay đổi chiều dài một cách liên tục từ mặt lõm đến mặt lồi của dầm, nên từ những thớ bị co dần đến những thớ bị giãn thế nào cũng qua một lớp thớ có *chiều dài không thay đổi*, lớp thớ này gọi là *lớp trung hoà*. Lớp trung hoà phân cách phần kéo vào phần nén của dầm. Giao tuyến của lớp trung hoà với mặt cắt là một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng tải trọng. Giao tuyến đó gọi là *đường trung hoà* hay *trục trung hoà* của mặt cắt khi dầm bị uốn mặt cắt của nó sẽ quay quanh trục trung hoà (hình 4.18).

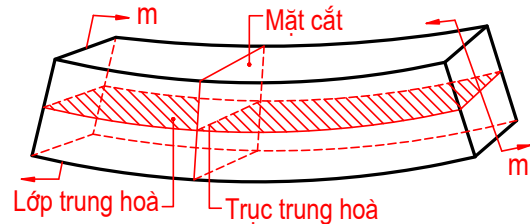
3. Vì các góc vuông của mỗi hình chữ nhật nhỏ kẻ trên mặt bên của dầm vẫn giữ là góc vuông, nên rõ ràng *không phát sinh biến dạng trượt* trên mặt cắt. Do đó trên mặt cắt của dầm chịu uốn thuần tuý *chỉ có ứng suất pháp, không có ứng suất tiếp*.

b) *Công thức tính ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt:*

Ta xét một phần dầm được giới hạn bởi hai mặt cắt m-m và n-n cách nhau một khoảng dz (hình 4.19a). Theo nhận xét về mặt cắt phẳng thì sau khi dầm chịu uốn thuần tuý các mặt cắt m-m và n-n vẫn phẳng nhưng xoay đi quanh các trục trung hoà tương ứng và hợp với nhau một góc $d\theta$ (hình 4.19b). Xét AB nằm trên lớp trung hoà và thớ IK cách lớp trung hoà một khoảng y . Sau khi dầm bị uốn, thớ trung hoà AB dù bị uốn cong với bán kính ρ vẫn không thay đổi chiều dài:



Hình 4.17



Hình 4.18

$$AB = dz = \rho d\theta$$

Còn thớ IK trở thành $\overline{I'K'}$ và có chiều dài bằng $\overline{I'K'} = (\rho + y)d\theta$. Trước khi biến dạng chiều dài thớ IK bằng chiều dài thớ AB (hình 4.19a) nên biến dạng dài tuyệt đối của thớ IK là:

$$\Delta(IK) = \overline{I'K'} - IK = (\rho + y)d\theta - \rho d\theta$$

$$\Rightarrow \Delta(IK) = yd\theta$$

Biến dạng dài tương đối của thớ IK là:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(IK)}{IK} = \frac{yd\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

Theo định luật Húc, ta có: $\sigma = \epsilon E$

Trong đó: E là môđun đàn hồi khi kéo (hoặc nén) của vật liệu.

$$\text{Nhưng: } \varepsilon = \frac{y}{\rho}, \text{ nên } \sigma = \frac{E}{\rho} y \quad (4.5)$$

Công thức (4.5) cho ta thấy ứng suất pháp tỷ lệ thuận với y. Hình 4.20 biểu thị sự phân bố suất pháp trên mặt cắt chữ nhật của dầm chịu uốn thuần túy (với $M > 0$). Những điểm trên trục trung hoà có ứng suất $\sigma = 0$. Tuy nhiên công thức (4.5) mới cho ta thấy sự phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt, mà chưa tính được trị số σ vì chưa biết bán kính cong ρ . Muốn tính được trị số ứng suất pháp σ tại một điểm bất kỳ ta cần tìm mối liên hệ giữa σ và mômen uốn M.

Trên mặt cắt m-m, lấy giao tuyến của mặt phẳng đối xứng của dầm với mặt cắt làm trục y (chiều dương hướng từ dưới lên), lấy trục trung hoà làm trục x (vị trí trục này xem như chưa biết) và trục z thẳng góc với mặt phẳng xOy (hình 4.21b).

Ta lấy một vi phân diện tích dF xung quanh một điểm bất kỳ có khoảng cách đến hai trục là x và y.

Ta xem ứng suất σ phân bố đều trên dF . Hợp lực sinh ra trên dF là σdF . Vì dầm chịu uốn thuần túy (trên mặt cắt chỉ có mômen uốn) nên tổng những phân tử nội lực σdF trên toàn bộ mặt cắt phải bằng không.

$$\text{Tức là: } \int_F \sigma dF = 0 \quad (4.6)$$

$$\text{Thay } \sigma \text{ theo (4.5) ta được: } \int_F \frac{E}{\rho} y dF = 0.$$

$$\text{Vì } \frac{E}{\rho} \text{ là hằng số khi lấy tích phân trên toàn bộ mặt cắt } F \text{ ta có: } \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$$

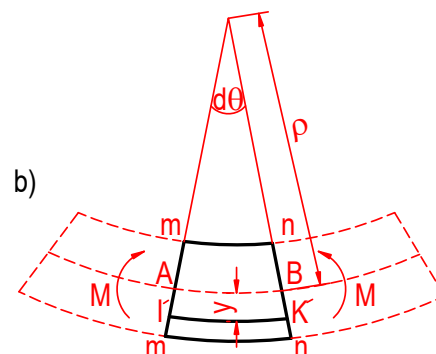
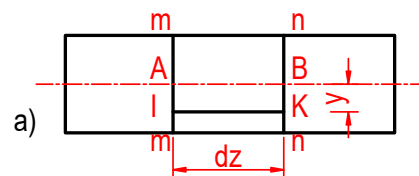
Biểu thức $y dF$ là mômen tĩnh S_x của mặt cắt đối với trục trung hoà x, nên đẳng thức có dạng:

$$\frac{E}{\rho} S_x = 0. \quad \text{Ta thấy: } \frac{E}{\rho} \neq 0 \text{ nên } S_x = 0.$$

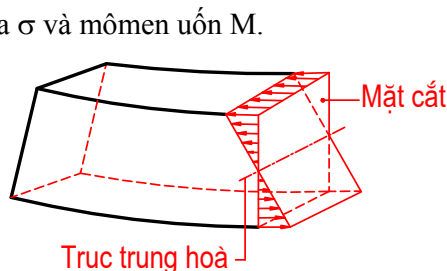
Điều đó có nghĩa là mômen tĩnh của mặt cắt đối với trục trung hoà x bằng không. Vậy trục trung hoà đi qua trọng tâm của mặt cắt. Vì trục trung hoà x vuông góc với trục đối xứng y của mặt cắt nên xOy là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt.

Một khác phân tử nội lực $\sigma_x dF$ gây mômen uốn đối với trục x là:

$$dM_x = \sigma dF \times y.$$



Hình 4.19



Hình 4.20

Nên nội lực phân bố trên toàn bộ mặt cắt F sẽ gây ra:

$$M_x = \int_F \sigma y dF \quad (4.7)$$

Thay σ theo (4.5) ta được:

$$M_x = \int_F \frac{E}{\rho} y^2 dF \quad (4.8)$$

M_x chính là mômen uốn tại mặt cắt đang xét đưa các hằng số ra ngoài dấu tích phân ta có:

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF \quad (4.9)$$

Vi $\int_F y^2 dF$ là mômen quán tính J_x của mặt cắt đối với trục trung hoà nên:

$$M_x = \frac{E}{\rho} J_x \quad (4.10)$$

Do đó:
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E J_x} \quad (4.11)$$

Tỷ số $\frac{1}{\rho}$ gọi là *độ cong* của trục dầm.

Từ (4.11) ta thấy độ cong của dầm chịu uốn thuần túy tỷ lệ thuận với mômen uốn và tỷ lệ nghịch với EJ_x .

Nếu EJ_x càng lớn thì độ cong càng bé, nên người ta gọi EJ_x là *độ cứng khi uốn* của dầm.

Thay giá trị $\frac{1}{\rho}$ ở (4.11) và (4.5) ta được:
$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$$

Khi dầm chịu uốn, những điểm bất kỳ trên mặt cắt có thể nằm trong miền chịu kéo hoặc trong miền chịu nén, nên công thức tổng quát để xác định ứng suất cho một điểm bất kỳ của dầm chịu uốn thuần túy là:

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} y \quad (4.12)$$

Trong công thức (4.12):

- M_x là trị số tuyệt đối của mômen uốn tác dụng lên mặt cắt đang xét.
- J_x là mômen quán tính của mặt cắt đối với trục trung hoà x.
- y là khoảng cách từ điểm tính σ đến trục trung hoà của mặt cắt.

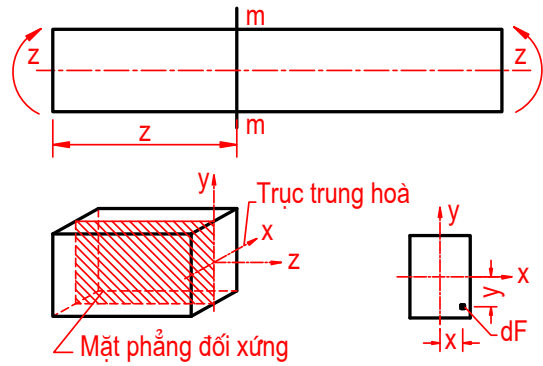
Công thức lấy dấu (+) nếu điểm tính ứng suất nằm trong miền chịu kéo, lấy dấu (-) nếu điểm tính ứng suất nằm trong miền chịu nén.

Từ kết quả trên ta có thể kết luận:

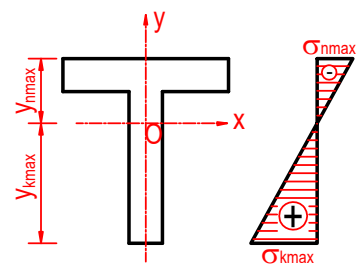
Ứng suất pháp ở một điểm bất kỳ trên mặt cắt của dầm chịu uốn, tỷ lệ thuận với mômen uốn và khoảng cách từ điểm đến trục trung hoà và tỷ lệ nghịch với mômen quán tính của mặt cắt đối với trục trung hoà.

c) Công thức tính ứng suất pháp lớn nhất:

Trước hết ta phải vẽ biểu đồ phân bố ứng suất pháp trên mặt cắt. Theo công thức (4.12) ứng suất pháp chỉ phụ thuộc y mà không phụ thuộc x (mọi điểm của mặt cắt nằm trên đường thẳng song song với trục trung hoà đều có ứng suất pháp bằng nhau) nên ta có thể vẽ biểu đồ phân bố ứng suất trong mặt phẳng xOy . Thí dụ với dầm mặt cắt chữ T nếu mômen uốn dương thì biểu đồ σ biểu thị trên hình 4.22,



Hình 4.21



Hình 4.22

trong đó σ_{nmax} là ứng suất nén lớn nhất và σ_{kmax} là ứng suất kéo lớn nhất. Với mặt cắt đối xứng qua trục trung hoà, những điểm xa nhất về hai phía của mặt cắt đối với trục trung hoà bằng nhau nên khi tính ứng suất pháp nén lớn nhất σ_{nmax} và ứng suất pháp kéo lớn nhất σ_{kmax} ta chỉ dùng một trị số y_{max} .

Vậy:
$$\sigma_{(k,n)max} = \pm \frac{M_x}{J_x} y_{max}$$

Mà ở chương 4 ta đã biết:
$$\frac{J_x}{y_{max}} = W_x$$

W_x là môđun chống uốn của mặt cắt đối với trục x . Do đó công thức tính ứng suất lớn nhất σ_{kmax} và σ_{nmax} trên mặt cắt đối với trục trung hoà:

$$\sigma_{(k,n)max} = \pm \frac{M_x}{W_x}$$

(Ở đây W_x là môđun chống uốn của mặt cắt đối với trục trung hoà x).

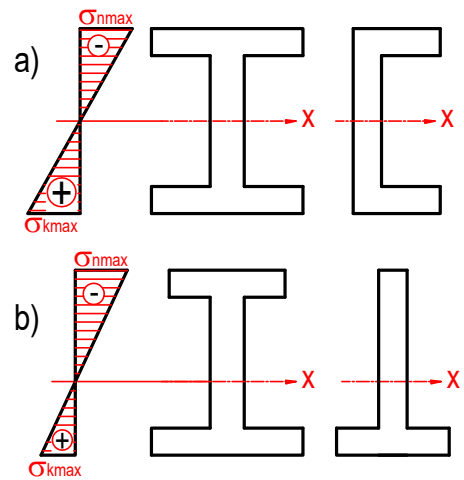
W_x càng lớn thì $\sigma_{(k,n)max}$ càng nhỏ chứng tỏ dầm có khả năng chống uốn lớn.

d) *Dạng mặt cắt hợp lý của dầm chịu uốn:*

Theo biểu đồ phân bố ứng suất trên hình 4.22 ta thấy vật liệu càng ở gần đường trung hoà thì chịu ứng suất càng nhỏ, vật liệu ở xa đường trung hoà thì chịu ứng suất lớn. Cho nên cần đưa phần lớn vật liệu của mặt cắt ra xa đường trung hoà để tăng thêm cường độ của phần mặt cắt chịu ứng suất lớn, còn đối với phần mặt cắt bao quanh đường trung hoà thì chỉ nên để ít vật liệu; làm như vậy môđun chống uốn W_x của mặt cắt sẽ tăng lên, do đó trị số $\sigma_{(k,n)max}$ sẽ giảm xuống.

Ngoài ra ta cần chú ý chọn dạng mặt cắt sao cho thích hợp với khả năng chịu kéo và chịu nén của vật liệu. Đối với vật liệu có khả năng chịu kéo và chịu nén như nhau thì dạng mặt cắt sẽ hợp lý nếu nó có $\sigma_{kmax} = \sigma_{nmax}$. Do đó dạng mặt cắt hợp lý là hình chữ I, chữ I có đường trung hoà x là trục đối xứng (hình 4.23a). Đối với vật liệu mà khả năng chịu nén thì dạng mặt cắt hợp lý nếu có σ_{kmax} nhỏ hơn σ_{nmax} . Do đó dạng mặt cắt hợp lý là dạng mặt cắt không đối xứng qua đường trung hoà x , đó là hình chữ I không đối xứng hoặc chữ T... (hình 4.23b).

Với các mặt cắt chữ I của thép hình thì trị số W_x được ghi trong các bảng (xem phụ lục).

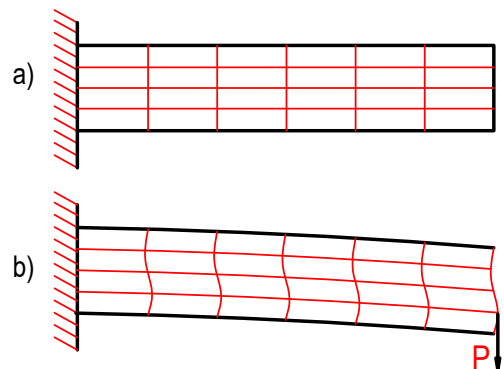


Hình 4.23

4.5.3. Công thức tính ứng suất tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt của dầm chịu uốn ngang

Trong thực tế, dầm ít khi chịu uốn thuần tuý mà thường trên mặt cắt của dầm có cả mômen và lực cắt ($M \neq 0, Q \neq 0$) khi đó ta nói dầm chịu uốn ngang.

Trong trường hợp này, những đường thẳng kẻ vuông góc với trục thanh trước khi biến dạng (hình 4.24a) thì sau khi biến dạng không còn thẳng và vuông góc với trục thanh nữa (hình 4.24b). Điều đó chứng tỏ các mặt cắt không cong phẳng mà đã bị vênh đi và góc vuông của các hình chữ nhật nhỏ kẻ trên mặt bên không còn vuông nữa (dấu hiệu của sự xuất hiện ứng suất τ). Như vậy, tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt của dầm



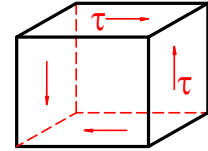
Hình 4.24

chịu uốn ngang vừa phát sinh ứng suất pháp vừa phát sinh ứng suất tiếp. Tuy vậy, để xác định ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ta vẫn có thể dùng công thức (4.12):

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} y$$

5.6. Ứng suất tiếp trong dầm chịu uốn ngang phẳng.

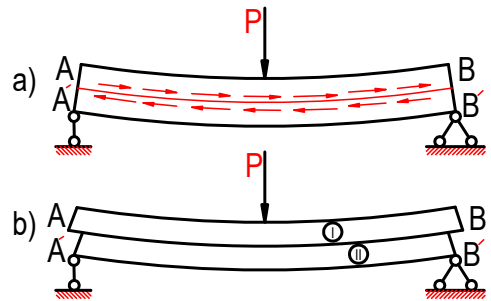
Như đã nêu ở trên, trên mặt cắt của dầm chịu uốn ngang phẳng luôn luôn phát sinh đồng thời hai loại ứng suất pháp σ và ứng suất tiếp τ , ở đây chúng ta cũng nghiên cứu điểm bất kỳ trên mặt cắt. Để nghiên cứu về ứng suất tiếp ta cần nắm được nội dung của luật đối ứng (song sinh) của ứng suất tiếp, đó là:



Hình 4.25

Nếu trên mặt bên của một phân tử có ứng suất tiếp τ thì trên mặt bên vuông góc với phương của ứng suất tiếp đó cũng phát sinh ứng suất tiếp có cùng trị số và có chiều cùng hướng vào hoặc cùng hướng ra cạnh chung ấy. Theo định luật này, nếu trên mặt cắt ngang của dầm phát sinh ứng suất tiếp τ thì trên mặt cắt song song với lớp trung hoà cũng phát sinh ứng suất tiếp τ (hình 5.25).

Ta cũng có thể làm thí nghiệm sau đây để chứng minh sự xuất hiện của τ trên mặt cắt. Lấy một dầm mặt cắt chữ nhật đặt trên hai gối và chịu lực như hình (4.26a). Ta cắt dầm theo một lớp AB song song với lớp trung hoà chia dầm thành hai phần I và II sau đó cho lực tác dụng, nếu giữa hai phần dầm không có ma sát thì mỗi phần dầm đều làm việc một cách riêng biệt (hình 4.26b): thớ trên bị co, thớ dưới bị giãn. Do đó có sự trượt tương đối giữa mặt dưới của phần dầm I và mặt trên của phần dầm II và mặt cắt ở mỗi đầu nút dầm sẽ lệch nhau. Nếu ta không cắt dầm như trên thì dưới tác dụng của lực P, sẽ không có sự trượt tương đối tại lớp AB và mặt cắt ở mỗi đầu nút dầm sẽ không lệch nhau (hình 4.26b). Điều đó chứng tỏ trên mặt cắt song song với lớp trung hoà có những ứng suất tiếp làm cản trở sự trượt giữa phần trên và phần dưới của dầm. Như vậy theo luật đối ứng của ứng suất tiếp, trên mặt cắt thẳng góc với trục thanh cũng có ứng suất tiếp.



Hình 4.26

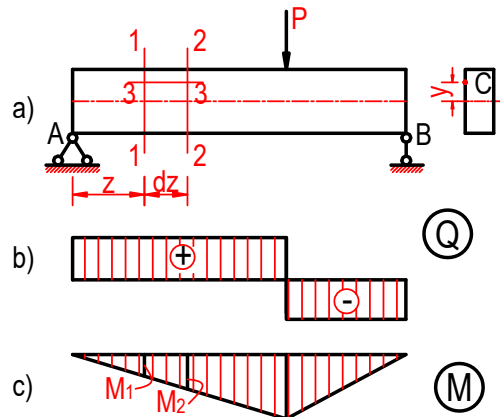
4.6.1. Công thức tính ứng suất tiếp (công thức D.I Giurapxki)

Xét một dầm mặt cắt chữ nhật hẹp ($b \leq \frac{h}{2}$) chịu uốn ngang phẳng như hình vẽ

(4.27a). Ta hãy xác định ứng suất τ tại điểm C cách trục trung hoà một khoảng y (hình 4.27b) thuộc mặt cắt 1-1 của dầm ch gối của bên trái một khoảng là z (hình 4.27a). Dùng mặt cắt 1-1 và 2-2 thẳng góc với trục dầm và cách nhau một khoảng rất nhỏ dz và mặt cắt 3-3 đi qua điểm C song song với lớp trung hoà ta tách rời phần dầm abcdghik để xét (hình 4.28b). Do sự biến thiên của mômen uốn (hình 4.28c) nên tại mặt cắt 1-1 và 2-2 có các mômen uốn M_1 và M_2 (hình 4.28a). Trên mặt cắt acki và bdgh, lần lượt có các ứng suất σ_1 và σ_2 .

Tính theo công thức (4.12):

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{J_x} y^* ; \quad \sigma_2 = \frac{M_2}{J_x} y^* \quad (4.13)$$



Hình 4.27

Trong đó: M_1 và M_2 - mômen uốn tại mặt cắt 1-1 và 2-2.

y^* - khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên các mặt cắt acki và bdgh đến trục trung hoà x.

Gọi hợp lực của ứng suất pháp σ_1 và σ_2 trên mỗi mặt cắt ackl và bdgh tương ứng là N_1 và N_2 ta tính được:

$$N_1 = \int_{F^c} \sigma_1 dF; \quad N_2 = \int_{F^c} \sigma_2 dF \quad (4.14)$$

Trong đó F^c là diện tích phần bị cắt acki và bdgh của mặt cắt ngang. Thay σ_1 và σ_2 bằng các biểu thức của nó ở trên ta được:

$$N_1 = \int_{F^c} \frac{M_1}{J_x} \times y^* \times dF; \quad N_2 = \int_{F^c} \frac{M_2}{J_x} \times y^* \times dF \quad (4.15)$$

Vì các tỷ số $\frac{M}{J_x}$ là không đổi tại mỗi mặt cắt và tích phân $\int y dF = S_x^c$ là mômen tĩnh của phần bị cắt của mặt cắt đối với trục trung hoà x nên:

$$N_1 = \frac{M_1}{J_x} \times S_x^c; \quad N_2 = \frac{M_2}{J_x} \times S_x^c \quad (4.16)$$

Trên biểu đồ M ta thấy $M_2 > M_1$ nên $N_2 > N_1$. Để cho phần tách ra abcdghik được cân bằng: trên mặt cắt dọc trục cdkg sẽ phát sinh ứng suất tiếp τ cùng chiều với N_1 . Do đó theo luật đối ứng của ứng suất tiếp, trên mỗi điểm của các đoạn ck và dg thuộc các mặt cắt ngang ackl và bdgh cũng có ứng suất tiếp τ có cùng trị số và có chiều như trên hình 4.28b.

Ta giả thiết ứng suất tiếp phân bố đều trên chiều rộng b của mặt cắt. Như vậy hợp lực T của các ứng suất tiếp τ trên mặt cắt dọc cdkg bằng:

$$T = \tau \times b \times dz$$

(4.17)

Xét điều kiện cân bằng của dầm abcdghki. Từ phương trình cân bằng hình chiếu của các lực xuống phương trục z ta được:

$$\Sigma z = N_1 - N_2 + T = 0$$

Từ đó rút ra được: $\tau \times b \times dz = N_2 - N_1 = \frac{M_2 - M_1}{J_x} S_x^c$ (4.18)

Vì mặt cắt 1-1 và 2-2 rất gần nhau nên:

$$M_2 - M_1 = dM \quad \text{và} \quad \tau \times b \times dz = \frac{dM}{J_x} S_x^c$$

Hay: $\tau = \frac{dM}{dz} \times \frac{S_x^c}{b J_x}$ (4.19)

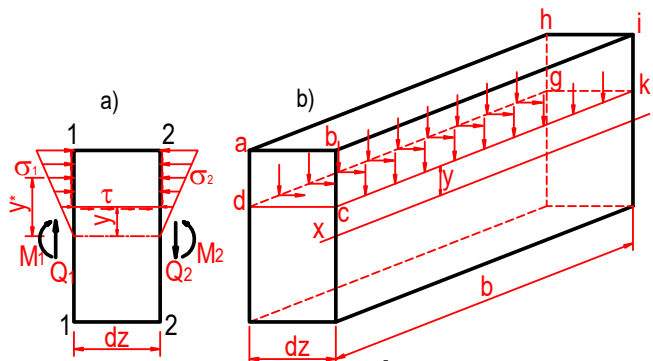
Theo định lý Giurapxki thì: $\frac{dM}{dz} = Q$

Nên: $\tau = \frac{Q S_x^c}{b J_x}$ (4.20)

Trong đó:

Q- giá trị tuyệt đối của lực cắt tại mặt cắt chứa điểm tính ứng suất.

J_x - mômen quán tính của toàn mặt cắt đối với trục trung hoà x.



Hình 4.28

S_x^c - trị số tuyệt đối của mômen tĩnh đối với trục trung hoà x của phần diện tích của mặt cắt ở phía trên (hay dưới) đường thẳng song song với trục trung hoà và đi qua điểm cần tìm ứng suất.

b - chiều rộng của mặt cắt tại điểm tính ứng suất.

Công thức (4.20) gọi là công thức Giurapxki, nó dùng để tính ứng suất tiếp đối với những mặt cắt có hình dạng bất kỳ.

Công thức Giurapxki phát biểu: “Trị số ứng suất tiếp τ tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt của dầm tỷ lệ thuận với lực cắt và mômen tĩnh của phần diện tích bị cắt đối với trục trung hoà và tỷ lệ nghịch với mômen quán tính của mặt cắt và chiều rộng của mặt cắt tại điểm đang xét”.

Ứng suất tiếp τ cùng phương cùng chiều với lực cắt Q .

4.6.2. Sự phân bố ứng suất tiếp trong một số loại mặt cắt

a). Mặt cắt chữ nhật

Ta dùng công thức (4.20) để xác định quy luật phân bố của ứng suất tiếp τ trên mặt cắt hình chữ nhật (hình 4.29a). Đối với dầm mặt cắt HCN thì tỷ số: $\frac{Q}{bJ_x}$ tại mặt cắt là hằng

số. Ta chỉ cần tính S_x^c , khi cần tìm τ tại một điểm bất kỳ cách trục trung hoà một khoảng là y .

Ta biết: $S_x^c = F^c x y_c$

Trong đó: y_c là khoảng cách từ trọng tâm C của phần diện tích F^c đến trục trung hoà x .

Theo hình 4.29a thì diện tích F^c (phần để trắng trên hình) bằng:

$$F^c = b \left(\frac{h}{2} - y \right)$$

$$y_c = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) + y = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

Vậy: $S_x^c = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \times \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right)$

$$S_x^c = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2)$$

Thay trị số của S_x^c vào biểu thức (4.20) ta được công thức tính ứng suất tiếp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt chữ nhật:

$$\tau = \frac{Q}{bJ_x} \times \frac{b}{8} (h^2 - 4y^2). \quad \text{Hay:}$$

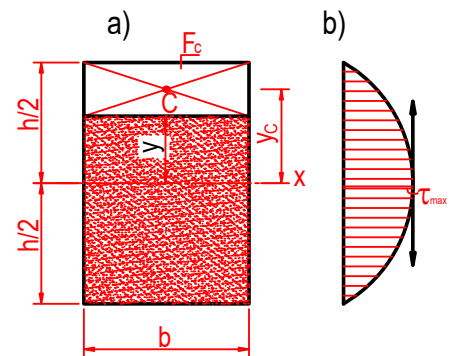
$$\tau = \frac{Q}{8J_x} \times (h^2 - 4y^2) \quad (4.21)$$

Ta thấy τ biến thiên theo đường Parabol bậc hai, dọc theo chiều cao h của mặt cắt (hình 4.29b). Tại trục trung hoà $y = 0$ nên ứng suất τ đạt giá trị lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{Q}{8J_x} \times h^2 = \frac{Q}{8 \times \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2} \times \frac{Q}{bh}$$

Vì $b \times h$ là diện tích mặt cắt F của hình chữ nhật, nên ta viết:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2F} \quad (4.22)$$



Hình 4.29

Ở những điểm ngoài cùng của mặt cắt về hai phía của trục trung hoà $y_{\max} = \frac{h}{2}$ nên ta có $\tau = 0$.

b. **Mặt cắt chữ I:**

Ta xét ứng suất tiếp trong phần bụng mặt cắt chữ I, xét một điểm bất kỳ a cách trục trung hoà x một khoảng y (hình 4.30a).

Trị số b trong công thức (4.20) trong trường hợp này bằng chiều dày phần bụng: $b = d =$ hằng số. Diện tích F_c là phần gạch chéo trên hình (4.30a). Ta tính S_x^c bằng cách lấy mômen tĩnh của nửa mặt cắt S_x trừ đi mômen tĩnh của diện tích agib đối với trục x:

$$S_x^c = S_x - S_x^{agib} = S_x - d \times y \times \frac{y}{2} = S_x - d \times \frac{y^2}{2}$$

Thay các trị số đã tính được vào công thức (4.20) ta được:

$$\tau = \frac{Q}{J_x d} \times \left(S_x - \frac{d}{2} y^2 \right) \quad (4.23)$$

Vì Q, J_x là không đổi và S_x là mômen tĩnh của nửa mặt cắt chữ I, cũng là hằng số, nên ứng suất tiếp τ biến thiên theo một đường Parabol bậc hai dọc theo chiều cao của phần bụng mặt cắt chữ I (hình 4.30b).

Những điểm nằm trên trục trung hoà có $y = 0$, nên sẽ phát sinh ứng suất tiếp lớn nhất:

$$\tau_{\max} = \frac{QS_x}{dJ_x} \quad (4.24)$$

Đối với những loại thép hình, các trị số d, J_x và S_x đều tra ở phụ lục.

Tại những điểm thuộc chỗ tiếp giáp giữa phần cánh và phần bụng (điểm K, P) có $y = \frac{h_1}{2}$ sẽ phát sinh ứng suất tiếp τ_1 có giá trị gần bằng τ_{\max} .

4.7. Điều kiện cường độ và ba bài toán cơ bản

4.7.1. Điều kiện cường độ ứng suất pháp

Như ta đã biết, mômen uốn dọc trên các mặt cắt của dầm chịu uốn ngang phẳng có trị số khác nhau. Nếu dầm có mặt cắt không thay đổi thì mặt cắt nguy hiểm nhất về ứng suất pháp cần phải kiểm tra là mặt cắt có mômen uốn lớn nhất về trị số tuyệt đối M_{\max} .

a) Trường hợp dầm làm bằng vật liệu có $[\sigma_k] = [\sigma_n] = [\sigma]$, nếu:

* Dầm có mặt cắt đối xứng qua trục trung hoà thì điều kiện cường độ về ứng suất pháp là:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma] \quad (4.25)$$

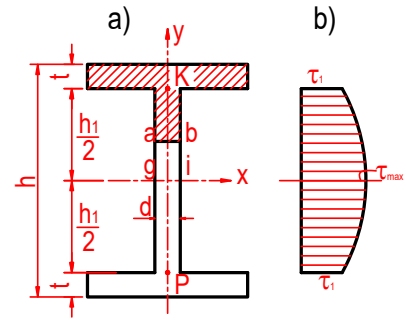
* Dầm có mặt cắt không đối xứng qua trục trung hoà thì điều kiện cường độ về ứng suất pháp là:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{x\min}} \leq [\sigma] \quad (4.26)$$

b) Trường hợp dầm làm bằng vật liệu có $[\sigma_k] \neq [\sigma_n]$, điều kiện cường độ của dầm bao gồm cả hai điều kiện sau:

$$\begin{cases} \sigma_{k\max} \leq [\sigma_k] \\ \sigma_{n\max} \leq [\sigma_n] \end{cases} \quad (4.27)$$

- Nếu dầm có mặt cắt đối xứng qua trục trung hoà thì: $\sigma_{k\max} = \sigma_{n\max} = \sigma_{\max}$ nên chỉ cần kiểm tra điều kiện:



Hình 4.30

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma_k] \quad (4.28)$$

Từ điều kiện cường độ (4.25) có thể suy ra ba bài toán cơ bản sau:

- *Kiểm tra cường độ*: tùy theo dầm làm bằng vật liệu dẻo hay vật liệu giòn, mặt cắt đối xứng hay không đối xứng mà ta kiểm tra theo công thức (4.25), (4.26), (4.27).

- *Chọn kích thước mặt cắt*: theo công thức: $W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$ (4.29)

- *Xác định tải trọng mà dầm có thể chịu được*: $M_{\max} \leq W_x \times [\sigma]$ (4.30)

4.7.2. Điều kiện cường độ về ứng suất tiếp

Trong dầm chịu uốn ngang phẳng, trên mặt cắt có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Nếu chỉ kiểm tra điều kiện cường độ ứng suất pháp như đã trình bày ở phần trên thì chưa đủ để đảm bảo an toàn cho dầm, vì vật liệu có thể bị phá hoại do ứng suất tiếp. Cho nên ngoài việc kiểm tra cường độ về ứng suất pháp ta còn cần kiểm tra cường độ về ứng suất tiếp.

Điều kiện cường độ về ứng suất tiếp được bảo đảm khi ứng suất tiếp lớn nhất trong dầm τ_{\max} không vượt quá ứng suất tiếp cho phép $[\tau]$:

$$\tau_{\max} < [\tau]$$

Cũng như $[\sigma]$, trị số $[\tau]$ phụ thuộc vào từng loại vật liệu và được cho sẵn trong các quy phạm. Còn τ_{\max} được tính theo công thức Giurapxki. Do đó, điều kiện cường độ ứng suất tiếp (4.24) sẽ là:

$$\tau_{\max} = \max \left| \frac{Q \times S_x^c}{b \times J_x} \right| \leq [\tau] \quad (4.31)$$

Nếu dầm có mặt cắt không đối xứng ta phải kiểm tra điều kiện cường độ về ứng suất tiếp tại mặt cắt có lực cắt lớn nhất Q_{\max} . Đó là mặt cắt nguy hiểm nhất theo ứng suất tiếp.

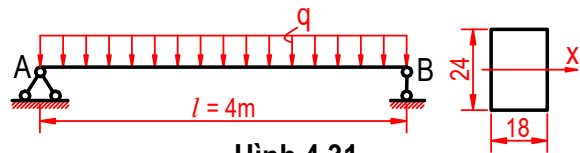
Từ điều kiện cường độ (4.31) ta có thể giải được ba loại bài toán cơ bản là kiểm tra cường độ, xác định tải trọng và chọn kích thước mặt cắt.

- **Thí dụ 4.9** : Cho một dầm bằng gỗ, mặt cắt hình chữ nhật chịu lực phân bố đều $q = 8 \text{ kN/m}$. Mặt cắt có $b = 18 \text{ cm}$ và $h = 24 \text{ cm}$. Dầm được kê trên hai gối như hình vẽ 4.31. Hãy kiểm tra cường độ của dầm, biết $[\sigma] = 10 \text{ MN/m}^2$

- **Bài giải**: Để tìm mặt cắt nguy hiểm nhất ta dựa vào biểu đồ mômen uốn ở thí dụ 4.2. Ta thấy mặt cắt nguy hiểm nhất nằm ở giữa dầm và tại đó có mômen uốn lớn nhất:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{8 \times 4^2}{8} = 16 \text{ kNm}$$

Môđun chống uốn của mặt cắt đối với trục trung hoà x là:



Hình 4.31

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,18 \times (0,24)^2}{6} = 1,723 \times 10^{-2} \text{ m}^3$$

Vậy ứng suất pháp lớn nhất tại mặt cắt nguy hiểm:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{16}{1,728 \times 10^{-3}} = 9,25 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 = 9,25 \text{ MN/m}^2$$

Ta thấy $\sigma_{\max} = 9,25 \text{ MN/m}^2 < [\sigma] = 10 \text{ MN/m}^2$

Do đó dầm đảm bảo điều kiện cường độ về ứng suất pháp.

- **Thí dụ 4.10**: Một dầm thép mặt cắt chữ I, chịu lực như hình vẽ 4.32. Hãy xác định số hiệu mặt cắt cho dầm, biết: $[\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$, $[\tau] = 80 \text{ MN/m}^2$.

- **Giải:** Dầm chịu lực tập trung đặt tại giữa dầm nên mặt cắt nguy hiểm tại giữa nhịp (xem thí dụ 4.1) ta có:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{4} = \frac{26 \times 6}{4} = 39 \text{ kNm};$$

$$Q_{\max} = \frac{P}{2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ kN}$$

Từ điều kiện cường độ, ta có:

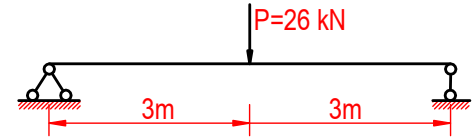
$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{39}{160.10^3} \approx 0,244 \times 10^3 \text{ (m}^3\text{)} = 244 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

$W_x > 244 \text{ cm}^3$, tra bảng thép định hình chữ I ta chọn thép có số hiệu mặt cắt N⁰22a có: $W_x = 251 \text{ cm}^3$; $d = 0,53 \text{ cm}$; $S_x = 163 \text{ cm}^3$; $J_x = 2760 \text{ cm}^4$.

Kiểm tra điều kiện ứng suất tiếp:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x}{d J_x} = \frac{13 \times 163}{0,53 \times 2760} \approx 0,14 \text{ kN/cm}^2 = 1,4 \text{ MN/m}^2$$

Ta thấy: $\tau_{\max} < [\tau]$. Kết luận: chọn thép chữ I số hiệu N⁰22a.



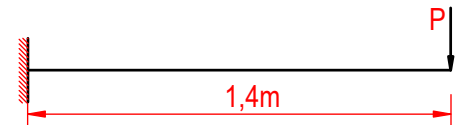
Hình 4.32

- **Thí dụ 4.11:** Một dầm thép mặt cắt chữ I số hiệu 20, chịu tác dụng của lực như hình vẽ (hình 4.33). Hãy xác định trị số cho phép của lực P tác dụng lên dầm. Biết ứng suất cho phép $[\sigma] = 140 \text{ MN/m}^2$.

- **Bài giải:** Mặt cắt thép chữ I số hiệu 20 có $W_x = 181 \text{ cm}^2$. Mặt cắt nguy hiểm tại ngàm có mômen $M_{\max} = Pl = 1,4P$.

Từ điều kiện cường độ ta có:

$$\begin{aligned} M_{\max} &\leq W_x [\sigma] \\ \Leftrightarrow 1,4P &\leq 181.10^{-6} \times 140.10^3 \\ \Rightarrow P &\leq \frac{181.10^{-6} \times 140.10^3}{1,4} = 18,1 \text{ kN} \end{aligned}$$



Hình 4.33

Vậy trị số cho phép của lực P: $[P] = 18,1 \text{ kN}$.

- **Thí dụ 4.12:** Một dầm thép mặt cắt chữ T có hình dáng và kích thước như hình 4.34b chịu tác dụng của lực như hình 4.34a. Hãy kiểm tra cường độ của dầm biết $[\sigma_k] = 30 \text{ MN/m}^2$, $[\sigma_n] = 100 \text{ MN/m}^2$. Kích thước mặt cắt là cm.

- **Bài giải:** Nếu hệ trục tọa độ $x_1 y$ chọn như hình vẽ thì trục trung hoà x song song với trục x_1 và cách trục x_1 một khoảng:

$$y_c = \frac{15 \times 5 \times 17,5 + 15 \times 5 \times 17,5}{15 \times 5 + 15 \times 5} \Rightarrow y_c = 12,5 \text{ cm}$$

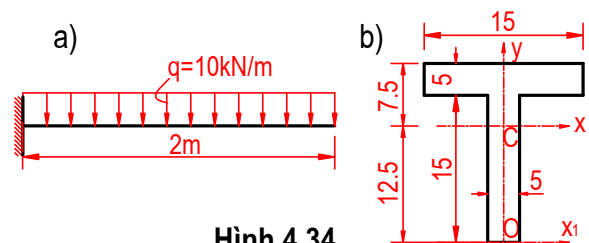
Mômen quán tính của mặt cắt đối với trục trung hoà x (đồng thời cũng là mômen quán tính chính trung tâm) của mặt cắt:

$$J_x = \frac{15 \times 5^3}{12} + 15 \times 5 \times 5^2 + \frac{5 \times 15^3}{12} + 15 \times 5 \times 5^2 = 5312,5 \text{ cm}^4 = 5312,5 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

Với dầm chịu lực như hình (4.34a) thì mặt cắt tại ngàm mômen có trị số lớn nhất:

$$M_{\max} = -\frac{ql^2}{2} = -\frac{10 \times 2^2}{2} = -20 \text{ kNm}.$$

Và các thớ phía trên của dầm chịu kéo, các thớ dưới chịu nén. Theo công thức (4.2) ta tính được:



Hình 4.34

$$\sigma_{kmax} = \frac{M_{max}}{J_x} \times y_{kmax} = \frac{20}{5312,5 \times 10^{-8}} \times 7,5 \times 10^{-2} = 28,2 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_{nmax} = -\frac{M_{max}}{J_x} \times y_{nmax} = -\frac{20}{5312,5 \times 10^{-8}} \times 12,5 \times 10^2 = -47 \times 10^3 \text{ kN/m}^2 = -47 \text{ MN/m}^2$$

So sánh ta thấy: $\sigma_{nmax} = 47.10^3 \text{ kN/m}^2 < [\sigma_n] = 100.10^3 \text{ kN/m}^2$.

Do đó đảm bảo cường độ.

- **Thí dụ 4.13:** Một dầm mặt cắt chữ nhật có $h = 1,4b$, chịu lực như hình 4.35. Hãy chọn kích thước mặt cắt cho dầm.

Biết: $[\sigma] = 10 \text{ MN/m}^2$, $[\tau] = 6 \text{ MN/m}^2$.

- **Bài giải:** Ta sẽ chọn kích thước mặt cắt theo điều kiện cường độ ứng suất pháp, sau đó kiểm tra lại theo điều kiện cường độ ứng suất tiếp. Với dầm chịu lực như hình vẽ (xem thí dụ 4.7) mặt cắt giữa nhịp có mômen lớn nhất:

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{Pl}{4} = \frac{2 \times 4^2}{8} + \frac{12 \times 4}{4} = 16 \text{ kNm.}$$

Còn các mặt cắt tại hai đầu dầm có lực cắt lớn nhất:

$$|Q_{max}| = \frac{ql}{2} + \frac{P}{2} = \frac{2 \times 4}{2} + \frac{12}{2} = 10 \text{ kN}$$

Từ điều kiện cường độ ứng suất pháp ta tính được:

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} \Rightarrow W_x \geq \frac{16}{10 \times 10^3} = 1,6 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Vì mặt cắt hình chữ nhật nên ta có: $W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \times (1,4b)^2}{6} \approx 0,33b^3$.

$$\text{Vậy: } b \geq \sqrt[3]{\frac{1,6 \times 10^{-3}}{0,33}} \approx 0,17 \text{ m.}$$

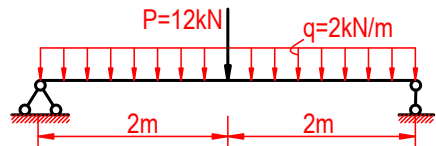
Do đó ta chọn $b = 17 \text{ cm}$ và $h = 1,4 \times 17 = 24 \text{ cm}$.

Với kích thước mặt cắt ta tính được:

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2F} = \frac{3}{2} \times \frac{10}{0,17 \times 0,24} = 367 \text{ kN/m}^2 = 0,367 \text{ MN/m}^2$$

So sánh $\tau_{max} = 0,367 \text{ MN/m}^2 < [\tau] = 6 \text{ MN/m}^2$.

Điều đó chứng tỏ mặt cắt đã chọn thỏa mãn điều kiện cường độ ứng suất tiếp.



Hình 4.35

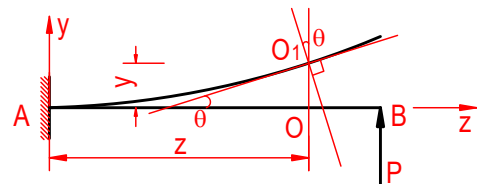
4.8. Biến dạng trong dầm chịu uốn

4.8.1. Khái niệm về đường đàn hồi, độ võng, góc xoay

Khi bị uốn phẳng, trục của dầm không thay đổi chiều dài (vì nó nằm trong lớp trung hoà, nhưng bị uốn cong trong mặt phẳng tải trọng. Trục dầm sau khi bị uốn cong gọi là đường đàn hồi của dầm.

Lấy một dầm có đầu A bị ngàm, còn đầu B tự do chịu một lực P tác dụng. Ta cho trục hoành Az hướng sang phải, trục tung Ay hướng lên trên (hình 4.36).

Dưới tác dụng của lực P dầm bị uốn cong, trọng tâm O của mặt cắt cách gốc tọa độ A một đoạn z sẽ dời đến O₁. Độ dời y của trọng tâm mặt cắt theo



Hình 4.36

phương vuông góc với trục dầm khi chưa biến dạng được gọi là độ võng. Nói chung O và O₁ không nằm trên một đường thẳng đứng, nhưng ta thường nghiên cứu dầm có biến dạng

rất bé, nên để đơn giản việc tính toán ta có thể xem O và O₁ cùng nằm trên một đường thẳng đứng, tức OO₁ = y. Khi dầm biến dạng thì mặt cắt xoay đi một góc so với vị trí ban đầu, góc θ được gọi là *góc xoay* của mặt cắt. Nếu chiều hệ trục chọn như hình 4.36 thì:

- Độ võng y có dấu dương khi trọng tâm mặt cắt di chuyển lên phía trên và ngược lại sẽ mang dấu âm.

- Góc xoay θ có dấu dương nếu mặt cắt xoay ngược chiều kim đồng hồ và ngược lại sẽ mang dấu âm. Ta thấy trị số độ võng y của mặt cắt phụ thuộc vào hoành độ z của chúng, nghĩa là y = f(z). Phương trình y = f(z) được gọi là *phương trình đường đàn hồi* của dầm.

Vì góc xoay của mặt cắt bằng góc hợp bởi trục hoành và đường tiếp tuyến của đường đàn hồi xét tại mặt cắt đó, nên hệ số góc của đường tiếp tuyến tại một điểm nào đó của đường đàn hồi là: $\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dz}$.

Nhưng vì góc xoay θ rất bé nên $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$ và ta có thể viết: $\theta = \frac{dy}{dz}$.

4.8.2. Phương trình vi phân đường đàn hồi:

Để thiết lập biểu thức cho phép xác định hàm số biểu diễn đường đàn hồi, ta tiến hành như sau:

Lấy hai mặt cắt cách nhau một đoạn dz để nghiên cứu. Q và I là trọng tâm của hai mặt cắt đó. Khi lực P có chiều như hình vẽ 4.37 - mômen có dấu dương- điểm O sẽ di chuyển đến O' còn điểm I di chuyển đến I'. Mặt khác mặt cắt O có góc xoay θ, mặt cắt I có góc xoay θ + dθ. Hai mặt này hợp với nhau một góc dθ. Nếu gọi ρ là bán kính cong của đoạn O'I' thì:

$$O'I' = \rho d\theta$$

$$\text{Vì: } dz = OI \approx O'I' = \rho d\theta$$

$$\text{Từ đó rút ra: } \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dz} \quad (4.32)$$

Trong uốn thuần túy ta đã chứng minh được:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (4.33)$$

Kết hợp (4.32) và (4.33) ta được:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (4.34)$$

Vì góc xoay bằng đạo hàm cấp 1 của độ võng y nên:

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{d^2y}{dz^2} \quad (4.35)$$

Kết hợp (4.34) và (4.35) ta có mối liên hệ vi phân sau:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (4.36)$$

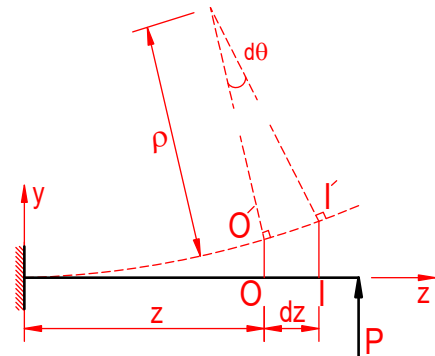
Phương trình (4.36) gọi là phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi và chỉ áp dụng được khi biến dạng của dầm là bé.

Chú ý: Ta nhận thấy rằng dấu của mômen uốn không phụ thuộc vào hệ tọa độ mà chỉ phụ thuộc vào quy ước dấu của nội lực, còn dấu của $\frac{d^2y}{dz^2}$ thì phụ thuộc vào hệ tọa độ Oyz.

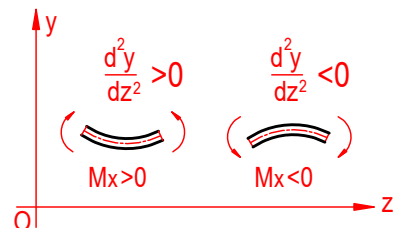
Nếu hệ tọa độ chọn như hình 4.38 thì khi dầm bị uốn:

$$* \frac{d^2y}{dz^2} > 0 \text{ khi bề lõm hướng lên trên nghĩa là mômen}$$

$$M_x > 0.$$



Hình 4.37



Hình 4.38

* $\frac{d^2y}{dz^2} < 0$ khi bề lõm hướng xuống dưới nghĩa là mômen $M_x < 0$.

Do đó, trong công thức (4.35): $\frac{d^2y}{dz^2}$ và M_x luôn cùng dấu và đều là các trị số đại số.

4.8.3 Tính độ võng và góc xoay của dầm chịu uốn:

Từ phương trình (4.36) ta có thể tính được độ võng và góc xoay của dầm chịu uốn bằng nhiều phương pháp. Ở đây, ta sẽ giải bằng phương pháp tích phân bất định.

Nếu độ cứng EJ_x của dầm không thay đổi theo chiều dài dầm thì sau khi tích phân thứ nhất phương trình (4.35) ta được biểu thức góc xoay θ :

$$\theta = \frac{dy}{dz} = \frac{1}{EJ_x} \left[\int M dz + C_1 \right] \quad (a)$$

Sau khi tích phân lần thứ hai ta được biểu thức của độ võng y :

$$y = \frac{1}{EJ_x} \left[\int dz \int M dz + C_1 z_1 + C_2 \right] \quad (b)$$

Trong đó C_1, C_2 là các hằng số tích phân.

Muốn xác định các hằng số tích phân đó cần dựa vào các điều kiện biên của dầm. Sau đây ta sẽ xét một thí dụ:

- **Thí dụ 4.14:** Viết biểu thức của góc xoay và độ võng của một dầm có chiều dài l , có độ cứng EJ_x không đổi và chịu tải trọng phân bố đều (hình 4.39). Sau đó tính độ võng và góc xoay lớn nhất.

- **Bài giải:** Chọn hệ tọa độ Ayz như hình vẽ (gốc A tại nút trái). Ta tính theo các bước sau:

$$\text{Ta có: } V_A = V_B = \frac{ql}{2}$$

1. Viết biểu thức mômen uốn cho dầm:

$$M_x = V_A z - qz \times \frac{z}{2} = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}$$

2. Tìm biểu thức của θ và y : Từ (a) và (b) ta được:

$$\theta = \frac{1}{EJ_x} \left[\int M_x dz + C_1 \right] = \frac{1}{EJ_x} \left[\int \left(\frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right) dz + C_1 \right] = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{ql}{4} z^2 - \frac{q}{6} z^3 + C_1 \right]$$

$$y = \frac{1}{EJ_x} \left\{ \int \left[\frac{ql}{4} z^2 - \frac{q}{6} z^3 + C_1 \right] dz + C_2 \right\} = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{ql}{12} z^3 - \frac{q}{24} z^4 + C_1 z + C_2 \right]$$

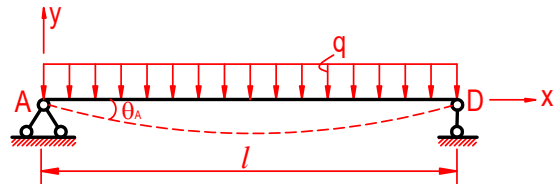
Ta xác định các hằng số tích phân C_1 và C_2 bằng các điều kiện biên:

- Tại gối tựa A: $z = 0$ độ võng bằng không ($y_A = 0$).

- Tại gối tựa B: $z = l$ độ võng bằng không ($y_B = 0$).

Do đó ta thay $z = 0$ và $z = l$ vào biểu thức y ta được:

$$\begin{cases} \frac{1}{EJ_x} C_2 = 0 \\ \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} + C_1 l + C_2 \right] = 0 \end{cases}$$



Hình 4.39

Từ đó rút ra ta được $C_2 = 0$ và $C_1 = -\frac{ql^3}{24}$. Vậy biểu thức góc xoay và độ võng của dầm là:

$$\theta = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{ql}{4} z^2 - \frac{q}{6} z^3 - \frac{ql^3}{24} \right] \quad \text{và} \quad y = \frac{1}{EJ_x} \left[\frac{ql}{12} z^3 - \frac{q}{24} z^4 - \frac{ql^3}{24} z \right].$$

3. Tính θ_{\max} và y_{\max} :

Vì tính chất đối xứng của bài toán ta thấy góc xoay lớn nhất tại hai đầu dầm, độ võng lớn nhất tại giữa nhịp. Do đó:

- Thay $z = 0$ vào biểu thức của θ ta được: $\theta_{\max} = \theta_A = -\theta_B = -\frac{ql^3}{24EJ_x}$.

- Thay $z = \frac{l}{2}$ vào biểu thức của y ta được: $y_{\max} = -\frac{5ql^4}{384EJ_x}$.

Dấu âm chứng tỏ θ_A quay cùng chiều kim đồng hồ và y_{\max} hướng xuống dưới. Tiến hành tương tự ta có thể xác định được biểu thức của độ võng và góc xoay ở một mặt cắt bất kỳ cũng như trị số độ võng và góc xoay lớn nhất của các dầm có dạng liên kết và tải trọng khác.

Bảng 4.1 cho trị số của các đại lượng đó đối với một số dầm thường gặp.

4.8.4. Điều kiện cứng của dầm

Khi tính toán dầm chịu uốn, ngoài điều kiện cường độ như đã xét ở trên, nhiều khi người ta còn phải tính đến điều kiện cứng. Điều kiện an toàn về độ cứng được thỏa mãn khi biến dạng của dầm không vượt quá biến dạng cho phép:

$$\theta_{\max} \leq [\theta] ; \quad y_{\max} \leq [y].$$

Trong đó: $[\theta]$, $[y]$ là góc xoay và độ võng cho phép.

Thí dụ: Đối với cầu thì: $[y] = \left(\frac{1}{1000} \div \frac{1}{750} \right) l_{\text{nhịp}}$. Đối với các dầm thép thì

$[y] = \left(\frac{1}{1000} \div \frac{1}{250} \right) l_{\text{nhịp}}$. Đối với các ván gác thì: $[y] = \left(\frac{1}{400} \div \frac{1}{250} \right) l_{\text{nhịp}}$.

- **Thí dụ 4.15:** Hãy kiểm tra điều kiện cứng của một dầm dài $l = 4,5$ m mặt cắt chữ nhật có $h = 0,24$ m, $b = 0,18$ m. Chịu tác dụng của lực phân bố suốt chiều dài dầm $q = 2$ kN/m và một lực tập trung $P = 8$ kN đặt chính giữa dầm (hình 4.40a). Biết: $[y] = 0,015$ m, $E = 0,1 \times 10^5$ MN/m².

- **Bài giải:** Theo nguyên lý độc lập tác dụng của các lực, độ võng của dầm do lực tập trung và lực phân bố (hình 4.40a) gây ra bằng tổng đại số võng do lực tập trung và lực phân bố gây ra một cách riêng biệt (hình 4.40b, c). Theo thí dụ 4.14 ta thấy độ võng lớn nhất của dầm chịu lực phân bố đều (hình 4.40b) ở mặt cắt C

là: $y_C^q = -\frac{5ql^4}{384EJ_x}$.

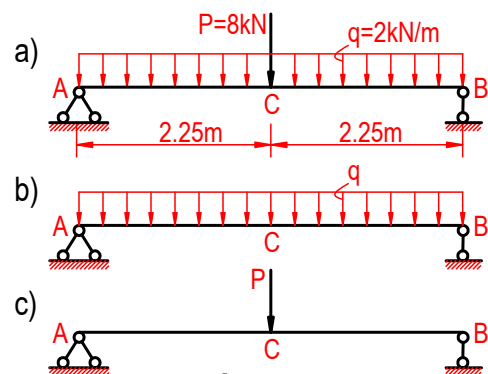
Với mặt cắt chữ nhật ta có:

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,18 \times (0,24)^3}{12} = 20736 \cdot 10^{-8} \text{ (m}^4\text{)}$$

Nên:

$$y_C^q = -\frac{5 \times 2 \times (4,5)^4}{384 \times 0,1 \times 10^8 \times 20736 \cdot 10^{-8}} = -0,0051 \text{ m.}$$

Tra bảng 4.1 độ võng lớn nhất của dầm do chịu lực tập trung (hình 4.40c) gây ra cũng tại mặt cắt C là:



Hình 4.40

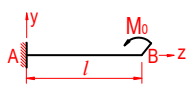
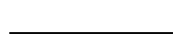

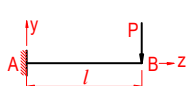
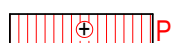
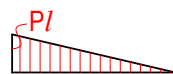
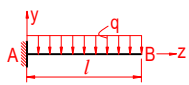
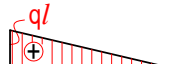

$$-\frac{Pl^3}{48EJ_x} = -\frac{8 \times (4,5)^3}{48 \times 0,1.10^8 \times 20736.10^{-8}} = -0,0073 \text{ (m)}$$

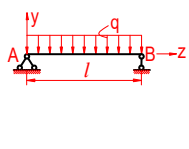
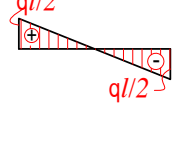
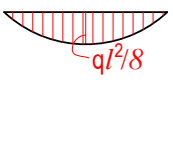
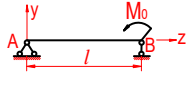
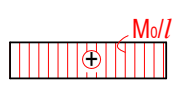
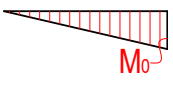
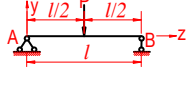
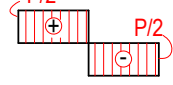
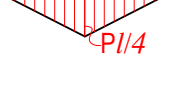
Vậy độ võng lớn nhất của dầm tại mặt cắt C là:

$$y_c = y_c^q + y_c^p \approx -0,0051 - 0,0073 = -0,0124 \text{ m.}$$

Ta thấy dầm đảm bảo độ cứng vì: $|y_{\max}| = 0,0124 \text{ m} < [y] = 0,015 \text{ m.}$

Bảng 4.1 Độ võng và góc xoay của một số dầm thường gặp

| Dạng dầm | Biểu đồ nội lực | | Công thức tính trị số lớn nhất của | |
|---|---|---|--|---|
| | Q_y | M_x | Độ võng | Góc xoay |
|  |  |  | $y_A = 0$ $y_B = y_{\max} = \frac{M_0 l^2}{2EJ}$ Nếu M_0 quay ngược lại phải đổi dấu y_{\max} | $\theta_A = 0$ $\theta_B = \theta_{\max} = \frac{M_0 l}{EJ}$ Nếu M_0 quay ngược lại phải đổi dấu θ_{\max} |
|  |  |  | $y_A = 0$ $y_B = y_{\max} = -\frac{Pl^3}{3EJ}$ Nếu P hướng lên thì: $y_B = y_{\max} = \frac{Pl^3}{3EJ}$ | $\theta_A = 0$ $\theta_B = \theta_{\max} = -\frac{Pl^2}{2EJ}$ Nếu P hướng lên thì: $\theta_B = \theta_{\max} = \frac{Pl^2}{2EJ}$ |
|  |  |  | $y_A = 0$ $y_B = y_{\max} = -\frac{ql^4}{8EJ}$ Nếu q hướng lên thì: $y_B = y_{\max} = \frac{ql^4}{8EJ}$ | $\theta_A = 0$ $\theta_B = \theta_{\max} = -\frac{ql^3}{6EJ}$ Nếu q hướng lên thì: $\theta_B = \theta_{\max} = \frac{ql^3}{6EJ}$ |

| | | | | |
|---|---|---|--|--|
|  |  |  | $y_A = 0; y_B = 0$ $y_{\max} = y_{\left(\frac{l}{2}\right)} = -\frac{5ql^4}{384EJ}$ | $\theta_A = -\frac{ql^3}{24EJ}$ $\theta_B = \frac{ql^3}{24EJ}$ $ \theta_{\max} = \theta_A = \theta_B $ |
|  |  |  | $y_A = 0; y_B = 0$ $y_{\max} = -\frac{M_0 l^2}{156EJ}$ tại $z = l \frac{\sqrt{3}}{3}$ $y_{\left(\frac{l}{2}\right)} = -\frac{M_0 l^2}{6EJ}$ | $\theta_A = -\frac{M_0 l}{6EJ}$ $\theta_B = \frac{M_0 l}{3EJ}$ $\theta = 0$ tại $z = l \frac{\sqrt{3}}{3}$ |
|  |  |  | $y_{\max} = y_{\left(\frac{l}{2}\right)} = -\frac{Pl^2}{48EJ}$ | $\theta_A = -\frac{Pl^2}{16EJ}$ $\theta_B = \frac{Pl^2}{16EJ}$ |

CÂU HỎI - BÀI TẬP CHƯƠNG 4

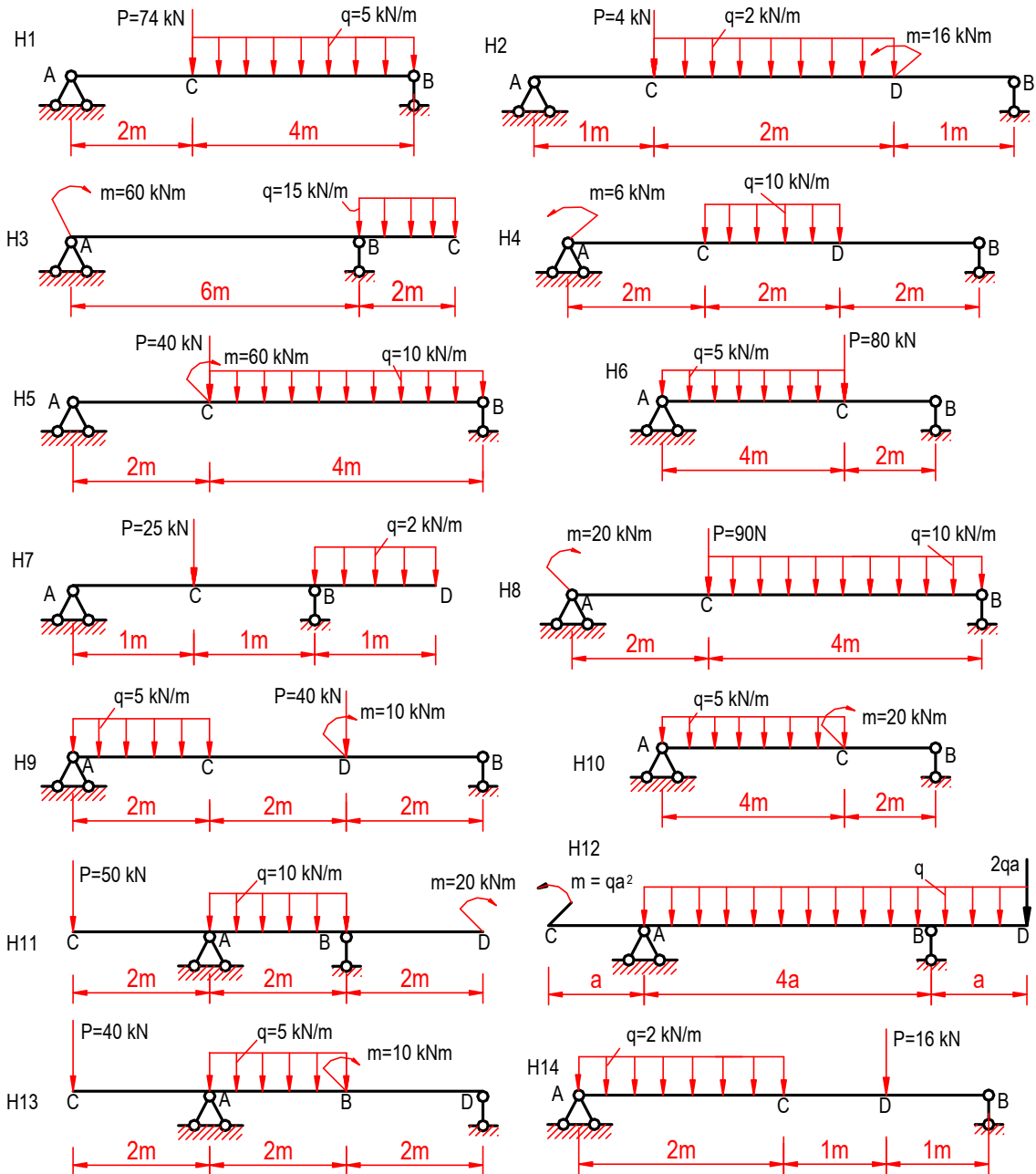
I. CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG 4

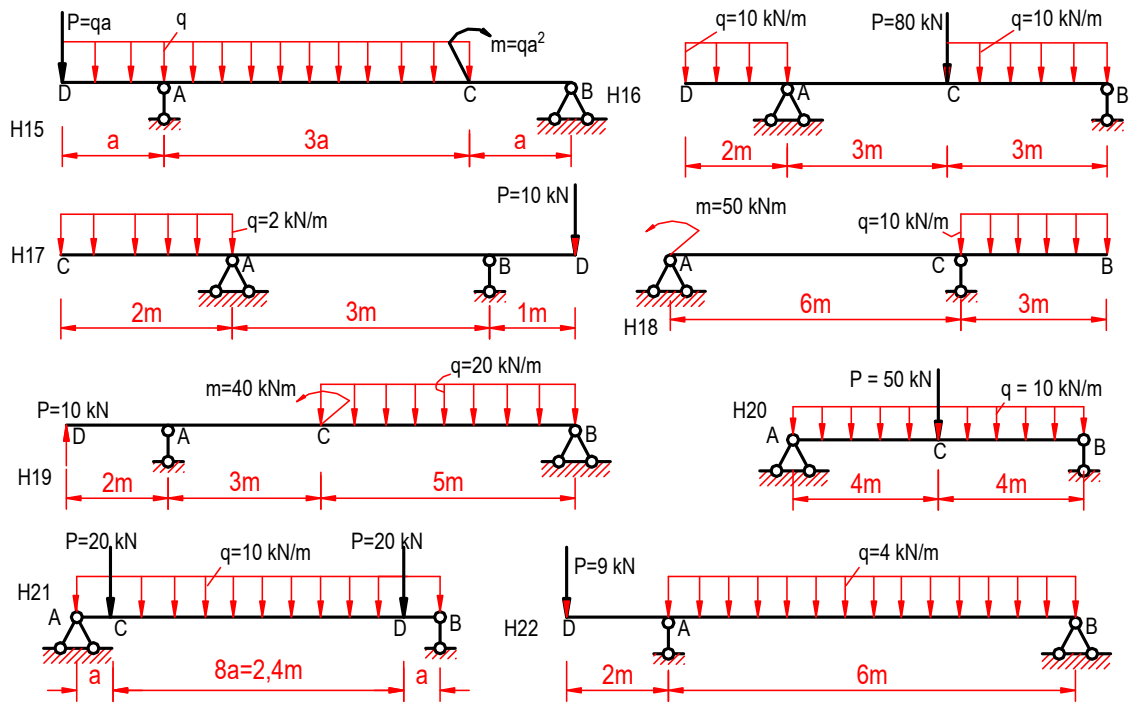
1. Thế nào là uốn ngang phẳng? Cho ví dụ.
2. Trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn có mấy thành phần nội lực? Là những thành phần nội lực nào?
3. Trình bày những quy ước về dấu và cách tính nội lực trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn, vẽ hình thể hiện chiều và dấu của các thành phần đó.
4. Trình bày cách vẽ biểu đồ nội lực bằng phương pháp mặt cắt, lập mối tương quan bằng cách thiết lập các biểu thức $Q_{(z)}$, $M_{(z)}$ cho từng đoạn dầm.
5. Phát biểu định lý Giurápki? Viết và giải thích công thức?
6. Nêu cách vẽ nhanh biểu đồ lực cắt Q và biểu đồ mô men uốn M. Cho ví dụ?
7. Thế nào là dầm uốn phẳng thuần túy? Chứng minh công thức tính ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang của dầm chịu uốn phẳng thuần túy.
8. Lớp trung hoà là gì? Trục trung hoà là gì? Hãy chứng minh trục trung hoà đi qua trọng tâm mặt cắt ngang.
9. Vẽ biểu đồ phân bố ứng suất pháp theo chiều cao mặt cắt ngang. Viết công thức tính ứng suất pháp của mặt cắt ngang.
10. Viết và giải thích công thức tính ứng suất tiếp của một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang (công thức D.I Giurapki).
11. Trình tự tính toán về ba bài toán cơ bản (bài toán kiểm tra, bài toán xác định tải trọng cho phép và bài toán thiết kế).
12. Thế nào là đường đàn hồi, độ võng, góc xoay?
13. Viết và giải thích phương trình vi phân gần đúng của đường đàn hồi. Nêu quan hệ giữa đường đàn hồi và góc xoay của mặt cắt ngang dầm.
14. Trình bày cách xác định độ võng, góc xoay của dầm bằng phương pháp tích phân bất định. Trong trường hợp nào nên áp dụng phương pháp này?

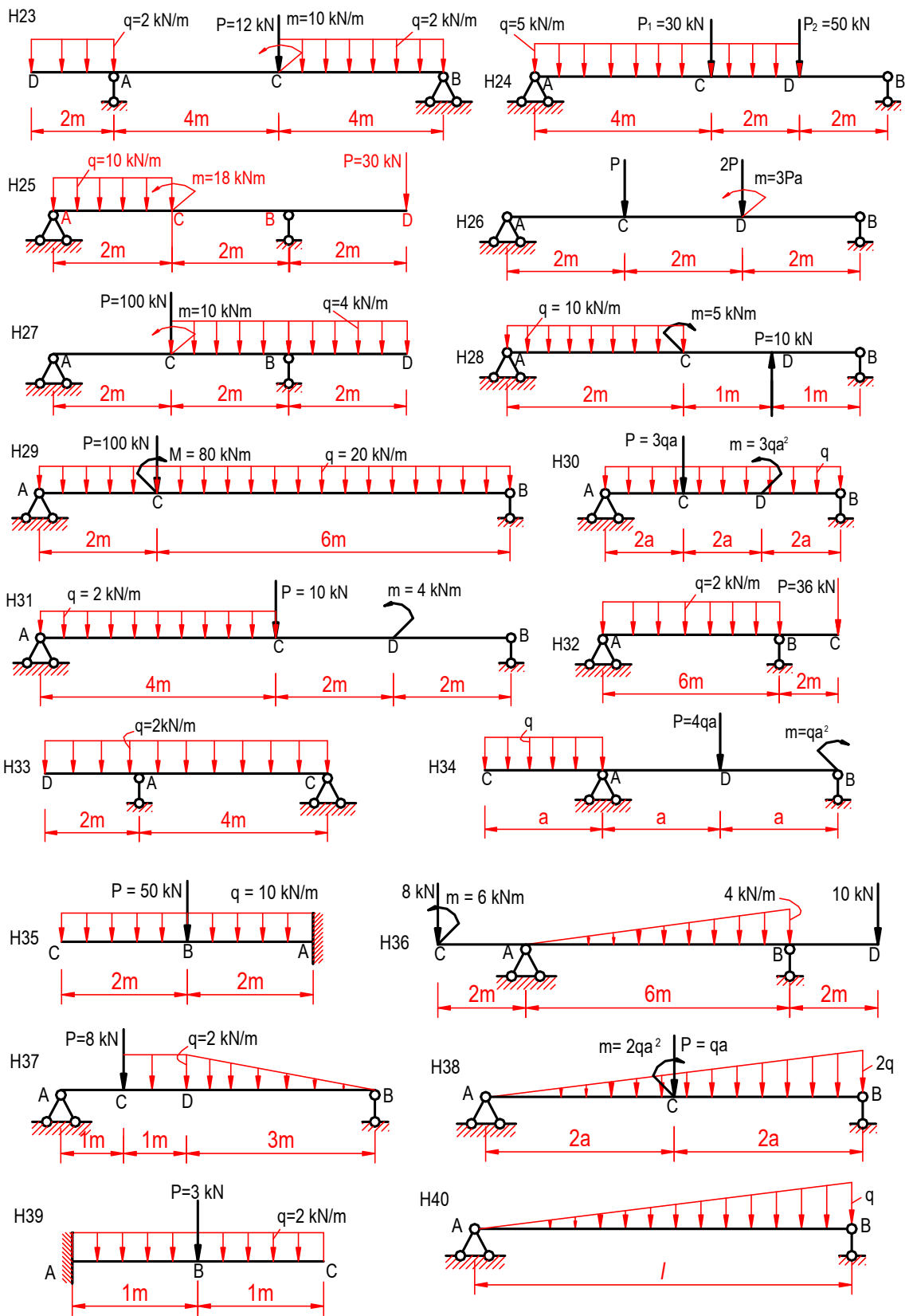
II. BÀI TẬP

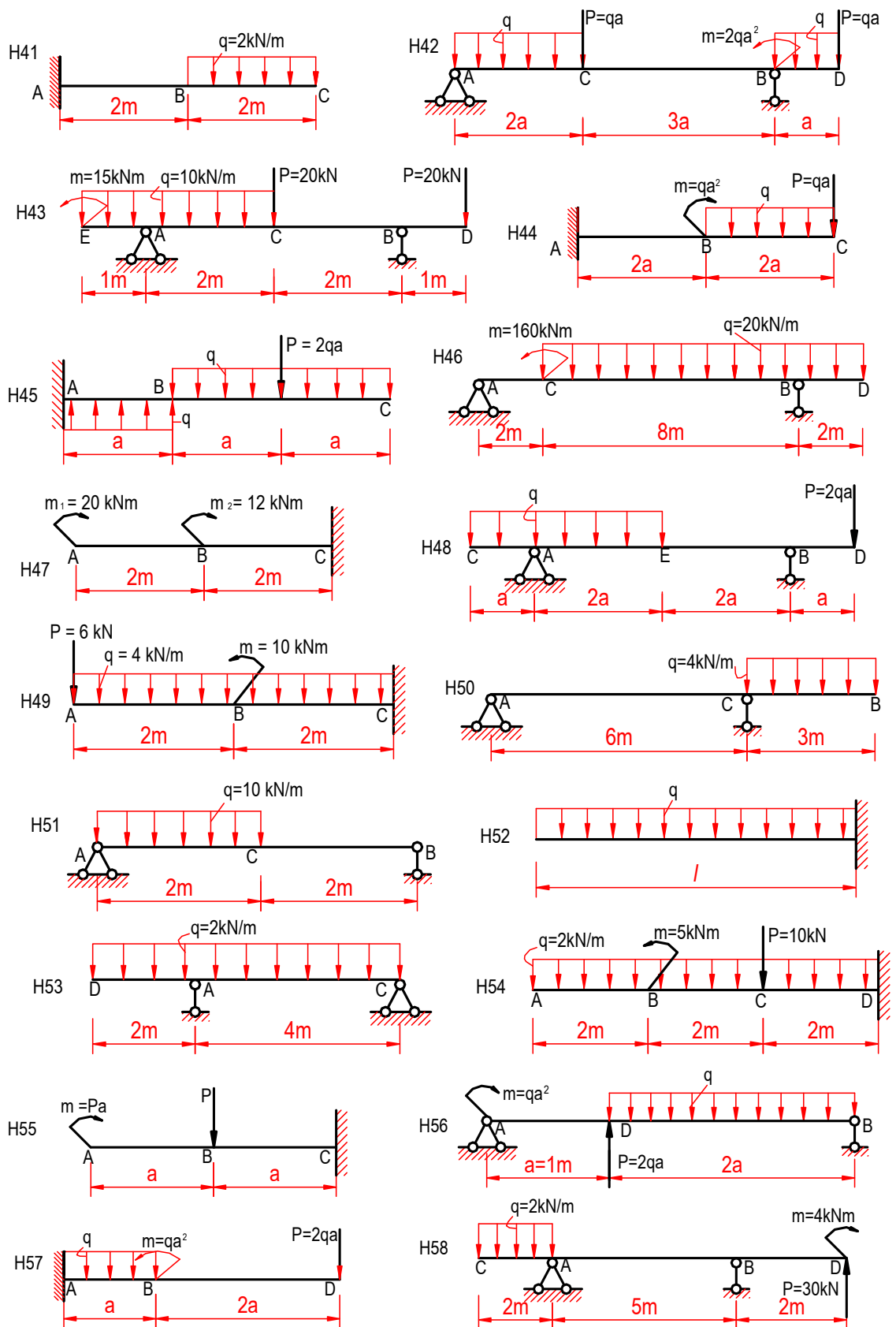
1. Vẽ biểu đồ nội lực cho các dầm có sơ đồ chịu lực ở hình 4.41 bằng:

- Phương pháp mặt cắt (phương pháp thiết lập biểu thức).
 - Phương pháp vẽ nhanh (phương pháp vẽ theo các điểm đặc biệt).
- (Riêng các hình H36, H37, H38, H40 không vẽ theo phương pháp này).



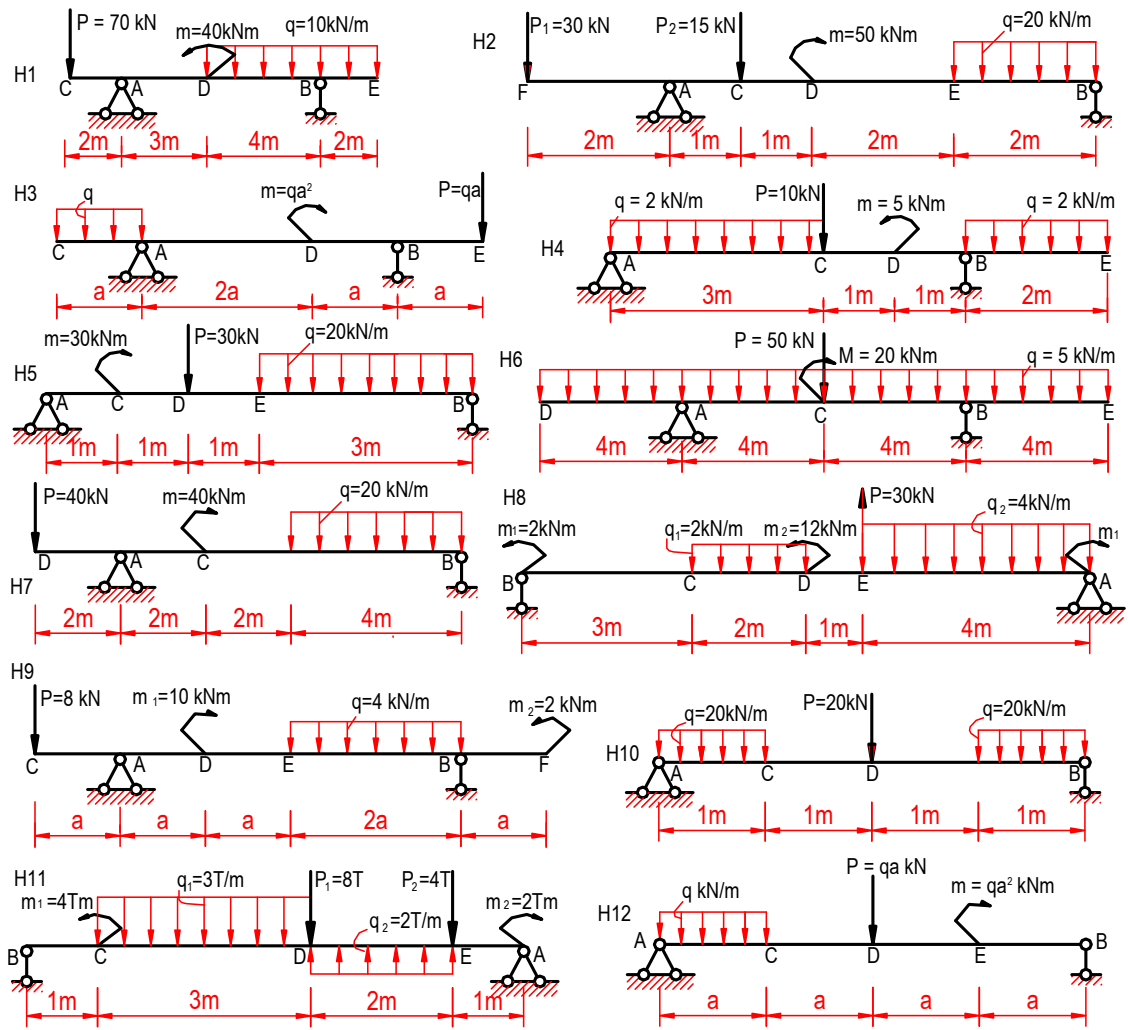






Hình 4.41

2. Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm có sơ đồ chịu lực ở hình vẽ 4.42 bằng phương pháp vẽ nhanh (phương pháp vẽ theo các điểm đặc biệt):



Hình 4.42

3. Cho dầm chịu uốn phẳng có sơ đồ chịu lực như hình 4.41 (H9). Biết dầm là thép hình tiết diện chữ I, số hiệu N⁰27a có : $J^x = 5500 \text{ cm}^4$, $W_x = 407 \text{ cm}^3$, $S_x = 229 \text{ cm}^3$, $d = 0,6 \text{ cm}$. Thép có $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 5 \text{ kN/cm}^2$. Hãy kiểm tra độ bền cho dầm theo điều kiện ứng suất pháp và ứng suất tiếp.

4. Cho dầm chịu uốn phẳng có sơ đồ chịu lực như hình 4.41 (H25). Biết dầm là thép hình tiết diện chữ I, số hiệu N⁰27a có: $J_x = 5500 \text{ cm}^4$, $W_x = 407 \text{ cm}^3$, $S_x = 229 \text{ cm}^3$, $d = 0,6 \text{ cm}$. Thép có $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 5 \text{ kN/cm}^2$. Hãy kiểm tra độ bền cho dầm theo điều kiện ứng suất pháp và ứng suất tiếp.

5. Cho dầm chịu uốn phẳng có sơ đồ chịu lực như hình 4.41 (H27). Biết dầm là thép hình tiết diện chữ I, số hiệu N⁰40 có: $J_x = 18930 \text{ cm}^4$, $W_x = 947 \text{ cm}^3$, $S_x = 540 \text{ cm}^3$, $d = 0,8 \text{ cm}$. Thép có $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 5 \text{ kN/cm}^2$. Hãy kiểm tra độ bền cho dầm theo điều kiện ứng suất pháp và ứng suất tiếp.

6. Cho dầm chịu uốn phẳng có sơ đồ chịu lực như hình 4.41 (H11). Biết dầm là thép hình tiết diện chữ I, số hiệu N⁰36 có: $J_x = 13380 \text{ cm}^4$, $W_x = 743 \text{ cm}^3$, $S_x = 423 \text{ cm}^3$, $d = 0,75 \text{ cm}$. Thép có $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 5 \text{ kN/cm}^2$. Hãy kiểm tra độ bền cho dầm theo điều kiện ứng suất pháp và ứng suất tiếp.

7. Cho dầm chịu uốn phẳng có sơ đồ chịu lực như hình 4.41 (H13). Biết dầm là thép hình tiết diện chữ I, số hiệu N⁰30a có: $J_x = 7780 \text{ cm}^4$, $W_x = 518 \text{ cm}^3$, $S_x = 292 \text{ cm}^3$, $d = 0,65 \text{ cm}$.

Thép có $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 5 \text{ kN/cm}^2$. Hãy kiểm tra độ bền cho dầm theo điều kiện ứng suất pháp và ứng suất tiếp.

8. Xác định kích thước mặt cắt ngang dầm cho trên hình 4.41. Sơ đồ chịu lực của dầm cho trong bảng 4.2. Xét với các trường hợp:

- Dầm có mặt cắt là chữ nhật với $h = 1,5b$.
 - Dầm có mặt cắt là hình tròn.
 - Dầm có mặt cắt là hình vành khăn với $d = 0,8D$.
 - Dầm có mặt cắt là thép chữ I.
 - Dầm có mặt cắt là thép chữ [ghép quay lưng vào nhau.
- Biết: $[\sigma] = 15 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 8 \text{ kN/cm}^2$.

Bảng 4.2

| Số hiệu | Số hiệu | Số hiệu | Số hiệu | Số hiệu | Số hiệu | Số hiệu | Số hiệu |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| H1 | H4 | H8 | H11 | H16 | H25 | H39 | H46 |
| H2 | H5 | H9 | H13 | H19 | H27 | H41 | H49 |
| H3 | H7 | H10 | H14 | H23 | H35 | H43 | H54 |

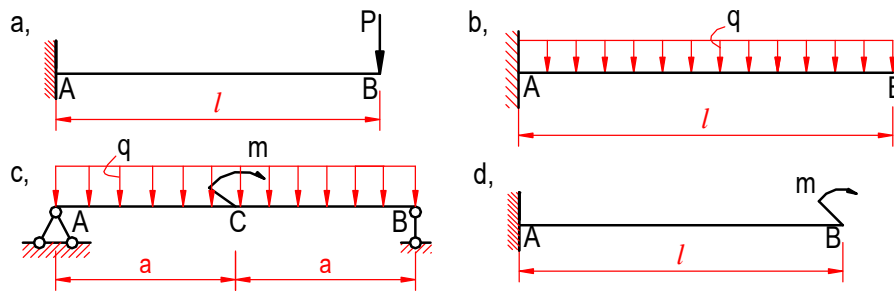
8. Xác định tải trọng cho phép tác dụng trên dầm ở hình 4.41. Biết các số liệu về mặt cắt cho trong bảng 4.3 và $[\sigma] = 15 \text{ kN/cm}^2$, $[\tau] = 8 \text{ kN/cm}^2$.

Bảng 4.3

| S.H | T.trọng cho phép | a (m) | Hình dáng và các thông số kích thước | | | | | | |
|-----|------------------------|----------|--------------------------------------|-------|-------|-----------|-------|--------------------|--------------------|
| | | | Chữ nhật | | Tròn | Vành khăn | | I | [ghép |
| | | | b(cm) | h(cm) | d(cm) | d(cm) | D(cm) | S.hiệu | S.hiệu |
| H12 | q | 1 | 10 | 20 | 16 | 21,3 | 26,6 | N ⁰ 18 | N ⁰ 16 |
| H15 | q | 1 | 10 | 15 | 13,8 | 18,4 | 23 | N ⁰ 24a | N ⁰ 18a |
| H25 | P | 2 | 20 | 30 | 27,6 | 36,8 | 46 | N ⁰ 20 | N ⁰ 20 |
| H30 | q | 1 | 15 | 20 | 19,6 | 26 | 32,6 | N ⁰ 22 | N ⁰ 22 |
| H34 | q | 2 | 20 | 30 | 27,6 | 36,8 | 46 | N ⁰ 27 | N ⁰ 24 |
| H42 | q | 1 | 25 | 50 | 40 | 53,2 | 66,5 | N ⁰ 36 | N ⁰ 27 |
| H44 | q | 1 | 30 | 60 | 48 | 64 | 80 | N ⁰ 22a | N ⁰ 30 |
| H48 | q | 1 | 20 | 40 | 32 | 42,6 | 53,2 | N ⁰ 30a | N ⁰ 36 |

* Ghi chú: So sánh về phương diện chịu lực đối với mặt cắt hình chữ nhật, hình tròn, hình vành khăn có cùng diện tích như trong bảng.

9. Viết phương trình độ võng và góc xoay của các dầm cho trên hình 4.43 bằng phương pháp tích phân bất định.



Hình 4.43

Chương 5 THANH CHỊU LỰC PHỨC TẠP

5.1. Khái niệm chung

Trong những chương trên, ta đã nghiên cứu ba hình thức chịu lực (hay biến dạng) cơ bản của thanh thẳng: kéo (nén), cắt, uốn phẳng.

Trong thực tế có những bộ phận công trình thường chịu tác dụng đồng thời của nhiều hình thức chịu lực cơ bản. Thí dụ: một tường chắn vừa chịu nén vừa chịu uốn. Đôi khi lực tác dụng tương chừng như đơn giản, nhưng hình thức chịu lực lại không thể liệt vào một trong các loại chịu lực cơ bản. Thí dụ: Một xà gồ trên mái nhà chịu uốn, tuy lực tác dụng vuông góc với trục xà nhưng lại không nằm trong mặt phẳng đối xứng của xà, do đó xà không phải chịu uốn phẳng; một trụ chịu nén, nhưng lực nén lại không trùng với trục, do đó cũng không phải là hình thức chịu nén đúng tâm. Trong các thí dụ trên ta nói rằng các bộ phận công trình đó *chịu lực phức tạp*.

Muốn tính được ứng suất và biến dạng để kiểm tra cường độ và độ cứng của các thanh chịu lực phức tạp, chúng ta dựa vào *nguyên lý độc lập tác dụng* của các lực, nghĩa là đem hình thức tác dụng phức tạp của lực phân tích ra các hình thức cơ bản đã trình bày ở các chương trên, rồi đem cộng hình học các kết quả cùng loại thu được. Tuy nhiên, cần chú ý rằng muốn áp dụng nguyên lý cộng tác dụng thanh phải thỏa mãn hai điều kiện sau:

- Vật liệu còn làm việc trong giai đoạn đàn hồi, quan hệ giữa ứng suất và biến dạng là quan hệ bậc nhất.
- Biến dạng và chuyển vị của thanh là nhỏ.

Ở đây việc nghiên cứu được giới hạn trọng phạm vi những thanh với mặt cắt có trục đối xứng. Ngoài ra chú ý rằng ứng suất tiếp τ do lực cắt Q gây ra trong thanh thường nhỏ nên trong chương này ta bỏ không xét đến.

5.2. Uốn xiên

5.2.1. Khái niệm

Chúng ta đã biết nếu những ngoại lực gây ra uốn nằm trong mặt phẳng đối xứng của thanh thì thanh sẽ chịu uốn phẳng.

Nếu những ngoại lực gây ra uốn không nằm trong mặt phẳng đối xứng của thanh thì thanh không còn bị uốn phẳng nữa mà bị *uốn xiên*. Thí dụ trên hình 5.1a, hình thức chịu lực này là sự kết hợp của hai hình thức chịu lực cơ bản là uốn phẳng của thanh đồng thời trong hai mặt phẳng đối xứng zOx và zOy . Thật vậy, nếu phân tích lực P ra các thành phần nằm trên các trục Ox và Oy thì mỗi lực thành phần P_x và P_y đều nằm trong mặt phẳng đối xứng của thanh, do đó nếu xét một cách độc lập thì mỗi lực này sẽ làm cho thanh bị uốn phẳng trong mặt phẳng chứa lực đó.

Do đó: *Ta gọi một thanh chịu uốn xiên là thanh mà trên mọi mặt cắt ngang chỉ có hai thành phần nội lực là các mômen uốn M_x và M_y nằm trong các mặt quán tính chính trung tâm của mặt cắt (hình 5.1b).*

Cũng như trước đây, ta quy ước các mômen uốn là dương khi chúng làm *căng các thớ về phía dương của các trục x, y*.

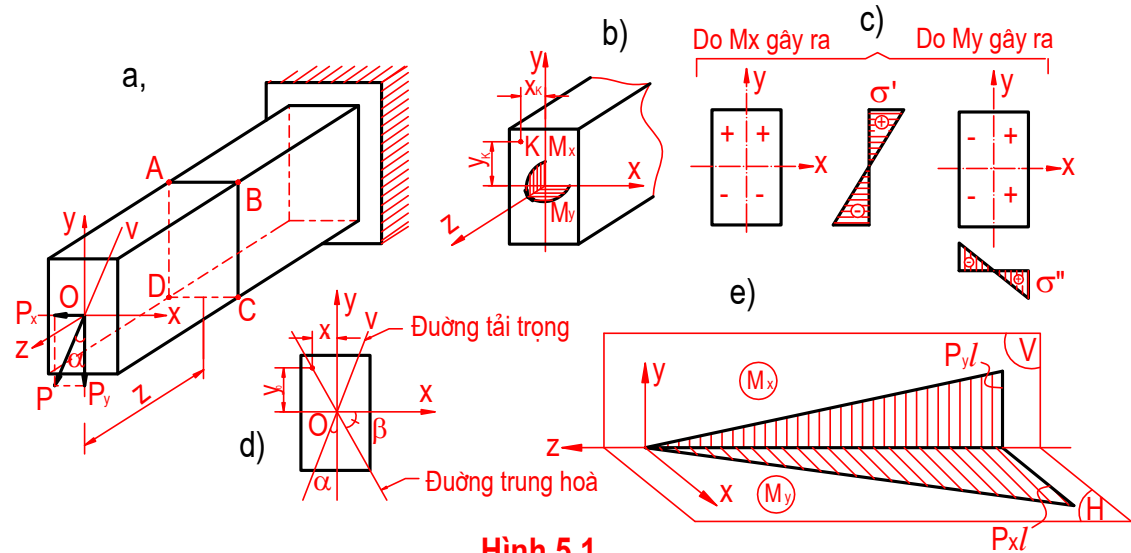
Mặt phẳng chứa lực tác dụng và trục z gọi là *mặt phẳng tải trọng*. Giao tuyến của mặt phẳng tải trọng với mặt cắt ngang gọi là *đường tải trọng*.

Vậy, uốn xiên là một hình thức chịu lực phức tạp mà ta có thể phân tích thành những hình thức chịu lực cơ bản để tính toán.

5.2.2. Ứng suất pháp

Xét thanh chịu lực trên hình 5.1a. Phân lực P ra hai thành phần xuống trục Ox và Oy ta có:

$$P_x = P \sin \alpha ; \quad P_y = P \cos \alpha .$$



Hình 5.1

Trong đó α là góc hợp bởi đường tác dụng của lực P và trục y. Xét mặt cắt ABCD bất kỳ của thanh cách đầu tự do một khoảng là z. Ta thấy các lực P_x và P_y sẽ gây ra một cách độc lập tại mặt cắt đó những mômen uốn M_x và M_y có trị số bằng:

$$\begin{aligned} M_x &= P_y z = Pz \cos \alpha \\ M_y &= P_x z = Pz \sin \alpha \end{aligned} \quad (*)$$

Nếu giữ lại phần thanh bị ngâm để xét thì các mômen uốn M_x và M_y được biểu diễn như trên hình 5.1b.

Nếu gọi mômen uốn do lực P gây ra trong mặt phẳng tải trọng (mặt phẳng zOy) đối với trọng tâm mặt cắt đang xét là mômen uốn tổng hợp M ($M = Pz$) thì từ (*) ta có thể viết:

$$\begin{aligned} M_x &= M \cos \alpha \\ M_y &= M \sin \alpha \end{aligned}$$

Công thức tính ứng suất pháp σ tại một điểm bất kỳ của mặt cắt ABCD (giả sử điểm đó có khoảng cách đến hai trục Ox và Oy là y và x) được thiết lập trên cơ sở nguyên lý độc lập tác dụng của các lực. Trước tiên ta phải tính ứng suất pháp σ' và σ'' tại điểm đang xét do M_x và M_y gây ra một cách riêng lẻ, sau đó cộng đại số các ứng suất đó ta được ứng suất σ do đồng thời M_x và M_y gây ra.

$$\text{Ta có:} \quad \sigma' = \pm \frac{M_x}{J_x} y ; \quad \sigma'' = \pm \frac{M_y}{J_y} x$$

Khi tác dụng đồng thời hai mômen uốn M_x và M_y thì ứng suất pháp σ tại điểm đang xét là:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' \Rightarrow \sigma = \pm \frac{M_x}{J_x} y \pm \frac{M_y}{J_y} x \quad (5.1)$$

Đây là công thức tính ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt đang xét của thanh chịu uốn xiên.

Trong đó:

- M_x và M_y là trị số tuyệt đối của những mômen uốn tại mặt cắt đang xét, do ngoại lực nằm trong mặt phẳng zOy và ngoại lực nằm trong mặt phẳng zOx gây ra một cách riêng biệt.
- J_x và J_y là những mômen quán tính chính trung tâm của mặt cắt đang xét đối với trục x và trục y .
- x và y là những khoảng cách từ điểm muốn tính ứng suất của mặt cắt đến trục y và trục x (tọa độ tính ứng suất).

Dấu (+) hay (-) trước số hạng nào đó được lấy tùy theo điểm muốn tính ứng suất nằm trong miền chịu kéo hay miền chịu nén của mặt cắt, do mômen có mặt trong số hạng đó gây ra.

Thí dụ: Đối với điểm K (có khoảng cách đến trục x và y là x_k và y_k) trên hình 5.1b, ứng suất pháp σ sẽ là:

$$\sigma_k = \frac{M_x}{J_x} y_k - \frac{M_y}{J_y} x_k$$

Nếu mặt cắt của thanh có hai trục đối xứng: hình chữ nhật, chữ I hoặc một hình có dạng chữ nhật hay chữ I như trên hình 5.2 thì ứng suất pháp lớn nhất σ_{\max} trên mặt cắt sẽ phát sinh tại hai trong bốn điểm của mặt cắt (hai điểm góc này đối xứng qua tâm của mặt cắt) vì điểm đó có khoảng cách đến trục Ox và Oy là lớn nhất (y_{\max} , x_{\max}). Do đó:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} + \frac{M_y}{J_y} x_{\max} \Leftrightarrow |\sigma_{\max}| = \frac{M_x}{J_x} + \frac{M_y}{J_y}$$

Hay :
$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \quad (5.2)$$

Trong đó: W_x và W_y là những mô đun chống uốn của mặt cắt đối với trục x và y .

5.2.3. Điều kiện cường độ

Ta xét những thanh mà mặt cắt có hai trục đối xứng như trên hình 5.2.

Muốn xét điều kiện cường độ ta phải tìm mặt cắt nguy hiểm của thanh (tức là mặt cắt có ứng suất σ_{\max} đạt trị số lớn nhất với σ_{\max} trên mặt cắt khác của thanh). Để xác định mặt cắt này ta phải dựa vào biểu đồ mômen uốn của thanh:

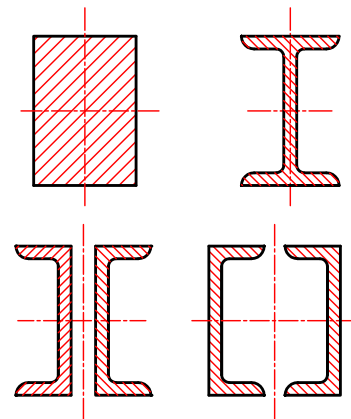
$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] \text{ hay: } \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (5.3)$$

Công thức (5.3) là điều kiện cường độ khi uốn xiên đối với dầm có loại mặt cắt như trên hình 5.2.

Nếu dầm làm bằng vật liệu chịu kéo kém hơn chịu nén thì trong công thức đó ta phải thay $[\sigma]$ bởi $[\sigma_k]$.

Từ công thức (5.3) ta cũng có thể giải ba loại bài toán cơ bản. Riêng đối với bài toán chọn kích thước mặt cắt ta không thể giải ngay được vì có hai ẩn số W_x và W_y . Để giải bài toán này phải chọn được tỷ số $\frac{W_x}{W_y}$ phù hợp với từng loại mặt cắt và sau đó nghiệm lại điều

kiện cường độ, nếu điều kiện này chưa thỏa mãn thì phải chọn lại mặt cắt cho đến khi thỏa mãn. Thông thường theo kinh nghiệm thì:



Hình 5.2

Đối với thép chữ I thường chọn: $\frac{W_x}{W_y} = 8,5 \div 10$.

Đối với thép chữ [thường chọn: $\frac{W_x}{W_y} = 6 \div 8$.

Với mặt cắt hình chữ nhật: $\frac{W_x}{W_y} = \frac{h}{b} = 1,5 \div 2$.

5.2.4. Trục trung hoà

Trong thanh bị uốn xiên, trên mặt cắt của nó cũng xuất hiện một miền chịu kéo và một miền chịu nén. Ranh giới giữa hai miền đó là đường trung hoà. Mọi điểm nằm trên đường trung hoà có ứng suất pháp σ bằng không.

Để thiết lập phương trình đường trung hoà ta cần chú ý rằng: muốn tại một điểm nào đó của đường trung hoà ứng suất σ bằng không, thì tại các điểm đó các ứng suất σ' và σ'' (do mômen uốn M_x và M_y gây ra một cách riêng lẻ) phải luôn luôn có cùng trị số nhưng trái dấu nhau để tổng số của chúng bằng không.

Nếu điểm trên đường trung hoà có khoảng cách đến hai trục x và y là y_0 và x_0 (hình 5.1d) thì ta có:

$$\frac{M_x}{J_x} y_0 - \frac{M_y}{J_y} x_0 = 0 \quad (5.4)$$

Đây là *phương trình của đường trung hoà* trên mặt cắt của thanh bị uốn xiên. Tại một mặt cắt nhất định các mômen uốn M_x và M_y đều là những hằng số nên ta thấy phương trình trên là phương trình của một đường thẳng đi qua gốc toạ độ O (khi $x_0 = 0$ thì $y_0 = 0$). Vậy trục trung hoà khi uốn xiên là một đường thẳng đi qua trọng tâm mặt cắt.

Ta có thể viết phương trình của trục trung hoà dưới dạng khác:

Thay $M_x = M \cos \alpha$ và $M_y = M \sin \alpha$ vào công thức (5.4) ta được:

$$\frac{M \cos \alpha}{J_x} y_0 - \frac{M \sin \alpha}{J_y} x_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y_0 \cos \alpha}{J_x} - \frac{x_0 \sin \alpha}{J_y} = 0$$

Đặt: $\frac{x_0}{y_0} = \operatorname{tg} \beta$ - với β là góc hợp bởi trục trung hoà với trục x - biến đổi phương

trình trên ta được: $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{J_x}{J_y}$ (5.5)

Biểu thức trên cho chúng ta thấy được mối quan hệ giữa vị trí của đường tải trọng và vị trí của trục trung hoà trên mặt cắt.

Từ đó ta có những nhận xét sau:

a) Nếu mặt cắt của thanh có $J_x \neq J_y$ thì $\alpha \neq \beta$:

Nghĩa là, khác với uốn phẳng trong uốn xiên đường tải trọng và trục trung hoà không bao giờ vuông góc nhau.

b) Nếu mặt cắt của thanh có $J_x = J_y$: (thí dụ mặt cắt tròn, vuông, mặt cắt hình đa giác đều cạnh nội tiếp trong hình tròn...) thì $\alpha = \beta$. Nghĩa là đường tải trọng và trục trung hoà vuông góc nhau như trong uốn phẳng. Người ta đã chứng minh được rằng: đối với những mặt cắt đối xứng có các mômen quán tính chính trung tâm bằng nhau, thì đảm có loại mặt cắt đó không thể bị uốn xiên mà chỉ bị uốn phẳng mà thôi mặc dù mặt phẳng tải trọng không chứa một trong những trục đối xứng của mặt cắt.

Cuối cùng ta cần chú ý đến một công dụng quan trọng của đường trung hoà: đối với thanh có mặt cắt không thuộc loại nêu trên hình 5.2 thì không thể áp dụng công thức (5.2) để tính $|\sigma_{\max}|$ được mà phải xác định vị trí trục trung hoà rồi tìm điểm nằm trên mặt cắt cách xa trục đó nhất, sau đó áp dụng công thức (5.3) cho điểm này ta sẽ được $|\sigma_{\max}|$.

- **Thí dụ 5.1:** Một dầm bằng gỗ có chiều dài $l = 2\text{m}$. Mặt cắt ngang là hình chữ nhật với kích thước $(13 \times 20)\text{cm}^2$ như hình vẽ 5.3. Dầm bị ngàm chặt một đầu, đầu tự do chịu tác dụng của lực tập trung $P = 2400\text{ N}$. Lực đặt vuông góc với trục dầm và hợp lực tạo với trục y một góc $\alpha = 30^\circ$. Hãy kiểm tra cường độ của dầm, biết rằng ứng suất cho phép $[\sigma] = 10\text{ MN/m}^2$.

- **Bài giải:** Phân tích lực P ra làm 2 thành phần:

$$P_x = P \cdot \sin 30^\circ = 2400 \cdot 0,5 = 1200\text{ N.}$$

$$P_y = P \cdot \cos 30^\circ = 2400 \cdot 0,866 = 2078,4\text{ N.}$$

Thanh bị uốn xiên và mômen uốn ở mặt cắt nguy hiểm (mặt cắt ngàm) bằng:

$$M_x = P_y l = 2078,4 \times 2 = 4156,8\text{ Nm.}$$

$$M_y = P_x l = 1200 \times 2 = 2400\text{ Nm.}$$

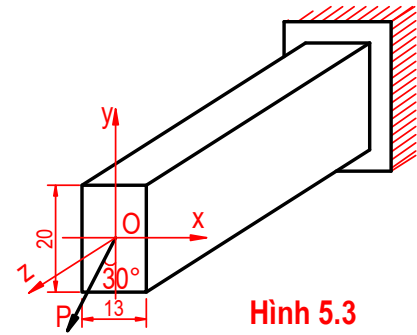
Môđun chống uốn:

$$W_x = \frac{13 \cdot 10^{-2} \times (20 \cdot 10^{-2})^2}{6} = 8,67 \times 10^{-4} (\text{m}^3)$$

$$W_y = \frac{13 \cdot 10^{-2} \times (13 \cdot 10^{-2})^2}{6} = 5,63 \times 10^{-4} (\text{m}^3).$$

$$\begin{aligned} \text{Ứng suất lớn nhất ở mặt cắt nguy hiểm: } |\sigma_{\max}| &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{4156,8}{8,67 \times 10^{-4}} + \frac{2400}{5,63 \times 10^{-4}} \\ &= (479,45 + 426,29) \cdot 10^4 = 905,74 \times 10^4 \text{ N/m}^2 \approx 9,06 \text{ MN/m}^2 < [\sigma] = 10 \text{ MN/m}^2. \end{aligned}$$

Như vậy dầm đảm bảo về cường độ.



Hình 5.3

- **Thí dụ 5.2:** Một dầm bằng thép có mặt cắt ngang hình chữ [đặt lên hai vì kèo có nhịp $l = 5\text{ m}$, chịu tải trọng phân bố đều $q = 6\text{ kN/m}$. Mái nghiêng so với mặt nằm ngang một góc $\alpha = 30^\circ$ (hình 5.4). Chọn số hiệu của thép, biết rằng ứng suất cho phép $[\sigma] = 160\text{ MN/m}^2$ (xem dầm đặt lên các vì kèo như đặt lên các gối tựa).

- **Bài giải:** Trong trường hợp này ta nhận thấy ngay mặt cắt nguy hiểm là mặt cắt ở giữa nhịp của dầm. Trị số mômen uốn tổng hợp ở đó là:

$$M = \frac{ql^2}{8} = \frac{6 \times 5^2}{8} = 18,75\text{ kNm.}$$

Trị số mômen uốn trong các mặt cắt quán tính chính

$$(\sin \alpha = \frac{1}{2} = 0,5, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866):$$

$$M_x = M \cos \alpha = 18,75 \times 0,866 = 16,24\text{ kNm.}$$

$$M_y = M \sin \alpha = 18,75 \times 0,5 = 9,375\text{ kNm.}$$

Dầm bị uốn xiên, nên áp dụng điều kiện cường độ:

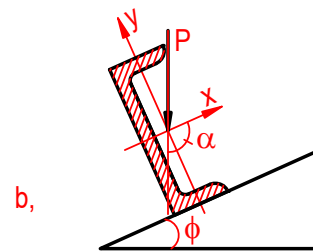
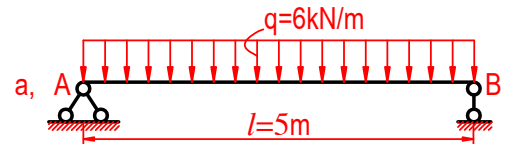
$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \Leftrightarrow \frac{1}{W_x} \left[M_x + \frac{W_x}{W_y} M_y \right] \leq [\sigma]$$

Chúng ta thấy ở đây một phương trình mà có hai ẩn số W_x và W_y . Bài toán chỉ có thể giải quyết bằng phương pháp đúng đắn:

$$\text{Chọn tỷ số: } \frac{W_x}{W_y} = 8, \text{ ta được: } \frac{1}{W_x} [16,24 + 8 \times 9,375] \leq 16 \times 10^4$$

$$\Rightarrow W_x \geq 5,7 \times 10^{-4} \text{ m}^3 = 570 \text{ cm}^3$$

Căn cứ vào trị số đó ta có thể sơ bộ chọn thép số hiệu N⁰36 có: $W_x = 601 \text{ cm}^3$, $W_y = 61,7 \text{ cm}^3$, ta phải kiểm tra lại điều kiện bền của dầm:



Hình 5.4

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{16,24}{601 \times 10^{-6}} + \frac{9,373}{61,7 \times 10^{-6}} = 178,93 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$$

$$= 178,93 \text{ MN/m}^2.$$

Nhận thấy : $\sigma_{\max} > [\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$.

Sai số :
$$\Delta\sigma = \frac{178,93 - 160}{160} \times 100\% = 14,1\% > 5\%$$

Trị số σ_{\max} quá lớn so với ứng suất cho phép, vì vậy ta phải chọn lại thép [số hiệu lớn hơn.

Chọn lần thứ hai thép [số hiệu N⁰40 có $W_x = 761 \text{ cm}^3$; $W_y = 73,4 \text{ cm}^3$.

Kiểm tra lại điều kiện bền của dầm, ta có:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{16,24}{761 \times 10^{-6}} + \frac{9,373}{73,4 \times 10^{-6}} = 149 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2 = 149 \text{ MN/m}^2$$

So với ứng suất cho phép ta thấy trị số ứng suất $\sigma_{\max} < [\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$.

Sai số :
$$\Delta\sigma = \frac{160 - 149}{160} \times 100 = 6,85\% \text{ trong phạm vi cho phép.}$$

Vậy chọn thép [số hiệu N⁰40 là thích hợp và thiên về an toàn.

5.3. Uốn phẳng đồng thời kéo (hoặc nén)

5.3.1. Khái niệm

Khi một thanh chịu tác dụng đồng thời của hai loại lực: lực gây uốn phẳng và lực gây ra kéo (hoặc nén) đúng tâm, hoặc chỉ chịu tác dụng của một lực nhưng có thể phân tích ra hai loại lực như trên thì chúng ta nói là thanh bị *uốn phẳng đồng thời kéo (hoặc nén)*.

5.3.2 Tính ứng suất

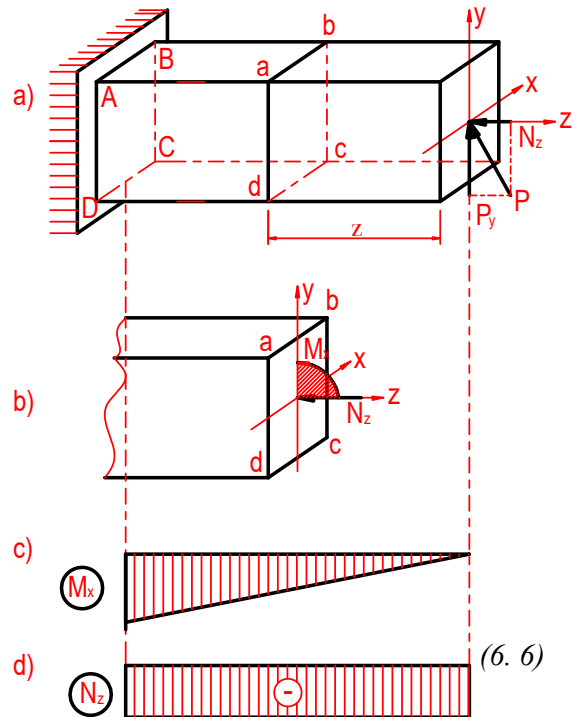
Xét một dầm mặt cắt hình chữ nhật bị ngàm ở một đầu và chịu tác dụng của một lực P, đặt tại trọng tâm của mặt cắt đầu tự do và đồng thời nằm trong mặt phẳng đối xứng của dầm (hình 5.5a). Phân tích lực P ra hai lực thành phần theo các trục y và z, ta thấy lực P_y sẽ gây ra uốn phẳng và lực dọc N_z sẽ gây ra nén đúng tâm. Như vậy dưới tác dụng của lực P dầm vừa bị uốn vừa bị nén.

Tương tự cắt thanh tại một mặt cắt bất kỳ abcd và giữ lại phần trái. Ta sẽ có trên mặt cắt đó mômen uốn M_x và lực dọc N_z (hình 5.5b). Tại một điểm bất kỳ của mặt cắt, mômen uốn M_x gây ra ứng suất pháp σ' :

$$\sigma' = \pm \frac{M_x}{J_x} y \quad (5.6)$$

(y là khoảng cách từ điểm đang xét đến trục x). Còn lực dọc N_z gây ra ứng suất pháp σ'' :

$$\sigma'' = \pm \frac{N_z}{F} \quad (5.7)$$



Hình 5.5

Trong công thức của σ'' , N_z là trị số tuyệt đối của lực dọc và ta lấy (+) khi N_z là lực kéo và lấy dấu (-) nếu ngược lại, còn F là diện tích của mặt cắt.

Theo nguyên lý độc lập tác dụng của lực, thì khi uốn phẳng đồng thời kéo (nén) ta có công thức tính ứng suất pháp σ tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt của thanh là:

$$\sigma = \pm \frac{N_z}{F} \pm \frac{M_x}{J_x} y \quad (5.8)$$

Qua công thức này ta nhận thấy đối với trường hợp đang xét, tại những điểm thuộc cạnh ab (cách trục x một khoảng y_{\max}) sẽ phát sinh ứng suất σ_{\max} . Nếu trường hợp lực dọc N là lực kéo, ta có:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y_{\max} = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} \\ \sigma_{\min} &= \frac{N_z}{F} - \frac{M_x}{J_x} y_{\max} = \frac{N_z}{F} - \frac{M_x}{W_x} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Ở đây chú ý rằng ta ký hiệu σ_{\max} và σ_{\min} theo trị số đại số lớn nhất và bé nhất của chúng. Nếu trường hợp lực dọc N là lực nén thì (5.9) sẽ trở thành:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\max} &= -\frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} \\ \sigma_{\min} &= -\frac{N_z}{F} - \frac{M_x}{W_x} \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

5.3.3. Điều kiện cường độ và ba bài toán cơ bản

Trước hết ta phải tìm mặt cắt nguy hiểm của thanh bằng cách dựa vào biểu đồ mômen uốn và lực. Thí dụ đối với trường hợp trên hình 5.5a dựa vào biểu đồ mômen uốn M_x do lực P_y sinh ra (hình 5.5c) và biểu đồ lực dọc N_z và P_z sinh ra (hình 5.5d) cho thấy mặt cắt nguy hiểm là tại ngàm.

Đối với mặt cắt nguy hiểm, theo các công thức (5.9) hoặc (5.10) ta có thể lập các điều kiện cường độ sau đây:

1. Trường hợp kéo và uốn:

Ứng suất có trị số tuyệt đối lớn nhất là ứng suất kéo σ_{\max} trong công thức (5.9). Đối với tất cả các loại vật liệu $[\sigma_k] < [\sigma_n]$ nên công thức cơ bản về điều kiện cường độ khi kéo và uốn thẳng đồng thời:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma_k] \quad (5.11)$$

2. Trường hợp nén và uốn:

Ứng suất có trị số tuyệt đối lớn nhất là ứng suất σ_{\min} ở công thức (5.10).

- Vật liệu có $[\sigma_k] = [\sigma_n] = [\sigma]$, công thức cơ bản của điều kiện cường độ trong trường hợp này là:

$$|\sigma_{\min}| = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (5.12)$$

- Vật liệu có $[\sigma_k] < [\sigma_n]$ (thí dụ gang), trường hợp này ta phải dùng đồng thời cả hai điều kiện cường độ là:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma_k] \quad (5.13)$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma_n] \quad (5.14)$$

Ở đây ta cũng có ba loại bài toán: kiểm tra cường độ, tìm lực tối đa cho phép và chọn mặt cắt. Đặc biệt đối với bài toán chọn mặt cắt ta phải dùng phương pháp đúng đắn, vì ta

chỉ có một phương trình nhưng có hai ẩn số là W_x và F . Muốn vậy trước hết phải thiết kế thanh theo điều kiện cường độ về kéo (nén) đúng tâm hoặc về uốn phẳng, sau đó kiểm tra lại mặt cắt vừa chọn được theo điều kiện cường độ về kéo (nén) cộng uốn. Nếu không thỏa mãn thì phải chọn lại kích thước mặt cắt cho đến khi thỏa mãn.

- **Thí dụ 5.3:** Chọn thép I cho dầm chịu lực nén P và lực phân bố đều q như trên hình 5.6 biết ứng suất cho phép $[\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2$.

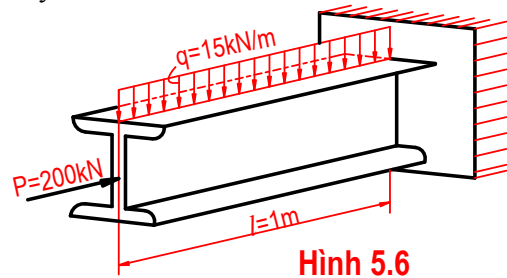
- **Bài giải:** Lực P làm cho dầm bị nén. Lực phân bố q làm cho dầm bị uốn phẳng. Mặt cắt nguy hiểm là mặt cắt ở ngàm, tại đây:

$$M_x = \frac{ql^2}{2} = \frac{15 \times 1^2}{2} = 7,5 \text{ kNm}$$

$$N_z = P = 200 \text{ kN}$$

Vì dầm thép nên để chọn thép I thích hợp, ta áp dụng công thức:

$$|\sigma_{\min}| = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$



Hình 5.6

Ở đây ta có một phương trình gồm hai ẩn số là W_x và F nên không thể tìm ngay được thép I thích hợp. Theo phương pháp đúng đắn, tạm thời chúng ta bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc N_z . Nếu chỉ có tác dụng của lực phân bố q gây ra uốn phẳng với mômen lớn nhất $M_x = 7,5 \text{ kNm}$ ta chọn thép I có W_x sao cho:

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{7,5}{16 \cdot 10^4} = 0,47 \times 10^4 (\text{m}^3) = 47 (\text{cm}^3).$$

Căn cứ vào bảng thép chọn thép I số 12 có $F = 16,5 \text{ cm}^2$ và $W_x = 67,2 \text{ cm}^3$.

Nghiệm lại điều kiện cường độ khi có tác dụng đồng thời của cả lực P và lực phân bố q :

$$\begin{aligned} |\sigma_{\min}| &= \frac{200}{16,5 \times 10^{-4}} + \frac{7,5}{67,2 \times 10^{-6}} = 232,8 \times 10^3 (\text{kN/m}^2) \\ &= 232,8 \text{ MN/m}^2 > [\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2 \end{aligned}$$

Trị số $|\sigma_{\min}|$ quá lớn so với $[\sigma]$, vì vậy ta phải chọn lại:

Ta chọn loại thép I số 14 có $F = 18,9 \text{ cm}^2$ và $W_x = 90,3 \text{ cm}^3$.

Kiểm tra lại cường độ của dầm ta có:

$$\begin{aligned} |\sigma_{\min}| &= \frac{200}{18,9 \times 10^{-4}} + \frac{7,5}{90,3 \times 10^{-6}} = 188,87 \times 10^3 (\text{kN/m}^2) \\ &= 188,87 \text{ MN/m}^2 > [\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2 \end{aligned}$$

Trị số $|\sigma_{\min}|$ quá lớn so với $[\sigma]$ ta tiếp tục chọn lại:

Chọn thép I số 16 có $F = 21,5 \text{ cm}^2$ và $W_x = 118 \text{ cm}^3$.

Kiểm tra lại điều kiện cường độ của dầm ta có:

$$\begin{aligned} |\sigma_{\min}| &= \frac{200}{21,5 \times 10^{-4}} + \frac{7,5}{118 \times 10^{-6}} = 156,6 \times 10^3 (\text{kN/m}^2) \\ &= 156,6 \text{ MN/m}^2 < [\sigma] = 160 \text{ MN/m}^2 \end{aligned}$$

$$\Delta\sigma = \frac{160 - 156,6}{160} \times 100\% = 2,1\%$$

Vậy chọn thép I số hiệu N⁰16 là thích hợp.

- **Thí dụ 5.4:** Kiểm tra cường độ của một tường chắn đất xây gạch, chiều cao $h = 3 \text{ m}$, chiều dày $0,64 \text{ m}$ (hình 5.7). Mỗi mét chiều dài của tường chịu một áp lực đẩy của đất $R = 10 \text{ kN}$ đặt ở $1/3$ chiều cao tường kể từ mặt đất lên.

Biết một mét khối tường nặng 16 kN và ứng suất cho phép của tường gạch: $[\sigma_n] = 1 \text{ MN/m}^2$; $[\sigma_k] = 0,1 \text{ MN/m}^2$.

- **Bài giải:** Tường vừa chịu nén do trọng lượng bản thân, vừa chịu uốn do áp lực R của đất. Chúng ta sẽ kiểm tra cho mỗi mét chiều dài của tường. Mặt cắt nguy hiểm là mặt cắt ngang ở chân tường vì về phương diện uốn gây ra do lực đẩy R thì đó là mặt cắt ngàm, còn về phương diện nén thì mặt cắt đó chịu toàn bộ trọng lượng của tường. Tại đó ta có:

$$\text{Mômen uốn } M_x: \quad M_x = R \times \frac{h}{3} = 10^4 \times \frac{3}{3} = 10^4 \text{ Nm}$$

$$\text{Lực nén dọc } N_z: \quad N_z = 1,6 \times 10^4 \times 0,64 \times 3 \times 1 = 3,07 \times 10^4 \text{ N}$$

$$\text{Diện tích } F: \quad F = 1 \times 0,64 = 0,64 \text{ m}^2.$$

$$\text{Môđun chống uốn: } W_x = \frac{1 \times (0,64)^2}{6} = 0,0683 \text{ m}^3$$

Áp dụng công thức (5.13) ta được:

- Đối với cạnh bc:

$$\sigma_{\max} = -\frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{W_x} = -\frac{3,07 \times 10^4}{0,64} + \frac{10^4}{0,0683} = 9,8 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

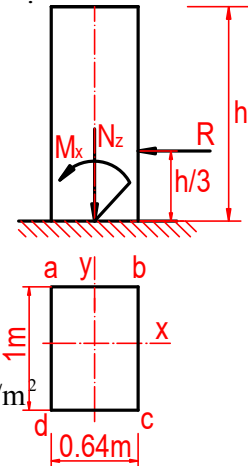
$$\sigma_{\max} = 0,098 \text{ MN/m}^2 < [\sigma_k] = 0,1 \text{ MN/m}^2$$

- Đối với cạnh ad:

$$\sigma_{\min} = -\frac{N_z}{F} - \frac{M_x}{W_x} = (-4,8 - 14,6) \cdot 10^4 = -0,194 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$|\sigma_{\min}| = 0,194 \text{ MN/m}^2 < [\sigma_n] = 1 \text{ MN/m}^2.$$

Vậy tường bảo đảm về cường độ.



Hình 5.7

5.4. Nén (hay kéo) lệch tâm

5.4.1. Khái niệm

Khi một thanh thẳng chịu tác dụng của hai lực trực đối, có phương song song với trục của thanh nhưng đường tác dụng lại không trùng với trục của thanh thì ta nói thanh đó *chịu nén (hay kéo) lệch tâm*. Điểm đặt của lực này không còn trùng với trọng tâm mặt cắt của thanh nữa.

Thí dụ: Một trụ cầu đỡ hai nhịp cầu bằng nhau, khi không tác dụng gì khác ngoài trọng lượng bản thân của hai nhịp cầu thì do tính chất đối xứng ta có thể coi như trụ chịu nén đúng tâm. Nhưng khi có xe chạy trên một nhịp, tính chất đối xứng sẽ mất đi và điểm tác dụng của hợp lực không còn đặt ở trọng tâm mặt cắt của trụ nữa, lúc đó trụ cầu bị nén lệch tâm.

Ở đây chúng ta chỉ xét trường hợp đơn giản, khi lực lệch tâm nằm trong mặt phẳng đối xứng của mặt cắt.

5.4.2. Tính ứng suất

Xét một thanh mặt cắt hình chữ nhật ABCD (hình 5.8) chịu nén bởi một lực P đặt lệch tâm. Lực P đặt tại điểm E trên trục đối xứng Ox của mặt cắt, cách tâm O một đoạn e được gọi là *tâm sai*, muốn đưa hình thức nén lệch tâm này về các hình thức chịu lực cơ bản đã nghiên cứu ở chương trên, chúng ta thu lực P về tâm của mặt cắt. Làm như vậy sẽ được lực P đặt ở O gây ra nén đúng tâm và một ngẫu lực có mômen: $M_y = Pe$ gây ra uốn phẳng trong mặt phẳng xOz.

Qua đó ta thấy rằng nén (kéo) lệch tâm là một trường hợp *đặc biệt của nén (kéo) đồng thời với uốn*.

Vậy công thức tính ứng suất pháp tại một điểm bất kỳ trên mặt của thanh chịu nén (kéo) lệch tâm trục y một đoạn x sẽ là:

$$\sigma = \pm \frac{N_z}{F} \pm \frac{M_y}{J_y} x \quad (5.15)$$

Điều kiện cường độ và ba bài toán cơ bản cũng hoàn toàn giống như trường hợp nén (kéo) đồng thời với uốn.

5.4.3. Trục trung hoà

Trục trung hoà của mặt cắt là một đường mà tại mọi điểm đều có ứng suất pháp σ bằng không và chia mặt cắt thành một miền chịu kéo và một miền chịu nén. Trong trường hợp nén lệch tâm như trên (hình 5.8), để tìm trục trung hoà của mặt cắt thanh chúng ta cho ứng suất pháp σ trong công thức (5.14) bằng không ta sẽ được:

$$-\frac{N_z}{F} + \frac{M_y}{J_y} x_0 = 0$$

(5.16)

Trong đó x_0 là khoảng cách đến trục y của các điểm trên trục trung hoà và ta phải lấy dấu (-) ở số hạng thứ nhất (vì N_z là lực nén) và dấu (+) ở số hạng thứ hai, vì nếu hai số hạng đều âm thì tổng đại số của chúng không thể bằng không được.

Như vậy trục trung hoà phải ở phía mà mômen uốn M_y sinh ra ứng suất kéo. Theo hình (5.8) trục trung hoà ở phía bên trái trục y, nghĩa là trục trung hoà và lực P phải ở hai phía khác nhau đối với trục y.

Từ biểu thức (5.15) có thể viết:

$$-\frac{N_z}{F} + \frac{M_y}{\frac{J_y}{F}} x_0 = 0 \quad (5.17)$$

$$\text{Vì:} \quad \frac{J_y}{F} = i_y^2 \quad (5.18)$$

(i_y là bán kính quán tính của mặt cắt F đối với trục quán tính chính trung tâm y);

$$N_z = P; \quad M_y = Pe$$

$$\text{Ta có:} \quad -\frac{P}{F} + \frac{P \times e}{F \times i_y^2} x_0 = 0, \text{ hay: } -\frac{P}{F} \left(1 - \frac{e}{i_y^2} x_0 \right) = 0$$

$$\text{Vì:} \quad -\frac{P}{F} \neq 0, \text{ nên } 1 - \frac{e}{i_y^2} x_0 = 0. \text{ Do đó: } x_0 = \frac{i_y^2}{e} = \text{hằng số.}$$

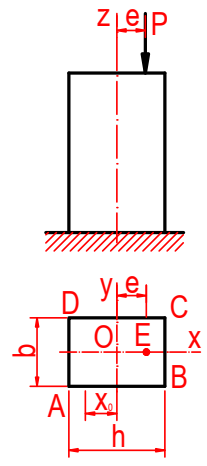
Vậy trục trung hoà là một đường thẳng song song với trục y và cách trục y một đoạn cố định bằng: $\frac{i_y^2}{e}$.

Đối với một mặt cắt đã cho thì i_y không đổi, nên ta thấy vị trí của trục trung hoà phụ thuộc vào tâm sai e.

Tâm sai e càng nhỏ thì khoảng cách x_0 càng lớn, có nghĩa là phần diện tích chịu nén càng lớn. Vậy có thể trục trung hoà nằm ngoài mặt cắt và như vậy trên mặt cắt chỉ phát sinh ứng suất nén mà thôi.

5.4.4. Lõi của mặt cắt

Đối với một số kết cấu chịu nén lệch tâm làm bằng vật liệu giòn như gạch, đá, bê tông khả năng chịu kéo kém hơn rất nhiều so với khả năng chịu nén, nên để tránh những bất trắc có thể xảy ra đối với kết cấu thì tốt hơn hết là định trị số tâm sai e sao cho trên mặt cắt không phát sinh ứng suất kéo. Chúng ta có thể giới hạn được vị trí của điểm đặt lực P trong



Hình 5.8

một khu vực nào đó của mặt cắt, để trên mặt cắt đó không sinh ra ứng suất kéo. Khu vực đó được gọi là *lõi của mặt cắt*.

Như vậy: *Lõi của mặt cắt là phạm vi mặt cắt khi đặt lực trên đó toàn bộ mặt cắt chỉ có ứng suất nén (không phát sinh ứng suất kéo)*.

Ta sẽ nghiên cứu hai trường hợp: lõi của mặt cắt tròn và lõi của mặt cắt hình chữ nhật.

a. *Lõi của mặt cắt tròn (hình 5.9):*

Muốn có trị số tối đa của tâm sai e sao cho trên mặt cắt tròn không có ứng suất kéo, ta phải cho trục trung hoà tiếp tuyến với đường tròn, nghĩa là lấy:

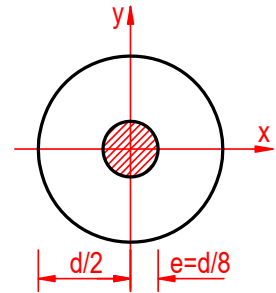
$$x_0 = r = \frac{d}{2}$$

Mặt khác, ta đã biết phương trình của trục trung hoà (5.16) là:

$$x_0 = \frac{i_y^2}{e} \quad (5.19)$$

$$\text{Vì:} \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{\pi d^4}{64} \times \frac{4}{\pi d^2} = \frac{d^2}{16}, \text{ nên từ công thức trên ta suy ra: } e = \frac{d}{8}.$$

Từ tâm O của mặt cắt vẽ đường tròn có bán kính bằng tâm sai $e = \frac{d}{8}$ đường tròn đó được gọi là *chu vi lõi* của mặt cắt tròn. Thật vậy, nếu điểm đặt của lực P không vượt ra ngoài phạm vi của mặt cắt giới hạn bởi đường tròn có bán kính $e = \frac{d}{8}$ thì trục trung hoà phải nằm ngoài hoặc tiếp tuyến với mặt cắt tròn đã cho, do đó trên mặt cắt không thể có ứng suất kéo.



Hình 5.9

b. *Lõi của mặt cắt hình chữ nhật (hình 5.10):*

Khi lực P đặt trên trục x về phía trên của trục y và muốn trên mặt cắt không có ứng suất kéo thì vị trí gần nhất của trục trung hoà đối với tâm O phải trùng với cạnh AD do đó: $x_0 = \frac{h}{2}$. Phương trình của

trục trung hoà theo (5.19) là:

$$x_0 = \frac{i_y^2}{e} \quad \text{vì:} \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{bh^3}{12} \times \frac{1}{bh} = \frac{h^2}{12}.$$

Nên từ phương trình của trục trung hoà ta được:

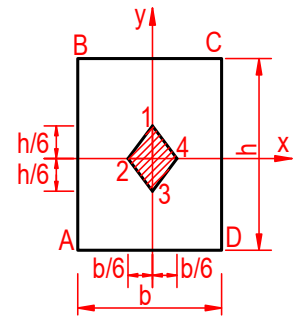
$$e = \frac{h}{6}.$$

Nghĩa là P phải đặt ở điểm 1. Khi lực P đặt trên trục x ở về phía dưới của trục y thì do tính chất đối xứng ta được điểm 3 cũng có tâm sai $e = \frac{h}{6}$.

Cũng lý luận như trên khi lực P đặt trên trục y thì ta được điểm 2 và điểm 4 có tâm sai:

$$e = \frac{b}{6}.$$

Bốn điểm 1, 2, 3, 4 trên hình vẽ (5.10) là bốn điểm nằm trên chu vi của lõi mặt cắt hình chữ nhật. Người ta đã chứng minh được rằng lõi của mặt cắt hình chữ nhật chính là hình thoi 1, 2, 3, 4 có cùng trọng tâm với hình chữ nhật và đường chéo của nó thì song song và bằng 1/3 cạnh tương ứng của hình chữ nhật.



Hình 5.10

- **Thí dụ 5.5:** Một cột bê tông mặt cắt phía dưới là một hình chữ nhật kích thước $(0,18 \times 0,20) \text{ m}^2$. Cột chịu một lực nén $P = 6 \text{ kN}$ như hình 5.11.

Kiểm tra cường độ của cột, biết ứng suất cho phép của bê tông là: $[\sigma_k] = 0,6 \text{ MN/m}^2$; $[\sigma_n] = 0,7 \text{ MN/m}^2$. Bỏ qua trọng lượng bản thân của cột.

- **Bài giải:** Cột bê tông chịu nén lệch tâm do lực P. Mặt cắt nguy hiểm là mặt cắt qua phần cột phía dưới. Tại đó có lực nén: $N_z = P = 6 \text{ kN}$, mômen uốn đối với trục y do lực lệch tâm gây ra $M_y = P \cdot e = 6 \cdot (0,1 + 0,05) = 0,9 \text{ kNm}$. Diện tích mặt cắt phần dưới của cột :

$$F = 0,18 \cdot 0,2 = 0,036 \text{ m}^2$$

Môđun chống uốn của mặt cắt đó đối với trục y:

$$W_y = 0,18 \times \frac{0,2^2}{6} = 0,012 \text{ m}^3$$

Trên mặt cắt nguy hiểm sẽ phát sinh ứng suất:

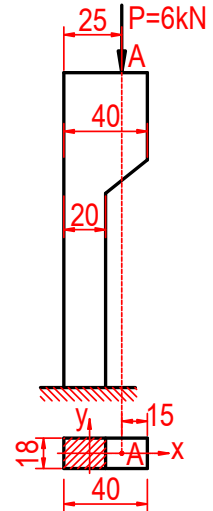
$$\sigma_{\max} = \frac{N_z}{F} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{6}{0,036} + \frac{0,9}{0,012}$$

$$= 58,3 \text{ kN/m}^2 = 0,583 \text{ MN/m}^2 < [\sigma_k] = 0,6 \text{ MN/m}^2$$

$$|\sigma_{\min}| = \left| -\frac{N_z}{F} - \frac{M_y}{W_y} \right| = \left| -\frac{6}{0,036} - \frac{0,9}{0,012} \right| = 916 \text{ kN/m}^2$$

$$|\sigma_{\min}| = 0,916 \text{ MN/m}^2 < [\sigma_n] = 7 \text{ MN/m}^2$$

Như vậy cột bê tông đảm bảo về cường độ.



Hình 5.11

- **Thí dụ 5.6:** Một cột mặt cắt hình tròn đường kính $d = 0,4 \text{ m}$ chịu nén lệch tâm với tâm sai $e = 0,03 \text{ m}$. Hỏi trong mặt cắt có ứng suất kéo không?

- **Bài giải:** Vì bán kính lõi của mặt cắt tròn bằng: $\frac{d}{8} = \frac{0,4}{8} = 0,05 \text{ m}$, nên tâm sai $e = 0,03$

$m < \frac{d}{8}$ nghĩa là lực nén tác dụng trong lõi của mặt cắt, do đó trên mặt cắt của cột không có ứng suất kéo.

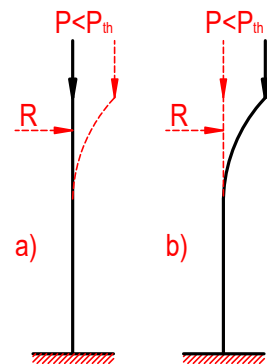
5.5. Uốn dọc

5.5.1. Khái niệm:

Khi nghiên cứu trường hợp nén đúng tâm ta giả thiết bằng kích thước ngang và chiều dài thanh không khác nhau nhiều và dựa vào tính chất biên dạng của thanh ta đã thiết lập được các công thức tính toán. Nhưng nếu kích thước ngang của thanh nhỏ hơn rất nhiều so với chiều dài thì hiện tượng nén đúng tâm của thanh có thể chuyển thành hiện tượng uốn dọc.

Xét một thanh thẳng dài chịu nén đúng tâm bởi một lực P có trị số tăng dần dần từ không. Dưới tác dụng của lực đó, đầu tiên thanh chỉ bị nén và trục của nó vẫn giữ thẳng. Giả sử tác dụng vào thanh một lực ngang R mà thanh trở về dạng thẳng ban đầu, thì khi đó nói rằng thanh chịu nén ở *trạng thái ổn định* (hình 5.12a). Tiếp tục tăng lực nén P lên ta thấy lực này có thể đạt tới một trị số sao cho sau khi bỏ lực ngang R gây ra sự uốn cong, thanh không thể trở lại dạng thẳng ban đầu mà vẫn bị uốn cong (dạng cong trên hình 5.12b). Lúc đó ta nói thanh chịu nén ở *trạng thái mất ổn định*.

Thường trong thực tế, không cần có sự tác động của lực R mà chỉ cần lực nén P vượt quá trị số đã nói ở trên thì thanh cũng sẽ bị mất ổn định và trục của thanh sẽ bị uốn cong. Đó là vì ngoài lực ngang R ra, còn có thể có những nguyên nhân khác khó tránh được trong thực tế, có khả năng làm cho trục thanh bị uốn cong. Thí dụ: sự lệch tâm của lực nén P, độ cong ban đầu của trục thanh...



Hình 5.12

Biến dạng của thanh có kèm theo sự uốn cong của trục thanh dưới tác dụng của lực nén dọc được gọi là uốn dọc.

Trị số nén làm cho thanh chuyển từ trạng thái ổn định sang trạng thái mất ổn định được gọi là lực tới hạn và ký hiệu là P_{th} . Muốn cho những thanh bị nén đúng tâm làm việc được bình thường, thí dụ đối với những cột nhà, thanh cầu... thì phải đảm bảo sao cho trục của chúng vẫn giữ được thẳng. Sự mất ổn định của một thanh trong công trình sẽ dẫn đến sự phá hoại của một bộ phận hay toàn bộ công trình đó. Vì vậy, khi tính toán các cấu kiện này ta phải tính lực tới hạn P_{th} để sao cho chúng được làm việc với những tải trọng bé hơn lực tới hạn đó, tức là có đủ độ ổn định cần thiết. Ngoài hiện tượng mất ổn định của thanh thẳng chịu nén đúng tâm còn có thể xảy ra hiện tượng mất ổn định của thanh khi chịu những hình thức chịu lực khác.

Do đó, ngoài điều kiện cường độ và điều kiện cứng ra thì điều kiện ổn định cũng cần phải đặc biệt chú ý trong khi tính toán sự chịu lực của các công trình.

5.5.2. Tính lực tới hạn và ứng suất tới hạn

Việc giải bằng lý thuyết bài toán tính lực tới hạn cho một thanh thẳng bị nén đúng tâm có chiều dài l , mặt cắt không đổi và có liên kết ở hai đầu là những bản lề (hình 5.13a) đã được nhà bác học Öle thực hiện năm 1744 bằng cách dựa vào phương trình vi phân của đường đàn hồi của thanh khi bị mất ổn định.

Công thức tính lực tới hạn do Öle tìm ra gọi là công thức Öle. Để mở rộng cho những trường hợp thanh có những loại liên kết không phải là liên kết bản lề ở hai đầu (hình 5.13b,c,d). Công thức Öle được viết dưới dạng tổng quát sau:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(ml)^2} \quad (5.20)$$

Trong đó:

E- môđun đàn hồi khi chịu lực kéo (hoặc nén) của vật liệu.

J_{min} - mômen quán tính chính trung tâm nhỏ nhất của mặt cắt.

l - chiều dài của thanh.

m - hệ số phụ thuộc vào điều kiện liên kết ở hai đầu thanh.

Từ đó ta có:

a) Nếu thanh có cả 2 đầu bắt bản lề, $m = 1$:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (5.21)$$

b) Nếu thanh có một đầu ngàm và đầu kia tự do, $m = 2$:

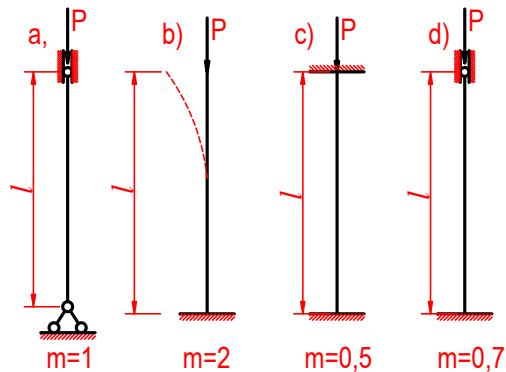
$$P_{th} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{4l^2} \quad (5.22)$$

c) Nếu thanh có cả hai đầu ngàm, $m = 0,5$:

$$P_{th} = \frac{4\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (5.23)$$

d) Nếu thanh có một đầu ngàm, còn đầu kia bắt bản lề, $m = 0,7$:

$$P_{th} = \frac{9\pi^2 EJ_{min}}{4l^2} \quad (5.24)$$



Hình 5.13

Trong công thức của lực tới hạn nêu ở trên, ta dùng J_{min} vì nếu mômen quán tính đối với hai trục chính trung tâm của mặt cắt không bằng nhau, thì sự uốn dọc sẽ xảy ra trong mặt phẳng có độ cứng bé nhất, tức là các mặt cắt của thanh sẽ xoay quanh trục chính trung tâm nào mà đối với nó mômen quán tính của mặt cắt có giá trị nhỏ nhất J_{min} .

Thí dụ: Đối với thanh bị ngàm có mặt cắt chữ nhật như hình 5.14 thì lúc mất ổn định các mặt cắt của thanh sẽ xoay quanh trục y (vì $J_y < J_x$) và trục cong của nó sẽ nằm trong mặt phẳng xOz và mặt phẳng có độ cứng bé nhất của thanh. Hiện tượng nói trên chỉ xảy ra đối với thanh có dạng liên kết giống nhau trong hai mặt phẳng xOz và yOz , do đó khi sử dụng công thức (5.21) cần chú ý đến điều kiện này.

Bây giờ ta thiết lập công thức của ứng suất trên mặt cắt thanh khi bắt đầu xảy ra hiện tượng uốn dọc. Lúc này lực nén P vừa đạt đến trị số tới hạn P_{th} và thanh được xem là vẫn cong thẳng, nghĩa là vẫn còn chịu nén đúng tâm. Vậy ứng suất trên mặt cắt thanh lúc đó gọi là *ứng suất tới hạn* và ký hiệu là σ_{th} sẽ là (chỉ cần xét trị số tuyệt đối):

$$\sigma_{th} = \frac{N_z}{F} = \frac{P_{th}}{F} = \frac{\pi E J_{min}}{(ml)^2 F} \quad (5.25)$$

Hay:

(5.26)

Trong đó:

$$\lambda = \frac{ml}{\sqrt{\frac{J_{min}}{F}}} = \frac{ml}{i_{min}} \quad (5.27)$$

λ - gọi là *độ mảnh* của thanh (nó là một số không thứ nguyên).

i_{min} - là bán kính quán tính nhỏ nhất của mặt cắt.

Phân tích công thức (5.27) ta đi đến kết luận rằng: *Độ mảnh của thanh càng lớn thì ứng suất tới hạn càng bé và lực nén gây ra hiện tượng uốn dọc của thanh cũng sẽ càng bé, nghĩa là thanh càng dễ mất ổn định.*

5.5.3. Phạm vi sử dụng công thức Ole - công thức Iaxinki:

Khi chứng minh công thức lực tới hạn, Ole phải giả thiết rằng vật liệu của thanh lúc mất ổn định vẫn tuân theo định luật Húc, vì vậy tất cả các công thức trên chỉ đúng được trong giai đoạn tỉ lệ của vật liệu. Vậy giới hạn áp dụng công thức Ole được xác định từ điều kiện ứng suất tới hạn σ_{th} trong thanh phải nhỏ hơn hay tối đa bằng giới hạn tỉ lệ σ_{tl} của vật liệu thanh:

$$\sigma_{th} \leq \sigma_{tl} \quad (5.28)$$

Thay σ_{th} bởi biểu thức (5.20) ta được:

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \geq \sigma_{tl} \quad (5.29)$$

Suy ra:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} \quad (5.30)$$

Đặt

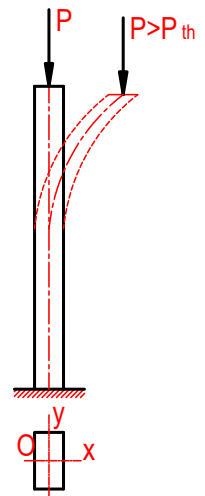
$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{tl}}} \quad (5.31)$$

λ_0 - là độ mảnh của thanh có ứng suất tới hạn bằng giới hạn tỉ lệ của vật liệu thanh và gọi là *độ mảnh giới hạn*.

Vậy, muốn áp dụng công thức Ole để tính lực tới hạn (hoặc ứng suất tới hạn) cho một thanh nào đó thì độ mảnh λ của thanh này tính theo công thức (5.30) phải không được bé hơn độ mảnh giới hạn λ_0 tương ứng, tức là giới hạn áp dụng công thức Ole sẽ là: $\lambda \geq \lambda_0$.

Ta hãy tính độ mảnh giới hạn λ_0 đối với một số vật liệu:

- Thép số 3 có $E = 2.10^5 \text{ MN/m}^2$ và $\sigma_{th} = 200 \text{ MN/m}^2$ nên:



Hình 5.14

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 2 \times 10^5}{200}} = 100.$$

- Gang thường có $\lambda_0 = 80$.

- Gỗ thường có $\lambda_0 = 110$.

Vậy thông thường công thức Ole chỉ áp dụng được cho thanh bằng gang khi độ mảnh $\lambda > 80$, bằng thép khi $\lambda > 100$ và bằng gỗ khi $\lambda > 110$.

Trong thực tế ta hay gặp những thanh có độ mảnh λ nhỏ hơn những trị số giới hạn của λ_0 nói trên. Trong trường hợp này, lúc thanh bị mất ổn định thì ứng suất σ trong thanh sẽ vượt quá giới hạn tỉ lệ σ_{ti} của vật liệu thanh. Muốn tính ứng suất tới hạn và từ đó suy ra lực tới hạn của những thanh đó, ta phải dùng công thức do Iaxinki thiết lập được từ thực nghiệm. Công thức này được gọi là công thức Iaxinki có dạng như sau:

$$\sigma_{th} = a - b\lambda$$

Trong đó: λ - độ mảnh của thanh tính theo (5-30)

a, b - những hệ số phụ thuộc vào loại vật liệu.

Thí dụ: - Đối với thép số 3 có thể lấy: $a = 310 \text{ MN/m}^2$ và $b = 1,14 \text{ MN/m}^2$.

- Đối với gỗ: $a = 29,3 \text{ MN/m}^2$ và $b = 0,194 \text{ MN/m}^2$.

Thông thường đối với những thanh chịu nén đúng tâm có độ mảnh $\lambda < 40$ thì thực nghiệm cho thấy rằng ta có thể xem thanh không thể bị mất ổn định và chỉ cần tính toán về cường độ mà không cần tính về ổn định.

5.5.4. Tính toán về ổn định

Muốn cho một thanh chịu nén đúng tâm không bị uốn dọc (mất ổn định) thì lực nén thanh cần thiết phải bé hơn lực tới hạn, nghĩa là xem lực tới hạn là lực phá huỷ thanh. Lúc đó ứng suất σ trong thanh tất nhiên phải nhỏ hơn ứng suất tới hạn σ_{th} vậy điều kiện để thanh được ổn định sẽ là:

$$\sigma \leq \sigma_{th}$$

Hay để đảm bảo an toàn thì:

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{th}}{k} \quad (5.32)$$

Trong đó: k - hệ số an toàn về ổn định.

Đối với các kết cấu bằng gang người ta lấy $k = 546$, bằng thép $k = 244$, bằng gỗ $k = 347$.

Nếu đặt: $\frac{\sigma_{th}}{k} = [\sigma]_{\text{ổđ}}$ (gọi là ứng suất cho phép ổn định), đồng thời thay:

$$\sigma = \frac{P}{F} \quad \text{ta được:} \quad \sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma]_{\text{ổđ}} \quad (5.33)$$

Công thức (5.33) là điều kiện ổn định của thanh chịu nén đúng tâm.

Từ công thức (5.33) ta thấy: muốn tính ứng suất cho phép và ứng suất cho phép ổn định $[\sigma]_{\text{ổđ}}$ thì trước hết phải tính trị số của ứng suất tới hạn σ_{th} theo công thức Ole (5.20) hoặc công thức Iaxinki (5.28) tùy theo độ mảnh của thanh nằm trong phạm vi nào.

Tuy nhiên nhiều khi áp dụng các công thức đó không thuận tiện. Vì vậy, để thay cho công thức đó người ta thường hay tính ứng suất cho phép về ổn định theo công thức sau đây, có thể dùng cho bất kỳ trị số nào của độ mảnh λ :

$$[\sigma]_{\text{ổđ}} = \omega[\sigma_n] \quad (5.34)$$

Trong đó:

- $[\sigma_n]$: ứng suất cho phép về nén.

- ω : hệ số giảm ứng suất cho phép (hay hệ số uốn dọc) có trị số luôn luôn nhỏ hơn 1.

Trị số ω phụ thuộc vào vật liệu, độ mảnh của thanh và được xác định theo bảng đã nạp sẵn (bảng 5.1). Đối với những trị số trung gian của độ mảnh không có trong bảng thì hệ số ω được xác định bằng cách nội suy bậc nhất.

Vậy theo (5.33) điều kiện ổn định sẽ được viết lại như sau:

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi[\sigma_n] \quad (5.35)$$

Bảng 5.1. Hệ số giảm ứng suất cho phép ω

| Độ mảnh $\lambda = \frac{ml}{i_{\min}}$ | Trị số ω đối với | | | |
|--|-------------------------|-----------|------|------|
| | Thép số 4, 3, 2, OC | Thép số 5 | Gang | Gỗ |
| 0 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |
| 10 | 0,99 | 0,98 | 0,97 | 0,99 |
| 20 | 0,96 | 0,95 | 0,91 | 0,97 |
| 30 | 0,94 | 0,92 | 0,81 | 0,93 |
| 40 | 0,92 | 0,89 | 0,69 | 0,87 |
| 50 | 0,89 | 0,86 | 0,57 | 0,80 |
| 60 | 0,86 | 0,82 | 0,44 | 0,71 |
| 70 | 0,81 | 0,76 | 0,34 | 0,60 |
| 80 | 0,75 | 0,70 | 0,26 | 0,48 |
| 90 | 0,69 | 0,62 | 0,20 | 0,38 |
| 100 | 0,60 | 0,51 | 0,16 | 0,31 |
| 110 | 0,52 | 0,43 | - | 0,25 |
| 120 | 0,45 | 0,36 | - | 0,22 |
| 130 | 0,40 | 0,33 | - | 0,18 |
| 140 | 0,36 | 0,29 | - | 0,16 |
| 150 | 0,32 | 0,26 | - | 0,14 |
| 160 | 0,29 | 0,24 | - | 0,12 |
| 170 | 0,26 | 0,21 | - | 0,11 |
| 180 | 0,23 | 0,19 | - | 0,10 |
| 190 | 0,21 | 0,18 | - | 0,09 |
| 200 | 0,19 | 0,17 | - | 0,08 |

Dùng hệ số ω ta có thể giải bài toán ổn định tương tự như bài toán nén đúng tâm đơn giản. Trong đó ứng suất cho phép được giảm theo một mức độ nào đó tùy theo trị số độ mảnh của thanh. Từ đó ta thấy, nếu điều kiện ổn định của thanh được đảm bảo thì điều kiện cường độ của nó sẽ được đảm bảo. Đối với những thanh mà tại một số nơi, mặt cắt của chúng bị làm yếu cục bộ (bởi những lỗ rivê, bulông...) thì khi tính về ổn định ta vẫn coi như mặt cắt không có lỗ khuyết. Nhưng lúc này phải kiểm tra thêm mặt cắt bị giảm yếu cục bộ.

Từ công thức cơ bản tính toán về ổn định (5.35). Ta có thể suy ra ba loại bài toán về ổn định sau:

a) *Kiểm tra sự ổn định của thanh*: khi đã biết lực nén P, mặt cắt F, chiều dài và điều kiện liên kết ở hai đầu thanh. Ta sẽ nghiệm lại BĐT (5.35).

b) *Xác định tải trọng cho phép*: khi đã biết ứng suất cho phép về nén σ_n , mặt cắt F, chiều dài và điều kiện liên kết ở hai đầu thanh ta có:

$$P \leq F\omega[\sigma_n]$$

c) *Chọn mặt cắt*: khi ta cho lực nén P, ứng suất cho phép về nén $[\sigma_n]$, hình dáng mặt cắt, chiều dài và điều kiện liên kết ở hai đầu thanh ta có:

$$F \geq \frac{P}{\varphi[\sigma_n]}$$

Đối với loại bài toán thức ba, cách giải quyết tương đối phiền phức vì có hai trị số F và ω chưa biết mà chỉ có một phương trình để giải ta sẽ dùng phương pháp đúng dần (được trình bày ở thí dụ 5.8).

- **Thí dụ 5.7:** Kiểm tra ổn định cho một cột gỗ chịu nén đúng tâm với lực nén $P = 360$ kN, chiều dài 3 m, coi như hai đầu cột bị bắt bản lề, mặt cắt của cột là tròn với đường kính $d = 0,24$ m, ứng suất cho phép về nén $[\sigma_n] = 10$ MN/m²

- **Bài giải:** Thanh hai đầu liên kết bản lề nên $m = 1$. Độ mảnh của hai thanh là:

$$\lambda = \frac{ml}{i_{\min}}$$

$$\text{Với: } i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \times \frac{4}{\pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{0,24}{4} = 0,06 \text{ m.} \quad \text{Vậy: } \lambda = \frac{1 \times 3}{0,6} = 50.$$

Theo bảng 5.1 ứng với $\lambda = 50$ của gỗ có $\omega = 0,80$:

$$\sigma = \frac{P}{F} = \frac{360}{\frac{3,14 \times 0,24^2}{4}} = 796,28 \text{ kN/m}^2 \approx 7,963 \text{ MN/m}^2$$

Ta có: $\varphi[\sigma_n] = 0,8 \times 10 = 8 \text{ MN/m}^2$. Vậy: $\sigma < \varphi[\sigma_n]$ - cột gỗ đảm bảo ổn định.

- **Thí dụ 5.8:** Chọn số hiệu thép chữ I cho một thanh dài 2m, liên kết khớp ở hai đầu và chịu một lực nén $P = 230$ kN. Biết vật liệu là thép số 2 có $[\sigma] = 140$ MN/m².

- **Bài giải:** Chọn mặt cắt F bằng phương pháp đúng dần. Đầu tiên ta lấy một trị số ω tùy ý, vì ω biến thiên từ 0 đến 1 nên tính gần đúng lần thứ nhất lấy $\omega_1 = 0,5$. Từ điều kiện ổn định (5.35) ta tính được tích F :

$$F \geq \frac{P}{[\sigma]\varphi_1} = \frac{230}{140 \times 10^3 \times 0,5} = 32,8 \times 10^{-4} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Tra bảng thép hình ta chọn thép chữ I số 22a với $F = 32,4 \text{ cm}^2$:

$$i_y = i_{\min} = 2,5 \text{ cm}$$

Vì hệ số ω_1 lấy trên không kể đến đặc điểm của thanh (điều kiện liên kết, chiều dài...) nên với mặt cắt đã chọn, điều kiện ổn định của thanh chưa được thỏa mãn theo điều kiện bài toán. Vậy ta phải nghiệm lại điều kiện ổn định. Độ mảnh của thanh:

$$\lambda = \frac{ml}{i_{\min}} = \frac{1 \times 2}{2,5 \times 10^{-2}} = 80$$

Tra bảng phụ lục với thép số 2, $\lambda = 80$ ta được $\omega_2 = 0,75$. Lực nén cho phép về ổn định:

$$[P] = F \times \omega_2 \times [\sigma] = 32,4 \times 10^{-4} \times 0,75 \times 140 \cdot 10^3 = 340,2 \text{ kN.}$$

Lực này lớn hơn lực đã cho hơn một lần rưỡi.

Vậy mặt cắt thép chữ I số hiệu N⁰22a chưa được sử dụng hết, để tiết kiệm ta chọn mặt cắt có diện tích nhỏ hơn. Theo bảng thép hình ta có thể chọn thép chữ I có diện tích nhỏ hơn và sau đó kiểm tra lại điều kiện ổn định, nếu thép được chọn lần thứ hai vẫn không phù hợp thì ta lại lấy thép chữ I có số hiệu nhỏ hơn, và cứ tiếp tục như thế cho đến khi chọn được thép chữ I có mặt cắt phù hợp, nghĩa là vừa thỏa mãn được điều kiện ổn định vừa tiết kiệm nhất.

Làm như vậy, thông thường sẽ rất chậm mới đi đến kết quả cuối cùng. Theo kinh nghiệm tính toán, muốn đi đến kết quả nhanh chóng ta nên lấy một trị số mới ω_3 là trung bình cộng của ω_1 và ω_2 và làm lại các phép tính:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

Vậy lần gần đúng thứ hai ta có: $\varphi_3 = \frac{0,5 + 0,75}{2} = 0,625$

Từ đó ta tính được: $F \geq \frac{230}{0,625 \times 140 \times 10^3} = 2,62 \times 10^{-4} (\text{m}^2)$.

Tra bảng thép ta chọn thép chữ I số 20 có: $F = 26,4 \text{ cm}^2$ và $i_{\min} = 2,06 \text{ cm}$.

Độ mảnh của thanh: $\lambda = \frac{1 \times 2}{2,06 \times 10^{-2}} = 97$

Tra bảng (5.1) và nội suy, ta tìm hệ số ω ứng với $\lambda = 97$:

$$\varphi_4 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \times 7 = 0,627$$

Lực nén cho phép về ổn định là:

$$[P] = 0,627 \times 26,4 \times 10^4 \times 140 \times 10^3 = 231,7 \text{ kN}.$$

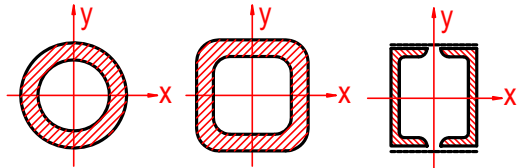
Tức là lớn hơn tải trọng đã cho:

$$\Delta P = \frac{231,7 - 230}{230} \times 100\% = 0,7\% < 5\%$$

Vậy ta chọn thép chữ I số 20 là thích hợp.

5.5.5. Mặt cắt hợp lý của thanh

Ta hãy nghiên cứu các dạng hợp lý của mặt cắt thanh để khi chịu nén đúng tâm thanh có khả năng ổn định tốt nhất. Như ta đã nói trên, khi mặt ổn định thanh sẽ bị uốn theo phương có độ cứng bé nhất mà mặt cắt có bán kính quán tính càng bé thì độ mảnh của thanh sẽ càng lớn, làm cho thanh càng dễ mất ổn định. Từ đó rút ra các yêu cầu về mặt cắt hợp lý như sau:



Hình 5.15

1. Mômen quán tính của mặt cắt đối với các trục chính trung tâm phải bằng nhau. Như vậy thanh sẽ có độ mảnh như nhau theo tất cả các phương trình và tính ổn định của nó theo mọi phương cũng sẽ giống nhau.

2. Với một trị số diện tích mặt cắt đã cho, ta phải chọn hình dáng mặt cắt sao cho mômen quán tính của nó được lớn. Muốn vậy vật liệu của mặt cắt phải được bố trí xa trọng tâm của nó.

Yêu cầu trên hoàn toàn được thỏa mãn nếu ta dùng những mặt cắt rỗng hình tròn, hình vuông hoặc do những thép hình I, [, L ghép lại (hình 5.15). Nhưng ta cũng cần chú ý rằng đối với thanh thép ta phải đảm bảo sao cho nó được ghép rất chắc chắn bởi những thanh giằng hoặc tấm nối. Khi đó thanh ghép mới làm việc được như một thanh nguyên.

- **Thí dụ 5.9:** Một cột ghép bởi hai thanh thép chữ [số 27 theo như hình 5.16. Hãy tính khoảng cách $2x$ giữa hai lưng thép chữ [để cho mặt cắt đó là hợp lý nhất về mặt ổn định.

- **Bài giải:** Gọi J_x và J_y là mômen quán tính của mặt cắt đã được ghép đối với các trục chính trung tâm x và y :

Ta có: $J_x = 2J_{x_0}$ (trục x và x_0 trùng nhau).

$$J_y = 2[J_{y_0} + (x + z_0)^2 F]$$

Với thép chữ [số hiệu N⁰27 tra bảng ta được:

$$J_{x_0} = 4160 \text{ cm}^4$$

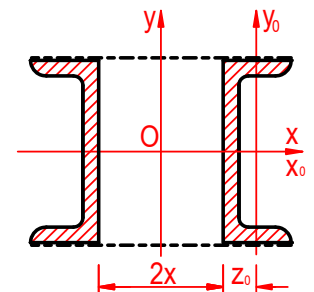
$$J_{y_0} = 262 \text{ cm}^4$$

$$z_0 = 2,47 \text{ cm}$$

$$F = 35,2 \text{ cm}^2$$

Để cho mặt cắt là hợp lý nhất về mặt ổn định thì:

$$J_x = J_y \Leftrightarrow 2J_{x_0} = 2[J_{y_0} + (x + z_0)^2 F]$$



Hình 5.16

$$\Leftrightarrow 4160 = 262 + (x + 2,47)^2 \times 35,2$$

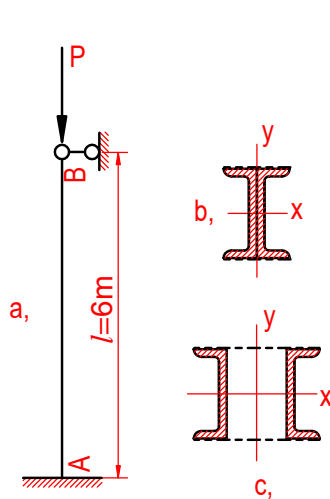
$$\Rightarrow (x + 2,47)^2 = 110,74. \Rightarrow x \approx 8 \text{ cm} \Rightarrow 2x = 16 \text{ cm.}$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

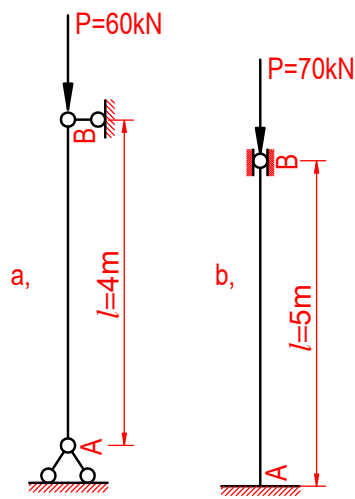
1. Mô tả hiện tượng mất ổn định của thanh thẳng chịu nén đúng tâm, từ đó nêu định nghĩa về lực tới hạn?
2. Ứng suất tới hạn là gì? Viết và giải thích công thức tính lực tới hạn Olev?
3. Độ mảnh là gì? Viết và giải thích công thức? Ý nghĩa của độ mảnh?

BÀI TẬP

1. Tính lực tới hạn của thanh có chiều dài $l = 3,2 \text{ m}$, liên kết ở hai đầu thanh là liên kết khớp. Thanh bằng thép chữ I số hiệu N⁰24a, môđun đàn hồi của thanh $E = 2.10^6 \text{ daN/cm}^2$.
2. Tính lực tới hạn cho cột dài $l = 2,7 \text{ m}$ liên kết ở hai đầu là liên kết khớp. Cột bằng thép số 3.
 - a. Đường kính cột là $d = 12 \text{ cm}$.
 - b. Cột có tiết diện ngang hình vành khăn cùng tiết diện như câu a và có $\alpha = d/D = 0,6$.
3. Kiểm tra độ ổn định của thanh chịu nén $l = 1,5 \text{ m}$ liên kết một đầu ngàm một đầu khớp, lực nén ở đầu khớp $P = 12 \text{ kN}$ mặt cắt ngang hình vành khăn đường kính trong $d = 2 \text{ cm}$, đường kính ngoài $D = 2,8 \text{ cm}$, thanh bằng thép số 5 có $[\sigma] = 2000 \text{ daN/cm}^2$.
4. Xác định tải trọng cho phép $[P]$ của một cột bằng thép số 3 có $[\sigma]_n = 1600 \text{ daN/cm}^2$. Mặt cắt ngang cột gồm hai thép chữ [số hiệu N⁰16 (hình 5.17):
 - a. Hai thép đặt sát lưng vào nhau.
 - b. Hai thép đặt sao cho $J_x = J_y$.
8. Xác định kích thước mặt cắt ngang của một cột gỗ (hình vẽ 5.18), biết $[\sigma]_n = 100 \text{ daN/cm}^2$, $E = 10^5 \text{ daN/cm}^2$:
 - a. Cột có mặt cắt ngang hình vuông cạnh là a .
 - b. Cột có tròn đặc đường kính là d .



Hình 5.17



Hình 5.18

Phụ lục 1
BẢNG CHỮ CÁI VÀ CÁC KÍ TỰ THƯỜNG GẶP

| Chữ La Tinh | | Chữ Hy Lạp | | |
|-------------|---------|------------|---------|---------|
| Chữ thường | Chữ hoa | Chữ thường | Chữ hoa | Tên chữ |
| a | A | □ | A | Alpa |
| b | B | □ | B | Bêta |
| c | C | □ | X | Khi |
| d | D | □ | Δ | Đelta |
| e | E | □ | E | Epxilon |
| f | F | □ | Φ | Phi |
| g | G | □ | Γ | Gama |
| h | H | □ | H | Êta |
| j | J | □ | ϑ | Phi |
| l | L | □ | Λ | Lamđa |
| m | M | □ | M | Muy |
| n | N | □ | N | Nuy |
| p | P | □ | Π | Pi |
| q | Q | □ | Θ | Têta |
| r | R | □ | P | Rô |
| s | S | □ | Σ | Xichma |
| t | T | □ | T | Tô |
| w | W | □ | Ω | Ômêga |
| x | X | □ | Ξ | Cxi |
| y | Y | □ | Ψ | Phờ xi |
| z | Z | □ | Z | Đêta |

Bảng 1.2
NHỮNG ĐƠN VỊ ĐO THƯỜNG GẶP

| Đơn vị đo | Đơn vị thường gặp | | Đơn vị Anh | | |
|-----------------|-------------------|---------------|------------|---------------------------|-----------------------|
| | Ký hiệu | Tên gọi | Ký hiệu | Tên gọi | Đổi ra SI |
| Chiều dài | km | Kilômét | Mile | Mile (dặm) | 1609m |
| | m | Mét | yd | Yard (mã) | 0,9144m |
| | dm | Đềximét | ft | Foot (bộ) | 0,3048m |
| | cm | Xentimét | in | Inch (phân Anh) | 2,54cm |
| | mm | Milimét | | | |
| | Hải lý | Hải lý | | | |
| Diện tích | km ² | Kilômét vuông | | | |
| | ha | hecta | sqmile | Sqmile (dặm vuông) | 258,99ha |
| | a | A | | Acre (mẫu vuông) | 4047m ² |
| | m ² | Mét vuông | sqyd | S.yard (mã vuông) | 0,836m ² |
| | dm ² | Đềximét vuông | sqft | Sqfoot (bộ vuông) | 0,0929m ² |
| cm ² | Xentimét vuông | | | | |
| Thể tích | m ³ | Mét khối | cuyd | Cubicyard (mã khối) | 0,7654m ³ |
| | dm ³ | Đềximét khối | | Cubicfoot (bộ khối) | 28,32d m ³ |
| | cm ³ | Xentimét khối | | Cubicinch (phân khối) | 16,387cm ³ |
| Dung tích | kl | Kilôlít | | 1. Dạng hạt: | |
| | l | Lít | bu | Winchesterbushol | 35,24l |
| | m/ | Mililít | qt | Imperialquart | 1,1365l |
| | | | pt | Imperialpint | 0,5682l |
| Dung tích | | | | 2. Dạng chất lỏng: | |
| | | | gal | Britichgallon | 4,546l |
| | | | gt | Britishquart | 1,1365l |
| | | | pt | Britishpint | 0,5682l |
| | | | | USA gallon | 3,785l |
| | | | USA puart | 0,9463l | |

Bảng 1.2 (tiếp)
NHỮNG ĐƠN VỊ ĐO THƯỜNG GẶP

| Đơn vị đo | Đơn vị thường gặp | | Đơn vị Anh | | |
|------------|-------------------|------------|------------|-----------------------|-----------|
| | Ký hiệu | Tên gọi | Ký hiệu | Tên gọi | Đổi ra SI |
| K.L riêng | kg/m ³ | | | | |
| | t/m ³ | | | | |
| Khối lượng | Tấn | | tnlg | Longton (tấn dài) | 1016kg |
| | Tạ | | tnsh | Shortton (tấn ngắn) | 907,2kg |
| | Yến | | | | |
| | Kg | | lb | Poundav (cân Anh) | 0,454kg |
| | g | | oz | Ounceavoim (lạng Anh) | 28,35kg |
| Lực | N | Niuton | lb (USA) | pound (USA) | 4,448N |
| | daN | ĐềcaNiuton | | | |
| | kN | KilôNiuton | kip (USA) | 1kip = 1000 lb | 4,448kN |
| | MN | MêgaNiuton | | | |

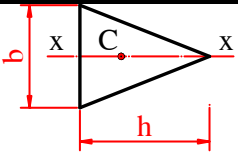
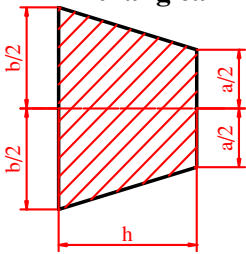
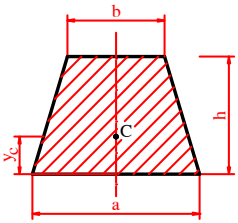
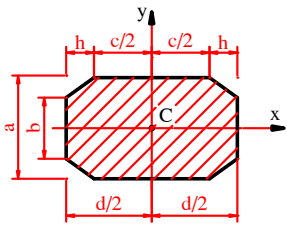
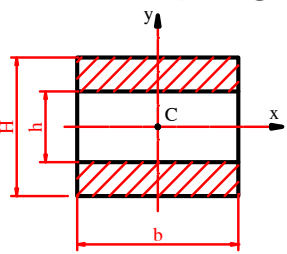
| | | | | | |
|----------------------|---------------------|-------------|----------------|--|----------|
| | kG | Kilôgam lực | | | |
| | T | Tân lực | | | |
| Ứng suất- Áp suất | N/m ² | | | * Đơn vị của USA: psf = lb/ft ² pcf = lb/ft ³ ksf = kip/ft ² psi = lb/in ² ksi = kip/in ² | |
| | kN/m ² | | | | |
| | MN/m ² | | | | |
| | daN/cm ² | | | | |
| | daN/mm ² | | | | |
| | kG/cm ² | | | | |
| | bar | | | | |
| | at | Atmôtphe | | | |
| | Pa | Pascal | | | |
| | KPa | Kilô Pascal | PSi | Đơn vị của USA | 6,895kPa |
| MPa | Mêga Pascal | KSi | Đơn vị của USA | 6,895MPa | |
| | mmHg | Mililít Hg | | | |

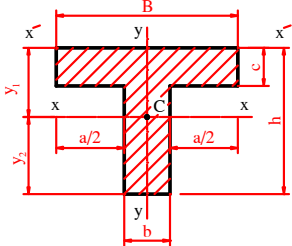
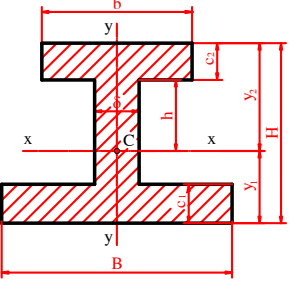
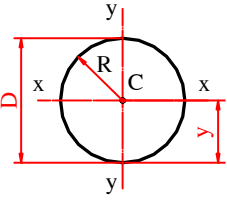
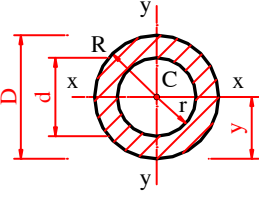
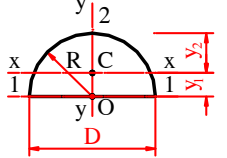
**Bảng 1.2 (tiếp)
NHỮNG ĐƠN VỊ ĐO THƯỜNG GẶP**

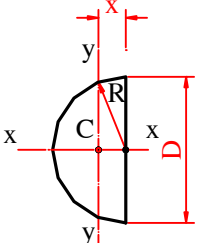
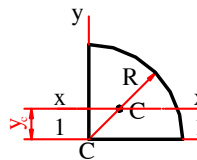
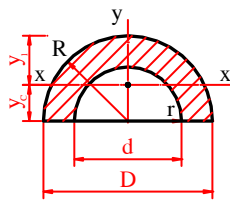
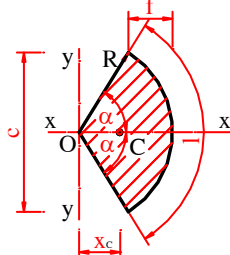
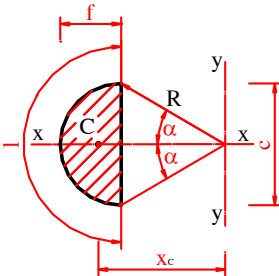
| Đơn vị đo | Đơn vị thường gặp | | Đơn vị Anh | | |
|----------------|--------------------|----------|------------|----------------|-----------------|
| | Ký hiệu | Tên gọi | Ký hiệu | Tên gọi | Đổi ra SI |
| Công | J | Jun | | | |
| | kGm | | | | |
| Công suất | W | Woát | | | |
| | kW | Kilô oát | | | |
| | m.l | Mã lực | | | |
| Vận tốc góc | vg/ph | | | | |
| | rad/s | | | | |
| Gia tốc | m/s ² | | | | |
| | rad/s ² | | | | |
| Góc | Độ | | | | |
| | rad | | | | |
| Mômen | Nm | | ft-lb | Đơn vị của USA | 1,356Nm |
| | kNm | | kip-ft | Đơn vị của USA | 1,356kNm |
| | MNm | | | | |
| | kGm | | | | |
| | Tm | | | | |
| Tần số | Hz | | | | |
| | KHz | | | | |
| | MHz | | | | |
| Tải trọng | N/m | | psf | Đơn vị của USA | 0,04788kPa |
| | kN/m | | ksf | Đơn vị của USA | 47,88kPa |
| | kG/m | | lb/ft | Đơn vị của USA | 14,59N/m |
| | T/m | | kip/ft | Đơn vị của USA | 14,59kN/m |
| Nhiệt độ | °C | | °F | | 0,566.(°F - 32) |

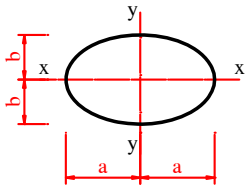
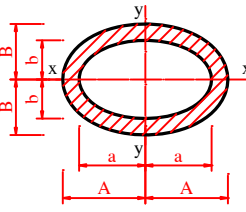
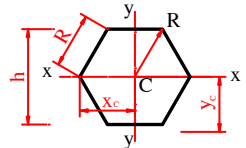
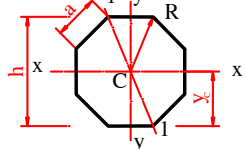
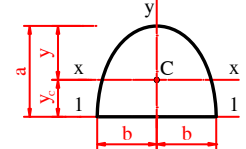
**Phụ lục 3
GIÁ TRỊ CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA TIẾT DIỆN**

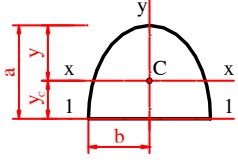
| HÌNH DẠNG TIẾT DIỆN | CÁC ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC |
|---|---|
| <p>Hình chữ nhật</p> | $F = bh; \quad y_1 = y_2 = h/2$ $J_{x'} = \frac{bh^3}{12}; \quad J_{y'} = \frac{hb^3}{12}; \quad r_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$ $J_x = \frac{bh^3}{3}; \quad J_y = \frac{hb^3}{3}; \quad W_{x'} = \frac{bh^2}{6}$ |
| <p>Hình chữ nhật rỗng (hộp)</p> | $F = BH - bh; \quad y_1 = y_2 = h/2$ $J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$ $r_x = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}; \quad W_x = \frac{BH^2 - bh^2}{6}$ |
| <p>Hình vuông nghiêng 45°</p> | $F = a^2; \quad J_x = J_y = \frac{h^4}{48}$ |
| <p>Hình vuông rỗng nghiêng 45°</p> | $F = a^2 - b^2; \quad y_1 = y_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0,707a; \quad J_x = \frac{a^4 - b^4}{12};$ $W_x = \frac{\sqrt{2}(a^4 - b^4)}{12a} = 0,118 \frac{a^4 - b^4}{a};$ $r_x = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{12}} = 0,289\sqrt{a^2 + b^2}$ |
| <p>Hình tam giác</p> | $F = \frac{bh}{2}; \quad y_1 = 1/3h; \quad y_2 = 2/3h; \quad J_x = \frac{bh^3}{36}; \quad J_1 = \frac{bh^3}{12};$ $J_2 = \frac{bh^3}{4}; \quad W_{x1} = \frac{bh^2}{12}; \quad W_{x2} = \frac{bh^2}{24}; \quad r_x = \frac{h}{6}\sqrt{2}$ |
| Hình tam giác | |

| | |
|--|---|
|  | $F = \frac{bh}{2}; \quad J_x = \frac{hb^3}{48}; \quad W_x = \frac{bh^2}{24};$ $r_x = \frac{b}{6} \sqrt{\frac{3}{2}} = 0,2041b$ |
| <p>Hình thang cân</p>  | $F = \frac{a+b}{2} h; \quad J_x = \frac{h}{48} \cdot \frac{b^4 - a^4}{b-a}$ $W_x = \frac{h}{24} \cdot \frac{b^4 - a^4}{b^2 - ab}; \quad r_x = \sqrt{\frac{b^4 - a^4}{24(b^2 - a^2)}}$ |
| <p>Hình thang cân</p>  | $F = \frac{a+b}{2} h; \quad y_c = \frac{a+2b}{3(a+b)}$ |
| <p>Hình chữ nhật vát cạnh</p>  | $F = ad - (a-b)h; \quad y_c = \frac{a}{2}; \quad J_x = \frac{h(a^4 - b^4)}{24(a-b)} + \frac{ca^3}{12};$ $J_y = \frac{(a-b)(d^4 - c^4)}{48(d-c)} + \frac{bd^3}{12}; \quad W_x = \frac{h}{12a} \cdot \frac{a^4 - b^4}{ab} + \frac{ca^2}{6};$ $W_y = \frac{(a-b)(d^4 - c^4)}{24d(d-c)} + \frac{bd^2}{6}$ |
| <p>Hình chữ nhật rỗng</p>  | $J_x = \frac{b}{12} (H^3 - h^3); \quad J_y = \frac{b^3}{12} (H - h)$ |
| <p>Hình chữ T</p> | $F = bh + ca; \quad y_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{bh^2 + ac^2}{bh + ac};$ $J_x = \frac{bh^3 + ac^3}{3} - Fy_1^2; \quad J_{x'} = \frac{(B-b)c^3 + bh^3}{3};$ |

| | |
|---|--|
|  | $J_y = \frac{c(B^3 - b^3) + hb^3}{12}$ |
| <p>Hình chữ I</p>  | $F = bc_2 + \delta(H - c_1 - c_2) + Bc_1$ $J_x = \frac{(By_1^3 + by_2^3 - (B - \delta)(y_1 - c_1)^3 - (h - \delta)(y_1 - c_1)^2)}{12}$ $y_1 = \frac{B \frac{c_1^2}{2} + b \frac{H^2 - (h + c_1)^2}{2} + \delta h (\frac{h}{2} + c_1)}{Bc_1 + bc_2 + \delta h}; y_2 = H - y_1$ $W_x = \frac{J_x}{y_2}; \quad W_y = \frac{c_1 b^3 + c_2 b^2 + h \delta^3}{6B}$ |
| <p>Đường tròn</p>  | $F = \frac{\pi D^2}{4}; y = D/2 = R; J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}; r_x = r_y = D/4$ $J_p = J_T = \frac{\pi D^4}{32}; W_x = W_y = \frac{\pi D^3}{32}; W_T = \frac{\pi D^3}{16}$ <p>J_p, J_T, W_T – mômen quán tính độc cực, độ cứng hình học xoắn và mômen chống xoắn của tiết diện.</p> |
| <p>Hình vành khăn</p>  | $F = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}; J_x = J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}; y = D/2 = R$ $r_x = r_y = \frac{\sqrt{D^2 + d^2}}{4}; J_p = J_T = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \frac{d^4}{D^4})$ $W_x = W_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D}; W_T = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \frac{d^4}{D^4})$ |
| <p>Hình bán nguyệt</p>  | $F = \frac{\pi D^2}{8}; y_2 = \frac{D(3\pi - 4)}{6\pi}; y_1 = \frac{2D}{3\pi} \approx 0,2122D;$ $J_1 = J_y = \frac{\pi D^4}{128}; r_x = \frac{D\sqrt{9\pi^2 - 64}}{12\pi}; J_x = \frac{D^4(9\pi^2 - 64)}{1152\pi};$ $J_o = \frac{\pi R^4}{2}; W_x^{(1-1)} = 0,03234D^3; W_x^{(2)} = 0,02385D^3$ |

| | |
|--|--|
| <p>Hình bán nguyệt</p>  | $F = \frac{\pi D^2}{8}; \quad x = 0,2122D; \quad J_x = \frac{\pi D^4}{128}; \quad W_x = \frac{\pi D^3}{64}$ |
| <p>1/4 hình tròn</p>  | $F = \frac{\pi D^2}{16}; \quad y_C = \frac{4R}{3\pi}; \quad J_1 = J_y = \frac{\pi R^4}{16}; \quad J_O = \frac{\pi R^4}{8}$ $J_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right)R^4 = 0,055R^4; \quad W_x = 0,096R^3$ |
| <p>1/2 hình vành khăn</p>  | $F = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{8}; \quad y_1 = R - \frac{4(D^3 - d^3)}{6\pi(D^2 - d^2)}$ $y = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2};$ $J_x = \frac{9\pi^2(D^4 - d^4)(D^2 - d^2) - 64(D^3 - d^3)^2}{1152\pi(D^2 - d^2)}$ |
| <p>Hình quạt</p>  | $c = 2R\sin\alpha; \quad f = R(1 - \cos\alpha); \quad F = lR/2 = 0,01745R^2\alpha^0$ $J_y = \frac{FR^2}{4} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{\text{arc} 2\alpha}\right); \quad x_C = x_1 = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$ $J_x = \frac{FR^2}{4} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{\text{arc} 2\alpha}\right); \quad x_1 = \frac{2RC}{3l} = \frac{R^2C}{3F}$ <p>với $\text{arc} 2\alpha = \pi 2\alpha^0 / 180^0$;</p> |
| <p>Hình quạt</p>  | $c = 2R\sin\alpha; \quad l = \frac{\pi R 2\alpha^0}{180^0}; \quad f = 2R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$ $F = \frac{lR}{2} - \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2}; \quad x_1 = \frac{c^3}{12F}$ $J_x = \frac{FR^2}{4} \left(1 - \frac{2\sin^3 \alpha \cos \alpha}{3\text{arc} \alpha - \sin \alpha \text{arc} \alpha}\right)$ $J_y = \frac{FR^2}{4} \left(1 + \frac{2\sin^3 \alpha \cos \beta}{\text{arc} \alpha - \sin \alpha \text{arc} \alpha}\right); \quad \text{arc} = \frac{\pi \alpha^0}{180^0}$ |

| | |
|---|--|
| <p style="text-align: center;">Hình elíp</p>  | $F = \pi ab; C = \pi(1,5(a+b) - \sqrt{ab}); J_x = \frac{\pi ab^3}{4}; r_x = \frac{a}{2};$ $J_y = \frac{\pi ba^3}{4}; J_0 = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{4}; r_y = \frac{b}{2}; W_x = \frac{\pi ab^2}{4};$ $W_y = \frac{\pi ba^2}{4}; J_T = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}; W_T = \frac{\pi(1-c^4)ab^2}{2}$ |
| <p style="text-align: center;">Hình elíp rỗng</p>  | $F = \pi(AB - ab); J_x = \frac{\pi(A^3 B - a^3 b)}{4}; r_x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A^3 B - a^3 b}{AB - ab}}$ $W_x = \frac{\pi(A^3 B - a^3 b)}{4a}; J_T = \pi(1-c^4) \frac{A^3 B^3}{A^3 + B^3};$ $W_T = \frac{\pi(1-c^4)AB^2}{2}; c = \frac{a}{A} = \frac{b}{B}$ |
| <p style="text-align: center;">Hình lục giác đều</p>  | $h = R\sqrt{3}; F = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3} = 0,866h^2; y = \frac{h}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}; x = R$ $J_x = J_y = 5 \frac{\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413R^4 = 0,0601h^4; W_x = \frac{5R^3}{8}$ $r_x = r_y = \sqrt{\frac{5}{24}}R = 0,456R = 0,264h; J_T = 1,035R^4;$ $W_y = \frac{5\sqrt{3}R^3}{16} = 0,1041h^3; W_T = 0,982R^3$ |
| <p style="text-align: center;">Hình bát giác đều</p>  | $a = 0,7653R; h = 2,414a = 1,8474R;$ $F = 2\sqrt{2}R^2 = 2,828R^2 = 0,8284h^2; y = \frac{h}{2} = 0,924R;$ $J_x = J_y = J_l = \frac{1+2\sqrt{2}}{6}R^4 = 0,6381R^4 = 0,0547h^4;$ $W_x = 0,6906R^3; W_y = 0,6381R^3; r_x = 0,475R = 0,275h$ $J_T = 0,108h^4; W_T = 0,185h^3$ |
| <p style="text-align: center;">Nửa elíp</p>  | $F = \frac{1}{2}\pi ab = 1,5708ab; y = a(1 - \frac{4}{3\pi}) = 0,5756a;$ $y_c = \frac{4h}{3\pi} = 0,4244a; J_x = ba^3 \frac{9\pi^2 - 64}{72} = 0,1098ba^3;$ |

| | |
|--|--|
| | $J_1 = \frac{\pi b a^3}{8} = 0,3927 b a^3; \quad r_x = \frac{a}{6\pi} \sqrt{9\pi^2 - 64} = 0,2643 a$ $W_x = \frac{b a^2 (9\pi^2 - 64)}{24(3\pi - 4)} = 0,1907 b a^2$ |
| <p style="text-align: center;">Hình Parabol</p>  | $F = \frac{4}{3} a b; \quad y = \frac{3}{5} a; \quad y_c = \frac{2}{5} a;$ $J_x = \frac{16}{175} a^3 b; \quad J_1 = \frac{32}{105} a^3 b$ |

Tài liệu tham khảo

1. *Sức bền vật liệu*. Nguyễn Quang Anh – Nguyễn Văn Nhậm – Chu Đình Tự.
Trường Trung học Giao thông vận tải khu vực I. NXB Hà Nội 1999.
2. *Sức bền vật liệu – Tập 1*. Bùi Ngọc Ba - Đặng Đình Lộc – Bùi Trọng Lựu.
NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội 1993.
3. *Sức bền vật liệu*. Võ Kim Cương – Hoàng Xuân Lượm.
Học viện kỹ thuật Quân sự, Hà Nội 1990.
4. *Sức bền vật liệu*. Chủ biên: Vũ Đình Lai.
Trường Đại học Giao thông vận tải. Hà Nội 1995.
5. *Sức bền vật liệu*. Phan Văn Hải.
Trường Trung học Cầu đường và dạy nghề. Hà Tây 2007.
6. *Sức bền vật liệu*. Vũ Khánh Tùng.
Trường Trung học Cầu đường và dạy nghề. Hà Tây 2001.
7. *Giáo trình Cơ học xây dựng*. Bộ Xây dựng.
NXB Xây dựng. Hà Nội 2004.
8. *Bài tập Sức bền vật liệu*. Chủ biên: Vũ Đình Lai.
NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội 1986.
9. *Bài tập Sức bền vật liệu*. Chủ biên: Nguyễn Xuân Lựu.
NXB Giao thông vận tải. Hà Nội 2005.
10. *Bài tập Sức bền vật liệu*. Chủ biên: Bùi Đình Nghi.
Trường Đại học Giao thông vận tải. Hà Nội 1994.
11. *Bài tập Sức bền vật liệu*. Chủ biên: I.N Mirôliubôp.
Người dịch: Vũ Đình Lai – Nguyễn Văn Nhậm. NXB Xây dựng, Hà Nội 2002.

SỨC BỀN VẬT LIỆU

Trần Minh Tú - Đại học Xây dựng

Chương 1

NỘI LỰC TRONG BÀI TOÁN THANH



Chương 1. Nội lực trong bài toán thanh

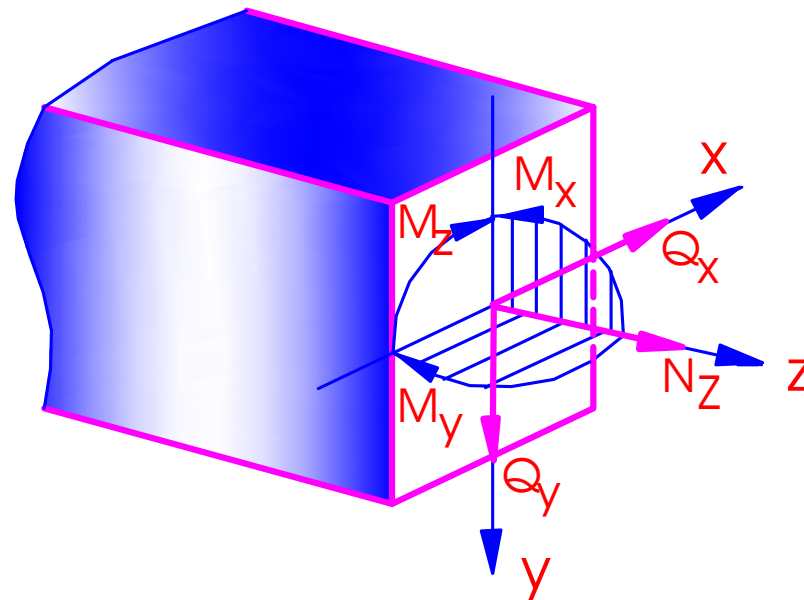
NỘI DUNG

- 1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang
- 1.2. Biểu đồ ứng lực – PP mặt cắt biến thiên
- 1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải trọng ngang phân bố
- 1.4. Phương pháp vẽ biểu đồ ứng lực theo điểm đặc biệt
- 1.5. Biểu đồ ứng lực của dầm tĩnh định nhiều nhịp
- 1.6. Biểu đồ ứng lực của khung phẳng



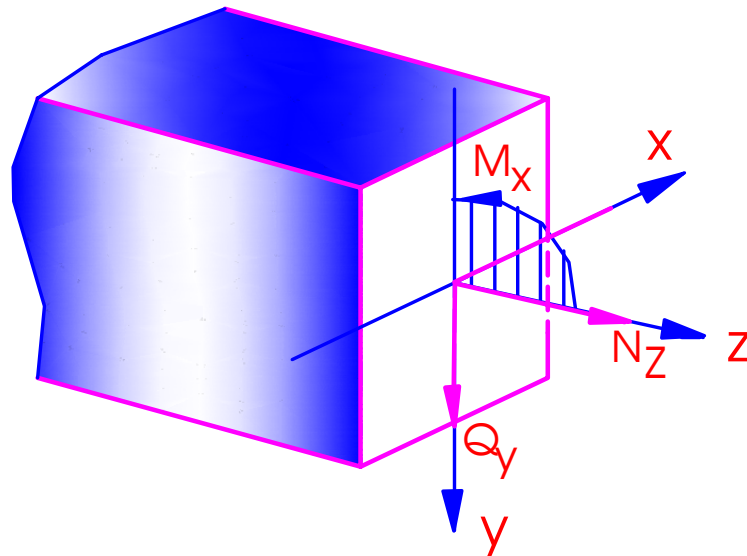
1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (1)

- Trong trường hợp tổng quát trên mặt cắt ngang của thanh chịu tác dụng của ngoại lực có 6 ứng lực:



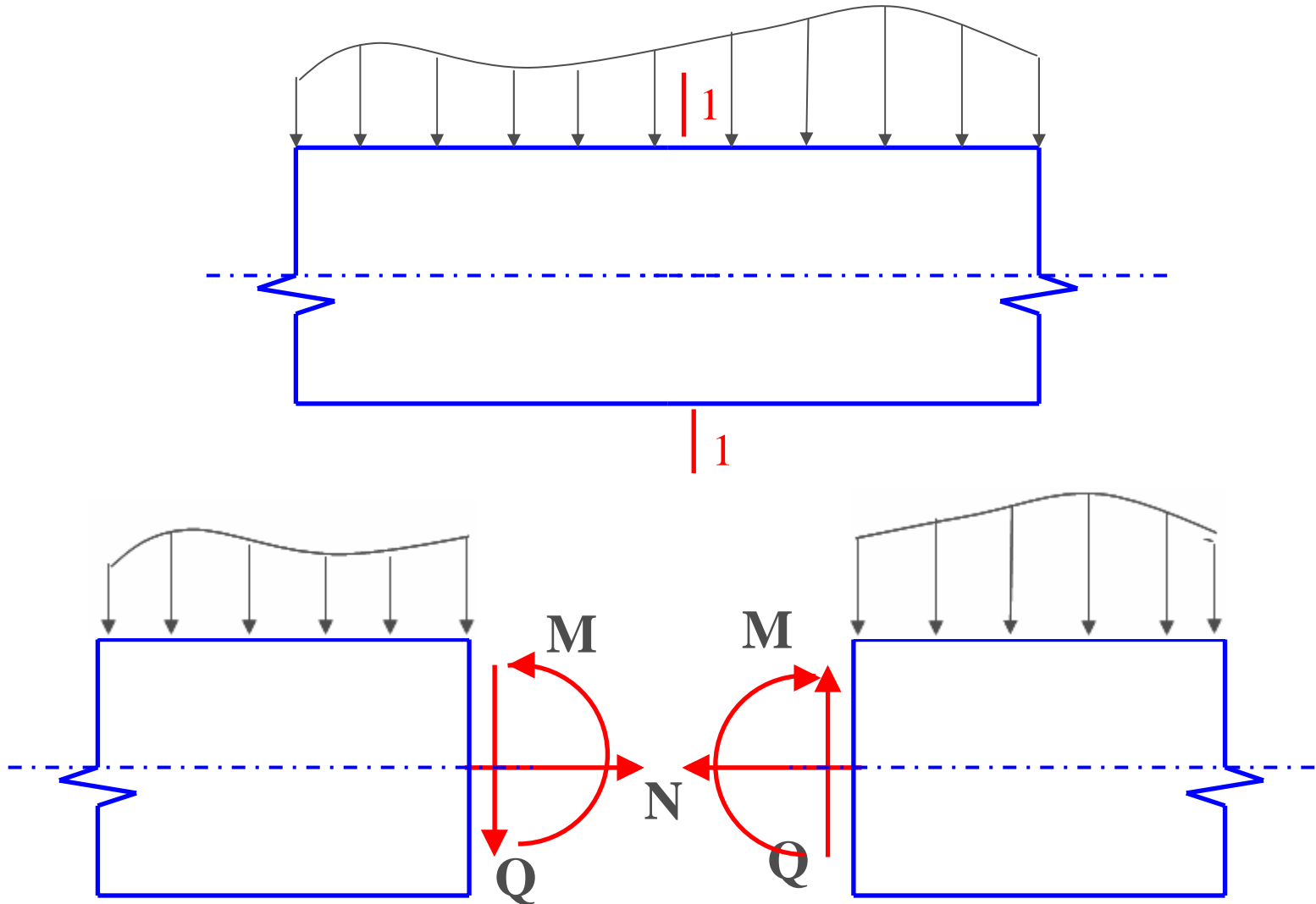
1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (2)

- **Bài toán phẳng**: Ngoại lực nằm trong mặt phẳng đi qua trục z (yOz) \Rightarrow Chỉ tồn tại các ứng lực trong mặt phẳng này: N_z , M_x , Q_y



- N_z - lực dọc; Q_y - lực cắt; M_x – mô men uốn

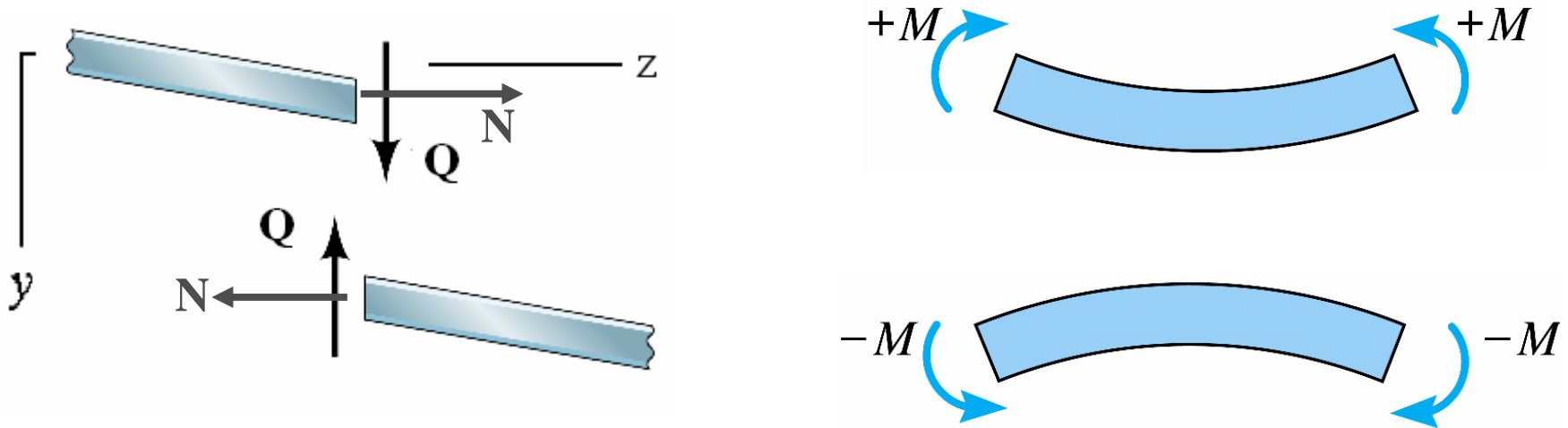
1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (3)



1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (4)

❖ Qui ước dấu các thành phần ứng lực

- Lực dọc: $N > 0$ khi có chiều đi ra khỏi mặt cắt
- Lực cắt: $Q > 0$ khi có chiều đi vòng quanh phần thanh đang xét theo chiều kim đồng hồ
- Mô men uốn: $M > 0$ khi làm căng các thớ dưới



1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (5)

❖ Cách xác định các thành phần ứng lực

- Giả thiết chiều các thành phần M, N, Q theo chiều dương qui ước
- Thiết lập phương trình hình chiếu lên các trục z, y và phương trình cân bằng mô men với trọng tâm O của mặt cắt ngang

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N = \dots$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q = \dots$$

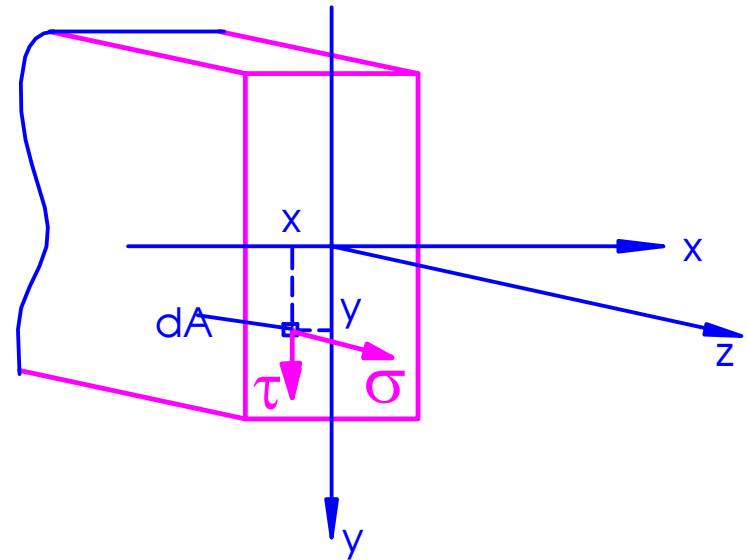
$$\sum M_O = 0 \Rightarrow M = \dots$$

1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (6)

❖ Biểu thức quan hệ ứng lực - ứng suất

- Vì là bài toán phẳng nên chỉ tồn tại các thành phần ứng suất trong mặt phẳng $zOy \Rightarrow$ ký hiệu $\sigma_z, \tau_{zy} \Rightarrow (\sigma, \tau)$
- Các thành phần ứng lực trên mặt cắt ngang

$$N = \int_{(A)} \sigma dA$$
$$Q = \int_{(A)} \tau dA$$
$$M = \int_{(A)} y \sigma dA$$



- $dA(x,y)$ là phân tố diện tích của dt mặt cắt ngang A

1.2. Biểu đồ ứng lực (1)

- ❖ Khi tính toán \Rightarrow cần tìm vị trí mặt cắt ngang có trị số ứng lực lớn nhất \Rightarrow biểu đồ
- ❖ **Biểu đồ ứng lực** - là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của các thành phần ứng lực theo toạ độ mặt cắt ngang
- ❖ **Các bước vẽ biểu đồ ứng lực**

1.2. Biểu đồ ứng lực (3)

- a. Xác định phản lực tại các liên kết
- b. Phân đoạn thanh sao cho biểu thức của các ứng lực trên từng đoạn là liên tục
- c. Viết biểu thức xác định các ứng lực N , Q , M theo toạ độ mặt cắt ngang bằng phương pháp mặt cắt
- d. Vẽ biểu đồ cho từng đoạn căn cứ vào phương trình nhận được từ bước (c)
- e. Kiểm tra biểu đồ nhờ vào các nhận xét mang tính trực quan

1.2. Biểu đồ ứng lực (4)

- ❖ Biểu đồ lực dọc, lực cắt vẽ theo qui ước và mang dấu



- ❖ Biểu đồ mô men luôn vẽ về phía thó' căng



Ví dụ 1.1 (1)

Vẽ biểu đồ các thành phần ứng lực trên các mặt cắt ngang của thanh chịu tải trọng như hình vẽ

GIẢI:

1. Xác định phản lực

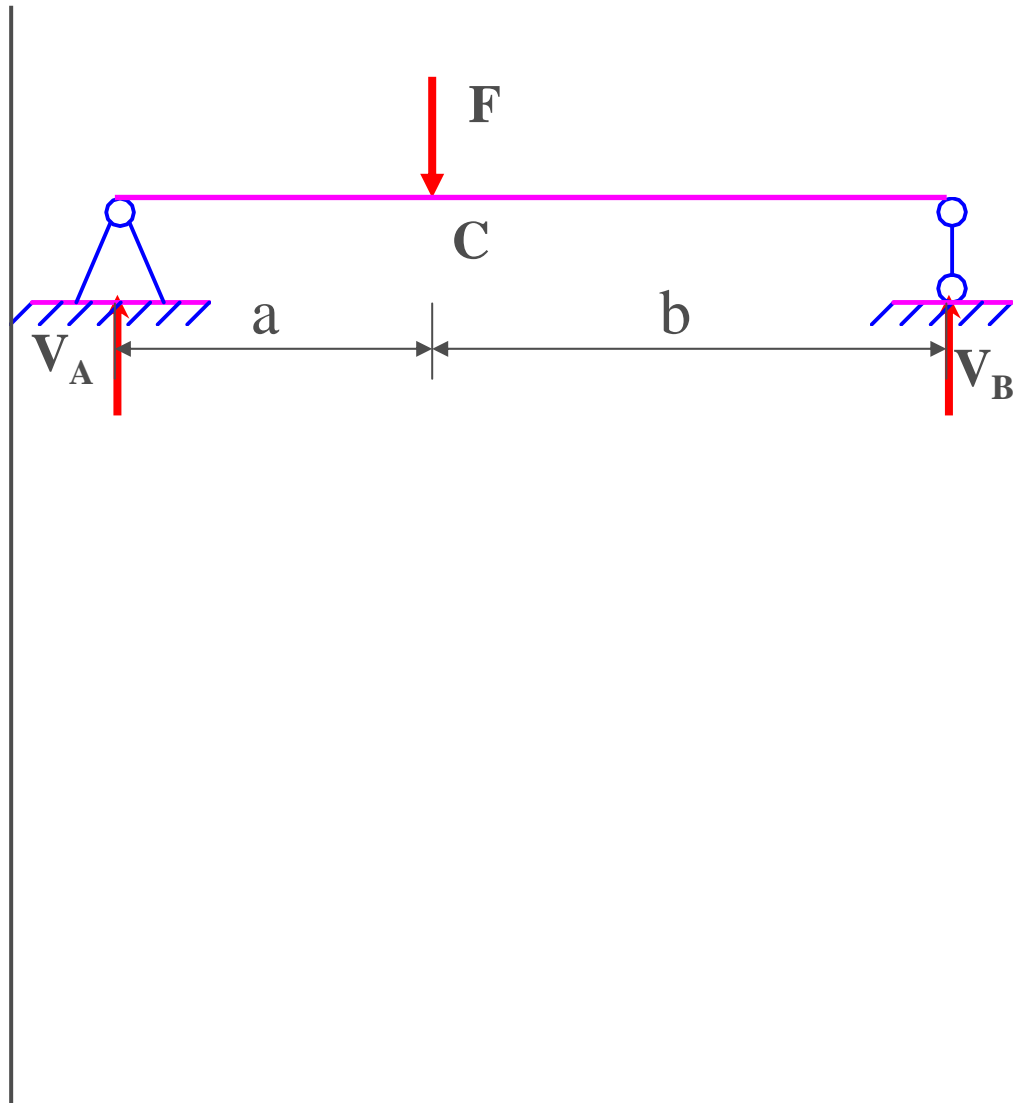
$$\sum M_A = V_B (a + b) - Fa = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{Fa}{(a + b)}$$

$$\sum M_B = V_A (a + b) - Fb = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{Fb}{(a + b)}$$

Thử lại: $\sum Y = 0$



Ví dụ 1.1 (2)

Đoạn AC

Mặt cắt 1 – 1: $0 \leq z_1 \leq a$

$$N = 0$$

$$\sum Y = Q - V_A = 0 \Rightarrow Q = V_A = \frac{Fb}{(a+b)}$$

$$\sum M_0 = M - V_A z_1 = 0 \Rightarrow M = V_A z_1 = \frac{Fbz_1}{(a+b)}$$

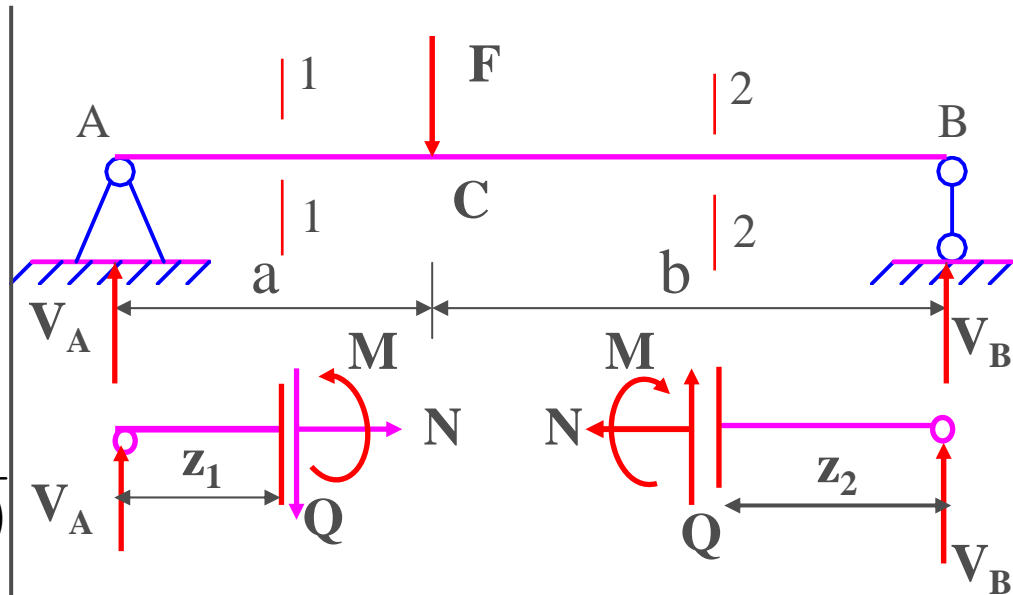
Đoạn BC

Mặt cắt 2 – 2: $0 \leq z_2 \leq b$

$$N = 0$$

$$\sum Y = Q + V_B = 0 \Rightarrow Q = -V_B = -\frac{Fa}{(a+b)}$$

$$\sum M_0 = M - V_B z_2 = 0 \Rightarrow M = V_B z_2 = \frac{Faz_2}{(a+b)}$$



Ví dụ 1.1 (3)

$$AC : Q = \frac{Fb}{(a+b)}$$

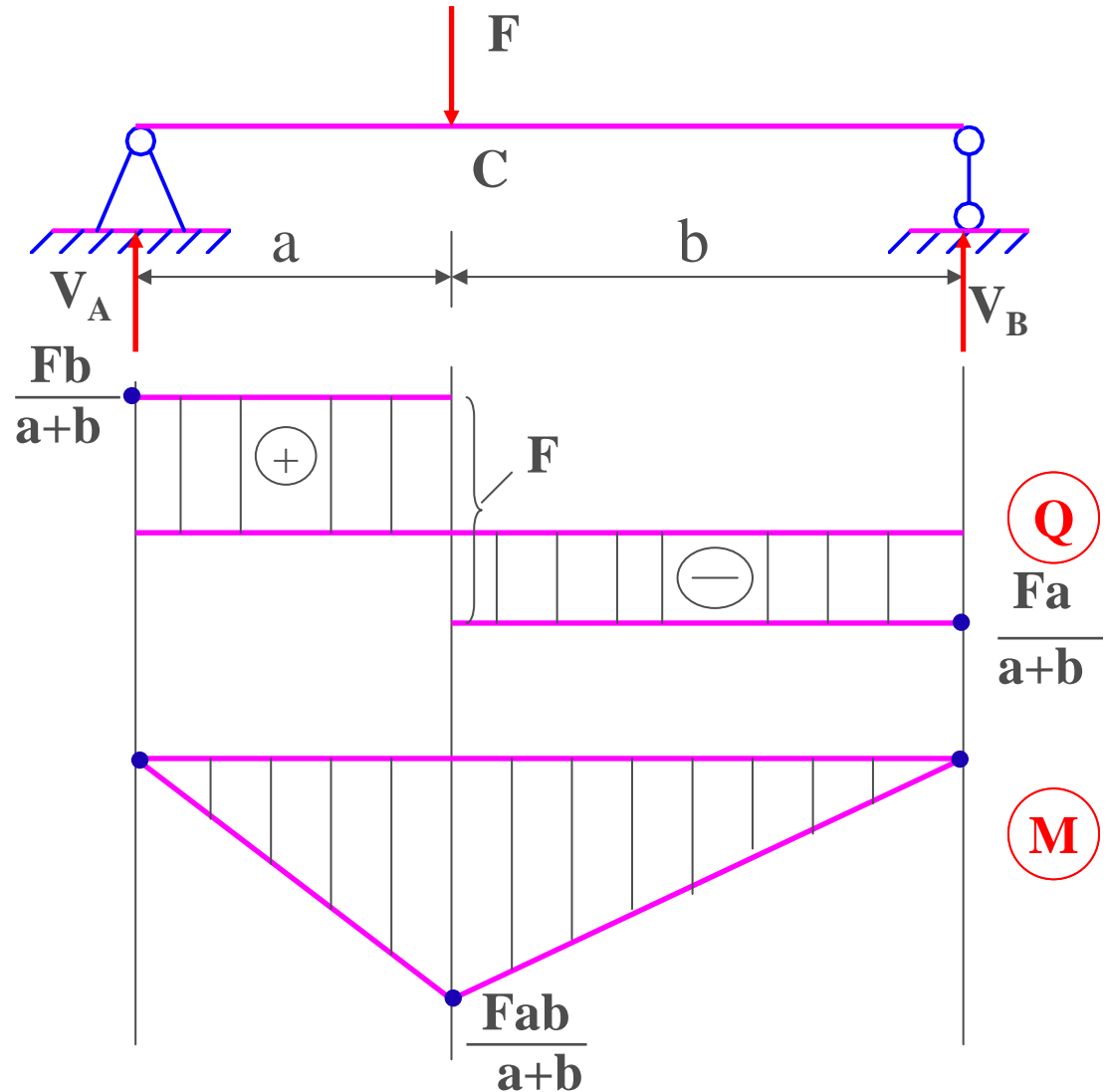
$$BC : Q = -\frac{Fa}{(a+b)}$$

$$AC : M = \frac{Fbz_1}{(a+b)}$$

$$BC : M = \frac{Faz_2}{(a+b)}$$

Nhận xét 1

Tại mặt cắt có lực tập trung \Rightarrow biểu đồ lực cắt có bước nhảy, độ lớn bước nhảy bằng giá trị lực tập trung, xét từ trái qua phải, chiều bước nhảy cùng chiều lực tập trung



Ví dụ 1.2 (1)

Vẽ biểu đồ các thành phần ứng lực trên các mặt cắt ngang của thanh chịu tải trọng như hình vẽ

GIẢI

1. Xác định các phản lực liên kết

Bài toán đối xứng:

$$\Rightarrow V_A = V_B = \frac{ql}{2}$$

Hoặc:

$$\sum M_A = V_B \cdot l - \frac{ql^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{ql}{2}$$

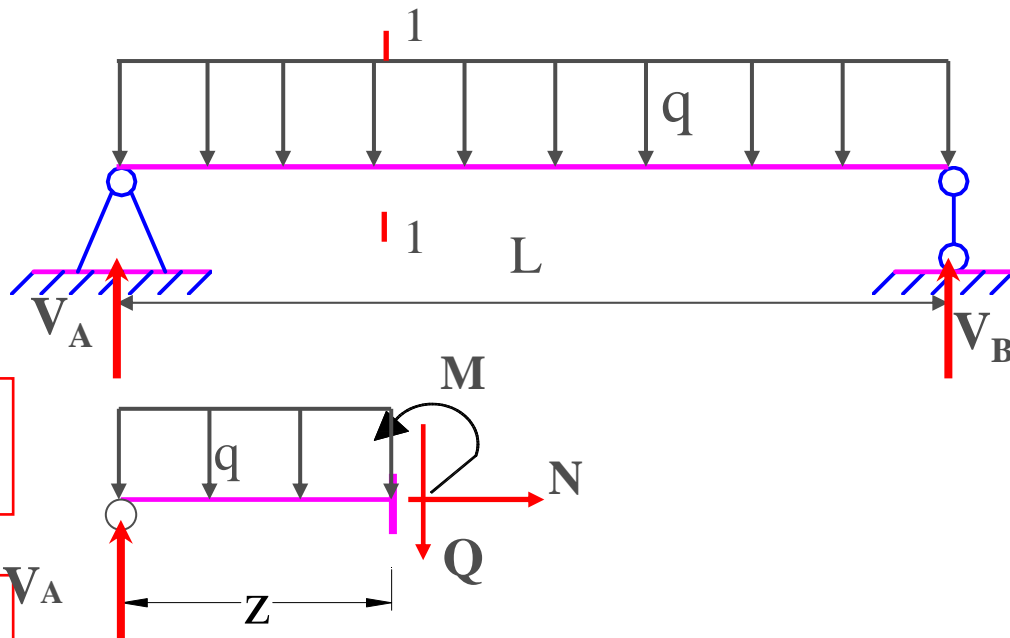
$$\sum M_B = V_A \cdot l - \frac{ql^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{ql}{2}$$

2. Biểu thức nội lực

Xét mặt cắt 1-1
($0 \leq z \leq L$)

$$\sum Y = Q + qz - V_A = 0 \Rightarrow Q = \frac{ql}{2} - qz$$



$$\sum M_0 = M - V_A z_1 + \frac{qz_1^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{ql}{2} \cdot z - \frac{q}{2} \cdot z^2$$

Ví dụ 1.2 (2)

$$Q = \frac{ql}{2} - q \cdot z \begin{cases} z = 0 \Rightarrow Q_A = \frac{qL}{2} \\ z = L \Rightarrow Q_B = -\frac{qL}{2} \end{cases}$$

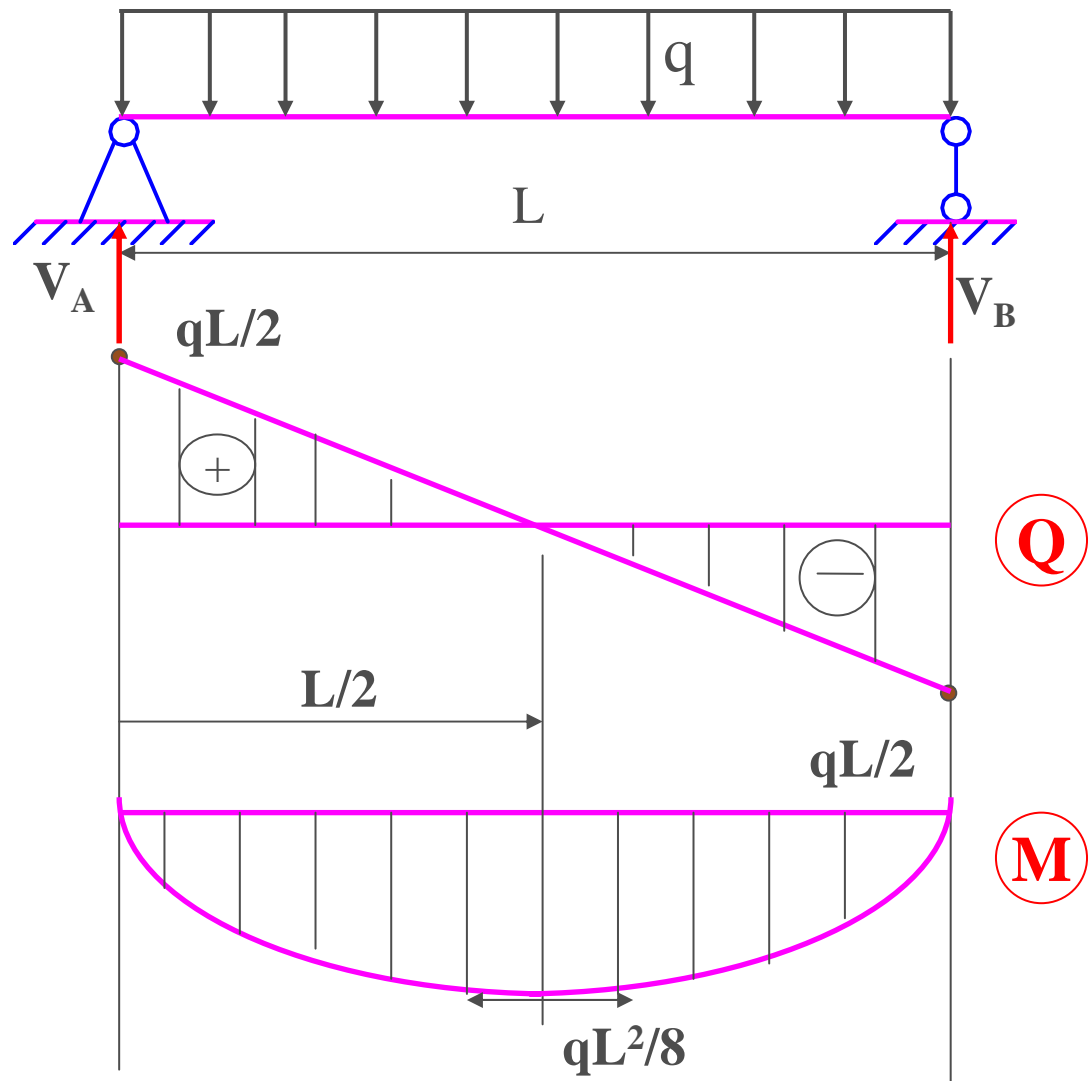
$$M = \frac{ql}{2} \cdot z - \frac{q}{2} \cdot z^2 \begin{cases} z = 0 \Rightarrow M_A = 0 \\ z = L \Rightarrow M_B = 0 \end{cases}$$

$$M' = \frac{qL}{2} - qz \quad M' = 0 \Rightarrow z = \frac{L}{2}$$

$$M'' = -q < 0 \quad \Rightarrow M_{max} = M_{(z=L/2)} = \frac{qL^2}{8}$$

▪ Nhận xét 2

Tại mặt cắt có lực cắt bằng 0, biểu đồ mô men đạt cực trị



Ví dụ 1.3 (1)

1. Xác định phản lực:

$$\sum M_A = V_B \cdot (a + b) - M = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{M}{a + b}$$

$$\sum M_B = V_A \cdot (a + b) - M = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{M}{a + b}$$

2. Lập các biểu thức ứng lực:

AC: Xét mặt cắt 1-1 ($0 \leq z_1 \leq a$)

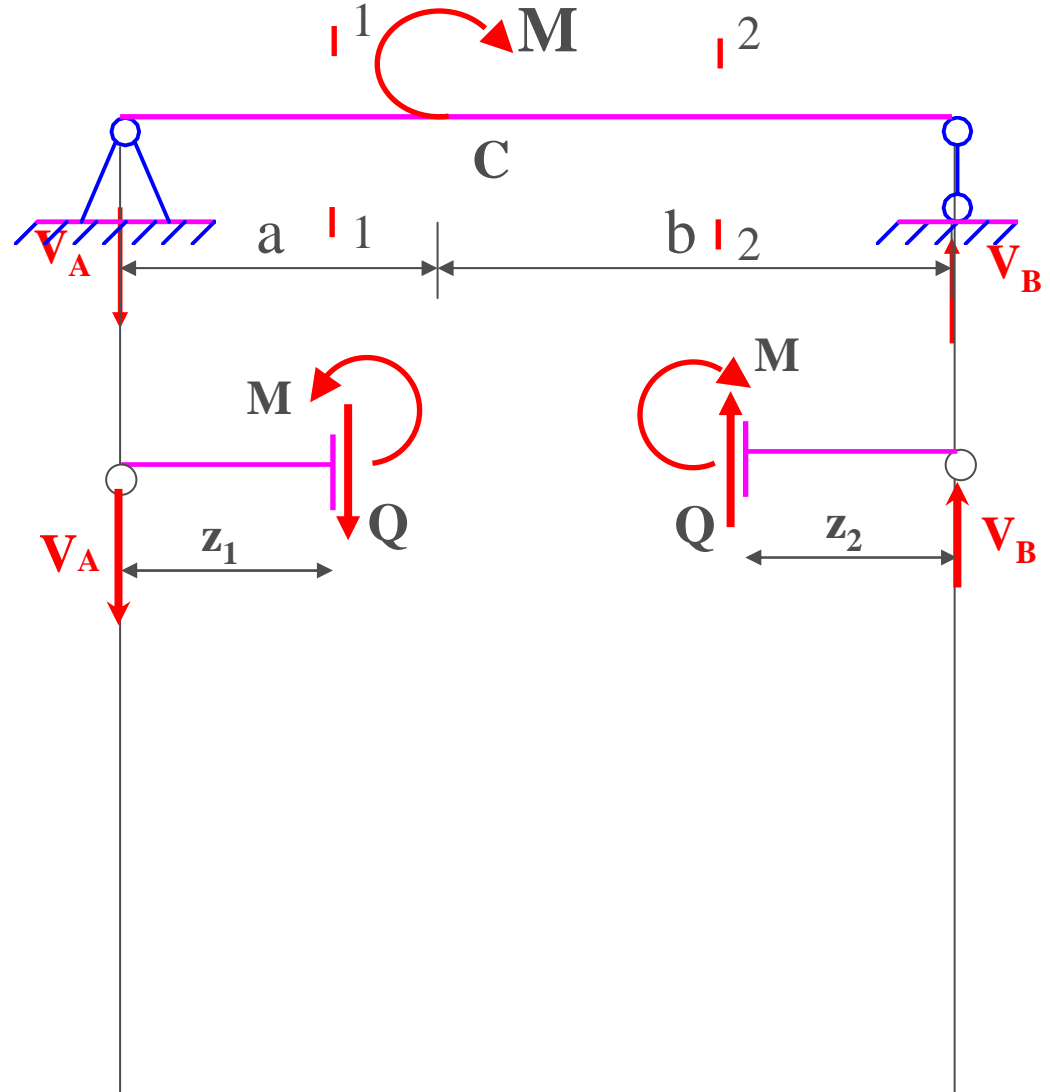
$$Q_y = -V_A = -\frac{M}{a + b}$$

$$M_x = -V_A \cdot z$$

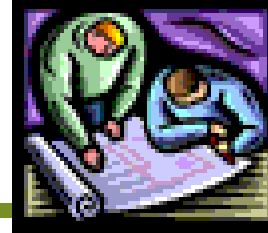
Xét mặt cắt 2-2 ($0 \leq z_2 \leq b$)

$$Q_y = -V_A = -\frac{M}{a + b}$$

$$M_x = V_B \cdot z_2$$



Ví dụ 1.3 (2)



AC: ($0 \leq z_1 \leq a$)

$$Q_y = -V_A = -\frac{M}{a+b}$$

$$M_x = -V_A \cdot z_1$$

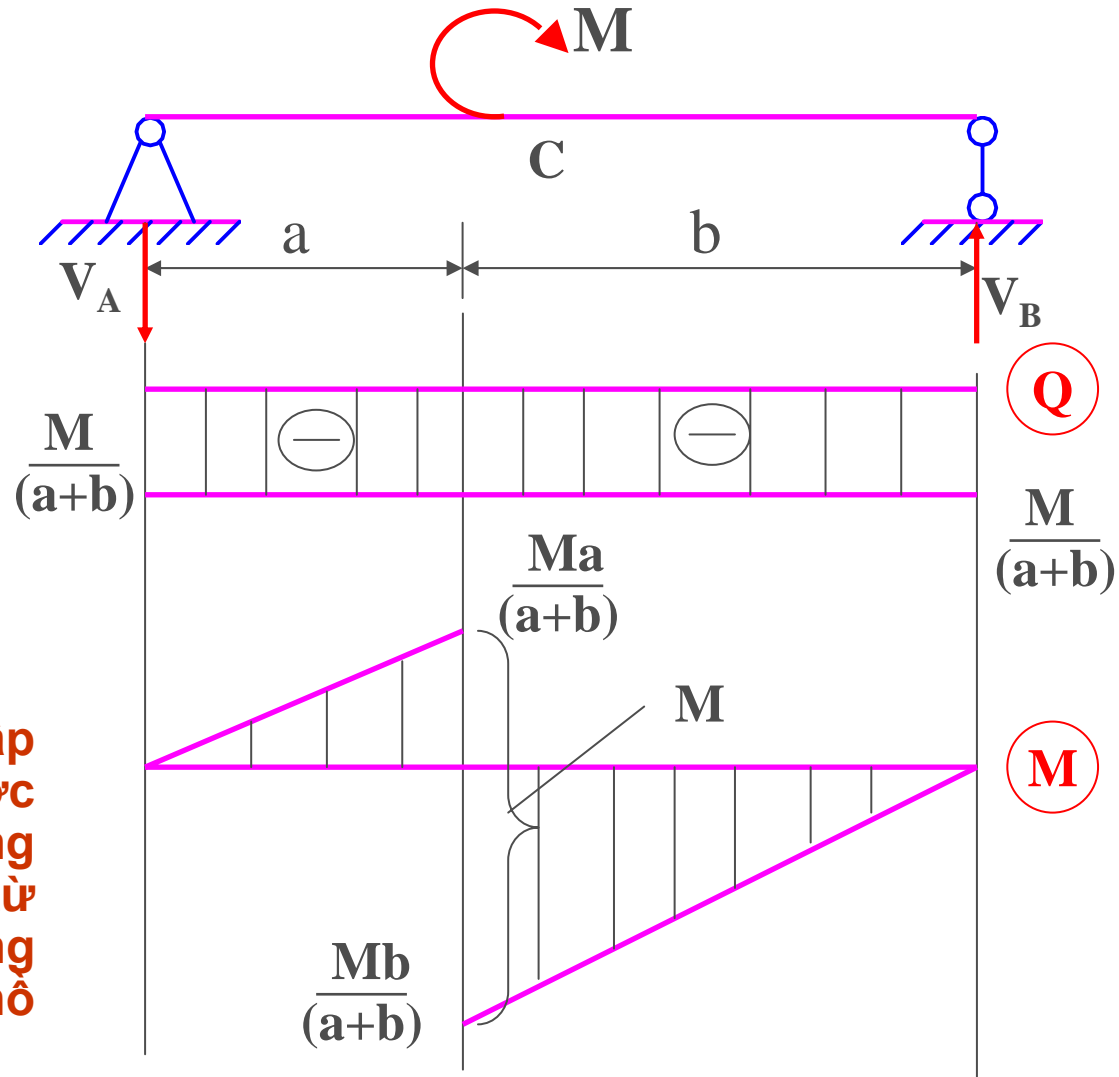
BC: ($0 \leq z_2 \leq b$)

$$Q_y = -V_A = -\frac{M}{a+b}$$

$$M_x = V_B \cdot z_2$$

Nhận xét 3

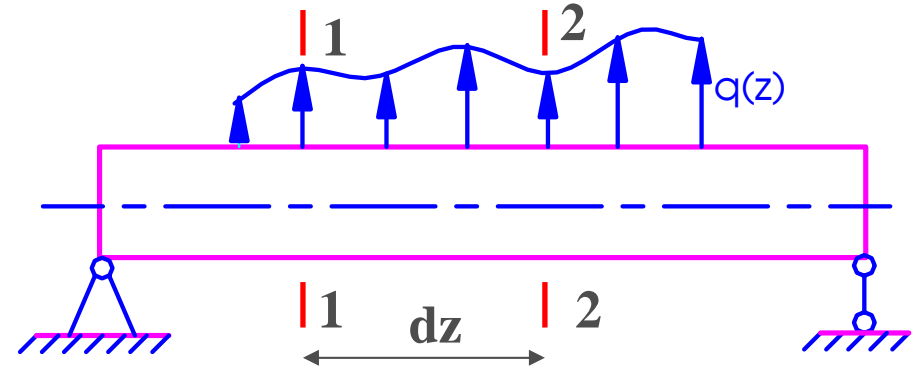
Tại mặt cắt có mô men tập trung, biểu đồ mô men có bước nhảy, độ lớn bước nhảy bằng giá trị mô men tập trung, xét từ trái qua phải, mômen tập trung quay thuận chiều kim đồng hồ thì bước nhảy đi xuống



1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải ngang phân bố (1)

- Xét dầm chịu tải phân bố $q(z) > 0$: hướng lên 

Tách đoạn thanh có chiều dài dz giới hạn bởi 2 mặt cắt ngang 1-1 và 2-2

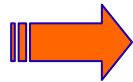


$$\sum Y = Q + dQ - Q - q(z)dz = 0$$

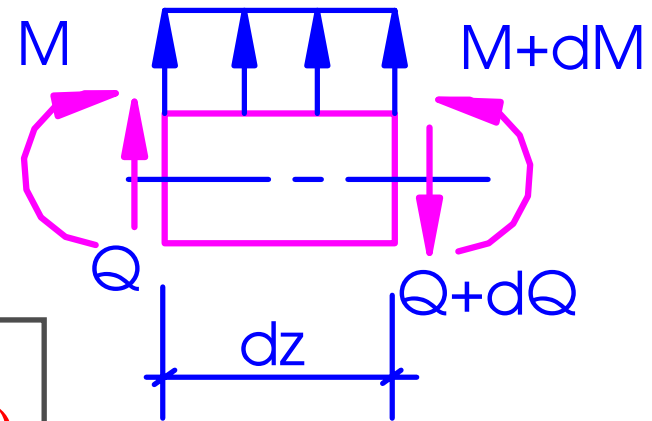
$$\Rightarrow \frac{dQ}{dz} = q(z)$$

$$\sum M = M + dM - M - (Q + dQ)\frac{dz}{2} - Q\frac{dz}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dz} = Q$$



$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q(z)$$



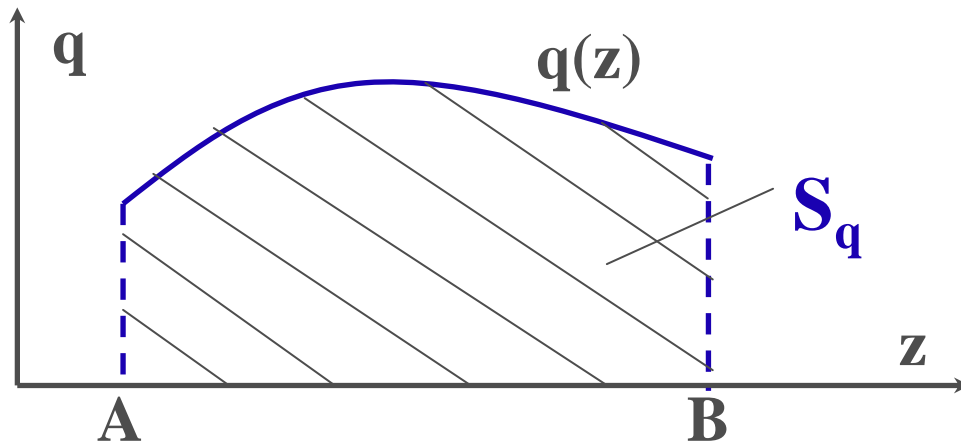
Đạo hàm bậc hai của mô men uốn bằng đạo hàm bậc nhất của lực cắt và bằng cường độ tải trọng phân bố

1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải ngang phân bố (2)

❖ Ứng dụng

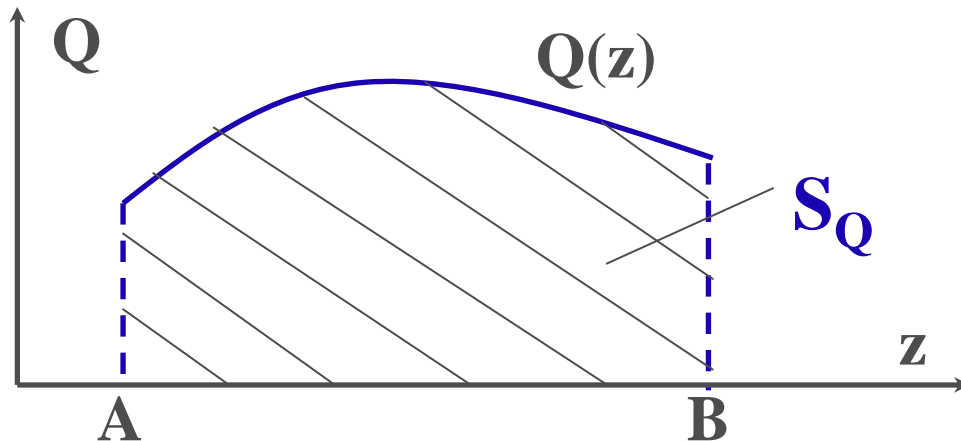
- Nhận dạng các biểu đồ Q, M khi biết qui luật phân bố của tải trọng $q(z)$. Nếu trên một đoạn thanh biểu thức của $q(z)$ bậc n thì biểu thức lực cắt Q bậc $(n+1)$, biểu thức mô men M bậc $(n+2)$
- Tại mặt cắt có $Q=0 \Rightarrow M$ cực trị
- Tính các thành phần Q, M tại mặt cắt bất kỳ khi biết giá trị của chúng tại mặt cắt xác định
 - $Q_{\text{phải}} = Q_{\text{trái}} + S_q$ (S_q – Dtích biểu đồ q)
 - $M_{\text{phải}} = M_{\text{trái}} + S_Q$ (S_Q – Dtích biểu đồ Q)

1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải ngang phân bố (3)



$$\int_A^B dQ = \int_A^B q(z) dz$$

$$Q_B = Q_A + S_q$$



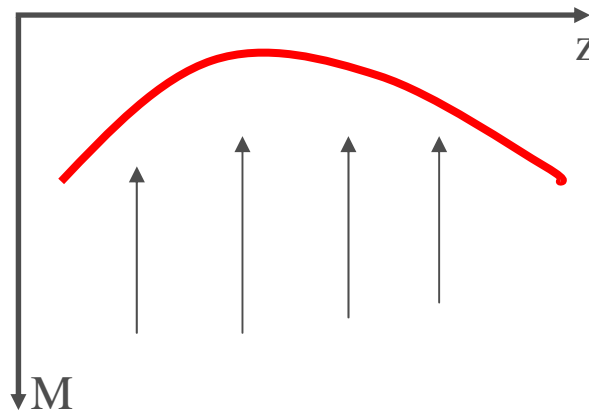
$$\int_A^B dM = \int_A^B Q(z) dz$$

$$M_B = M_A + S_Q$$

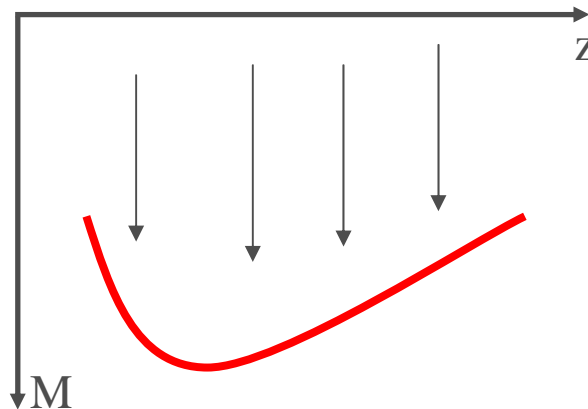
1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải ngang phân bố (4)

$$M'' = q(z)$$

$q(z) > 0 \Rightarrow M \text{ lõm} \Rightarrow$



$q(z) < 0 \Rightarrow M \text{ lõm} \Rightarrow$



Nhận xét:

Biểu đồ mô men luôn có xu hướng hứng lực

1.4. Vẽ biểu đồ ứng lực theo điểm đặc biệt

- ❖ Cơ sở: Dựa vào mối liên hệ vi phân giữa Q , M và $q(z)$
- ❖ Biết tải trọng phân bố \Rightarrow nhận xét dạng biểu đồ Q , $M \Rightarrow$ xác định số điểm cần thiết để vẽ được biểu đồ
 - $q=0 \Rightarrow Q=\text{const} \Rightarrow Q_A=?$ (hoặc Q_B)
 M bậc 1 $\Rightarrow M_A=?$ và $M_B=?$
 - $q=\text{const} \Rightarrow Q$ bậc 1 $\Rightarrow Q_A=?$ $Q_B=?$
 M bậc 2 $\Rightarrow M_A=?$; $M_B=?$; cực trị?
tính lồi, lõm,..?

1.4. Vẽ biểu đồ ứng lực theo điểm đặc biệt (2)

❖ Các giá trị Q_A , Q_B , M_A , M_B , cực trị - là giá trị các điểm đặc biệt. Được xác định bởi:

- Quan hệ bước nhảy của biểu đồ

- Phương pháp mặt cắt

- $Q_{\text{phải}} = Q_{\text{trái}} + S_q$ (S_q - Dtích biểu đồ q)

- $M_{\text{phải}} = M_{\text{trái}} + S_Q$ (S_Q - Dtích biểu đồ Q)

❖ Ví dụ

Ví dụ 1.4 (1)

❖ Xác định phản lực

$$\sum M_B = V_A \cdot 3a - 2qa \cdot 2a - F \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{5}{3}qa$$

$$\sum M_A = V_B \cdot 3a - 2qa \cdot a - F \cdot 2a = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{4}{3}qa$$

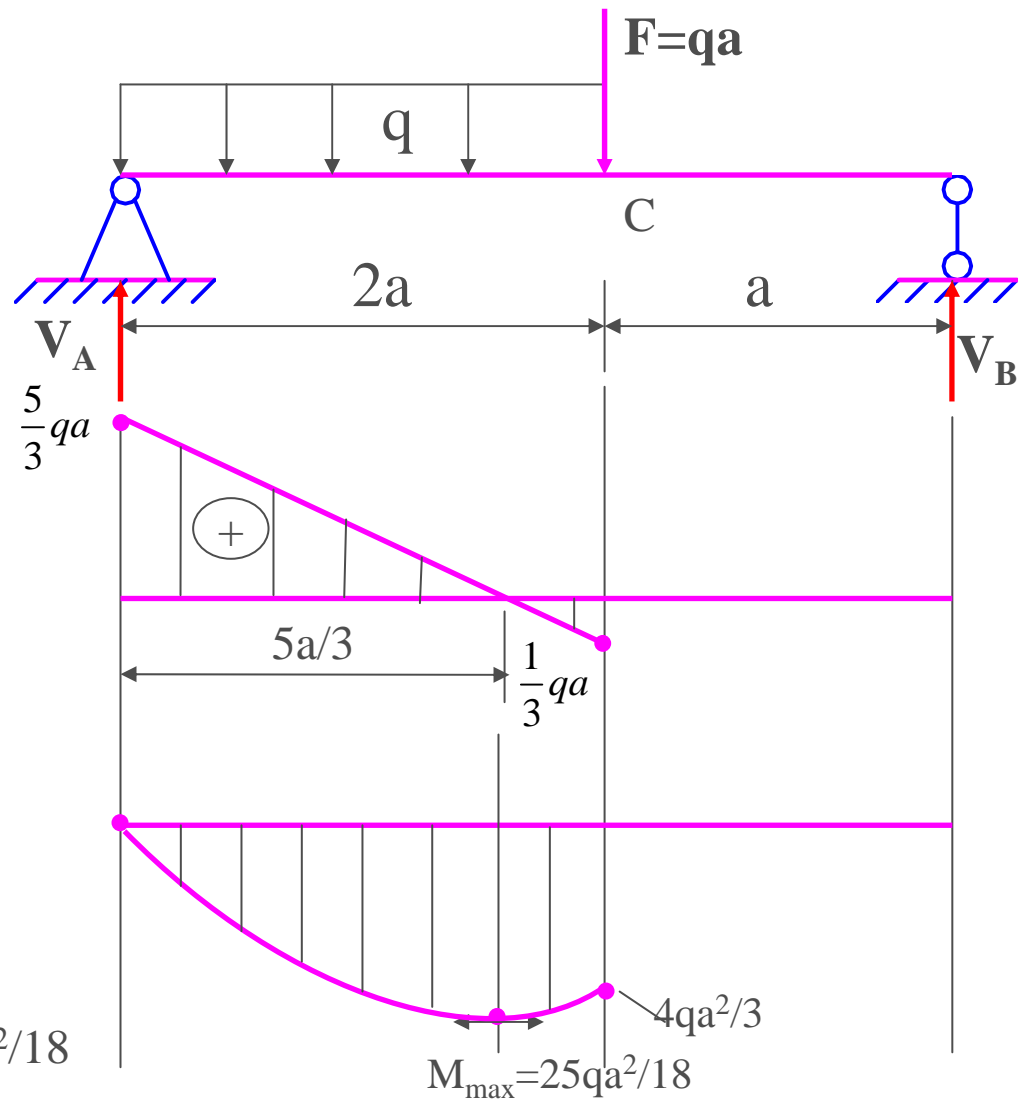
Xét đoạn AC: $q = \text{const} \rightarrow Q$ bậc 1

$$Q_A = V_A$$

$$Q_C = V_A + S_q = 5qa/3 - 2qa = -qa/3$$

$$M \text{ bậc 2: } M_A = 0$$

$$M_C = M_A + S_Q = 4qa^2/3; M_{\max} = 25qa^2/18$$



Ví dụ 1.4 (2)

Xét đoạn BC: $q=0$

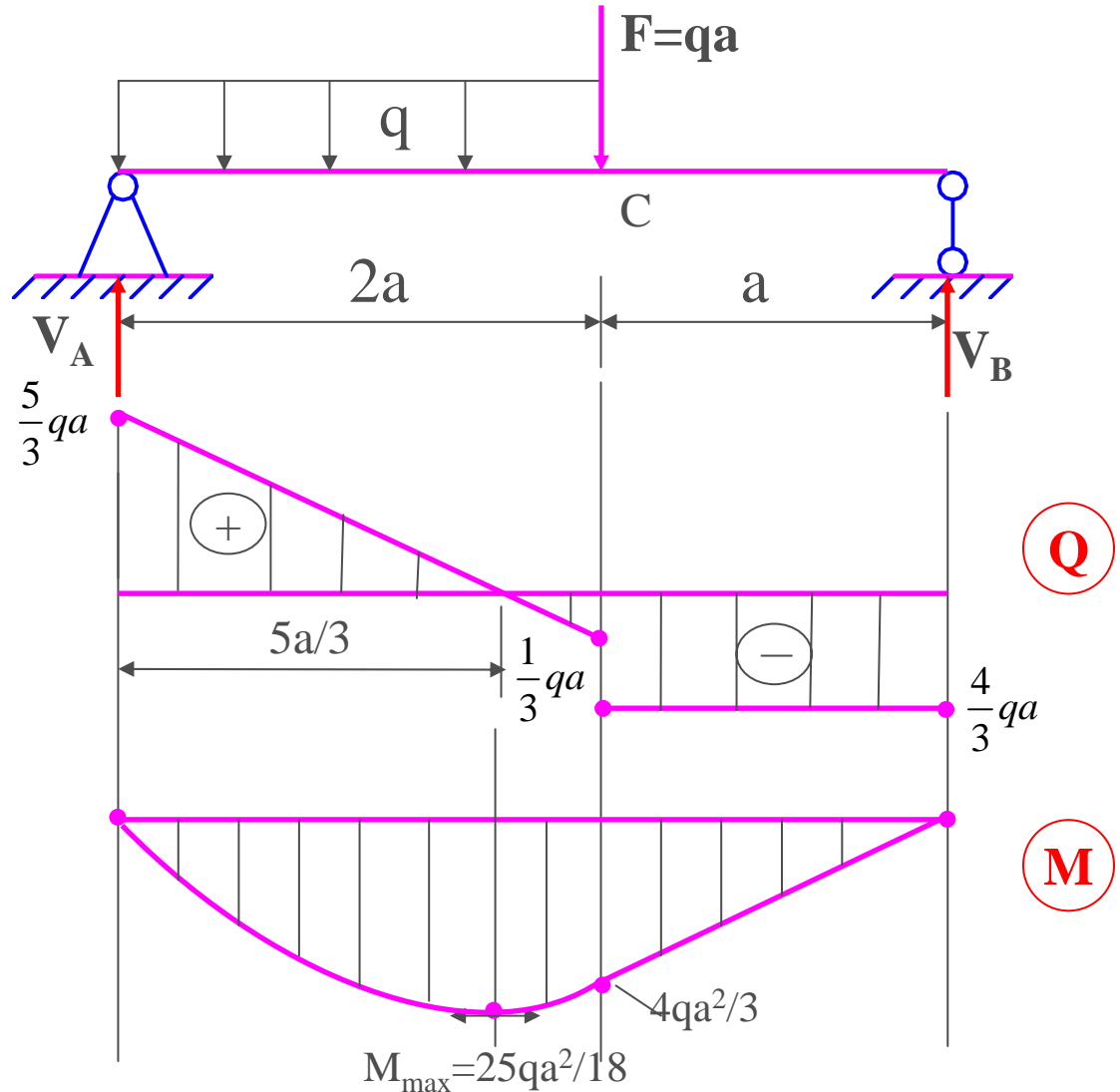
→ $Q = \text{const}$

$$Q_B = -V_B$$

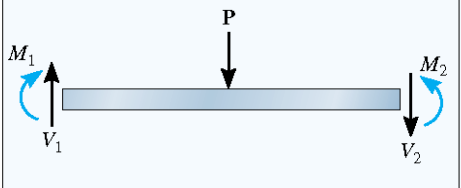
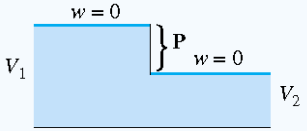
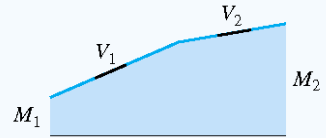
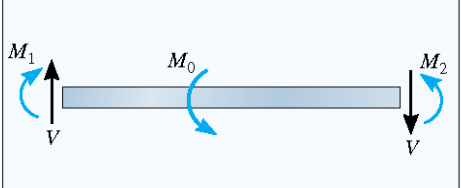
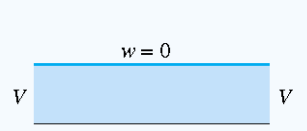
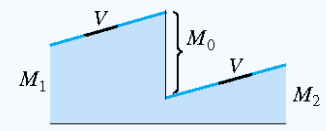
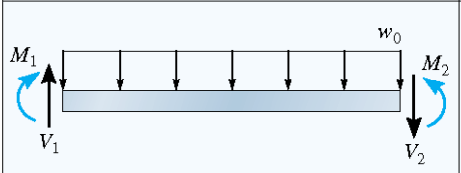
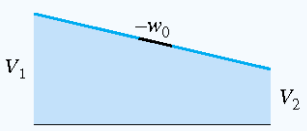
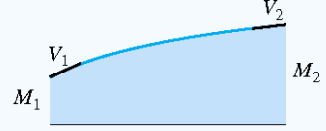
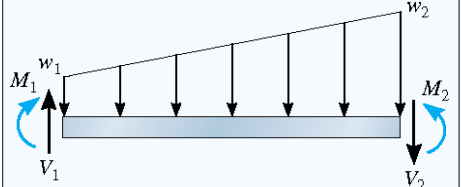


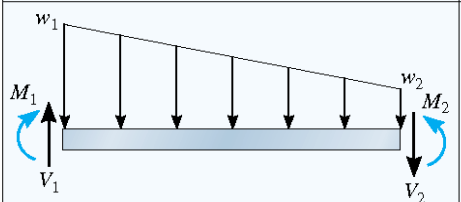


→ M bậc 1:

$$M_B = 0$$

$$M_C = M_B - S_Q = 4qa^2/3$$



Biểu đồ Q, M các trường hợp chịu tải trọng đơn giản

| Loading | Shear Diagram $\frac{dV}{dx} = -w$ | Moment Diagram $\frac{dM}{dx} = V$ |
|---|---|---|
|  |  <p>Downward force P causes V to jump downward from V_1 to V_2.</p> |  <p>Constant slope changes from V_1 to V_2.</p> |
|  |  <p>No change in shear since slope $w = 0$.</p> |  <p>Constant positive slope. Counterclockwise M_0 causes M to jump downward.</p> |
|  |  <p>Constant negative slope.</p> |  <p>Positive slope that decreases from V_1 to V_2.</p> |
|  |  <p>Negative slope that increases from $-w_1$ to $-w_2$.</p> |  <p>Positive slope that decreases from V_1 to V_2.</p> |
|  |  <p>Negative slope that decreases from $-w_1$ to $-w_2$.</p> |  <p>Positive slope that decreases from V_1 to V_2.</p> |

4.5. Biểu đồ ứng lực dầm tĩnh định nhiều nhịp

Định nghĩa: Là hệ tĩnh định gồm tập hợp các dầm, nối với nhau bằng các liên kết khớp

Cách vẽ biểu đồ:

- Phân biệt dầm chính và dầm phụ
- Dầm chính là dầm khi đứng độc lập vẫn chịu được tải trọng
- Dầm phụ là dầm khi đứng độc lập không chịu được tải trọng, phải tựa lên dầm chính mới chịu được tải trọng
- Tải trọng đặt lên dầm chính không ảnh hưởng tới dầm phụ, tải trọng đặt trên dầm phụ sẽ truyền tới dầm chính thông qua phản lực liên kết
- Vẽ biểu đồ cho dầm phụ trước rồi đến dầm chính, sau đó ghép lại với nhau

Ví dụ 1.5 (1)

Ví dụ 1.5: Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm ghép tĩnh định sau:

Bài giải:

Hệ dầm ABCD là hệ dầm ghép gồm:

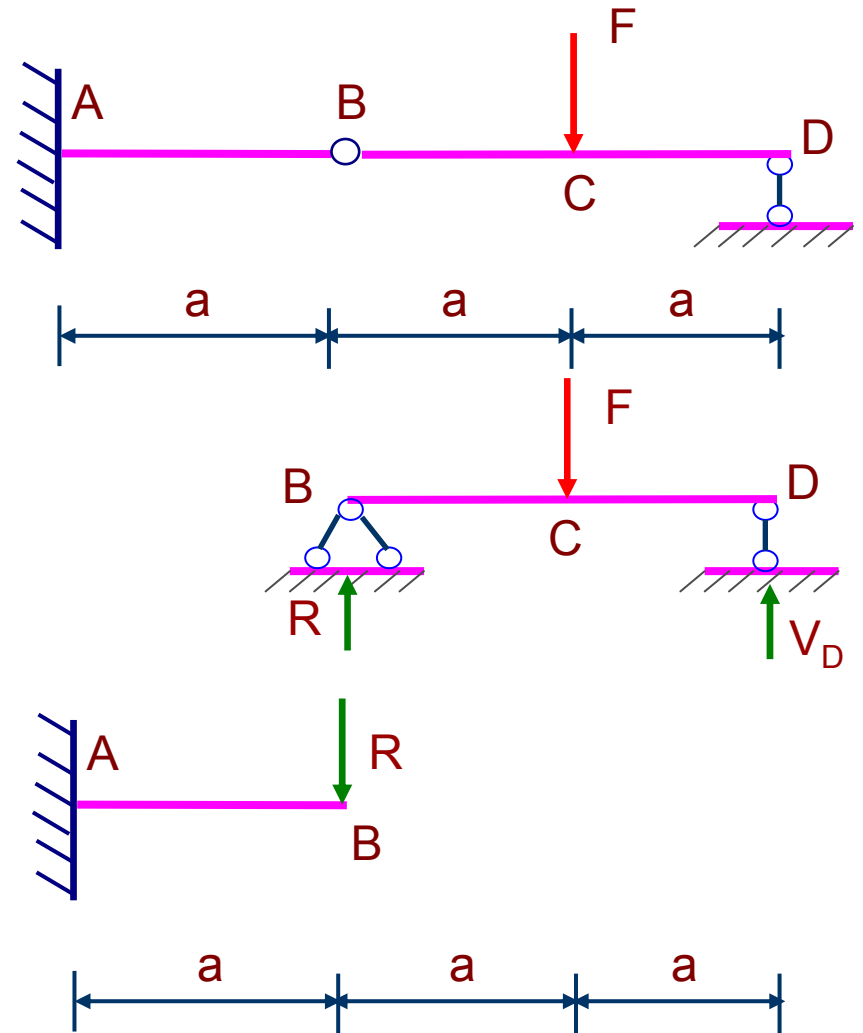
+ Dầm phụ BCD

+ Dầm chính AB

1) Dầm phụ BCD:

- Xác định phản lực:

$$V_D = R = \frac{F}{2}$$



Ví dụ 1.5 (2)

a. Đoạn BC: $q(z)=0$

$$\Rightarrow Q=\text{const} \Rightarrow Q_B = R = F/2$$

$$\Rightarrow M \text{ bậc nhất} \Rightarrow M_B = 0$$

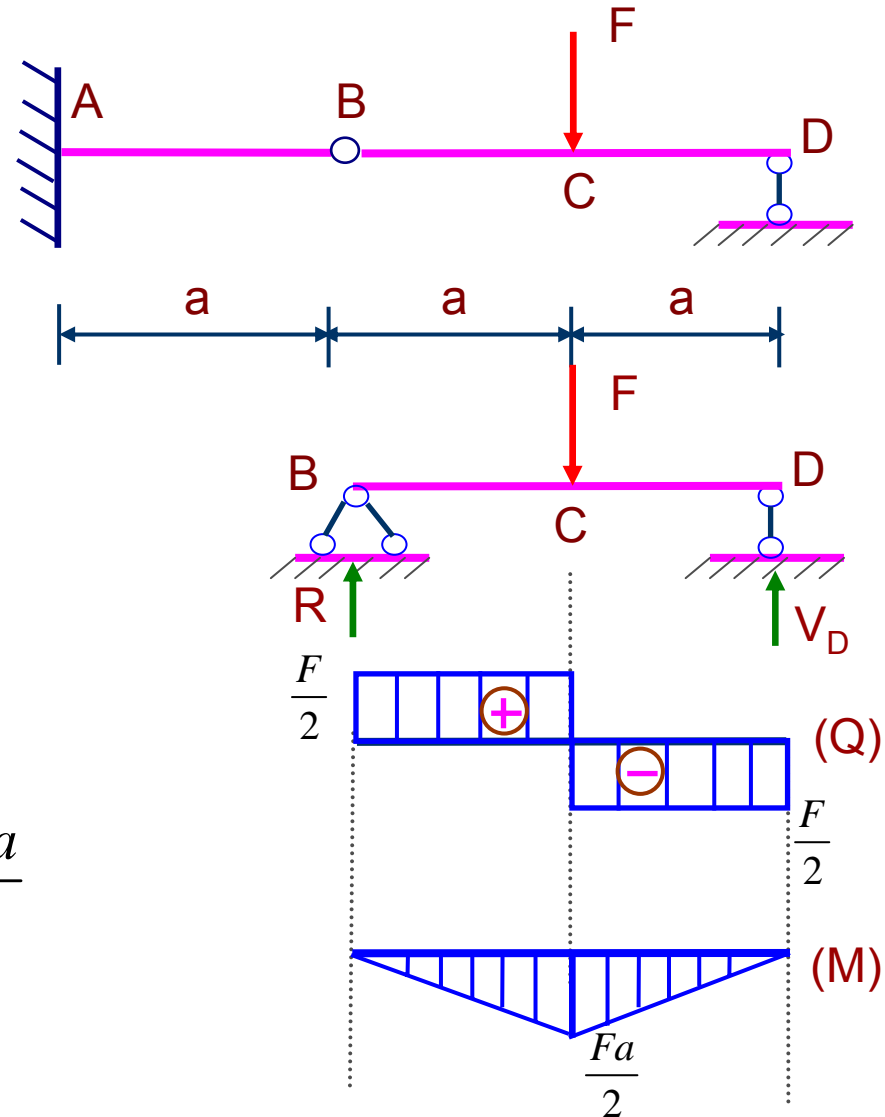
$$\Rightarrow M_C = M_B + S_Q = 0 + \left(\frac{F}{2}a\right) = \frac{Fa}{2}$$

b. Đoạn CD: $q(z)=0$

$$\Rightarrow Q=\text{const} \Rightarrow Q_D = -V_D = -F/2$$

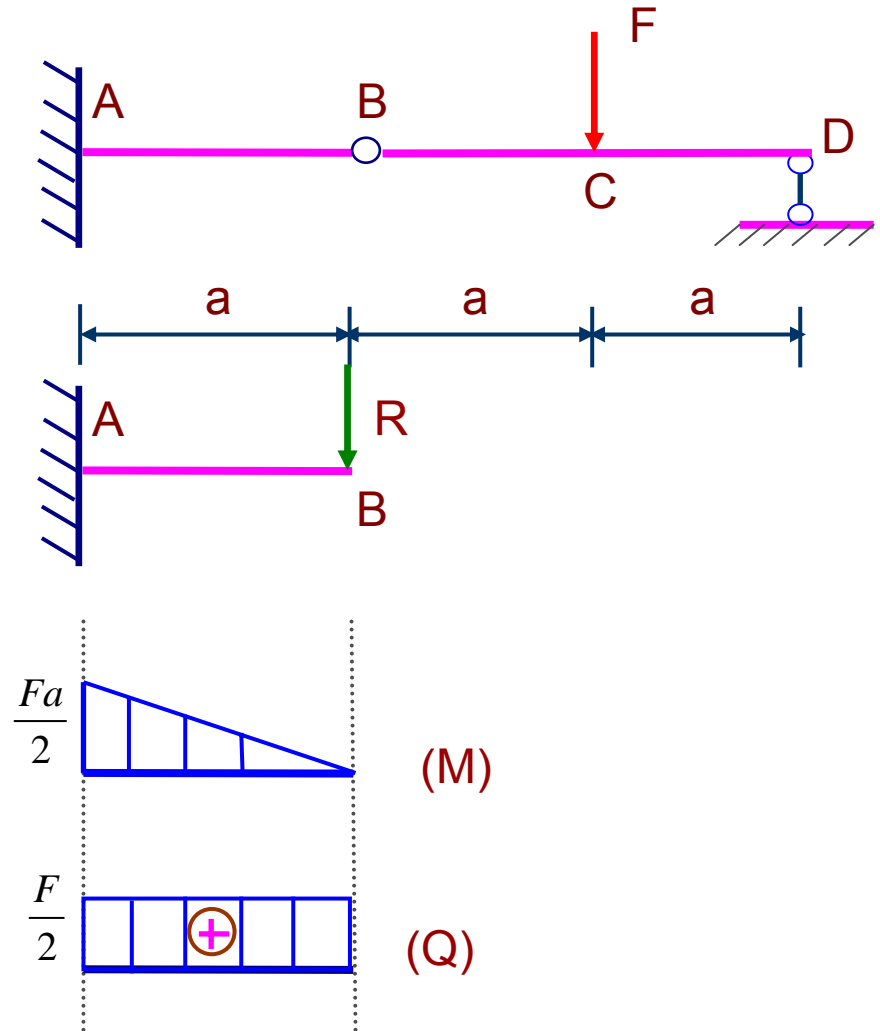
$$\Rightarrow M \text{ bậc nhất} \Rightarrow M_D = 0$$

$$\Rightarrow M_C = M_D - S_Q = 0 - \left(-\frac{Fa}{2}\right) = \frac{Fa}{2}$$



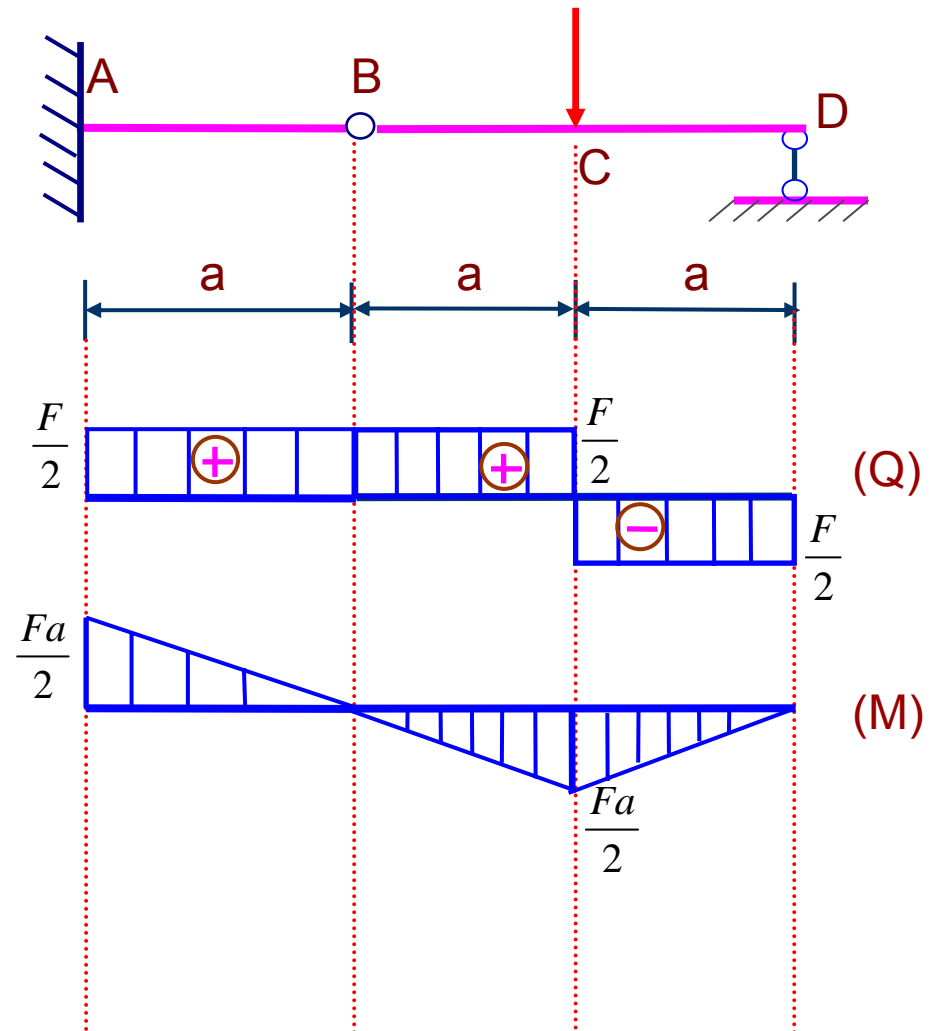
Ví dụ 1.5 (3)

2.) Dầm chính AB:



Ví dụ 1.5 (4)

3.) Biểu đồ ứng lực toàn hệ dầm ghép



4.6. Biểu đồ ứng lực khung phẳng

- ❖ Khung phẳng là hệ phẳng gồm những thanh nối nhau bằng các liên kết cứng (là liên kết mà góc giữa các thanh tại điểm liên kết không thay đổi khi khung chịu lực)
- ❖ Đối với các đoạn khung nằm ngang, biểu đồ các thành phần ứng lực vẽ như qui ước với thanh thẳng
- ❖ Đối với các đoạn khung thẳng đứng, biểu đồ N , Q vẽ về phía tùy ý và mang dấu. Biểu đồ mô men vẽ về phía thứ căng
- ❖ Để kiểm tra biểu đồ ta cần kiểm tra điều kiện cân bằng các mắt khung: Tại mắt khung, nội lực và ngoại lực thỏa mãn điều kiện cân bằng tĩnh học.

Ví dụ 1.6 (1)

Ví dụ 5: Vẽ biểu đồ ứng lực của khung phẳng sau:

Biết $M=qa^2$, $F=2qa$

Bài giải:

1. Xác định các phản lực:

Từ điều kiện cân bằng của khung ta có

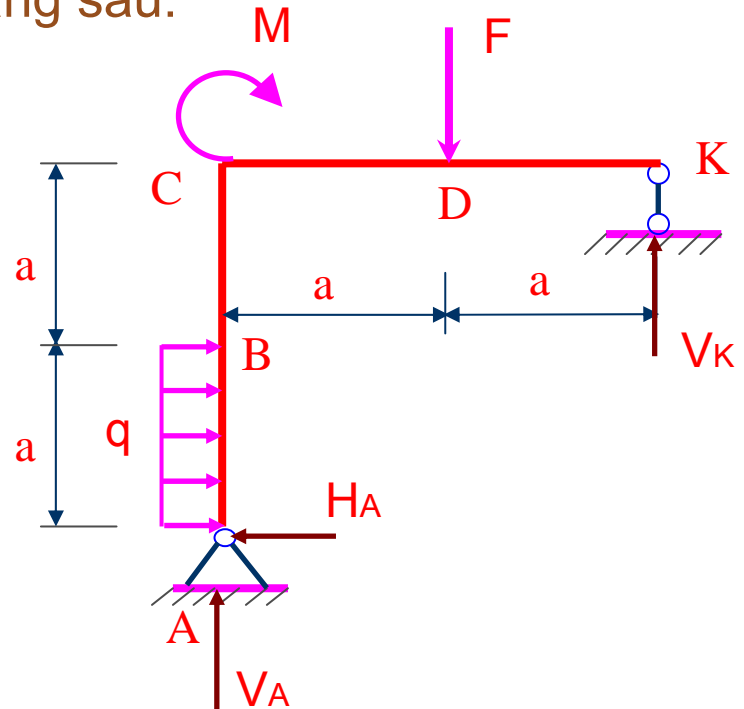
$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = qa$$

$$\sum M_A = 0$$

$$= V_K \cdot 2a - Fa - M_0 - \frac{1}{2}qa^2$$

$$= V_K \cdot 2a - 2qa^2 - qa^2 - \frac{1}{2}qa^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_K = \frac{7}{4}qa$$



Ví dụ 1.6 (2)

$$\sum M_K = 0$$

$$= V_A \cdot 2a + H_A \cdot 2a - qa \cdot \frac{3a}{2} + M_0 - Fa$$

$$= V_A \cdot 2a + 2qa^2 - \frac{3}{2}qa^2 + qa^2 - 2qa^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{1}{4}qa$$

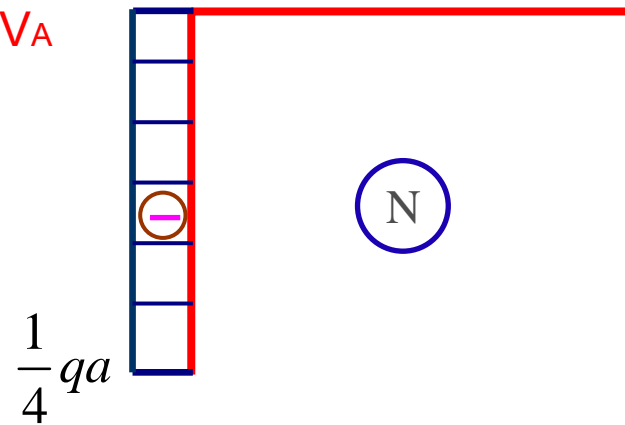
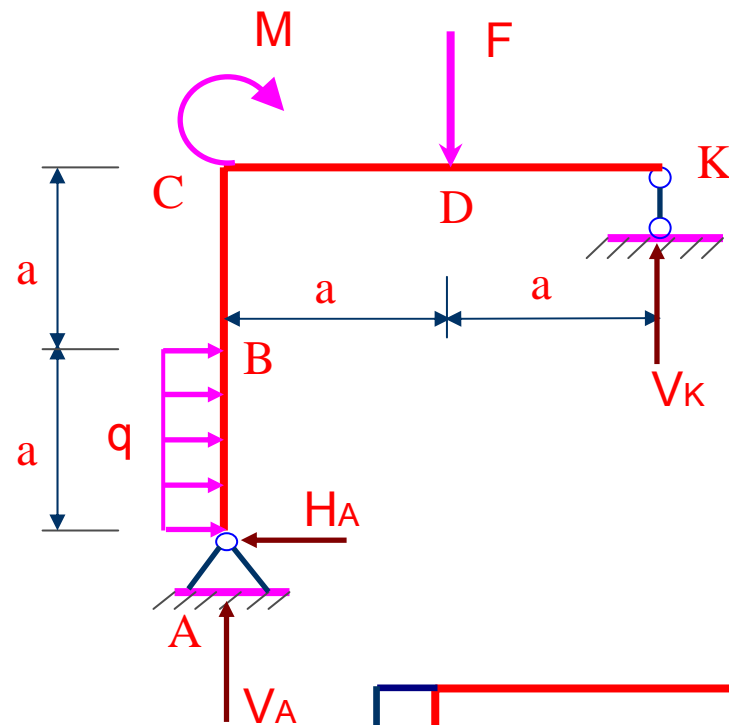
2. Nhận xét dạng biểu đồ các thành phần ứng lực trên từng đoạn:

+ Biểu đồ lực dọc:

Bằng phương pháp mặt cắt dễ dàng xác định:

$$N_{AB} = N_{BC} = -V_A = -\frac{qa}{4}$$

$$N_{DK} = N_{CD} = 0$$



Ví dụ 1.6 (3)

Đoạn AB: $q = \text{const}$

⇒ Biểu đồ Q bậc nhất

⇒ Cần xác định: $Q_A = H_A = qa$

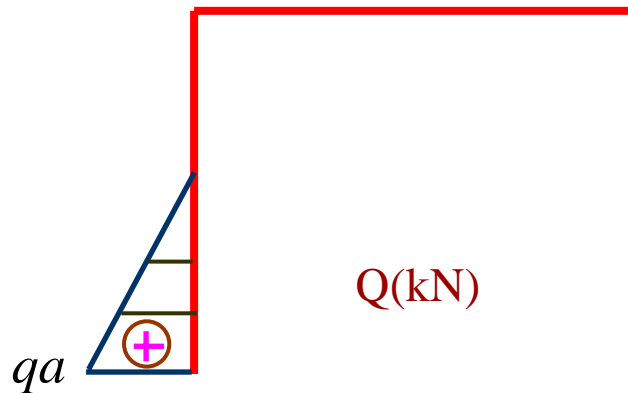
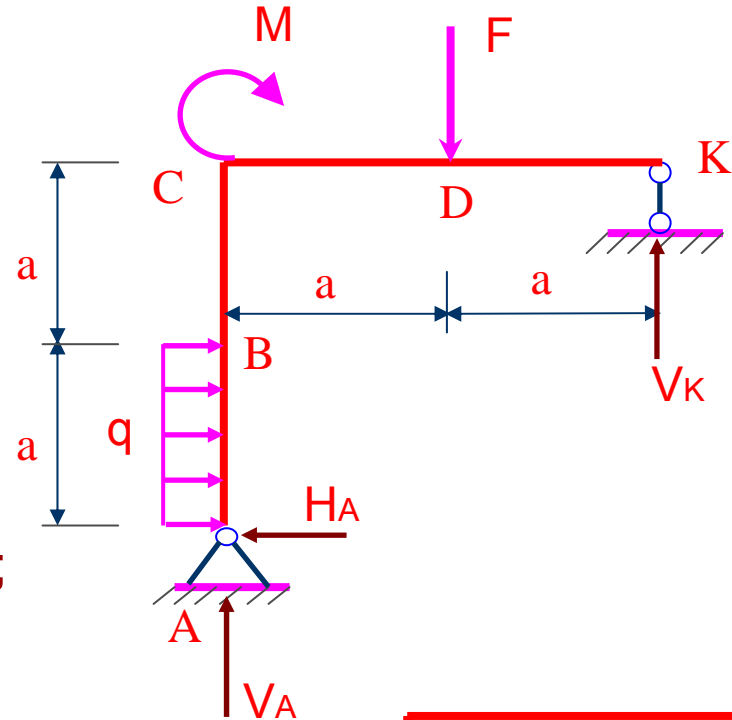
⇒ $Q_B = Q_A + S_q = qa + (-q) \cdot a = 0$

⇒ Biểu đồ M bậc hai

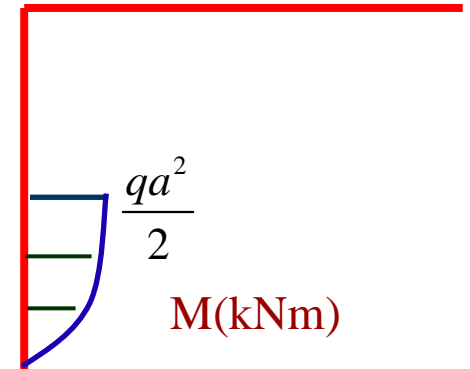
⇒ Cần xác định: $M_A = 0$

⇒ $M_B = M_A + S_Q = 0 + qa \cdot a/2 = qa^2/2$;

⇒ tại B có $Q = 0 \Rightarrow M_{\text{max}} = qa^2/2$



Q(kN)



M(kNm)

Ví dụ 1.6 (4)

Đoạn BC: $q=0$

⇒ Biểu đồ $Q=const$

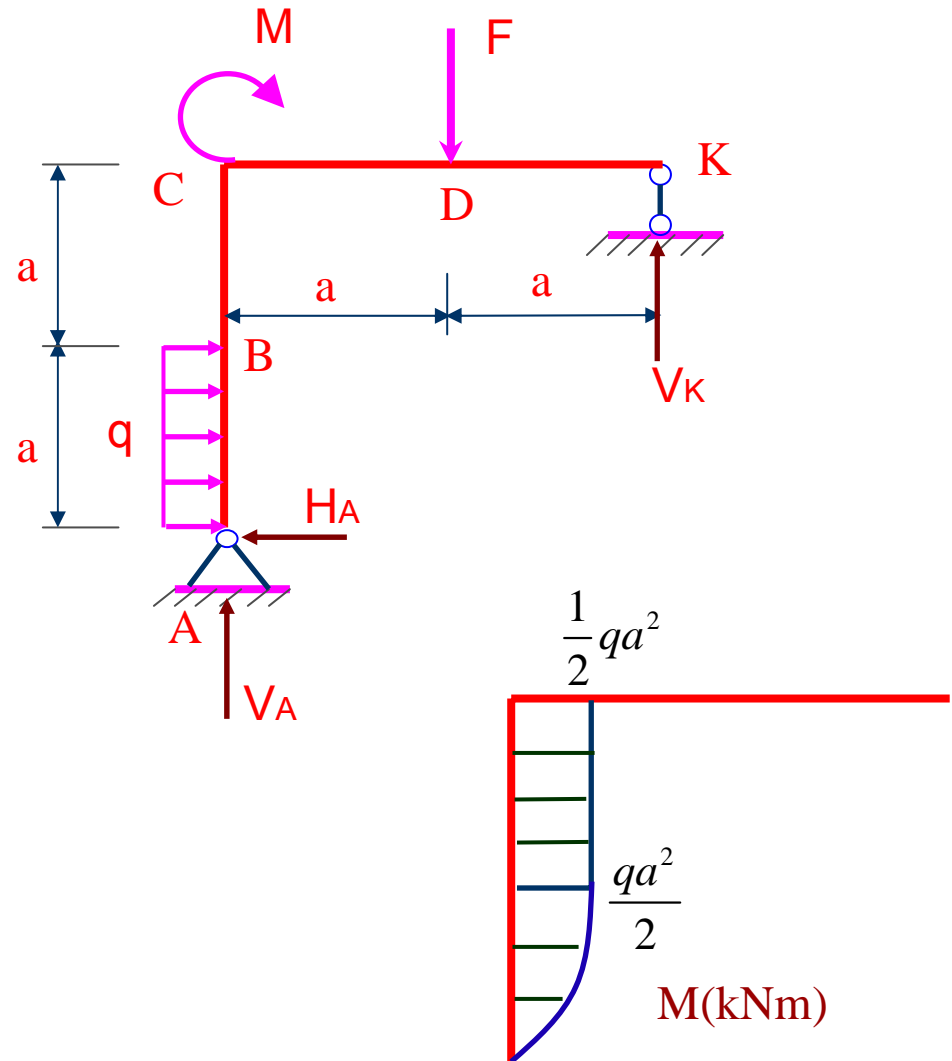
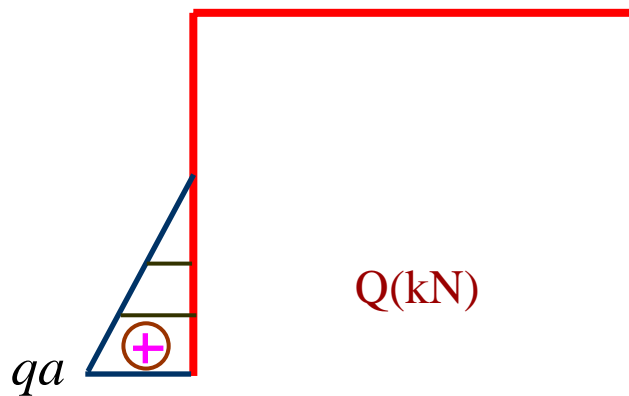
⇒ Cần xác định $Q_B=0$

⇒ Biểu đồ M bậc nhất

⇒ Cần xác định

$$M_B = M_B^{(AB)} = qa^2 / 2;$$

$$M_C = M_B + S_Q = qa^2 / 2 + 0 = qa^2 / 2$$



Ví dụ 1.6 (5)

Trên đoạn CD: $q=0$

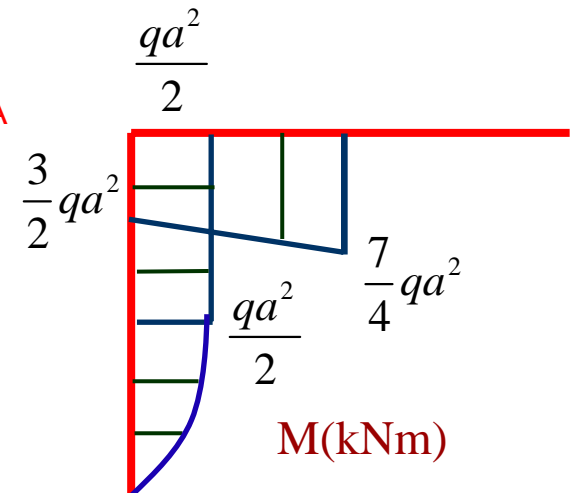
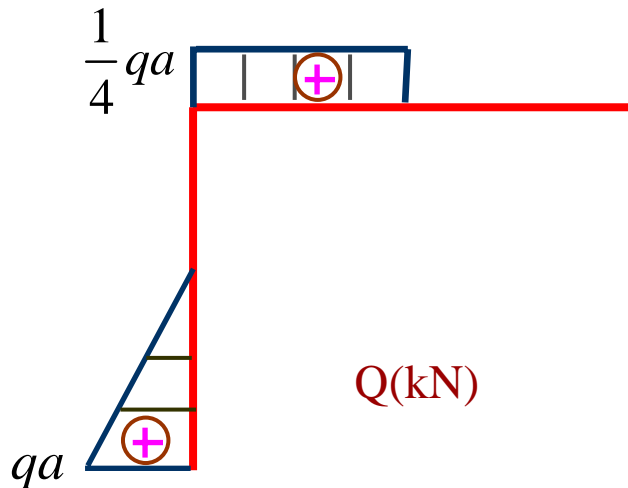
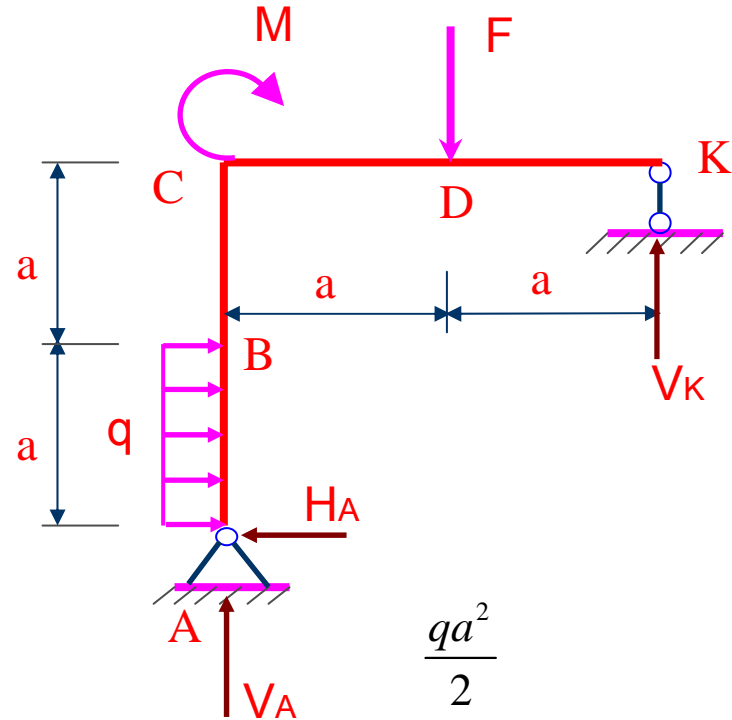
⇒ Biểu đồ $Q=\text{const} \Rightarrow$ Cần xác định

$$Q_D = F - V_K = 2qa - \frac{7}{4}qa = \frac{1}{4}qa$$

⇒ Biểu đồ M bậc nhất ⇒ Cần xác định

$$M_D = V_K a = \frac{7}{4}qa^2$$

$$M_C = M_D - S_Q = \frac{7}{4}qa^2 - \left(\frac{1}{4}qa\right)a = \frac{3}{2}qa^2$$



Ví dụ 1.6 (6)

Trên đoạn DK: $q=0$

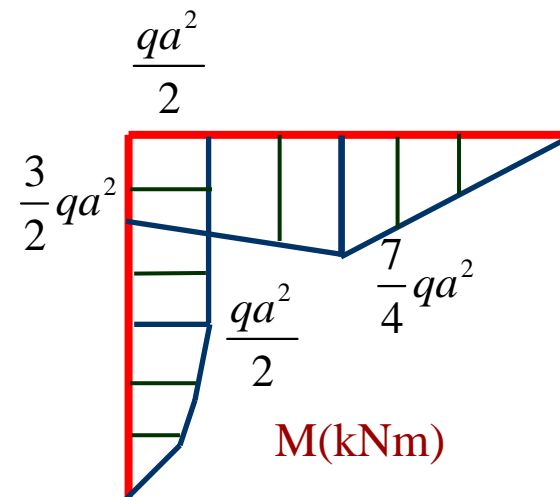
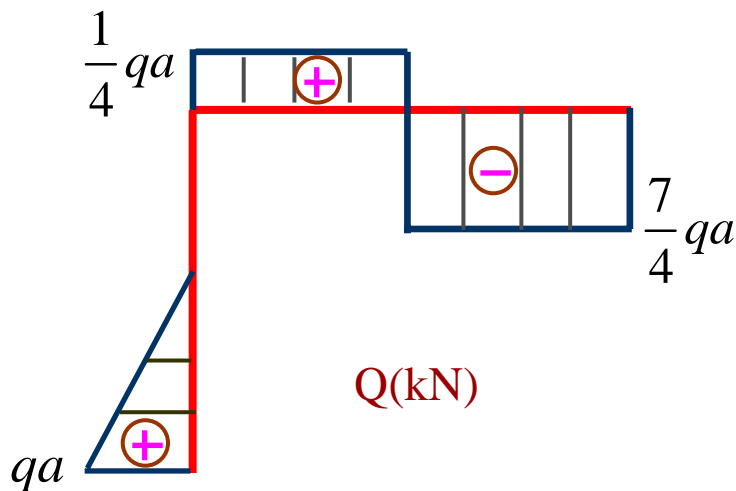
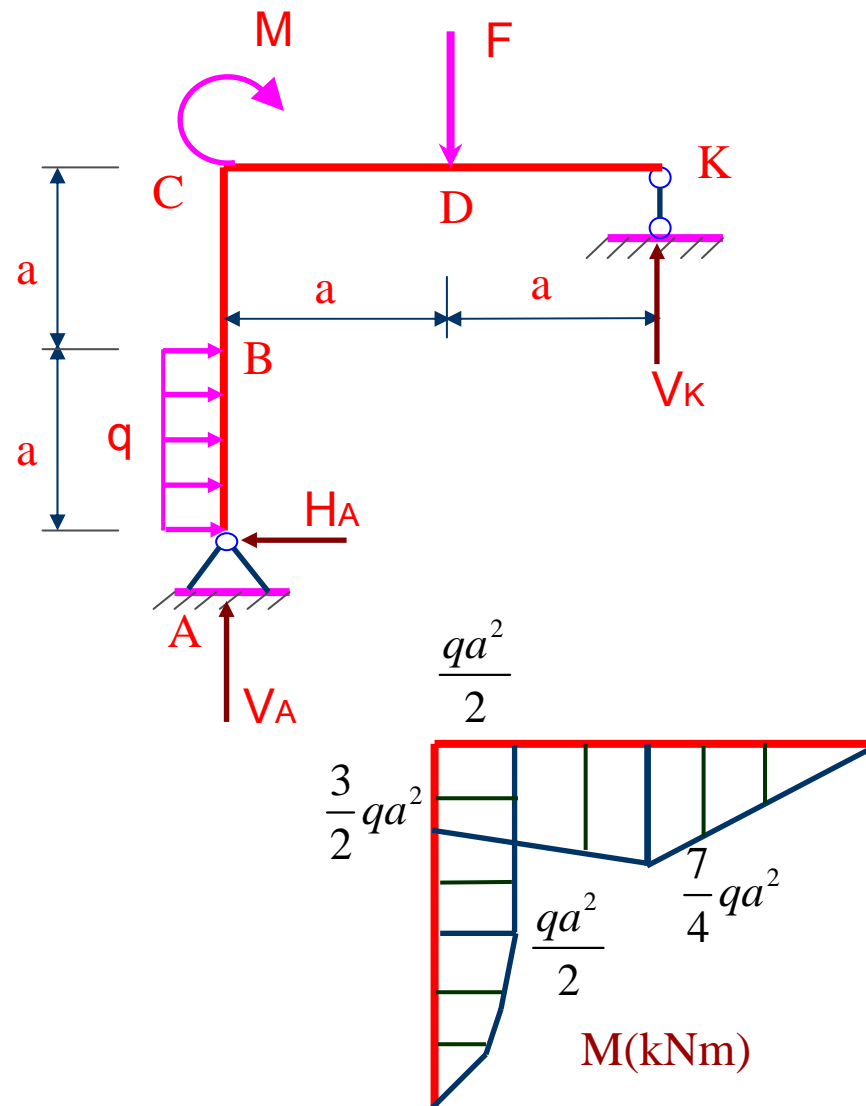
⇒ Biểu đồ $Q=\text{const} \Rightarrow$ Cần xác định

$$Q_K = -V_K = -\frac{7}{4}qa$$

⇒ Biểu đồ M bậc nhất ⇒ Cần xác định

$$M_K = 0$$

$$M_D = M_D^{(CD)} = \frac{7}{4}qa^2$$



Ví dụ 1.6 (7)

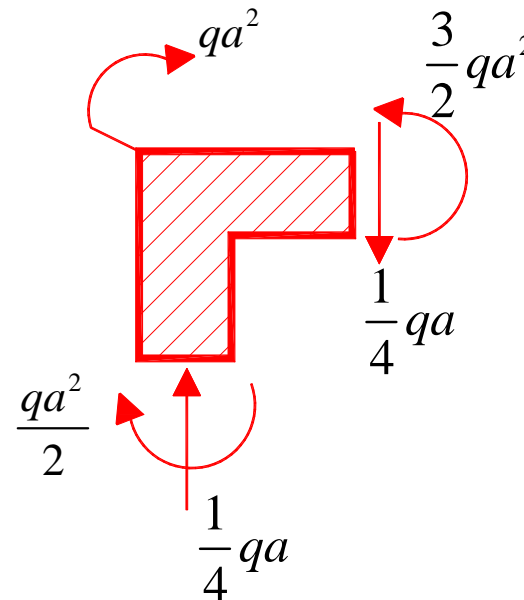
4. Xét cân bằng các mắt khung

Tại mắt C, biểu diễn các ngoại lực, các ứng lực trên hai mặt cắt ngay sát C thuộc đoạn BC và CD theo chiều thực (căn cứ vào các biểu đồ). Kiểm tra điều kiện cân bằng: Tại mắt khung tổng nội lực và ngoại lực bằng không.

$$\sum X = 0$$

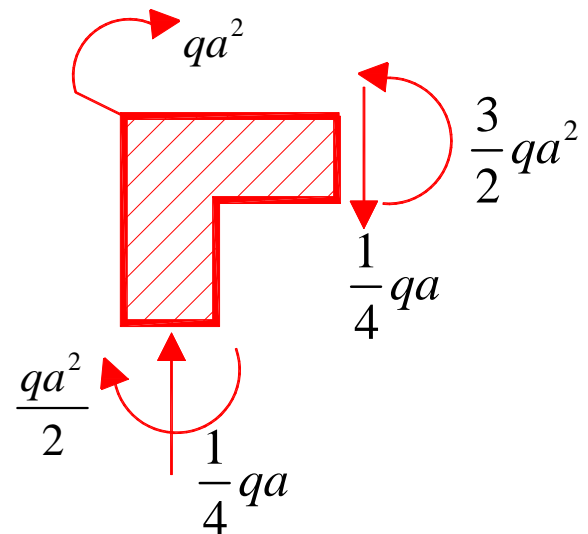
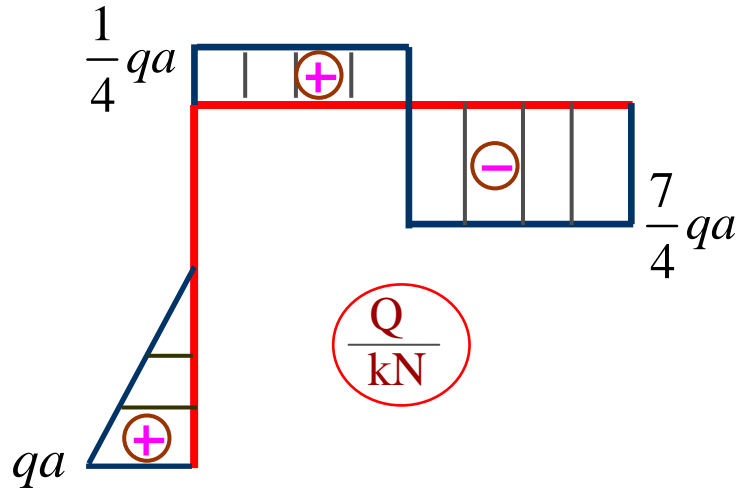
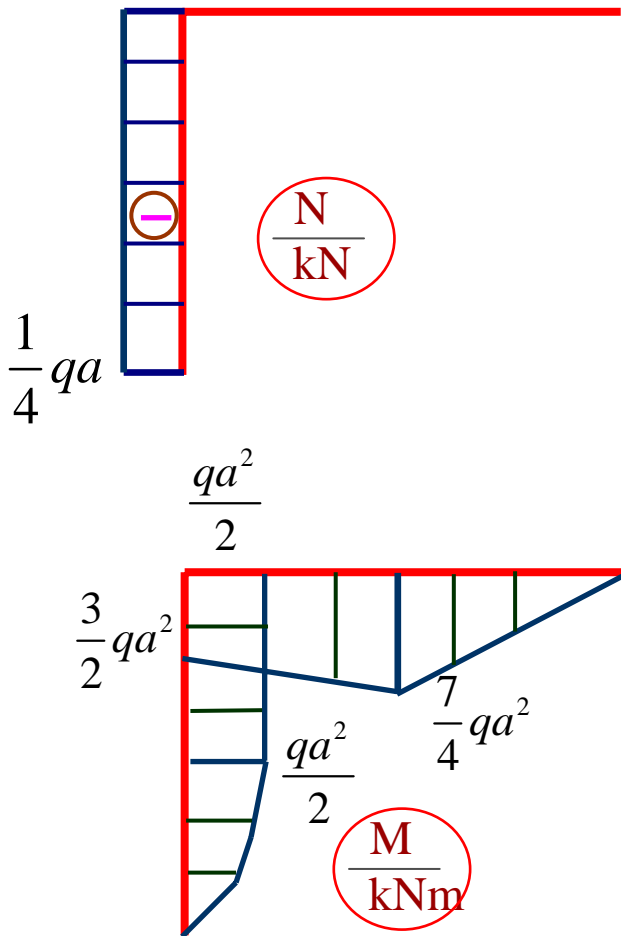
$$\sum Y = 0$$

$$\sum M_C = 0$$



Ví dụ 1.6 (8)

Biểu đồ nội lực của khung



4.7. Biểu đồ ứng lực thanh cong

- ❖ **Thanh cong: trục thanh là đường cong phẳng, ngoại lực nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh**
- ❖ **Dùng phương pháp mặt cắt để xác định các thành phần ứng lực trên mặt cắt ngang**

Ví dụ 1.7 (1)

Ví dụ 2: Vẽ biểu đồ nội lực cho thanh cong như hình bên. Biết: $R=2m$, $M_1=5kNm$, $M_2=10kNm$, $P_1=15kN$.

Bài giải:

1) Tính phản lực tại gối A và E

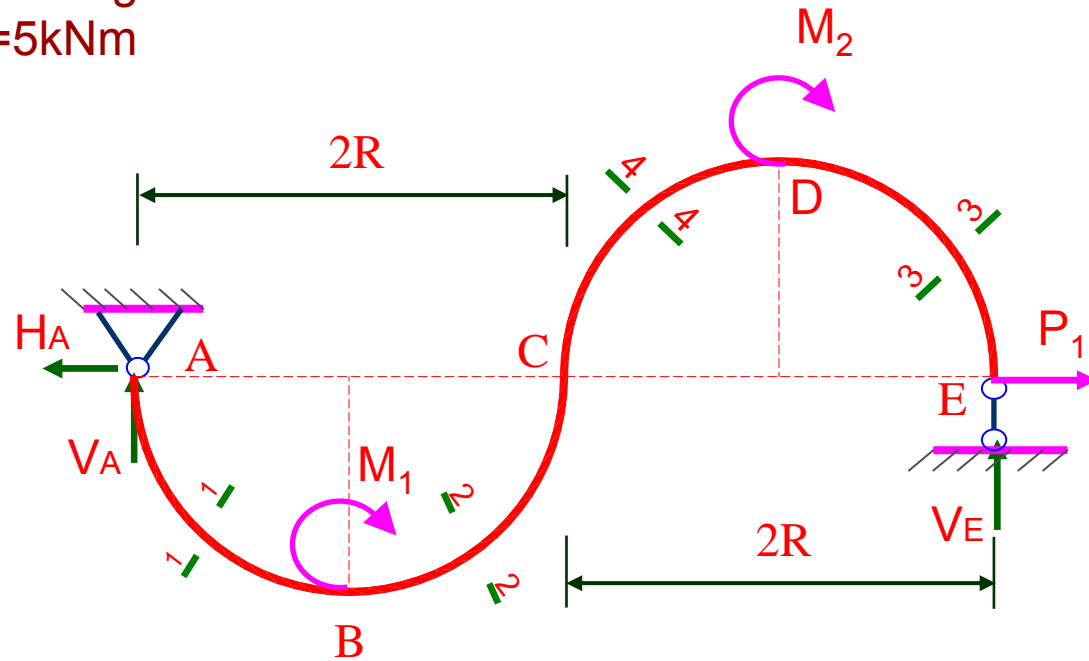
Ta có:

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = P_1 = 15kN$$

$$\sum M_A = M_1 + M_2 - V_E \cdot 4R = 0$$

$$V_E = \frac{M_1 + M_2}{4R} = \frac{10 + 5}{8} = 1,875(kN)$$

$$V_A = V_E = 1,875kN$$



Ví dụ 1.7 (2)

2) Chia thành thành 4 đoạn

a. Xét đoạn AB:

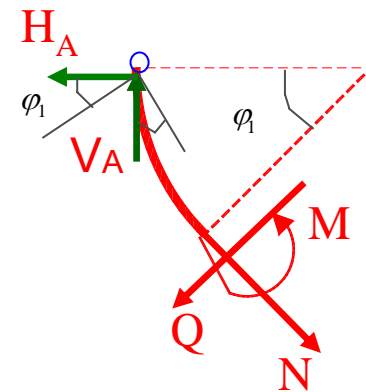
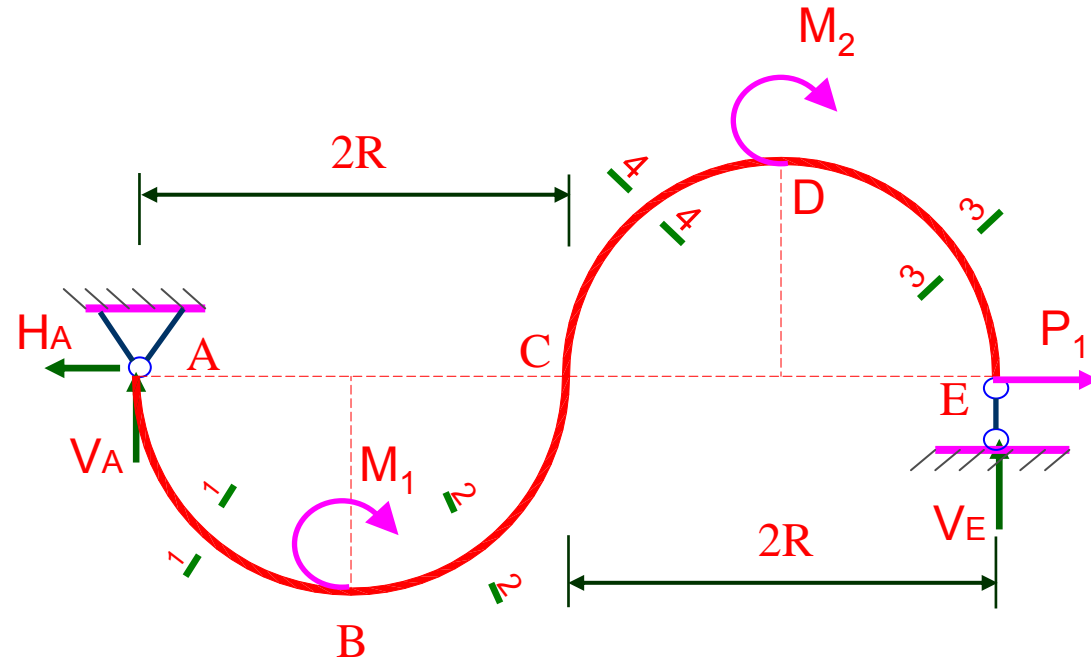
Dùng mặt cắt 1 – 1, ta có:

$$0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} N &= -V_A \cdot \cos \varphi_1 + H_A \cdot \sin \varphi_1 \\ &= -1,875 \cos \varphi_1 + 15 \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

$$Q = -V_A \cdot \sin \varphi_1 - H_A \cdot \cos \varphi_1 = -1,875 \sin \varphi_1 - 15 \cos \varphi_1$$

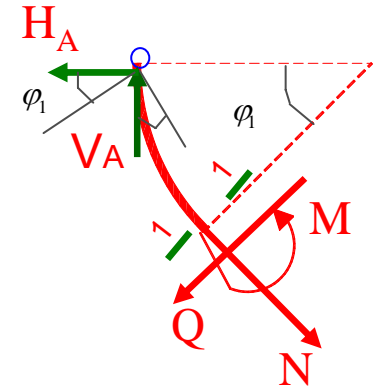
$$\begin{aligned} M &= -V_A \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi_1) - R \cdot H_A \cdot \sin \varphi_1 \\ \Rightarrow M &= 3,75 \cdot \cos \varphi_1 - 30 \sin \varphi_1 - 3,75 \end{aligned}$$



Ví dụ 1.7 (3)

Bảng biến thiên:

| | | | | | |
|-------------------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| φ_1 [rad] | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| N [kN] | -1,88 | 5,88 | 9,28 | 12,05 | 15 |
| Q[kN] | -15 | -13,98 | -11,93 | -9,12 | -1,88 |
| M[kNm] | 0 | -15,50 | -22,31 | -27,86 | -33,75 |



b, Xét đoạn BC: $0 \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}$

Ta có (mặt cắt 2-2):

$$N = V_A \cdot \sin \varphi_2 + H_A \cdot \cos \varphi_2 = 1,875 \cdot \sin \varphi_2 + 15 \cdot \cos \varphi_2$$

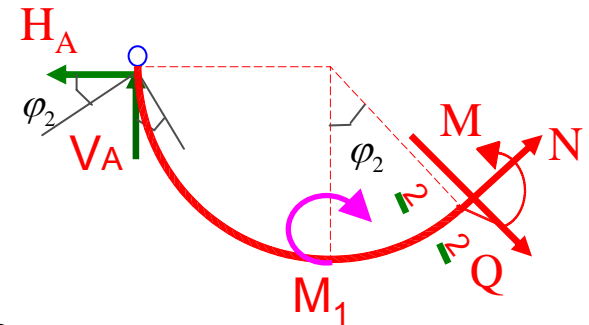
$$Q = -V_A \cos \varphi_2 + H_A \sin \varphi_2 = -1,875 \cos \varphi_2 + 15 \sin \varphi_2$$

$$Q = 0 \Rightarrow \varphi_2 = 7,13^\circ$$

$$M = -V_A R (1 + \sin \varphi_2) + M_1 - H_A R \cos \varphi_2$$

$$M = -3,75 - 3,75 \sin \varphi_2 - 30 \cos \varphi_2 + 5$$

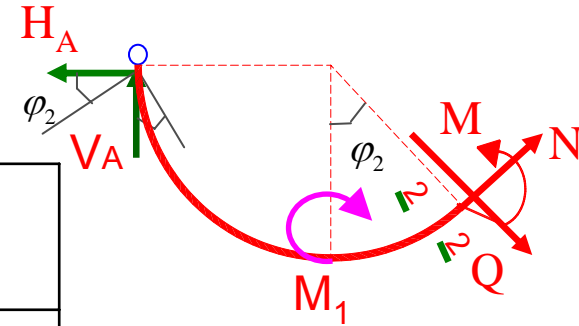
$$M_{\max} = M_{(\varphi_2=7,13^\circ)} = 29 \text{ (kNm)}$$



Ví dụ 1.7 (4)

Bảng biến thiên:

| φ_2 [rad] | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|-------------------|--------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| N [kN] | 15,00 | 13,93 | 11,93 | 9,12 | 1,88 |
| Q[kN] | -1,88 | 5,88 | 9,28 | 12,05 | 15 |
| M[kNm] | -28,75 | -26,61 | -22,61 | -17,00 | -2,5 |



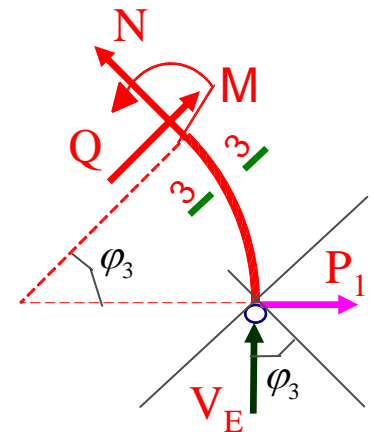
c, Xét đoạn ED: $0 \leq \varphi_3 \leq \frac{\pi}{2}$

Ta có:

$$N = -V_E \cdot \cos \varphi_3 + P_1 \cdot \sin \varphi_3 = -1,875 \cdot \cos \varphi_3 + 15 \cdot \sin \varphi_3$$

$$Q = -V_E \cdot \sin \varphi_3 - P_1 \cdot \cos \varphi_3 = -1,875 \cdot \sin \varphi_3 - 15 \cdot \cos \varphi_3$$

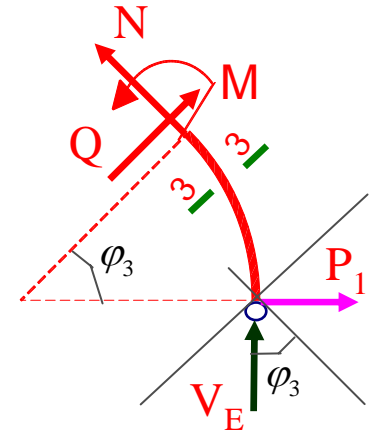
$$\begin{aligned} M &= -V_E \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi_3) - R \cdot P_1 \cdot \sin \varphi_3 \\ &= -3,75 \cdot \cos \varphi_3 - 30 \cdot \sin \varphi_3 - 3,75 \end{aligned}$$



Ví dụ 1.7 (5)

Bảng biến thiên:

| φ_3 [rad] | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|-------------------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| N [kN] | -1,88 | 5,88 | 9,28 | 12,05 | 15,00 |
| Q[kN] | 15,00 | 12,05 | 9,28 | 5,88 | -1,88 |
| M[kNm] | 0 | -15,5 | -22,31 | -27,86 | -33,75 |



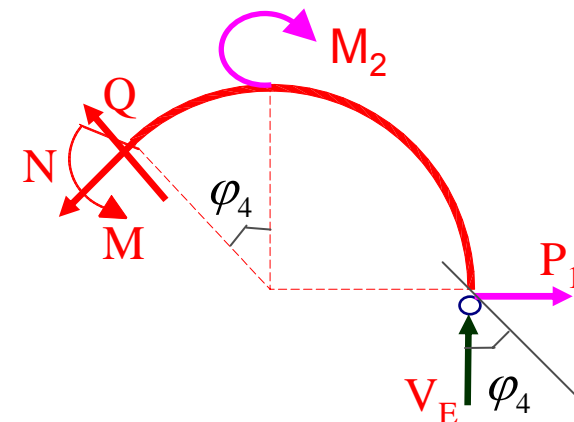
d, Xét đoạn CD: $0 \leq \varphi_4 \leq \frac{\pi}{2}$

Ta có:

$$N = V_E \cdot \sin \varphi_4 + P_1 \cdot \cos \varphi_4 = 1,875 \cdot \sin \varphi_4 + 15 \cdot \cos \varphi_4$$

$$Q = -V_E \cdot \cos \varphi_4 + P_1 \cdot \sin \varphi_4 = -1,875 \cdot \cos \varphi_4 + 15 \cdot \sin \varphi_4$$

$$Q = 0 \Rightarrow \varphi_4 = 7,13^\circ$$



Ví dụ 1.7 (7)

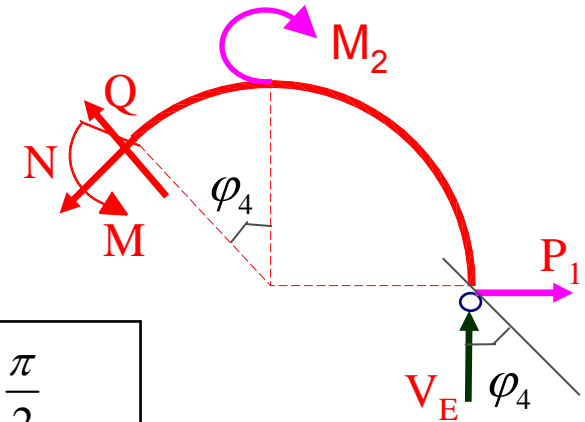
$$M = -V_E \cdot R \cdot (1 + \sin \varphi_4) + M_2 - P_1 R \cos \varphi_4$$

$$= -3.75 - 3.75 \sin \varphi_4 - 30 \cdot \cos \varphi_4 + 10$$

$$M_{\max} = M_{(\varphi_4 = 7,13^\circ)} = 24 \text{ (kNm)}$$

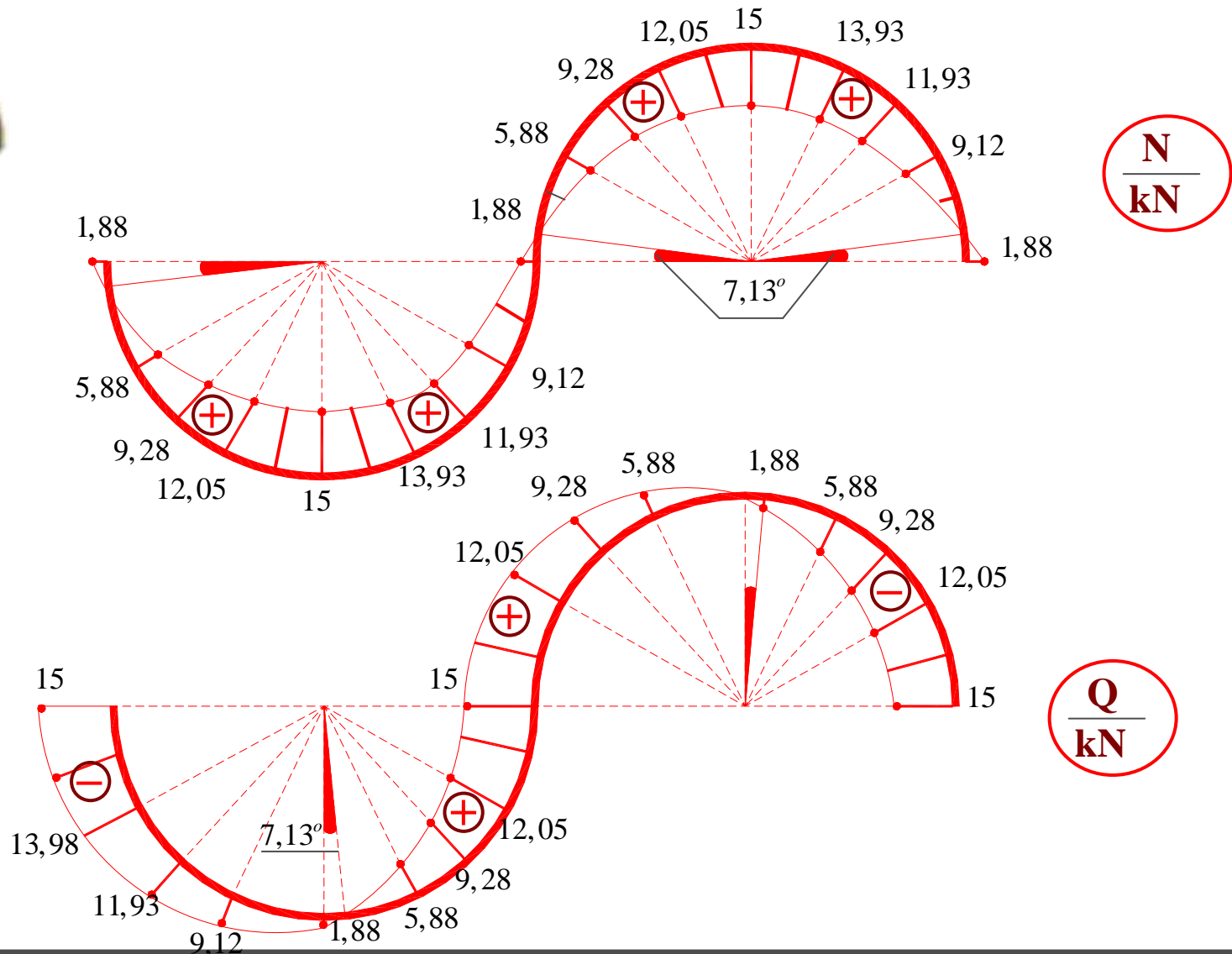
Bảng biến thiên:

| φ_4 [rad] | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|-------------------|--------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| N [kN] | 15,00 | 13,93 | 11,93 | 9,12 | 1,88 |
| Q [kN] | -1,88 | 5,88 | 9,28 | 12,05 | 15,00 |
| M [kNm] | -23,75 | -21,61 | -17,61 | -12,00 | 2,50 |

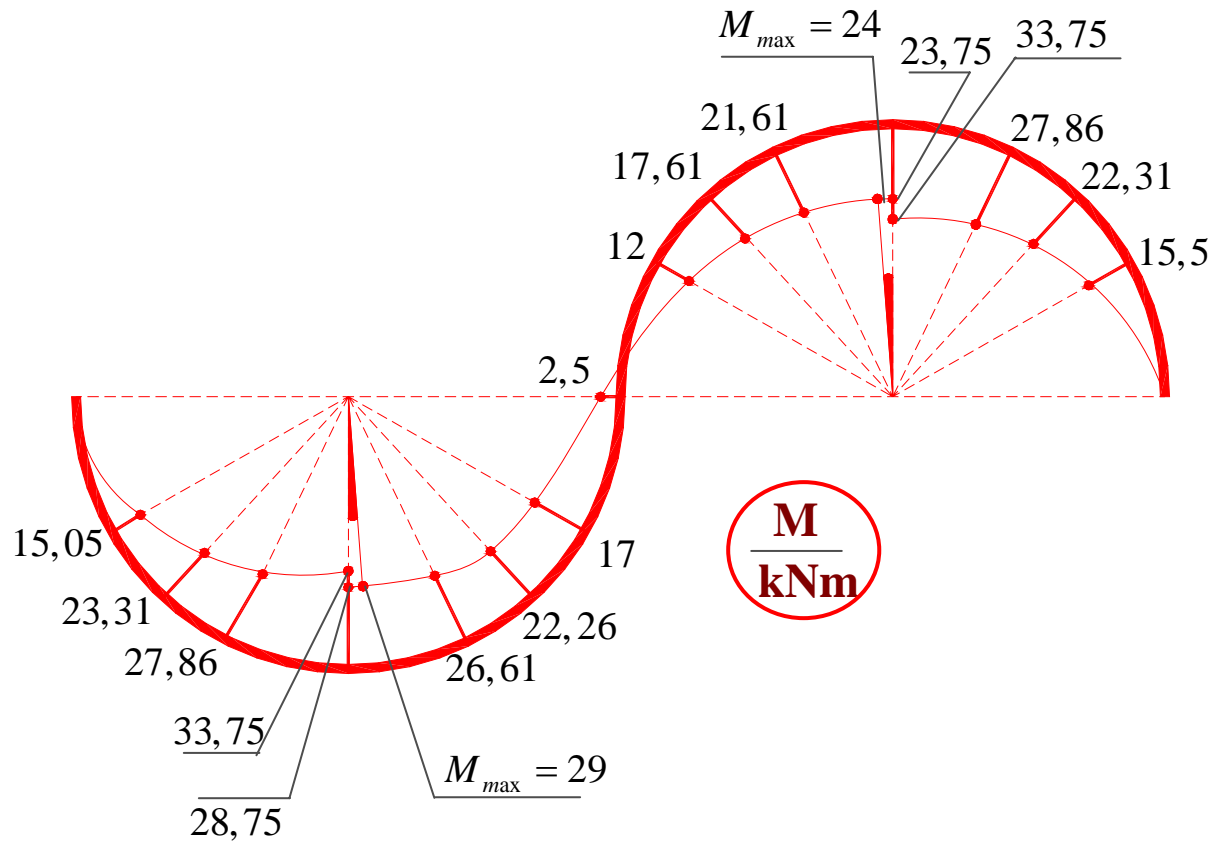


3, Biểu đồ nội lực:

Ví dụ 1.7 (8)



Ví dụ 1.7 (9)



4. Câu hỏi???





Thank you for your attention

E- mail:
tpnt2002@yahoo.com